

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

KØB. UTH. Diss. 10/5 1924

BEREGNING AF PÆLEVÆRKER

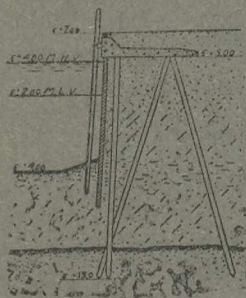
ANALYTISK UNDERSØGELSE

AF

CHR. NØKKENTVED

CAND. POLYT., M. ING. F.,

INGENIØR I FIRMAET CHRISTIANI & NIELSEN



I KOMMISSION HOS G. E. C. GAD
KØBENHAVN — MCMXXIV

BEREGNING AF PÆLEVÆRKER

Side 73, Linie 11 f. o., $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{s_2} \cdot \frac{4n}{1+n^2}$, læs: $\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{EF}{s_2} \cdot \frac{4}{1+n^2}$.

- » 73. I Formlerne for P_1 , P_2 og P_3 skal Q og H ombyttes med Q_z og Q_x .
- » 136. Det anførte Bevis for, at alle de til en bestemt Pæl svarende parallelle Nulakser falder sammen i een Linie, gælder kun for de Pæle, for hvilke Relationen (116 b) er opfyldt.

BEREGNING AF PÆLEVÆRKER

Denne Afhandling er af Den polytekniske Lærestalts Lærerraad efter Indstilling af Censorerne Professor, Dr. A. Ostensfeld og Professor G. Schönweller antaget til at forsvares for den tekniske Doktorgrad.

Forsvaret finder Sted den 10. Maj 1924 Kl. 2 i Lærestaltens Festsal.

Den polytekniske Lærestalt

København, den 25. September 1923.

*P. O. PEDERSEN,
Direktør.*

*M. C. Harding,
Inspektør.*

Afhandlingen blev indsendt den 12. Maj 1923

b

BEREGNING AF PÆLEVÆRKER

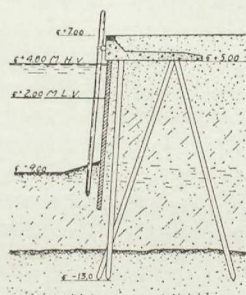
ANALYTISK UNDERSØGELSE

AF

CHR. NØKKENTVED

CAND. POLYT., M. ING. F.,

INGENIØR I FIRMAET CHRISTIANI & NIELSEN



I KOMMISSION HOS G. E. C. GAD
KØBENHAVN — MCMXXIV

Copyright, 1924, by Chr. Nøkkentved

Printed in Denmark

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & Co. • IVAR JANZEN

INDHOLDSFORTEGNELSE.

Indledning	Side 9
------------------	-----------

FØRSTE AFSNIT.

Plane Pælegrupper.

I. Grundlæggende Begreber.	
§ 1: Pæles Bæreevne	41
§ 2: Pæles Indspænding	43
§ 3: Plane Pælegrupper	45
II. Pælegrupper med Pæle, der er simpelt understøttede foroven og forneden.	
§ 4: Sammenhæng mellem Paavirkning og Drejningspunkt; Inertimoment	47
§ 5: Pæletrykkene	51
§ 6: Hovedakserne	53
§ 7: Drejningspunktets Beliggenhed	55
§ 8: Farligste Belastning for en Pæl; Pælegrupper, hvor Pælene ikke kan tage Træk	57
§ 9: Almindelige Bemærkninger	61
§ 10: Specielle Tilfælde	62
§ 11: Eksempler	69
III. Pælegrupper med Pæle, der er indspændt i Bunden, men simpelt understøttede i Pillen.	
§ 12: Definition af den tænkte Pæl	74
§ 13: Sammenhæng mellem Paavirkninger og Drejningspunkt; Inertimoment	75
§ 14: Pæletrykkene	77
§ 15: Drejningspunktets Beliggenhed. Hovedakser	78
§ 16: Pilleunderkantens Form	80
§ 17: Almindelige Bemærkninger	81
§ 18: Specielle Tilfælde	82
§ 19: Eksempler	86
IV. Pælegrupper med Pæle, der er indspændte foroven og forneden.	
§ 20: Definition af den tænkte Pæl	93
§ 21: Sammenhæng mellem Paavirkninger og Drejningspunkt; Inertimoment	94
§ 22: Pæletrykkene	97

	Side
§ 23: Drejningspunktets Beliggenhed; Hovedakser	98
§ 24: Pilleunderkantens Form	100
§ 25: Specielle Tilfælde	100
§ 26: Eksempler	103

ANDET AFSNIT.

Rumlige Pælegrupper.

I. Grundlæggende Begreber.	
§ 27:	110
§ 28: Almindelig Teori for en uendelig stiv, elastisk understøttet Pille	112
II. Pælegrupper, hvis Pæle er simpelt understøttet foroven og forneden.	
§ 29: Pælenes Hældningsvinkler	122
§ 30: Hovedakserne	124
§ 31: Pæletrykkene	128
§ 32: Farligste Belastning for en Pæl	135
§ 33: Specielle Tilfælde	138
§ 34: Eksempler	143
III. Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt forneden, men simpelt understøttet foroven.	
§ 35: Definition af tænkte Pæle	150
§ 36: De tænkte Pæles Hældningsvinkler	151
§ 37: Hovedakserne	154
§ 38: Pæletrykkene	156
§ 39: Specielle Tilfælde	160
§ 40: Eksempel	162
IV. Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden.	
§ 41: Definition af tænkte Pæle	166
§ 42: De tænkte Pæles Hældningsvinkler	169
§ 43: Hovedakserne	170
§ 44: Pæletrykkene	170
§ 45: Specielle Tilfælde	173
§ 46: Eksempel	175

TREDIE AFSNIT.

Plane Pælegrupper som specielt Tilfælde af rumlige Pælegrupper.

I. Almindelig Teori.	
§ 47: Definition	179
II. Piller, hvis Pæle er simpelt understøttet foroven og forneden.	
§ 48: Sammenhæng mellem Kraft og Drejningspunkt	184
§ 49: Pæletrykkene	185
III. Piller, hvis Pæle er indspændt forneden, men simpelt understøttet foroven.	
§ 50: Tænkte Pæle	186
§ 51: Sammenhæng mellem Kraft og Drejningspunkt	187
§ 52: Pæletrykkene	188

	Side
IV. Piller, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden.	
§ 53: Tænkte Pæle	190
§ 54: Sammenhæng mellem Kraft og Drejningspunkt	190
§ 55: Pæletrykkene	192
§ 56: Eksempel	194
V. Specielle Tilfælde.	
§ 57: Pælegruppen er symmetrisk om en Plan	196
§ 58: Pælegruppen er symmetrisk om to paa hinanden vinkelrette Planer, d. v. s. at Pælegruppen er dobbelt plan	196
§ 59: Alle Pælene er parallelle	202
VI. Eksempler.	
§ 60:	207

FJERDE AFSNIT.

Sammendrag til praktisk Anvendelse.

I. Plane Pælegrupper.	
§ 61:	214
§ 62: Pælegrupper, hvis Pæle er simpelt understøttet foroven og forneden	214
§ 63: Specielle Tilfælde	217
§ 64: Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt forneden, simpelt un- derstøttet foroven	218
§ 65: Specielle Tilfælde	221
§ 66: Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt baade foroven og for- neden	222
§ 67: Specielle Tilfælde	225
§ 68: Eksempler	226
II. Dobbeltplane, rumlige Pælegrupper.	
§ 69: Grundlæggende Begreber	230
§ 70: Pælenes Hældningsvinkler; tænkte Pæle	231
§ 71: Pæletryk	233
III. Sammenligning mellem ældre Beregningsmaader og eksakt Be- regning, Dimensionering og Tilnærmelsesformler.	
§ 72: Ældre Beregningsmaader	232
§ 73: Dimensionering og Tilnærmelsesformler	238

INDLEDNING.

Lige saa langt tilbage, som vort Kendskab til menneskelig Kultur rækker, kender man til Anvendelse af Pæle; allerede i de gamle asiatiske Kulturer finder man Pælebroer og Træhuse paa Pæle udover Floderne.

Fra denne graa Oldtid ved man dog ikke ret meget om Bygværker; først paa Romernes Tid er Oplysningerne saa fyldige, at man kan danne sig et Billede af Bygningskunsten. Paa dette Omraade som paa saa mange andre var Romerne naaet saa vidt, som man ikke skulde tro det muligt med den Tids Hjælpemidler. Desværre er Træ et saa forgængeligt Materiale, at der kun er faa Ting udført deraf, der er bevaret fra da, men til Gengæld findes der en Del derom i de gamle romerske Skrifter.

Træbroer var kendt længe før Romerne og blev som ovenfor nævnt allerede paa et meget tidligt Tidspunkt udført med Pæle. Romerne byggede mange Træbroer. Saaledes kan anføres, at da Cæsar i Aaret 59 før Kristi Fødsel gik over Rhinen, anlagde han en Træbro, der byggedes i Løbet af 10 Dage. Efter Cæsars Beskrivelse har man senere rekonstrueret denne Bro som vist i Fig. 1.¹⁾

Af Beskrivelsen fremgaar det, at der blev anvendt Rambukke til Nedramningen af Pælene. Ligeledes forstod man allerede den Gang at anvende Skraapæle til at optage de vandrette Kræfter, som Flodens Strøm udøver paa Broen.

Da Romerne begyndte at bygge Broer af Sten, fandt Pæle en anden Anvendelse, nemlig til Fundering selv af svære Bygværker. Hvorvidt

¹⁾ Billedet findes i Merckel: Die Ingenieurtechnik im Alterthum, 1899; fra denne Bog er det meste af det meddelte om Oldtiden taget.

Romerne var de første, der anvendte Pælefundering, er ikke let at afgøre; ganske vist kendte de gamle Asiater som nævnt at bygge Huse paa Træpæle, men det var kun i Forbindelse med Træoverbygning.

Bygningskunsten i det gamle Rom naaede sit Højdepunkt under Kejser Trajans Regering, og fra hans Tid har man flere Steder fundet Broer, der er funderet paa Pæle. Saaledes fandt man ved en Udgravning, der blev foretaget for en ca. 100 Aar siden af Donaubroen ved Belgrad, Egepæle, der iøvrigt var fuldstændig vel bevarede.

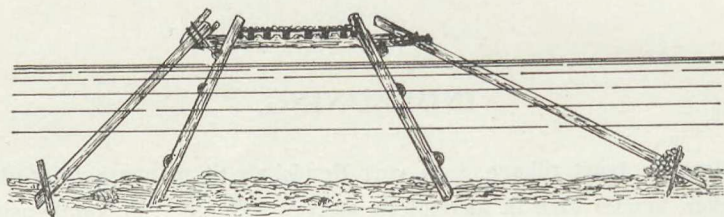


Fig. 1.

Foruden til de her nævnte to Anvendelser, i Træbroer og til Fundering, brugte Romerne ogsaa Pæle til Indfatning for Jordfyld. Saaledes fandtes der i Nærheden af Kejser Hadrians Gravmæle, det nuværende Engelsborg, en Landingsbro, hvor alle de Bygningsmaterialer, særlig Marmor, som de romerske Kejsere anvendte, blev losset. Denne Bro stod paa et Fundament, der var 66 m bredt og som indfattedes til begge Sider af to Rækker Palisader, der i en indbyrdes Afstand af 5 m var rammet af tilspidsede Pæle; Mellemlummet mellem Palisaderne blev udstøbt med Beton, medens Fundamentets 55 m brede Kerne blev udfyldt med Grus, Ler og Brudsten.

Samtidig med Romerrigets Forfald standsedes den Udvikling, der havde fundet Sted indenfor Bygningskunsten, og først sent hen i Middelalderen begynder Udviklingen igen, dennegang udgaaende fra Vest-europa, d. v. s. Frankrig, England, Holland, Tyskland og Skandinavien.

Hvad man i den tidligere Middelalder har haft af Pæleværker, ved man ikke meget om; at man selv i de Tider, da ellers den materielle Kultur stod meget lavt, har kendt til Anvendelse af Pæle, er en given Ting; saaledes har man til Stadighed kendt til at udføre lave Træbolværker, d. v. s. Indfatningsvægge for Jordfyld. Ligeledes har man forstaaet at lave Træpælebroer; i gamle Moser har man fundet tilspidsede Pæle, der menes at stamme fra Aar ca. 1000.

Sikre Meddelelser om Pæleværker har man imidlertid ikke før i det 14. Aarhundrede. Fra det Tidspunkt stammer en Del af de ældste

danske Middelaldersborge, og der var paa det Tidspunkt en Tendens til at lægge dem i saa vaadt og blødt Terræn, at man var nødt til at foretage omfattende Pæleramninger for at sikre Bygningerne. I København og i andre danske Købstæder har man fra samme Tidsalder fundet gamle Træbolværker.

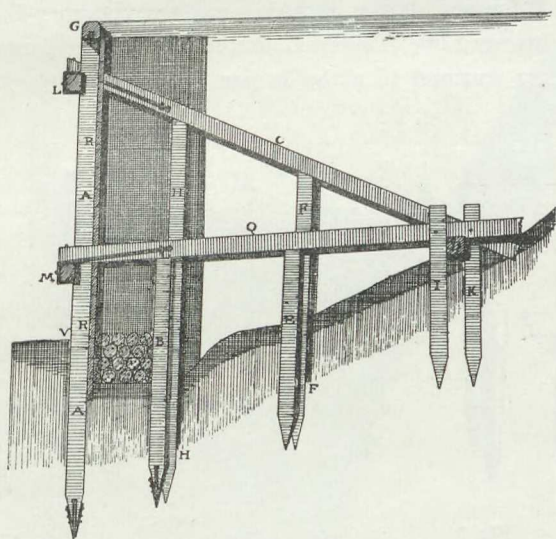


Fig. 2.

Imidlertid naaede man ikke før omkring Aar 1600 udover det, som allerede Romerne havde naaet; da vi fra denne Tidsalder, eller i hvert Fald fra Slutningen af det 17. Aarhundrede, og frem i Tiden har Tegninger og Beskrivelser af udførte Konstruktioner, kan vi ret nøje følge den Udvikling, der fra den Tids Bygningskunst fører frem til Nutidens.²⁾

Fig. 2 viser et Bolværk fra Dunkerque fra omkring Aar 1700.³⁾ Det, der adskiller dette Bolværk fra tidligere Tiders, er Forankringen. Bolværket er udført med Hjærtépæle A og bagvedliggende Plankebeklædning. Foran paa Hjærtépælene er anbragt to vandrette Stykker Tømmer L og M, og til disse er Ankrene C og Q fastgjort. Som vist er der et højere og et lavere Anker, idet det viste Bolværk svarer til ca. 7

²⁾ Da den efterfølgende Beskrivelse af Pæleværkers Historie kun er bygget paa Arkiv- og Biblioteksstudier i København, gør den ikke i nogensomhelst Grad Fordring paa at være fuldstændig.

³⁾ Belidor: *Architecture hydraulique*, III, 1750.

m's Højde. Ankrene, der bæres af Pælene B, E, H og F, er bagtil fæstet til et langsgaaende Stykke Tømmer D, der danner Forankringen.

Fig. 3 viser et Bolværk i Hamburg fra Slutningen af det 18. Aarhundrede.⁴⁾ Det viser en Overgangsform fra de gamle uforankrede Bolværker til de nyere med Forankring. For at undgaa at skulle forny de forgængelige Trækonstruktioner i en altfor gennemgribende Grad er Pælene A foroven derfor afdækket med en Hammer B, der ligger lige under laveste Ebbe; Pælene C, der er rammet lige foran Bolværksflugten, tjener nærmest til at holde paa Jordfylden bagved. Ovenpaa

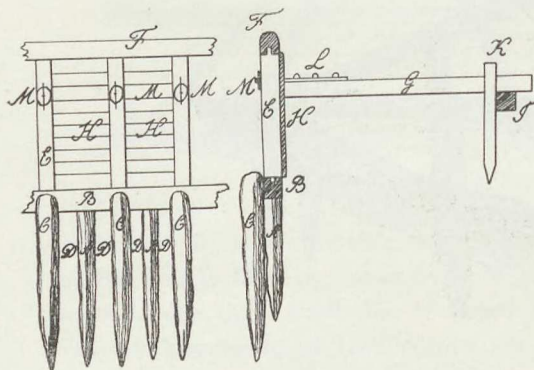


Fig. 3.

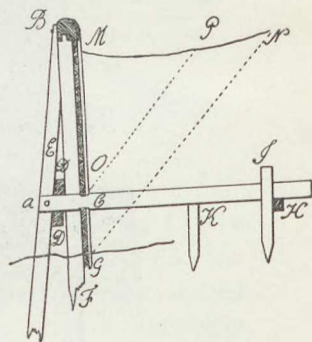


Fig. 4.

Hammeren B er anbragt lodrette Tømmerstykker E med Bagklædning H; E er ved Ankrene G forankret i det langsgaaende Stykke Tømmer J; ved denne Anordning behøvede man kun at forny Bolværket ned til Hammeren B.

De københavnske Bolværker fra samme Tid er vist i Fig. 4 (se iøvrigt ogsaa Fig. 6). De bestaar af Hjærtépælene F, Plankeklædningen G og Spidsplankerne O. Hjærtépælene er ved Ankrene C forankret til det langsgaaende Tømmer H og til Ankerpælen J. Det ejendommeligeste ved denne Bolværkstype er de viste Skraapæle E, de saakaldte Stormpæle. Stormpælene, der anbringes for hver 3. Hjærtépæl (svarende til et Bolværk paa 10 Fods Højde) og Hjærtépælene udgør i Virkeligheden en Pælebuk og er saaledes en Forløber for de Pælebukke, der først omkring Aar 1850 bliver almindelige som Forankring, men som da anbringes helt tilbage i Jordfylden. At disse Pæle virke-

⁴⁾ Erling Møller: Nogle Anmærkninger Havnebygningsvæsenet vedkommende med Hensyn paa København, 1800.

lig optraadte som Pælebukke fremgaar af følgende Udtalelse af Erling Møller: »Stormpæle forkastes af erfarne Hydrotekter, som Brahms, fordi de ved Jordens Tryk imod Bolværket hjælper til at hæve de egentlige Bolværkspæle.«

Stormpælene findes i de danske Bolværker indtil omkring Aar 1850; de er vistnok af speciel østersøisk Konstruktion, ligesom de se-

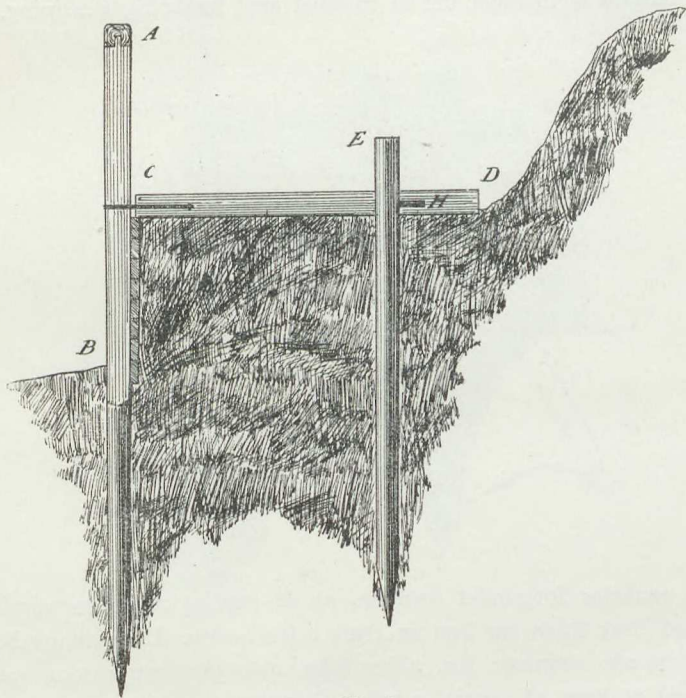


Fig. 5.

nere fremkomne Pælebukke væsentligst anvendes i Østersø- og Vesterhavshavne.

Medens man tidligere kun forankrede i langsgaaende Tømmer, begynder man i Slutningen af det 18. Aarhundrede at forankre i Ankerpæle; et Eksempel herpaa er vist i Fig. 5, der stammer fra Aar 1805⁵⁾ (se ogsaa Fig. 6).

Fælles for begge Forankringsmaader er, at det er det passive Jordtryk, der optager de vandrette Kræfter. I Princippet anvendes begge Konstruktioner endnu. Saaledes svarer den meget moderne Konstruktion, hvor man forankrer i Betonplader, der er anbragt saa langt til-

⁵⁾ J. A. Eytelwein: Praktische Anweisung zur Wasserbaukunst, 1805.

bage, at det passive Jordtryk faar sin fulde Styrke, til Konstruktionen med langsgaaende Tømmer. Naar der nu om Stunder anvendes Ankerpæle, forsynes disse i Almindelighed med en langsgaaende Brædebeklædning, hvorved det passive Jordtryk forøges væsentligt.

Den nu til Dags saa almindelige Forankring med Pælebukke kendes først omkring Aar 1850. En Pælebuk kan karakteriseres derved, at den bestaar af to Pæle, der er rammet med forskellig Hældning, og

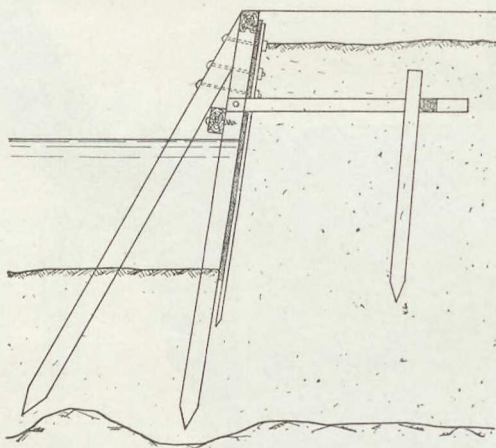


Fig. 6.

som er saaledes forbundet foroven, at de kan overføre en vandret Kraft ved Tryk i den ene Pæl og Træk i den anden. Hvor denne Forankringsmaade stammer fra, vides ikke, men den synes som ovenfor nævnt at være af speciel nordisk Oprindelse.

De første Pælebukke, man kender, er de før omtalte Stormpæle, der sammen med Bolværkets Hjærtépæle virkede som Pælebukke. At denne Virkning ikke direkte tilsigtedes synes at fremgaa for det første af den ovenfor citerede Udtalelse af Erling Møller og for det andet deraf, at Forbindelsen mellem Pælene kun bestod af en Bolt. Derimod ser man i et Bolværk, som 1767 blev bygget paa Christansø ved Refshalen her i København, at Stormpæl og Hjærtépæl er forbundet baade med Bolte og Kile, saaledes at man her har en fuldt udformet Pælebuk. Bolværket er vist i Fig 6.⁶⁾

En Forløber for de senere Pælebukke har man i en af Eytelwein

⁶⁾ Figuren er taget fra en Tegning, der findes i Ingeniørcorpsets historiske Arkiv.

angiven Forankring med en Stræber fra Ankerpæl til Hjærtépæl, se Fig. 7.⁵⁾ Den samme Konstruktion angiver Hagen i 1844.⁷⁾

Fig. 8 viser det første københavnske Bolværk, hvor der er anvendt Pælebukke til Forankring. Det er udført Aar 1854 af engelske Inge-

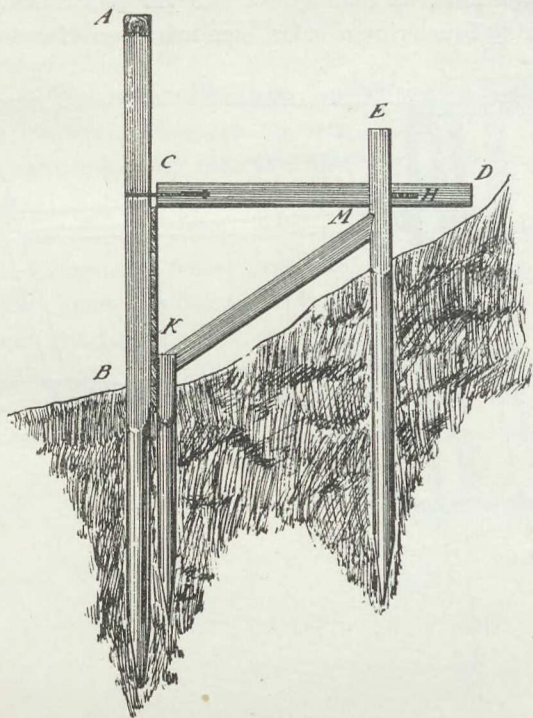


Fig. 7.

niører ved Dokøen paa Orlogsværftet;⁸⁾ der er, som det ses, iøvrigt samtidig anvendt Stormpæle.

Som Indfatningsvægge for Jordfyld har man foruden Træbolværker fra Oldtidens Dage kendt Kajmure af Sten. Saadanne Mure var ganske vist betydelig dyrere end Træbolværker, men til Gengæld havde de en meget længere Levetid. Naar Stenkajmure blev funderet paa Pæle, hvilket allerede er gjort i det 17. Aarhundrede, maaske før, førtes de helt ned til Grunden, og Pælene rammedes lodret. De vandrette Kræfter fra Jordens Tryk optages derfor af Pælene i Bøjning, og dette har kunnet lade sig gøre, fordi Pælene helt op til Pæle-

⁷⁾ Hagen: Handbuch der Wasserbaukunst, 1844.

⁸⁾ Tegningen findes i Orlogsværftets historiske Arkiv.

toppen var omgivet af Jord. At lade Pælene gaa op over Grunden med en Plankeklædning bag og derved spare noget af den dyre Mur og det dyre Inddæmningsarbejde, der kræves for at føre Muren ned under Vandet, havde man lige indtil Midten af det forrige Aarhundrede en stærk Uvilje mod, da man syntes, der var et Misforhold mellem den dyre Mur og Funderingsmaaden, som man ansaa for daarlig.

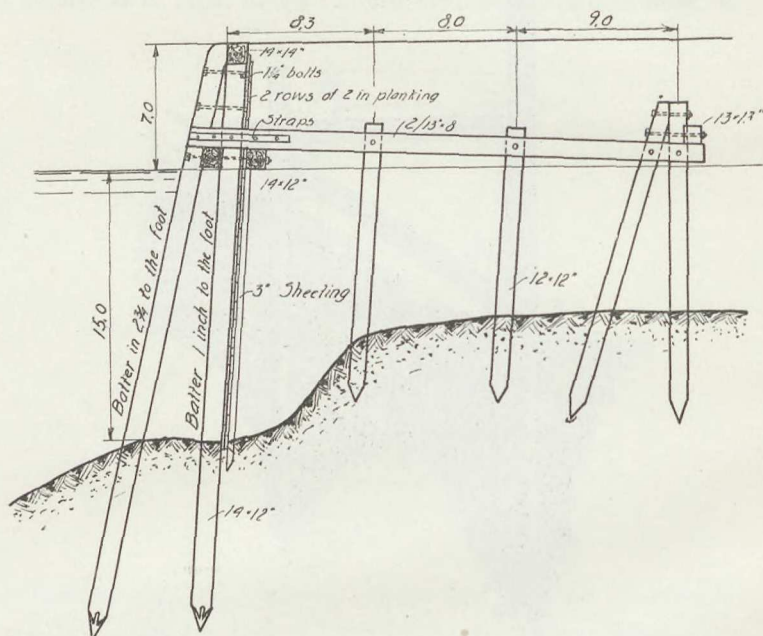


Fig. 8.

At man dog har kendt en saadan Konstruktion og udført den, ser man her i Københavns Havn, hvor man i Slutningen af det 18. Aarhundrede har udført den i Fig. 9 viste Mur,⁴⁾ der svarer til det, vi nu om Stunder kalder Kajmur paa højt Pæleværk.

Kajmuren bæres af en Række Hjærtépæle samt af to Rækker Bærepæle; bag Hjærtépælene findes en Plankeklædning og Spidsplanker. Forankringen er den sædvanlige for den Tids Bolværker.

Denne Konstruktion var der som sagt stærk Uvilje imod lige indtil ca. 1850. Senere er den dog trængt igennem, og nu om Stunder finder den udstrakt Anvendelse.

De hidtil skildrede Pæle tjente først og fremmest som Indfatning for Jordfyld, og de skulde derfor væsentligst optage vandrette Kræfter. Vi vil nu se nærmere paa Funderingspæle, d. v. s. Pæle, der tjener

til at overføre overvejende lodret Last, eller nærmere præciseret Pæle, der primært paavirkedes af Kræfter i deres Længderetning og kun sekundært af bøjende Kræfter. Funderingspæle anvendes, naar man kunstigt vil skabe en Understøtning for et Bygværk i en Højde, hvor den naturlige Grund ikke er i Stand til at overføre de paagældende Kræfter. Oprindelig lod man ikke saadanne Pæle gaa op over Grunden, men senere har man ikke følt sig bundet af dette Hensyn.

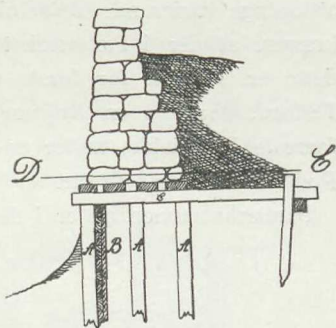


Fig. 9.

Medens man før Aar 1800 altid rammede Funderingspæle lodret (saaledes som nævnt under Omtalen af Stenkajer), selv om Fundamentet, hvad enten dette var en Bropille, en Kajmur eller lignende, paavirkedes af skraa Kræfter, kommer Engländerne i Begyndelsen af det 19. Aarhundrede ind paa at ramme Pælene i samme Retning som de ydre Kræfters Resultant.

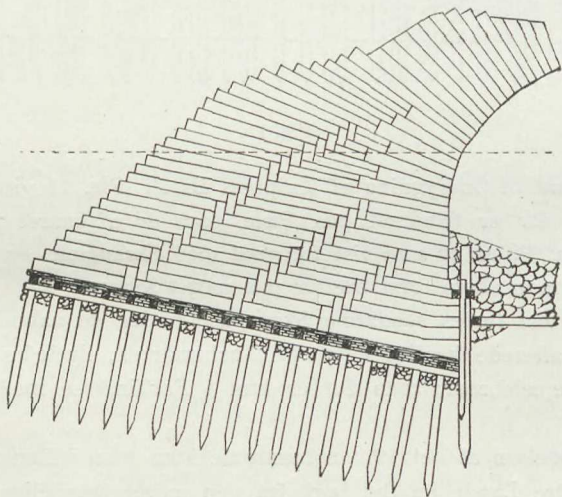


Fig. 10.

Saaledes blev Pælene under Vederlagspillerne for Buerne i den omkring Aar 1830 udførte London-bridge rammet skraat som vist i Fig. 10.⁷⁾

Fra samme Tid stammer en Del Kajmure i Hull, under hvilke Pælene ligeledes blev rammet skraat.

Dette var selvfølgelig et væsentligt Fremskridt for Pæleværkernes rationelle Konstruktion, men dog blev man ikke derved i Stand til at optage varierende Belastning uden ved Bøjning i Pælene. Hertil kræves, at der i Pæleværket findes Pæle med forskellig Hældning; dette er, vistnok for første Gang, udført ca. 1830 af Englænderen Telford, der ved en Kajmur i Sct. Katherine's Dok rammede den forreste Pælerække under en Vinkel paa ca. 25° , medens de øvrige Pælerækker var lodrette.

Bemærkelsesværdigt er i denne Forbindelse et Projekt, der i 1817

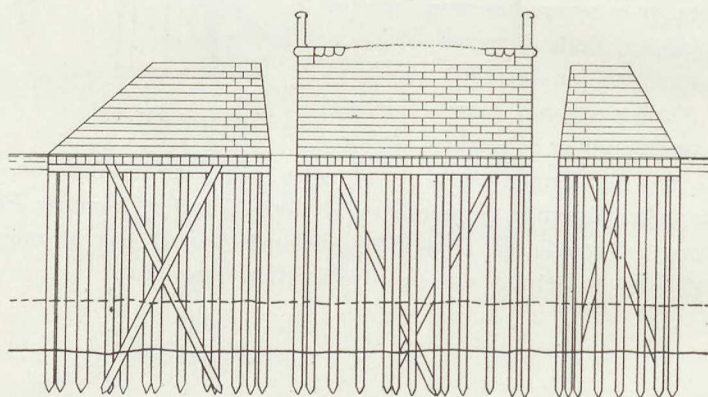


Fig. 11.

blev fremsat til Ombygning af Knippels Bro.⁹⁾ Fig. 11 viser den ene Klappille, der er funderet paa Pæle, som er afskaaret lige under Vandlinien; Pillen er som vist forsynet med Skraapæle, en Konstruktion, som man ellers først træffer paa meget senere.

Ganske vist findes saadanne Skraapæle under de aabne Træbrygger, som allerede kendes i det 17. Aarhundrede, ligeledes under de gamle Træpælebroer; men det er kun i Forbindelse med Træoverbygning.

I Begyndelsen af det 19. Aarhundrede kom man i England og senere i andre Lande en Del bort fra den meget betydelige Tømmerunderbygning, som før i Tiden fandtes under et Bygværk, der var funderet paa Pæle, som et Mellemlid mellem Bygværket og Pælene. Dette Tømmer var nødvendigt, saalænge man ikke kendte til større Betonstøbninger, men efter at saadanne var blevet almindelige, ude-

⁹⁾ Figuren er taget fra en Tegning, der findes i Københavns Havnevæsens Arkiv.

lod man mere og mere af Tømmeret og sparede det tilsidst helt i saadanne Konstruktioner, hvor det ikke af andre Grunde var nødvendigt. I amerikanske Kajmure findes endnu en meget gennemført Tømmerunderbygning grundet paa en særlig Udformning af Konstruktionen, se Fig. 16.

Ved den ovenfor omtalte Indførelse af Pæle med forskellig Hældning var man i Virkeligheden kommet over paa et rationelt Grundlag for Konstruktionen af Pæleværker. Saadanne bør nemlig udelukkende

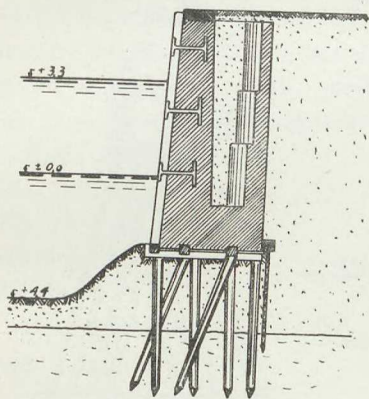


Fig. 12.

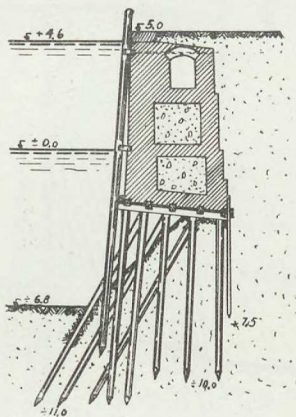


Fig. 13.

ved aksiale Kræfter i Pælene kunne optage enhver mulig Belastning. For et fortløbende Bygværk, f. Eks. en Kajmur, er der kun Tale om at ramme Skraapæle paa den ene Led, nemlig vinkelret paa Murens Længderetning, medens man for et fritstaaende Bygværk, f. Eks. en Bropille, maa ramme Skraapæle paa begge Ledder, saaledes at en vilkaarlig rumlig Belastning kan optages.

Vi skal med nogle faa Eksempler vise, hvorledes Pæleværker efter Indførelse af Skraapæle udvikler sig fra det nittende Aarhundredes Begyndelse og indtil nu.

Som allerede nævnt begyndte man med ved Kajmure at sætte en enkelt Pælerække skraat.

Fig. 12 viser en Kajmur i Geestemunde bygget i 1856;¹⁰⁾ her er anbragt 2 Rækker Skraapæle, men Lodpælene er i Overtal.

Fig. 13 viser en Kajmur fra Bremen bygget omkring Aar 1880.¹⁰⁾

¹⁰⁾ L. Frantzus: Der Wasserbau, 1890.

Endelig viser Fig. 14 og 15¹¹⁾ Kajmure fra dette Aarhundredes Begyndelse henholdsvis fra Hamburg og fra Bremen.

Man ser gennem de valgte Eksempler, hvorledes Skraapælene efterhaanden bliver i Flertal. Ligeledes ser man, hvordan man efterhaanden opgiver Fordringen om, at Pælene ikke maa gaa op over Grunden

Der er imidlertid endnu en Ulempe ved disse Kajmure, nemlig at der kommer et ret betydeligt Træk i Trækpælene paa Grund af den

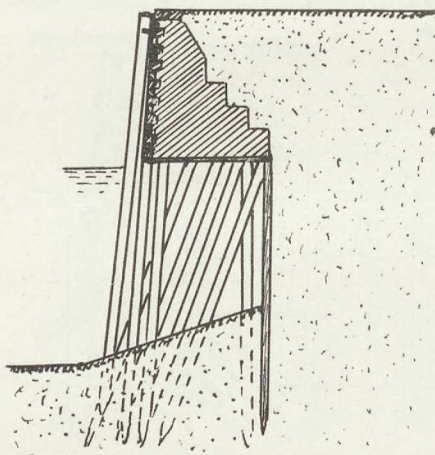


Fig. 14.

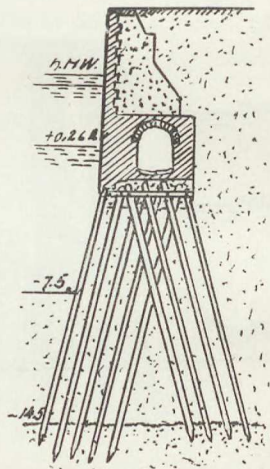


Fig. 15.

store Hældning af de ydre Kræfters Resultant; dette Træk optages, ved at nogle eller alle Trækpælene er forbundet med Trykpælene til Pælebukke; i Bremerkajmuren er alle Pælene forbundet paa denne Maade, i Hamburgermuren kun en enkelt Række.

For at undgaa det uheldige heri har man i de senere Aar udført Kajmure saaledes, at den lodrette Belastning forøges saa meget i Forhold til den vandrette, at der intet eller næsten intet Træk kommer i nogen Pæl; dette gøres derved, at Kajmuren bagud forsynes med en Plade, der ligger et Stykke under Jordoverfladen.

Herved forøges den lodrette Belastning med Vægten af den Jord, der ligger ovenpaa Pladen. Tillige kan man herved opnaa, at den Spunsvæg, som under Kajmuren begrænser Jordfylden, beskyttes af Pladen for Tryk fra den ovenover liggende Jord, hvorved Spunsvæggen selv for store Vanddybder kan udføres af rimelige Dimensioner.

¹¹⁾ Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch, III, 1911.

I Amerika udføres denne Plade som et Trædæk; Fig. 16 viser et Eksempel herpaa.¹²⁾

Her i Europa udføres denne Slags Kajmure i Almindelighed af Jernbeton,¹³⁾ og Pladen bliver da en Forlængelse bagud af Kajmuren; da Pladen i de fleste Tilfælde gøres ret svær, opnaar man den Fordel, at Plade og Kajmur udgør et stift Hele, hvorved man faar den stivest mulige Konstruktion, saaledes at en lokal stor Paavirkning vil fordeles over en meget stor Længde af Muren. Fig. 17 viser en saadan moderne Kajmur af Jernbeton.¹⁴⁾

Paa lignende Maade som Kajmurene har udviklet sig i Løbet af det sidste Aarhundrede, har Bropiller paa Pæle udviklet sig fra kun at indeholde Lodpæle til at have saa mange Skraapæle, at enhver rumlig Belastning kan optages med aksialt Tryk i Pælene.

I Fig. 11 er allerede vist en Bropille, vel nok en af de første, hvor der findes Skraapæle, og hvor tillige Pælene er afskaaret helt oppe under Vandoverfladen.

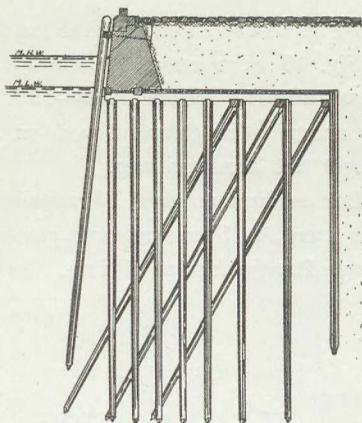


Fig. 16.

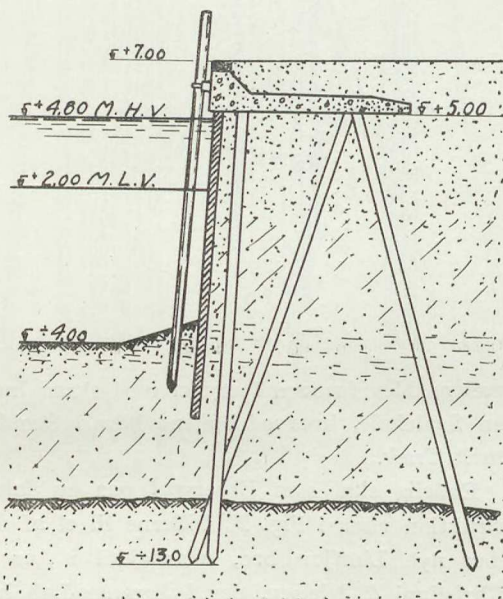


Fig. 17.

¹²⁾ C. Greene: Wharves and piers, New York. 1917.

¹³⁾ Konstruktionen er i 1907 angivet af Ingeniørfirmaet Christiani & Nielsen, der gennem Forsøg og teoretiske Undersøgelser har sat hele Konstruktionen i System, og som efterhaanden har udført den ved talrige Anlæg over hele Europa.

¹⁴⁾ Projekteret og udført i Aaret 1920 i Cuxhaven af Ingeniørfirmaet Christiani & Nielsen.

I Fig. 18 er vist en Bropille fra Midten af det forrige Aarhundrede.¹⁵⁾

Fig. 19 viser en af Mellempillerne til den nye Langebro i København, udført i Aarene 1900—1901.¹⁶⁾ Pælene er beskyttet mod Isgang og anden ydre Overlast ved en Jordfyldning, der begrænses af en meget tæt Træspunsvæg.

Der er kun anvendt Skraapæle i Broens Længderetning, idet man har ment, at Spunsvæggene gav fornøden Stivhed i Broens Tværretning. Pælene, der er af Træ, blev foroven indstøbt i Beton, og Skraa-

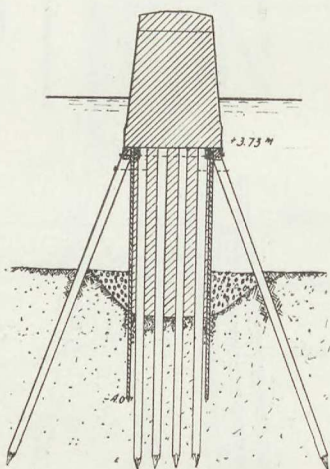


Fig. 18.

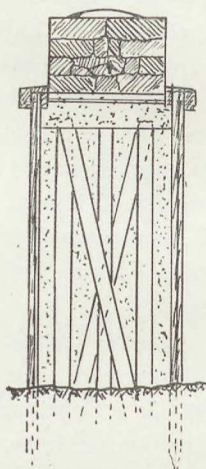


Fig. 19.

pælene blev foroven forsynet med skraa Indsnit, saa Enden dannede en Svalehale, hvorved Pælene blev i Stand til at overføre et eventuelt Træk.

Endelig skal som Eksempel paa en fuldt ud moderne Pillekonstruktion vises i Fig. 20 Pillerne til et af de præmierede Forslag til den nye Limfjordsbro, udarbejdet i Aar 1921 af Ingeniørfirmaet Christiani & Nielsen, der i Aarenes Løb har udført et meget stort Arbejde for Indarbejdelsen af Pæleværker, derved at Firmaet ved talrige udførte Konstruktioner har vist, at udført paa den rigtige Maade er et Pæleværk et lige saa paalideligt Bygværk som enhver anden Konstruktion.

Som man vil se, er der rammet Skraapæle i begge Retninger; Pillen er kun ført 4 m ned under Vandspejlet, saaledes at Pælene

¹⁵⁾ Deutsche Bauzeitung 1881.

¹⁶⁾ Ingeniøren 1902.

staar 5 m frit i Vandet. Pillen er overordentlig stiv overfor enhver Paavirkning, og den kan derfor med en meget ringe Bevægelighed overføre en vilkaarlig rumlig Belastning.

Vi har nu i store Træk fulgt den Udvikling, der siden Oldtidens Dage har fundet Sted ved Konstruktion af Pæleværker, og vil derefter følge Udviklingen af Beregningen af saadanne tilbage gennem Tiderne.

Man vil snart se, at lige saa gammel Anvendelsen af Pæleværker er, lige saa ung er Beregningen af disse, for ikke at tale om en rationel Beregning deraf.

De første Pæleberegninger, der overhovedet findes, gaar ud paa at bestemme Bolværkspæles Modstand mod Bøjning. Saaledes har allerede Parent¹⁷⁾ Aar 1704 udført Forsøg med forskellige Pæle, og senere har Belidor¹⁸⁾, Muschenbroeck¹⁹⁾ og flere andre gjort lignende Forsøg. Herved lykkedes det at opstille empiriske Formler, hvor-

ved man kunde bestemme Dimensionerne paa Bolværkspæle.

Først henimod Slutningen af det 18. Aarhundrede begynder man at opstille Regler for Pæles Bæreevne i aksial Retning, for derved at kunne bestemme det nødvendige Antal Funderingspæle for et givet Tryk.

Woltmann²⁰⁾ angiver saaledes i Aaret 1799 for forskellige Jord-

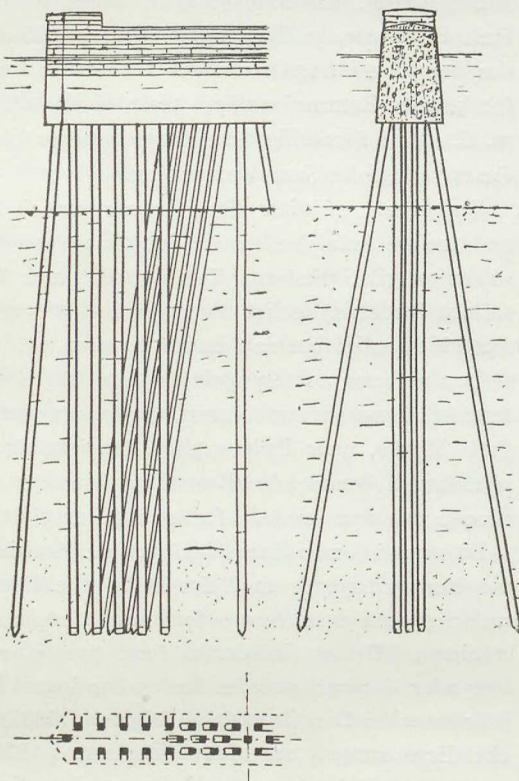


Fig. 20.

¹⁷⁾ Parent: Memoires de l'Acad. des Sciences, 1704.

¹⁸⁾ Belidor: Science des Ingenieurs.

¹⁹⁾ Muschenbroeck: Essai de Physique.

²⁰⁾ Woltmann: Beytrage zur hydr. Architectur, Bd. IV, 1799.

arter og Pæledimensioner bestemte Bæreevner; disse Tal grunder sig paa den Hypotese, at en Pæl, som staar fast, kan bære en lige saa stor Vægt, som der kræves for trække den op.

Dette er et ganske interessant Synspunkt, idet det viser, at Woltmann betragter Pæle som Friktionspæle.

Den første, der angiver en bestemt Formel til Beregning af en Pæls Bæreevne, er Eytelwein,⁵⁾ som i 1805 angav den Rammeformel, der den Dag i Dag anvendes. I Tidernes Løb er der fremsat mange forskellige Rammeformler, saaledes Brix's, Rankine's, Weisbach's m. fl., der i forskellig Grad tager Hensyn til Pælens Nedsynkning og Pælens elastiske Sammentrykning.

Ved Hjælp af disse Formler var man i Stand til at beregne det nødvendige Antal Pæle i en Fundering paa parallelle Pæle, hvor Resultanten gik i Pælens Retning, idet man forudsatte, at denne Resultant fordeltes ligeligt over alle Pælene, og derfor anbragte Pælene saa vidt muligt centralt under Kraften.

De her nævnte Beregninger har dog forsaavidt ikke nogen Interesse i denne Sammenhæng, da de kun gaar ud paa at bedømme en Pæls Styrke, naar Pælens ydre Paavirkning er givet, medens vi her vil beregne denne ydre Belastning paa den enkelte Pæl, naar Belastningen paa den samlede Pælegruppe er givet.

Da man i første Halvdel af det 19. Aarhundrede begyndte at ramme Funderingspæle med forskellig Hældning, vilde det have været naturligt, om man havde forstaaet at opløse Kraften i de to Pæleretninger. Det er imidlertid først paa et ret sent Tidspunkt, man begynder derpaa; saaledes findes der ingen Beregning af Pæleværker i Brennecke: Der Grundbau, udgivet i 1887, men derimod i Brennecke: Ergänzungen zum Grundbau, som i 1895 udgives som et Supplement til den førstnævnte. I Brenneckes første Bog fra 1887 findes derimod en Beregning angivet for Pælebukke, der jo ogsaa er det simplest mulige Pæleværk; Beregningen af en saadan kan selvfølgelig kun forme sig paa en Maade, nemlig som en Opløsning af den angribende Kraft i de to Pæleretninger.

Siden 90-erne er der i Tidsskrifter og i Haandbøger angivet mange forskellige Beregningsmetoder for Pæleværker, uden at nogen af disse dog kan siges at være rationel; der har efterhaanden udviklet sig en Sædvane i Beregninger,²¹⁾ og vi skal nedenfor angive Hoved-

²¹⁾ Se saaledes: Brennecke: Der Grundbau, 1906.

Schönweller: Fundering, 1912.

Engels: Handbuch des Wasserbaues, 1914.

Lütken: Brobygning I, 1914.

Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch, III. Bd. 1919.

trækkene af disse, idet der iøvrigt henvises til § 72 i denne Bog, hvor en nærmere Gennemgang af de forskellige Beregningsmetoder er foretaget. Beregningerne tager i Almindelighed Sigte paa Kajkonstruktioner, men gælder principielt for ethvert Pæleværk.

Beregningerne foregaar f. Eks. paa den Maade, at man først efter et Skøn, der kan være mere eller mindre vilkaarligt, fordeler den lodrette Belastning over Pælene; Skraapælene tildeler man dernæst en saa stor vandret Kraft, at denne sammen med den til paagældende Pæl svarende lodrette Kraft giver en Resultant i Skraapælenes Retning. Derved faar man optaget en vis vandret Kraft, og hvis den ydre vandrette Kraft er større, lader man saa Resten optage af en Pælebuk.

I andre Tilfælde samles alle Pælene to og to i Pælebukke, over hvilke man efter Skøn fordeler de lodrette og vandrette Kræfter.

Hvor man anvender Betonkonstruktioner og Betonpæle, udføres Beregningen af Pæletrykkene paa en lignende Maade, om end noget modificeret efter Forholdene. Man anvender da ikke Pælebukke, men lader en overskydende vandret Kraft optage af Trækpæle, d. v. s. skraat bagud rammede eller lodrette Pæle.

Nu om Stunder ser man dog af og til en mere rationel Beregningsmaade angivet, saaledes i Hütte III, 1919, S. 217, hvor der er vist en grafisk Beregning af Pæletrykkene i en Pælegruppe med tre Pæleretninger; i den der viste Figur er ganske vist kun angivet to Pæleretninger, men Behandlingen svarer til tre. Den grafiske Beregning foretages ved Hjælp af den Culmannske Hjælpelinie, idet alle Pæle af samme Hældning tænkes koncentreret i deres Tyngdepunktslinie. Den ydre Kraft, Resultanten af alle lodrette og vandrette Kræfter, opløses efter den ene Pæleretning og en Hjælpelinie, der trækkes fra Kraftens Skæringspunkt med denne Pæleretning og til de to andre Pæleretningers Skæringspunkt; Komposanten efter Hjælpelinien opløses dernæst efter disse to Pæleretninger. Indenfor hver Pæleretning fordeles den fundne Kraft ligeligt over alle Pælene. Forudsat at det er rigtigt, at alle Pæle i samme Retning faar samme Tryk, er denne Metode korrekt; det gælder saaledes en Pælegruppe med kun tre Pæle; en saadan Pælegruppe er jo iøvrigt ogsaa statisk bestemt. Er der derimod flere Pæle i hver Retning, giver Metoden i Almindelighed kun en Tilnærmelse.

I Prof. Schönwellers Fundering fra 1912²²) findes en rationel Be-

²²) I den nye Udgave af denne Bog, udgivet 1923, findes den rationelle Metode, der er fremsat i Aarene 1910—21 af forskellige svenske og danske Forfattere, angivet.

regning for et Pæleværk med Lodpæle og kun 1 Række Skraapæle. Hvis den ydre Kraft er lodret, optages den udelukkende af de lodrette Pæle. Hvis den er skraatrettet, maa Trykket i Skraapælene være saa stort, at dets vandrette Komposant er lig den ydre Krafts vandrette Komposant. Herved er Trykket i Skraapælene bestemt, og naar dette sammensættes med den ydre Kraft, faas en lodret Resultant, der paa sædvanlig Maade fordeles over Lodpælene, idet der tages Hensyn til Kraftens Ekscentricitet i Forhold til Pælene.

I Løbet af Tiden fra dette Aarhundredes Begyndelse og indtil nu er det imidlertid lykkedes at opstille et fuldstændig rationelt Grundlag for Beregning af Pæleværker. Dette Arbejde er udført af Svenskerne: Per Gullander,²³⁾ W. Fellenius,²⁴⁾ R. Ekwall²⁵⁾ og T. Hultin,²⁶⁾ samt af Danskerne: Prof. H. M. Westergaard²⁷⁾ og Prof. A. Ostfeldt.²⁸⁾

I Svensk Teknisk Tidskrift 1902 opstiller P. Gullander en Teori til Beregning af Pæle i en Pælegruppe med parallelle Pæle. Beregningen hviler paa de to Forudsætninger, at Pillen kan betragtes som uendelig stiv i Forhold til Pælene, samt at der er Proportionalitet mellem Pælehovedets Forskydning i Pælens Retning og den deraf følgende Reaktion fra Pælen. Disse to Forudsætninger danner Grundlaget for alle de senere Teorier og er de eneste, som man behøver for at kunne stille en rationel Teori op for Beregning af Pæletryk. Gullander behandler kun Pæleværker, hvor Pilleunderkanten er plan og vinkelret paa Pælene, og hvor de ydre Kræfters Resultant er parallel med Pælene; paa Grund af den første Forudsætning ser man, at Pillens Underside ved den Bevægelse, som Belastningen fremkalder, holder sig plan, og at enhver Bevægelse kan opfattes som en uendelig lille Vinkelændring om en Akse, Nullinien, der er beliggende i Pilleunderkanten. Paa dette Grundlag opstilles Formler for Pæletrykkene, der selvfølgelig ikke bliver andet end de almindelige Formler for skæv

²³⁾ Per Gullander: »Bidrag till teorien för grundpålningar«. Svensk Tekn. Tidskrift 1902.

»Grafostatisk metod för beräkning af grundpålningar«. Svensk Tekn. Tidskrift 1911.

»Till teorien för grundpålningar«. Svensk Tekn. Tidskrift 1912.

»Teori för grundpålningar«. Stockholm 1914.

²⁴⁾ W. Fellenius: »Om beräkning av kajbyggnader o. d.« Sv. Tekn. Tidskr. 1910.

²⁵⁾ R. Ekwall: »Beräkning av Grundpålningar«. Sv. Tekn. Tidsskr. 1911.

²⁶⁾ T. Hultin: »Om beräkning av Grundpålningar«. Industritidningen Norden 1911.

²⁷⁾ H. M. Westergaard: »The resistance of a group of piles«. Journ. Western Soc. of Eng. Dec. 1917.

²⁸⁾ A. Ostfeldt: »Beregning af Pæleværker«. Teknisk Tidsskrift 1921, Hefte 1.

Bøjning af et plant Tværsnit, der paavirkes af en ekscentrisk Normalkraft.²⁹⁾

Gullander behandler som sagt kun Pælegrupper med parallelle Pæle, men med denne Artikel er Grundlaget for den rationelle Beregning af Pæleværker angivet, idet dette nemlig som ovenfor nævnt er de to af Gullander opstillede Forudsætninger.

Alle de følgende Teorier behandler kun Pæleværker, der har en Symmetriplan, med hvilke alle Pælene er parallelle, og hvori Kræfterne virker, og de gaar ud paa først at bestemme Pillens Bevægelse, hvorefter Pæletrykkene kan findes.

Det, at Pillen regnes uendelig stiv i Forhold til Pælene, gør, at Pillens Bevægelse kan behandles efter den plane Kinematik, og man kan derfor slaa ind paa to Veje, enten at bestemme den til den paagældende Belastning svarende Drejningsakse, eller finde den Belastning, der svarer til en Parallelforskydning efter to faste, paa hinanden vinkelrette Akser samt til en Vinkeldrejning om en fast Akse. Den første Maade kræver helt ny Beregning for hver ny Belastning og egner sig egentlig kun for grafiske Metoder; den anden Maade tillader at opstille almindelige Formler for Pæletrykkene.

Den næste, der behandler Spørgsmaalet, er W. Fellenius, der i Svensk Teknisk Tidskrift 1910 skriver om Beregning af Kajmure. Forudsætningerne er de samme som hos Gullander, og heraf følger, at Pillen paa Grund af Belastningen indtager en ny Stilling, som kan antages at fremkomme af den oprindelige ved en Parallelforskydning $= x$ parallel med Pilleunderkanten, en Parallelforskydning $= y$ vinkelret herpaa, samt en Vinkeldrejning $= \delta$ omkring et vist Punkt, nemmest om Pilleunderkantens forreste Punkt. Pæletrykkene kan udtrykkes ved x , y og δ og disse tre Størrelser bestemmes af de tre statiske Ligevægtsligninger; disse opstilles, men der udledes ingen almengyldige Udtryk for Pæletrykkene, undtagen for det specielle Tilfælde, hvor Resultanten og alle Pælene er lodrette.

I Svensk Teknisk Tidskrift 1911 skriver Gullander atter en Artikel, denne Gang om Beregning af Pæleværker med forskellige Pæleretninger, og her opstilles Grundlaget for en grafisk Bestemmelse af Pæletrykkene.

Beregningen gennemføres paa den Maade, at man bestemmer det til Kraftresultanten svarende Drejningspunkt og Drejningsvinklen, hvorefter Pæletrykkene kan findes.

²⁹⁾ Se saaledes A. Ostfeldt: Elasticitetslære, 1916, S. 369.

Dette gøres ud fra de statiske Ligevægtsligninger, der omformes, saaledes at de fremtræder i en for grafisk Beregning anvendelig Form. Den angivne Metode egner sig kun til grafisk, ikke til analytisk Beregning, hvilket direkte følger af, at Bestemmelsen af Drejningspunkt og Pælenes Afstande derfra skal gentages for hver ny Kraftresultant. Gullander behandler baade Pæle, der er indspændt kun fornedet og Pæle, der er indspændt saavel foroven som fornedet.

I Svensk Teknisk Tidskrift 1912 omarbejder Gullander Metoden saaledes, at den bliver lettere anvendelig for varierende Kraftresultanter; medens han i sin forrige Artikel fandt Drejningspunktet i Forhold til Resultanten, bestemmes det her i Forhold til Pælegruppens Centrum, der defineres som det faste Punkt, hvorigennem en Kraft skal gaa for at give Pillen en Parallelforskydning. Dette betyder en stor Lettelse i Metodens Anvendelse, og den fører iøvrigt ogsaa til en god analytisk Beregning, idet Gullander opstiller almindelige Udtryk for Pæletrykkene svarende til en vilkaarlig Belastning, henført til to faste Kraftretninger gennem Pælegruppens Centrum, samt et Moment om dette Punkt.

En analytisk Bestemmelse af Pæletrykkene er angivet af R. Ekwall i Svensk Teknisk Tidskrift 1911. Ekwall bestemmer de to Hovedakser for Pælegruppen, hvorved forstaas Beliggenheden af de to — og de eneste to — Kræfter, der giver Pillen en Parallelforskydning i deres egen Retning. Dernæst bevises det, at naar Pælegruppen paavirkes af et Moment, vil Pillen faa en Vinkeldrejning om Hovedaksernes Skæringspunkt.

Pæletrykkene opskrives derefter for en vilkaarlig Belastning, idet denne reduceres til to Komposanter i Hovedakserne samt et Moment om Hovedaksernes Skæringspunkt. Ekwall lægger stor Vægt paa Bestemmelsen af 1. Hovedakse, d. v. s. den Retning, hvor Pillen gør størst Modstand mod en Forskydning, derimod lægger han ikke saa stor Vægt paa Bestemmelsen af 2. Hovedakse og derfor heller ikke paa Bestemmelsen af Hovedaksernes Skæringspunkt, hvorved han i mange Tilfælde vilde komme til ganske fejlagtige Resultater.

Ekwall behandler ogsaa det Tilfælde, hvor Pælene er indspændt fornedet, idet han erstatter Indspændingens Virkning med en fingeret Pæl, der er vinkelret paa den oprindelige Pæl og har en til Indspændingsmodstanden svarende Modstandsevne. Tillige behandles det Tilfælde, hvor Pælene er indspændt baade foroven og fornedet; her erstattes Indspændingernes Virkning af to fingerede Pæle, der begge er vinkelret paa den oprindelige Pæl, og hvorefter den ene

gaar gennem Pælehovedet, den anden gennem Pælens nederste Trediedelspunkt.

En grafisk Metode er angivet i Industritidningen Norden 1911 af T. Hultin. Beregningen foretages paa den Maade, at man først giver Pillen en vandret Parallelforskydning og finder ved Bevægelsens Projektion ind paa den enkelte Pæls Retning Pæletrykkene P_H og bagefter ved en Tovpolygon Resultanten af disse, H . En Kraft H' i denne Resultants Retning vil da fremkalde Pæletryk, der er $\frac{H'}{H} P_H$. Paa lignende Maade findes Pæletrykkene P_V og Resultanten V af disse for en lodret Forskydning; endelig giver man Pillen en Vinkeldrejning om et vilkaarlig valgt Punkt og bestemmer Pæletryk P_Δ og Resultant Δ . Enhver ydre Belastning kan nu opløses efter disse tre, grafisk bestemte Resultanter, hvorved man faar Kræfterne H' , V' og Δ' .

Pæletrykkene bestemmes da af Formlen:

$$P = \frac{H'}{H} P_H + \frac{V'}{V} P_V + \frac{\Delta'}{\Delta} P_\Delta$$

Dernæst angiver Hultin, hvorledes man kan medtage en Indspænding forneden af Pælene, idet de Sidekræfter, der i Pælehovedet fremkommer ved en Bevægelse, medtages i den grafiske Konstruktion.

I Aaret 1914 har P. Gullander samlet alt, hvad der hidtil har været fremsat om Beregning af Pæleværker i en lille Bog: »Teori för grundpålningar«. Bogen indeholder ikke noget væsentlig nyt, men giver en god Samarbejdelse af de tidligere Bidrag. I første Afsnit behandles meget udførligt, mere end det egentlig synes nødvendigt, Pæleværker med parallelle Pæle. Fremstillingen er praktisk talt den samme som i Artiklen fra 1902. Dernæst behandles Pæleværker med Symmetriplan, med hvilken alle Pælene er parallelle og hvori Kraften virker, i andet Afsnit med Pæle, der kun er indspændt forneden, i tredje Afsnit med Pæle, der er indspændt baade foroven og forneden. Beregningerne gennemføres baade grafisk og analytisk.

Princippet er det, at først findes de Pæletryk og den Kraft, der svarer til en lodret Parallelforskydning og til en vandret Parallelforskydning. Dernæst vises det, at et Moment fremkalder en Vinkeldrejning om de to fundne Kræfters Skæringspunkt, der kaldes Pælegruppens Centrum. Pæletrykkene kan nu opskrives som Funktioner af den ydre Belastning, der er reduceret til Kræfter i de to nævnte Kraftretninger samt til et Moment om Pælegruppens Centrum. Gul-

lander gør opmærksom paa den interessante Forbindelse, der er mellem Kraftretning og Drejningspunkt, nemlig at Kraftretning og Retning fra Pælegruppens Centrum til det tilsvarende Drejningspunkt er konjugerede Diametre i en fast Ellipse, der har sit Centrum i Pælegruppens Centrum.

En meget smuk analytisk Løsning giver Prof. H. M. Westergaard i Journal of the Western Society of engineers. Dec. 1917. Westergaard gør først opmærksom paa den reciproke Sammenhæng mellem Kraft og Drejningspunkt, der er en Følge af Maxwells Sætning, nemlig at naar en Kraft R_1 gaar gennem en anden Kraft R_2 's Drejningspunkt, vil R_1 have sit Drejningspunkt beliggende paa R_2 . Ved Hjælp heraf konstruerer man let Drejningspunktet for en vilkaarlig Kraft R , idet man grafisk bestemmer de to Kræfter A og B , der svarer til en Vinkeldrejning om to vilkaarligt valgte Punkter paa R . Skæringspunktet mellem A og B er da det Drejningspunkt, der svarer til R , og Pæletrykkene bestemmes derefter grafisk.

Dernæst bestemmer Westergaard Pælegruppens Centrum ved Hjælp af to til vilkaarligt valgte Parallelforskydninger svarende Kræfter. At Skæringspunktet mellem disse er Drejningspunktet for et Moment, bevises let ved den ovenanførte Sætning om den reciproke Sammenhæng.

Endelig uddyber Westergaard nærmere Egenskaberne ved den af Gullander anførte Ellipse og viser, at denne er den samme, som Ritter behandler i sin grafiske Statik³⁰⁾. Heraf følger, at Kraftlinie og tilsvarende Drejningspunkt er Polar og Antipol med Hensyn til en Ellipse med Pælegruppens Centrum som Centrum og Akser i Pælegruppens to Hovedakser.

Det sidst fremkomne Bidrag til Løsningen af det her behandlede Problem er givet af Prof. A. Ostfeld i Teknisk Tidsskrift Jan. 1921. Det er her lykkedes at fremstille simple og let anvendelige almenlydige Udtryk for Pæletrykkene. Der behandles væsentligst kun Pæleværker med simpelt understøttede Pæle, samtidig med at der antydes en Fremgangsmaade for Beregning af Pæleværker med Pæle, der er indspændt baade foroven og forneden.

Prof. Ostfeld indfører som et Udtryk for Pælens Modstand mod Sammentrykning en Konstant for hver enkelt Pæl:

$$v = \frac{EF}{s} \cos^2 \alpha,$$

³⁰⁾ W. Ritter: Graphische Statik, III. Bd. S. 259—264, 1900.

hvor E er Pælens Elasticitetskoefficient, F dens Tværsnit, s dens Længde og α dens Vinkel med en lodret Linie. En Pæls v -Kraft er den lodrette Komposant af Pæletrykket for en lodret Bevægelse 1. Dernæst bestemmes den Kraft R' , der svarer til en lodret Bevægelse 1 nedad, R' 's Vinkel med den lodrette kaldes α' ; R'' er den Kraft, der svarer til en vandret Bevægelse 1, α'' er dens Vinkel med den lodrette. Skæringspunktet mellem R' og R'' er Pælegruppens Centrum, og dets Koordinater i et retvinklet Koordinatsystem med Abscisseakse i Pilleunderkant og Ordinatakse lodret bestemmes. Naar den ydre Belastning reduceres til en vandret Kraft H , en lodret Kraft V begge gennem Pælegruppens Centrum samt et Moment M , er Pæletrykket S i en vilkaarlig Pæl bestemt af Ligningen:

$$S \cos \alpha = V \frac{v}{\Sigma v} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + H \frac{v}{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} - M \frac{v}{I} (x - y_0 \operatorname{tg} \alpha),$$

hvor I er Pælens Inertimoment om Centrum og y_0 Centrums Ordinat.

Særligt behandles specielle Tilfælde af Pælegrupper, hvor den anførte Formel bliver overordentlig simpel, nemlig 1) Pælegruppen indeholder kun Lodpæle, 2) Pælegruppen bestaar af Lodpæle og Skraapæle, hvilke sidste alle har samme Hældning og 3) Pælegruppen er symmetrisk om en lodret Akse.

Samtidig med, at det saaledes er lykkedes at fremstille en rationel Beregningsmaade for Pæleværker, ser man i Tidsskrifter flere Artikler, hvor de ældre Metoder, der ikke tager Hensyn til Pælens Elasticitet, behandles, saaledes M. Buchwald i Deutsche Bauzeitung 1913; disse Artikler har ingen Interesse i denne Forbindelse.

Endelig skal det anføres, at Prof. Jacoby, Riga, i 1909³¹⁾ har offentliggjort en Beregning af parallelle Pæle, der er symmetriske om den Plan, hvori Kræfterne virker; der opstilles en Formel for Pæletrykket, men Jacobys Undersøgelse er ikke nær saa udtømmende og omfattende som Gullanders i 1902.

Skønt det nu er over 20 Aar siden, at Gullander skrev sin første Artikel, og skønt det næsten er 10 Aar siden, han skrev sin Bog om Beregning af Pæleværker, hvori der fandtes brugelige Formler, anvender man dog saa godt som overalt endnu de gamle Metoder.

Grunden hertil er sikkert, at de Midler, vi har til Bedømmelse af en Pæls Elasticitet, forekommer de fleste Vandbygningsingeniører saa

³¹⁾ Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst, 1909.

mangelfulde, at de mener, det vilde være illusorisk at gennemføre en nøjagtig og besværlig Beregning og saa tro, at man derved kom Sandheden nærmere. Hertil er der for det første det at sige, at den nøjagtige Beregning ikke er besværligere end de gamle Metoder, hvilket forhaabentlig vil fremgaa af foreliggende Arbejde. Og dernæst maa det siges, at det i de fleste Tilfælde beror paa en Misforstaaelse, naar det synes saa umuligt at bestemme en Pæls elastiske Forhold.

Vi skal, inden vi gaar over til en nærmere Omtale af den i denne Bog udviklede Beregningsmetode, se lidt nærmere paa dette Forhold og paa de andre Forudsætninger, der danner Grundlaget for Metoden.

Den ene af disse Forudsætninger er, at Pælehovedets Nedsynkning er elastisk. At dette maa være en Forudsætning for et forsvarligt Bygværk, er selvfølgeligt. Derimod kan Bestemmelsen af Elasticiteten volde Vanskelighed.

En Pæls Elasticitet er afhængig af tre Faktorer: 1) Elasticiteten af den Jord, hvori Pælen staar, 2) den Maade paa hvilken Pælen overfører sin Belastning til den omgivende Jord, 3) Pælens Dimensioner og Længde.

Angaaende 1) og 2) skal vi anføre en Udtalelse af Woltmann fra Aar 1799²⁰):

»Alle Grundpæle for eet Arbejde maa slaas med et og samme Ramslag, indtil de staar (det vil sige, at de ikke viger for Ramslaget); i modsat Fald kan man ikke vente ensformig Fasthed overalt.«

Det, der er Grundtanken heri, at alle Pælene skal have ens Fasthed, er jo netop den Forudsætning, man gør for almindelige Funderingspæle, idet man altid fordeler en central Kraft ensformig over alle Pælene.

Hvis man saaledes rammer alle Pælene til ens Fasthed, og hvis de tillige har samme Dimensioner og Længde, og de paavirkes til Tryk, maa man nødvendigvis sige, at de alle har samme Elasticitet, og da det kun er Forholdet mellem Pælenes Elasticitet, man skal kende, undtagen naar man regner med Pælenes Indspænding, kan man gennemføre Beregningen.

Har derimod Pælene forskellig Dimension og Længde, bliver Sagen straks vanskeligere.

Hvis Pælen bærer udelukkende paa sin Spids og den underliggende Jord kan regnes som fast, er Pælens Elasticitet givet, idet denne ligefrem er Pælens Sammentrykning i hele dens Længde. Nu er

imidlertid Pæle lige saa tit Friktionspæle, d. v. s. de bæres ved Friktion langs Siderne, hvorfor man ikke kender den virksomme Del af Pælen og derfor ikke den Længde af Pælen, der sammentrykkes. Et saadant Forhold har man bl. a. ved en Trækpæl, der kun virker ved Jordens Friktion, samt dog ved en vis Sugning. Pæle af Jernbeton er mange tilbøjelige til at behandle endnu mere kompliceret ved at regne med fuldt Tværsnit for Tryk, men kun Jernarealet for Træk; dette er selvfølgelig ganske forkert og strider imod den almindelige Jernbetonpraksis.

Imidlertid vil Spørgsmaalet om aktiv Pælelængde i de fleste i Praksis forekommende Tilfælde ikke volde uoverstigelig Vanskelighed. Naar Pælen bærer ved Friktionen alene, maa Spændingen i Pælen være Nul ved Pælespidsen og Maksimum i Jordoverfladen, og hvordan den end varierer derimellem, vil det ikke betyde saa meget, at man ikke kan danne sig et ret paalideligt Skøn over den aktive Pælelængde.

Hvis Pælen delvis bærer som Friktionspæl og delvis paa Spidsen, maa Pælelængden ligge mellem den ovenfor bestemte og den totale Længde.

Betydeligt vanskeligere er man stillet, hvis den omgivende og underliggende Jord samtidig er elastisk; hvis Pælene har samme Dimensioner og samme Længde, er som ovenfor nævnt deres Elasticitet ens. Hvis derimod Pæledimensioner og Pælelængde er forskellig, er man overladt til det rent skønsmæssige, idet Pælens samlede Elasticitet er sammensat dels af Jordens og dels af Pælens egen Elasticitet. Hertil er imidlertid det at sige, at hvis man med et Skøn kommer ud i det rene Gæteri, er man samtidig ude over det forsvarelige, og man bør absolut i et saadant Tilfælde foretage et Belastningsforsøg med en Pæl for derigennem at finde Elasticitetsforholdene, lige saa vel som man aldrig vilde undlade at prøvebelaste et Bygværk, hvis Beregning man ikke var sikker paa. Saadanne Belastningsforsøg er ogsaa udført adskillige Gange.

For at underbygge den fremsatte Teori med et exakt Grundlag er der i Bogens første Paragraffer defineret nogle Pælelængder. Ved en Pæls Sammentrykningslængde forstaas den Længde, som en Pæl af samme Dimension skal have, naar denne er fast understøttet kun i Spidsen, og naar den skal have samme Nedsynkning af Pælehoovedet for en bestemt Kraft som den virkelige Pæl. Paa lignende Maade defineres en Indspændingslængde og senere (i § 29) en Vridningslængde for Pælene.

Den anden af nærværende Beregningsmetodes Forudsætninger er, at Pillen kan regnes uendelig stiv i Forhold til Pælene. Det er denne Forudsætning, der gør det muligt at forme Beregningerne saa simple, som de viser sig at blive. I de fleste Tilfælde vil denne Forudsætning ogsaa kunne holde Stik.

De typiske Anvendelser af Pæle er i Bropiller eller Fundamenter og i Kajmure. For de førstes Tilfælde vil Pillen altid være af saa kort Udstrækning i Forhold til dens Højde, at Forudsætningen kan opretholdes. For Kajmures Vedkommende er disses Udstrækning i horisontal Retning betydelig større i Forhold til Tykkelsen end Tilfældet er med Bropiller, og dog vil det kun være undtagelsesvis, at man behøver at regne med en Elasticitet af Pillen. Selv i Tilfælde, hvor dette strængt taget burde gøres, maa man ofte undlade det for overhovedet at faa en overkommelig Beregning, og da Pillens Elasticitet kun vil udligne Differenserne i Pæletrykkene i de forskellige Pæle, vil Anvendelsen af Teorien i Almindelighed ikke betyde nogen Fare for Bygværket. Dog skal man selvfølgelig ikke ved virkelig elastiske Piller, saaledes som den i Fig. 16 viste amerikanske Kajmur, anvende den, men i saa Tilfælde vil Forholdene sædvanligvis selv an vise en den Beregningsmaade, man bør anvende.

Den i det følgende udviklede Beregningsmetode hviler saaledes paa de to Forudsætninger, at Pælehovedernes Nedsynkning er elastisk, og at Pillen kan regnes uendelig stiv i Forhold til Pælene.

Fremstillingen er rent analytisk; m. H. t. grafiske Metoder henvises til Gullander, Ekwall, Hultin og Westergaard.

I første Afsnit behandles plane Pælegrupper, hvorved forstaas saadanne, som er symmetriske om en Plan, med hvilken alle Pælene er parallelle, og hvori de ydre Kræfter virker. For saadanne er baade Bevægelser og Kræfter plane, og enhver Bevægelse kan derfor opfattes enten som en uendelig lille Vinkeldrejning om en Akse vinkelret paa Symmetriplanen, eller som to paa hinanden vinkelrette Parallelforskydninger efter to faste Akser beliggende i Symmetriplanen samt en Vinkeldrejning om en fast Akse vinkelret paa nævnte Plan.

Pæletrykkene findes paa samme Maade som hos Prof. Ostfeld blot med den Forskel, at medens Prof. Ostfeld opstiller de tre Ligevægtsligninger og ved specielle Valg af Koordinater og paa andre Maader derudfra bestemmer de enkelte Leds Betydning, er Resultaterne her udledet ved direkte Betragtninger.

Ligesom ved tidligere Undersøgelser finder man her, at alle Kræf-

ter, der svarer til Parallelforskydninger, gaar gennem et fast Punkt, der her kaldes Pælegruppens 0-Punkt; et Moment frembringer en Vinkeldrejning om 0-Punktet. Til Bestemmelse af dette Punkt er her fundet den Betingelse, at Pælenes Inertimoment er Minimum om dette Punkt.

Denne Betingelse kan i mange Tilfælde føre til en direkte Bestemmelse af 0-Punktet uden nogen Beregning.

Først behandles en ganske vilkaarlig Pælegruppe, og bagefter forskellige specielle Tilfælde, hvor Formlerne bliver mere simple.

Fremstillingen er helt igennem gjort saa fuldstændig som mulig, saaledes at alt det tidligere fundne er medtaget; herudover er der tilføjet meget nyt, idet de tidligere Arbejder kun hver for sig har behandlet en Side af Sagen. Af nyt skal nævnes den ovenfor omtalte Sætning om Inertimomentets Minimum, Bestemmelsen af Maksimumstryk i en Pæl, Behandling af Pælegrupper, der delvis paavirkes af aktive, delvis af passive Kræfter, Bestemmelse af Pæletryk i en Pælegruppe, hvis Pæle skærer hinanden i samme Punkt; desuden er der givet en afrundet Behandling af Spørgsmaal, der tidligere har været fremme. Endelig skal nævnes Behandlingen af indspændte Pæle ved Hjælp af tænkte Pæle. Naar en Pæl er indspændt i Bunden, vil der foruden Modstanden mod en Forskydning i Pælens Længderetning fremkomme en Modstand vinkelret paa Pælen for en Bevægelse i den Retning; denne sidste Modstand kan i Stedet for ved en Indspænding fremkaldes ved en tænkt Pæl, der er vinkelret paa Pælen, gaar gennem Pælehovedet og har et til Indspændingen svarende Modstandstal. Naar en Pæl er indspændt i begge Ender, kan Indspændingen paa lignende Maade erstattes af en tænkt Pæl, der er vinkelret paa den oprindelige, men her gaar gennem dennes Midtpunkt; samtidig maa der for hver Pæl tilføjes et Moment, der er proportionalt med Pælens Vinkeldrejning, og som derfor indgaar som et Led i Pælenes Inertimoment om 0-Punktet. Ved Indførelse af de tænkte Pæle opnaar man at simplificere Problemet meget, idet man da kun behøver at behandle Piller med simpelt understøttede Pæle.³²⁾

I andet Afsnit er rumlige Pælegrupper behandlet, d. v. s. Pælegrupper, hvis Pæle er placeret paa en saadan Maade, at de er i Stand til at optage en vilkaarlig rumlig Belastning.

³²⁾ R. Ekwall har tidligere, se Side 28, indført »fingerede Pæle«, men da de tænkte Pæle i det foreliggende Arbejde er indført ganske uafhængig heraf, indgaar de paa en anden Maade i Systemet.

Dette Spørgsmaal er ikke tidligere behandlet; ganske vist har V. Lewe³³⁾ i 1915 behandlet en i Princippet lignende Konstruktion og fundet Betingelserne for et rumligt ubevægeligt System, men de deraf dragne Slutninger er saa misvisende, at man faktisk intet faar at vide om Problemet.

Idet Forudsætningen for Teorien er, at Pillen kan regnes uendelig stiv i Forhold til Pælene, ved man, at en vilkaarlig Bevægelse af Pillen kan opfattes enten som en Skruebevægelse om en Akse, d. v. s. en Parallelforskydning samt en Vinkelrejning om en Akse parallel med Forskydningen, eller som Parallelforskydninger i tre paa hinanden vinkelrette faste Retninger samt i tre Vinkeldrejninger om faste Akser parallel med de tre Forskydningsretninger. Paa samme Maade kan en vilkaarlig rumlig Belastning reduceres til en Skruekraft, d. v. s. en ren Kraft og et Moment om Kraftens Akse eller til tre paa hinanden vinkelrette Kræfter, der virker i faste Linier, samt Momenter om Kræfternes Akser. Da der for et rumligt System findes seks Ligevægtsbetingelser, ses det, at Problemet principielt kan løses som for plane Pælegrupper ved Bestemmelse af Pælens Bevægelse og derefter af Pæletrykkene.

Først er der opstillet en almindelig Teori for en uendelig stiv Pille, der i al Almindelighed er elastisk understøttet; herved faar de senere opstillede Betragtninger den bredest mulige Basis. For en saadan Pille bevises der en Del forskellige Sætninger; det vises bl. a. at der gives tre paa hinanden vinkelrette Retninger, for hvilke en Parallelforskydning svarer til en Kraft (i Almindelighed en Skruekraft) parallel med Forskydningen. Akserne for disse tre Kræfter kaldes Pælegruppens Hovedakser. Endvidere vises det, at en vilkaarlig Skruebevægelse om en Akse, der skærer vinkelret to Hovedakser, giver en Skruekraft med Akse parallel med den tredie. Herved er der angivet et fast System at knytte Beregningen til, og som slutter sig naturligt til det for plane Pælegrupper fundne, og til dette Hovedsystem henføres derfor Beregningen af den rumlige Pælegruppe. Der kunde tænkes andre Maader at bygge et Beregningsystem op paa, men da for det første disse andre Maader ikke vilde gøre Beregningerne kortere, og da det her anvendte System giver et godt Overblik over en Pælegruppes Virkemaade og giver en smuk og naturlig Tilknytning til de plane Pælegrupper, er dette System valgt.

I §§ 31, 38 og 44 er der givet almengyldige Formler for Pæletrykkene, og i §§ 33, 39 og 45 er forskellige specielle Tilfælde behandlet.

³³⁾ Beton und Eisen, 1915, S. 162.

Tillige vises det i § 32, hvorledes man kan bestemme størst Tryk i en Pæl, og i § 33 hvorledes man kan afgøre, om en Pælegruppe er bevægelig eller fast.

Endelig vises det i § 31, at Pælegruppens Inertimoment om en af de ovenfor omtalte Akser, der vinkelret skærer to Hovedakser, er det mindste, man kan faa for nogen Akse parallel dermed.

Rumlige Pælegrupper behandles saavel for simpelt understøttede Pæle som for indspændte Pæle; Indspændingen erstattes lige som for de plane Pælegrupper med tænkte Pæle, men her maa i hvert Tilfælde indføres to tænkte Pæle, der er vinkelret paa hinanden og skærer den oprindelige Pæl og begge ligger i samme Plan vinkelret paa denne.

Der er i § 28 angivet de nødvendige Betingelser, for at en rumlig Pælegruppe kan behandles som plan, hvilket kan lade sig gøre, naar alle de ydre Kræfter ligger i en Plan, i hvilken Pillens Bevægelser ogsaa foregaar.

I tredje Afsnit er behandlet plane Pælegrupper som specielt Tilfælde af rumlige, idet der for plane Pælegrupper her gives en udvidet Definition, der falder sammen med det ovenfor anførte. Det vises Punkt for Punkt, hvorledes Sætningerne for en rumlig Pælegruppe gaar over i de i første Afsnit viste Sætninger for plane Pælegrupper. Tredie Afsnit er iøvrigt skrevet saaledes, at det skal kunne forstaas, naar man har læst første Afsnit, medens det ikke skulde være nødvendigt at læse andet Afsnit.

Da rumlige Pælegrupper ikke før har været behandlet, er dette tredje Afsnit ogsaa nyt. Gullander har i sin Bog: Teori för grundpålningar paa sidste Side antydnet, hvorledes en saadan Pælegruppe, der specielt er symmetrisk om en lodret Plan, kan behandles, men der gøres ikke nærmere Rede herfor.

I §§ 49, 52 og 55 er angivet Pæletryksformler for en saaledes i udvidet Forstand plan Pælegruppe baade for simpelt understøttede og for indspændte Pæle.

I § 58 er behandlet det specielle Tilfælde, hvor en rumlig Pælegruppe er symmetrisk om to paa hinanden vinkelrette Planer; dette, der vil være det i Praksis oftest forekommende Tilfælde af rumlige Pælegrupper, giver simple Formler og er i det hele meget overskueligt.

Endelig angives i § 59 Beregningen af en rumlig Pælegruppe, hvis Pæle alle er parallelle; dette er tidligere behandlet hos Gullander, men her indgaar det som et Led i et fast opbygget System, hvorved hele Opstillingen lettes.

I fjerde Afsnit er der endelig angivet et Sammendrag til praktisk Anvendelse af de i Bogen udledede Resultater. Den praktiske Ingeniør maa ikke være nødt til, naar han i et paakommende Tilfælde skal anvende en Teori, at studere en hel Bog og finde de Resultater, som skal bruges, spredt ind mellem Stof, der for ham kun er desorienterende.

Derfor er hele Beregningsmetoden trængt sammen paa ganske faa Sider, hvor der findes alt det, som en Beregning kræver, men uden Beviser og teoretiske Betragtninger. Først behandles de plane Pælegrupper, det almindelige og bagefter alle de specielle Tilfælde, som man støder paa i det praktiske Liv. Baade simpelt understøttede Pæle og indspændte Pæle behandles.

Dernæst gives der en kort Oversigt over den Slags plane Pælegrupper, der maa betragtes som specielle Tilfælde af rumlige Pælegrupper, medens der angaaende Formler for saadanne henvises til tredie Afsnit. Vilkaarlige rumlige Pælegrupper behandles overhovedet ikke her, idet man har ment, at Beregningen af saadanne for det første ikke kan sammentrækkes ret meget i Forhold til det i andet Afsnit anførte, og for det andet fordi saadanne Pælegrupper forekommer saa sjældent i Praksis, at det ikke vilde være hensigtsmæssigt at medtage dem i en Fremstilling, der udelukkende tager Sigte paa det daglige, praktiske Liv.

I § 68 er angivet en Del færdige Formler for specielle Pælegrupper.

I § 72 er der anstillet en Sammenligning mellem de gamle Regler for Pæleberegninger og den i nærværende Bog angivne Metode. Da de gamle Regler endnu staar saa højt i Kurs og næsten altid anvendes, har man ment, at en saadan Sammenligning var meget ønskelig, idet man kun herigennem kan se, om det er nødvendigt at forlade de gamle Regler. Som Helhed vil Sammenligningen vise, at det er i højeste Grad ønskeligt at gaa over til en rationel Beregning, idet de gamle Regler i visse Tilfælde kan give fuldstændig vildledende Resultater; særlig gælder dette, da den rationelle Beregning opstillet i praktiske Former ikke vil være vanskeligere at gennemføre end de gamle Metoder.

Endelig er der i § 73 givet nogle Anvisninger paa Dimensionering af Pælegrupper. Alt, hvad der tidligere i Bogen er anført, har nærmest taget Sigte paa Beregning af Pæletryk i en given Konstruktion, medens det jo i første Omgang altid drejer sig om en Dimensionsring. At angive faste Linier for en saadan, lader sig ikke gøre, da der er saa mange Ting, man kan variere paa i et Pæleværk. Men

for de forskellige specielle Tilfælde kan man angive Fremgangsmaader og Opstillinger af Formler, hvorved man lettest kommer til nogle Dimensioner. Det er det, der i denne Paragraf er gjort, samtidig med at der er angivet forskellige Tilnærmelsesformler, der kan anvendes ved en første Gennemregning, og hvorved kan bestemmes det Pæleværk, paa hvilket de eksakte Formler da kan anvendes.

Der er enkelte Steder i Bogen anvendt smaat Tryk, som angiver, at vedkommende Del kan springes over ved Læsningen, uden at Sammenhængen brydes.

Fremstillingen er hele Bogen igennem belyst ved gennemregnede Eksempler, der ikke alene skulde tjene til at understøtte Tilegnelsen af Stoffet, men tillige skulde kunne hjælpe den udøvende Ingeniør til en praktisk Opstilling af Beregningen.

FØRSTE AFSNIT.

Plane Pælegrupper.

I. Grundlæggende Begreber.

§ 1. **Pæles Bæreevne.** Ved en Pæls Bæreevne forstaas den Belastning, som en Pæl kan bære, uden at den faar en blivende Nedsynkning.

Hvordan en Pæl overfører sin Belastning til den omgivende Jord, er et endnu ikke helt klarlagt Problem. Hvis en Pæl rammes gennem et ganske blødt Lag ned til et underliggende fast Lag, vil den fortrinsvis bære paa sin Spids; hvis derimod Pælen rammes ned i et blødt Lag uden at naa fast Bund, vil det fortrinsvis være Jordens Friktion langs Pælens Sider, der bærer denne; hvordan Friktionen fordeler sig ned langs Pælens Sider, ved man derimod ikke.

De i Praksis forekommende Tilfælde vil i Almindelighed være en Mellemtning af de to nævnte, men hvordan Belastningen fordeles mellem Friktionen langs Siderne og Trykket paa Spidsen, og hvordan Friktionen fordeler sig langs Siderne, kan ikke afgøres.

Bestemmelsen af en Pæls Bæreevne foretages i Almindelighed ud fra Resultaterne fra Ramningen, idet man maaler Pælens Nedsynkning for et Slag, Ramslagets Vægt og Faldhøjde og derfra regner Bæreevnen ud ved Hjælp af en Rammeformel, hvoraf der i Tidens Løb er fremkommet flere, saaledes Eytelweins, Brix's m. fl. Disse Formler er delvis empiriske, delvis teoretiske, men de giver kun et meget omtrentligt Billede af Forholdene. Bedre er det at foretage Belastningsforsøg med den færdigrammede Pæl, hvilket er udført ved store Arbejder i Sverrig, hvor man bl. a. foretog langvarige Belastningsforsøg. Herved kommer man de virkelige Forhold betydelig nærmere

end ved Rammeforsøg, idet Jorden har faaet Lov til at komme i Ro omkring Pælen.

Dog faar man ogsaa her et forkert Resultat, hvis man f. Eks. belaster en Pæl, der staar midt i en tæt Pælegruppe, idet et saadant Forsøg giver en større Bæreevne, end hvis Pælen stod a ene, da Belastningen ligefrem for en Del gennem Jorden overføres til de andre Pæle; det virkelige Forhold er imidlertid det, at ved tæt rammede Pæle griber de forskellige Pæles Bæreomraade ind i hinanden, saaledes at den samlede Gruppes Bæreevne er mindre end Produktet af Pælenes Antal og den enkelte Pæls Bæreevne.

Hvordan nu Pælen end overfører sin Belastning, maa man forudsætte, at Pælehovedets Nedsynkning er elastisk, d. v. s. at Belastning og Nedsynkning er forbundet ved en bestemt Lov saaledes, at naar Belastningen atter fjernes, gaar Pælen tilbage til sin oprindelige Stilling; hvis Pælen ikke er rammet saaledes, maa den betragtes som ubrugelig i et forsvarligt udført Bygværk; det er en Fordring, som stilles til alle Konstruktionsdele.

Hvis man i et Koordinatsystem afsætter Pælens Nedsynkninger som Abscisser og de tilsvarende Belastninger som Ordinatorer, vil man faa en Kurve, som vi vil kalde Pælens Arbejdslinie. Hvordan denne er, ved man ikke, den kan være retlinet som for Jern og Træ, eller den kan være krum som for Beton. Vi vil i det følgende forudsætte, at Arbejdslinien er retlinet, idet man for det første kun under den Forudsætning kan udvikle en i Praxis anvendelig Teori, og for det andet, fordi man kender for lidt til den virkelige Arbejdslinie, til at det kan være berettiget at anvende en anden og mere kompliceret Kurve. Denne Forudsætning er jo i Virkeligheden den samme, som man gør ved Bøjning selv for andre Materialer end Jern og Træ.

Under denne Forudsætning har man:

$$P = k\lambda,$$

hvor λ er Pælehovedets Nedsynkning, k en Konstant og P Belastningen. Hvis Pælen er fast understøttet kun i Spidsen og har konstant Tværsnit, har man:

$$P = \frac{EF}{s} \lambda,$$

hvor E er Elasticitetskoefficienten for Pælens Materiale, F Pælens Tværsnit og s Pælens Længde.

Hvis Pælen ikke er fast understøttet og ikke paa Spidsen alene, kan man skrive:

$$P = \frac{EF}{s_2} \lambda, \quad (1)$$

hvor s_2 er en Konstant, som kun kan bestemmes ved Forsøg. s_2 vil i det følgende blive kaldt Pælens Sammentrykningslængde, og den maa i hvert enkelt Tilfælde bestemmes enten ved Skøn eller ved Forsøg. Man vil iøvrigt senere se, at det kun er Forholdet mellem Pælens Sammentrykningslængder, der faar Betydning, hvorfor en nøjagtig Bestemmelse af den sjældent er nødvendig.

§ 2. **Pæles Indspænding.** Hvad der hidtil er sagt om Pæles Sammentrykning i Længderetningen, gælder ogsaa Pæles Sideudbøjning. Hvis Pælen er rammet langt ned i Jorden, og den faar en Sideudbøjning, vil der fremkomme Indspændingskræfter, og disse forudsættes altsaa at være elastisk afhængige af Udbøjningen, og Afhængigheden forudsættes at være lineær.

Indspændingskræfterne vil være afhængige af, om Pælen foroven er simpelt understøttet, eller om den er indspændt.

1) Hvis Pælen er simpelt understøttet foroven, vil der kun fremkomme en Tværkraft T_s i Understøtningspunktet foroven; denne vil vi forudsætte proportional med Udbøjningen, saaledes at man har:

$$T_s = k\lambda_1,$$

hvor T_s er Tværkraften, k en Konstant og λ_1 Udbøjningen. Hvis man har en Pæl, der er indspændt i et bestemt Punkt forneden, vil man have:

$$T_s = \frac{3EI_r}{s^3} \lambda_1,$$

hvor I_r er Pælens Inertimoment og s Pælens Længde fra Indspændingspunkt til Understøtningen foroven.

Hvis Pælen ikke kan siges at være indspændt i noget bestemt Punkt, kan man skrive:

$$T_s = \frac{3EI_r}{s_1^3} \lambda_1, \quad (2)$$

hvor s_1 er en Konstant, som kun kan bestemmes ved Forsøg. s_1 vil i det følgende blive kaldt Pælens Indspændingslængde,

og den maa ligesom Sammentrykningslængden i hvert enkelt Tilfælde bestemmes enten ved Forsøg eller ved et Skøn.

Hvis man regner Pælene indspændte, vil Forholdet mellem Sammentrykningslængden og Indspændingslængden indgaa i Beregningen, hvorfor det her er vigtigere at bestemme disse Længder nogenlunde rigtigt, end hvis man kun regner Pælene simpelt understøttede forneden.

2) Hvis Pælen er indspændt baade foroven og forneden, vil der i Understøtningspunktet foroven fremkomme baade en Tværkraft T_s og et Moment M_0 .

Man kan derfor skrive:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= k_1 T_s + k_2 M_0, \\ \varphi &= k_3 T_s + k_4 M_0,\end{aligned}$$

hvor λ_1 er Udbøjningen foroven, φ Vinkeldrejningen foroven og k_1 , k_2 , k_3 og k_4 Konstanter; her er iflg. *Maxwells* Sætning $k_2 = k_3$.

Hvis Pælen er indspændt i et bestemt Punkt forneden, vil man have:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= + \frac{T_s s^3}{3EI_r} + \frac{M_0 s^2}{2EI_r} \\ \text{og} \quad \varphi &= + \frac{T_s s^2}{2EI_r} - \frac{M_0 s}{EI_r},\end{aligned} \quad (3)$$

hvor s er Pælens Længde mellem Indspændingspunkterne og I_r Pælens Inertimoment.

De to Konstanter k_1 og k_2 i de først anførte Ligninger kan imidlertid altid skrives som i den første Ligning (3), naar man bestemmer en Indspændingslængde s_1 og et Inertimoment I_r derefter. Derimod er det ikke givet, at k_4 kan skrives som den sidste Konstant i den anden Ligning (3), men man kan altid skrive de to Ligninger paa følgende Form:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= + \frac{T_s s_1^3}{3EI_r} + \frac{M_0 s_1^2}{2EI_r} \\ \text{og} \quad \varphi &= - \frac{T_s s_1^2}{2EI_r} - \alpha \frac{M_0 s_1}{EI_r}.\end{aligned} \quad (3a)$$

Vi vil her sætte $\alpha = 1$, da for det første α altid vil være meget nær 1, og da de Forsøg, hvorved α skulde bestemmes, sikkert ikke kan gøres nøjagtige nok til en nærmere Bestemmelse af α .

3) Hvis Pælen er simpelt understøttet baade foroven og forneden, fremkommer der selvfølgelig ingen Indspændingskræfter.

§ 3. **Plane Pælegrupper.** Ved en plan Pælegruppe forstaas en saadan, hvor alle Pælene er parallelle med en bestemt Plan, i hvilken de ydre Kræfter virker; tillige maa Pælene være anbragt symmetrisk om Kraftplanen.

Det skal i et senere Afsnit vises, hvorledes man kan udvide Begrebet plan Pælegruppe til at omfatte alle Pælegrupper, der blot er symmetriske om Kraftplanen, saaledes at man ikke behøver at opretholde Fordringen om, at Pælene skal være parallelle med denne Plan.

Teorien for Beregningen af saadanne Pælegrupper hviler foruden paa de almindelige fra Elasticitetslæren kendte Forudsætninger tillige paa følgende to Forudsætninger:

1. Pæletrykkene er lineære Funktioner af Pælehovedets Nedsynkning, og de paa Pælen til Bøjning af denne virkende Kræfter er lineære Funktioner af Pælens Udbøjning og Vinkeldrejning.

2. Pillen er uendelig stiv i Forhold til Pælene. (Ved Pillen forstaas det Bygværk, hvori Pælene foroven er fastgjort).

Hvad den første Forudsætning angaar, har vi i de to første Paragraffer undersøgt dennes Berettigelse. Her skal blot tilføjes følgende:

Pælens elastiske Forhold er til en vis Grad uafhængig af Pælens Bæreevne, og man faar derfor ikke noget egentligt Holdepunkt til Bedømmelse heraf ved Ramningen, hvad man derimod faar ved Belastningsforsøg. Man maa i Virkeligheden gaa ud fra, at lige lange og lige svære Pæle, der er rammet i samme Slags Jord, har samme Elasticitet. Rammer man saaledes 3 Pæle efter hinanden, hvoraf Nr. 1 og 3 giver samme Nedsynkning for sidste Slag, medens Nr. 2 maaske giver det dobbelte, maa man alligevel forudsætte, at de alle tre har samme Elasticitet, især da Ramningen foregaar under en voldsom Forstyrrelse af de bærende Lag. Hvis man alligevel mener sig berettiget dertil, kan man tage Hensyn til Forskelligheden ved at finde Pæletrykkene, naar Pæl Nr. 2 svingter. Man maa i det hele taget gøre sig klart, at Beregningen kun gælder under de bestemte Forudsætninger, man har gjort med Hensyn til Pælens Elasticitet, og at det selvfølgelig er en nyttig Sik-

kerhed ved en vanskelig Jordart, som ikke er nærmere undersøgt, at regne med nogle Pæles Svingten, idet man aldrig skal stole for meget paa sine Undersøgelser af Bunden, hvis disse ikke er meget omhyggelige.

Den anden Forudsætning, at Pillen er uendelig stiv i Forhold til Pælene, vil i de aller fleste Tilfælde være lige saa rigtig som de almindelige Forudsætninger i Elasticitetslæren. Kun hvor Pillen har stor Udstrækning og ikke er konstrueret særlig stiv, kan der maaske blive grove Afvigelser fra denne Forudsætning; dog er man ogsaa i saadanne Tilfælde henvist til at regne, som om Pillen var uendelig stiv, da Beregningen ellers bliver uoverkommelig.

Naar en Pille udsættes for en Belastning, vil den paa Grund af Pælenes Sammentrykning og Udbøjning faa en Bevægelse, uendelig lille i Forhold til Systemets Udstrækning. Der bliver kun her Tale om Bevægelser i Kraftplanen, idet alle Pælene, som ovenfor defineret, er parallelle med og symmetrisk anbragt om denne Plan. Da Pillen er uendelig stiv, vil dens Bevægelse altid bestaa af en Drejning om et vist Punkt eller af en Parallelforskydning*). Kender man først Bevægelsens Drejningspunkt og Drejningens Størrelse (Parallelforskydningens Retning og Størrelse), kan man finde Pælenes Forskydninger og deraf Pæletryk og Bøjning i Pælene.

I Beregningen af en plan Pælegruppe er der derfor kun 3 ubekendte, nemlig Drejningspunktets to Koordinater og Drejningsvinklen, saaledes at Opgaven under de givne Forudsætninger kan løses med de tre statiske Ligevægtsbetingelser.

Faar Pillen en Drejning φ om Punktet O (se Fig. 21), vil Pælehovedets Forskydning i Pælens Længderetning være:

$$\lambda = r\varphi \cos \gamma = p\varphi, \quad (4)$$

hvor p er den vinkelrette Afstand fra Pkt. O til Pælen.

Pæletrykket er da:

$$P = \frac{EF}{s_2} p\varphi. \quad (5)$$

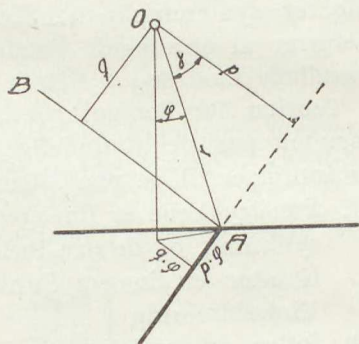


Fig. 21.

*) Se J. Hjelmslev: Lærebog i Geometri, 1917, Side 109.

Pælehovedets Bevægelse vinkelret paa Pælens Længderetning faas paa samme Maade:

$$\lambda_1 = r\varphi \sin \gamma = q\varphi,$$

hvor q er Afstanden fra O til en Linie vinkelret paa Pælen gennem Pælehovedet.

Vi vil i det følgende undersøge 3 Arter af Pæleværker,

- 1) Pæleværker, hvis Pæle er simpelt understøttede foroven og forneden,
- 2) Pæleværker, hvis Pæle er indspændt i Bunden, men simpelt understøttede i Pillen,
- 3) Pæleværker, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden.

II. Pæleværker med Pæle, der er simpelt understøttede foroven og forneden.

§ 4. **Sammenhængen mellem Paavirkning og Drejningspunkt; Inertimoment.** Som omtalt i forrige Paragraf kan man ved de tre Ligevægtsligninger bestemme Drejningspunkt og Drejningsvinkel for en vilkaarlig Belastning; man kan imidlertid finde forskellige Betingelser mellem specielle Kraftlinier og de tilhørende Drejningspunkter, saaledes at man ved at opløse den vilkaarlige Belastning paa en bestemt Maade kan skrive almengyldige Formler op for Pæletrykkene.

Pælenes Vinkel med den lodrette kaldes α og regnes positiv fra den lodrette med Uret.

Det forudsættes indtil videre, at Pilleunderkanten er plan.

Naar Pillen faar en Parallelforskydning 1 lodret nedad, vil der i en vilkaarlig Pæl fremkomme et Tryk:

$$P = \frac{EF}{s_2} \cos \alpha.$$

Idet man sætter:

$$v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha^*) \quad (7)$$

faas:

Lodret Komposant af Pæletrykkene: $P_l = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha = v.$

Vandret » » » : $P_v = \frac{EF}{s_2} \cos \alpha \sin \alpha = v \operatorname{tg} \alpha.$

*) Indført af A. Ostenfeld i Teknisk Tidsskrift 1921 Nr. 1.

Resultanten R' af disse Pæletryk gaar gennem Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter v virkende i Pælenes Skæringspunkter med Pilleunderkant og danner en Vinkel α' med den lodrette bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sum v \operatorname{tg} \alpha}{\sum v}. \quad (8)$$

Lægger man en vandret Plan i en vilkaarlig Højde, vil Skæringspunktet mellem denne og R' -Linien være Tyngdepunktet for de lodrette v -Kræfter virkende i Pælenes Skæringspunkter med Planen.

Naar Pillen faar en Parallelforskydning 1 i vandret Retning til venstre, vil der i Pælene fremkomme et Tryk:

$$P = \frac{EF}{s_2} \sin \alpha.$$

$$\text{Lodret Komposant heraf: } P_l = \frac{EF}{s_2} \sin \alpha \cos \alpha = v \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Vandret » » : } P_v = \frac{EF}{s_2} \sin^2 \alpha = v \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Resultanten R'' af disse Pæletryk gaar gennem Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter $v \operatorname{tg} \alpha$ virkende i Pælenes Skæringspunkter med Pilleunderkant og danner en Vinkel α'' med den lodrette bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sum v \operatorname{tg} \alpha}. \quad (9)$$

Det er værd at lægge Mærke til, at den vandrette Komposant af R' er lig den lodrette Komposant af R'' (jævnfør Maxwells Sætning). Vi skal senere vende tilbage hertil.

Lægger man en vandret Plan i en vilkaarlig Højde, vil Skæringspunktet mellem denne og R'' -Linien være Tyngdepunktet for de lodrette $v \operatorname{tg} \alpha$ -Kræfter virkende i Pælenes Skæringspunkter med Planen.

Af det her fremførte følger:

Naar Pillen paavirkes af en Kraft i R' -Linien, vil Pillen faa en lodret Parallelforskydning, d. v. s. dreje sig om det uendelig fjerne Punkt i vandret Retning.

Naar Pillen paavirkes af en Kraft i R'' -Linien, vil Pillen faa en vandret Parallelforskydning, d. v. s. dreje sig om det uendelig fjerne Punkt i lodret Retning.

Naar Pillen paavirkes af en vilkaarlig Kraft gennem Skæringspunktet mellem R' og R'' , vil Pillen faa en Parallelforskydning, d. v. s. have sit Drejningspunkt uendelig fjernt, idet

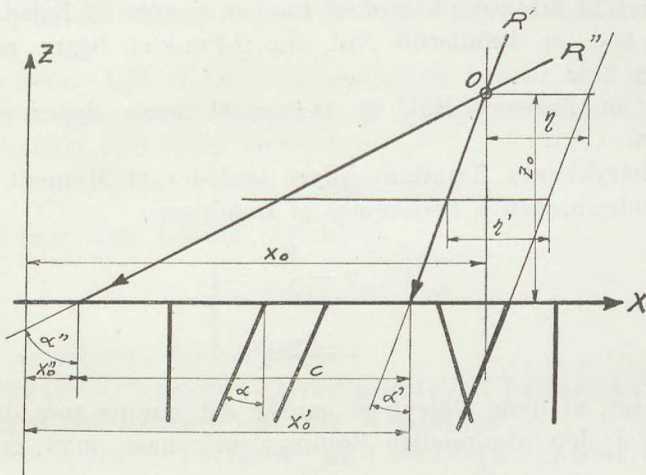


Fig. 22.

Kraften kan opløses i Komposanter efter R' og R'' , og hver af disse giver en Parallelforskydning.

Ifølge den reciproke Sammenhæng mellem Kraft og tilhørende Drejningspunkt*), som gaar ud paa, at naar en Kraft R har Drejningspunktet O , vil en Kraft R_1 gennem O have sit Drejningspunkt beliggende paa R , har man, at en Kraft gennem de to nævnte uendelig fjerne Drejningspunkter, altsaa en Kraft i Planens uendelig fjerne Linie, hvilket svarer til et Moment, har Drejningspunkt i R' og R'' Liniernes Skæringspunkt; dette Punkt kaldes Pælegruppens 0-Punkt.

Dette fremgaar ogsaa direkte af det følgende: Lægger man gennem 0-Punktet en vandret Plan i fast Forbindelse med Pillen, og giver man denne en Vinkeldrejning om en vandret Linie gennem O vinkelret paa Pælenes Plan, vil der fremkaldes Pæletryk, hvis lodrette Komposanter er:

$$P_l = \frac{EF}{s_2} p \varphi \cos \alpha = \varphi v \eta,$$

og hvis vandrette Komposanter er:

*) Se Ritter: Graphische Statik, 1900, 3. Del, S. 260, og en Artikel af H. M. Westergaard i Journ. Western Soc. of Eng. Dec. 1917.

$$P_v = \frac{EF}{s_2} p \varphi \sin \alpha = \varphi v \eta \operatorname{tg} \alpha,$$

idet η er Afstandene i denne vandrette Plan fra O -Punktet til Pælenes Skæringspunkter med Planen, positiv til højre.

$\Sigma v \eta \operatorname{tg} \alpha$ er imidlertid Nul, da O -Punktet ligger paa R'' -Linien.

$\Sigma v \eta$ er ligeledes Nul, da O -Punktet ogsaa ligger paa R' -Linien.

Pæletrykkenes Resultant bliver saaledes et Moment M , og Vinkeldrejningen φ bestemmes af Ligningen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{I} \\ I &= \Sigma v \eta^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

hvor:

Man ser, at dette Udtryk er ganske det samme som det, der findes i den almindelige Bøjningsteori, naar man erstatter Arealen med $\frac{F}{s_2} \cos^2 \alpha$.

Det Inertimoment I , som faas om Punktet O , er det mindste, der kan fremkomme i nogen vandret Plan om noget Punkt. Denne Betingelse vil mange Gange kunne føre til en direkte Bestemmelse af O -Punktet uden nogen som helst Beregning.

At dette er rigtigt, kan vises paa følgende Maade:

Lægger man en vandret Plan i en vilkaarlig Højde, faas i denne Plan Minimum af $I = \Sigma v \eta^2$ om Planens Skæringspunkt med R' -Linien, idet dette Punkt er Tyngdepunktet for v -Kræfterne. Vi vil nu opsøge den Plan, hvor dette Inertimoment er Minimum.

Idet der lægges et Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i O -Punktet (Skæringspunktet mellem R' og R'') og med lodret z -Aakse, positiv opad og med vandret Abscisseakse, positiv til højre, har man for Pælenes Skæringspunkter med en vandret Plan i Afstanden z fra Abscisseaksen (se Fig. 22):

$$\eta' = \eta + z (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'),$$

hvor η er Abscissen til Pælens Skæringspunkt med Abscisseaksen, η' den vandrette Afstand fra R' -Linien til Pælen i den nævnte Plan.

Man finder da:

$$I = \Sigma v \eta'^2 = \Sigma v \eta^2 + z^2 \Sigma v (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha')^2 + 2z \Sigma v \eta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha').$$

I dette Udtryk er det sidste Led Nul, da:

$$\Sigma v\eta \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \text{og} \quad \Sigma v\eta = 0,$$

idet Begyndelsespunktet baade ligger paa R'' -Linien og R' -Linien.

Det første Led er konstant, det andet Led er altid positivt, og man faar derfor Minimum af I , hvis dette andet Led er Nul, hvilket kun sker, naar:

$$z = 0.$$

Altsaa faar man $I_{\min}$ om O -Punktet.

$$\text{Da:} \quad I = \Sigma v\eta^2 = \Sigma \frac{EF}{s_2} p^2, \quad (11)$$

er altsaa følgende Sætning bevist:

O -Punktet er saaledes beliggende, at Pælenes Inertimoment om dette Punkt er Minimum.

I de specielle Tilfælde og i Eksemplerne er denne Sætning anvendt flere Gange.

Kaldes i et vilkaarligt Koordinatsystem med X -Aksé i Pilleunderkant, positiv til højre, og lodret Z -Aksé positiv opad, Abscissen til R' -Liniens Skæringspunkt med Pilleunderkant for x'_0 og til R'' -Liniens Skæringspunkt med Pilleunderkant for x''_0 , og kaldes O -Punktets Koordinater x_0 og z_0 , har man:

$$x_0 - x'_0 = z_0 \operatorname{tg} \alpha'; \quad x_0 - x''_0 = z_0 \operatorname{tg} \alpha'', \quad (12)$$

hvoraf følger:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}; & x_0 &= x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha', \\ \text{hvor:} & & c &= x'_0 - x''_0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

x_0 og z_0 kan altsaa beregnes ved Hjælp af $\operatorname{tg} \alpha'$, $\operatorname{tg} \alpha''$ og Tyngdepunkterne for Kræfterne v og $v \operatorname{tg} \alpha$.

η findes af Formlen:

$$\eta = x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (14)$$

Iøvrigt ser man af Udtrykket $I = \Sigma \frac{EF}{s_2} p^2$, at Inertimomentet er uafhængigt af Pilleunderkantens Retning og Beliggenhed.

§ 5. **Pæletrykkene.** Naar Pillen faar en lodret Bevægelse i nedad, vil Pæletrykkets lodrette Komposant være:

$$P \cos \alpha = v,$$

medens Resultanten af alle Pæletrykkene er en Kraft

$$\frac{\Sigma v}{\cos \alpha'}, \text{ i Retningen } R'.$$

Naar Pælegruppen derfor paavirkes af en Kraft R' , positiv i den paa Fig. 22 angivne Retning, vil Pæletrykkets lodrette Komposant være:

$$P \cos \alpha = R' \cos \alpha' \frac{v}{\Sigma v}.$$

Naar Pillen faar en vandret Bevægelse 1 til venstre, vil Pæletrykkets lodrette Komposant være:

$$P \cos \alpha = v \operatorname{tg} \alpha,$$

medens Resultanten af alle Pæletrykkene er en Kraft

$$\frac{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin \alpha''} \text{ i Retningen } R''.$$

Naar Pælegruppen derfor paavirkes af en Kraft R'' , positiv i den paa Fig. 22 angivne Retning, vil Pæletrykkets lodrette Komposant være:

$$P \cos \alpha = R'' \sin \alpha'' \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Naar Pillen faar en Drejning φ om O-Punktet, positiv med Uret, vil Pæletrykkets lodrette Komposant være:

$$P \cos \alpha = + \frac{EF}{s_2} p \varphi \cos \alpha = + v \varphi \eta.$$

Da:

$$\varphi = \frac{M}{I},$$

faas:

$$P \cos \alpha = + M \frac{v \eta}{I}.$$

En vilkaarlig Belastning kan altid reduceres til en Kraft R' , en Kraft R'' og et Moment M .

Pæletrykkets lodrette Komposant er da:

$$P \cos \alpha = R' \cos \alpha' \frac{v}{\Sigma v} + R'' \sin \alpha'' \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha} + M \frac{v \eta}{I}. \quad (15)$$

Man kan i Stedet for en Opløsning af den vilkaarlige Belastning i R' , R'' og M foretage en Opløsning i Q_z , Q_x og M , hvor Q_z og Q_x er henholdsvis en lodret og en vandret Kraft

gennem O -Punktet, positiv i Koordinataksernes negative Retninger.

Idet: $Q_z = R' \cos \alpha' + R'' \cos \alpha''$

og

$$Q_x = R' \sin \alpha' + R'' \sin \alpha'',$$

faas:

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\Sigma v} \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{v}{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} \left. \vphantom{\frac{v}{\Sigma v}} \right\} (16)$$

$$+ M \frac{v r_l^*}{I}.$$

§ 6. **Hovedakserne**).** Til Bestemmelse af disse anvender vi kun Parallelforskydninger og dertil hørende Kræfter, der jo gaar gennem O -Punktet.

En lodret Parallelforskydning 1, d. v. s. en Bevægelse med Drejningspunkt i den vandrette Linies uendelig fjerne Punkt, giver en Kraft i sin egen Retning paa Σv og en Kraft vinkelret derpaa paa $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha$.

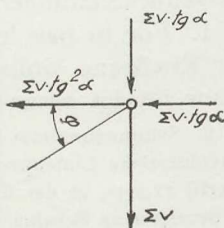


Fig. 23.

En vandret Parallelforskydning 1, d. v. s. en Bevægelse med Drejningspunkt i den lodrette Linies uendelig fjerne Punkt, giver en Kraft i sin egen Retning paa $\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha$ og en Kraft vinkelret derpaa paa $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha$.

Hvis man giver Piller en Parallelforskydning i en Retning, der danner Vinklen φ med den vandrette, faar man en Kraft, hvis Projektion i og vinkelret paa Bevægelsen kaldes henholdsvis R_n og R_f .

Af hosstaaende Figur 23, hvor Kræfterne fra en lodret og en vandret Forskydning 1 er angivet, finder man, idet Bevægelsen opløses i en vandret Bevægelse $1 \cdot \cos \varphi$ og en lodret Bevægelse $1 \cdot \sin \varphi$:

$$R_n = \cos^2 \varphi \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \varphi \Sigma v + \sin 2\varphi \Sigma v \operatorname{tg} \alpha.$$

$$R_f = \frac{1}{2} (\Sigma v - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \Sigma v \operatorname{tg} \alpha.$$

Disse Transformationsligninger er de samme som dem, man finder for en plan Spændingstilstand***), naar man erstatter

*) Udtrykkene (15) og (16) er i en lidt anden Form opstillet af A. Ostensfeld i Teknisk Tidsskrift 1921 Nr. 1.

**) Hvad der findes i dette Afsnit, er principielt bevist i Ritter: Graphische Statik, III Bd. 1900, S. 264. Fremstillingen her er dog en væsentlig anden.

***) Se saaledes A. Ostensfeld: Elasticitetslære, 1916, S. 66.

Snit med Retning til Drejningspunkt, Normalspænding med Kraft i Bevægelsesretning (σ_x og σ_y med henholdsvis $\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha$ og Σv) og Forskydningsspænding med Kraft vinkelret paa Bevægelsen (τ med $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha$). Kraften i Bevægelsesretningen vil iøvrigt altid kunne skrives som $\Sigma \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha$, hvor α maales i Forhold til Bevægelsesretningen, Kræfter vinkelret paa Bevægelsen paa samme Maade som $\Sigma \frac{EF}{s_2} \cos \alpha \cdot \sin \alpha$.

Man vil derfor have ganske de samme Relationer mellem Retning til Drejningspunkt og tilhørende Kraft som mellem sammenhørende Snit og Spænding, og man kan derfor opstille følgende Sætninger:

1. For to paa hinanden vinkelrette Parallelforskydninger 1 er Kræfterne vinkelret paa Bevægelsen lige store; dette fremgaar iøvrigt ogsaa direkte af Betti's Sætning*).

2. Sammenhørende Retninger til Drejningspunkt og Kraffretninger danner involutoriske Liniebundter; Involutionen har ingen Dobbeltstraaler, da der hertil kræves, at der findes Bevægelser, for hvilke Komposanten af Kraften i Bevægelsens Retning gaar imod Bevægelsen.

Heraf følger, at Kraffretning og Retning til Drejningspunkt kan ombyttes. Dette gælder iøvrigt ogsaa for Kræfter, der ikke gaar gennem O , naar man blot taler om Retningen fra O til Drejningspunktet, idet en saadan Kraft foruden en Drejning om det uendelig fjerne Punkt i en vis Retning tillige giver en Drejning om O . Retningen fra O til Drejningspunktet vil saaledes være ens for alle parallelle Kræfter.

3. Der findes to paa hinanden vinkelrette Retninger, i hvilke en Parallelforskydning giver en Kraft i sin egen Retning. Disse to Retninger kaldes Pælegruppens Hovedakser og bestemmes af Ligningen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\Sigma v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma v - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\cotg \alpha' - \operatorname{tg} \alpha''}, \quad (17)$$

hvor ω er Hovedaksernes Vinkel med den lodrette.

Dette Udtryk kan iøvrigt ogsaa let udledes direkte ved at udtrykke, at en Parallelforskydning i Retningen ω giver saadanne Pæletryk, at Summen af disses Projektioner paa en Linie vinkelret paa Bevægelsen er Nul.

4. Hvis man ud fra O afsætter som Radius vector de til de forskellige Bevægelsesretninger svarende Kræfter, vil man fremstille en Ellipse, hvis Hovedakser er Pælegruppens Hovedakser. Radius vector i disse kaldes henholdsvis R_I og R_{II} .

*) Se A. Ostenfeld: Teknisk Statik I, 1920, S. 282.

5. I en Ellipse med Hovedakser i Pælegruppens Hovedakser og med Halvakser af Længden $\sqrt{R_I}$ og $\sqrt{R_{II}}$ vil konjugerede Diametre være sammenhørende Kraftretninger og Retninger til Drejningspunkt. For de Bevægelsesretninger, der svarer til de om Hovedakserne symmetriske konjugerede Diametre, har man den største Afvigelse mellem Kraft- og Bevægelsesretning.

6. Hovedaksernes Retninger og Længder findes lettest grafisk ved Land's Cirkelkonstruktion*), idet man gaar ud fra en vandret og en lodret Bevægelse:

Heraf faas:

$$R_I = T2, \quad R_{II} = T1.$$

Vil man beregne Hovedaksernes Retning, anvendes den før anførte Ligning (17).

Størrelsen af R_I og R_{II} findes af Ligningerne:

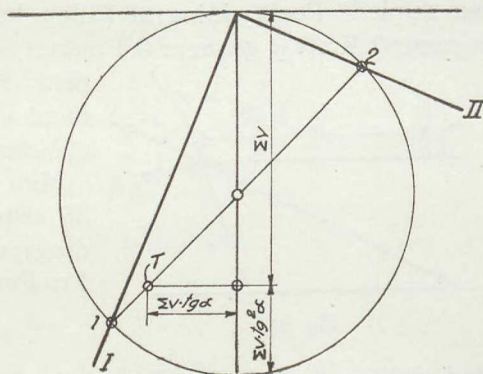


Fig. 24.

$$\left. \begin{matrix} R_I \\ R_{II} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\Sigma v + \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha) \pm \sqrt{(\Sigma v - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + 4 (\Sigma v \operatorname{tg} \alpha)^2}. \quad (18)$$

§ 7. **Drejningspunktets Beliggenhed.** En Drejning kan opfattes som en Vektor beliggende i Drejningsaksen og af Størrelse lig Drejningsvinklen, positiv i den Retning, hvorfra Drejningen ses mod Urviseren, og en Parallelforskydning kan opfattes som et Vektorpar i en Plan vinkelret paa Parallelforskydningens Retning; dette Moment drejer mod Uret, naar det ses fra den Side, hvor hen ad Forskydningen gaar **).

Naar man for en vilkaarlig Belastning vil finde det tilsvarende Drejningspunkt, kan man gaa frem paa følgende Maade:

Den vilkaarlige Belastning reduceres til en Kraft R' , en Kraft R'' og et Moment M , og man finder da:

En Kraft R' giver en Parallelforskydning lodret nedad:

$$y' = \frac{R'}{\left(\frac{\Sigma v}{\cos \alpha'} \right)}.$$

En Kraft R'' giver en Parallelforskydning vandret til venstre:

*) Se A. Ostfeld: Elasticitetslære, 1916, S. 67.

**) Se C. Juel: Rationel Mekanik, 1913, S. 165.

$$y'' = \frac{R''}{\left(\frac{\sum v \operatorname{tg}^3 \alpha}{\sin \alpha''} \right)}$$

Momentet M giver en Drejning:

$$\varphi = \frac{M}{I}.$$

Den samlede Forskydning af Pillen kan derfor opfattes som en vandret Kraft φ gennem O -Punktet (vinkelret paa Pælegruppens Symmetriplan), et Moment y' i en vandret Plan og et Moment y'' i en lodret Plan.

Man faar derfor den i Fig. 25 viste Konstruktion af Drejningspunktet O' :

Fra Punkt O afsættes et Stykke

$$a = \frac{y'}{\varphi} = \frac{R'}{\varphi} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\sum v}$$

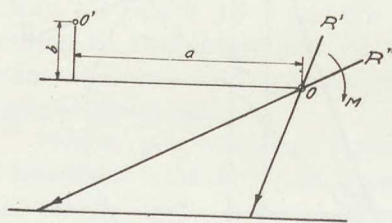


Fig. 25.

udad en vandret Linie. Fra dette Liniestykkes Endepunkt afsættes udad en lodret Linie Stykket

$$b = \frac{y''}{\varphi} = \frac{R''}{\varphi} \cdot \frac{\sin \alpha''}{\sum v \operatorname{tg}^3 \alpha}.$$

Herved kommer man til Punkt O' , det endelige Drejningspunkt for den givne Belastning.

Man finder nu Pæletrykkenes lodrette Komposanter:

$$P \cos \alpha = + v \varphi \eta' = + M \frac{v \eta'}{I},$$

hvor I er Inertimomentet om O -Punktet, og η' er den vandrette Afstand fra det endelige Drejningspunkt O' , positiv til højre.

Det kan imidlertid paa-vises, at Kraftlinie og Drejningspunkt er Polar og Antipol til en Ellipse med Hovedakser i Pælegruppens Hovedakser *).

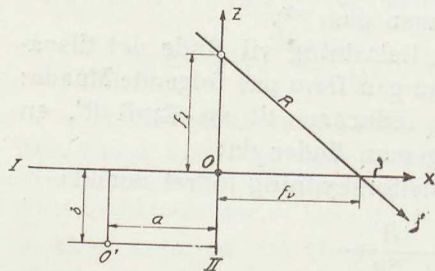


Fig. 26.

I Figur 26 er angivet Pælegruppens to Hovedakser I og II, der anvendes som Koordinataksler. R er den angribende Kraft, O' det tilsvarende Drejningspunkt.

*) Se Ritter: Graphische Statik, III. Bd, 1900, S. 264.

R_l og R_v er Kraften R 's Komposanter efter henholdsvis II og I.

Man har nu Momentet om O -Punktet:

$$M = -R_l f_v = -R_v f_l,$$

hvor f_l og f_v er Afstanden fra O til R 's Skæringspunkt henholdsvis med II og I.

Koordinaterne til Drejningspunktet O' :

$$a = + \frac{y''}{\varphi} = - \frac{R_l}{R_{II}} \cdot \frac{I}{f_v \cdot R_l} = - \frac{I}{R_{II} f_v},$$

$$b = + \frac{y'}{\varphi} = - \frac{R_v}{R_l} \cdot \frac{I}{f_l R_v} = - \frac{I}{R_l f_l}.$$

Den Linie, hvori R virker, har Ligningen:

$$\frac{x}{f_v} + \frac{z}{f_l} = 1.$$

Hvis man heri indsætter de Værdier for f_v og f_l , som findes af de ovenfor anførte Udtryk for a og b , faar man:

$$\frac{xa}{\left(\frac{I}{R_{II}}\right)} + \frac{zb}{\left(\frac{I}{R_l}\right)} = -1.$$

Dette er Ligningen for Punkt O' 's Antipolar med Hensyn til en Ellipse med Halvakserne:

$$\sqrt{\frac{I}{R_{II}}} \text{ og } \sqrt{\frac{I}{R_l}}.$$

Man har altsaa: Kraftlinie og Drejningspunkt er Polar og Antipol med Hensyn til en Ellipse, der har Hovedakser i Pælegruppens Hovedakser, og hvis Halvakser har Længderne:

$$\sqrt{\frac{I}{R_{II}}} \text{ og } \sqrt{\frac{I}{R_l}}.$$

§ 8. Farligste Belastning for en Pæl; Pælegrupper, hvor Pælene ikke kan tage Træk. Vi vil nu undersøge Indflydelsen paa Pæletrykket i en vilkaarlig Pæl af en Kraft af Størrelsen 1, naar denne indtager forskellige Stillinger i Kraftplanen. Først vil vi finde de Stillinger, der giver Pæletrykket Nul.

En Influenslinie for lodrette Kræfter vil være retlinet og have sit Nulpunkt i Afstanden e_v fra O -Punktet. Man skal derfor for at faa Maximum eller Minimum i Pælen kun tage de lodrette Kræfter med paa den ene Side af Punkt K .

Hvis Belastningen kun bestod af en vandret Kraft, Q_x , vilde Pæletrykket være:

$$P \cos \alpha = Q_x \frac{v}{\sum v \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} - Q_x e_l \frac{v \eta}{I},$$

hvor e_l er Kraftens Afstand fra O , positiv opad.

Skal Pæletrykket være Nul, findes:

$$e_l = \frac{I}{\eta \sum v \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}. \quad (20)$$

En vandret Kraft i denne Beliggenhed gaar ligeledes gennem Punkt K ; e_v og e_l er saaledes Punkt K 's Koordinater i Forhold til O -Punktet.

Paa samme Maade som for lodrette Kræfter vil Influenslinien for vandrette Kræfter være retlinet og have sit Nulpunkt i Højden e_l .

Man skal derfor, for at faa Maximum eller Minimum af Pæletryk, kun tage de vandrette Kræfter med paa den ene Side af Punkt K .

Om Kræfter parallelle med en vilkaarlig Retning vil man almindeligt kunne sige, at en Linie gennem K er Nullinie, og Kræfter paa den ene Side af denne Linie giver positivt Pæletryk, Kræfter paa den anden Side negativt Pæletryk.

Hvis Pælene i en Pælegruppe ikke kan overføre Træk, maa man, naar Beregningen giver Træk i en Pæl, udskyde en saadan og saa gentage Beregningen; da man herved kommer til at operere med en ny Pælegruppe, der har et andet O -Punkt, andre $\operatorname{tg} \alpha'$ og $\operatorname{tg} \alpha''$ m. m. end den oprindelige, vil denne Fremgangsmaade være temmelig besværlig, og vi skal derfor anføre en anden Maade, der kan gøre en saadan Beregning hurtigere.

I hosstaaende Fig. 28 er vist en Pælegruppe, hvor den yderste Pæl til højre faar Træk; den ydre Belastning skal nu holde Ligevægt med de resterende Pæle. Hvis man tænkte sig, at man bibeholdt Trækpælen, men satte en Kraft N_r paa i Pælens Retning, lig og modsat rettet det Træk, som den ydre Belastning samt N_r fremkalder i Pælen, vilde man opnaa akkurat det samme, som om Trækpælen var taget bort, idet den ydre Belastning nu holder Ligevægt med de resterende Pæle plus to ligestore og modsat rettede Kræfter.

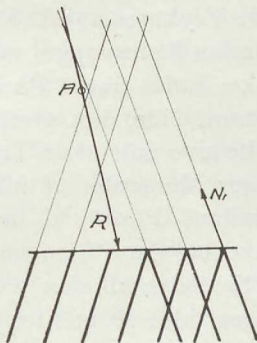


Fig. 28,

Det Pæletryk, der fremkaldes af en Kraft 1 i Pælens Retning, positiv modsat rettet det paa Figur 28 for N_r viste, kaldes X_r .

Naar nu Pæletrykket skal være N_r for den ydre Belastning plus Kraften N_r , idet denne regnes positiv som angivet i Figur 28, faar man:

$$N_r = P_0 - N_r X_r,$$

hvor P_0 er Pæletrykket for den ydre Belastning i den oprindelige Pælegruppe:

$$N_r = \frac{P_0}{1 + X_r}. \quad (21)$$

Nu beregnes altsaa de øvrige Pæletryk for den ydre Belastning samt N_r .

Hvis der er flere Pæle, der faar Træk, maa der sættes en Kraft N_r for hver af disse Pæle; man faar da:

$$N_r = P_{r0} - N_r X_{rr} - N_p X_{rp} \dots$$

$$N_p = P_{p0} - N_r X_{pr} - N_p X_{pp} \dots$$

Ved X_{rp} forstaas Trykket i Pælen r for en Kraft 1 nedad i Pæl p o. s. v.

Af disse Ligninger kan man finde de Kræfter N , der skal anbringes paa Pælegruppen. Man ser let, at ogsaa denne Metode bliver besværlig, hvis det er mange Pæle, der faar Træk. I et saadant Tilfælde vil det betale sig straks at udskyde alle Trækpælene, dog ikke saadanne, der staar lige paa Grænsen, man regner saa om med denne nye Pælegruppe, og hvis endnu en enkelt Pæl faar Træk, behandles den paa den ovenfor anførte Metode.

Naar man saaledes borttager Virkningen af de Pæle, der faar Træk, er det sandsynligst, at Drejningspunktet for Belastningen rykker bort fra disse Pæle; derved vil maaske endnu en eller flere Pæle faa Træk, og disse maa saa som ovenfor omtalt ogsaa udelades. Men utænkeligt er det ikke, at en Pæl, der i den oprindelige Pælegruppe fik et Træk, efter Fjernelsen af nogle Trækpæle kan faa et Tryk; dog vil dette kun sjældent ske og kun, hvis det er et meget lille Træk, den faar.

Imidlertid findes der Kræfter, der ikke kan optages af en Pælegruppe, hvis Pæle ikke kan overføre Træk, ligesom der er Kræfter, der ikke kan optages af et Tværsnit, der kun kan yde Trykmodstand. For at en Kraft skal kunne optages af en saadan Pælegruppe, maa den være saaledes beliggende, at der ikke findes noget Punkt i Kraftlinien, der har alle Pælene til samme Side, d. v. s. at en Drejning af Pillen om dette Punkt maa ikke give enten kun Tryk eller kun Træk i Pælene; thi hvis man tager Momentet af alle de paa Pillen virkende Kræfter om et saadant Punkt, vil man ikke kunne faa Ligevægt, hvis der ikke er Træk i nogen Pæl.

Saaledes vil den paa Figur 28 viste Kraft R ikke kunne optages, idet Momentet om A aldrig vil kunne blive Nul.

Ligeledes vil en Kraft, hvis Hældning er større end de mest hældende Skraapæle, aldrig kunne optages, hvilket ogsaa ses umiddelbart, hvis man projicerer paa en Linie vinkelret paa Kraften.

§ 9. **Almindelige Bemærkninger.** Denne Udvikling vil principielt ikke forandres, selv om Pilleunderkanten ikke, hvad der før har været forudsat, er retlinet, idet Pæletrykkene kun er afhængige af den vinkelrette Afstand fra Drejningspunktet til Pælen. Hvis der bruges en grafisk Metode*) til Bestemmelse af R' og R'' , gør man slet ikke Brug af Pilleunderkanten. Hvis man bruger Beregning til Bestemmelse af R' , R'' og O -Punktet, kan man altid indlægge en vilkaarlig ret Linie som en regningsmæssig Pilleunderkant, idet man saa maa regne Pælenes Vinkler α ud fra en Linie vinkelret paa Pilleunderkanten.

Som vist Side 51 er:

$$I = \sum v\eta^2 = \sum \frac{EF}{s_2} p^2$$

uafhængig af den valgte Retning for Pilleunderkanten.

Da man i Almindelighed ønsker at gøre Pælegruppen saa stiv som mulig, d. v. s. Vinkeldrejningen φ og en Parallelforskydning særlig i II. Hovedakse saa lille som mulig, skal vi her undersøge, hvad der kan gøres i den Retning (Pæletrykkene vil vokse med aftagende Stivhed).

Da O -Punktet ligger saaledes, at Inertimomentet $I = \sum v\eta^2$ om dette Punkt skal være Minimum, vil det ligge i en saadan Højde, at Skraapælenes Retningslinier her er samlede saa meget som muligt. Derfor bør man i al Almindelighed sætte Lodpælene yderst i Gruppen og sætte parallelle Skraapæle saa langt fra hinanden som muligt. Tillige bør man anbringe disse sidste saaledes, at O -Punktet kommer saa nær som muligt i den Højde, hvori de vandrette Kræfter Q_x paavirker Gruppen, idet en Højdeforskel e her imellem frembringer et Moment $M = Q_x \cdot e$, som giver yderligere Pæletryk.

Samtidig bør man saa vidt muligt sørge for, at den farligste Resultant af de ydre Kræfter virker efter Pælegruppens første Hovedakse, da dette giver den mindste Forskydning og derfor ogsaa de mindste Pæletryk; den ydre Kraft vil, naar den ligger i første Hovedakse, fordele sig mest ligeligt over Pælene.

Endelig skal det bemærkes, at hvis O -Punktet ligger imellem Q_x -Kraften og Pilleunderkant, vil den vandrette Bevægelse fra Q_x , virkende i O -Punktet, modvirke den vandrette Bevægelse fra Momentets Drejning, medens det omvendte vil være Tilfældet, naar O -Punktet ikke ligger mellem Q_x -Kraften og Pille-

*) Angaaende saadanne: Per Gullander: Teori för grundpålningar og den tidligere citerede Artikel af H. M. Westergaard.

underkant. Dette har Betydning, naar Pælene bliver paavirkede til Bøjning fra Indspændinger, og vi vil derfor vende tilbage hertil i et senere Afsnit.

Disse Betragtninger gælder kun som en Vejledning ved Pæleplaceringen. I Almindelighed er denne ret bunden af praktiske Hensyn, men det, der kan gøres i de antydede Retninger, vil altid virke til Gunst for Pælegruppen.

§ 10. Specielle Tilfælde.

1. Alle Pælene i Pælegruppen er parallelle.

En saadan Pælegruppe vil kun kunne optage en Kraft, der er parallel med Pælenes Retning; en Kraft i en hvilken helst anden Retning vil selvfølgelig ikke kunne holde Ligevægt med Pæletrykkene, hvilket umiddelbart ses ved at projicere paa en Linie vinkelret paa Pæleretningen.

Ved Beregningen af Pæletrykkene er det simplest at indlægge en regningsmæssig Pilleunderkant vinkelret paa Pælene. Pæletrykkene er da:

$$P = Q_z \frac{v}{\Sigma v} - M \frac{v\eta}{I}. \quad (22)$$

2. Pælene kan deles i to Grupper, indenfor hvilke de er indbyrdes parallelle.

Ifølge Sætningen om, at $I = \Sigma v\eta^2$ skal være Minimum, indser man umiddelbart, at O-Punktet ligger i Skæringspunktet mellem de to Grupper Tyngdepunktslinier.

En Kraft i den ene Gruppens Tyngdepunktslinie giver kun Pæletryk i denne Gruppe, hvoraf følger, at Pillen faar en Parallelforskydning vinkelret paa den anden Gruppens Pæleretning. Hvis derfor de to Retninger for Pælene er vinkelret paa hinanden, falder Hovedaksernes Retninger sammen med Pæleretningerne. Pæletrykkene for en saadan Kraft er ligefrem proportionale med Pælenes v -Kræfter.

Hvis den ene Gruppens Pæle er lodrette, vil α'' være lig den anden Gruppens Pælehældning, medens α' bestemmes som sædvanlig af Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma v}.$$

Hvis Pælegruppen paavirkes af en Kraft, der gaar gennem O-Punktet (Skæringspunktet mellem de to Pælegrupper Tyngdepunktslinier), kan man simpelthen foretage en Opløsning i de

to Pæleretninger af Kraften og fordele de derved fremkomne Kræfter over Pælene; hvis den ydre Kraft ikke gaar gennem O-Punktet, kan man foretage den samme Opløsning, naar man blot i Pæletrykket tager Hensyn til Kraftens Excentricitet.

Har den ene Pælegruppe Hældningen $\frac{1}{n_1}$ og den anden Hældningen $-\frac{1}{n_2}$, findes Pæletrykkene:

Første Gruppe (Hældning $\frac{1}{n_1}$):

$$P_s = Q_x \frac{1}{n_1 + n_2} \sqrt{1 + n_1^2} \frac{v}{\Sigma_s v} + Q_x \frac{n_2}{n_1 + n_2} \sqrt{1 + n_1^2} \frac{v}{\Sigma_s v} + M \frac{v\eta}{I} \cdot \frac{\sqrt{1 + n_1^2}}{n_1} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{n_1 + n_2}} \right\} \quad (23)$$

Anden Gruppe (Hældning $-\frac{1}{n_2}$):

$$P_t = Q_x \frac{1}{n_1 + n_2} \sqrt{1 + n_2^2} \frac{v}{\Sigma_t v} - Q_x \frac{n_1}{n_1 + n_2} \sqrt{1 + n_2^2} \frac{v}{\Sigma_t v} + M \frac{v\eta}{I} \cdot \frac{\sqrt{1 + n_2^2}}{n_2} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{n_1 + n_2}} \right\}$$

Ved $\Sigma_s v$ forstaas en Summation kun over første Gruppens Pæle, ved $\Sigma_t v$ en Summation kun over anden Gruppens Pæle.

$\frac{\Sigma_s v}{v}$ og $\frac{\Sigma_t v}{v}$ kan tilnærmelsesvis sættes lig henholdsvis første og anden Gruppens Pæleantal.

Hvis den ene Pælegruppe bestaar af Lødpæle, f. Eks. $n_2 = \infty$, findes:

Tryk i Skraapæle:

$$P_s = Q_x \sqrt{1 + n^2} \frac{v}{\Sigma_s v} + M \frac{v\eta}{I} \cdot \frac{\sqrt{1 + n^2}}{n} \quad \left. \vphantom{\frac{v}{\Sigma_s v}} \right\} \quad (23a)$$

Tryk i Lødpæle:

$$P_t = Q_x \frac{v}{\Sigma_t v} - Q_x n \frac{v}{\Sigma_t v} + M \frac{v\eta}{I} \quad \left. \vphantom{\frac{v}{\Sigma_t v}} \right\}$$

Er Skraapælenes Hældning negativ, skal Fortegnene for Q_x 's Bidrag til Pæletrykkene have modsat Fortegn af de angivne.

Disse Formler egner sig godt til Dimensionering af Pæleantallene og Pæledimensioner, idet Momentet M sjældent faar større Betydning, naar man placerer Pælene saa centralt om Kraftlinien som muligt og spreder dem, saa Inertimomentet bliver stort; bedst er det, hvis de to Gruppers Tyngdepunktslinier skærer hinanden i Kraftlinien, da Momentet i saa Tilfælde bliver Nul.

Selvfølgelig er det i alle Tilfælde kun ved en foreløbig Beregning, at Momentets Indflydelse kan bortkastes, se iøvrigt nærmere herom i § 73.

3. Pælegruppen er symmetrisk om en lodret Linie. I dette Tilfælde er $\sum v \operatorname{tg} \alpha = 0$, hvorfor man har:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sum v \operatorname{tg} \alpha}{\sum v} = 0; \quad \alpha' = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sum v \operatorname{tg} \alpha} = \infty; \quad \alpha'' = 90.$$

Tyngdepunktet for v -Kræfterne ligger i Symmetrilinien, Tyngdepunktet for $v \operatorname{tg} \alpha$ -Kræfterne ligger uendelig fjernt.

O -Punktet maa selvfølgelig ligge paa Symmetrilinien, og dets Højde over Pilleunderkant er bestemt ved:

$$z_0 = - \frac{\sum vx \operatorname{tg} \alpha}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (24)$$

Det ses heraf, at z_0 kun er afhængig af Skraapælene. Hvis Skraapælene i den ene Halvdel af Pælegruppen er parallelle, ligger O -Punktet i Skæringspunktet mellem en Linie parallel med Skraapælene gennem disses Tyngdepunkt og Z -Aksen. Dette ses umiddelbart af Sætningen om Minimum af Inerti-moment, men ses ogsaa af Ligningen for z_0 .

Paa Grund af Symmetrien kan man nøjes med at medtage Skraapælene i den ene Halvdel; $\operatorname{tg} \alpha$ er da konstant:

$$z_0 = - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\sum vx}{\sum v} = - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} x_a,$$

hvor x_a er Afstanden fra Symmetrilinien til Skraapælenes Tyngdepunktslinie.

Pæletrykkets lodrette Komposant er:

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\sum v} + Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha} + M \frac{v \eta}{I}. \quad (25)$$

Pælegruppens første Hovedakse er Symmetrilinien, den anden Hovedakse en vandret Linie gennem O -Punktet.

Det vil ses af Formlen for Pæletryk, at en vandret Kraft Q_x kun giver Tryk i Skraapælene.

Endvidere ser man, at hvis der kun findes 1 Skraapæl i hver Retning, vil et Moment kun give Tryk i Lodpælene (O -Punktet ligger nemlig i saa Fald i Skraapælenes Skærings-

punkt). I hvert Fald kan man sige, at hvis man sætter Lodpælene yderst i Gruppen, vil Skraapælene kun i forsvindende Grad blive paavirket af et Moment. For at faa alle Pælene udnyttet saa godt som muligt skal man sørge for, at Lodpælene optager Momentet, medens Skraapælene jo optager den vandrette Kraft. Dette opnaas ved at sætte Lodpælene yderst i Pælegruppen og samle Skraapælene i Midten (se saaledes f. Eks. Fig. 34).

4. Alle Pælene skærer hinanden i samme Punkt.

Da O -Punktet ligger saaledes, at $I = \sum v\eta^2$ herom er Minimum, ser man, at O -Punktet ligger i Pælenes Skæringspunkt, idet man der har $I = 0$.

Heraf følger, at naar Pælegruppen paavirkes af et Moment, faar Pillen en Drejning:

$$\varphi = \frac{M}{I} = \infty.$$

Dette vil sige, at Pælegruppen er bevægelig for et Moment, eller sagt paa en anden Maade, at Pælegruppen kun kan optage en Kraft gennem Pælenes Skæringspunkt, hvilket ogsaa indses umiddelbart.

Den Side 17, § 7 omtalte Ellipse bliver i dette Tilfælde et Punkt. Derfor vil en hvilken som helst Kraft udenfor O -Punktet have sit Drejningspunkt beliggende i O -Punktet.

Drejningspunktet for en Kraft gennem O -Punktet er ubestemt, kun Retningen til det er bekendt, nemlig konjugeret Diameter med Krafftreningen i Ellipsen. Dette kan paa en anden Maade forklares saaledes:

Giver man først Pillen en Parallelforskydning i en Retning vinkelret paa den fundne Retning til Drejningspunktet, vil Resultanten af Pæletrykkene netop være den givne Kraft igennem O -Punktet, og en derpaa følgende Drejning om dette Punkt vil intet yderligere Pæletryk fremkalde.

For at denne Pælegruppe kan blive brugelig, maa Pælene være indspændte enten forneden alene eller baade foroven og forneden, hvorfor den vil blive omtalt nærmere senere. Dette vil iøvrigt sige, at ved denne Pælegruppe er Pælenes Indspændinger ikke af sekundær Betydning, som de er ved de andre Pælegrupper. Forskellen kan karakteriseres ved Forskellen mellem en Brodrager, der er opbygget af Trekant-systemer, og en Vierendeeldrager.

5. Pælegrupper, der paavirkes dels af aktive og dels af passive Kræfter.

Efter den Anvendelse, hvortil en Pælegruppe er bestemt,

kan man skelne mellem fritstaaende Pælegrupper og støttede Pælegrupper.

Ved en fritstaaende Pælegruppe forstaas en saadan, der frit kan foretage den til Belastningen svarende Bevægelse, f. Eks. fritstaaende Bropiller.

Ved en støttet Pælegruppe forstaas en saadan, der møder Modstand mod den til Belastningen svarende Bevægelse, f. Eks. Kajmure.

Den første Slags Pælegrupper er dem, der almindeligvis forekommer i Praksis, idet man i de fleste Tilfælde, selv hvor Pælegruppen er støttet, vil beregne den for visse bestemte Kræfter.

Den anden Slags Pælegrupper, de støttede, kunde i og for sig godt beregnes, og bliver det som nævnt oftest, under den første Slags, da de passive Kræfter selvfølgelig kan indbefattes under de ydre Kræfter. Da de passive Kræfter imidlertid afhænger af Pillens Bevægelse, kendes de ikke i Forvejen, og vi skal derfor undersøge dette Problem lidt nærmere.

Efter den passive Modstands Art kan man dele Pælegrupperne i to Klasser: a) Enhver Bevægelse fremkalder Modstand; b) kun visse Bevægelser fremkalder Modstand.

a) Enhver Bevægelse fremkalder Modstand:

Man kan f. Eks. tænke paa en Pille i en Jernbetonbro, hvor Brooverbygningen er støbt i et med Pillen. Modstanden vil for en saadan Pælegruppe bestaa af:

- 1) En Modstand mod en vandret Bevægelse; denne Modstand er lige stor, hvad enten Bevægelsen gaar i den ene eller anden Retning; hvis Modstanden mod Forskydningen 1 er k_1^v i vandret Retning og k_1^l i lodret Retning, tager man Hensyn til den ved overalt i Formlerne at sætte $k_1^v + \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha$ i Stedet for $\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha$ og $k_1^l + \Sigma v \operatorname{tg} \alpha$ i Stedet for $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha$.
- 2) En Modstand mod en lodret Bevægelse; denne Modstand er lige stor, hvad enten Bevægelsen gaar op eller ned; hvis Modstanden mod Forskydningen 1 er k_2^v i vandret Retning og k_2^l i lodret Retning, $k_2^v = k_1^l$, tager man Hensyn hertil ved overalt i Formlerne at sætte $k_2^l + \Sigma v$ i Stedet for Σv og som nævnt ovenfor $k_1^l + \Sigma v \operatorname{tg} \alpha$ i Stedet for $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha$.
- 3) En Modstand mod en Vinkeldrejning om Pælegruppens O-Punkt. Man vil lægge Mærke til, at paa Grund af de under 1) og 2) nævnte Modstande vil Pælegruppens O-Punkt

flyttes (at O-Punktet for en Pille, der saaledes er understøttet delvis paa Pæle og delvis paa anden Maade, men helt igennem elastisk, faar samme Betydning som for en Pille understøttet udelukkende paa Pæle, fremgaar af det i § 28 anførte). Hvis Modstanden mod Vinkeldrejningen 1 er k_M , numerisk lige stor, hvad enten Vinkeldrejningen gaar den ene eller den anden Vej, tager man Hensyn til den ved at sætte $I = \Sigma v\eta^2 + k_M$.

En saadan støttet Pælegruppe kan godt for sig selv være bevægelig, idet en Bevægelse her er hindret af de passive Kræfter ogsaa i den Retning, hvor Pælene ingen Modstand yder.

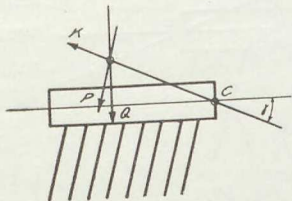


Fig. 29 a.

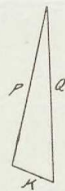


Fig. 29 b.

b. Kun visse Bevægelser fremkalder Modstand.

Hvis Pælegruppen f. Eks. indgaar i en Kajkonstruktion, vil Modstanden mod Kajmurens Bevægelse være af en anden Art end den ovenfor omtalte, idet f. Eks. en vandret Bevægelse er hindret ind imod Fylden, men derimod ikke bort fra Fylden. Ligeledes kan en lodret Bevægelse være hindret nedad, men derimod sjældent opad. Endelig kan en Vinkeldrejning om Pælegruppens O-Punkt være hindret, men det er ikke givet, at Modstanden derimod er lige stor i begge Retninger. En saadan Pælegruppe har en Del tilfælles med et Tværnsnit, der over Tryk- men ikke Trækmodstand.

Man kan derfor ikke for en saadan støttet Pælegruppe give almenlydige Formler, men der skal nedenfor ved nogle Eksempler vises, hvorledes man tager Hensyn til de passive Kræfter.

Man maa her skelne mellem to Slags Pælegrupper, 1) Bevægelige Pælegrupper, der kun er i Ligevægt ved Hjælp af de passive Kræfter, 2) Stive Pælegrupper, hvor de passive Kræfter kun bliver af sekundær Virkning.

1) Bevægelige Pælegrupper:

I Fig. 29 a er vist en saadan bevægelig Pælegruppe; alle Pælene er parallelle, og Pillen støtter i Punkt C mod et elastisk eller uelastisk Legeme, saaledes at en vandret Bevægelse møder Modstand, samtidig med at den lodrette Bevægelse,

som Belastningen fremkalder, vil møde Friktionsmodstand i Punkt C ; derfor vil Modtrykket K i Punkt C virke under Friktionsvinklen γ med den vandrette. Q er Resultanten af alle aktive ydre Kræfter.

Da Pillen kun er i Ligevægt, naar Resultanten af alle de ydre Kræfter, baade aktive og passive, virker i Pælernes Retning, findes Modtrykket K ved den i Fig. 29b viste Kraft-

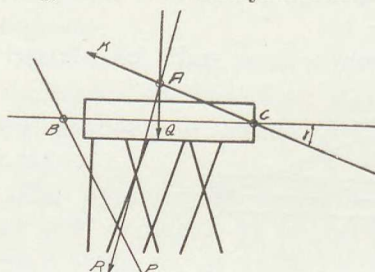


Fig. 30.

trekant, hvor P er parallel med Pæleretningen. P er den samlede ydre Kraft, der efter de sædvanlige Formler fordeles over Pælene.

2) Stive Pælegrupper.

Den i Fig. 30 viste Pille støtter i Punkt C mod et fast Legeme, saaledes at dette Punkt under

Pillens Bevægelse maa følge en lodret Bane. Q er Resultanten af alle de aktive ydre Kræfter.

Modtrykket K i Punkt C tænkes som ovenfor at virke under Friktionsvinklen γ med den vandrette. Gennem Punkt A , Skæringspunktet mellem Q og K , maa den resulterende Kraft R gaa; derfor maa det tilsvarende Drejningspunkt ligge paa A 's Antipolar P med Hensyn til Pælegruppens Polarellipse (se § 7). Da man tillige ved, at Punkt C 's Bane er lodret, maa Punkt B , Skæringspunktet mellem P og en vandret Linie gennem C , være det søgte Drejningspunkt. Punkt B 's Antipolar er da da den Linie, hvori det resulterende Tryk virker. Man kan derefter ved en Krafttrekant finde K .

Principielt er hermed Opgaven løst; det skal imidlertid vises, hvorledes

man analytisk kan finde K ; samtidig skal Opgavens Løsning gøres mere almindelig, idet man tænker sig, at det faste Legeme, som Pille støtter sig paa, er elastisk, saaledes at man faar en vandret Bevægelse: $\lambda = K\epsilon$, hvor ϵ er en Materialkonstant.

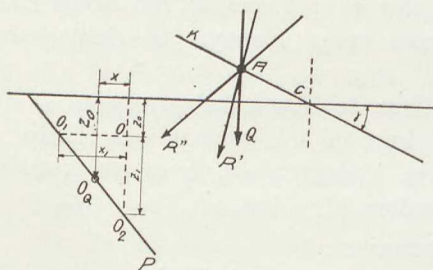


Fig. 31.

I Fig. 31 er Pælegruppen vist igen, og som før ved man, at Drejningspunktet, der svarer til det resulterende Tryk, maa ligge paa Punkt A 's Antipolar P . Denne bestemmes ved de to Koordinater x_1 og z_1 , idet Punkt O_1 svarer til en Kraft R' gennem A parallel med den til en lodret Parallelforskydning svarende Kraft, og Punkt O_2 svarer til en Kraft R''

gennem A parallel med den til en vandret Parallelforskydning svarende Kraft. Hvis Afstanden fra Pælegruppens O-Punkt til R' og R'' kaldes p' og p'' , har man (se § 7):

$$x_1 = -\frac{I}{p'} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\Sigma v}; \quad z_1 = -\frac{I}{p''} \cdot \frac{\sin \alpha''}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Hvis Kraften Q giver Kræfterne R'_Q og R''_Q i Retningerne R' og R'' , positive som vist i Figuren, findes Drejningspunktet O_Q svarende til Kraften Q ved Koordinaten:

$$z_Q = \frac{R'_Q p' z_0 + R''_Q p'' (z_0 + z_1)}{R'_Q p' + R''_Q p''}.$$

Paa samme Maade findes Drejningspunktet O_K for en Kraft i Linie K , naar $K = 1$ giver R'_K og R''_K :

$$z_K = \frac{R'_K p' z_0 + R''_K p'' (z_0 + z_1)}{R'_K p' + R''_K p''}.$$

Den vandrette Bevægelse λ af Punkt C er:

$$\lambda = \varphi_Q z_Q + \varphi_K z_K = K \varepsilon.$$

Herved faar man:

$$R'_Q p' z_0 + R''_Q p'' (z_0 + z_1) + [R'_K p' z_0 + R''_K p'' (z_0 + z_1)] K = K \varepsilon I.$$

Af denne Ligning kan K bestemmes.

Hvis man i Ligningen sætter $\varepsilon = 0$, faas den Værdi for K , der svarer til det førstnævnte Tilfælde, hvor Punkt C havde lodret Bane.

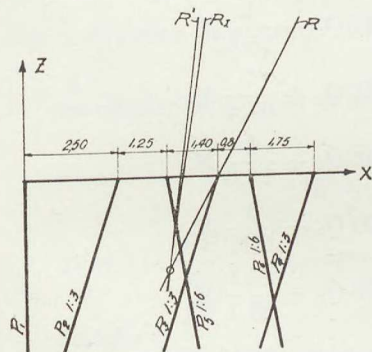


Fig. 32.

§ 11. Eksempler.

Eksempel 1.

Pælenes Tværsnitsareal:

$$F = 0,18 \text{ m}^2.$$

» Længde: 5,0 m.

$$\frac{10^3}{E} \cdot v = 36 \cdot \cos^2 \alpha.$$

Der indlægges et Koordinat-system med x -Aks i Pilleunderkant og z -Aks i P_1 .

Pæl	x	$\operatorname{tg} \alpha$	$\cos \alpha$	v	$v \operatorname{tg} \alpha$	vx	$v \operatorname{tg} \alpha \cdot x$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha$	η	$v \eta^2$
P_1	0	0	1,0	36	0	0	0	0	$\div 3,88$	541
P_2	+ 2,50	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	10,8	+ 81	+ 27,0	3,6	$\div 2,13$	147
P_3	+ 5,15	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	10,8	+ 167	+ 55,6	3,6	+ 0,52	9
P_4	+ 7,70	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	10,8	+ 249	+ 83,2	3,6	+ 3,07	304
P_5	+ 3,75	$\div \frac{1}{6}$	0,986	35,0	$\div 5,8$	+ 131	$\div 21,8$	0,97	+ 0,25	2
P_6	+ 5,95	$\div \frac{1}{6}$	0,986	35,0	$\div 5,8$	+ 208	$\div 34,7$	0,97	+ 2,45	210
Sum				203,2	+ 20,8	+ 836	+ 109,3	12,74		1213

I første Kolonne i Tabellen er anført Pælenes Abscisser i et Koordinatsystem med X-Akse i Pilleunderkant og Z-Akse i P_1 , og ud fra dette Punkt bestemmes Tyngdepunkterne for Kræfterne v og $v \operatorname{tg} \alpha$; efter at O-Punktet er fundet, regnes de i 10. Kolonne angivne η -Værdier ud for Pælene, positive til højre fra O-Punktet.

$$x'_0 = + \frac{836}{203,2} = + 4,11; \quad x''_0 = + \frac{109,3}{20,8} = + 5,26;$$

$$c = x'_0 - x''_0 = - 1,15 \text{ m.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{20,8}{203,2} = 0,102; \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{12,74}{20,8} = 0,611;$$

$$z_0 = - \frac{1,15}{0,611 - 0,102} = - 2,26 \text{ m.}$$

O-Punktets Abscisse i Forhold til P_1 er:

$$x_0 = + 4,11 - 2,26 \cdot 0,102 = + 3,88 \text{ m.}$$

Ved Hjælp af Formel (16) regnes da Pæletrykkene ud:

$$P_1 = \frac{1}{4,70} Q_z - 0,350 Q_x - \frac{1}{8,68} M.$$

$$P_2 = \frac{1}{10,90} Q_z + 0,744 Q_x - \frac{1}{16,6} M.$$

$$P_3 = \frac{1}{10,90} Q_x + 0,744 Q_x + \frac{1}{68,4} M.$$

$$P_4 = \frac{1}{10,90} Q_z + 0,744 Q_x + \frac{1}{11,6} M.$$

$$P_5 = \frac{1}{3,85} Q_z - 0,900 Q_x + \frac{1}{136} M.$$

$$P_6 = \frac{1}{3,85} Q_z - 0,900 Q_x + \frac{1}{14,1} M.$$

Hovedaksernes Vinkel med den lodrette findes af Ligning (17)

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2}{\frac{1}{0,102} - 0,611} = 0,2478; \quad \omega = \begin{cases} 6^\circ 09' \\ 96^\circ 09' \end{cases}$$

Hvis Pælegruppen paavirkes af en Kraft $10 t$ i 1ste Hovedakse, har man:

$$Q_z = 10 \cdot \cos \omega = 9,94,$$

$$Q_x = 10 \cdot \sin \omega = 1,07.$$

Man finder da Pæletrykkene:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 1,74, \\
 P_2 &= P_3 = P_4 = 1,71, \\
 P_5 &= P_6 = 1,62.
 \end{aligned}$$

Man ser, at Pæletrykkene tilnærmelsesvis er lige store for en Kraft i første Hovedakse.

Eksempel 1a. En Pælegruppe af den i Fig. 33 viste Form med 3 Skraapæle og 1 Lodpæl angribes af en lodret Kraft Q_z 1,0 m bag den forreste Skraapæl og en vandret Kraft $Q_x = \frac{1}{4} Q_z$ i Pilleunderkant.

Bestem Lodpælens Plads og Skraapælens Hældning saaledes, at Resultanten af Q_z og Q_x ligger i Pælegruppens første Hovedakse; alle Pælene er ens i Tværsnit og Længde.

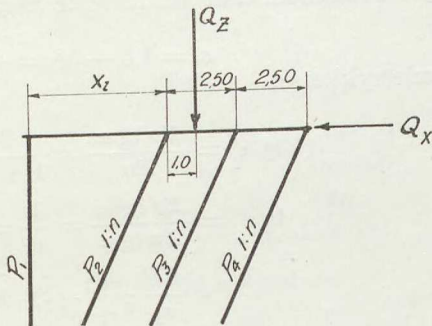


Fig. 33.

For Lodpælen har man: $v = \frac{EF}{s_2} 1$; $v \operatorname{tg} \alpha = v \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$.

» en Skraapæl » : $v = \frac{EF}{s_2} \frac{n^2}{1+n^2}$; $v \operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{s_2} \frac{n}{1+n^2}$.

$$v \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{EF}{s_2} \frac{1}{1+n^2}.$$

$$\Sigma v \operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{s_2} \frac{3n}{1+n^2}; \quad \Sigma v = \frac{EF}{s_2} \left(1 + \frac{3n^2}{1+n^2} \right) = \frac{1+4n^2}{1+n^2} \frac{EF}{s_2}.$$

$$\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{EF}{s_2} \frac{3}{1+n^2}.$$

Hovedaksernes Vinkel bestemmes af:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\Sigma v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma v - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{6n}{4n^2 - 2}.$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\frac{1}{4} Q_z}{Q_x} = \frac{1}{4}; \quad \operatorname{tg} 2\omega = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{8}{15}.$$

Heraf findes: $n = 2,98 \sim 3$.

Resultanten af Q_z og Q_x skærer Tyngdepunktslinien af Skraa-

pælene (d. v. s. P_3) i et Punkt, hvis Afstand z_0 fra Pilleunderkanten bestemmes af Ligningen:

$$x_l = 1,0 + \frac{z_0}{4} = 2,50 + \frac{z_0}{3}; \quad z_0 = -18 \text{ m.}$$

Dette Skæringspunkt skal ligge paa Lodpælen, da O-Punktet ligger paa Skæringspunktet mellem Lodpælen og Tyngdepunktslinien for Skraapælene. Man finder derfor Lodpælens Afstand x_l i Pilleunderkant til forreste Skraapæl:

$$x_l = 1,0 - \frac{18}{4} = -3,5 \text{ m.}$$

Pæletrykkene:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sum v \operatorname{tg} \alpha}{\sum v} = \frac{3n}{1 + 4n^2} = 0,243.$$

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sum v \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{n} = 0,333.$$

$$I = \frac{EF}{s_2} \frac{n^2}{1 + n^2} \cdot 2 \cdot 2,50^2 = \frac{EF}{s_2} 11,25.$$

$$P_1 = Q_z - 2,95 Q_x = 0,26 Q_z,$$

$$P_2 = P_3 = P_4 = 1,035 Q_x = 0,26 Q_z.$$

Man ser saaledes, at alle Pælene udnyttes i lige stærk Grad.

Hvis Q_z forhøjes til det dobbelte, vil den ydre Paavirkning altsaa være:

$$2Q_z,$$

$$Q_x = \frac{Q_z}{4},$$

$$M = Q_z \cdot 4,5.$$

$$P_1 = 1,26 Q_z,$$

$$P_2 = 0,26 Q_z - \frac{1}{4,75} M = -0,69 Q_z.$$

$$P_3 = 0,26 Q_z,$$

$$P_4 = 0,26 Q_z + \frac{1}{4,75} M = 1,21 Q_z.$$

Det ses, at saa snart Resultanten af den ydre Belastning ikke ligger i Hovedaksen, vil Pælernes Paavirkninger afvige meget fra hinanden.

Eks. 2. En Pille, der er symmetrisk om en lodret Linie. (Se Fig. 34). Alle Pælene har samme Tværsnit og samme Længde.

O-Punktet skal ligge paa Symmetrilinien og paa Tyngdepunktslinien for Skraapælene; derfor er, naar alle Pælene er ens:

$$z_0 = \frac{d+a}{4} n.$$

Skraapælene har en Hældning $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n}$

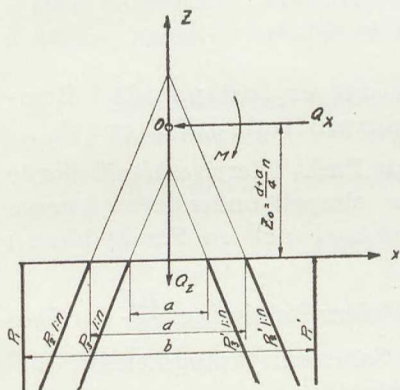


Fig. 34.

$$\cos \alpha = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}},$$

$$\Sigma v = \frac{EF}{s_2} \left(2 + 4 \frac{n^2}{1+n^2} \right);$$

$$\Sigma v \operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{s_2} \cdot \frac{4n}{1+n^2}.$$

For en Skraapæl:

$$v \operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{s_2} \cdot \frac{n}{1+n^2};$$

$$v = \frac{EF}{s_2} \cdot \frac{n^2}{1+n^2}.$$

For en Lodpæl:

$$v \operatorname{tg} \alpha = 0; \quad v = \frac{EF}{s_2}.$$

$$I = \frac{EF}{s_2} \left(\frac{n^2}{1+n^2} \cdot \frac{(d-a)^2}{4} + \frac{b^2}{2} \right).$$

Pæletrykkene bliver da:

$$P_1 = Q \frac{1 + \left(\frac{1}{n} \right)^2}{\frac{2}{n^2} + 6} - M \frac{2b}{\frac{n^2}{1+n^2} (d-a)^2 + 2b^2}$$

$$P_2 = Q \frac{1}{\frac{2}{n^2} + 6} + H \frac{\sqrt{1+n^2}}{4} - M \frac{(d-a) \frac{n^2}{1+n^2}}{\frac{n^2}{1+n^2} (d-a)^2 + 2b^2},$$

$$P_3 = Q \frac{1}{\frac{2}{n^2} + 6} + H \frac{\sqrt{1+n^2}}{4} + M \frac{(d-a) \frac{n^2}{1+n^2}}{\frac{n^2}{1+n^2} (d-a)^2 + 2b^2},$$

$$P'_3 = -P_3; \quad P'_2 = -P_2; \quad P'_1 = -P_1.$$

Taleksempel:

$$a = 2,5 \text{ m}; \quad d = 6,0 \text{ m}; \quad b = 10,0 \text{ m}; \quad n = 6.$$

$$\frac{n^2}{1+n^2} = 0,976; \quad \frac{n^2}{1+n^2}(d-a)^2 + 2b^2 = 212 \text{ m}^2.$$

$$P_1 = \frac{Q}{6} - \frac{M}{10,6},$$

$$P_2 = \frac{Q}{6} + 1,52 H - \frac{1}{62} M.$$

$$P_3 = \frac{Q}{6} + 1,52 H + \frac{1}{62} M.$$

III. Pæleværker med Pæle, der er indspændt i Bunden, men simpelt understøttede i Pillen.

§ 12. **Definition af den tænkte Pæl.** I forrige Afsnit gjorde vi Brug af, at naar en Pæl var simpelt understøttet i begge Ender, vilde den kun yde Modstand mod en Forskydning i Pælens Retning.

Denne Modstand, der gaar i Pælens Retning, er $\frac{EF}{s_2}$ for Forskydningen 1, hvor s_2 er Pælens Sammentrykningslængde, saaledes som denne er defineret Side 43.

Naar Pælen er indspændt forneden, vil den imidlertid som omtalt Side 43 ogsaa yde Modstand mod en Forskydning af Pælehovedet vinkelret paa Pælens Retning. Denne Modstand, der er vinkelret paa Pælens Retning, er $\frac{3EI}{s_1^3}$ for Bevægelsen 1, hvor s_1 er Pælens Indspændingslængde, saaledes som den er defineret Side 43.

Som det fremgaar af Ligning (6) og Fig. 21 i § 3, er Forskydningen af Pælehovedet i Retning af Linien AB, der gennem Pælehovedet er trukket vinkelret paa Pælen, proportional med AB's Afstand fra Drejningspunktet. Hvis man derfor fjerner Pælens Indspænding, og i Stedet for i Linie AB indfører en tænkt Pæl, hvis Modstandstal er $\frac{3EI}{s_1^3}$, vil man faa en Pælegruppe, der statisk og elastisk er identisk med den oprindelige. Man opnaar ved Indførelsen af de tænkte Pæle, der jo selvfølgelig ikke er andet end en anden Talemaade for Transversalkraften i Pælehovedet, at man faar en Pille, der

kun er understøttet af simpelt understøttede Pæle, og da man netop i den udviklede Teori har givet hver Pæl sit særlige Modstandstal, blot med den fælles Betegnelse v , kan hele den udviklede Teori ogsaa anvendes i dette Tilfælde, hvor Pælene er indspændt forneden.

Det skal blot her nævnes, at hvis Pælene er indspændt foroven og simpelt understøttet forneden, skal man lade de tænkte Pæle virke i Pælens nederste Punkt, hvorefter alle de nedenfor gjorte Betragtninger gælder, naar man tager Hensyn til det i § 16 anførte om Pilleunderkantens Form.

Den tænkte Pæl anbringes saaledes, at dens Vinkel med X-Aksens negative Retning er mindre end 90° .

§ 13. Sammenhæng mellem Paavirkninger og Drejningspunkt; Inertimoment. Vi indfører nu foruden Betegnelsen

$v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha$ den ny Betegnelse:

$$u = \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha. \quad (26)$$

Da de tænkte Pæles Vinkel med den lodrette er $\alpha + 90^\circ$, faar man:

$$\left. \begin{aligned} \text{Til } v &= \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha & \text{svarer} & \frac{3EI}{s_1^3} \sin^2 \alpha = u \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ \text{» } v \operatorname{tg} \alpha &= \frac{EF}{s_2} \cos \alpha \sin \alpha & \text{»} & \frac{3EI}{s_1^3} (-\sin \alpha) \cos \alpha = -u \operatorname{tg} \alpha, \\ \text{» } v \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{EF}{s_2} \sin^2 \alpha & \text{»} & \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha = u. \end{aligned} \right\} (27)$$

Herved er Fortegnet for Trykkene i de tænkte Pæle givet, idet en Bevægelse til højre giver Træk i den tænkte Pæl, d. v. s. at Bøjningsmomentet fra Pælens Indspænding giver Træk i Pælens venstre Side.

Vi skal nu kort gennemgaa alle de i første Afsnit opstillede Betragtninger, idet de der førte Beviser lige saa godt gælder her. Indtil videre forudsættes Pillens Underkant retlinet.

For en lodret Parallelforskydning 1 nedad vil Pæletrykkenes Resultant R' gaa gennem Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter ($v + u \operatorname{tg}^2 \alpha$) og danne en Vinkel α' med den lodrette bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (28)$$

For en vandret Parallelforskydning 1 til venstre vil Pæletrykkenes Resultant R'' gaa gennem Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter $(v - u) \operatorname{tg} \alpha$ og danne Vinklen α'' med den lodrette bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)}{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (29)$$

Her som før er den vandrette Komposant af R' lig den lodrette Komposant af R'' begge lig:

$$(v - u) \operatorname{tg} \alpha.$$

Den lodrette Komposant af R' er: $(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)$.

» vandrette » » R'' er: $(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)$.

En vilkaarlig Kraft gennem R' 's og R'' 's Skæringspunkt, O , giver Pillen en Parallelforskydning.

Naar Pillen paavirkes af et Moment, vil den dreje sig om O -Punktet. Drejningsvinklen φ bestemmes af Ligningen:

$$\varphi = \frac{M}{I_1},$$

hvor

$$I_1 = \sum \frac{EF}{s_2} p^2 + \sum \frac{3EI}{s_1^3} q^2 = \Sigma v \eta^2 + \Sigma u \eta_s^2. \quad (30)$$

q er den vinkelrette Afstand fra O -Punktet til den tænkte Pæl, η_s er lig Afstanden fra O -Punktet til Skæringspunktet mellem en lodret Linie gennem O og den tænkte Pæl.

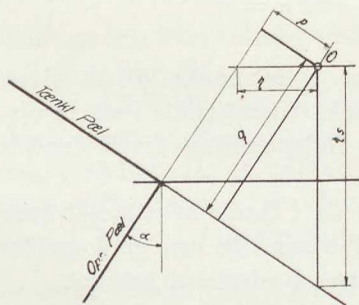


Fig. 35.

Inertimomentet

$$I = \Sigma v \eta^2 + \Sigma u \eta_s^2$$

skal lige som før være det mindste, der kan dannes om noget Punkt.

Kaldes den vandrette Afstand i Pilleunderkant mellem R'' og R' c (Afstanden mellem Tyngdepunkterne for henholdsvis de lodrette Kræfter $(v - u) \operatorname{tg} \alpha$ og $(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)$), findes O -Punktets Højde over Pilleunderkant:

$$z_0 = \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}; \quad c = x'_0 - x''_0. \quad (31)$$

x''_0 og x'_0 er Koordinaterne i Pilleunderkant til de førømtalte Tyngdepunkter i et vilkaarligt Koordinatsystem med X-Aksen i Pilleunderkant og Z-Aksen lodret opad.

O-Punktets Abscisse er:

$$x_0 = x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha'. \quad (32)$$

Herved er O-Punktet bestemt, og det vil i de fleste Tilfælde vise sig, at det ikke ligger langt fra det O-Punkt, der findes, naar Pælene regnes simpelt understøttede, særlig naar Pælene er lange. O-Punktet ligger altid nærmere Pilleunderkanten end O-Punktet for simpelt understøttede Pæle.

η og η_s findes af Formlerne:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha, \\ \eta_s &= z_0 - (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

§ 14. **Pæletrykkene.** Ligningerne (15) og (16) i forrige Af-
snit gaar her over til

$$P \cos \alpha = R' \cos \alpha' \frac{v}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} + R'' \sin \alpha'' \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)} + M \frac{v \eta}{I_1}, \quad (34)$$

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{v}{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{v \eta}{I_1}. \quad (35)$$

Pæletrykkene i de tænkte Pæle, d. v. s. Transversalkraften i de oprindelige Pæle, er:

$$T \cos \alpha = -R' \cos \alpha' \frac{u \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} + R'' \sin \alpha'' \frac{u}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)} + M \frac{u \eta_s}{I_1}, \quad (36)$$

$$T \cos \alpha = -Q_z \frac{u}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{u}{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{u \eta_s}{I_1}. \quad (37)$$

Indspændingsmomentet forneden i Pælene bliver:

$$M_t = T s_1. \quad (38)$$

§ 15. **Drejningspunktets Beliggenhed. Hovedakser.** Den i § 7 viste Figur til Bestemmelse af det endelige Drejningspunkt O' svarende til en bestemt Belastning, bliver her ganske den samme, naar man sætter:

$$a = \frac{R'}{\varphi} \frac{\cos \alpha'}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)},$$

$$b = \frac{R''}{\varphi} \frac{\sin \alpha''}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)},$$

hvor $\varphi = \frac{M}{I_1}$.

Naar saaledes Drejningspunktet O' er bestemt, findes Pæletrykkes lodrette Komposanter:

$$P \cos \alpha = + M \frac{v \eta'}{I_1}.$$

Transversalkræfternes vandrette Komposant er:

$$T \cos \alpha = + M \frac{u \eta_s}{I_1}.$$

Den i § 6 viste Konstruktion af Pælegruppens Hovedakser ved Hjælp af Land's Cirkel bliver den samme, naar man erstatter:

$$\begin{aligned} \Sigma v & \text{ med } \Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha), \\ \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha & \gg \Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u), \\ \Sigma v \operatorname{tg} \alpha & \gg \Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Hovedaksernes Retninger kan beregnes af Formlen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2}{\cotg \alpha' - \operatorname{tg} \alpha''}. \quad (39)$$

Hovedaksernes Størrelser kan beregnes efter en Formel, der er ganske analog med Formel (18) i § 6.

Normalkraften for en Bevægelse, d. v. s. Projektionen af den af Bevægelsen fremkaldte Kraft i Bevægelsens Retning, kan deles i to Dele, et Bidrag fra v , nemlig Σv , og et Bidrag fra u , nemlig $\Sigma u \operatorname{tg}^2 \alpha$, hvor α maales i Forhold til Bevægelsesretningen; paa samme Maade kan Kraften vinkelret paa Bevægelsen deles i to Dele, $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha$ og $-\Sigma u \operatorname{tg} \alpha$. Heraf ser man, at man kan behandle v -Kræfterne for sig selv, og u -Kræfterne for sig selv, og det vil altid vise sig, at Hovedakserne for u -Kræfterne alene meget nær falder sammen med Hovedakserne for v -Kræfterne, saaledes at 1. Hovedakse for de første og 2. Hovedakse for de sidste saa godt som falder sammen, og

Hovedakserne for v - og u -Kræfterne tilsammen falder meget nær sammen med Hovedakserne for v -Kræfterne alene, særlig da u -Kræfterne i Almindelighed er meget smaa i Forhold til v -Kræfterne.

Man ser saaledes, at i første Hovedakse er Bidraget fra v -Kræfterne til den Modstand, Pælegruppen gør mod en Bevægelse, praktisk talt Maximum, og u -Kræfternes Bidrag Minimum, medens det omvendte er Tilfældet i anden Hovedakse.

Dette forudsætter, at v -Kræfterne for en Pæl er større end u -Kræfterne, hvilket i Almindelighed i allerhøjeste Grad er Tilfældet. Hvis v - og u -Kræfterne er lige store, er $\Sigma(v-u) \operatorname{tg} \alpha$ altid Nul, hvorfor Pælegruppens Kraftellipse (se § 6, Pkt. 4) gaar over til en Cirkel, hvilket vil sige, at Pælegruppen gør lige stor Modstand mod en Bevægelse i en hvilken som helst Retning, og at Bevægelses- og Kraftretning altid falder sammen.

Hvis u -Kræfterne er større end v -Kræfterne, vil første Hovedakse meget nær falde sammen med anden Hovedakse for v -Kræfterne alene.

Heraf ser man, at u -Kræfterne udjævner noget den Ujævnhed i Bæreevne, som v -Kræfterne alene giver for Bevægelser i forskellige Retninger, og at altsaa Udjævningen kan gaa saa vidt, at Modstanden bliver ens i alle Retninger.

Det skal i denne Forbindelse bemærkes, at rent teoretisk vil en Pille, hvor v -Kræfterne er Nul, godt kunne have Bæreevne ved Hjælp af u -Kræfterne alene.

Ligesom i § 7 vil man her finde, at Kraftlinie og tilhørende Drejningspunkt er Polar og Antipol med Hensyn til en Ellipse, der har Hovedakser i Pælegruppens Hovedakser, og Hovedaksernes Længder er:

$$\sqrt{\frac{I_1}{R_{II}}} \text{ og } \sqrt{\frac{I_1}{R_I}}.$$

Hvad angaar farligste Belastning for en Pæl, det være sig en oprindelig Pæl eller en tænkt Pæl, gælder akkurat det samme som i § 8 anført. Saaledes vil alle de Kræfter, der giver Pæletrykket Nul i en Pæl, gaa gennem Pælens Antipol med Hensyn til Polarellipsen, og alle lige store Kræfter, der tangerer en Cirkel med denne Antipol til Centrum, vil give det samme Pæletryk.

Ligeledes vil man kunne finde en Nullinie for lodrette Kræfter og for vandrette Kræfter og faar her de til (19) og (20) svarende Udtryk:

For en oprindelig Pæl:

$$\left. \begin{aligned} e_v &= -\frac{I_1}{\eta \cdot \Sigma (v + u \operatorname{tg}^3 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}, \\ e_l &= \frac{I_1}{\eta \Sigma (v - u) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

For en tænkt Pæl:

$$\left. \begin{aligned} e_v &= \frac{I_1}{\eta_s \Sigma (v + u \operatorname{tg}^3 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}, \\ e_l &= \frac{I_1}{\eta_s \Sigma (v - u) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}. \end{aligned} \right\}$$

Angaaende Pælegrupper, hvis Pæle ikke kan overføre Træk, gælder det samme som i § 8; blot maa man her huske paa, at der udgaar altid baade en oprindelig og en tænkt Pæl paa en Gang.

§ 16. **Pilleunderkantens Form.** I det foregaaende er det forudsat, at Pilleunderkanten er retlinet. Hvis den ikke er det, kan man indføre en regningsmæssig Pilleunderkant akkurat som i første Afsnit; blot maa man huske paa, at en Pæl og dens tænkte Pæl stadig skal skære hinanden i den virkelige Pilleunderkant, hvorfor to saadanne Pæle ikke altid vil gaa gennem samme Punkt af den regningsmæssige Pilleunderkant. R' gaar derfor ikke igennem Tyngdepunktet for Kræfterne

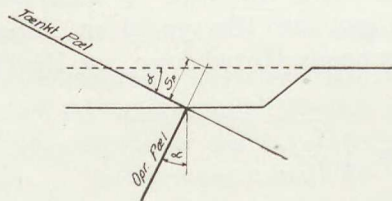


Fig. 36.

$v + u \operatorname{tg}^3 \alpha$, men for Kræfterne v og Kræfterne $u \operatorname{tg}^3 \alpha$ taget hver for sig med hver sine Angrebspunkter; det samme gælder for R'' ; $\operatorname{tg} \alpha'$ og $\operatorname{tg} \alpha''$ bliver de samme, som hvis Pilleunderkanten var retlinet. Da R' og R'' og derfor ogsaa disses lod-

rette og vandrette Komposanter ligeledes er de samme, som hvis Pilleunderkanten var retlinet, er Retningerne og Størrelserne for Pælegruppens to Hovedakser ligeledes de samme, men ikke Beliggenheden.

Dette opstilles lettest i Beregning paa følgende Maade:

Hvis der mellem den virkelige Pilleunderkant og den regningsmæssige afskæres Stykket s_p paa en Pæl, kan man regne

med, at Pæl og tænkt Pæl skærer hinanden i den regningsmæssige Pilleunderkant, naar man tilføjer Momentet:

$$s_p \sec \alpha P_v,$$

hvor P_v er den vandrette Komposant af Trykket i den tænkte Pæl.

Hvis man derfor bestemmer Tyngdepunktet for Kræfterne $v + u \operatorname{tg}^2 \alpha$ i den regningsmæssige Pilleunderkant, skal dette flyttes til venstre et Stykke:

$$x'_p = \frac{\sum u \operatorname{tg} \alpha s_p \sec \alpha}{\sum (v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (41)$$

Paa samme Maade skal Tyngdepunktet for Kræfterne $(v - u) \operatorname{tg} \alpha$ flyttes til højre et Stykke:

$$x''_p = \frac{\sum u s_p \sec \alpha}{\sum (v - u) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (42)$$

Man kan derfor henføre hele sin Beregning til den regningsmæssige Pilleunderkant, naar man blot sætter:

$$z_0 = \frac{c - (x'_p + x''_p)}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}; \quad x_0 = x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha' - x'_p. \quad (43)$$

§ 17. **Almindelige Bemærkninger.** Som nævnt under første Afsnit vil man altid bestræbe sig for at gøre Pælegruppen saa stiv som muligt; dette har særlig Betydning her, hvor en Bevægelse af Pillen vil fremkalde Momenter i Pælene. For en Pælegruppe med ret korte og stive Pæle kan Momenterne godt faa ret afgørende Betydning, og det er derfor af Vigtighed, at man sørger for, at den farligste Belastning giver saa lille en Bevægelse som muligt; særlig vigtigt er dette, hvis den farligste Belastning er saa godt som vandret, idet det da for en stor Del kan blive Momenterne i Pælene som optager Bevægelsen. Det mest ideelle ved en saadan Pælegruppe er, at Drejningspunktet ligger saa nær Pilleunderkanten som muligt (eller rettere saa nær Tyngdepunktet for de tænkte Pæle som muligt), hvorfor man ifølge det under første Afsnit nævnte bør sørge for, at O-Punktet ligger imellem Resultanten af de vandrette Kræfter og Pilleunderkanten; dette har særlig Betydning for Pælegrupper, hvor Inertimomentet fra v -Kræfterne alene er meget lille (naar Pælene nærmer sig til at skære hinanden i samme Punkt), idet et Moment i saa Tilfælde væsentligst skal optages af u -Kræfterne.

§ 18. Specielle Tilfælde.

1. Alle Pælene i Pælegruppen er parallelle. Dette Tilfælde svarer til Nr. 2 af de specielle Tilfælde i forrige Afsnit, hvor Pælene kunde deles i to Grupper, indenfor hvilke de er indbyrdes parallelle.

O -Punktet ligger i Skæringspunktet mellem Tyngdepunktslinien for de oprindelige Pæle og Tyngdepunktslinien for de tænkte Pæle. Pælegruppens to Hovedakser er henholdsvis parallel med og vinkelret paa Pæleretningen. For en Kraft i Pælenes Retning (i 1. Hovedakse) bliver der ingen Indspændinger, idet Bevægelsen af Pillen da gaar i Pælenes Retning. For en Kraft vinkelret paa Pælenes Retninger faas der kun Indspændinger, intet Pæletryk. Her er altsaa v -Kræfternes Bidrag til Modstanden mod en Bevægelse i 2. Hovedakse Nul, Bidraget fra u -Kræfterne til Modstanden mod en Bevægelse i 1. Hovedakse Nul. Er Forholdet mellem u og v konstant for alle Pælene, vil O -Punktet ligge i Pilleunderkanten.

Hvis Pælene staar vinkelret paa Pilleunderkanten, vil alle de tænkte Pæle ligge i samme Linie, nemlig Pilleunderkanten. Det Punkt i denne Linie, der ligger i de oprindelige Pæles Tyngdepunktslinie, er da O -Punkt. En vilkaarlig lodret Kraft vil have sit Drejningspunkt liggende i Pilleunderkanten og vil derfor ikke frembringe Tryk i de tænkte Pæle, d. v. s. ikke fremkalde Indspændinger.

For en saadan Pille vil altsaa en lodret Kraft Q_z gennem O -Punktet og et Moment M kun fremkalde Pæletryk, men ingen Indspændinger, medens en vandret Kraft Q_x i Pilleunderkanten vil fremkalde Indspændinger, men intet Pæletryk:

Pæletrykkene er:

$$\left. \begin{aligned} P &= Q_z \frac{v}{\sum v} + M \frac{v\eta}{I}; \quad I = \sum v\eta^2. \\ \text{Pælenes Transversalkræfter er:} \\ T &= + Q_x \frac{u}{\sum u}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

I dette Tilfælde kan man ogsaa let foretage en grafisk Opløsning af de angribende Kræfter i de to Pæleretninger, idet man dog ikke maa glemme Momentets Indflydelse paa Pæletrykkene.

Hvis Pælene ikke staar vinkelret paa Pilleunderkant, bør man ved Q_z forstaa en Kraft i de oprindelige Pæles Retning

og ved Q_x en Kraft vinkelret derpaa. Formlerne (44) gælder da alligevel, naar man blot tager de tænkte Pæle med i Inertimomentet og i Udtrykket for T tilføjer $+\frac{Mu\eta_s}{I_1}$.

2. Pælegruppen er symmetrisk om en lodret Linie. I dette Tilfælde er $\Sigma(v-u)\operatorname{tg}\alpha = 0$, hvorfor man har:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\Sigma(v-u)\operatorname{tg}\alpha}{\Sigma(v+u\operatorname{tg}^2\alpha)} = 0; \quad \alpha' = 0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \frac{\Sigma(v\operatorname{tg}^2\alpha+u)}{\Sigma(v-u)\operatorname{tg}\alpha} = \infty; \quad \alpha'' = 90^\circ.$$

Tyngdepunkterne for $(v+u\operatorname{tg}^2\alpha)$ -Kræfterne og $(v\operatorname{tg}^2\alpha+u)$ -Kræfterne ligger i Symmetrilinien, Tyngdepunktet for $(v-u)\operatorname{tg}\alpha$ -Kræfterne ligger uendelig fjernt.

O-Punktet ligger selvfølgelig paa Symmetrilinien, og dets Højde over Pilleunderkant er bestemt ved:

$$z_0 = -\frac{\Sigma(v-u)\operatorname{tg}\alpha x}{\Sigma(v\operatorname{tg}^2\alpha+u)}, \quad (45)$$

idet Koordinatsystemet er lagt med Z-Aksen i Symmetrilinien; denne er 1. Hovedakse, en vandret Linie gennem O er 2. Hovedakse.

Man kan ikke her som ved den samme Pille med simpelt understøttede Pæle sige, at z_0 er uafhængig af Lodpælene, idet sidste Led i Nævneren ogsaa faar Bidrag fra saadanne, men da u i Almindelighed er ret forsvindende i Forhold til v , vil O-Punktet ligge ret nær ved det tidligere bestemte O-Punkt.

Pæletrykkenes lodrette Komposanter er:

$$P\cos\alpha = Q_z \frac{v}{\Sigma(v+u\operatorname{tg}^2\alpha)} + Q_x \frac{v\operatorname{tg}\alpha}{\Sigma(v\operatorname{tg}^2\alpha+u)} + M \frac{v\eta_s}{I_1}. \quad (46)$$

Man ser, at Q_x intet Bidrag giver til Lodpælenes Tryk, og at for en Skraapæl vil Bidraget fra Q_x være det, der forandres mest, naar Pælene bliver indspændt.

Den vandrette Komposant af Pælenes Transversalkræfter er:

$$T\cos\alpha = -Q_z \frac{u\operatorname{tg}\alpha}{\Sigma(v+u\operatorname{tg}^2\alpha)} + Q_x \frac{u}{\Sigma(v\operatorname{tg}^2\alpha+u)} + M \frac{u\eta_s}{I_1}. \quad (47)$$

Man ser, at Q_z intet Bidrag giver til Lodpælenes Transversalkraft.

3. Alle Pælene skærer hinanden i samme Punkt. Dette Tilfælde er egentlig ikke specielt, naar Pælene er indspændt, idet det ikke adskiller sig principielt fra det almindelige; dog er der enkelte Ting, der bør fremhæves.

Saaledes er det tidligere bemærket, at O-Punktet i Almindelighed ikke ligger langt fra O-Punktet for simpelt understøttede Pæle, der i dette Tilfælde er Pælens Skæringspunkt; derfor vil ν -Kræfternes Bidrag til Inertimomentet ikke blive stort, og derfor vil der som omtalt i § 10, Pkt. 4 fremkomme ret kraftige Momenter i Pælene, naar Pillen paavirkes af et Moment.

Hvis Pilleunderkanten er formet efter en Cirkelbue gennem Pælens Skæringspunkt, vil en Kraft, der gaar igennem dette Punkt og er konjugeret Diameter med Cirkelns Diameter i den ikke indspændte Pælegruppens »Kraftellipse«, kun give Pæletryk og ingen Indspændinger, idet Drejningspunktet da tænkes liggende i det til Pælens Skæringspunkt diametralt modsatte Punkt. Dette vil sige, at der ingen Indspændinger kommer i Pælene.

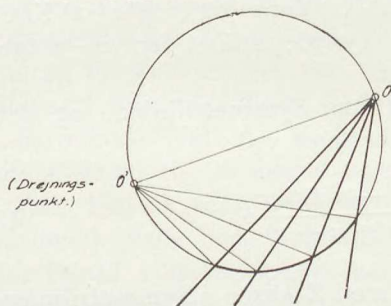


Fig. 37.

Da Systemet er i Ligevægt ved et saadant Valg af Drejningspunkt og Opgaven er entydigt bestemt, maa det valgte Drejningspunkt være det rigtige*). Herunder indbefattes ogsaa det første af de specielle Tilfælde i dette Afsnit, i det Tilfælde hvor Belastningen er en Kraft i Pælens Retning.

Særlig Interesse kan det have at betragte en Pælegruppe, der er symmetrisk om en lodret Linie.

Det kan nemlig vises, at en vilkaarlig Kraft gennem Pælens Skæringspunkt ingen nævneværdige Momenter fremkalder i Pælene.

Betragter man først en lodret Kraft, vil det være klart, at den lodrette Parallelforskydning, der derved fremkommer, kun fremkalder forsvindende Momenter i Pælene.

Betragter man dernæst en vandret Kraft, maa den vandrette Projektion af Trykkene i de tænkte Pæle være Nul, da deres Resultant ikke vil kunne falde sammen med Q_x . D. v. s. at Drejningspunktet, der jo ligger i Symmetrilinien, maa ligge saaledes, at $\Sigma q = 0$, altsaa imellem de yderste Skæringspunkter mellem Symmetrilinien og de tænkte Pæle, saaledes at Drejningspunktet kommer til at ligge i umiddelbar Nærhed af Pilleunderkanten. Da tillige O-Punktet ligger i Nærheden af

*) Se P. Gullander: Teori för Grundpålningar, Side 52.

Pælenes Skæringspunkt, vil man indse, at Drejningsvinklen bliver ret lille (da Q_x virker paa saa lille en Arm), samtidig med, at Afstandene q er meget smaa, og derfor vil de fremkaldte Momenter i Pælene blive meget smaa.

Ligger Pælenes Skæringspunkt godt fjernet fra Pilleunderkanten (i Afstanden z_s), hvad der i alle praktisk forekommende Piller vil være Tilfældet, kan man sætte: $I_1 = z_s^2 \sum u$, saaledes at Trykket i en tænkt Pæl, naar Pælegruppen paavirkes af et Moment, tilnærmelsesvis kan sættes til:

$$T \cos \alpha = + \frac{M}{z_s m},$$

hvor m er Pælenes Antal.

En tilnærmet Værdi for Pæletrykkene findes paa følgende Maade:

Q_z regnes at give samme Pæletryk, som hvis Pælene ikke var indspændt:

$$P = Q_z \frac{\cos \alpha}{\sum \cos^2 \alpha}.$$

For en Kraft Q_x vil Drejningspunktet ligge mellem Punkterne A og B i Fig. 38.

Nu er:

$$p_1 < x < p_2.$$

Hvis man derfor regner med, at Pæletrykkene er proportionale med Afstandene x , vil man faa et Resultat, der ikke er meget forkert, især da det kun er Forholdet mellem Afstandene til de forskellige Pæle fra Drejningspunktet, det kommer an paa.

Sættes Pæletrykkene: $P=kx$, giver Momentligningen om A:

$$\sum kx^2 = -Q_x z_s,$$

$$k = -Q_x \frac{z_s}{\sum x^2},$$

$$P = -Q_x \frac{z_s x}{\sum x^2}.$$

Et Moment M maa fremkalde saadanne Pæletryk, at deres Resultant er en vandret Kraft $= -\sum T \cos \alpha$, idet Resultanten

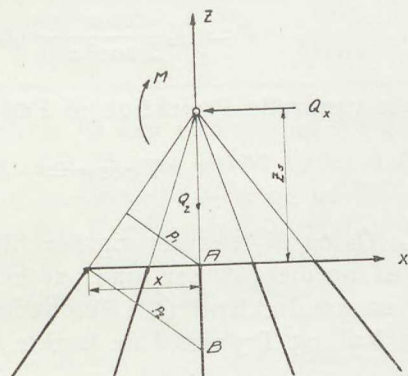


Fig. 38.

af Transversalkræfterne er en vandret Kraft $\Sigma T \cos \alpha$ i Pilleunderkant. Pæletrykkene vil derfor svare til en vandret Kraft $Q_x = + \frac{M}{z_s}$ gennem O , hvorfor Pæletrykkene fra et Moment bliver:

$$P = + \frac{M}{z_s} \frac{z_s x}{\Sigma x^2} = + M \frac{x}{\Sigma x^2}.$$

Tilnærmet har man da:

$$P = Q_z \frac{\cos \alpha}{\Sigma \cos^2 \alpha} - Q_x \frac{z_s x}{\Sigma x^2} + M \frac{x}{\Sigma x^2}. \quad (48)$$

Den vandrette Projektion af Pælens Transversalkræfter er:

$$T \cos \alpha = + M \frac{1}{z_s m}. \quad (49)$$

Q_z , Q_x og M refererer sig her til Pælens Skæringspunkt.

Af Formel (48) ser man, at hvis Pælegruppen er paavirket af en vandret Kraft Q_x i Pilleunderkanten, bliver Pæletrykkene lig Nul, og Trykket i de tænkte Pæle:

$$T \cos \alpha = + Q_x z_s \frac{1}{z_s m} = + \frac{Q_x}{m}. \quad (49a)$$

§ 19. Eksempler.

Eks. 1. Samme Pælegruppe som i Eksempel 1, § 11.

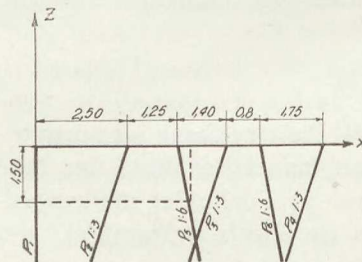


Fig. 39.

Pælens Dimensioner:

$$F = 0,18 \text{ m}^2; \quad I = 0,002 \text{ m}^4;$$

$$s_1 = s_2 = 5,0 \text{ m}.$$

$$\frac{10^3}{E} v = 36 \cos^2 \alpha;$$

$$\frac{10^3}{E} u = 0,048 \cos^2 \alpha; \quad \frac{v}{u} = 750.$$

Pæl	x	$\text{tg } \alpha$	$\cos \alpha$	v	u	vx	$v \text{ tg } \alpha$	$u \text{ tg } \alpha$
P_1	0	0	1	36,0	0,048	0	0	0
P_2	+ 2,50	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	0,043	+ 81	10,8	0,014
P_3	+ 5,15	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	0,043	+ 167	10,8	0,014
P_4	+ 7,70	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	0,043	+ 249	10,8	0,014
P_5	+ 3,75	$-\frac{1}{6}$	0,986	35,0	0,047	+ 131	- 5,83	- 0,008
P_6	+ 5,95	$-\frac{1}{6}$	0,986	35,0	0,047	+ 208	- 5,83	- 0,008
Sum				203,2	0,271	+ 836	+ 20,74	0,026

Pæl	$(v-u) \operatorname{tg} \alpha \cdot x$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha$	$u \operatorname{tg}^2 \alpha$	$u \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot x$	η	η_s	$I_1 = \sum v \eta^2 + \sum u \eta_s^2$
P_1	0	0	0	0	-3,89	-2,19	543
P_2	+ 26,95	3,6	0,005	+ 0,013	-2 12	-1,72	46
P_3	+ 55,60	3,6	0,005	+ 0,025	+ 0,53	-2,61	9,4
P_4	+ 83,00	3,6	0,005	+ 0,038	+ 3,08	-3,46	308
P_5	- 21,83	0,97	0,001	+ 0,004	+ 0,22	-2,21	2,3
P_6	- 34,64	0,97	0,001	+ 0,006	+ 2,42	-1,84	205,3
Sum	+ 109,08	12,74	0,017	+ 0,086			1214,0

Opstillingen af Tabellen svarer til den i Eksempel 1 i § 11 anvendte. I første Kolonne i Tabellen er anført Pælens Afstande fra P_1 i Pilleunderkant, positivt til højre, og ud fra P_1 bestemmes Tyngdepunkterne for Kræfterne $(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)$ og $(v - u) \operatorname{tg} \alpha$; efter at O -Punktet er bestemt, regnes de i 13. og 14. Kolonne angivne η - og η_s -Værdier ud for Pælene:

$$x'_0 = + \frac{836,086}{203,217} = +4,11; \quad x''_0 = + \frac{109,08}{20,714} = +5,24,$$

$$c = x'_0 - x''_0 = -1,13 \text{ m.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{20,714}{203,217} = 0,102; \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{13,011}{20,714} = 0,624,$$

$$z_0 = - \frac{1,13}{0,624 - 0,102} = -2,17 \text{ m.}$$

O -Punktets Abscisse i Forhold til P_1 er

$$x_0 = +4,11 - 2,17 \cdot 0,102 = +3,89 \text{ m.}$$

Pæletrykkene bliver da:

$$P_1 = \frac{1}{4,72} Q_z - 0,337 Q_x - \frac{1}{8,7} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{10,6} Q_z + 0,723 Q_x - \frac{1}{16,9} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{10,6} Q_z + 0,723 Q_x + \frac{1}{67,2} M,$$

$$P_4 = \frac{1}{10,6} Q_z + 0,723 Q_x + \frac{1}{11,6} M,$$

$$P_5 = \frac{1}{3,78} Q_z - 0,94 Q_x + \frac{1}{145} M,$$

$$P_6 = \frac{1}{3,78} Q_z - 0,94 Q_x + \frac{1}{14,3} M.$$

Transversalkræfterne og Momenterne bliver da:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -\frac{1}{2210} Q_z + \frac{1}{227} Q_x - \frac{1}{11650} M; & M_s = T_1 s_1 &= \frac{1}{442} Q_z - \frac{1}{45,4} Q_x + \frac{1}{2270} M, \\
 T_2 &= -\frac{1}{1940} Q_z + \frac{1}{233} Q_x - \frac{1}{14800} M; & M_s = T_2 s_1 &= \frac{1}{388} Q_z - \frac{1}{46,6} Q_x + \frac{1}{2840} M, \\
 T_3 &= -\frac{1}{1940} Q_z + \frac{1}{233} Q_x - \frac{1}{9700} M; & M_s = T_3 s_1 &= \frac{1}{388} Q_z - \frac{1}{46,6} Q_x + \frac{1}{1892} M, \\
 T_4 &= -\frac{1}{1940} Q_z + \frac{1}{233} Q_x - \frac{1}{7280} M; & M_s = T_4 s_1 &= \frac{1}{388} Q_z - \frac{1}{46,6} Q_x + \frac{1}{1432} M, \\
 T_5 &= -\frac{1}{2360} Q_z + \frac{1}{232} Q_x - \frac{1}{11800} M; & M_s = T_5 s_1 &= \frac{1}{472} Q_z - \frac{1}{46,4} Q_x + \frac{1}{2360} M, \\
 T_6 &= -\frac{1}{2360} Q_z + \frac{1}{232} Q_x - \frac{1}{16600} M; & M_s = T_6 s_1 &= \frac{1}{472} Q_z - \frac{1}{46,4} Q_x + \frac{1}{3320} M.
 \end{aligned}$$

For $\frac{v}{u} = 200$ finder man:

$$\operatorname{tg} \alpha' = 0,102; \quad \operatorname{tg} \alpha'' = 0,663; \quad z_0 = -2,09;$$

O-Punktets Abscisse er:

$$x_0 = +3,90 \text{ m}; \quad I_1 = 1222.$$

$$P_1 = \frac{1}{4,78} Q_z - 0,315 Q_x - \frac{1}{8,76} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{10,12} Q_z + 0,677 Q_x - \frac{1}{17,2} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{10,12} Q_z + 0,677 Q_x + \frac{1}{64} M,$$

$$P_4 = \frac{1}{10,12} Q_z + 0,677 Q_x + \frac{1}{11,5} M,$$

$$P_5 = \frac{1}{3,88} Q_z - 0,853 Q_x + \frac{1}{166} M,$$

$$P_6 = \frac{1}{3,88} Q_z - 0,853 Q_x + \frac{1}{14,5} M.$$

$$T_1 = -\frac{1}{634} Q_z + \frac{1}{64,6} Q_x - \frac{1}{3250} M; \quad M_s = T_1 s_1 = \frac{1}{127} Q_z - \frac{1}{12,92} Q_x + \frac{1}{650} M,$$

$$T_2 = -\frac{1}{550} Q_z + \frac{1}{66,2} Q_x - \frac{1}{4460} M; \quad M_s = T_2 s_1 = \frac{1}{110,0} Q_z - \frac{1}{13,24} Q_x + \frac{1}{892} M,$$

$$T_3 = -\frac{1}{550} Q_z + \frac{1}{66,2} Q_x - \frac{1}{2870} M; \quad M_s = T_3 s_1 = \frac{1}{110,0} Q_z - \frac{1}{13,24} Q_x + \frac{1}{574} M,$$

$$T_4 = -\frac{1}{550} Q_z + \frac{1}{66,2} Q_x - \frac{1}{2170} M; \quad M_s = T_4 s_1 = \frac{1}{110,0} Q_z - \frac{1}{13,24} Q_x + \frac{1}{434} M,$$

$$T_5 = -\frac{1}{717} Q_z + \frac{1}{66,1} Q_x - \frac{1}{3250} M; \quad M_s = T_5 s_1 = \frac{1}{143,4} Q_z - \frac{1}{13,22} Q_x + \frac{1}{650} M,$$

$$T_6 = -\frac{1}{717} Q_z + \frac{1}{66,1} Q_x - \frac{1}{3910} M; \quad M_s = T_6 s_1 = \frac{1}{143,4} Q_z - \frac{1}{13,22} Q_x + \frac{1}{782} M.$$

Hvis Pilleunderkanten ikke er retlinet, men har den i Fig. 39 viste punkterede Form, vil Beregningen forme sig som her vist; vi behandler den Pille, der er gennemregnet med $\frac{v}{u} = 200$.

Pæl	s_p	$s_p \sec \alpha$	u	$u \operatorname{tg} \alpha$	$us_p \sec \alpha$	$u \operatorname{tg} \alpha s_p \sec \alpha$
P_1	1,50	1,50	0,18	0	0,27 0	0
P_2	1,58	1,66	0,171	0,057	0,284	0,095
P_3	1,54	1,56	0,176	-0,029	0,275	-0,045
Sum					0,829	0,050

$$x'_p = \frac{0,050}{203,264} \sim 0; \quad x''_p = \frac{0,829}{20,642} = 0,04 \text{ m.}$$

Tyngdepunktet for Kræfterne $(v - u) \operatorname{tg} \alpha$ flyttes altsaa 4 cm til højre.

$$z_0 = -\frac{1,15 - 0,04}{0,663 - 0,102} = -1,98 \text{ m.}$$

O-Punktets Abscisse er:

$$x_0 = + 4,11 - 1,98 \cdot 0,102 = + 3,91 \text{ m.}$$

Pæl	η	η_s	$J_1 = \Sigma v \eta^2 + \Sigma u \eta_s^2$
P_1	-3,91	-0,48	544
P_2	-2,11	+0,07	144
P_3	+0,54	-2,48	10,6
P_4	+3,09	-3,21	310,3
P_5	+0,22	-0,44	1,9
P_6	+2,42	-1,64	201,2
Sum			1222,0

Det vil saaledes ses, at det eneste Sted, hvor Pilleunderkantens forandrede Form praktisk talt har Indflydelse i Formlerne for Pæletryk, vil være i Transversalkræfterne (i Leddet, der hidrører fra et ydre Moment) for de Pæle, der er blevet kortere, samt i noget stærkere Grad i Momenterne i de samme Pæle.

Tillige vil det have den Indflydelse i de virkelige Pæletryk, at den ydre Belastning nu skal reduceres i Forhold til et Punkt, der ligger 11 cm længere nede.

Eks. 2. En Pille, der er symmetrisk om en lodret Linie. Samme Pille som i Eksempel 2 i § 11.

$$F = 0,18 \text{ m}^2; \quad I = 0,002 \text{ m}^4; \quad s_1 = s_2 = 5,0 \text{ m}.$$

$$\frac{10^3}{E} v = 36 \cos^2 \alpha; \quad \frac{10^3}{F} u = 0,048 \cos^2 \alpha; \quad \frac{v}{u} = 750.$$

Pæl	x	$\text{tg } \alpha$	$\cos \alpha$	v	u	$v \text{ tg } \alpha$	$u \text{ tg } \alpha$
P_1	-5,0	0	1	36,0	0,048	0	0
P_2	-3,0	$\frac{1}{6}$	0,986	35,0	0,047	5,83	0,008
P_3	-1,25	$\frac{1}{6}$	0,986	35,0	0,047	5,83	0,008
Sum				106,0	0,142		

Pæl	$(v - u) \text{ tg } \alpha \cdot x$	$v \text{ tg}^2 \alpha$	$u \text{ tg}^2 \alpha$	η	η_s	$\Sigma v \eta^2 + \Sigma u \eta_s^2$
P_1	0	0	0	-5,00	11,85	907
P_2	-17,466	0,97	0,0013	-1,02	12,35	44
P_3	-7,277	0,97	0,0013	+0,73	12,06	26
Sum	-24,743	1,94	0,0026			977

$$z_0 = \frac{\Sigma (v - u) \text{ tg } \alpha x}{\Sigma (v \text{ tg}^2 \alpha + u)} = \frac{24,763}{2,082} = 11,85 \text{ m}.$$

(Hvis Pælene ikke havde været indspændt, havde man fundet $z_0 = 12,75 \text{ m}$).

Naar z_0 er bestemt, kan η , η_s og $I = \Sigma v \eta^2 + \Sigma u \eta_s^2$ bestemmes.

Hele Beregningen er ført i ovenstaaende Tabel.

Pæletryk, Transversalkræfter og Momenter:

$$P_1 = \frac{1}{5,9} Q_z - \frac{1}{10,8} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{6,0} Q_z + 1,42 Q_x - \frac{1}{53,6} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{6,0} Q_z + 1,42 Q_x + \frac{1}{75,0} M.$$

$$T_1 = + \frac{1}{87} Q_x + \frac{1}{3430} M;$$

$$M_s = T_1 s_1 = - \frac{1}{17,4} Q_x - \frac{1}{686} M.$$

$$T_2 = - \frac{1}{26100} Q_z + \frac{1}{87,6} Q_x + \frac{1}{3300} M; \quad M_s = T_2 s_1 = \frac{1}{5220} Q_z - \frac{1}{17,52} Q_x - \frac{1}{660} M,$$

$$T_3 = - \frac{1}{26100} Q_z + \frac{1}{87,6} Q_x + \frac{1}{3480} M; \quad M_s = T_3 s_1 = \frac{1}{5220} Q_z - \frac{1}{17,52} Q_x - \frac{1}{696} M.$$

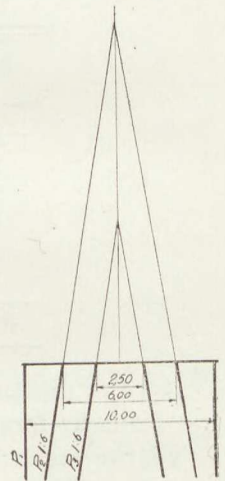


Fig. 40.

Praktisk talt er Transversalkraften ens i alle Pælene.

Hvis $\frac{v}{u} = 200$, finder man:

$$z_0 = 9,98 \text{ m.}$$

$$P_1 = \frac{1}{5,9} Q_z - \frac{1}{11,40} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{6,0} Q_z + 1,20 Q_x - \frac{1}{43,0} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{6,0} Q_z + 1,20 Q_x + \frac{1}{141,0} M.$$

$$T_1 = + \frac{1}{26,9} Q_x + \frac{1}{1140} M; \quad M_s = T_1 s_1 = - \frac{1}{5,38} Q_x - \frac{1}{230} M,$$

$$T_2 = - \frac{1}{6980} Q_z + \frac{1}{27,6} Q_x + \frac{1}{1072} M; \quad M_s = T_2 s_1 = \frac{1}{1396} Q_z - \frac{1}{5,52} Q_x - \frac{1}{214} M,$$

$$T_3 = - \frac{1}{6980} Q_z + \frac{1}{27,6} Q_x + \frac{1}{1102} M; \quad M_s = T_3 s_1 = \frac{1}{1396} Q_z - \frac{1}{5,52} Q_x - \frac{1}{220} M.$$

Eks. 3. En Pille, hvis Pæle skærer hinanden i samme Punkt, og som er symmetrisk om en lodret Linie.

Samme Pæle som i Eksempel 1 og 2.

$$\frac{v}{u} = 750.$$

a. Nøjagtig Beregning:

Pæl	x	$\text{tg } \alpha$	$\cos \alpha$	v	u	$v \text{tg } \alpha$	$u \text{tg } \alpha$
P_1	-2,50	$\frac{1}{4}$	0,97	34,9	0,0466	8,725	0,0116
P_2	-1,25	$\frac{1}{8}$	0,99	35,7	0,0476	4,463	0,0059
P_3	0	0	1,00	36,0	0,048	0	0
Sum							

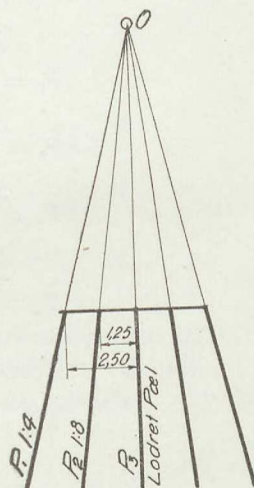


Fig. 41.

Pæl	$(v-u) \text{tg } \alpha \cdot x$	$v \text{tg}^2 \alpha$	$u \text{tg}^2 \alpha$	η	η_s	$\Sigma v \eta^2 + \Sigma u \eta_s^2$
P_1	-21,78	2,18	0,003	-0,10	9,893	4,6
P_2	-5,575	0,558	0,001	-0,05	9,736	4,5
P_3	0	0	0	0	9,580	4,4
Sum	-27,355	2,738	0,004			

$$z_0 = \frac{27,355}{2,856} = 9,58 \text{ m.}$$

(Højden til Pælenes Skæringspunkt er 10,0 m).

$$P_1 = \frac{1}{4,93} Q_z + 1,63 Q_x - \frac{1}{6,3} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{4,92} Q_z + 0,82 Q_x - \frac{1}{12,6} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{4,93} Q_z.$$

$$T_1 = -\frac{1}{14800} Q_z + \frac{1}{115} Q_x + \frac{1}{47,6} M,$$

$$T_2 = -\frac{1}{29800} Q_z + \frac{1}{115} Q_x + \frac{1}{48,3} M,$$

$$T_3 = +\frac{1}{115} Q_x + \frac{1}{49,2} M.$$

For: $\frac{v}{u} = 200$ faas: $z_0 = 8,60 \text{ m.}$

$$P_1 = \frac{1}{4,93} Q_z + 1,42 Q_x - \frac{1}{6,4} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{4,91} Q_z + 0,71 Q_x - \frac{1}{12,8} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{4,93} Q_z.$$

$$T_1 = -\frac{1}{4100} Q_z + \frac{1}{36,5} Q_x + \frac{1}{50,3} M,$$

$$T_2 = -\frac{1}{8000} Q_z + \frac{1}{35,7} Q_x + \frac{1}{51} M,$$

$$T_3 = +\frac{1}{35,3} Q_x + \frac{1}{52,1} M.$$

b. Tilnærmet Beregning.

$$\Sigma \cos^2 \alpha = 4,92; \quad \Sigma x^2 = 15,6; \quad z_s = 10,0.$$

$$P_1 = \frac{1}{5,07} Q_z + 1,60 Q_x - \frac{1}{6,25} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{4,97} Q_z + 0,80 Q_x - \frac{1}{12,5} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{4,92} Q_z.$$

$$T_1 = + \frac{1}{48,5} M,$$

$$T_2 = + \frac{1}{49,5} M,$$

$$T_3 = + \frac{1}{50} M.$$

Henføres Q_x til O -Punktet, skal man i disse Udtryk sætte Momentet lig 1) for $\frac{v}{u} = 750$: $M + 0,42 Q_x$ og 2) for $\frac{v}{u} = 200$: $M + 1,40 Q_x$, hvorved Formlerne gaar over til:

$$1) \frac{v}{u} = 750:$$

$$P_1 = \frac{1}{5,07} Q_z + 1,53 Q_x - \frac{1}{6,25} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{4,97} Q_z + 0,77 Q_x - \frac{1}{12,5} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{4,92} Q_z.$$

$$T_1 = + \frac{1}{115} Q_x + \frac{1}{48,5} M,$$

$$T_2 = + \frac{1}{117,5} Q_x + \frac{1}{49,5} M,$$

$$T_3 = + \frac{1}{119} Q_x + \frac{1}{50} M.$$

$$2) \frac{v}{u} = 200:$$

$$P_1 = \frac{1}{5,07} Q_z + 1,38 Q_x - \frac{1}{6,25} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{4,97} Q_z + 0,69 Q_x - \frac{1}{12,5} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{4,92} Q_z.$$

$$T_1 = + \frac{1}{34,7} Q_x + \frac{1}{48,5} M,$$

$$T_2 = + \frac{1}{35,4} Q_x + \frac{1}{49,5} M,$$

$$T_3 = + \frac{1}{35,7} Q_x + \frac{1}{50} M.$$

Man ser saaledes, at Tilnærmelsen er overordentlig god, og prøver man den med andre Hældninger paa Pælene, vil man se, at den i al Almindelighed er fuldtud tilfredsstillende.

IV. Pæleværker med Pæle, der er indspændte foroven og forneden.

§ 20. **Definition af den tænkte Pæl.** Naar en Pælegruppe om et Drejningspunkt O faar en Drejning φ , vil Pælehovedet faa en Forskydning $q\varphi$ vinkelret paa Pælens Retning, hvor q er Afstanden fra O til en Linie vinkelret paa Pælen gennem Pælehovedet, samt en Vinkeldrejning φ .

Herved vil der fremkomme et Moment og en Transversalkraft i Pælehovedets Forbindelse med Pillen.

Med de paa Fig. 42 viste positive Retninger for Pælens Indvirken paa Pillen har man (se § 2, Lign. (3)):

$$q\varphi = + \frac{T_s s_1^3}{3EI} + \frac{M_0 s_1^2}{2EI} \quad \text{og} \quad \varphi = - \frac{T_s s_1^2}{2EI} - \frac{M_0 s_1}{EI}.$$

Heraf faas:

$$T_s = + \frac{12EI}{s_1^3} (q + \frac{1}{2} s_1) \varphi; \quad M_0 = - \frac{6EI}{s_1^2} (q + \frac{2}{3} s_1) \varphi. \quad (50)$$

Hvis man lader T_s virke i Pælens Midtpunkt, vil Momentet i Pælehovedet blive:

$$M_s = - \frac{6EI}{s_1^2} (q + \frac{2}{3} s_1) \varphi + \frac{s_1}{2} \frac{12EI}{s_1^3} (q + \frac{1}{2} s_1) \varphi, \\ M_s = - \frac{EI}{s_1} \varphi. \quad (51)$$

M_s kaldes Pælens Drejningsmoment.

Da T_s er proportional med $q + \frac{1}{2} s_1$, vil Virkningen af en saadan Indspænding af Pælen foroven og forneden lige saa godt kunne opnaas ved at indføre en tænkt Pæl, der skærer den oprindelige Pæl under en ret Vinkel i Midtpunktet (d. v. s. i Midtpunktet af Pælens Indspændingslængde s_1), naar man blot til de ydre Kræfter, der paavirker Pillen, tilføjer et Moment af Størrelsen

$$M_s = - \frac{EI}{s_1} \varphi \quad \text{for hver Pæl i Pælegruppen.}$$

Disse tænkte Pæle skal behandles ganske som de oprindelige Pæle, naar man blot lader deres Modstandstal være $\frac{12EI}{s_1^3}$. Man vil se, at dette Modstandstal er 4 Gange saa stort som for de tænkte Pæle i forrige Afsnit.

§ 21. Sammenhæng mellem Paavirkninger og Drejningspunkt; Inertimoment. Vi indfører nu foruden Betegnelsen

$$v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha \quad \text{en ny Betegnelse} \quad r = \frac{12EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha.$$

Svarende til det i tredie Afsnit angivne har man:

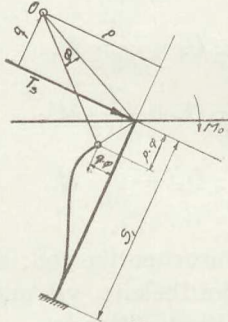


Fig. 42.

Til $v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha$ svarer $\frac{12EI}{s_1^3} \sin^2 \alpha = r \operatorname{tg}^2 \alpha$.

» $v \operatorname{tg} \alpha = \frac{EF}{s_2} \cos \alpha \sin \alpha$ svarer $\frac{12EI}{s_1^3} \sin \alpha (-\cos \alpha) = -r \operatorname{tg} \alpha$,

» $v \operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{EF}{s_2} \sin^2 \alpha$ » $\frac{12EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha = r$.

Vi skal nu kort som i tredje Afsnit gennemgaa alle de i andet Afsnit opstillede Betragtninger, idet de der førte Beviser ogsaa her gælder uforandret. Indtil videre forudsættes Pællens Underkant retlinet.

For en lodret Parallelforskydning 1 nedad vil Pæletrykkenes Resultant R' gaa gennem Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter v og $r \operatorname{tg}^2 \alpha$, idet Kræfterne v virker i Pælehovedet for de oprindelige Pæle, medens $r \operatorname{tg}^2 \alpha$ virker i Pælehovedet for de tænkte Pæle. R' danner Vinklen α' med den lodrette bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (52)$$

Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter v og $r \operatorname{tg}^2 \alpha$ kan findes paa følgende Maade:

Trykket i den tænkte Pæl opløses i det Punkt, hvor den skærer en lodret Linie gennem den oprindelige Pæls Hoved, i en lodret Kraft og en vandret Kraft. Man kan derfor lade Trykket i den tænkte Pæl virke i Pælehovedet, naar man tilføjer Momentet: $r \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{2} s_1 \sec \alpha$. Vi sætter: $\frac{1}{2} s_1 \sec \alpha = s'$, og man finder derfor det omspurgte Tyngdepunkt ved at finde Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter $(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)$ virkende i Pælehovederne af de oprindelige Pæle og flytte dette Punkt til venstre et Stykke:

$$s'_0 = \frac{\Sigma s' r \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (53)$$

For en vandret Parallelforskydning 1 til venstre vil Pæletrykkenes Resultant R'' gaa gennem Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter $v \operatorname{tg} \alpha$ og $-r \operatorname{tg} \alpha$, idet Kræfterne $v \operatorname{tg} \alpha$ virker

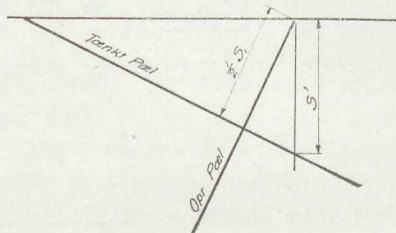


Fig. 43.

i Pælehovedet for de oprindelige Pæle, medens $-r \operatorname{tg} \alpha$ virker i Pælehovedet for de tænkte Pæle. R'' danner Vinklen α'' med den lodrette bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (54)$$

Paa lignende Maade som før findes Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter $v \operatorname{tg} \alpha$ og $-r \operatorname{tg} \alpha$ at ligge et Stykke s''_0 til højre for Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter $(v - r) \operatorname{tg} \alpha$ virkende i de oprindelige Pæles Hoveder, idet:

$$s''_0 = \frac{\Sigma r s'}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (55)$$

Her som i forrige Afsnit er den vandrette Komposant af R' lig den lodrette Komposant af R'' begge lig:

$$\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha.$$

Den lodrette Komposant af R' er: $\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)$,

» vandrette » » R'' er: $\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)$.

En vilkaarlig Kraft gennem R' 's og R'' 's Skæringspunkt, O , giver Pillen en Parallelforskydning.

Naar Pillen paavirkedes af et Moment M , vil den dreje sig om O -Punktet. Drejningsvinklen φ bestemmes af Ligningen:

$$\varphi = \frac{M - \Sigma \frac{EI}{s_1} \varphi}{I_1},$$

hvor $I_1 = \Sigma v \eta^2 + \Sigma r \eta_i^2$.

η_i er lig Afstanden fra O -Punktet til Skæringspunktet mellem en lodret Linie gennem O og den tænkte Pæl:

$$\eta_i = \eta_s + s' = z_0 + s' - (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha, \quad (56)$$

hvor η_s har samme Betydning som i forrige Afsnit.

$$\eta = x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Man finder nu:

$$I_1 \cdot \varphi = M - \varphi \Sigma \frac{EI}{s_1}; \quad \Sigma \frac{EI}{s_1} = \frac{1}{3} \Sigma r s'^2.$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{\Sigma v\eta^2 + \Sigma r\eta_i^2 + \frac{1}{3}\Sigma rs'^2} \\ \text{Vi sætter derfor:} \\ I_2 &= \Sigma v\eta^2 + \Sigma r\eta_i^2 + \frac{1}{3}\Sigma rs'^2. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Dette Inertimoment skal som i de andre Afsnit være det mindste, der kan dannes om noget Punkt, idet det sidste Led: $\frac{1}{3}\Sigma rs'^2$ nemlig er konstant, og de andre Led ganske svarer til Udtrykkene i de forrige Afsnit. Derfor indser man straks, at O-Punktet maa ligge længere nede end i forrige Afsnit, og her igen laa det nærmere Pilleunderkanten end O-Punktet for en Pille med simpelt understøttede Pæle.

Kaldes den vandrette Afstand i Pilleunderkant mellem Tyngdepunkterne for de lodrette Kræfter $(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)$ og de lodrette Kræfter $(v - r) \operatorname{tg} \alpha$ for c , findes O-Punktets Højde over Pilleunderkant:

$$z_0 = \frac{c - (s'_0 + s''_0)}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}; \quad c = x'_0 - x''_0. \quad (58)$$

O-Punktets Abscisse er:

$$x_0 = x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha' - s'_0. \quad (59)$$

§ 22. **Pæletrykkene.** Ligningerne (15) og (16) i § 5 eller (34), (35), (36) og (37) i § 14 gaar her over til:

$$P \cos \alpha = R' \cos \alpha' \frac{v}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} + R'' \sin \alpha'' \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)} + M \frac{v\eta}{I_2}, \quad (60)$$

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{v}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{v\eta}{I_2}. \quad (61)$$

Pæletrykkene i de tænkte Pæle, d. v. s. Transversalkraften i de oprindelige Pæle, er:

$$T \cos \alpha = -R' \cos \alpha' \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} + R'' \sin \alpha'' \frac{r}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)} + M \frac{r\eta_i}{I_2} \quad (62)$$

$$T \cos \alpha = -Q_z \frac{r}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{r}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{r\eta_i}{I_2}. \quad (63)$$

$$\text{Drejningsmomentet bliver: } M_s = -\frac{rs'^2}{3I_2} M. \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Indspændingsmomentet foroven bliver da: } M_0 &= M_s - T \frac{s'}{2}, \\ \text{» forneden » » : } M_u &= M_s + T \frac{s'}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

§ 23. **Drejningspunktets Beliggenhed; Hovedakser.** Den i § 7 viste Figur til Bestemmelse af det endelige Drejningspunkt O' svarende til en bestemt Belastning, bliver ogsaa her ganske den samme, naar man sætter:

$$a = \frac{R'}{\varphi} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)},$$

$$b = \frac{R''}{\varphi} \cdot \frac{\sin \alpha''}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)},$$

hvor: $\varphi = \frac{M}{I_2}$.

Naar saaledes Drejningspunktet O' er bestemt, findes Pæletrykkenes lodrette Komposanter:

$$P \cos \alpha = + M \frac{v \eta'}{I_2}.$$

Transversalkræfternes vandrette Komposanter er:

$$P \cos \alpha = + M \frac{r \eta'_t}{I_2}.$$

Momenterne bliver:

$$M_s = - \frac{r s'^2}{3 I_2} M.$$

Den i § 6 viste Konstruktion af Pælegruppens Hovedakser ved Hjælp af Land's Cirkel bliver den samme, naar man erstatter:

$$\begin{array}{ll} \Sigma v & \text{med } \Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha), \\ \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha & \gg \Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r), \\ \Sigma v \operatorname{tg} \alpha & \gg \Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha. \end{array}$$

Hovedaksernes Retninger kan bestemmes af Formlen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2}{\cotg \alpha' - \operatorname{tg} \alpha''}. \quad (66)$$

Hovedaksernes Størrelse kan beregnes efter en Formel, der er ganske analog med Formel (18) i § 6.

Man kan anstille de samme Betragtninger over r -Kræfternes Indflydelse paa Kraftellipsens Form som i § 15 for u -Kræfterne.

Saaledes vil i første Hovedakse Bidraget fra v -Kræfterne til den Modstand, Pælegruppen gør mod en Bevægelse, praktisk talt være Maksimum og r -Kræfternes Bidrag Minimum, medens det omvendte er Tilfældet i anden Hovedakse.

Hvis v - og r -Kræfterne er lige store, vil Pælegruppens Kraft-ellipse gaa over til en Cirkel, saaledes at Pælegruppens Modstand mod en Bevægelse er ens i alle Retninger, og at Kraft- og Bevægelsesretning altid falder sammen.

Da r -Kræfterne er 4 Gange saa store som u -Kræfterne, vil Udjævningen i Kraftellipsen være større, naar Pælene er indspændt i begge Ender, end hvis de kun er indspændt forneden.

Ligesom i § 7 vil man her finde, at Kraftlinien og tilhørende Drejningspunkt er Polar og Antipol med Hensyn til en Ellipse, der har Hovedakser i Pælegruppens Hovedakser, og Hovedaksernes Længde er

$$\sqrt{\frac{I_2}{R_{II}}} \text{ og } \sqrt{\frac{I_2}{R_I}}.$$

Man vil her ligesom i § 8 og i § 15 finde, at alle de Kræfter, der giver Pæletrykket Nul i en Pæl, gaar gennem Pælens Antipol med Hensyn til Polarellipsen, og alle lige store Kræfter, der tangerer en Cirkel med denne Antipol til Centrum, vil give det samme Pæletryk.

Ligeledes vil man kunne finde en Nullinie for lodrette Kræfter og for vandrette Kræfter og faar her de til (19) og (20) svarende Udtryk:

For en oprindelig Pæl:

$$\left. \begin{aligned} e_v &= -\frac{I_2}{\eta \Sigma(v+r \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}, \\ e_t &= \frac{I_2}{\eta \Sigma(v-r) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

For en tænkt Pæl:

$$\left. \begin{aligned} e_v &= \frac{I_2}{\eta_t \Sigma(v+r \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}, \\ e_t &= \frac{I_2}{\eta_t \Sigma(v-r) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}. \end{aligned} \right\}$$

Pælens Drejningsmoment vil for alle Kræfter gennem O -Punktet blive Nul, og alle lige store Kræfter, der tangerer en Cirkel med Centrum i O -Punktet, giver samme Drejningsmoment.

Pæle, der er indspændt baade foroven og forneden, vil i Almindelighed ogsaa kunne tage Træk. Kommer man endelig i det Tilfælde, at Pælene ikke kan overføre Træk, maa de

Pæle, der efter Beregningen faar Træk, udskydes og Beregningen gentages.

§ 24. **Pilleunderkantens Form.** I det foregaaende er det forudsat, at Pilleunderkanten er retlinet. Hvis den ikke er det, kan man indføre en regningsmæssig Pilleunderkant som i § 16, naar man blot stadig lader den tænkte Pæl skære den oprindelige i dennes Midtpunkt.

Herved vil hele Udviklingen blive den samme som for en Pille med retlinet Underside, naar man blot overalt erstatter $s' = \frac{1}{2} s_1 \sec \alpha$ med:

$$s' = (\frac{1}{2} s_1 + s_p) \sec \alpha, \quad (68)$$

hvor s_p har samme Betydning som i § 16, nemlig det Stykke, der afskæres paa en Pæl mellem den virkelige og den regningsmæssige Pilleunderkant.

Man vil derfor se, at Retningerne og Størrelserne af Pælegruppens to Hovedakser bliver ganske de samme som for en Pille med retlinet Underside, hvorimod *O*-Punktet flytter sig. Hvad der i § 9 og § 17 er sagt om Pillens Stivhed gælder ogsaa her.

Da *r*-Kræfterne er 4 Gange saa store som de tilsvarende *u*-Kræfter, vil en Pille, hvis Pæle baade er indspændt foroven og forneden, være endnu stivere end en Pille, hvis Pæle kun er indspændt forneden, hvorfor baade Forskydninger og Vinkeldrejninger vil blive mindre for en tilsvarende Belastning, samtidig med at der fremkaldes større Momenter i Pælene.

§ 25. **Specielle Tilfælde.**

1. Alle Pælene i Pælegruppen er parallelle.

O-Punktet ligger i Skæringspunktet mellem Tyngdepunktslinien for de tænkte Pæle og Tyngdepunktslinien for de oprindelige Pæle. Pælegruppens to Hovedakser er henholdsvis parallel med og vinkelret paa Pælenes Retning.

For en Kraft i første Hovedakse (d. v. s. i Pælenes Tyngdepunktslinie) vil Pælene kun faa Tryk, ingen Indspændingsmomenter. For en Kraft i anden Hovedakse (d. v. s. vinkelret paa Pælene og i de tænkte Pæles Tyngdepunktslinie) vil Pælene intet Tryk faa, men der vil fremkaldes Indspændingsmomenter, der er lige store foroven og forneden. Ved en saadan Pille er altsaa (tilsvarende Pillen 1 i § 18) *v*-Kræfternes Bidrag til

Modstanden mod en Forskydning i 2. Hovedakse Nul, Bidraget fra r -Kræfterne til Modstanden mod en Forskydning i 1. Hovedakse Nul.

Hvis Pælene staar vinkelret paa Pilleunderkanten (denne regnes i saa Tilfælde vandret), og Indspændingslængden den samme for alle Pælene, vil alle de tænkte Pæle ligge i den samme Linie, nemlig en Linie parallel med Pilleunderkanten, gennem Pælenes Midtpunkter. O -Punktet vil derfor ligge paa Pælenes Tyngdepunktslinie i Højde med Pælenes Midtpunkter.

Af den Grund vil et Moment intet Tryk fremkalde i de tænkte Pæle, og Momentet i de oprindelige Pæle er derfor konstant i hele Pælens Længde, lig:

$$M_s = -\frac{rs'^2}{3I_2} M,$$

$$I_2 = \Sigma v\eta^2 + \frac{1}{3} \Sigma rs'^2 = \Sigma v\eta^2 + \frac{1}{12} s_1^2 \Sigma r. \quad (69)$$

En vandret Kraft Q_x gennem O -Punktet fremkalder kun Tryk i de tænkte Pæle.

Pæletrykkene er:

$$P = Q_x \frac{v}{\Sigma v} + M \frac{v\eta}{I_2}. \quad (70)$$

Pælenes Transversalkræfter er:

$$T = +Q_x \frac{r}{\Sigma r}.$$

Momenterne er:

$$M_s = -\frac{rs_1^2}{12I_2} M.$$

2. Pælegruppen er symmetrisk om en lodret Linie.

I dette Tilfælde er $\Sigma(v-r) \operatorname{tg} \alpha = 0$, hvorfor man har:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma(v-r) \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v+r \operatorname{tg}^2 \alpha)} = 0; \quad \alpha' = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)}{\Sigma(v-r) \operatorname{tg} \alpha} = \infty; \quad \alpha'' = 90^\circ.$$

O -Punktet ligger selvfølgelig paa Symmetrilinien

$$\left(s'_0 = \frac{\Sigma s' r \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v+r \operatorname{tg}^2 \alpha)} = 0 \right),$$

og dets Højde over Pilleunderkanten er bestemt ved:

$$z_0 = - \frac{\sum (v - r) \operatorname{tg} \alpha x + \sum r s'}{\sum (v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)}. \quad (71)$$

Symmetrilinien er 1. Hovedakse, en vandret Linie gennem O-Punktet er 2. Hovedakse.

Pæletrykkenes lodrette Komposanter er:

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\sum (v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} + Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\sum (v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)} + M \frac{v \eta}{I_2}. \quad (72)$$

Man ser, at Q_x intet Bidrag giver til Lodpælenes Tryk, og at for en Skraapæl vil Bidraget fra Q_x være det, der forandres mest, naar Pælene bliver indspændt.

Den vandrette Komposant af Pælenes Transversalkræfter er:

$$T \cos \alpha = - Q_z \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{\sum (v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} + Q_x \frac{r}{\sum (v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)} + M \frac{r \eta}{I_2}. \quad (73)$$

Man ser, at Q_z intet Bidrag giver til Lodpælenes Transversalkræfter.

Pælenes Drejningsmomenter bliver:

$$M_s = - \frac{r s'^2}{3 I_2} M. \quad (74)$$

3. Pælene skærer hinanden i samme Punkt.

Som ved en Pille, hvis Pæle kun er indspændt forneden, vil v -Kræfternes Bidrag til Inertimomentet i Almindelighed være meget lille, hvorfor Pælene vil faa meget store Momenter, naar Pillen paavirket af et Moment, dog ikke saa store som naar Pælene kun er indspændt forneden.

Hvis alle de tænkte Pæle skærer hinanden i samme Punkt, vil en Drejning om dette Punkt ikke fremkalde Tryk i de tænkte Pæle, men derimod nok Momenter i Pælene, konstant i hele Pælens Længde. Den til en saadan Drejning svarende Kraft vil være parallel med den til Linien fra de oprindelige Pæles til de tænkte Pæles Skæringspunkt svarende konjugerede Diameter i den Kraftellipse om de oprindelige Pæles Skæringspunkt, der svarer til v -Kræfterne alene, idet r -Kræfterne bliver Nul og derfor udgaar, og den ydre Krafts Afstand fra denne konjugerede Diameter er: $e = \frac{\sum M_s}{R}$, hvor R er Resultanten af Pæletrykkene; hvis Pælenes Drejningsmomenter ikke fremkom, vilde Pæletrykkenes Resultant nemlig gaa gennem Pælenes Skæringspunkt.

For en Pille, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden, kan der ikke stilles simple tilnærmede Værdier op for Pæletrykkene, som man kunde for Pillen med Pælene kun indspændt forneden.

§ 26. **Eksempler.**

Eks. 1. Samme Pille som i Eksempel 1 i § 11 og § 19.

$$\frac{10^3}{E} v = 36 \cos^2 \alpha;$$

$$\frac{10^3}{E} r = 0,192 \cos^2 \alpha;$$

$$\frac{v}{r} = 187,5;$$

$$s_1 = s_2 = 5,00 \text{ m.}$$

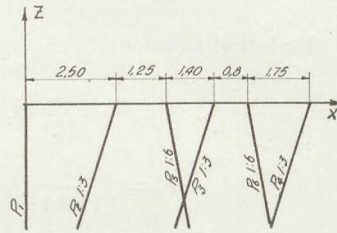


Fig. 44.

Pæl	x	$\text{tg } \alpha$	$\cos \alpha$	v	r	vx	$v \text{tg } \alpha$	$r \text{tg } \alpha$	$(v-r) \text{tg } \alpha \cdot x$
P_1	0	0	1,0	36	0,192	0	0	0	0
P_2	+ 2,50	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	0,173	+ 81	10,8	0,058	+ 26,85
P_3	+ 5,15	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	0,173	+ 167	10,8	0,058	+ 55,30
P_4	+ 7,70	$\frac{1}{3}$	0,95	32,4	0,173	+ 249	10,8	0,058	+ 82,70
P_5	+ 3,75	$-\frac{1}{6}$	0,986	35,0	0,187	+ 131	- 5,83	-0,031	- 21,75
P_6	+ 5,95	$-\frac{1}{6}$	0,986	35,0	0,187	+ 208	- 5,83	-0,031	- 34,51
Sum				203,2	1,085	+ 836	+20,74	0,112	+108,59

Pæl	$v \text{tg}^2 \alpha$	$r \text{tg}^2 \alpha$	$r \text{tg}^2 \alpha x$	η	η_t	s'	rs'	$r \text{tg } \alpha s'$	I_2
P_1	0	0	0	- 3,88	+ 0,25	2,50	0,480	0	542
P_2	3,6	0,019	+ 0,05	- 2,13	+ 0,84	2,63	0,455	0,153	148
P_3	3,6	0,019	+ 0,10	+ 0,52	- 0,05	2,63	0,455	0,153	9
P_4	3,6	0,019	+ 0,15	+ 3,07	- 0,90	2,63	0,455	0,153	306
P_5	0,97	0,005	+ 0,02	+ 0,24	+ 0,27	2,54	0,475	0,079	3
P_6	0,97	0,005	+ 0,03	+ 2,44	+ 0,64	2,54	0,475	0,079	209
Sum	12,74	0,067	+ 0,35			15,47	2,795	0,617	1217

Opstillingen af Tabellen er ganske den samme som i § 11 og § 19.

$$x'_0 = + \frac{836,35}{203,267} = + 4,11; \quad x''_0 = + \frac{108,59}{20,628} = + 5,26; \quad c = x'_0 - x''_0 = -1,15 \text{ m,}$$

$$s'_0 = \frac{0,617}{203,267} \sim 0; \quad s''_0 = \frac{2,795}{20,628} = 0,14 \text{ m,}$$

$$\text{tg } \alpha' = \frac{20,628}{203,267} = 0,102; \quad \text{tg } \alpha'' = \frac{13,825}{20,628} = 0,670 \text{ m,}$$

$$z_0 = - \frac{1,15 + 0,14}{0,670 - 0,102} = - 2,25 \text{ m.}$$

O-Punktets Abscisse i Forhold til P_1 er:

$$x_0 = + 4,11 - 2,25 \cdot 0,102 = + 3,88 \text{ m.}$$

Pæletrykkene er:

$$P_1 = \frac{1}{4,8} Q_z - 0,313 Q_x - \frac{1}{8,70} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{10,1} Q_z + 0,663 Q_x - \frac{1}{16,6} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{10,1} Q_z + 0,663 Q_x + \frac{1}{69,5} M,$$

$$P_4 = \frac{1}{10,1} Q_z + 0,663 Q_x + \frac{1}{11,6} M,$$

$$P_5 = \frac{1}{3,89} Q_z - 0,810 Q_x + \frac{1}{143} M,$$

$$P_6 = \frac{1}{3,89} Q_z - 0,810 Q_x + \frac{1}{14,0} M.$$

Pælenes Transversalkræfter er:

$$T_1 = -\frac{1}{600} Q_z + \frac{1}{61,1} Q_x + \frac{1}{23400} M,$$

$$T_2 = -\frac{1}{517} Q_z + \frac{1}{62,3} Q_x + \frac{1}{7780} M,$$

$$T_3 = -\frac{1}{517} Q_z + \frac{1}{62,3} Q_x - \frac{1}{223000} M,$$

$$T_4 = -\frac{1}{517} Q_z + \frac{1}{62,3} Q_x - \frac{1}{7600} M,$$

$$T_5 = -\frac{1}{683} Q_z + \frac{1}{62,9} Q_x + \frac{1}{23700} M,$$

$$T_6 = -\frac{1}{683} Q_z + \frac{1}{62,9} Q_x + \frac{1}{10000} M.$$

Pælenes Drejningsmoment er:

$$M_s = -\frac{1}{3035} M.$$

Hvis $\frac{v}{r} = 50$, finder man:

$$x'_0 = + 4,12; \quad x''_0 = + 5,26; \quad c = x'_0 - x''_0 = - 1,14 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned}s'_0 &= 0,01; & s''_0 &= 0,52; \\ \operatorname{tg} \alpha' &= 0,101; & \operatorname{tg} \alpha'' &= 0,828. \\ z_0 &= -2,29 \text{ m.}\end{aligned}$$

O-Punktets Abscisse i Forhold til P_1 er:

$$x_0 = +3,88 \text{ m.} \quad I_2 = 1223.$$

Pæletrykkene er:

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{1}{4,95} Q_z - 0,246 Q_x - \frac{1}{8,73} M, \\ P_2 &= \frac{1}{8,78} Q_z + 0,536 Q_x - \frac{1}{16,4} M, \\ P_3 &= \frac{1}{8,78} Q_z + 0,536 Q_x + \frac{1}{76,0} M, \\ P_4 &= \frac{1}{8,78} Q_z + 0,536 Q_x + \frac{1}{11,85} M, \\ P_5 &= \frac{1}{4,18} Q_z - 0,643 Q_x + \frac{1}{156} M, \\ P_6 &= \frac{1}{4,18} Q_z - 0,643 Q_x + \frac{1}{14,2} M.\end{aligned}$$

Pælernes Transversalkræfter er:

$$\begin{aligned}T_1 &= -\frac{1}{204} Q_z + \frac{1}{20,5} Q_x + \frac{1}{2900} M, \\ T_2 &= -\frac{1}{169} Q_z + \frac{1}{20,9} Q_x + \frac{1}{2235} M, \\ T_3 &= -\frac{1}{169} Q_z + \frac{1}{20,9} Q_x - \frac{1}{19850} M, \\ T_4 &= -\frac{1}{169} Q_z + \frac{1}{20,9} Q_x - \frac{1}{2140} M, \\ T_5 &= -\frac{1}{239} Q_z + \frac{1}{21,1} Q_x + \frac{1}{7500} M, \\ T_6 &= -\frac{1}{239} Q_z + \frac{1}{21,1} Q_x + \frac{1}{2925} M.\end{aligned}$$

Pælernes Drejningsmoment er:

$$M_s = -\frac{1}{810} M.$$

Hvis Pilleunderkanten ikke er retlinet, giver dette ikke en mere kompliceret Beregning end den i Tabellen angivne, idet man blot indlægger en regningsmæssig Pilleunderkant som angivet i § 24, og man indfører da kun under Rubrikken s' Størrelsen:

$$s' = (\frac{1}{2} s_1 + s_p) \sec \alpha,$$

idet man husker paa stadig at lade de tænke Pæle virke i Midtpunkterne af de virkelige Pæle og regner η_t ud herfra.

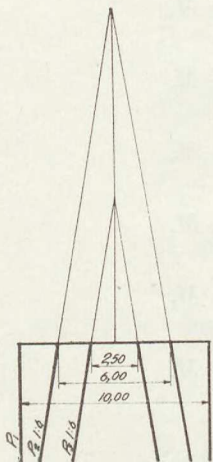


Fig. 45.

Eks. 2. Samme Pille som i Eksempel 2 i § 11 og § 19.

Der regnes med de samme Pæle som i § 11 og § 19.

Naar $\frac{v}{u} = 750,$

er $\frac{v}{r} = \frac{1}{4} \cdot 750 = 187,5.$

$$\frac{10^3}{E} v = 36 \cos^2 \alpha;$$

$$\frac{10^3}{E} r = \frac{36}{187,5} \cos^2 \alpha = 0,192 \cos^2 \alpha;$$

$$s_1 = s_2 = 5,0 \text{ m.}$$

Pæl	x	$\operatorname{tg} \alpha$	$\cos \alpha$	v	r	$v \operatorname{tg} \alpha$	$r \operatorname{tg} \alpha$
P_1	— 5,0	0	1	36	0,192	0	0
P_2	— 3,0	$\frac{1}{6}$	0,986	35,0	0,187	5,83	0,031
P_3	— 1,25	$\frac{1}{6}$	0,986	35,0	0,187	5,83	0,031
Sum				106,0	0,566		

Pæl	$(v-r) \operatorname{tg} \alpha x$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha$	$r \operatorname{tg}^2 \alpha$	s'	η	η_t	I_2
P_1	0	0	0	2,50	— 5,00	11,78	927
P_2	— 17,40	0,972	0,005	2,54	— 1,453	12,32	104
P_3	— 7,25	0,972	0,005	2,54	+ 0,297	12,03	30
Sum	— 24,65	1,944	0,010				1061

$$z_0 = - \frac{\Sigma (v-r) \operatorname{tg} \alpha \cdot x + \Sigma r s'}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)} = \frac{24,65 - 1,43}{2,510} = 9,28 \text{ m.}$$

(Hvis Pælene ikke havde været indspændt, havde man faaet $z_0 = 12,75$ m; hvis Pælene kun havde været indspændt forneden, havde man faaet $z_0 = 11,85$ m).

Naar z_0 er bestemt, kan η , η_t og $I_2 = \Sigma v\eta^2 + \Sigma r\eta_t^2 + \frac{1}{3}\Sigma rs'^2$ bestemmes.

Hele Beregningen er ført i ovenstaaende Tabel.

Pæletryk, Transversalkræfter og Drejningsmomenter findes da:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{5,9} Q_z - \frac{1}{11,8} M, \\ P_2 &= \frac{1}{6,0} Q_z + 1,17 Q_x - \frac{1}{41} M, \\ P_3 &= \frac{1}{6,0} Q_z + 1,17 Q_x + \frac{1}{202} M, \\ T_1 &= \quad \quad + \frac{1}{25,8} Q_x + \frac{1}{940} M, \\ T_2 &= -\frac{1}{6770} Q_z + \frac{1}{26,5} Q_x + \frac{1}{910} M, \\ T_3 &= -\frac{1}{6770} Q_z + \frac{1}{26,5} Q_x + \frac{1}{932} M. \end{aligned}$$

Praktisk talt er Transversalkraften ens i alle Pælene.

$$M_s = -\frac{1}{5320} M \text{ for alle Pælene.}$$

Hvis $\frac{v}{r} = 50$, svarende til $\frac{v}{u} = 200$, finder man:

$$z_0 = 4,66 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{5,9} Q_x - \frac{1}{13,4} M, \\ P_2 &= \frac{1}{6,0} Q_z + 0,728 Q_x - \frac{1}{32,5} M, \\ P_3 &= \frac{1}{6,0} Q_z + 0,728 Q_x - \frac{1}{144} M, \\ T_1 &= \quad \quad + \frac{1}{11,3} Q_x + \frac{1}{468} M, \\ T_2 &= -\frac{1}{1800} Q_z + \frac{1}{11,5} Q_x + \frac{1}{443} M, \\ T_3 &= -\frac{1}{1800} Q_z + \frac{1}{11,5} Q_x + \frac{1}{460} M. \end{aligned}$$

Eks. 3. En Pille, hvis Pæle skærer hinanden i samme Punkt og som er symmetrisk om en lodret Linie.

Der regnes den samme Pille igennem som i Eks. 3, § 19.

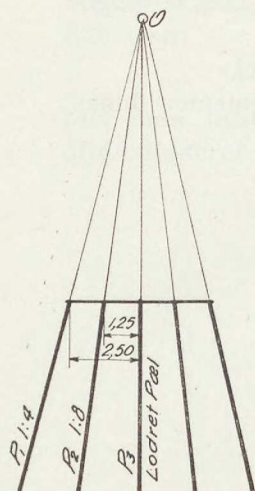


Fig. 46.

Pæl	x	α	$\cos \alpha$	v	r	$v \operatorname{tg} \alpha$	$r \operatorname{tg} \alpha$
P_1	-2,50	$\frac{1}{4}$	0,97	33,9	0,181	8,475	0,045
P_2	-1,25	$\frac{1}{8}$	0,99	35,3	0,188	4,413	0,024
P_3	0	0	1,00	36,0	0,192	0	0
Sum							

Pæl	$(v-r) \operatorname{tg} \alpha \cdot x$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha$	$r \operatorname{tg}^2 \alpha$	s'	η	η_t	I_2
P_1	-21,10	2,12	0,011	2,65	-0,475	11,375	31,5
P_2	-5,48	0,552	0,003	2,53	-0,237	10,786	24,2
P_3	0	0	0	2,50	0	10,60	22,0
Sum	-26,58	2,672	0,014				

$$I_2 = 133,4$$

$$z_0 = \frac{26,58 - 1,20}{3,137} = 8,10 \text{ m.}$$

$$P_1 = \frac{1}{5,05} Q_z + 1,393 Q_x - \frac{1}{8,0} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{4,90} Q_z + 0,711 Q_x - \frac{1}{15,8} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{4,86} Q_z.$$

$$T_1 = -\frac{1}{3770} Q_z + \frac{1}{33,6} Q_x + \frac{1}{63,0} M,$$

$$T_2 = -\frac{1}{7210} Q_z + \frac{1}{33,0} Q_x + \frac{1}{65,2} M,$$

$$T_3 = +\frac{1}{32,7} Q_x + \frac{1}{65,8} M,$$

$$M_s = -\frac{1}{334} M.$$

For $\frac{v}{r} = 50$ faas:

$$z_0 = 4,92 \text{ m.}$$

$$P_1 = \frac{1}{5,05} Q_z + 0,993 Q_x - \frac{1}{8,0} M,$$

$$P_2 = \frac{1}{4,90} Q_z + 0,505 Q_x - \frac{1}{16,0} M,$$

$$P_3 = \frac{1}{4,86} Q_z.$$

$$T_1 = -\frac{1}{1005} Q_z + \frac{1}{12,6} Q_x + \frac{1}{62,0} M,$$

$$T_2 = -\frac{1}{1920} Q_z + \frac{1}{12,4} Q_x + \frac{1}{66,0} M,$$

$$T_3 = \frac{1}{12,25} Q_x + \frac{1}{67,0} M,$$

$$M_s = -\frac{1}{240} M.$$

ANDET AFSNIT.

Rumlige Pælegrupper.

I. Grundlæggende Forudsætninger.

§ 27. Naar en Pælegruppe, hvis Pæle er placeret paa vilkaarlig Maade, paavirkes af en Belastning, vil den faa en Bevægelse, som i Almindelighed ikke vil kunne reduceres til en plan Bevægelse. Medens vi i forrige Afsnit kun behandlede Pælegrupper, hvis Pæle var parallelle med og symmetriske om Kraftplanen, hvori hele Pillens Bevægelse foregik, vil vi her beskæftige os med ganske vilkaarlige Pælegrupper paavirket af en vilkaarlig Belastning.

En saadan vilkaarlig Belastning vil ikke i Almindelighed kunne reduceres til en Enkeltkraft, men derimod altid til to vilkaarligt beliggende Enkeltkræfter*); vi vil i det følgende reducere til en Enkeltkraft samt et Moment med Akse parallel med Enkeltkraften; en saadan Kraft kaldes en Skruekraft.

Der vil her blive gjort de samme Forudsætninger som i forrige Afsnit:

1. Pælenes Reaktioner er af en saadan Art, at de giver Pillen en fuldstændig elastisk Understøtning.
2. Pillen regnes uendelig stiv i Forhold til Pælene.

Hvad den første Forudsætning angaar, skal der til det tidligere nævnte kun tilføjes, at hvis en Pæl foroven kan overføre Indspændinger, vil den i Almindelighed ogsaa kunne overføre en Vridning. Hvis Pælen foroven faar en Vinkeldrejning θ om en Akse parallel med sin Længderetning, vil den blive paavirket af et Vridningsmoment M_v , og gør man

*) Se Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, 1914, S. 31.

her den samme Forudsætning som tidligere, nemlig at der er Proportionalitet mellem Formforandring og Kraft, har man da:

$$M_v = k\theta,$$

hvor k er en Konstant.

Hvis Pælen var fast indspændt i et bestemt Punkt, havde man:

$$M_v = \frac{GI_p}{s} \theta,$$

hvor G er Forskydningselasticitetskoefficienten, I_p Pælens polære Inertimoment, og s er Pælens Længde; man kan altid ved et passende Valg af s ligesom ved de tidligere omtalte Indspændinger skrive den første Ligning paa Formen:

$$M_v = \frac{GI_p}{s_3} \theta, \quad (75)$$

hvor s_3 kaldes Pælens Vridningslængde.

Den anden Forudsætning, at Pællen er uendelig stiv, vil i de fleste Tilfælde være rigtig, i al Fald med en rimelig Tilnærmelse, men paa dette Punkt maa man altid gøre sig Teoriens Begrænsning klar.

Under disse Forudsætninger vil det være muligt at opstille en almindelig Teori for vilkaarlige Pælegrupper og herigennem finde almindelige Udtryk for Trykket og Indspændingerne i en vilkaarlig Pæl.

Naar en uendelig stiv Pille faar en uendelig lille Bevægelse, vil denne altid kunne reduceres til en Drejning om en Akse og en Parallelforskydning i Retning af Drejningsaksen; en saadan Bevægelse kaldes en Skruebevægelse *).

Idet baade Kræfter og Bevægelser kan betragtes som Vektorer, ser man, at en Bevægelse er bestemt ved 6 Betingelser, og da Kræfternes Ligevægt giver 6 Betingelser, kan altsaa en vilkaarlig Belastnings Bevægelse altid bestemmes ved de 6 statiske Ligevægtsbetingelser, uden at man behøver at gøre flere Forudsætninger end de nævnte.

Vi vil i det følgende undersøge tre forskellige Arter af Pælegrupper: 1) Pælegrupper, hvis Pæle er simpelt understøttede foroven og forneden, 2) Pælegrupper, hvis Pæle er simpelt understøttede foroven, men indspændt forneden, og 3) Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden.

*) Se førømtalte Afhandling af Mohr, S. 31.

§ 28. **Almindelig Teori for en uendelig stiv, elastisk understøttet Pille.** Vi vil, inden vi gaar over til Behandlingen af Pælegrupper, betragte en uendelig stiv Pille, der i al Almindelighed er elastisk understøttet.

Naar en saadan Pille belastes, vil den faa en uendelig lille Bevægelse, der som omtalt i forrige Paragraf kan sammensættes til en Skruebevægelse, ligesom den paa Pillen virkende vilkaarlige Belastning kan reduceres til en Skruekraft.

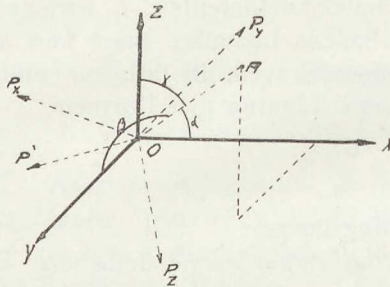


Fig. 47 a.

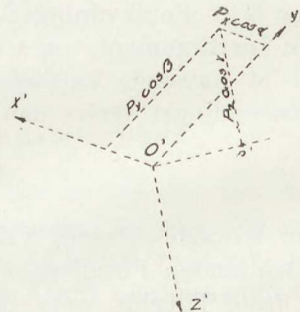


Fig. 47 b.

Vi vil nu vise, at for en saadan Pille findes der altid 3 og kun 3 paa hinanden vinkelrette Retninger, for hvilke en Parallelforskydning giver en Skruekraft parallel med sig selv.

I Fig. 147 a er vist et vilkaarligt retvinklet Koordinatsystem XYZ . En Parallelforskydning 1 parallel med X -Aksen giver en Kraft parallel med den paa Figuren viste Kraft P_x , en Parallelforskydning 1 parallel med Y en Kraft parallel med P_y samt en Parallelforskydning 1 parallel med z en Kraft parallel med P_z .

Hvis man giver Pillen en Parallelforskydning 1 i en Retning OA , der danner Vinklerne α , β og γ med henholdsvis X -, Y - og Z -Aksen, vil man faa en Kraft P' . Bevægelsen i OA kan imidlertid erstattes af en Bevægelse $\cos \alpha$ i X -Aksens Retning, en Bevægelse $\cos \beta$ i Y -Aksens Retning og en Bevægelse $\cos \gamma$ i Z -Aksens Retning.

Hvis man derfor lægger et skævvinklet Koordinatsystem $O'X'Y'Z'$, se Fig. 47 b, med Retningerne P_x , P_y og P_z som Koordinataxser, og heri afsætter ud fra Nulpunktet O' i Størrelse og Retning Spændingen P' svarende til Bevægelsen $O-A$, vil Kraftens Endepunkt P' have Koordinaterne:

$$x' = P_x \cos \alpha; \quad y' = P_y \cos \beta; \quad z' = P_z \cos \gamma.$$

Hvis nu Retningen $O-A$ varierer, vil α , β og γ variere, og man faar derfor det geometriske Sted for Punkt P' ved at eliminere α , β og γ af de tre ovenfor anførte Ligninger samt af Ligningen:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Herved finder man:

$$\frac{x'^2}{P_x^2} + \frac{y'^2}{P_y^2} + \frac{z'^2}{P_z^2} = 1.$$

Denne Ligning fremstiller en Ellipsoide henført til tre konjugerede Diametre som Koordinataksler. Kræfterne svarende til hvilket som helst tre paa hinanden vinkelrette Bevægelser er konjugerede Halvdiametre i Ellipsoiden. Det kan imidlertid være praktisk for at faa en Analogi med en rumlig Spændingstilstand at lade en Bevægelsesretning være repræsenteret af en derpaa vinkelret Plan; kaldes en saadan Plan et Snit, vil Snithjørnet O og Krafthjørnet O' være reciproke Snit- og Krafthjørner, hvilket er en direkte Følge af Maxwells Sætning. En Bevægelse vinkelret paa Plan $X'Y'$ vil saaledes give en Kraft parallel med Z -Aksen.

Da det valgte Koordinatsystem XYZ er vilkaarligt, maa et hvilket som helst Sæt af tre paa hinanden vinkelrette Bevægelses-snit svare til et Sæt konjugerede Diametre i Kraftellipsoiden, men omvendt maa ogsaa et hvilket som helst Sæt konjugerede Diametre i Ellipsoiden være parallelle med Kræfterne for tre paa hinanden vinkelrette Bevægelser.

Kun eet Sæt konjugerede Diametre i Ellipsoiden danner et retvinklet Hjørne, og betragter man først dette som Krafthjørne og finder det tilsvarende Bevægelseshjørne og dernæst betragter det som et Bevægelseshjørne og finder det tilsvarende Krafthjørne, indser man, at for disse tre Bevægelsesretninger vil disse og de tilsvarende Kraftretninger falde sammen *).

Man indser let, at dette Bevis gælder for alle Vektorer, der er projektivt forbundne.

Der er ikke i den anførte Udvikling sagt noget om Beliggenheden af de paagældende Kræfter eller om eventuelle Momenter; vi har kun ved Ellipsoiden bestemt den paagældende Kraft

*) Beviset er taget fra A. Ostfeld: Teknisk Elasticitetslære 1916, S. 96.

i Retning og Størrelse, men disse Ting ændres jo heller ikke af eventuelle Momenter.

Vi har altsaa nu fundet, at der eksisterer tre paa hinanden vinkelrette Retninger, for hvilke en Parallelforskydning og den dertil svarende Skruekræfts Akse er parallelle.

Akserne for disse tre Skruekræfter kaldes de tre Kraft-hovedakser.

Det kan nu vises, at en vilkaarlig Skruebevægelse

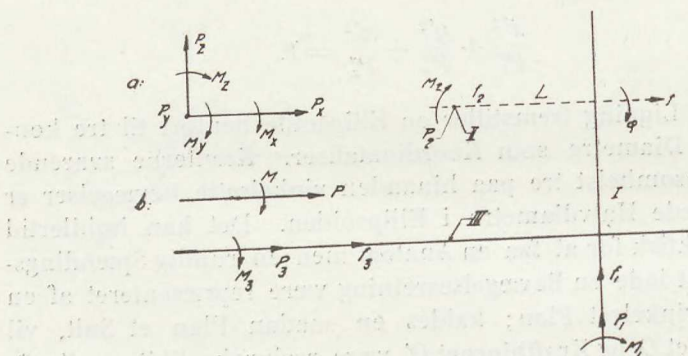


Fig. 48.

om en Akse, der vinkelret skærer de to Kraft-hovedakser, frembringer en Kraft, der er parallel med den tredje Hovedakse.

I hosstaaende Fig. 48 er angivet de tre Hovedakser I, II og III, hvoraf den ene II er vist vinkelret paa Papirets Plan, og de to andre derfor parallelle med Papirets Plan.

I første Hovedakse er Forskydningen 1 angivet som f_1 og dertil svarende Kraft og Moment som P_1 og M_1 ; tilsvarende for de andre Hovedakser.

Vi tænker os nu, at Pillen faar en Skruebevægelse omkring Aksen L , der skærer første og anden Hovedakse vinkelret. Skruebevægelsen er bestemt ved Forskydningen f og Drejningen φ . Den til denne Skruebevægelse svarende Belastning tænkes opløst i tre med Hovedakserne parallelle Skruekræfter: P_z, M_z parallel med 1. Hovedakse, P_x, M_x med 3. Hovedakse og P_y, M_y med 2. Hovedakse.

Man kan nu gøre Brug af Betti's Sætning*), der lyder:

$$\sum P_m \Delta_{mk} = \sum P_k \Delta_{km},$$

*) Se A. Ostfeld: Teknisk Statik I, 1920, Side 282.

hvor P_m og P_k er to Sæt vilkaarlige Belastninger, Δ_{mk} de af Belastningen P_k frembragte Forskydninger i Punkterne m i P_m 's Retning, og Δ_{km} de af Belastningen P_m frembragte Forskydninger i Punkterne k i P_k 's Retning.

Vi vil her kombinere følgende Belastninger:

- 1) Belastningerne P_1M_1 og den søgte Belastning:

$$\begin{aligned} P_z f_1 &= P_1 \cdot 0 + M_1 \cdot 0 = 0, \\ P_x &= 0. \end{aligned}$$

- 2) Belastningerne P_2M_2 og den søgte Belastning:

$$\begin{aligned} P_y f_2 &= P_2 \cdot 0 + M_2 \cdot 0 = 0, \\ P_y &= 0. \end{aligned}$$

Man ser altsaa, at den til Skruebevægelsen om L svarende Belastning er en Skruekraft parallel med L .

Den i Fig. 48 viste vilkaarlige Belastning, mærket a , kan altsaa erstattes af Belastningen b , en Enkeltkraft P og Momentet M , begge med Akse parallel med L .

Hvis vi anvender Betti's Sætning paa PM og P_3M_3 faas:

$$Pf_3 = M_3\varphi + P_3f.$$

Hvis man sætter

$$M_3\varphi + P_3f = 0, \quad (76)$$

faar man altsaa et rent Moment, hvis Akseretning dog ikke behøver at være parallel med L , idet P samtidig med at være Nul, kunde ligge uendelig fjernt.

Af Ligningen $M_3\varphi + P_3f = 0$, ser man, at hvis $M_3 = 0$, vil en ren Drejning om L give et rent Moment, idet $f = 0$ da giver $M_3\varphi + P_3f = 0$.

Hvis en Parallelforskydning i en Hovedakse giver en ren Kraft, vil en ren Drejning om en Linie, der skærer vinkelret de to andre Hovedakser, frembringe et rent Moment.

Hvis det rene Moment, der svarer til ovenanførte Ligning, har sin Akse parallel med L , vil en vilkaarlig Skruebevægelse om L altid frembringe en Skruekraft beliggende i den Hovedakse, der er parallel med L , idet nemlig den rene Forskydning fremkalder en Skruekraft i III og den rene Vinkeldrejning et Moment med Akse parallel med III.

Hele denne Udvikling kan imidlertid lige saa godt som for Parallelforskydninger anvendes for Momenter, idet en Kraft

og en Vinkeldrejning kan betragtes som Vektorer, og Momenter og Parallelforskydninger som Vektorpar. Man kan derfor foretage følgende Ombytninger: Parallelforskydning til Moment, Drejning til Kraft og omvendt*). Herved vilde man komme til et andet Hovedsystem, Momenthovedsystemet, end det, der svarer til Parallelforskydninger, og som kaldes Forskydningshovedsystemet; i Momenthovedsystemet vilde der altsaa være tre paa hinanden vinkelrette Linier svarende til Linierne L ovenfor, i hvilke en vilkaarlig Kraft svarer til en Skruebevægelse med Akse parallel med Kraften selv. Kun naar Skruebevægelsen gaar over til en ren Parallelforskydning, vil denne ikke være parallel med Skruekraften. Alle de forskellige Skruekræfter i de paagældende 3 Linier, altsaa ogsaa en ren Kraft og et rent Moment, vil derfor svare til en Vinkeldrejning om en fast Akse samt en Parallelforskydning i en fast, men fra Skrueaksen forskellig Retning.

I det specielle Tilfælde, hvor et rent Moment i de to Hovedsystemer har en Skrueakse parallel med sig selv, vil de to Systemer falde sammen, og i det Tilfælde vil altsaa en en hvilken som helst Skruekraft i en Hovedakse svare til en Skruebevægelse om en Linie, der skærer vinkelret de to andre Hovedakser.

Der kan ogsaa findes forskellige Relationer mellem vilkaarlige Kræfter og de tilsvarende Skrueakser.

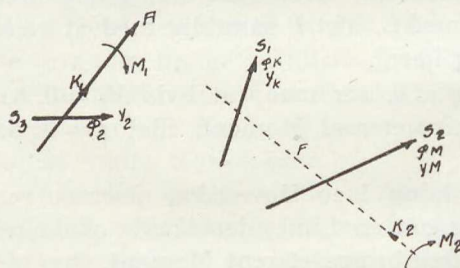


Fig. 49.

Vi vil først bevise, at Skrueakserne for vilkaarlige Skruekræfter i en fast Akse A alle skærer vinkelret en fast Linie F , som vi vil kalde Fælleslinien for Akse A , og at en Kraft i F har A til Fælleslinie.

I hosstaaende Figur 49 er vist Aksens A og en vilkaarlig Skruekraft deri K_1, M_1 .

S_1 er Skrueaksen for den rene Kraft K_1 , og Skruebevægelsen bestaar af en Parallelforskydning y_K og en Drejning φ_K .

S_2 er Skrueaksen for det rene Moment M_1 , og Skruebevægelsen bestaar af y_M og φ_M .

Skrueaksen for vilkaarlige Skruekræfter i A vil da findes ved at sammen-

*) Se Mohr: Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik 1914, S. 6.

sætte Skruebevægelserne i S_1 og S_2 , idet den ene af disse varieres i Størrelse i Forhold til den anden.

Retningen af denne Resultant maa være vinkelret paa den Linie F , der skærer vinkelret S_1 og S_2 , da Resultanten maa ligge i en Plan, der baade er parallel med S_1 og S_2 . Tager man nu Momentet om F af S_1 og S_2 , er dette Nul; det samme maa derfor gælde Resultanten, hvorfor denne maa skære F .

Skrueaksen for en i en fast Linie beliggende vilkaarlig Skruekraft skærer altsaa vinkelret en fast Linie, Fælleslinien.

Skrueaksen for en i en vilkaarlig Skruekraft $K_2 M_2$ i F er S_3 , og Skruebevægelsen bestaar af y_2 og φ_2 .

Vi benytter nu Betti's Sætning:

1) Belastningerne $K_2 M_2$ og K_1 :

Den første Belastnings Arbejde er Nul; derfor maa M_1 's Arbejde ogsaa være Nul, d. v. s. at Skrueaksen S_3 maa staa vinkelret paa A (eller φ_2 være Nul; er dette Tilfældet, er S_3 ikke stedbestemt, men kun retningsbestemt og kan derfor parallelforskydes, saa den skærer A).

2) Belastningerne $K_2 M_2$ og K_1 :

Den første Belastnings Arbejde er ogsaa her Nul, hvorfor K_1 's Arbejde maa være Nul. Da S_3 staa vinkelret paa A , maa den skære denne. (Hvis φ_2 er Nul, maa S_3 staa vinkelret paa A , for at K_1 's Arbejde kan blive Nul; for beviste vi, at S_3 i dette Tilfælde kunde betragtes som skærende A , hvorfor dette Undtagelsestilfælde: $\varphi_2 = 0$ giver samme Resultat som det almindelige).

Kraftakse og Fælleslinie er altsaa reciprokt forbundne.

Imidlertid kan man tale om en anden Slags Fælleslinier, idet nemlig parallelle, rene Kræfter i en Plan har Skrueakser, der skærer vinkelret en fast Linie; denne Linie kaldes Fælleslinien for en Kraftretning i en Plan.

I hosstaaende Fig. 50 er vist en Plan P , hvori Kræfterne virker.

S_M er Skrueaksen for et Moment med Akse vinkelret paa Planen; S_R er Skrueaksen for en Kraft R i Planen. Skrueaksen

for en vilkaarlig Kraft R' parallel med R og beliggende i Plan P vil derfor skære vinkelret den Linie, der skærer vinkelret S_R og S_M i denne Linie; F , vil vi kalde Kræfterne R 's Fælleslinie.

S_{R_1} er Skrueaksen for en anden Kraft R_1 beliggende i Planen, men ikke parallel med R . Kræfterne R_1 's Fælleslinie vil ligeledes skære S_M vinkelret.

Alle Fælleslinierne for Kræfter i Planen vil saaledes være parallelle med en Plan vinkelret paa S_M .

Ved Ombytning af Parallelforskydning med Moment vil man af Beviset Side 113 se, at S_M er konjugeret Diameter til en Diametralplan vinkelret paa

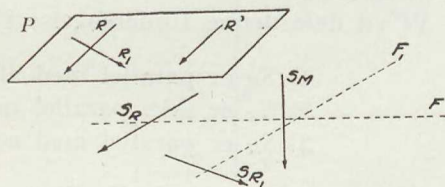


Fig. 50.

den til S_M svarende Momentakse i Momenthovedsystemets Ellipsoide. En vilkaarlig Ellipsoide kan altid tænkes opstaaet af en Kugle ved tre rette Affiniteter: S_M og tilsvarende Momentakse er tilsvarende Ellipsoide- og Kuglediametre, herved forstaar vi en Kuglediameter og den Ellipsoidediameter, som Kuglediameteren gaar over i ved Affiniteterne. Paa samme Maade vil Planen P og den Plan, alle Planens Fælleslinier er parallelle med, være tilsvarende Ellipsoide- og Kuglediametralplaner, eller sagt paa en anden Maade: Planen P er Diametralplan for S_M som konjugeret Diameter.

Det kan nu vises, at Kraftretningerne i en Plan og de tilhørende Fælleslinier danner involutoriske Liniebundter, naar disse sidste parallelprojiceres ind paa en Plan vinkelret paa

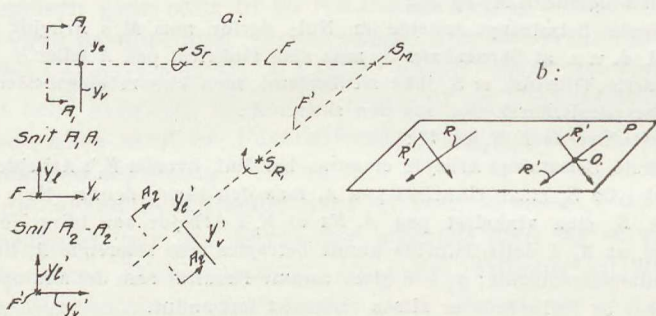


Fig. 51.

S_M , og idet vi tænker os de to Planer drejet ind i hinanden; undtaget herfra er dog et enkelt specielt Tilfælde, som skal omtales nedenfor.

Vi vil dele denne Undersøgelse i tre Dele:

- 1) S_M er parallel med alle S_r .
- 2) S_M er ikke parallel med nogen S_r .
- 3) S_M er parallel med een og kun een S_r .

1) S_M er parallel med alle S_r .

I Fig. 51a er vist i Parallelprojektion paa en Plan vinkelret paa S_M de to til de i Fig. 51b viste Kraftretninger R og R_1 svarende Fælleslinier. S_R og S_{R_1} er Skrueakserne svarende til Kræfterne R og R_1 . Ved at parallelforskyde R vil det være muligt at faa den tilsvarende Skrueakse til at falde uendelig fjernt, hvorved Skruebevægelsen gaar over til en Parallelforskydning. Denne kan, som tidligere nævnt, betegnes ved et Vektorpar (her og i det følgende kaldet en Momentvektor), og den vil være vinkelret paa den til Kraftretningen svarende Fælleslinie F . Momentvektoren er i Figuren angivet ved y_l og

y_v (se ligeledes Snit A_1-A_1). Den til den rene Parallelforskydning svarende Kraft er vist i Fig. 51b som R' .

Paa samme Maade kan R_1 parallelforskydes til R'_1 , saaledes at Bevægelsen svarende til R'_1 bliver en Parallelforskydning; denne er betegnet ved y_l og y_v (se Fig. 51a og Snit A_2-A_2).

En vilkaarlig Kraft gennem Punkt O i Planen P kan altid opløses i Komposanter efter R' og R'_1 , og den samlede Bevægelse kan findes ved Sammensætning af disse Komposanters y_v - og y_l -Bevægelser. Da Fællesliniernes Retning er vinkelret paa den resulterende y_v og uafhængig af y_l , vil Relationen mellem Fællesliniens Retning og Kraftretningen blive den samme som mellem Snit og Spændingsretning i en plan Spændingstilstand (se saaledes ogsaa Beviset Side 53, 1. Afsnit), og man finder derfor, at Fælleslinien danner en Involution med den tilsvarende Kraftretning.

Hvis S_M staar vinkelret paa Plan P i Punkt O , kan man yderligere bevise, at en vilkaarlig Kraft er Antipolar i en Ellipse for det Punkt som Pol, i hvilket Bevægelsesaksen skærer Planen.

I dette Tilfælde vil ifølge den lige ovenfor beviste Involution Kraftlinien og tilhørende Fælleslinie være konjugerede Diametre i en Ellipse.

I hosstaaende Fig. 52 er vist det i Fig. 51 fundne Punkt O , den angribende Kraft R og den nævnte Ellipses to Hovedakser I og II; disse tages til Koordinataksener; R skærer Y-Aksen i Afstanden f_l fra O , X-Aksen i Afstanden f_v fra O .

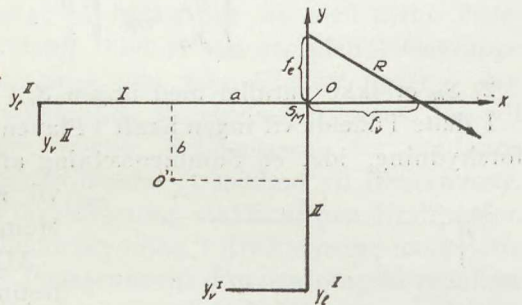


Fig. 52.

R kan tænkes opløst i sit Skæringspunkt med X-Aksen i en Kraft parallel med Y , R_y , og en Kraft parallel med X , R_x . Momentet om O er: $M_R = R_y f_v$.

Idet S_M svarer til Momentet 1 og y_v til Kraften 1*), finder man, at Skrueaksens X-Koordinat er (se 1. Afsnit S. 56)

*) y_v^{II} og y_l^{II} svarer til Kraften 1 i Akse II
 y_v^I og y_l^I — — — — — I.

$$a = -\frac{y_v'' R_y}{R_y f_v S_M} = -\frac{y_v''}{f_v S_M}.$$

Hvis R tænkes opløst i sit Skæringspunkt med Y -Aksen i Komposanterne R_x og R_y (Momentet om O er: $M_R = R_x f_l$), findes Skrueaksens Y -Koordinat:

$$b = -\frac{y_v'}{f_l S_M}.$$

Den Linie, i hvilken R virker, har Ligningen:

$$\frac{x}{f_v} + \frac{y}{f_l} = 1.$$

Heraf findes:

$$\frac{xa}{\left(\frac{y_v''}{S_M}\right)} + \frac{yb}{\left(\frac{y_v'}{S_M}\right)} = -1.$$

Dette er Ligningen for Skrueaksens Antipolar med Hensyn til en Ellipse, hvis Hovedakser er:

$$\sqrt{\frac{y_v''}{S_M}} \text{ og } \sqrt{\frac{y_v'}{S_M}}.$$

2) S_M er ikke parallel med nogen S_r .

I dette Tilfælde vil ingen Kraft i Planen svare til en Parallelforskydning, idet en Sammensætning af S_R , S_{R_1} og S_M aldrig vil kunne blive en ren Momentvektor.

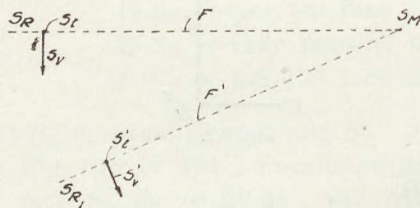


Fig. 53.

At Kraftretninger og Fælleslinier danner to involutoriske Liniebunter fremgaar af det ovenfor anførte, idet Fællesliniernes Retning er bestemt af de

Komposanter af S_R (S_v i Fig. 53), der er parallelle med en Plan vinkelret paa S_M .

3) S_M er parallel med een og kun een S_R .

I dette Tilfælde er f. Eks. $S_v = 0$ i Fig. 53, medens S_v' ikke er Nul. Enhver Sammensætning af S_R og S_{R_1} har sin S_v parallel med S_v' og alle Fælleslinier vil derfor være parallelle med F' .

undtagen for S_R ; i den til denne Fælleslinie svarende Kraftretning vil man kunne finde en Kraft, der svarer til en ren Parallelforskydning, men dette kan man kun finde for denne ene Kraftretning i Planen.

Til Slut skal vi endelig bevise, at hvad der nedenfor vises for en Pælegruppe, gælder for enhver elastisk understøttet Pille.

For et uendelig lille Arealelement af Understøtningen vil dettes Indvirkning paa Pillen kunne opfattes som Snitspændinger i et elastisk Legeme, og da disse Spændinger kun er afhængige af Elementets Forskydning, vil man iflg. Beviset S. 113 kunne finde tre paa hinanden vinkelrette Retninger, for hvilke Forskydningsretning og Spænding falder sammen. Hvis man nu helt fjerner Understøtningen og i Stedet for hvert lille Element sætter tre tænkte Pæle i Elementets tre Hovedakser og giver disse Pæle Modstandstal, der svarer til Hovedspændingen divideret med den tilsvarende Bevægelse, vil man faa en Understøtning, der statisk og elastisk er identisk med den givne, og man ser derfor, at hvad der er bevist for Pælegrupper, er ogsaa bevist for en vilkaarlig, elastisk Understøtning.

I et senere Afsnit skal vi beskæftige os med plane Pælegrupper i udvidet Forstand, idet vi ved en plan Pælegruppe vil forstaa en saadan, hvor alle ydre Kræfter ligger i den Plan, i hvilken de tilsvarende Bevægelser foregaar. Vi vil imidlertid allerede her opstille Betingelserne for saadanne plane Kraft- og Bevægelsestilfælde; et saadant vil fremkomme, naar S_M er en ren Vinkeldrejning vinkelret paa Kraftplanen og S_r er en ren Parallelforskydning i Kraftplanen; naar dette er Tilfældet, vil to af Pælegruppens Forskydningshovedakser ligge i Planen, og Betingelsen for plan Pælegruppe er derfor, at følgende tre Ting samtidig finder Sted:

- 1) To Hovedakser maa skære hinanden.
- 2) En ren Kraft i disse to Hovedakser maa svare til en ren Forskydning.
- 3) En ren Vinkeldrejning om den Hovedskrueakse, der skærer vinkelret de to ovennævnte Hovedakser, maa frembringe et Moment parallelt med Skrueaksen.

II. Pælegrupper, hvis Pæle er simpelt understøttet foroven og forned.

§ 29. Pælens Hældningsvinkler. I hosstaaende Fig. 54

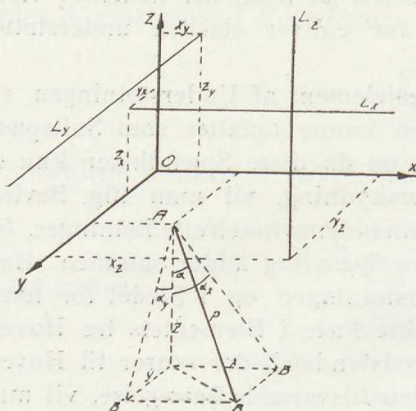


Fig. 54.

er vist et Koordinatsystem, hvor XY-Planen er lagt i Pilleunderkanten.

I Punkt A i Pilleunderkanten virker en Pæl P, hvis Vinkel med Z-Aksen er α .

Vinklen mellem Z-Aksen og Pælens Projektion paa XZ-Planen kaldes α_x og mellem Z-Aksen og Pælens Projektion paa YZ-Planen α_y ; disse Vinkler regnes positive, naar paagældende

Koordinat (x eller y) aftager med aftagende Z-Koordinat; saaledes vil den viste Pæl AB have negative α_x og α_y .

Vi indfører nu ligesom i forrige Afsnit Betegnelsen:

$$v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha. \quad (77)$$

hvor F er Pælens Tværsnit, s_2 dens Sammentrykningslængde og α dens Vinkel med Z-Aksen.

Man finder da:

Naar Pillen faar en lodret Parallelforskydning 1 nedad (i Z-Aksens negative Retning), vil Pælen faa et Tryk, hvis Komposanter efter de tre Akser er:

$$\begin{aligned} P_z &= +v, \\ P_x &= +v \operatorname{tg} \alpha_x, \\ P_y &= +v \operatorname{tg} \alpha_y. \end{aligned}$$

Pæletrykkets Komposanter regnes positive i Koordinataksernes positive Retninger, naar der regnes med Pælens Indvirkning paa Pillen.

Naar Pillen faar en vandret Parallelforskydning 1 i X-Aksens negative Retning, vil Forskydningens Projektion ind paa en lodret Plan gennem Pælen være:

$$1 \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Den lodrette Komposant af Pæletrykket bliver da:

$$P_z = + v \operatorname{tg} \alpha_x.$$

Den vandrette Komposant af Pæletrykket bliver:

$$v \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{\operatorname{tg} \alpha} = v \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_x.$$

Denne opløses i Komposanter efter X- og Y-Akserne; disse bliver da:

$$P_x = + v \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_x \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{\operatorname{tg} \alpha} = + v \operatorname{tg}^2 \alpha_x,$$

$$P_y = + v \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_x \frac{\operatorname{tg} \alpha_y}{\operatorname{tg} \alpha} = + v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y.$$

Naar Pillen faar en vandret Parallelforskydning 1 i Y-Aksens negative Retning, findes Pæletrykkets Komposanter paa lignende Maade som før:

$$P_z = + v \operatorname{tg} \alpha_y,$$

$$P_x = + v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y,$$

$$P_y = + v \operatorname{tg}^2 \alpha_y.$$

Betegnes ved P_{pq} Pæletrykkets Komposant efter p for Bevægelsen q har man allsaa:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= + v \operatorname{tg}^2 \alpha_x; & P_{yy} &= + v \operatorname{tg}^2 \alpha_y; & P_{zz} &= + v; \\ P_{xy} &= P_{yx} = + v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y; & P_{zx} &= P_{xz} = + v \operatorname{tg} \alpha_x; \\ P_{zy} &= P_{yz} = + v \operatorname{tg} \alpha_y. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Vi vil, inden Udviklingen fortsættes, definere Fortegnene for Skruekræfter og Skruebevægelser.

For en Skruerkraft regnes Kraft og Moment at have samme Fortegn, naar Momentets Akse har samme positive Retning som Kraften. Et Moments positive Retning er defineret saaledes, at Momentet ses at dreje med Urviseren, naar man ser ud ad Aksens positive Retning. For en Skruebevægelse regnes jo som bekendt Vinkeldrejningen som en Vektor beliggende i Skrueraksen, medens Parallelforskydningen regnes som et Moment; dette regnes at have samme Fortegn som Drejnings-

vektoren, hvis Forskydningsmomentets Akse har positiv Retning i samme Retning som Drejningsvektoren.

Drejningsvektoren regnes positiv i samme Retning som en Momentakse, d. v. s. at Vinkeldrejningen skal ses at gaa med Uret, naar det ses ud ad Aksens positive Retning.

Forskydningsmomentets Akse regnes positivt i den Retning, mod hvilken Forskydningen foregaar.

§ 30. **Hovedakserne.** Som i § 28 anført findes der tre paa hinanden vinkelrette Retninger, for hvilke en Parallelforskydning og den tilhørende Skruekraft er parallelle. Disse findes saaledes:

I hosstaaende Fig. 55 er vist de for Parallelforskydninger parallel med de tre Koordinataksler fremkommende Kræfter angivet med de i forrige Paragraf angivne Betegnelser.

Hvis man nu giver Pillen en Parallelforskydning 1 i en Retning, der har Retningscosinusserne λ , μ og ν med Akserne, vil den hertil svarende Kraft P være lig Resultanten af de Kræfter,

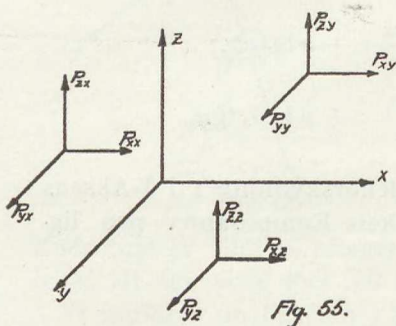


Fig. 55.

ter, der svarer til Parallelforskydningerne λ , μ og ν i Retning af henholdsvis X-, Y- og Z-Aksen.

Naar denne Retning for Parallelforskydningen skal være parallel med en Hovedaxe, maa P ligeledes have Retningscosinusser λ , μ og ν med X-, Y- og Z-Aksen, og man faar da ved at projicere henholdsvis paa X-, Y- og Z-Aksen:

$$\left. \begin{aligned} P\lambda &= \lambda \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + \mu \sum v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + \nu \sum v \operatorname{tg} \alpha_x, \\ P\mu &= \lambda \sum v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + \mu \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + \nu \sum v \operatorname{tg} \alpha_y, \\ P\nu &= \lambda \sum v \operatorname{tg} \alpha_x + \mu \sum v \operatorname{tg} \alpha_y + \nu \sum v. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Hvis man mellem disse Ligninger og Ligningen $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ eliminerer λ , μ og ν , finder man:

$$\left. \begin{aligned} P^3 - (\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + \sum v) P^2 + (\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x \sum v \\ + \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y \sum v - (\sum v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y)^2 - (\sum v \operatorname{tg} \alpha_x)^2 - (\sum v \operatorname{tg} \alpha_y)^2) P \\ - (\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y \sum v + 2 \sum v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \sum v \operatorname{tg} \alpha_x \sum v \operatorname{tg} \alpha_y - \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x (\sum v \operatorname{tg} \alpha_y)^2 \\ - \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y (\sum v \operatorname{tg} \alpha_x)^2 - \sum v (\sum v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y)^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Heraf kan de tre Hovedaksekræfter findes, og naar disse er bestemt, kan de tilsvarende Retningscosinusser findes af Ligningerne (79) og Ligningen:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Herved finder man til Bestemmelse af λ , μ og ν :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{(P - \Sigma v) \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y}{(P - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x) \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y} \cdot \nu, \\ \mu &= \frac{(P - \Sigma v) \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y}{(P - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y) \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y} \cdot \nu, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Man maa lægge Mærke til, at Tælleren i de to Brøker er den samme.

Ved her at indsætte for P de tre Hovedaksekræfter finder man de tre Hovedaksers Retningscosinusser, der betegnes ved:

$$\begin{aligned} \text{III. Hovedakse: } & \lambda_1 \mu_1 \nu_1, \\ \text{II. } & \lambda_2 \mu_2 \nu_2, \\ \text{I. } & \lambda_3 \mu_3 \nu_3. \end{aligned}$$

Angaaende Fortegnet for Retningscosinusserne se Eks. 1, § 34.

Vi lægger nu et nyt Koordinatsystem med samme Begyndelsespunkt som det oprindelige, men med X_1 -, Y_1 - og Z_1 -Akserne parallelle med henholdsvis III, II og I Hovedakse.

Lad AB i Fig. 56 være en Pæl i det oprindelige Koordinatsystem:

Man har da:

$$\operatorname{tg} \alpha_x = -\frac{x}{z}; \quad \operatorname{tg} \alpha_y = -\frac{y}{z}.$$

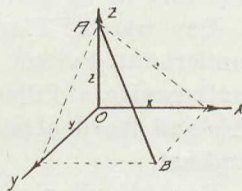


Fig. 56.

Koordinaterne i det nye System er*):

$$\text{Punkt A: } x_1 = \nu_1 z; \quad y_1 = \nu_2 z; \quad z_1 = \nu_3 z,$$

$$\text{Punkt B: } x_2 = \lambda_1 x + \mu_1 y; \quad y_2 = \lambda_2 x + \mu_2 y; \quad z_2 = \lambda_3 x + \mu_3 y.$$

Man finder derfor i det nye System:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha'_x &= \frac{\lambda_1 x + \mu_1 y - \nu_1 z}{\lambda_3 x + \mu_3 y - \nu_3 z} = \frac{\lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_1}{\lambda_3 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_3 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_3}, \\ \operatorname{tg} \alpha'_y &= \frac{\lambda_2 x + \mu_2 y - \nu_2 z}{\lambda_3 x + \mu_3 y - \nu_3 z} = \frac{\lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_2}{\lambda_3 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_3 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_3}, \\ \cos^2 \alpha' &= (\lambda_3 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_3 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_3)^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

*) Se C. Juel: Elementær analytisk Stereometri, 1916, S. 19.

Ligningerne for en Pæl gennem et vilkaarligt Punkt i XY-Planen $(x_0, y_0, 0)$ er i det gamle System:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + z \operatorname{tg} \alpha_y, \\ x &= x_0 + z \operatorname{tg} \alpha_x, \end{aligned}$$

hvor Tangenserne gælder i det oprindelige Koordinatsystem. Naar heri indsættes x , y og z udtrykt ved de nye Koordinater, findes for $z_1 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0(\mu_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_y) - y_0(\lambda_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_x)}{D}, \\ y_1 &= \frac{y_0(\lambda_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_x) - x_0(\mu_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_y)}{D}, \end{aligned} \right\} (82 a)$$

hvor

$$D = (\lambda_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_x)(\mu_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_y) - (\mu_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_y)(\lambda_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_x).$$

x_1 og y_1 er Koordinaterne til Pælens Skæringspunkt med den nye $X_1 Y_1$ -Plan.

I det følgende vil vi, skønt der er sket en Koordinatændring, betegne baade Koordinater og Vinkler uden Index, altsaa paa samme Maade i Forhold til de nye Koordinataksers som i Forhold til de gamle.

Den nye XY-Plan vælger vi nu til regningsmæssig Pilleunderkant, hvilket man kan gøre, da Pæletrykkene er ganske uafhængige af Pilleunderkantens Form; det er jo kun Pælens Afstand fra den paagældende Skrueakse, der bestemmer Pæletrykket.

Dernæst vil vi finde de tre Hovedaksers Beliggenhed i det nye Koordinatsystem.

III. Hovedakse:

Denne svarer til en Parallelforskydning parallel med X-Aksen. Herved frembringes Pæletryk, hvis Komposanter efter Akserne er:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= v \operatorname{tg}^2 \alpha_x, \\ P_{yx} &= v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y, \\ P_{zx} &= v \operatorname{tg} \alpha_x. \end{aligned}$$

Resultanten af disse Pæletryk vil have Koordinaterne:

$$\left. \begin{aligned} y_{III} &= \frac{\Sigma yv \operatorname{tg}^2 \alpha_x - \Sigma xv \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x}, \\ z_{III} &= -\frac{\Sigma xv \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Kraften, der virker i III. Hovedakse er:

$$P_{III} = \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x; \quad M_{III} = -\Sigma yv \operatorname{tg} \alpha_x.$$

II Hovedakse.

Denne svarer til en Parallelforskydning parallel med Y-Aksen; de herved frembragte Pæletryk har Komposanterne efter Akserne:

$$\begin{aligned} P_{xy} &= v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y = P_{yx}, \\ P_{yy} &= v \operatorname{tg}^2 \alpha_y, \\ P_{zy} &= v \operatorname{tg} \alpha_y. \end{aligned}$$

Resultanten af disse Pæletryk har Koordinaterne:

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= \frac{\Sigma xv \operatorname{tg}^2 \alpha_y - \Sigma yv \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y}, \\ z_{II} &= -\frac{\Sigma yv \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Kraften, der virker i II. Hovedakse er:

$$P_{II} = \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y; \quad M_{II} = \Sigma xv \operatorname{tg} \alpha_y.$$

I. Hovedakse:

Denne svarer til en Parallelforskydning parallel med Z-Aksen, og de herved frembragte Pæletryk har Komposanterne:

$$\begin{aligned} P_{xz} &= v \operatorname{tg} \alpha_x = P_{zx}, \\ P_{yz} &= v \operatorname{tg} \alpha_y = P_{zy}, \\ P_{zz} &= v. \end{aligned}$$

Resultanten af disse Pæletryk har Koordinaterne:

$$\left. \begin{aligned} x_I &= \frac{\Sigma xv}{\Sigma v}; \quad y_I = \frac{\Sigma yv}{\Sigma v}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Kraften, der virker i I. Hovedakse er:

$$P_I = \Sigma v; \quad M_I = \Sigma yv \operatorname{tg} \alpha_x - \Sigma xv \operatorname{tg} \alpha_y.$$

Det ses iøvrigt, at $M_I + M_{II} + M_{III} = 0$.

De tre Hovedskrueakser har Ligningerne:

$$\left. \begin{array}{l} L_{III}: y = y_I; \quad z = z_{II}. \\ \text{Ved } L_{III} \text{ forstaas den Skrueakse, der er parallel med} \\ \text{III. Hovedakse.} \\ L_{II}: x = x_I; \quad z = z_{III}, \\ L_I: x = x_{II}; \quad y = y_{III}. \end{array} \right\} (86)$$

§ 31. **Pæletrykkene.** Rene Kræfter. Som anført i § 28 vil en vilkaarlig Skruebevægelse om en Hovedskrueakse altid fremkalde en Skruekraft parallel med Aksen. Vi vil nu bestemme de Skruebevægelser om Hovedskrueakserne, der giver rene Kræfter (d. v. s. Skruekræfter, hvis Momenter er Nul), og Beliggenheden af disse Kræfter.

Først vil vi indføre nogle Afstandsbetegnelser fra Hovedskrueakserne til Pælene:

Ved η_x vil vi forstaa den vandrette Afstand fra III. Hovedskrueakse til Pælene:

$$\eta_x = y - y_I + z_{II} \operatorname{tg} \alpha_y. \quad (87)$$

Ved η_y vil vi forstaa den vandrette Afstand fra II. Hovedskrueakse til Pælene:

$$\eta_y = x - x_I + z_{III} \operatorname{tg} \alpha_x. \quad (87a)$$

Ved η_z vil vi forstaa den korteste Afstand fra I. Hovedskrueakse til Pælene multipliceret med $\operatorname{tg} \alpha$

$$\eta_z = (y - y_{III}) \operatorname{tg} \alpha_x - (x - x_{II}) \operatorname{tg} \alpha_y. \quad (87b)$$

1) III. Hovedakse.

Vi tænker os at give Pælegruppen en Parallelforskydning 1 parallel med III. Hovedakse og en Vinkeldrejning φ_{III} om III. Hovedskrueakse.

Pælenes Komposanter efter de tre Koordinatakser er da:

$$\left. \begin{array}{l} P_x = -\varphi_{III} \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x + v \operatorname{tg}^2 \alpha_x \\ P_y = -\varphi_{III} \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_y + v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \\ P_z = -\varphi_{III} \eta_x v \quad \quad \quad + v \operatorname{tg} \alpha_x. \end{array} \right\} (88)$$

Betingelsen for, at Resultanten af Pæletrykkene er en ren Kraft, er:

$$M_x = -\Sigma P_z \eta_x = 0.$$

Heraf findes:

$$\varphi_{III} = \frac{\Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma v \eta_x^2}. \quad (89)$$

Beliggenheden af den rene Kraft findes ved Koordinaterne:

$$y_{III}^P = y_{III} + \frac{\Sigma P_z \eta_z}{\Sigma P_x}, \quad z_{III}^P = z_{III} - \frac{\Sigma P_z \eta_y}{\Sigma P_x}.$$

Herved faas:

$$\left. \begin{aligned} y_{III}^P &= y_{III} - \frac{\varphi_{III} \Sigma \eta_x \eta_z v}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x - \varphi_{III} \Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x} \\ z_{III}^P &= z_{III} + \frac{\varphi_{III} \Sigma \eta_x \eta_y v}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x - \varphi_{III} \Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Naar Pælegruppen paavirkes af en Kraft Q_3 , positiv i X-Aksens negative Retning og beliggende i Linien:

$$y = y_{III}^P; \quad z = z_{III}^P$$

vil Pæletrykkenes lodrette Komposanter være:

$$P \cos \alpha = Q_3 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x - \varphi_{III} v \eta_x}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x - \varphi_{III} \Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x}. \quad (91)$$

2) II. Hovedakse.

Vi giver Pælegruppen en Parallelforskydning 1 parallel med II. Hovedakse og en Drejning φ_{II} om II. Hovedskruetakse.

Pæletrykkenes Komposanter er da:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \varphi_{II} \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_x + v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \\ P_y &= \varphi_{II} \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y + v \operatorname{tg}^2 \alpha_y \\ P_z &= \varphi_{II} \eta_y v + v \operatorname{tg} \alpha_y \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Betingelsen for, at Resultanten af Pæletrykkene er en ren Kraft, er:

$$M_y = \Sigma P_z \eta_y = 0.$$

Heraf findes:

$$\varphi_{II} = -\frac{\Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma v \eta_y^2}. \quad (93)$$

Beliggenheden af den rene Kraft findes ved Koordinaterne:

$$x_{II}^P = x_{II} - \frac{\Sigma P_z \eta_z}{\Sigma P_y}, \quad z_{II}^P = z_{II} - \frac{\Sigma P_z \eta_x}{\Sigma P_y}.$$

Heraf findes:

$$\left. \begin{aligned} x_{II}^P &= x_{II} - \frac{\varphi_{II} \Sigma \eta_y \eta_z v}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + \varphi_{II} \Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y} \\ z_{II}^P &= z_{II} - \frac{\varphi_{II} \Sigma \eta_x \eta_y v}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + \varphi_{II} \Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y} \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Naar Pælegruppen paavirkes af en Kraft Q_2 , positiv i Y-Aksens negative Retning, og beliggende i Linien:

$$x = x_{II}^P; \quad z = z_{II}^P,$$

vil Pæletrykkenes lodrette Komposanter være:

$$P \cos \alpha = Q_2 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y + \varphi_{II} \eta_y v}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + \varphi_{II} \Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y}. \quad (95)$$

3) I. Hovedakse.

Vi giver Pælegruppen en Parallelforskydning 1 parallel med I. Hovedakse og en Drejning φ_I om I. Hovedskruetakse.

Betingelsen for, at Resultanten af Pæletrykkene er en ren Kraft, er:

$$M_z = \varphi_I \Sigma v \eta_z^2 + \Sigma v \eta_z = 0. \quad (96)$$

Heraf findes:

$$\varphi_I = - \frac{\Sigma v \eta_z}{\Sigma v \eta_z^2}. \quad (97)$$

Beliggenheden af den rene Kraft findes ved Koordinaterne:

$$\left. \begin{aligned} x_I^P &= x_I + \frac{\Sigma P_z \eta_y}{\Sigma P_z}; \quad y_I^P = y_I + \frac{\Sigma P_z \eta_x}{\Sigma P_z} \\ P_z &= v + \varphi_I v \eta_z. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Herved findes:

$$\left. \begin{aligned} x_I^P &= x_I + \frac{\varphi_I \Sigma v \eta_y \eta_z}{\Sigma v + \varphi_I \Sigma v \eta_z} \\ y_I^P &= y_I + \frac{\varphi_I \Sigma v \eta_x \eta_z}{\Sigma v + \varphi_I \Sigma v \eta_z} \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Naar Pælegruppen paavirkes af en Kraft Q_1 , positiv i Z-Aksens negative Retning og beliggende i Linien:

$$x = x_I^P; \quad y = y_I^P,$$

vil Pæletrykkenes lodrette Komposant være:

$$P \cos \alpha = Q_1 \frac{v + \varphi_I v \eta_z}{\Sigma v + \varphi_I \Sigma v \eta_z}. \quad (100)$$

Momenter.

1) III. Hovedakse.

Som det vil fremgaa af § 28, vil man faa et rent Moment, naar Drejningsvinklen φ og Forskydningen f i en Hovedakse er forbundet ved Ligningen:

$$M_{III}\varphi + P_{III}f = 0.$$

Sætter vi her:

$$\varphi = 1; \quad f = f_{III},$$

faas:

$$f_{III} = -\frac{M_{III}}{P_{III}}. \quad (101)$$

Svarende til:

$$\varphi = 1 \quad \text{og} \quad f = f_{III}$$

findes Pæletrykkenes Komposanter efter de tre Akser:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx}^M &= -\eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x + f_{III} v \operatorname{tg}^2 \alpha_x \\ P_{yx}^M &= -\eta_x v \operatorname{tg} \alpha_y + f_{III} v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \\ P_{zx}^M &= -\eta_x v + f_{III} v \operatorname{tg} \alpha_x. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Momenterne om de tre Hovedskrueakser er:

$$\left. \begin{aligned} M_{xx} &= -\sum P_{zx}^M \eta_x = \sum v \eta_x^2 - f_{III} \sum \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x \\ M_{yx} &= \sum P_{zx}^M \eta_y = -\sum v \eta_x \eta_y \\ M_{zx} &= \sum P_{zx}^M \eta_z = -\sum v \eta_x \eta_z. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Det vil ses af disse Udtryk, at M_{xx} , M_{yx} og M_{zx} har Dimensioner som et Inertimoment, naar v betragtes som Arealenhed.

Det kan nu bevises, at Inertimomentet om en Hovedskrueakse er det mindste Inertimoment af alle om Akser parallelle med Skrueaksen.

Ved Inertimoment vil vi her forstaa:

$$M = \sum v y_a^2 - f_{III} \sum y_a v \operatorname{tg} \alpha_x,$$

hvor y_a er den vandrette Afstand fra paagældende Drejningsakse til Pælen.

Ifølge Ligning (83) Side 127 er

$$M_{III} = -\sum v y \operatorname{tg} \alpha_x = -\sum v \eta_x \operatorname{tg} \alpha_x;$$

altsaa er:

$$M = \sum v y_a^2 + f_{III} M_{III}.$$

Sidste Led er derfor konstant.

Vi vil nu opsøge den Drejningsakse, der giver Minimum for $\Sigma v y_a^2$.

$$y_a = y - y_k + z_k \operatorname{tg} \alpha_y,$$

hvor y_k og z_k er Koordinaterne til den søgte Akse.

$$\begin{aligned} \Sigma v y_a^2 &= \Sigma v y^2 + y_k^2 \Sigma v + z_k^2 \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + 2 z_k \Sigma v y \operatorname{tg} \alpha_y \\ &\quad - 2 y_k z_k \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y - 2 y_k \Sigma v y. \end{aligned}$$

Leddene:

$$- 2 y_k z_k \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y$$

er lig Nul, da:

$$\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y = 0.$$

Man har nu:

$$\frac{d(\Sigma v y_a^2)}{dy_k} = 2 y_k \Sigma v - 2 \Sigma v y.$$

Minimum faas altsaa for:

$$y_k = \frac{\Sigma v y}{\Sigma v}.$$

Dette ses ogsaa umiddelbart, da Drejningsaksen selvfølgelig maa skære Tyngdepunktslinien for Pælenes v -Kræfter, for at disses Inertimoment kan blive Minimum.

$$\frac{d(\Sigma v y_a^2)}{dz_k} = 2 z_k \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + 2 \Sigma v y \operatorname{tg} \alpha_y.$$

Minimum faas altsaa for:

$$z_k = - \frac{\Sigma v y \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y}.$$

Man ser altsaa, at den søgte Drejningsakse faar samme Koordinater som III. Hovedskrueakse.

Hvad der her er bevist for III. Hovedskrueakse, gælder selvfølgelig lige saa godt for de andre Hovedskrueakser.

2) II. Hovedakse.

Paa lignende Maade som for III. Hovedakse ser man, at:

$$\varphi = 1; \quad f_{II} = - \frac{M_{II}}{P_{II}} \quad (104)$$

giver et rent Moment.

Pæletrykkenes Komposanter efter de tre Koordinataksener er:

$$\left. \begin{aligned} P_{xy}^M &= \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_x + f_{II} v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \\ P_{yy}^M &= \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y + f_{II} v \operatorname{tg}^2 \alpha_y \\ P_{zy}^M &= \eta_y v + f_{II} v \operatorname{tg} \alpha_y. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Momenterne om de tre Hovedskrueakser er:

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= -\Sigma P_{zy}^M \eta_x = -\Sigma v \eta_x \eta_y \\ M_{yy} &= \Sigma P_{zy}^M \eta_y = \Sigma v \eta_y^2 + f_{II} \Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y \\ M_{zy} &= \Sigma P_{zy}^M \eta_z = \Sigma v \eta_y \eta_z. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

3) I. Hovedakse.

Her vil en Skruebevægelse om I. Hovedskrueakse, bestemt ved:

$$\varphi = 1; \quad f_I = -\frac{M_I}{P_I} \quad (107)$$

give et rent Moment.

Pæletrykkenes Komposanter efter de tre Koordinataksener er:

$$\left. \begin{aligned} P_{xz}^M &= \eta_z v \operatorname{tg} \alpha_x + f_I v \operatorname{tg} \alpha_x \\ P_{yz}^M &= \eta_z v \operatorname{tg} \alpha_y + f_I v \operatorname{tg} \alpha_y \\ P_{zz}^M &= \eta_z v + f_I v. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Momenterne om de tre Hovedskrueakser er:

$$\left. \begin{aligned} M_{xz} &= -\Sigma P_{zz}^M \eta_x = -\Sigma v \eta_x \eta_z \\ M_{yz} &= \Sigma P_{zz}^M \eta_y = \Sigma v \eta_y \eta_z \\ M_{zz} &= \Sigma P_{zz}^M \eta_z = \Sigma v \eta_z^2 + f_I \Sigma v \eta_z. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Det vil af Udtrykkene for disse Momenter ses, at

$$M_{xy} = M_{yx}; \quad M_{xz} = M_{zx}; \quad M_{yz} = M_{zy},$$

hvilket iøvrigt ogsaa fremgaar af Betti's Sætning.

Det ses af Udtrykkene for alle de her fundne Momenter, at de naar

$$f_I = f_{II} = f_{III} = 0,$$

er Inertimomenter eller Centrifugalmomenter for Pælenes v -Kræfter om de tre Hovedskrueakser, idet man dog for Centrifugalmomenternes Vedkommende maa erindre, at Afstandene til Akserne maales i forskellige vandrette Planer.

Man er nu i Stand til at skrive Pæletrykkene op som Funktioner af Momenterne M_1 , M_2 og M_3 om Koordinataksenerne X , Y og Z .

For at faa et rent Moment om X-Aksen maa man for Vinkeldrejningen 1 om III. Hovedskruesakse faa Vinkeldrejningen $\varphi_{II,III}$ om II. og $\varphi_{I,III}$ om I. Hovedskruesakse, hvor disse to Størrelser er forbundet ved Ligningen:

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} + M_{yy} \varphi_{II,III} + M_{yz} \varphi_{I,III} &= 0 \\ M_{xz} + M_{yz} \varphi_{II,III} + M_{zz} \varphi_{I,III} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Paa tilsvarende Maade faas Betingelserne for et rent Moment om Y-Aksen, naar Vinkeldrejningen om II. Hovedskruesakse er 1:

$$\left. \begin{aligned} M_{xx} \varphi_{III,II} + M_{xy} + M_{xz} \varphi_{I,II} &= 0 \\ M_{xz} \varphi_{III,II} + M_{yz} + M_{zz} \varphi_{I,II} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Endelig faas Betingelsen for et rent Moment om Z-Aksen, naar Vinkeldrejningen om I. Hovedskruesakse er 1:

$$\left. \begin{aligned} M_{xx} \varphi_{III,I} + M_{xy} \varphi_{II,I} + M_{xz} &= 0 \\ M_{xy} \varphi_{III,I} + M_{yy} \varphi_{II,I} + M_{yz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Af disse Ligninger findes:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{I,III} &= \frac{M_{xy} M_{yz} - M_{xz} M_{yy}}{M_{zz} M_{yy} - M_{yz}^2}; & \varphi_{II,III} &= \frac{M_{xz} M_{yz} - M_{xy} M_{zz}}{M_{zz} M_{yy} - M_{yz}^2} \\ \varphi_{III,II} &= \frac{M_{xz} M_{yz} - M_{xy} M_{zz}}{M_{xx} M_{zz} - M_{xz}^2}; & \varphi_{I,II} &= \frac{M_{xz} M_{xy} - M_{yz} M_{xx}}{M_{xx} M_{zz} - M_{xz}^2} \\ \varphi_{II,I} &= \frac{M_{xy} M_{xz} - M_{yz} M_{xx}}{M_{xx} M_{yy} - M_{xy}^2}; & \varphi_{III,I} &= \frac{M_{xy} M_{yz} - M_{xz} M_{yy}}{M_{xx} M_{yy} - M_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Tæller eller Nævner er fælles for to og to af disse Størrelser. Pæletrykkene kan nu for en vilkaarlig Belastning skrives:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_3 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x - \varphi_{III} v \eta_x}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x - \varphi_{III} \Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x} + Q_2 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y + \varphi_{II} v \eta_y}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + \varphi_{II} \Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y} \\ &+ Q_1 \frac{v + \varphi_I v \eta_z}{\Sigma v + \varphi_I \Sigma v \eta_z} \\ &+ M_3 \frac{P_{zx}^M + \varphi_{II,III} P_{zy}^M + \varphi_{I,III} P_{zz}^M}{M_{xx} + \varphi_{II,III} M_{xy} + \varphi_{I,III} M_{xz}} + M_2 \frac{\varphi_{III,II} P_{zx}^M + P_{zy}^M + \varphi_{I,II} P_{zz}^M}{\varphi_{III,II} M_{yx} + M_{yy} + \varphi_{I,II} M_{yz}} \\ &+ M_1 \frac{\varphi_{III,I} P_{zx}^M + \varphi_{II,I} P_{zy}^M + P_{zz}^M}{\varphi_{III,I} M_{xz} + \varphi_{II,I} M_{yz} + M_{zz}} \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

P_{zx}^M , P_{zy}^M og P_{zz}^M findes af Ligningerne (102), (105) og (108).

Hvis man vil udtrykke Pæletrykkene ved Kræfter i og Momenterne om de oprindelige Koordinataksler, nemlig P_x , P_y , P_z , M_x , M_y og M_z , kan man opstille følgende Transformationsformler:

$$\left. \begin{aligned} Q_3 &= P_x \lambda_3 + P_y \lambda_2 + P_z \lambda_1, \\ Q_2 &= P_x \mu_3 + P_y \mu_2 + P_z \mu_1, \\ Q_1 &= P_x \nu_3 + P_y \nu_2 + P_z \nu_1, \\ M_3 &= M_x \lambda_3 + M_y \lambda_2 + M_z \lambda_1 + (P_x \mu_3 + P_y \mu_2 + P_z \mu_1) z_{II}^P - (P_x \nu_3 + P_y \nu_2 + P_z \nu_1) y_I^P, \\ M_2 &= M_x \mu_3 + M_y \mu_2 + M_z \mu_1 - (P_x \lambda_3 + P_y \lambda_2 + P_z \lambda_1) z_{III}^P + (P_x \nu_3 + P_y \nu_2 + P_z \nu_1) x_I^P, \\ M_1 &= M_x \nu_3 + M_y \nu_2 + M_z \nu_1 + (P_x \lambda_3 + P_y \lambda_2 + P_z \lambda_1) y_{III}^P - (P_x \mu_3 + P_y \mu_2 + P_z \mu_1) x_{II}^P. \end{aligned} \right\} (115)$$

Man maa i hele den givne Udvikling være klar over, at alle Fortegn knytter sig til de nævnte Definitioner og til den bestemte Omløbsretning i Koordinatsystemet.

I § 34 er vist et gennemregnet Eksempel.

§ 32. **Farligste Belastning for en Pæl.** Vi skal her undersøge Indvirkningen af en vilkaarlig ren Kraft paa Pæletrykket i en bestemt Pæl og vil først finde Beliggenheden af Kraften, naar Pæletrykket skal være Nul; vi regner her stadig med en Kraft af Størrelsen 1.

Lad Kraftens Retningscosinusser med X-, Y- og Z-Aksen være λ , μ og ν og Kraften gaa gennem det vilkaarlige Punkt x, y, z ; man har da:

$$P_x = \lambda; \quad P_y = \mu; \quad P_z = \nu.$$

$$M_x = -\mu z + \nu y; \quad M_y = \lambda z - \nu x; \quad M_z = -\lambda y + \mu x.$$

Naar Pæletrykket skal være Nul, kan man skrive:

$$\left. \begin{aligned} B_1 \lambda + B_2 \mu + B_3 \nu + B_4 (-\mu z + \nu y) + B_5 (\lambda z - \nu x) \\ + B_6 (-\lambda y + \mu x) = 0, \end{aligned} \right\} (116)$$

hvor Konstanterne B findes af Ligning (114) og (115).

Hvis man heri lader λ , μ og ν være konstante og varierer x , y og z , fremstiller Ligningen en Plan, saaledes at alle Kræfter i denne Plan parallel med den givne Retning giver Pæletrykket Nul; en saadan Plan kaldes Retningens Nulplan.

I Fig. 57 er vist to Nulplaner, $ABCD$ og $EBCF$, for en vilkaarlig Pæl; AB og EB er de paagældende Kraftretninger. BC

er Skæringslinien mellem de to Nulplaner. Man ser, at enhver Kraft, som er parallel med Plan ABE og som skærer BC , giver Pæletrykket Nul, idet den nemlig kan opløses i Komposanter

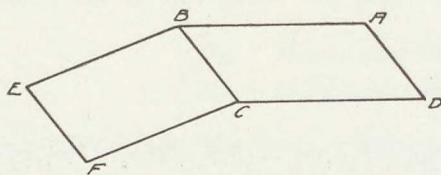


Fig. 57.

i de to Nulplaner parallelle med henholdsvis AB og EB . Linien BC kaldes Plan ABE 's Nulakse.

Det kan imidlertid bevises, at Nullinierne for alle Planer falder i en og samme Linie.

Ligning (116) kan nemlig opfattes som et Planknippe, hvor Ligningerne for tre af Planerne kan skrives:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \lambda(B_1 - B_6y + B_5z) &= 0, \\ (2) \quad \mu(B_2 + B_6x - B_4z) &= 0, \\ (3) \quad \nu(B_3 - B_5x + B_4y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (116a)$$

Af disse Ligninger ses, at Retningscosinusserne for Skæringslinierne for disse tre Planer er proportionale med henholdsvis B_4 , B_5 og B_6 , saaledes at disse tre Nulakser og derfor alle Nulakser er parallelle.

Dette gælder ogsaa for den Plan gennem Koordinatsystemets Nulpunkt, der er parallel med Nulakserne, saaledes at en Kraft gennem Nulpunktet og med Retningscosinusserne B_4 , B_5 og B_6 giver Pæletrykket Nul; man har derfor:

$$B_1B_4 + B_2B_5 + B_3B_6 = 0. \quad (116b)$$

Skæringslinien mellem Plan (1) og Plan (2) har Ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} (a): B_1 - B_6y + B_5z &= 0, \\ (b): B_2 + B_6x - B_4z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Skæringslinien mellem Plan (1) og Plan (3) har Ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} (a): B_1 - B_6y + B_5z &= 0, \\ (c): B_3 - B_5x + B_4y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Af de to sidste Ligninger kan y elimineres:

$$(d): B_1B_4 + B_3B_6 - B_5B_6x + B_4B_5z = 0.$$

Man kan nu se, at Ligning (b) og Ligning (d) er identiske; Betingelserne herfor er:

$$\frac{B_2}{B_1 B_4 + B_3 B_6} = -\frac{B_6}{B_5 B_6} = -\frac{B_4}{B_4 B_5}.$$

Begge disse Betingelser falder sammen med den ovenfor fundne Ligning (116b) og er derfor opfyldt.

Heraf ser man, at de to omtalte Skæringslinier falder sammen, og derfor vil alle Nullinier falde i den ved Ligningerne (a) og (b) bestemte Linie.

Resultatet af denne Undersøgelse er derfor, at alle de Kræfter, der giver Pæletrykket Nul skærer en fast Linie, Nulaksen, og omvendt vil enhver Kraft, der skærer Nulaksen give Pæletrykket Nul, saaledes ogsaa alle Kræfter, der er parallelle med Nulaksen.

Da baade Kræfterne *EB* og *FC* i Fig. 57 giver Pæletrykket Nul, ligesaa alle andre Kræfter, der skærer *BC* og er parallel med Plan *ABE*, ser man, at et hvilket som helst Moment med Akse vinkelret paa *BC* giver Pæletrykket Nul.

Dette ses ogsaa direkte; et vilkaarligt Moment 1 kan opløses i $M_x = \lambda$, $M_y = \mu$ og $M_z = \nu$.

Naar Pæletrykket for et saadant Moment skal være Nul, har man:

$$\lambda B_4 + \mu B_5 + \nu B_6 = 0.$$

Heraf ses det, at Momentaksen er vinkelret paa en Linie, hvis Retningscosinusser er proportionale med henholdsvis B_4 , B_5 og B_6 .

I en vilkaarlig Plan vil enhver Kraft af konstant Størrelse, der tangerer en Cirkel med Centrum i Planens Skæringspunkt med Nulaksen, give konstant Pæletryk, nemlig det der fremkommer for et Moment med Akse vinkelret paa Planen af Størrelse lig Kraften multipliceret med Cirkelns Radius; dette ses ved at parallelforskyde Kraften til Skæring med Nulaksen.

Alle de Momenter, der giver Pæletrykket Nul, har deres Akser beliggende i en Plan, der er vinkelret paa Pælens Nulakse.

Størst Pæletryk fra Momenter faas for det Moment, der har sin Akse vinkelret paa Momentnulplanen, altsaa parallel med Nulaksen.

Alle Momenter, der giver samme Pæletryk, har deres Akser beliggende som Frembringere paa en cirkulær Keglflade, hvis Akse er Nulaksen, og Pæletrykket er proportionalt med Cosinus af Vinklen mellem Keglens Frembringere og Akse.

Naar det nu gælder om at faa største Tryk eller Træk i en Pæl, skal man kun medtage de Kræfter, der giver samme

Fortegn for Pælettrykket. Af Udtrykket for dette vil man se, at hvis den ydre Belastning f. Eks. kun bestaar af en Enkeltkraft parallel med X-Aksen, er Pælettrykket en lineær Funktion af Kraftliniens Koordinater; dette gælder for en vilkaarlig Kraftretning, da Koordinatsystemet er vilkaarlig valgt. Nu ser man imidlertid, at Ligning (1) i (116a):

$$B_1 - B_6y + B_5z = 0$$

er Nulplanen for X-Akseretningen. Man skal derfor, naar der er Tale om Kræfter parallelle med X, medtage alle Kræfter paa den ene Side af denne Plan.

En vilkaarlig Belastning kan altid reduceres til Kræfter parallelle med de tre Akser, og man faar for saadanne Kræfter bestemt største Træk og Tryk i en Pæl ved:

For Kræfter parallelle med X-Aksen at medtage Kræfterne paa den ene Side af Planen:

$$B_1 - B_6y + B_5z = 0,$$

for Kræfter parallelle med Y-Aksen at medtage Kræfterne paa den ene Side af Planen:

$$B_2 + B_6x - B_4z = 0,$$

og for Kræfter parallelle med Z-Aksen at medtage Kræfterne paa den ene Side af Planen:

$$B_3 - B_5x + B_4y = 0.$$

§ 33. Specielle Tilfælde.

1. En ren Forskydning i en Hovedakse giver en ren Kraft; Momenthovedsystemet falder ikke sammen med Forskydningshovedsystemet.

Betingelserne herfor er som før nævnt:

$$M_I = M_{II} = M_{III} = 0.$$

Herved vil selve Hovedakserne være de Linier, hvori de rene Kræfter virker, saaledes at disses Indflydelse kan skrives direkte op efter det i § 30 anførte, uden Beregning af

$$y_{III}^P, z_{III}^P, \varphi_{III} \text{ o. s. v.}$$

Ved Beregningen af Momenternes Indflydelse paa Pæletrykkene er der ingen Lettelser udover, at man overalt kan sætte

$$f_I = f_{II} = f_{III} = 0.$$

Pæletrykket fra de rene Kræfter bliver:

$$P \cos \alpha = Q_3 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x} + Q_2 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y} + Q_1 \frac{v}{\sum v}. \quad (117)$$

2. Momenthovedsystemet falder sammen med Forskydningshovedsystemet.

I dette Tilfælde vil enhver Skruebevægelse om Hovedskrueakserne frembringe en Skruekraft i den tilsvarende Hovedakse; de til en Skruebevægelse om Hovedskrueakserne svarende rene Kræfter vil derfor ogsaa ligge i Hovedakserne.

Betingelsen for, at dette er Tilfældet, er:

$$M_{xy} = M_{xz} = M_{yz} = 0. \quad (118)$$

Herved bortfalder ligesom under 1 Beregningen af de rene Kræfters Beliggenhed, medens Udtrykkene for Pæletrykkene ikke her simplificeres.

Derimod vil Beregningen af Momenternes Indflydelse paa Pæletrykkene blive meget simpel, idet Pæletryksformlerne fra Momenterne gaar over til:

$$P \cos \alpha = M_3 \frac{P_{zx}^M}{M_{xx}} + M_2 \frac{P_{zy}^M}{M_{yy}} + M_1 \frac{P_{zz}^M}{M_{zz}}. \quad (119)$$

3. Momenthovedsystemet falder sammen med Forskydningshovedsystemet, og en ren Forskydning i en Hovedakse giver en ren Kraft.

I dette Tilfælde vil Beregningen af baade rene Kræfter og rene Momenter Indflydelse blive meget simpel. Her vil vi sætte:

$$\left. \begin{aligned} M_{xx} &= \sum v \eta_x^2 = I_x, \\ M_{yy} &= \sum v \eta_y^2 = I_y, \\ M_{zz} &= \sum v \eta_z^2 = I_z. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Man finder da Udtrykket for Pæletrykkene:

$$P \cos \alpha = Q_3 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x} + Q_2 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y} + Q_1 \frac{v}{\sum v} \left\{ \begin{array}{l} \\ - M_3 \frac{v \eta_x}{I_x} + M_2 \frac{v \eta_y}{I_y} + M_1 \frac{v \eta_z}{I_z} \end{array} \right. \quad (121)$$

Hvis yderligere to af Hovedakserne skærer hinanden, vil Pælegruppen for enhver Kraft, der ligger i disse to Hovedakser Plan, kunne behandles som en plan Pælegruppe (se Side 121), idet Pælegruppens Bevægelse for en Kraft i denne Plan altid vil bestaa af en Drejning om en Akse vinkelret paa Planen og altsaa foregaa i Kraftplanen.

Endelig kan den ene Hovedakse skære begge de andre Hovedakser, og i dette Tilfælde vil Beregningerne yderligere simplificeres.

Disse sidste Tilfælde vil blive særligt behandlet i 3. Afsnit, der behandler plane Pælegrupper som specielt Tilfælde af rumlige Pælegrupper.

Særlig vil følgende tre Arter af Pælegrupper blive undersøgt:

- a) Pælegrupper, der er symmetriske om en Plan,
- b) » » » » » to paa hinanden vinkelrette Planer,
- c) Pælegrupper, hvor alle Pælene er parallelle.

4. Hovedakserne er parallelle med de oprindelige Koordinatakser, og en ren Forskydning i en Hovedakse giver en ren Kraft; Momenthovedsystemet falder sammen med Forskydningshovedsystemet.

For at Hovedakserne kan være parallelle med Koordinatakserne, maa man have:

$$\sum v \operatorname{tg} \alpha_x = \sum v \operatorname{tg} \alpha_y = 0; \quad \sum v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y = 0.$$

Hovedaksernes Beliggenhed findes af Ligningerne (83), (84), (85) og (86).

Udtrykkene for Pæletrykkene findes da efter Ligning (121). Denne Ligning kan imidlertid godt bruges, i det Tilfælde da Momenthovedsystemet ikke falder sammen med Forskydningshovedsystemet. Hvis nemlig den ene Momenthovedakse er parallel med Z-Aksen, vil det tidt være bekvemmest at regne med Momenter om de tre Momenthovedakser, i Stedet for Momenterne om Koordinatakserne.

XY-Planen vil i det Tilfælde indeholde de to Hovedakser i Momenthovedsystemets Ellipsoide, og man vil derfor i Analogi med Ligning (17) i 1. Afsnit finde disse to Hovedaksers Vinkel ω med X-Aksen af Ligningen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2M_{xy}}{M_{xx} - M_{yy}}. \quad (122)$$

Inertimomenterne og Koordinaterne η_x , η_y og η_z i Ligning (121) skal da regnes ud i Forhold til de Skrueakser, der svarer til Momenthovedakserne.

5. Bevægelige Pælegrupper.

For at en Pælegruppe skal være bevægelig, maa der kunne finde en Bevægelse Sted, uden at der fremkaldes nogen ydre Kraft, eller omvendt, der maa findes en Skruekraft, der fremkalder en endelig Bevægelse.

Nu kan imidlertid en vilkaarlig Skruekraft frembringes ved en Parallelforskydning, sammensat med en til et rent Moment svarende Skruebevægelse; man opsøger først den Parallelforskydning, der giver en Skruekraft parallel med den søgte, og hvis rene Kraft er lig og ensrettet med den søgte Skruekrafts rene Kraft, og den saaledes fundne Skruekraft kan da ved Tilføjelsen af et rent Moment ændres til den søgte.

Pælegruppen vil derfor være ubevægelig, hvis følgende to Betingelser samtidig er opfyldte:

1) Der findes ingen Parallelforskydning, der svarer til den ydre Kraft Nul.

2) Der findes intet rent Moment, der svarer til en endelig Bevægelse.

Omvendt vil Pælegruppen være bevægelig, hvis en af de to Betingelser ikke er opfyldt.

Den første Betingelse vil være opfyldt, naar ingen af de tre Hovedkræfter i Forskydningshovedsystemet er Nul.

Om den anden Betingelse er opfyldt eller ej kan ses paa følgende Maade.

Hvis der af de Skruebevægelser, der svarer til rene Momenter, findes en, der giver Momentet Nul, maa alle Momentakserne, der svarer til uendelig smaa Bevægelser, ligge i en Plan vinkelret paa Nulmomentets Plan; hvis man nemlig tænkte sig et Moment med Akse udenfor denne Plan, vil dette Moment give en Komposant i Nulmomentets Retning, og til

denne Komposant svarer en endelig Skruebevægelse. Svarende til en uendelig lille Skruebevægelse vil den paagældende Komposant derfor blive Nul, og Momentets Akse altsaa ligge i Planen.

De Side 131—134 omtalte tre Skruebevægelser, fremkalder rene Momenter, der er konjugerede Diametre i Momentellipsoiden (se Side 116); disse tre Momenter skal altsaa ligge i samme Plan for at Pælegruppen kan være bevægelig.

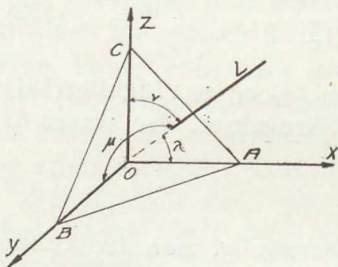


Fig. 58.

I hosstaaende Fig. 58 er vist det i § 31 anvendte Koordinatsystem XYZ, hvis Akser er parallelle med de tre Hovedskrueakser. Vi vil nu finde Betingelsen for, at de tre ovenfor omtalte Momentakser

ligger i en Plan ABC, hvis Normal OL har Retningscosinusserne λ , μ og ν med X-, Y- og Z-Aksen.

$$\left. \begin{aligned} M_{xx}\lambda + M_{yx}\mu + M_{zx}\nu &= 0 \\ M_{xy}\lambda + M_{yy}\mu + M_{zy}\nu &= 0 \\ M_{xz}\lambda + M_{yz}\mu + M_{zz}\nu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

De tre Momenters Projektion paa OL skal altsaa være Nul:

Hvis disse tre Ligninger ikke er i Strid med hinanden, vil de tre Momentakser ligge i samme Plan.

Man kan sammenfatte det fremførte saaledes:

Hvis en Pælegruppe ikke skal være bevægelig, maa følgende to Betingelser samtidig være opfyldt:

1) Ingen af de tre Hovedkræfter i Forskydningshovedsystemet maa være Nul.

2) Ligningerne (123) skal være i Strid med hinanden.

Som Eksempel paa en bevægelig Pælegruppe kan man tænke sig en, hvis Pæle alle skærer en bestemt Linie; en Drejning om denne vil nemlig intet Pæletryk fremkalde.

I Fig. 59 er vist en anden bevægelig Pælegruppe.

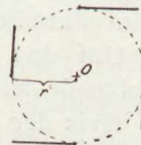


Fig. 59.

Pælenes Projektion paa en Plan vinkelret paa Aksen O tangerer alle en Cirkel med Radius r ; deres Hældning i Forhold til O er for alle Pælene α .

For en Parallelforskydning 1 i Retningen O findes:

Kraft parallel med O : $P_x = 4v$

Moment » » O : $M_x = 4v \operatorname{tg} \alpha \cdot r$.

For en Drejning φ om O findes:

$$P_x = 4v \operatorname{tg} \alpha \cdot r \varphi$$

$$M_x = 4v \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot r^2 \varphi.$$

Betingelsen $M\varphi + Pf = 0$ for et rent Moment giver:

$$\varphi = -\frac{1}{r \operatorname{tg} \alpha} f.$$

Det hertil svarende Moment er Nul.

§ 34. Eksempler.

Eksempel 1:

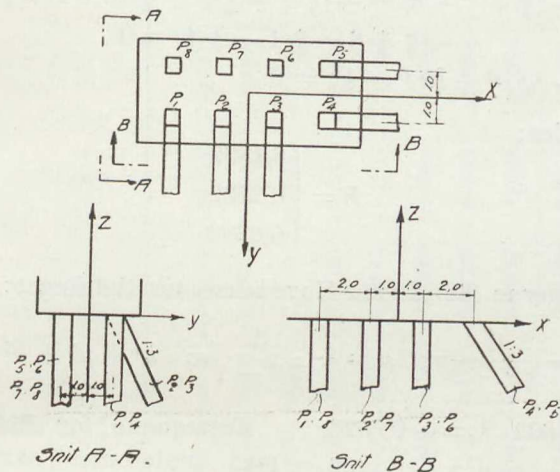


Fig. 60.

En Pille som den viste kan tænkes at komme i Anvendelse f. Eks. som Maskinfundament i Hjørnet af en Bygning, hvorman ikke kan ramme ind under Nabobygningen.

I Figuren er vist en Plan og to lodrette Billeder af Pælegruppen.

Beregningen er angivet i de nedenstaaende Tabeller.

$$v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha$$

er sat ens for alle Pælene.

Pæl Nr.	x	y	v	$\operatorname{tg} \alpha_x$	$\operatorname{tg} \alpha_y$	$v \operatorname{tg} \alpha_x$	$v \operatorname{tg} \alpha_y$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha_x$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha_y$	$v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y$
1	-3,0	+1,0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0
2	-1,0	+1,0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0
3	+1,0	+1,0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0
4	+3,0	+1,0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0	0
5	+3,0	-1,0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0	0
6	+1,0	-1,0	1	0	0	0	0	0	0	0
7	-1,0	-1,0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	-3,0	-1,0	1	0	0	0	0	0	0	0
Sum			8			$-\frac{2}{3}$	-1	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{9}$	0

Hovedakserne bestemmes af Ligning (80):

$$P^3 - \left(\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + 8\right)P^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 8 - 1 - \frac{4}{9}\right)P - \left(\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot 8 - \frac{2}{9} \cdot 1 - \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9}\right) = 0$$

$$P^3 - \frac{77}{9}P^2 + \frac{83}{27}P - \frac{18}{81} = 0.$$

Heraf findes:

$$P = \begin{cases} 8,1832 \\ 0,2732 \\ 0,0992. \end{cases}$$

Af Ligningerne (81) findes Hovedaksernes Retninger:

$$\lambda = -\frac{6}{9P-2}\nu; \quad \mu = -\frac{3}{3P-1}\nu; \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

- 1) $P = 8,1832$: $\lambda_3 = -0,0828$, Fortegnene for Retningscos. maa bestemmes saaledes, at
 $\mu_3 = -0,1260$, Omdrejningen
 $\nu_3 = +0,9890$.

- 2) $P = 0,2732$: $\lambda_2 = -0,6183$, bliver den samme som
 $\mu_2 = +0,7853$,
 $\nu_2 = +0,0473$.

- 3) $P = 0,0992$: $\lambda_1 = +0,7710$, Kontrol paa Regningens Rigtighed haves i Betingelserne:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= +0,6070, & \lambda_3 \lambda_2 + \mu_3 \mu_2 + \nu_3 \nu_2 &= 0, \\ \nu_1 &= +0,1420, & \lambda_3 \lambda_1 + \mu_3 \mu_1 + \nu_3 \nu_1 &= 0, \\ & & \lambda_2 \lambda_1 + \mu_2 \mu_1 + \nu_2 \nu_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ved Hjælp af Ligningerne (82) og (82 a) er nedenstaaende Tabel udregnet

Pæl Nr.	$\operatorname{tg} \alpha_x$	$\operatorname{tg} \alpha_y$	v	x	y	vx	vy	$h \cdot x_0 g_1 a$	$x \cdot h_0 g_1 a$	$x \cdot h_0 g_1 x_0 g_1 a$	$h \cdot h_0 g_1 x_0 g_1 a$	$x \cdot x_0 g_1 a$	$h \cdot x_0 g_1 a$	$x \cdot h_0 g_1 a$	$h \cdot h_0 g_1 a$
1	-0,0586	-0,208	1,062	-1,745	+2,675	-1,853	+2,841	+0,0097	-0,0802	-0,0226	+0,0346	+0,1086	-0,1665	+0,3855	-0,5910
2	-0,0586	-0,208	1,062	-0,179	+1,395	-0,190	+1,481	+0,0051	-0,0083	-0,0023	+0,0181	+0,0112	-0,0870	+0,0396	-0,3082
3	-0,0586	-0,208	1,062	+1,387	+0,114	+1,473	+0,123	+0,0004	+0,0637	+0,0179	+0,0015	-0,0864	-0,0007	-0,3065	-0,0252
4	-0,113	+0,249	1,033	+2,93	-0,995	+3,029	-1,028	-0,00131	+0,1878	-0,0853	+0,0290	-0,3425	+0,1163	+0,7540	-0,2555
5	-0,113	+0,249	1,033	+0,74	-2,615	+1,797	-2,701	-0,00345	+0,1117	-0,0506	+0,0761	-0,2035	+0,3057	+0,4470	-0,6730
6	+0,144	+0,048	0,977	+0,17	-1,405	+0,166	-1,373	-0,00284	+0,0004	+0,0011	-0,0095	+0,0239	-0,1975	+0,0080	-0,0658
7	+0,144	+0,048	0,977	-1,45	-0,166	-1,417	-0,162	-0,00033	-0,0032	-0,0098	-0,0011	-0,2038	-0,0233	-0,0679	-0,0078
8	+0,144	+0,048	0,977	-3,035	+1,070	-2,965	+1,045	+0,00217	-0,0068	-0,0205	+0,0072	-0,4260	+0,1505	-0,1420	+0,0501
10 Sum			8,183			+0,040	+0,226	-0,00424	+0,2651	-0,1721	+0,1559	-1,1186	+0,0975	+1,1177	-1,8764

Heraf findes:

$$\text{III. Hovedakse: } y_{III} = \frac{-0,00424 + 0,1721}{0,0992} = 1,693 \text{ m,}$$

$$z_{III} = + \frac{1,1186}{0,0992} = 11,28 \text{ m.}$$

$$P_{III} = 0,0992; \quad M_{III} = -0,0975.$$

$$\text{II. Hovedakse: } x_{II} = \frac{0,2651 - 0,1559}{0,2732} = 0,400 \text{ m,}$$

$$z_{II} = \frac{1,8764}{0,2732} = 6,37 \text{ m.}$$

$$P_{II} = 0,2732; \quad M_{II} = +1,1177.$$

$$\text{I. Hovedakse: } x_I = \frac{0,040}{8,1832} = 0,0049 \text{ m,}$$

$$y_I = \frac{0,226}{8,1832} = 0,0276 \text{ m.}$$

$$P_I = 8,1832; \quad M_I = +0,0975 - 1,1177 = -1,0202.$$

Pæl Nr.	η_x	η_y	η_z	$v\eta_x$	$v\eta_y$	$v\eta_z$	$v\eta_x^2$	$v\eta_y^2$	$v\eta_z^2$	$v\eta_x\eta_y$	$v\eta_x\eta_z$	$v\eta_y\eta_z$
1	+1,225	-2,412	-0,503	+1,305	-2,568	-0,533	1,600	6,190	0,270	-3,145	-0,657	+1,294
2	-0,057	-0,846	-0,103	-0,060	-0,899	-0,109	0,003	0,761	0,011	+0,051	+0,006	+0,093
3	-1,332	+0,720	+0,298	-1,415	+0,765	+0,318	1,886	0,551	0,095	-1,020	-0,422	+0,228
4	+0,694	+1,651	-0,326	+0,718	+1,706	-0,336	0,498	2,822	0,109	+1,187	-0,234	-0,557
5	-0,925	+0,461	+0,152	-0,957	+0,476	+0,158	0,884	0,219	0,024	-0,441	-0,145	+0,072
6	-1,100	+1,788	-0,435	-1,072	+1,743	-0,422	1,181	3,117	0,183	-1,920	+0,467	-0,076
7	+0,136	+0,168	-0,179	+0,133	+0,164	-0,174	0,018	0,028	0,031	+0,022	-0,024	-0,029
8	+1,375	-1,417	+0,075	+1,344	-1,385	+0,074	1,850	1,962	0,005	-1,906	+0,102	-0,104
Sum				-0,002	+0,002	-1,024	7,920	15,650	0,728	-7,172	-0,907	+0,921

Pæl Nr.	$\eta_x v t g \alpha_x$	$\eta_y v t g \alpha_y$	P_{zx}^M	P_{zy}^M	P_{zz}^M	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	-0,0757	+0,5320	-1,244	-2,478	-0,400	-0,800	-0,197	+0,046	+0,034	-0,150	-0,487
2	+0,0038	+0,1855	+0,121	-0,809	+0,024	-0,629	-0,800	+0,135	+0,106	-0,105	+0,046
3	+0,0836	-0,1600	+1,476	+0,855	+0,451	-0,456	-1,416	+0,224	+0,171	-0,060	+0,584
4	-0,0803	+0,4220	-0,603	+1,600	-0,207	-1,284	+0,709	+0,083	-0,257	+0,247	-0,335
5	+0,1090	+0,1117	+1,072	+0,371	+0,287	-1,072	+1,160	+0,186	+0,157	-0,071	+0,352
6	-0,1590	+0,0833	+0,935	+1,723	-0,300	+1,552	-0,398	+0,057	+0,112	+0,112	-0,843
7	+0,0191	+0,0077	-0,271	+0,145	-0,052	+1,422	+0,186	+0,109	-0,068	+0,045	-0,055
8	+0,1975	-0,0668	-1,484	-1,405	+0,196	+1,265	+0,754	+0,160	-0,254	-0,018	+0,738
Sum	+0,0983	+1,1212	+0,002	+0,002	-0,001	-0,002	-0,002	+1,000	+0,001	+0,000	+0,000

$$\varphi_{III} = \frac{0,0983}{7,920} = + 0,0124; \quad f_{III} = - \frac{0,0975}{0,0992} = - 0,982,$$

$$\varphi_{II} = - \frac{1,1212}{15,65} = - 0,0712; \quad f_{II} = - \frac{1,1177}{0,2732} = - 0,409,$$

$$\varphi_I = \frac{1,024}{0,728} = + 1,410; \quad f_I = + \frac{1,0202}{8,1832} = + 0,125.$$

$$y_{III}^P = 1,693 + \frac{0,0124 \cdot 0,907}{0,0992 - 0,0124 \cdot 0,0983} = + 1,81 \text{ m},$$

$$z_{III}^P = 11,28 - \frac{0,0124 \cdot 7,172}{0,0992 - 0,0124 \cdot 0,0983} = + 10,37 \text{ m},$$

$$x_{II}^P = 0,400 + \frac{0,0712 \cdot 0,921}{0,2732 - 0,0712 \cdot 1,1212} = + 0,74 \text{ m},$$

$$z_{II}^P = 6,87 - \frac{0,0712 \cdot 7,172}{0,2732 - 0,0712 \cdot 1,1212} = + 4,23 \text{ m},$$

$$x_I^P = 0,0049 + \frac{1,410 \cdot 0,921}{8,1832 - 1,41 \cdot 1,024} = + 0,20 \text{ m},$$

$$y_I^P = 0,0276 - \frac{1,410 \cdot 0,907}{8,1832 - 1,41 \cdot 1,024} = - 0,16 \text{ m}.$$

$$M_{xx} = + 7,920 + 0,982 \cdot 0,0983 = + 8,017,$$

$$M_{yx} = + 7,172,$$

$$M_{zx} = + 0,907,$$

$$M_{yy} = + 15,65 - 0,409 \cdot 1,1212 = + 15,19,$$

$$M_{zy} = + 0,921,$$

$$M_{zz} = + 0,728 - 0,125 \cdot 1,024 = + 0,600.$$

$$\varphi_{I, III} = \frac{7,172 \cdot 0,921 - 0,907 \cdot 15,19}{0,600 \cdot 15,19 - 0,921^2} = - 0,868;$$

$$\varphi_{II, III} = \frac{0,907 \cdot 0,921 - 7,172 \cdot 0,600}{0,600 \cdot 15,19 - 0,921^2} = - 0,419.$$

$$\varphi_{III, II} = \frac{0,907 \cdot 0,921 - 7,172 \cdot 0,600}{8,017 \cdot 0,600 - 0,907^2} = - 0,869,$$

$$\varphi_{I, II} = \frac{0,907 \cdot 7,172 - 0,921 \cdot 8,017}{8,017 \cdot 0,600 - 0,907^2} = - 0,220.$$

$$\varphi_{II, I} = \frac{6,907 \cdot 7,172 - 0,921 \cdot 8,017}{15,19 \cdot 8,017 - 7,172^2} = - 0,013;$$

$$\varphi_{III, I} = \frac{7,172 \cdot 0,921 - 0,907 \cdot 15,19}{15,19 \cdot 8,017 - 7,172^2} = - 0,102.$$

Kontrol paa Regningens Rigtighed faas derved, at

$$\begin{aligned}\Sigma v\eta_z &= M_I; \quad \Sigma v\eta_x = \Sigma v\eta_y = 0; \quad \Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x = \Sigma y v \operatorname{tg} \alpha_x, \\ \Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y &= \Sigma x v \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \Sigma P_{zx}^M = \Sigma P_{zy}^M = \Sigma P_{zz}^M = 0, \\ \Sigma B_1 &= \Sigma B_2 = \Sigma B_4 = \Sigma B_5 = \Sigma B_6 = 0.\end{aligned}$$

Konstanterne B er Koefficienterne i Udtrykkene for Pæletrykkene, saaledes at man har:

$$P \cos \alpha = B_1 Q_3 + B_2 Q_2 + B_3 Q_1 + B_4 M_3 + B_5 M_2 + B_6 M_1,$$

idet den ydre Belastning er reduceret til rene Kræfter i de tre Krafthovedakser og til Momenter herom.

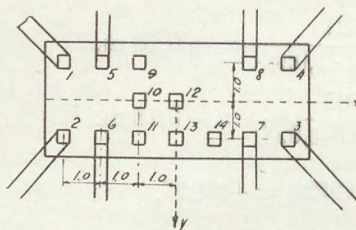


Fig. 61.

Eksempel 2.

Den i hosstaaende Figur angivne Pælegruppe med de i omstaaende Tabel angivne Hældninger falder ind under specielt Tilfælde 4, Side 140, idet de tre Hovedakser er parallelle med Koordinataksene; at dette er Tilfældet, ser man let, da der er Symmetri om de to Planer XZ og YZ m. H. t. alle Skraapælene; herved vil en vandret Bevægelse parallel med X -aksen give en vandret Kraft i Plan XZ , en vandret Bevægelse parallel med Y -aksen, en vandret Kraft i Plan YZ og en lodret Bevægelse en lodret Kraft.

Da alle Skraapælenes $\operatorname{tg} \alpha_x = \pm \frac{1}{3}$ eller Nul, ser man, at III. Hovedakse har Koordinaterne:

$$z_{III} = 9,0 \text{ m}; \quad y_{III} = 0; \quad M_{III} = 0.$$

Da alle Skraapælenes $\operatorname{tg} \alpha_y = \pm \frac{1}{4}$ ser man, at II. Hovedakse har Koordinaterne:

$$z_{II} = 4,0 \text{ m}; \quad x_{II} = 0; \quad M_{II} = 0.$$

Pæl Nr.	x	y	v	$\operatorname{tg} \alpha_x$	$\operatorname{tg} \alpha_y$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha_x$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha_y$	vx	vy	η_x	η_y	η_z
1	-3,0	-1,0	1	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{4}$	0,111	+0,0625	-3,0	-1,0	-0,143	+0,143	+0,417
2	-3,0	+1,0	1	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0,111	+0,0625	-3,0	+1,0	-0,143	+0,143	-0,417
3	+3,0	+1,0	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0,111	+0,0625	+3,0	+1,0	-0,143	+0,143	+0,417
4	+3,0	-1,0	1	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{4}$	0,111	+0,0625	+3,0	-1,0	-0,143	+0,143	-0,417
5	-2,0	-1,0	1	0	$+\frac{1}{4}$	0	+0,0625	-2,0	-1,0	-0,143	-1,857	+0,50
6	-2,0	+1,0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	+0,0625	-2,0	+1,0	-0,143	-1,857	-0,50
7	+2,0	+1,0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	+0,0625	+2,0	+1,0	-0,143	+2,143	+0,50
8	+2,0	-1,0	1	0	$+\frac{1}{4}$	0	+0,0625	+2,0	-1,0	-0,143	+2,143	-0,50
9	-1,0	-1,0	1	0	0	0	0	-1,0	-1,0	-1,143	-0,857	0
10	-1,0	0	1	0	0	0	0	-1,0	0	-0,143	-0,857	0
11	-1,0	+1,0	1	0	0	0	0	-1,0	+1,0	+0,857	-0,857	0
12	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0,143	+0,143	0
13	0	+1,0	1	0	0	0	0	0	+1,0	+0,857	+0,143	0
14	+1,0	+1,0	1	0	0	0	0	+1,0	+1,0	+0,857	+1,143	0
Sum			14			0,444	0,500	-2,0	+2,0			

$$x_I = \frac{-2,0}{14} = -0,143; \quad y_I = \frac{+2,0}{14} = +0,143.$$

Pæl Nr.	$v\eta_x^2$	$v\eta_y^2$	$v\eta_z^2$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	0,02	0,02	0,174	+0,75	+0,500	+0,0715	+0,038	+0,007	+0,246
2	0,02	0,02	0,174	+0,75	-0,500	+0,0715	+0,038	+0,007	-0,246
3	0,02	0,02	0,174	-0,75	-0,500	+0,0715	+0,038	+0,007	+0,246
4	0,02	0,02	0,174	-0,75	+0,500	+0,0715	+0,038	+0,007	-0,246
5	0,02	3,44	0,25	0	+0,500	+0,0715	+0,038	-0,094	+0,295
6	0,02	3,44	0,25	0	-0,500	+0,0715	+0,038	-0,094	-0,295
7	0,02	4,61	0,25	0	-0,500	+0,0715	+0,038	+0,109	+0,295
8	0,02	4,61	0,25	0	+0,500	+0,0715	+0,038	+0,109	-0,295
9	1,31	0,73	0	0	0	+0,0715	+0,309	-0,043	0
10	0,02	0,73	0	0	0	+0,0715	+0,038	-0,043	0
11	0,73	0,73	0	0	0	+0,0715	-0,231	-0,043	0
12	0,02	0,02	0	0	0	+0,0715	+0,038	+0,007	0
13	0,73	0,02	0	0	0	+0,0715	-0,231	+0,007	0
14	0,73	1,31	0	0	0	+0,0715	-0,231	+0,058	0
Sum	3,70	19,72	1,696						

Konstanterne B har samme Betydning her som i forrige Taleksempel.

III. Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt forneden, men simpelt understøttet foroven.

§ 35. **Definition af tænkte Pæle.** Naar Hovedet af en Pæl, der er indspændt forneden, faar en Forskydning, vil der fremkaldes en Kraft, der i en eller anden Retning gaar gennem Pælehovedet.

Afhængigheden mellem Kraftretning og Forskydningsretning er ganske som den i § 28 undersøgte, idet Forskydningen og den tilsvarende Kraft kan opløses i tre paa hinanden vinkelrette Retninger; derfor er Kraftretningen konjugeret Diameter i en Ellipsoide til en Plan vinkelret paa Forskydningsretningen. Ellipsoidens ene Hovedakse er Pæleretningen, idet en Forskydning her kun fremkalder Normaltryk i Pælen, altsaa en Kraft i Forskydningens Retning. De to andre Hovedakser ligger derfor i en Plan vinkelret paa Pæleretningen. En Forskydning i denne Plan svarer imidlertid i Virkeligheden til en Bøjning af Pælen, og Planens Skæringskurve med den ovenfor omtalte Ellipsoide er derfor ganske den samme som den Ellipse, man benytter ved Beregning af skæv Bøjning af et Tværsnit*). I de fleste Tilfælde vil Pælens Bøjningsmodstand være ens i alle Retninger, og Ellipsen vil i saa Fald gaa over til en Cirkel.

For en vilkaarlig Drejningsakse vil Projektionen af et Punkts Forskydning i en vilkaarlig Retning være:

$$\lambda = \varphi a \sin \omega,$$

hvor φ er Vinkeldrejningen, a den korteste Afstand mellem Forskydningsretningen og Drejningsaksen, og hvor ω er Vinklen mellem disse to Linier. Trykket i en Pæl, der danner Vinklen ω med Drejningsaksen, vil saaledes være:

$$P = k\varphi a \sin \omega,$$

naar k er Pælens Modstandstal d. v. s. Pæletrykket for Forskydningen 1 i Pælens Retning.

Den i Pælen fremkaldte Transversalkraft er proportional med Forskydningen af Pælehovedet vinkelret paa Pælen; hvis man derfor erstatter en Pæls Indspænding med to tænkte Pæle, der ligger i de to af Pælens Hovedakser, der staar

*) Se saaledes A. Ostfeld: Elasticitetslære, 1916, § 55.

vinkelret paa Pælen, og giver disse tænkte Pæle Modstandstal svarende til den Kraft, Forskydningen 1 i den tænkte Pæls Retning frembringer, vil Pillen statisk og elastisk være identisk med den oprindelige Pille. Pæletrykkene i de tænkte Pæle, hvilke Tryk svarer til Transversalkræfterne i de oprindelige Pæle, vil ifølge den ovenanførte Ligning, $P = k\varphi a \sin \omega$, findes ganske som Pæletrykkene i de oprindelige Pæle og altsaa paa samme Maade som for disse angivet i § 31. Det er for at opnaa denne Simpelhed i Beregningen, at det er nødvendigt at indføre de tænkte Pæle i Hovedaksernes Retninger.

Naar disse tænkte Pæle er indført og Pælenes Indspænding fjernet, gennemføres Beregningen af Hovedakser og Pæletryk paa samme Maade som angivet i § 30 og 31. Men medens man der var uafhængig af Pilleunderkantens Form, skal her den oprindelige Pæl og de tilsvarende tænkte altid skære hinanden i Pilleunderkanten.

§ 36. **De tænkte Pæles Hældningsvinkler.** Vi vil i det følgende antage, at to hvilkesomhelst paa hinanden vinkelrette Linier i en Plan gennem Pælehovedet vinkelret paa Pæleretningen kan anvendes som tænkte Pæle. Modstandstallet for de tænkte Pæle vil være:

$$k = \frac{3EI}{s_1^3}, \quad (124)$$

hvor s_1 er den Side 44 definerede Indspændingslængde, og I den oprindelige Pæls Inertimoment om en Akse vinkelret paa vedkommende tænkte Pæl.

Den ene tænkte Pæl vil vi karakterisere ved Index s , den anden ved Index t .

Den oprindelige Pæls Retningscosinusser er:

$$\lambda = \operatorname{tg} \alpha_x \cos \alpha; \quad \mu = \operatorname{tg} \alpha_y \cos \alpha; \quad \nu = \cos \alpha. \quad (125)$$

Den 1. tænkte Pæls Retningscosinusser kan da bestemmes af Ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_x \lambda_s + \operatorname{tg} \alpha_y \mu_s + \nu_s &= 0, \\ \lambda_s^2 + \mu_s^2 + \nu_s^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Her kan den ene altsaa vælges, hvorefter de to andre er bestemt.

For 2. tænkte Pæl har man da:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_x \lambda_t + \operatorname{tg} \alpha_y \mu_t + \nu_t &= 0, \\ \lambda_s \lambda_t + \mu_s \mu_t + \nu_s \nu_t &= 0, \\ \lambda_t^2 + \mu_t^2 + \nu_t^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (126 a)$$

Hermed er de tænkte Pæles Vinkler bestemt.

Ligesom man for en oprindelig Pæl maaler dens Vinkel med Z-Aksen, vil vi maale 1. tænkte Pæls Vinkel med X-Aksen, α_s , og 2. tænkte Pæls Vinkel med Y-Aksen, α_t . Svarende til $\operatorname{tg} \alpha_x$ og $\operatorname{tg} \alpha_y$ faar man da $\operatorname{tg} \alpha_{z_s}$ og $\operatorname{tg} \alpha_{y_s}$, $\operatorname{tg} \alpha_{z_t}$ og $\operatorname{tg} \alpha_{x_t}$.

Man finder da:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_s &= -\lambda_s; \quad \operatorname{tg} \alpha_{z_s} = -\frac{\nu_s}{\lambda_s}; \quad \operatorname{tg} \alpha_{y_s} = -\frac{\mu_s}{\lambda_s} \\ \text{og} \quad \cos \alpha_t &= -\lambda_t; \quad \operatorname{tg} \alpha_{z_t} = -\frac{\nu_t}{\mu_t}; \quad \operatorname{tg} \alpha_{x_t} = -\frac{\lambda_t}{\mu_t}. \end{aligned} \right\} \quad (126 b)$$

$\cos \alpha_s$ og $\cos \alpha_t$ gøres altid positive og herefter retter de andre Fortegn sig.

Vi indfører nu de nye Betegnelser:

$$u_s = \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_s; \quad u_t = \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_t. \quad (127)$$

Herefter kan alle de i § 30—33 angivne Formler opstilles, naar man erstatter v med u_s for 1. tænkte og u_t for 2. tænkte Pæl, og naar man lader alle Summationer udstrække sig over alle Pæle, baade oprindelige og tænkte.

Saaledes skal Σv erstattes af $\Sigma (v + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_s} + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})$,

$$\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x \quad \gg \quad \gg \quad \Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t}).$$

o. s. v.

Indtil nu har vi ikke gjort Brug af at kunne vælge Retningerne for de tænkte Pæle vilkaarligh; imidlertid vil det tidt være bekvemt at vælge en speciel Retning paa den ene af de tænkte Pæle; man kan f. Eks. tænke sig at stille Formlerne op under Forudsætning af et af følgende to specielle Valg af de tænkte Pæle:

a) 1. tænkte Pæl lægges vinkelret paa den oprindelige Pæls Projektion paa XZ-Planen, saaledes at dens Vinkel med X-Aksen bliver α_x , med Y-Aksen 90° og med Z-Aksen $90^\circ + \alpha_x$.

2. tænkte Pæls Retningscosinusser findes da af Ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_x \lambda_t + \operatorname{tg} \alpha_y \mu_t + \nu_t &= 0, \\ \cos \alpha_x \lambda_t - \sin \alpha_x \nu_t &= 0, \\ \lambda_t^2 + \mu_t^2 + \nu_t^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Heraf findes:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_t &= \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x}; \quad \operatorname{tg} \alpha_{x_t} = -\sin \alpha_x \cos \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y, \\ \operatorname{tg} \alpha_{z_t} &= -\cos^2 \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Vi skriver da:

$$\left. \begin{aligned} \text{For 1. tænkte Pæl: } u &= \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_x, \\ \text{» 2. » » : } u_t &= \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_t, \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

og finder da

$$\left. \begin{aligned} \text{Til } v &= \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha & \text{svarer} & \frac{3EI}{s_1^3} \sin^2 \alpha_x = u \operatorname{tg}^2 \alpha_x & \text{og } u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}, \\ \text{» } v \operatorname{tg} \alpha_x &= \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha_x & \text{»} & -\frac{3EI}{s_1^3} \sin^2 \alpha_x \cotg \alpha_x = -u \operatorname{tg} \alpha_x & \text{og } u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t} \operatorname{tg} \alpha_{z_t}, \\ \text{» } v \operatorname{tg} \alpha_y & & \text{»} & \text{Nul} & \text{og } u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}, \\ \text{» } v \operatorname{tg} \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_x & & \text{»} & \text{Nul} & \text{og } u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t}, \\ \text{» } v \operatorname{tg}^2 \alpha_x &= \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha_x & \text{»} & \frac{3EI}{s_1^3} \sin^2 \alpha_x \cotg^2 \alpha_x = u & \text{og } u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t}, \\ \text{» } v \operatorname{tg}^2 \alpha_y & & \text{»} & \text{Nul} & \text{og } u_t. \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

En lodret Bevægelse 1 nedad fremkalder altsaa:

$$\left. \begin{aligned} \text{En lodret Komposant:} & v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}, \\ \text{» vandret » efter X-Aksen: } & v \operatorname{tg} \alpha_x - u \operatorname{tg} \alpha_x + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t}, \\ \text{» » » » Y-Aksen: } & v \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}. \end{aligned} \right\} \quad (131 a)$$

En lodret Bevægelse 1 i X-Aksens negative Retning fremkalder:

$$\left. \begin{aligned} \text{En vandret Komposant:} & v \operatorname{tg} \alpha_x - u \operatorname{tg} \alpha_x + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t}, \\ \text{» » » efter X-Aksen: } & v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t}, \\ \text{» » » » Y-Aksen: } & v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t}. \end{aligned} \right\} \quad (131 b)$$

En vandret Bevægelse 1 i Y-Aksens negative Retning fremkalder:

$$\left. \begin{aligned} \text{En lodret Komposant:} & v \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}, \\ \text{» vandret » efter X-Aksen: } & v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t}, \\ \text{» » » » Y-Aksen: } & v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t. \end{aligned} \right\} \quad (131 c)$$

b) 2. tænkte Pæl lægges vinkelret paa den oprindelige Pæls Projektion paa YZ-Planen.

Her vil 1. tænkte Pæls Retningscosinusser findes af Ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_x \lambda_s + \operatorname{tg} \alpha_y \mu_s + \nu_s &= 0, & \cos \alpha_s &= \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_y}, \\ \cos \alpha_y \mu_s - \sin \alpha_y \nu_s &= 0, & \operatorname{tg} \alpha_{z_s} &= -\cos^2 \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_x, \\ \lambda_s^2 + \mu_s^2 + \nu_s^2 &= 0. & \operatorname{tg} \alpha_{y_s} &= -\sin \alpha_y \cos \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_x. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Her skriver vi da:

$$\left. \begin{aligned} \text{For 1. tænkte Pæl: } u_s &= \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_s, \\ \text{» 2. » » : } u &= \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_y, \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

og finder da:

$$\left. \begin{aligned} \text{Til } v &= \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha \quad \text{svarer } u_s \operatorname{tg} \alpha_{z_s} \quad \text{og} \quad \frac{3EI}{s_1^3} \sin^2 \alpha_y = u \operatorname{tg}^2 \alpha_y, \\ \text{» } v \operatorname{tg} \alpha_x & \quad \text{» } u_s \operatorname{tg} \alpha_{z_s} \quad \text{og} \quad \text{Nul,} \\ \text{» } v \operatorname{tg} \alpha_y &= \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha_y \quad \text{» } u_s \operatorname{tg} \alpha_{z_s} \operatorname{tg} \alpha_{y_s} \quad \text{og} \quad -\frac{3EI}{s_1^3} \sin^2 \alpha_y \cotg \alpha_y = -u \operatorname{tg} \alpha_y, \\ \text{» } v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y & \quad \text{» } u_s \operatorname{tg} \alpha_{y_s} \quad \text{og} \quad \text{Nul,} \\ \text{» } v \operatorname{tg}^2 \alpha_x & \quad \text{» } u_s \quad \text{og} \quad \text{Nul,} \\ \text{» } v \operatorname{tg}^2 \alpha_y &= \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha_y \quad \text{» } u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{y_s} \quad \text{og} \quad \frac{3EI}{s_1^3} \sin^2 \alpha_y \cotg^2 \alpha_y = u. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Her kan stilles Udtryk op ganske analoge med (131 a, b og c).

I det følgende er de forskellige fundne Udtryk opstillet for det Tilfælde, at 1. tænkte Pæl lægges vinkelret paa Pæls Projektion paa XZ-Planen.

§ 37. **Hovedakserne.** Hovedkræfternes Størrelse findes af en trediegrads Ligning svarende til Ligning (80) i § 30, blot at her er Summationerne udstrakt over alle Pæle, baade oprindelige og tænkte.

Hovedaksernes Retningscosinusser findes af Ligninger svarende til Ligningerne (81) § 30; de betegnes ligesom der.

Idet vi som før lægger et nyt Koordinatsystem med samme Begyndelsespunkt som det oprindelige, men med X-, Y- og Z-Akserne parallelle med henholdsvis III, II og I Hovedakse, findes de nye Tangenser:

For den oprindelige Pæl:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha'_x &= \frac{\lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_1}{\lambda_3 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_3 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_3}, \\ \operatorname{tg} \alpha'_y &= \frac{\lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_2}{\lambda_3 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_3 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_3}, \\ \cos^2 \alpha' &= (\lambda_3 \operatorname{tg} \alpha_x + \mu_3 \operatorname{tg} \alpha_y + \nu_3)^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

For 1. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha'_{x_s} &= \frac{\lambda_3 - \nu_3 \operatorname{tg} \alpha_x}{\lambda_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_x}, \\ \operatorname{tg} \alpha'_{y_s} &= \frac{\lambda_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_x}{\lambda_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_x}, \\ \cos^2 \alpha'_s &= (\lambda_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_x)^2 \cos^2 \alpha_x. \end{aligned} \right\} \quad (135a)$$

For 2. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha'_{z_t} &= \frac{\lambda_3 \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + \mu_3 + \nu_3 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{\lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + \mu_2 + \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}, \\ \operatorname{tg} \alpha'_{x_t} &= \frac{\lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + \mu_1 + \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{\lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + \mu_2 + \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}, \\ \cos^2 \alpha'_t &= (\lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + \mu_2 + \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_{z_t})^2 \cos^2 \alpha_t. \end{aligned} \right\} \quad (135b)$$

Pælenes Skæringspunkt med den nye XY-Plan er:

For den oprindelige Pæl:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x(\mu_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_y) - y(\lambda_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_x)}{D}, \\ y' &= \frac{y(\lambda_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_x) - x(\mu_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_y)}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

hvor

$$D = (\lambda_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_x)(\mu_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_y) - (\mu_1 - \nu_1 \operatorname{tg} \alpha_y)(\lambda_2 - \nu_2 \operatorname{tg} \alpha_x).$$

For 1. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} x'_s &= \frac{-x \operatorname{tg} \alpha_x \cdot \mu_2 + y(\nu_2 + \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_x)}{D}, \\ y'_s &= \frac{-x \operatorname{tg} \alpha_x \cdot \mu_1 + y(\nu_1 + \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_x)}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (136a)$$

hvor

$$D = \mu_1(\nu_2 + \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_x) - \mu_2(\nu_1 + \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_x).$$

For 2. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} x'_t &= \frac{(x - y \operatorname{tg} \alpha_{x_t})(\nu_2 - \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) + y \operatorname{tg} \alpha_{z_t}(\lambda_2 - \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_{x_t})}{D}, \\ y'_t &= -\frac{(x - y \operatorname{tg} \alpha_{x_t})(\nu_1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) + y \operatorname{tg} \alpha_{z_t}(\lambda_1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_{x_t})}{D}, \\ \text{hvor} \\ D &= (\lambda_1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_{x_t})(\nu_2 - \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) - (\lambda_2 - \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_{x_t})(\nu_1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}). \end{aligned} \right\} \quad (136b)$$

De tre Hovedaksers Beliggenhed i det nye Koordinatsystem findes som i Ligningerne (83)–(86), naar man blot overalt lader Summationerne udstrække sig over alle Pæle, baade de oprindelige og begge de tænkte.

Man finder saaledes:

$$\left. \begin{aligned} y_{III} &= \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x \cdot y + u_s y_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t} \cdot y_t) - (\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \cdot x + u_s \operatorname{tg} \alpha_{y_s} \cdot x_s + u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t} \cdot x_t)}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})}, \\ z_{III} &= -\frac{\Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_x \cdot x + u_s \operatorname{tg} \alpha_{z_s} \cdot x_s + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t} \cdot x_t)}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})}, \\ x_{II} &= \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y \cdot x + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{y_s} \cdot x_s + u_t x_t) - \Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \cdot y + u_s \operatorname{tg} \alpha_{y_s} \cdot y_s + u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t} \cdot y_t)}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{y_s} + u_t)}, \\ z_{II} &= -\frac{\Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_y \cdot y + u_s \operatorname{tg} \alpha_{z_s} \operatorname{tg} \alpha_{y_s} \cdot y_s + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t} \cdot y_t)}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{y_s} + u_t)}, \\ x_I &= \frac{\Sigma(vx + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_s} \cdot x_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} \cdot x_t)}{\Sigma(v + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_s} + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})}, \\ y_I &= \frac{\Sigma(vy + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_s} \cdot y_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} \cdot y_t)}{\Sigma(v + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_s} + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})}. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

§ 38. **Pæletrykkene.** Ligesom vi i § 31 indførte Afstandene fra de tre Hovedskrueakser til Pælene, vil vi her indføre tilsvarende Afstande til de tænkte Pæle.

η_{x_s} er den vandrette Afstand fra III. Hovedskrueakse til 1. tænkte Pæl, multipliceret med $\operatorname{tg} \alpha_{z_s}$, positiv i Y-Aksens positive Retning (d. v. s. η_{x_s} er lig den korteste Afstand fra III. Hovedskrueakse til 1. tænkte Pæl multipliceret med $\operatorname{tg} \alpha_s$), man har da:

$$\eta_{x_s} = \operatorname{tg} \alpha_{z_s} (y_s - y_t) + z_{II} \operatorname{tg} \alpha_{y_s}. \quad (138)$$

η_{x_t} er den lodrette Afstand fra III. Hovedskrueakse til 2. tænkte Pæl, positiv i Z-Aksens negative Retning:

$$\eta_{x_t} = \operatorname{tg} \alpha_{x_t} (y_t - y_l) + z_{II}. \quad (138a)$$

η_{y_s} er den lodrette Afstand fra II. Hovedskrueakse til 1. tænkte Pæl, positiv i Z-Aksens negative Retning:

$$\eta_{y_s} = z_{III} + (x_s - x_l) \operatorname{tg} \alpha_{z_s}, \quad (138b)$$

η_{y_t} er den vandrette Afstand fra II. Hovedskrueakse til 2. tænkte Pæl, multipliceret med $\operatorname{tg} \alpha_{z_t}$, positiv i X-Aksens positive Retning (d. v. s. η_{y_t} er lig den korteste Afstand fra II. Hovedskrueakse til 2. tænkte Pæl, multipliceret med $\operatorname{tg} \alpha_t$):

$$\eta_{y_t} = z_{III} \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + (x_t - x_l) \operatorname{tg} \alpha_{z_t}. \quad (138c)$$

η_{z_s} er den vandrette Afstand fra I. Hovedskrueakse til 1. tænkte Pæl, idet denne Afstand maales, i en med ZY-Planen parallel Plan gennem Skrueaksen positiv i Y-Aksens positive Retning:

$$\eta_{z_s} = (y_s - y_{III}) - (x_s - x_{II}) \operatorname{tg} \alpha_{y_s}. \quad (138d)$$

η_{z_t} er den vandrette Afstand fra 1. Hovedskrueakse til 2. tænkte Pæl, idet denne Afstand maales i en med ZX-Planen parallel Plan gennem Skrueaksen, positiv i X-Aksens negative Retning:

$$\eta_{z_t} = (y_t - y_{III}) \operatorname{tg} \alpha_{x_t} - (x_t - x_{II}). \quad (138e)$$

Man er nu i Stand til at opskrive Udtryk, der er ganske analoge med de i § 31 fundne Udtryk:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{III} &= \frac{\Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma u_s \eta_{x_s} + \Sigma u_t \eta_{x_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t}}{\Sigma v \eta_x^2 + \Sigma u_s \eta_{x_s}^2 + \Sigma u_t \eta_{x_t}^2}, \\ y_{III}^p &= y_{III} - \frac{\varphi_{III} (\Sigma v \eta_x \eta_z + \Sigma u_s \eta_{x_s} \eta_{z_s} + \Sigma u_t \eta_{x_t} \eta_{z_t})}{\Sigma P_x}, \\ z_{III}^p &= z_{III} + \frac{\varphi_{III} (\Sigma v \eta_x \eta_y + \Sigma u_s \eta_{x_s} \eta_{y_s} + \Sigma u_t \eta_{x_t} \eta_{y_t})}{\Sigma P_x}, \\ \Sigma P_x &= \Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t}) \\ &\quad - \varphi_{III} (\Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma u_s \eta_{x_s} + \Sigma u_t \eta_{x_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t}). \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{II} &= - \frac{\Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma u_s \eta_{ys} \operatorname{tg} \alpha_{ys} + \Sigma u_t \eta_{yt}}{\Sigma v \eta_y^2 + \Sigma u_s \eta_{ys}^2 + \Sigma u_t \eta_{yt}^2}, \\ x_{II}^p &= x_{II} - \frac{\varphi_{II} (\Sigma v \eta_y \eta_z + \Sigma u_s \eta_{ys} \eta_{zs} + \Sigma u_t \eta_{yt} \eta_{zt})}{\Sigma P_y}, \\ z_{II}^p &= z_{II} - \frac{\varphi_{II} (\Sigma v \eta_x \eta_y + \Sigma u_s \eta_{xs} \eta_{ys} + \Sigma u_t \eta_{xt} \eta_{yt})}{\Sigma P_y}, \\ \Sigma P_y &= \Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{ys} + u_t) \\ &\quad + \varphi_{II} (\Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma u_s \eta_{ys} \operatorname{tg} \alpha_{ys} + \Sigma u_t \eta_{yt}). \end{aligned} \right\} \quad (139a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I &= - \frac{\Sigma v \eta_z + \Sigma u_s \eta_{zs} \operatorname{tg} \alpha_{zs} + \Sigma u_t \eta_{zt} \operatorname{tg} \alpha_{zt}}{\Sigma v \eta_z^2 + \Sigma u_s \eta_{zs}^2 + \Sigma u_t \eta_{zt}^2}, \\ x_I^p &= x_I + \frac{\varphi_I (\Sigma v \eta_y \eta_z + \Sigma u_s \eta_{ys} \eta_{zs} + \Sigma u_t \eta_{yt} \eta_{zt})}{\Sigma P_z}, \\ y_I^p &= y_I + \frac{\varphi_I (\Sigma v \eta_x \eta_z + \Sigma u_s \eta_{xs} \eta_{zs} + \Sigma u_t \eta_{xt} \eta_{zt})}{\Sigma P_z}, \\ \Sigma P_z &= \Sigma (v + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{zs} + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{zt}) \\ &\quad + \varphi_I (\Sigma v \eta_z + \Sigma u_s \eta_{zs} \operatorname{tg} \alpha_{zs} + \Sigma u_t \eta_{zt} \operatorname{tg} \alpha_{zt}). \end{aligned} \right\} \quad (139b)$$

P_{xx}^M , P_{xy}^M og P_{xz}^M for de oprindelige Pæle findes af Ligningerne (102), (105) og (108) i § 31.

For 1. tænkte Pæl findes:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx}^M &= -u_s \eta_{xs} + f_{III} u_s, \\ P_{xy}^M &= u_s \eta_{ys} + f_{II} u_s \operatorname{tg} \alpha_{ys}, \\ P_{xz}^M &= u_s \eta_{zs} + f_I u_s \operatorname{tg} \alpha_{zs}. \end{aligned} \right\} \quad (139c)$$

For 2. tænkte Pæl findes:

$$\left. \begin{aligned} P_{yx}^M &= -u_t \eta_{xt} + f_{III} u_t \operatorname{tg} \alpha_{xt}, \\ P_{yy}^M &= u_t \eta_{yt} + f_{II} u_t, \\ P_{yz}^M &= u_t \eta_{zt} + f_I u_t \operatorname{tg} \alpha_{zt}. \end{aligned} \right\} \quad (139d)$$

f_{III} , f_{II} og f_I findes af Ligningerne (101), (104) og (107).

$$\left. \begin{aligned}
 M_{xx} &= \Sigma v \eta_x^2 + \Sigma u_s \eta_{x_s}^2 + \Sigma u_t \eta_{x_t}^2 - f_{III} (\Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma u_s \eta_{x_s} + \Sigma u_t \eta_{x_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t}), \\
 M_{yy} &= \Sigma v \eta_y^2 + \Sigma u_s \eta_{y_s}^2 + \Sigma u_t \eta_{y_t}^2 + f_{II} (\Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma u_s \eta_{y_s} \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \Sigma u_t \eta_{y_t}), \\
 M_{zz} &= \Sigma v \eta_z^2 + \Sigma u_s \eta_{z_s}^2 + \Sigma u_t \eta_{z_t}^2 + f_I (\Sigma v \eta_z + \Sigma u_s \eta_{z_s} \operatorname{tg} \alpha_{z_s} + \Sigma u_t \eta_{z_t} \operatorname{tg} \alpha_{z_t}), \\
 M_{xy} &= -(\Sigma v \eta_x \eta_y + \Sigma u_s \eta_{x_s} \eta_{y_s} + \Sigma u_t \eta_{x_t} \eta_{y_t}), \\
 M_{xz} &= -(\Sigma v \eta_x \eta_z + \Sigma u_s \eta_{x_s} \eta_{z_s} + \Sigma u_t \eta_{x_t} \eta_{z_t}), \\
 M_{yz} &= (\Sigma v \eta_y \eta_z + \Sigma u_s \eta_{y_s} \eta_{z_s} + \Sigma u_t \eta_{y_t} \eta_{z_t}).
 \end{aligned} \right\} (139e)$$

Man vil se, at flere af Leddene er ens i de forskellige Udtryk.

For Pæletrykkene findes følgende Udtryk:

For den oprindelige Pæl:

$$\left. \begin{aligned}
 P \cos \alpha &= Q_3 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x - \varphi_{III} v \eta_x}{\Sigma P_x} + Q_2 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y + \varphi_{II} v \eta_y}{\Sigma P_y} \\
 &+ Q_1 \frac{v + \varphi_I v \eta_z}{\Sigma P_z}.
 \end{aligned} \right\} (140)$$

Udtrykket for Momenternes Bidrag til Pæletrykkene er ganske det samme som i § 31.

Ligesom man finder de oprindelige Pæles Tryk ved deres lodrette Komposant, findes Trykket i 1. tænkte Pæl ved dets Komposant efter X-Aksen, og Trykket i 2. tænkte Pæl ved dets Komposant efter Y-Aksen; derfor faas for 1. og 2. tænkte Pæl ganske tilsvarende Udtryk for Momenternes Bidrag som for de oprindelige Pæle, naar man blot erstatter P_{xx}^M , P_{xy}^M og P_{zz}^M med henholdsvis P_{xx}^M , P_{xy}^M , P_{xz}^M og P_{yx}^M , P_{yy}^M og P_{yz}^M .

For 1. tænkte Pæl findes de rene Kræfters Bidrag:

$$\left. \begin{aligned}
 T_s \cos \alpha_s &= Q_3 \frac{u_s - \varphi_{III} u_s \eta_{x_s}}{\Sigma P_x} + Q_2 \frac{u_s \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \varphi_{II} u_s \eta_{y_s}}{\Sigma P_y} \\
 &+ Q_1 \frac{u_s \operatorname{tg} \alpha_{z_s} + \varphi_I u_s \eta_{z_s}}{\Sigma P_z}.
 \end{aligned} \right\} (140a)$$

For 2. tænkte Pæl findes de rene Kræfters Bidrag:

$$\left. \begin{aligned}
 T_t \cos \alpha_t &= Q_3 \frac{u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t} - \varphi_{III} u_t \eta_{x_t}}{\Sigma P_x} + Q_2 \frac{u_t + \varphi_{II} u_t \eta_{y_t}}{\Sigma P_y} \\
 &+ Q_1 \frac{u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t} + \varphi_I u_t \eta_{z_t}}{\Sigma P_z}.
 \end{aligned} \right\} (140b)$$

§ 39. **Specielle Tilfælde.** For disse gælder i og for sig det samme, som er sagt i § 33, men her skal yderligere anføres Pæletryksformler for de tænkte Pæle.

1. En ren Forskydning i en Hovedakse giver en ren Kraft; Momenthovedsystemet falder ikke sammen med Forskydningshovedsystemet.

Pæletrykkene fra de rene Kræfter bliver:

For den oprindelige Pæl:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= \frac{Q_3}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})} v \operatorname{tg} \alpha_x \\ &+ \frac{Q_2}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{y_s} + u_t)} v \operatorname{tg} \alpha_y + \frac{Q_1 v}{\Sigma(v + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_s} + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})} \\ \text{For 1. tænkte Pæl:} \\ T_s \cos \alpha_s &= \frac{Q_3 u_s}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_s + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})} \\ &+ \frac{Q_2}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{y_s} + u_t)} u_s \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \frac{Q_1 u_s \operatorname{tg} \alpha_{z_s}}{\Sigma(v + u_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_s} + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})} \end{aligned} \right\} (141)$$

For 2. tænkte Pæl findes et analogt Udtryk.

2. Momenthovedsystemet falder sammen med Forskydningshovedsystemet.

I dette Tilfælde vil Pæletrykkene fra Momenterne være ganske tilsvarende de i § 33 (119) anførte.

3. Momenthovedsystemet falder sammen med Forskydningshovedsystemet, og en ren Forskydning i en Hovedakse giver en ren Kraft.

I dette Tilfælde vil Udtrykkene for Pæletrykkene blive ganske simple og svare til de i § 33 (121) anførte.

4. Hovedakserne er parallelle med de oprindelige Koordinataksler, og en ren Forskydning i en Hovedakse giver en ren Kraft. Momenthovedsystemet falder sammen med Forskydningshovedsystemet.

Betingelsen for, at Hovedakserne er parallelle med Koordinatakslerne, er:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t} &= 0; \quad \Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) = 0; \\ \Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t}) &= 0. \end{aligned} \right\} (142)$$

Hovedaksernes Beliggenhed bestemmes af nedenstaaende Ligninger:

$$\left. \begin{aligned} y_{III} &= \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})y - \Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + u_l \operatorname{tg} \alpha_{x_l})x}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})}, \\ z_{III} &= -\frac{\Sigma((v - u) \operatorname{tg} \alpha_x + u_l \operatorname{tg} \alpha_{x_l} \operatorname{tg} \alpha_{z_l})x}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})}, \\ x_{II} &= \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_l)x - \Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + u_l \operatorname{tg} \alpha_{x_l})y}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_l)}, \\ z_{II} &= -\frac{\Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_y + u_l \operatorname{tg} \alpha_{z_l})y}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_l)}, \\ x_I &= \frac{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})x}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})}, \\ y_I &= \frac{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})y}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})}. \end{aligned} \right\} (142a)$$

Afstandene fra Hovedskruetakserne til de tænkte Pæle findes af følgende Udtryk:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{x_s} &= -\operatorname{tg} \alpha_x (y - y_I); \quad \eta_{y_s} = z_{III} - (x - x_I) \operatorname{tg} \alpha_x; \quad \eta_{z_s} = y - y_{III}; \\ \eta_{x_l} &= \operatorname{tg} \alpha_{x_l} (y - y_I) + z_{II}; \quad \eta_{y_l} = z_{III} \operatorname{tg} \alpha_{x_l} + (x - x_I) \operatorname{tg} \alpha_{z_l}; \\ \eta_{z_l} &= (y - y_{III}) \operatorname{tg} \alpha_{x_l} - (x - x_{II}). \end{aligned} \right\} (142b)$$

Naar man sætter:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \Sigma v \eta_x^2 + \Sigma u_s \eta_{x_s}^2 + \Sigma u_l \eta_{x_l}^2, \\ I_y &= \Sigma v \eta_y^2 + \Sigma u_s \eta_{y_s}^2 + \Sigma u_l \eta_{y_l}^2, \\ I_z &= \Sigma v \eta_z^2 + \Sigma u_s \eta_{z_s}^2 + \Sigma u_l \eta_{z_l}^2, \end{aligned} \right\} (142c)$$

faar man følgende Udtryk for Pæletrykkene:

Den oprindelige Pæl:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_3 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})} + Q_2 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_l)} \\ &+ Q_1 \frac{v}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})} - M_x \frac{v \eta_x}{I_x} \\ &+ M_y \frac{v \eta_y}{I_y} + M_z \frac{v \eta_z}{I_z}. \end{aligned} \right\} (142d)$$

1. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} T_s \cos \alpha = & Q_3 \frac{u}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})} - Q_1 \frac{u \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma (v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})} \\ & - M_x \frac{u \eta_{x_s}}{I_x} + M_y \frac{u \eta_{y_s}}{I_y} + M_z \frac{u \eta_{z_s}}{I_z}. \end{aligned} \right\} \quad (142e)$$

2. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} T_t \cos \alpha_t = & Q_3 \frac{u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t}}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})} + Q_3 \frac{u_t}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)} \\ & + Q_1 \frac{u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{\Sigma (v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})} - M_x \frac{u_t \eta_{x_t}}{I_x} \\ & + M_y \frac{u_t \eta_{y_t}}{I_y} + M_z \frac{u_t \eta_{z_t}}{I_z}. \end{aligned} \right\} \quad (142f)$$

§ 40. **Eksempel.** Der undersøges den samme Pille som i Eksempel 2 i § 34.

Vi forudsætter v lige stor for alle Pæle og sætter $v = 100$; tillige sætter vi:

$$u = u_t = \frac{1}{200} v = 0,5.$$

1. tænkte Pæl lægges vinkelret paa Pælens Projektion paa XZ-Planen. Som i § 34 ser man umiddelbart, at de tre Hovedakser er parallelle med Koordinataakserne.

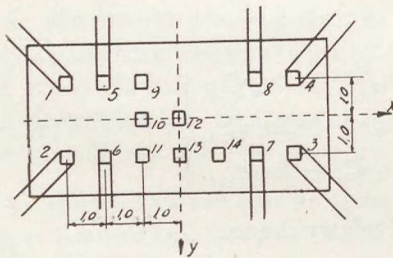


Fig. 62.

Det første, der maa gøres, er at finde 2. tænkte Pæls Vinkler for de forskellige Pæle.

For Lodpælene og Pælene 5, 6, 7 og 8 findes de umiddelbart; det ses, at naar en Pæl ligger i enten Plan XZ eller YZ, vil 2. tænkte Pæl staa vinkelret paa Pælens Projektion paa YZ-Planen samtidig med, at 1. tænkte Pæl staa vinkelret paa Pælens Projektion paa XZ-Planen.

For Pælene 1—4 findes af Formel (129) $\operatorname{tg} \alpha_{x_t}$ og $\operatorname{tg} \alpha_{z_t}$.

Pæl Nr.	x	y	v	$\operatorname{tg} \alpha_x$	$\operatorname{tg} \alpha_y$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha_x$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha_y$	vx	vy	$y \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha_x$	$x \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha_y$	u	uy	$(v-u) \operatorname{tg} \alpha_x \cdot x$	$y \cdot \operatorname{tg} \alpha_y$	$u \operatorname{tg}^2 \alpha_x$	$u \operatorname{tg}^2 \alpha_x \cdot x$	$y \operatorname{tg}^2 \alpha_x \cdot y$
1	-3,0	-1,0	100	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	11,1	6,25	-300	-100	-11,10	-18,75	0,5	-0,50	-99,5	-25,0	+0,06	-0,18	-0,06
2	-3,0	+1,0	100	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	11,1	6,25	-300	+100	+11,10	-18,75	0,5	+0,50	-99,5	-25,0	+0,06	-0,18	+0,06
3	+3,0	+1,0	100	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	11,1	6,25	+300	+100	+11,10	+18,75	0,5	+0,50	-99,5	-25,0	+0,06	+0,18	+0,06
4	+3,0	-1,0	100	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	11,1	6,25	+300	-100	-11,10	+18,75	0,5	-0,50	-99,5	-25,0	+0,06	+0,18	-0,06
5	-2,0	-1,0	100	0	$+\frac{1}{4}$	0	6,25	-200	-100	0	-12,50	0,5	-0,50	0	-25,0	0	0	0
6	-2,0	+1,0	100	0	$-\frac{1}{4}$	0	6,25	-200	+100	0	-12,50	0,5	+0,50	0	-25,0	0	0	0
7	+2,0	+1,0	100	0	$-\frac{1}{4}$	0	6,25	+200	+100	0	+12,50	0,5	+0,50	0	-25,0	0	0	0
8	+2,0	-1,0	100	0	$+\frac{1}{4}$	0	6,25	+200	-100	0	+12,50	0,5	-0,50	0	-25,0	0	0	0
9	-1,0	-1,0	100	0	0	0	0	-100	-100	0	0	0,5	-0,50	0	0	0	0	0
10	-1,0	0	100	0	0	0	0	-100	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0
11	-1,0	+1,0	100	0	0	0	0	-100	+100	0	0	0,5	+0,50	0	0	0	0	0
12	0	0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0	0	0	0	0
13	0	+1,0	100	0	0	0	0	0	+100	0	0	0,5	+0,50	0	0	0	0	0
14	+1,0	+1,0	100	0	0	0	0	+100	+100	0	0	0,5	+0,50	0	0	0	0	0
Sum			1400			44,4	50,0	-200	+200	0	0	7,0	+1,00	-398,0	-200,0	+0,24	0	0

*11

Pæl Nr.	u_t	$\operatorname{tg} a_{x_t}$	$\operatorname{tg} a_{z_t}$	$10^4 \cdot u_t \operatorname{tg}^2 a_{x_t}$	$10^4 \cdot u_t \operatorname{tg}^2 a_{z_t}$	$10^4 \cdot u_t \operatorname{tg}^2 a_{x_t} \cdot y$	$10^4 \cdot u_t \operatorname{tg}^2 a_{x_t} \cdot x$	$10^4 \cdot u_t \operatorname{tg}^2 a_{z_t} \cdot y$	$10^4 \cdot u_t \operatorname{tg}^2 a_{z_t} \cdot x$	$10^4 \cdot u_t \operatorname{tg} a_{x_t} \operatorname{tg} a_{z_t} \cdot x$	$u_t x$	$u_t \operatorname{tg} a_{x_t} \cdot y$	$u_t \operatorname{tg} a_{z_t} \cdot y$	$u_t \operatorname{tg} a_{z_t} \cdot x$
1	0,5	-0,075	-0,225	28,1	253,0	-28,1	-84,3	-253,0	-759,0	-253,0	-1,5	+0,0375	+0,1125	+0,1125
2	0,5	+0,075	+0,225	28,1	253,0	+28,1	-84,3	+253,0	-759,0	-253,0	-1,5	+0,0375	+0,1125	-0,1125
3	0,5	-0,075	+0,225	28,1	253,0	+28,1	+84,3	+253,0	+759,0	-253,0	+1,5	-0,0375	+0,1125	-0,1125
4	0,5	+0,075	-0,225	28,1	253,0	-28,1	+84,3	-253,0	+759,0	-253,0	+1,5	-0,0375	+0,1125	+0,1125
5	0,5	0	$-\frac{1}{4}$	0	312,50	0	0	-312,50	-625,00	0	-1,0	0	+0,1250	0
6	0,5	0	$+\frac{1}{4}$	0	312,50	0	0	+312,50	-625,00	0	-1,0	0	+0,1250	0
7	0,5	0	$+\frac{1}{4}$	0	312,50	0	0	0	+625,00	0	+1,0	0	+0,1250	0
8	0,5	0	$-\frac{1}{4}$	0	312,50	0	0	0	-625,00	0	+1,0	0	+0,1250	0
9	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0
10	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0
11	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0
12	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+0,5	0	0	0
Sum	7,00	0	0	112,4	2262,0	0	0	0	0	-1012,0	-1,00	0	+0,9500	0

Heraf findes:

$$\begin{aligned}
 y_{III} &= 0,020 \text{ m}; & z_{III} &= 7,75 \text{ m}. \\
 x_{II} &= -0,018 \text{ m}; & z_{II} &= 3,50 \text{ m}. \\
 x_I &= -0,143 \text{ m}; & y_I &= 0,143 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Pæl Nr.	η_x	η_{x_s}	η_{x_t}	$v\eta_x^2$	$u\eta_{x_s}^2$	$u_t\eta_{x_t}^2$	η_y	η_{y_s}	η_{y_t}	$v\eta_y^2$	$u\eta_{y_s}^2$	$u_t\eta_{y_t}^2$	η_z	η_{z_s}	η_{z_t}	$v\eta_z^2$	$u\eta_{z_s}^2$	$u_t\eta_{z_t}^2$
1	-0,268	+0,381	+3,757	7,20	0,720	7,04	-0,274	+8,702	+0,062	7,50	75,8	0	+0,388	-1,020	+3,059	15,1	0,52	4,68
2	-0,018	-0,286	+3,757	0,03	0,410	7,04	-0,274	+8,702	-0,062	7,50	75,8	0	-0,401	+0,980	+3,057	16,1	0,48	4,68
3	-0,018	+0,286	+3,757	0,03	0,410	7,04	+0,660	+8,898	+0,126	43,50	79,1	0,01	+0,433	+0,980	-3,093	18,8	0,48	4,76
4	-0,268	-0,381	+3,757	7,20	0,720	7,04	+0,660	+8,898	-0,126	43,50	79,1	0,01	-0,420	-1,020	-3,095	17,6	0,52	4,76
5	-0,268	0	+3,786	7,20	0	7,12	-1,857	+7,750	+0,464	344,00	60,1	0,11	-0,490	-1,020	+1,982	24,0	0,52	1,96
6	-0,018	0	+3,714	0,03	0	7,10	-1,857	+7,750	-0,464	344,00	60,1	0,11	-0,490	+0,980	+1,982	24,0	0,48	1,96
7	-0,018	0	+3,714	0,03	0	7,10	+2,143	+7,750	+0,536	460,00	60,1	0,14	+0,510	+0,980	-2,018	26,0	0,48	2,04
8	-0,268	0	+3,786	7,20	0	7,12	+2,143	+7,750	-0,536	460,00	60,1	0,14	-0,510	-1,020	-2,018	26,0	0,52	2,04
9	-1,143	0	+3,50	130,50	0	6,13	-0,857	+7,750	0	73,50	60,1	0	0	-1,020	+0,982	0	0,52	0,48
10	-0,143	0	+3,50	2,05	0	6,13	-0,857	+7,750	0	73,50	60,1	0	0	-0,020	+0,982	0	0	0,48
11	+0,857	0	+3,50	73,50	0	6,13	-0,857	+7,750	0	73,50	60,1	0	0	+0,980	+0,982	0	0,48	0,48
12	-0,143	0	+3,50	2,05	0	6,13	+0,143	+7,750	0	2,05	60,1	0	0	-0,020	-0,018	0	0	0
13	+0,857	0	+3,50	73,50	0	6,13	+0,143	+7,750	0	2,05	60,1	0	0	+0,980	-0,018	0	0,48	0
14	+0,857	0	+3,50	73,50	0	6,13	+1,143	+7,750	0	130,50	60,1	0	0	+0,980	-1,018	0	0,48	0,52
Sum				384,02	2,260	93,38				2065,10	910,8	0,52				167,6	5,96	28,84

For de oprindelige Pæle findes:

Pæl Nr.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	+0,65	+0,44	+0,0715	+0,0563	-0,0092	+0,195
2	+0,65	-0,44	+0,0715	+0,0038	-0,0092	-0,202
3	-0,65	-0,44	+0,0715	+0,0038	+0,0222	+0,213
4	-0,65	+0,44	+0,0715	+0,0563	+0,0222	-0,206
5	0	+0,44	+0,0715	+0,0563	-0,0629	+0,246
6	0	-0,44	+0,0715	+0,0038	-0,0629	-0,246
7	0	-0,44	+0,0715	+0,0038	+0,0722	+0,251
8	0	+0,44	+0,0715	+0,0563	+0,0722	-0,251
9	0	0	+0,0715	+0,2400	-0,0288	0
10	0	0	+0,0715	+0,0300	-0,0288	0
11	0	0	+0,0715	-0,1800	-0,0288	0
12	0	0	+0,0715	+0,0300	+0,0048	0
13	0	0	+0,0715	-0,1800	+0,0048	0
14	0	0	+0,0715	-0,1800	+0,0385	0

$$I_x = 384,02 + 2,26 + 93,38 = 479,66,$$

$$I_y = 2065,1 + 910,8 + 0,52 = 2976,42,$$

$$I_z = 167,6 + 5,96 + 28,84 = 202,40.$$

$B_1 - B_6$ er Koefficienterne til Belastningen i Udtrykket for Pæletrykkenes lodrette Komposanter.

Paa samme Maade som angivet for de oprindelige Pæle findes Pæletrykkene for de tænkte Pæle.

IV. Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden.

§ 41. **Definition af tænkte Pæle.** I hosstaaende Figur er vist en Pæl P og Pillens Underkant, Planen U .

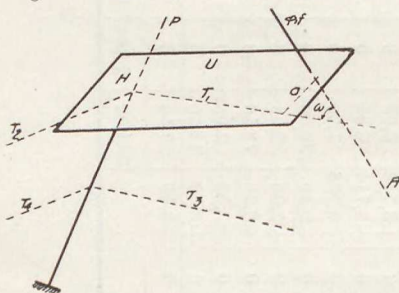


Fig. 63.

Vi tænker os nu, at Pillen faar en Skruebevægelse om Aksen A , Vinkeldrejningen φ og Parallelforskydningen f . Herved vil vi faa en Forskydning af Pælehovedet H og en Vinkeldrejning φ . Forskydningen kan tænkes op-

løst i en Forskydning i Pælens Retning og en Forskydning vinkelret paa Pælens Retning, og det samme tænkes gjort

med Vinkelændringen φ . Vi vil nu som i § 35 tænke os denne Forskydning og Vinkeldrejning vinkelret paa Pælen opløst i de to paa hinanden vinkelrette Hovedakser for Pælens Tvær-snit; disse er vist som T_1 og T_2 .

Parallelforskydningen i Retningen T_1 er:

$$\lambda = f \cos \omega + \varphi a \sin \omega,$$

hvor a er den korteste Afstand mellem T_1 og A , og ω er Vinklen mellem disse to Linier.

Denne Forskydning samt Vinkeldrejningens Komposant φ_1 efter T_2 vil give en planBøjning af Pælen i Plan med T_1 , medens baade Parallelforskydningens og Vinkeldrejningens to andre Komposanter ikke giver noget Bidrag til Bøjningen i denne Plan.

Der vil ved denne Bøjning, svarende til λ og φ_1 fremkaldes en Transversalkraft og et Moment i Pælehovedet, og disse bestemmes af nedenstaaende Ligninger, idet de i Fig. 64 er angivet med deres positive Retninger, naar der tales om Pælens Indvirkning paa Pillen:

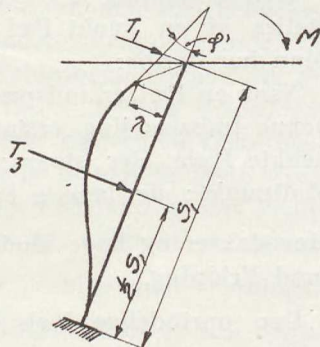


Fig. 64.

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= + \frac{12EI}{s_1^3} \lambda + \frac{12EI}{s_1^3} \frac{1}{2} s_1 \varphi_1, \\ M &= - \frac{6EI}{s_1^2} \lambda - \frac{6EI}{s_1^2} \frac{2}{3} s_1 \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

I Fig. 64 er vist Planen PT_1 med de fremkaldte Kræfter.

Hvis man lader T_1 virke i Pælens Midtpunkt, vil Momentet i Pælehovedet blive:

$$M_s = - \frac{EI}{s_1} \varphi_1. \quad (144)$$

Hvis Formlen for T_1 skrives:

$$T_1 = + \frac{12EI}{s_1^3} (f \cos \omega + \varphi a \sin \omega + \frac{1}{2} s_1 \varphi_1),$$

vil man se, at Trykket T_1 er proportionalt med den Forskydning, man vil faa i en Linie T_3 , der gaar gennem Pælens

Midtpunkt og er parallel med T_1 ; dette følger af, at $f \cos \omega$ er hele Bidraget til Forskydningen fra f og, da Vinkeldrejningens Komposanter efter P og T_1 ingen Forskydning giver i Retningen T_3 , vil $\varphi a \sin \omega + \frac{1}{2} s_1 \varphi_1$ være hele Bidraget til Forskydningen fra φ . Man vil derfor kunne erstatte hele Indspændingens Virkning paa Pælens Bøjning i PT_1 -Planen med en tænkt Pæl T_3 , hvis Modstandstal er $\frac{12EI}{s_1^3}$, naar man sam-

tidig tilføjer et Moment $M_s = -\frac{EI}{s_1} \varphi_1$ i Retning af T_2 .

Pælens Bøjning i PT_2 -Planen kan paa samme Maade erstattes af en tænkt Pæl T_4 og et Moment i Retning af T_1 . Man har derfor:

Naar en Pæl er indspændt baade foroven og forneden, kan denne Indspænding erstattes af to paa hinanden vinkelrette tænkte Pæle, der staar vinkelret paa Pælen gennem dennes Midtpunkt; de tænkte Pæle skal ligge i Pæletværsnittets to Hovedakser og have Modstandstallene $\frac{12EI}{s_1^3}$ mod Tryk og $\frac{EI}{s_1}$ mod Vridning.

Den oprindelige Pæls Modstandstal er $\frac{EF}{s_2}$ mod Tryk og $\frac{GI_p}{s_3}$ mod Vridning, hvor s_3 er den Side 111 definerede Vridningslængde.

Vi maa her definere Fortegnet for en Pæls Vridningsvinkel og Vridningsmoment; disse regnes med sammenhørende positive Værdier.

Pælens positive Retning er den, i hvilken Pæletrykket paa virker Pillen, naar Pælen sammentrykkes, og den Vektor, der svarer til Pælens Vridningsvinkel (se Side 123), regnes positiv i Pælens negative Retning.

Denne Fortegnsdefinition falder sammen med, at den paa Fig. 64 viste Drejningsvinkel giver et negativt Moment.

Ligesom for Pæle, der kun er indspændt i Bunden, er man ikke her uafhængig af Pilleunderkantens Form, men maa stadig erindre, at de tænkte Pæle skal skære de oprindelige i disses Midtpunkt.

Naar de tænkte Pæle er indført, og Pælens Indspænding er fjernet, gennemføres Beregningen af Hovedakserne og Pæletryk principielt paa samme Maade som angivet i § 30 og 31, naar man blot stadig tager Pælens Vridningsmomenter med.

Man vil lægge Mærke til, at de tænkte Pæles Modstandstal her er 4 Gange saa stort som for de i § 35 anvendte tænkte Pæle.

Idet vi forudsætter, at Pæletværsnittets Tyngdepunktsellipsoide er en Cirkel, har man $I_p = 2I$, og hvis man sætter $G = \frac{2}{5} E$ svarende til Poissons Forhold lig $\frac{1}{4}$, faar man den oprindelige Pæls Vridningsmodstand:

$$\frac{GI_p}{s_3} = \frac{4}{5} \frac{EI}{s_3}.$$

Da der imidlertid er Usikkerhed i de forskellige Pælelængders Bestemmelse særlig for Vridningslængdens Vedkommende, vil vi her sætte den oprindelige Pæls Vridningsmodstand lig de tænkte Pæles, hvilket altsaa svarer til, at Pælens Vridningslængde er lig $\frac{4}{5}$ af Indspændingslængden. Herved vil Vridningsellipsoiden for Pælen og dens tilhørende to tænkte Pæle være en Kugle, forudsat at Pælens Bøjningsmodstand er ens i alle Retninger, og Pælens samlede Vridningsmodstand vil altsaa altid være et Moment $M = -\frac{EI}{s_1} \varphi$ parallel med Vridningsaksen; selv om Pælens Bøjningsmodstand ikke er ens i alle Retninger, vil vi alligevel regne paa samme Maade, idet den derved indførte Tilnærmelse, der betyder en stor Lettelse i Beregningen, kun giver en ringe Fejl.

§ 42. **De tænkte Pæles Hældningsvinkler.** Vi vil i det følgende ligesom i § 36 antage, at to hvilkesomhelst paa hinanden vinkelrette Linier i en Plan vinkelret paa Pælen gennem dennes Midtpunkt kan anvendes som tænkte Pæle; vi lægger 1. tænkte Pæl vinkelret paa Pælens Projektion paa XZ-Planen, og dennes og 2. tænkte Pæls Retningscosinusser og Tangenser bestemmes ganske som i § 36 ved Ligningerne (129)–(131 c), idet vi ogsaa her maaler 1. tænkte Pæls Vinkel med X-Aksen, α_s , og 2. tænkte Pæls Vinkel med Y-Aksen, α_t .

Hvis man lægger 2. tænkte Pæl vinkelret paa Pælens Projektion paa YZ-Planen, faar man Udtryk, der bygges op ganske analogt med de nævnte. Vi vil imidlertid i det følgende forudsætte, at 1. tænkte Pæl lægges vinkelret paa XZ-Planen.

De tænkte Pæles Modstandstal vil vi her betegne ved:

$$r_s = \frac{12EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_s; \quad r_t = \frac{12EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_t. \quad (145)$$

§ 43. **Hovedakserne.** Hovedaksernes Retninger bestemmes af Ligning (80) i § 30, Pælenes Tangenser og r_s og r_t efter Koordinattransformationen bestemmes af Ligningerne (135)—(135b), naar man alle Steder sætter r_s og r_t i Stedet for u_s og u_t .

De oprindelige Pæles Skæringspunkt med den nye XY-Plan bestemmes efter Ligning (136).

De tænkte Pæles Skæringspunkter findes af nedenanførte Ligninger, hvor x og y er Koordinaterne i Pilleunderkant til den tilsvarende oprindelige Pæl; vi sætter $\frac{1}{2} s_1 \cos \alpha = s_a$.

For 1. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} x'_s &= \frac{(y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y)(\nu_2 + \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_x) - (x \operatorname{tg} \alpha_x - s_a(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_x))\mu_2}{D}, \\ y'_s &= -\frac{(y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y)(\nu_1 + \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_x) - (x \operatorname{tg} \alpha_x - s_a(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_x))\mu_1}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

hvor $D = \mu_1(\nu_2 + \lambda_2 \operatorname{tg} \alpha_x) - \mu_2(\nu_1 + \lambda_1 \operatorname{tg} \alpha_x)$.

For 2. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} x'_t &= \frac{(x - y \operatorname{tg} \alpha_{x_t} - s_a(\operatorname{tg} \alpha_x - \operatorname{tg} \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_{x_t}))(\nu_2 - \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) + (y \operatorname{tg} \alpha_{z_t} + s_a(1 - \operatorname{tg} \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_{z_t}))(\lambda_2 - \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_{x_t})}{D}, \\ y'_t &= -\frac{(x - y \operatorname{tg} \alpha_{x_t} - s_a(\operatorname{tg} \alpha_x - \operatorname{tg} \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_{x_t}))(\nu_1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) + (y \operatorname{tg} \alpha_{z_t} + s_a(1 - \operatorname{tg} \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_{z_t}))(\lambda_1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_{x_t})}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

$D = (\lambda_1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_{x_t})(\nu_2 - \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) - (\lambda_2 - \mu_2 \operatorname{tg} \alpha_{x_t})(\nu_1 - \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_{z_t})$.

De tre Hovedaksers Beliggenhed i det nye Koordinatsystem findes af Ligningerne (137) naar u_s og u_t ombyttes med r_s og r_t .

§ 44. **Pæletrykkene.** Disse findes paa ganske samme Maade som i § 38, naar man blot for enhver Vinkeldrejning medtager Pælenes Vridningsmodstand.

Pælenes Afstande fra de tre Hovedskrueakser indføres ligesom i § 38, og man finder de samme Udtryk her som der, Ligningerne (138).

Da mange af de i § 38 fundne Udtryk gælder uforandret her, naar blot u -Kræfter erstattes af r -Kræfter, skal der kun nedenfor angives de Udtryk, der forandres paa Grund af Pælenes Vridningsmodstand.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{III} &= \frac{\Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma r_s \eta_{x_s} + \Sigma r_t \eta_{x_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t}}{\Sigma v \eta_x^2 + \Sigma r_s \eta_{x_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{x_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}}, \\ \varphi_{II} &= - \frac{\Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma r_s \eta_{y_s} \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \Sigma r_t \eta_{y_t}}{\Sigma v \eta_y^2 + \Sigma r_s \eta_{y_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{y_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}}, \\ \varphi_I &= - \frac{\Sigma v \eta_z + \Sigma r_s \eta_{z_s} \operatorname{tg} \alpha_{z_s} + \Sigma r_t \eta_{z_t} \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{\Sigma v \eta_z^2 + \Sigma r_s \eta_{z_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{z_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{xx} &= \Sigma v \eta_x^2 + \Sigma r_s \eta_{x_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{x_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1} - f_{III} (\Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma r_s \eta_{x_s} + \Sigma r_t \eta_{x_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t}) \\ M_{yy} &= \Sigma v \eta_y^2 + \Sigma r_s \eta_{y_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{y_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1} + f_{II} (\Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma r_s \eta_{y_s} \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \Sigma r_t \eta_{y_t}) \\ M_{zz} &= \Sigma v \eta_z^2 + \Sigma r_s \eta_{z_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{z_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1} + f_I (\Sigma v \eta_z + \Sigma r_s \eta_{z_s} \operatorname{tg} \alpha_{z_s} + \Sigma r_t \eta_{z_t} \operatorname{tg} \alpha_{z_t}). \end{aligned} \right\} \quad (148a)$$

Udtrykkene for Pæletrykkene bliver ligeledes ganske som de i § 38 angivne, men skal alligevel anføres her:

For den oprindelige Pæl:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_3 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x - \varphi_{III} v \eta_x}{\Sigma P_x} + Q_2 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y + \varphi_{II} v \eta_y}{\Sigma P_y} + Q_1 \frac{v + \varphi_I v \eta_z}{\Sigma P_z} \\ \Sigma P_x &= \Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_s + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t}) - \varphi_{III} (\Sigma \eta_x v \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma r_s \eta_{x_s} + \Sigma r_t \eta_{x_t} \operatorname{tg} \alpha_{x_t}) \\ \Sigma P_y &= \Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{y_s} + r_t) + \varphi_{II} (\Sigma \eta_y v \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma r_s \eta_{y_s} \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \Sigma r_t \eta_{y_t}) \\ \Sigma P_z &= \Sigma (v + r_s \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_s} + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) + \varphi_I (\Sigma v \eta_z + \Sigma r_s \eta_{z_s} \operatorname{tg} \alpha_{z_s} + \Sigma r_t \eta_{z_t} \operatorname{tg} \alpha_{z_t}). \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Udtrykket for Momenternes Bidrag til Pæletrykkene er det samme som i § 31; for 1. og 2. tænkte Pæl gælder det i § 38 anførte.

For 1. tænkte Pæl findes:

$$T_s \cos \alpha_s = Q_3 \frac{r_s - \varphi_{III} r_s \eta_{x_s}}{\Sigma P_x} + Q_2 \frac{r_s \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \varphi_{II} r_s \eta_{y_s}}{\Sigma P_y} + Q_1 \frac{r_s \operatorname{tg} \alpha_{z_s} + \varphi_I r_s \eta_{z_s}}{\Sigma P_z}. \quad (149a)$$

For 2. tænkte Pæl findes:

$$T_t \cos \alpha_t = Q_3 \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t} - \varphi_{III} r_t \eta_{x_t}}{\Sigma P_x} + Q_2 \frac{r_t + \varphi_{II} r_t \eta_{y_t}}{\Sigma P_y} + Q_1 \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t} + \varphi_I r_t \eta_{z_t}}{\Sigma P_z}. \quad (149b)$$

Pælenes Vridningsmomenter bliver:

Den oprindelige Pæl:

$$M_v \cos \alpha = - \frac{I}{F} \cdot \frac{s_2}{s_1} v \left\{ M_3 \frac{\operatorname{tg} \alpha_x + \varphi_{II, III} \operatorname{tg} \alpha_y + \varphi_{I, III}}{M_{xx} + \varphi_{II, III} M_{xy} + \varphi_{I, III} M_{xz}} \right. \\ \left. + M_2 \frac{\varphi_{III, I} \operatorname{tg} \alpha_x + \operatorname{tg} \alpha_y + \varphi_{I, II}}{\varphi_{III, II} M_{xy} + M_{yy} + \varphi_{I, II} M_{yz}} + M_1 \frac{\varphi_{III, I} \operatorname{tg} \alpha_x + \varphi_{II, I} \operatorname{tg} \alpha_y + 1}{\varphi_{III, I} M_{xz} + \varphi_{II, I} M_{yz} + M_{zz}} \right\} \quad (150)$$

For 1. tænkte Pæl:

$$M_{v_s} \cos \alpha_s = - \frac{1}{12} r_s s_1^2 \left\{ M_3 \frac{1 + \varphi_{II, III} \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \varphi_{I, III} \operatorname{tg} \alpha_{z_s}}{M_{xx} + \varphi_{II, III} M_{xy} + \varphi_{I, III} M_{xz}} \right. \\ \left. + M_2 \frac{\varphi_{III, II} + \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \varphi_{I, II} \operatorname{tg} \alpha_{z_s}}{\varphi_{III, II} M_{xy} + M_{yy} + \varphi_{I, II} M_{yz}} + M_1 \frac{\varphi_{III, I} + \varphi_{II, I} \operatorname{tg} \alpha_{y_s} + \operatorname{tg} \alpha_{z_s}}{\varphi_{III, I} M_{xz} + \varphi_{II, I} M_{yz} + M_{zz}} \right\} \quad (150 a)$$

For 2. tænkte Pæl:

$$M_{v_t} \cos \alpha_t = - \frac{1}{12} r_t s_1^2 \left\{ M_3 \frac{\operatorname{tg} \alpha_{x_t} + \varphi_{II, III} + \varphi_{I, III} \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{M_{xx} + \varphi_{II, III} M_{xy} + \varphi_{I, III} M_{xz}} \right. \\ \left. + M_2 \frac{\varphi_{III, II} \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + 1 + \varphi_{I, II} \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{\varphi_{III, II} M_{yx} + M_{yy} + \varphi_{I, II} M_{yz}} + M_1 \frac{\varphi_{III, I} \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + \varphi_{II, I} + \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{\varphi_{III, I} M_{xz} + \varphi_{II, I} M_{zy} + M_{zz}} \right\} \quad (150 b)$$

De resulterende Bøjningsmomenter, M_u i Pælens nederste og M_o i Pælens øverste Punkt, er:

I 1. tænkte Pæls Plan:

$$M_u = M_{v_t} + T_s \frac{s_1}{2},$$

$$M_o = M_{v_t} - T_s \frac{s_1}{2}.$$

I 2. tænkte Pæls Plan:

$$M_u = -M_{v_s} + T_t \frac{s_1}{2},$$

$$M_o = -M_{v_s} - T_t \frac{s_1}{2}.$$

(150 c)

Pælen faar da Tryk foroven i den Side, som vender mod den paagældende tænkte Pæl.

§ 45. **Specielle Tilfælde.** Angaaende de i §§ 33 og 39 anførte specielle Tilfælde 1, 2 og 3 er der her intet nyt at tilføje udover det i de nævnte Paragraffer anførte; de tænkte Pæle behandles paa ganske samme Maade her som der; blot skal man nu tilføje Pælenes Vridningsmodstande.

4. Hovedakserne er parallelle med de oprindelige Koordinataksler, og en ren Forskydning i en Hovedakse giver en ren Kraft; Momenthovedsystemet falder sammen med Forskydningshovedsystemet. Betingelserne for, at Hovedakserne er parallelle med Koordinatakslerne, er:

$$\begin{aligned}\Sigma(v - r_s) \operatorname{tg} \alpha_x + \Sigma r_l \operatorname{tg} \alpha_{z_l} \operatorname{tg} \alpha_{x_l} &= 0; \quad \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma r_l \operatorname{tg} \alpha_{z_l} = 0 \\ \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + \Sigma r_l \operatorname{tg} \alpha_{x_l} &= 0.\end{aligned}\quad (151)$$

Hovedaksernes Beliggenhed bestemmes af nedenstaaende Ligninger:

$$\begin{aligned}y_{III} &= \frac{\Sigma(yv \operatorname{tg}^2 \alpha_x + (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) r_s + (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) r_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l}) - \Sigma(xv \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) r_l \operatorname{tg} \alpha_{x_l})}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_s + r_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})} \\ z_{III} &= - \frac{\Sigma(xv \operatorname{tg} \alpha_x + r_s(s_a - (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) \operatorname{tg} \alpha_x)) + \Sigma r_l(s_a \operatorname{tg} \alpha_{x_l} + (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) \operatorname{tg} \alpha_{z_l})}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_s + r_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_l})} \\ x_{II} &= \frac{\Sigma(xv \operatorname{tg}^2 \alpha_y + (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) r_l) - \Sigma(yv \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) r_l \operatorname{tg} \alpha_{x_l})}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_l)} \\ z_{II} &= - \frac{\Sigma(yv \operatorname{tg} \alpha_y + r_l(s_a + (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) \operatorname{tg} \alpha_{z_l}))}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_l)} \\ x_I &= \frac{\Sigma(xv - r_s(s_a - (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) \operatorname{tg} \alpha_x) \operatorname{tg} \alpha_x) + \Sigma r_l(s_a \operatorname{tg} \alpha_{x_l} + (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) \operatorname{tg} \alpha_{z_l}) \operatorname{tg} \alpha_{z_l}}{\Sigma(v + r_s \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_l})} \\ y_I &= \frac{\Sigma(yv + r_s(y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) \operatorname{tg}^2 \alpha_x) + \Sigma r_l(s_a + (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) \operatorname{tg} \alpha_{z_l})}{\Sigma(v + r_s \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_l})}\end{aligned}\quad (152)$$

For de i § 39 definerede Størrelser η_x , η_y og η_z findes:

$$\begin{aligned}\eta_x &= y + z_{II} \operatorname{tg} \alpha_y - y_I; \quad \eta_y = x + z_{III} \operatorname{tg} \alpha_x - x_I; \quad \eta_z = (y - y_{III}) \operatorname{tg} \alpha_x - (x - x_{II}) \operatorname{tg} \alpha_y; \\ \eta_{x_s} &= -\operatorname{tg} \alpha_x (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y - y_I); \quad \eta_{y_s} = z_{III} + s_a - (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x - x_I) \operatorname{tg} \alpha_x; \quad \eta_{z_s} = y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y - y_{III}; \\ \eta_{x_t} &= z_{II} + s_a + (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y - y_I) \operatorname{tg} \alpha_z; \quad \eta_{y_t} = (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x - x_I) \operatorname{tg} \alpha_z + (z_{III} + s_a) \operatorname{tg} \alpha_x; \\ \eta_{z_t} &= (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y - y_{III}) \operatorname{tg} \alpha_x - (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x - x_{II});\end{aligned}$$

Inertimomenterne bliver da:

$$\begin{aligned}I_x &= \Sigma v \eta_y^2 + \Sigma r_s \eta_{y_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{y_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1} \\ I_y &= \Sigma v \eta_x^2 + \Sigma r_s \eta_{x_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{x_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1} \\ I_z &= \Sigma v \eta_z^2 + \Sigma r_s \eta_{z_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{z_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}.\end{aligned}$$

(153)

Pæletrykkene bliver da:

Den oprindelige Pæl:

$$\begin{aligned}P \cos \alpha &= Q_3 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_s + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})} + Q_2 \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_t)} \\ &+ Q_1 \frac{v}{\Sigma (v + r_s \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})} - M_x \frac{v \eta_x}{I_x} + M_y \frac{v \eta_y}{I_y} + M_z \frac{v \eta_z}{I_z}.\end{aligned}\quad (154)$$

1. tænkte Pæl:

$$\begin{aligned}T_s \cos \alpha_x &= Q_3 \frac{r_s}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_s + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})} \\ &- Q_1 \frac{r_s \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma (v + r_s \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})} - M_x \frac{r_s \eta_{x_s}}{I_x} + M_y \frac{r_s \eta_{y_s}}{I_y} + M_z \frac{r_s \eta_{z_s}}{I_z}.\end{aligned}\quad (154a)$$

2. tænkte Pæl:

$$\begin{aligned}T_t \cos \alpha_t &= Q_3 \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t}}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_s + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{x_t})} + Q_2 \frac{r_t}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_t)} \\ &+ Q_1 \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{\Sigma (v + r_s \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t})} - M_x \frac{r_t \eta_{x_t}}{I_x} + M_y \frac{r_t \eta_{y_t}}{I_y} + M_z \frac{r_t \eta_{z_t}}{I_z}.\end{aligned}\quad (154b)$$

Pælenes Vridningsmomenter er:

Oprindelig Pæl:

$$M_v \cos \alpha = -\frac{I}{F} \cdot \frac{s_2}{s_1} v \left(M_x \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{I_x} + M_y \frac{\operatorname{tg} \alpha_y}{I_y} + M_z \frac{1}{I_z} \right)$$

1. tænkte Pæl:

$$M_{v_s} \cos \alpha_x = -\frac{1}{12} r_s s_1^2 \left(M_x \frac{1}{I_x} - M_z \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{I_z} \right)$$

2. tænkte Pæl:

$$M_{v_t} \cos \alpha_t = -\frac{1}{12} r_t s_1^2 \left(M_y \frac{\operatorname{tg} \alpha_{x_t}}{I_x} + M_y \frac{1}{I_y} + M_z \frac{\operatorname{tg} \alpha_{x_t}}{I_z} \right)$$

(155)

Angaaende de resulterende Bøjningsmomenter i Pælene, se § 44.

§ 46. **Eksempel.** Som Eksempel paa Beregning af en Pille med Pæle, der er indspændt baade foroven og forneden, vælges samme Pille, som er beregnet i § 34 og § 40.

En Del af de i § 40 anførte Kolonner kan anvendes direkte her, og vil derfor ikke blive gentaget.

Vi sætter her

$$s_a = 1,00; \quad r_s = r_t = 2,00.$$

Man finder af Tabellen:

$$\begin{aligned} y_{III} &= + 0,055 \text{ m}; & z_{III} &= + 5,14 \text{ m} \\ x_{II} &= - 0,051 \text{ m}; & z_{II} &= + 2,160 \text{ m} \\ x_I &= - 0,140 \text{ m}; & y_I &= + 0,143 \text{ m}. \end{aligned}$$

$\frac{EI}{s_1}$ sætter vi her lig 1 pr. Pæl, saaledes at $\Sigma \frac{EI}{s_1} = 14$.

Man finder da:

$$\begin{aligned} I_x &= 545,4 + 1,4 + 311,0 + 14 = 871,8 \\ I_y &= 2636 + 1174 + 2,7 + 14 = 3826,7 \\ I_z &= 169,6 + 32,8 + 132,9 + 14 = 349,3. \end{aligned}$$

Pæl Nr.	$s_a \operatorname{tg} a_x$	$s_a \operatorname{tg} a_y$	$r_s(y - s_a \operatorname{tg} a_y)$	$r_s(y - s_a \operatorname{tg} a_y) \operatorname{tg}^2 a_x$	$r_s(s_a - x - s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg} a_x$	$r_s(s_a - x - s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg} a_x$	$r_l(x - s_a \operatorname{tg} a_x)$	$r_l(x - s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg} a_{x_l}$	$r_l(y - s_a \operatorname{tg} a_y) \operatorname{tg} a_{x_l}$	$r_l(y - s_a \operatorname{tg} a_y) \operatorname{tg}^2 a_{x_l}$	$r_l(s_a \operatorname{tg} a_x) + (x - s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg} a_{x_l}$	$r_l(s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg} a_{x_l} + (x - s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg}^2 a_{x_l}$	$r_l(s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg} a_{x_l} + (x - s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg}^2 a_{x_l}$	$r_l(s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg} a_{x_l} + (x - s_a \operatorname{tg} a_x) \operatorname{tg}^2 a_{x_l}$
1	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	-2,50	-0,28	+4,22	+1,41	-6,67	+0,500	+0,188	-0,014	+1,350	-0,304	+2,281	-0,514
2	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	+2,50	+0,28	+4,22	+1,41	-6,67	+0,500	-0,188	+0,014	-1,350	-0,304	+2,281	+0,514
3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	+2,50	+0,28	-0,22	+0,07	+6,67	-0,500	-0,188	+0,014	+1,350	+0,304	+2,281	+0,514
4	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	-2,50	-0,28	-0,22	+0,07	+6,67	-0,500	+0,188	-0,014	-1,350	+0,304	+2,281	-0,514
5	0	$+\frac{1}{4}$	-2,50	0	+2,00	0	-4,00	0	0	0	+1,000	-0,250	+2,265	-0,656
6	0	$-\frac{1}{4}$	+2,50	0	+2,00	0	-4,00	0	0	0	-1,000	-0,250	+2,265	+0,656
7	0	$-\frac{1}{4}$	+2,50	0	+2,00	0	+4,00	0	0	0	+1,000	+0,250	+2,265	+0,656
8	0	$+\frac{1}{4}$	-2,50	0	+2,00	0	+4,00	0	0	0	-1,000	+0,250	+2,265	-0,656
9	0	0	-2,00	0	+2,00	0	-2,00	0	0	0	0	0	+2,00	0
10	0	0	0	0	+2,00	0	-2,00	0	0	0	0	0	+2,00	0
11	0	0	+2,00	0	+2,00	0	-2,00	0	0	0	0	0	+2,00	0
12	0	0	0	0	+2,00	0	0	0	0	0	0	0	+2,00	0
13	0	0	+2,00	0	+2,00	0	0	0	0	0	0	0	+2,00	0
14	0	0	+2,00	0	+2,00	0	+2,00	0	0	0	0	0	+2,00	0
Sum			+4,00	0	+28,00	+2,96	-4,00	0	0	0	0	0	+31,824	0

Pæl Nr.	η_x	η_{x_s}	η_{x_t}	$v\eta_x^2$	$r_s\eta_{x_s}^2$	$r_t\eta_{x_t}^2$	η_y	η_{y_s}	η_{y_t}	$v\eta_y^2$	$r_s\eta_{y_s}^2$	$r_t\eta_{y_t}^2$	η_z	η_{z_s}	η_{z_t}	$v\eta_z^2$	$r_s\eta_{z_s}^2$	$r_t\eta_{z_t}^2$
1	-0,603	+0,464	+3,471	36,3	0,43	24,1	-1,177	+7,204	+0,258	132	103,5	0,13	+0,385	-1,305	+3,482	14,8	3,4	24,2
2	+0,317	-0,369	+3,409	10,0	0,27	23,2	-1,147	+7,204	-0,258	132	103,5	0,13	-0,422	+1,195	+3,474	17,8	2,9	24,1
3	+0,317	+0,369	+3,409	10,0	0,27	23,2	+1,427	+7,298	+0,320	204	106,5	0,21	+0,448	+1,195	-3,372	20,2	2,9	22,7
4	-0,603	-0,464	+3,474	36,3	0,43	24,1	+1,427	+7,298	-0,320	204	106,5	0,21	-0,411	-1,305	-3,380	16,8	3,4	22,7
5	-0,603	0	+3,508	36,3	0	24,6	-1,860	+6,140	+0,465	346	75,4	0,43	+0,487	-1,305	+1,949	23,7	3,4	7,6
6	+0,317	0	+3,437	10,0	0	23,6	-1,860	+6,140	-0,465	346	75,4	0,43	-0,487	+1,195	+1,949	23,7	2,9	7,6
7	+0,317	0	+3,437	10,0	0	23,6	+2,140	+6,140	+0,535	458	75,4	0,57	+0,513	+1,195	-2,051	26,3	2,9	8,4
8	-0,603	0	+3,508	36,3	0	24,6	+2,140	+6,140	-0,535	458	75,4	0,57	-0,513	-1,305	-2,051	26,3	3,4	8,4
9	-1,143	0	+3,160	131,0	0	20,0	-0,860	+6,140	0	74	75,4	0	0	-1,055	+0,949	0	2,2	1,8
10	-0,143	0	+3,160	2,1	0	20,0	-0,860	+6,140	0	74	75,4	0	0	-0,055	+0,949	0	0	1,8
11	+0,857	0	+3,160	75,0	0	20,0	-0,860	+6,140	0	74	75,4	0	0	+0,945	+0,949	0	1,8	1,8
12	-0,143	0	+3,160	2,1	0	20,0	+0,140	+6,140	0	2	75,4	0	0	-0,055	-0,051	0	0	0
13	+0,857	0	+3,160	75,0	0	20,0	+0,140	+6,140	0	2	75,4	0	0	+0,945	-0,051	0	1,8	0
14	+0,857	0	+3,160	75,0	0	20,0	+1,140	+6,140	0	130	75,4	0	0	+0,945	+0,949	0	1,8	1,8
Sum				545,4	1,40	311,0				2636	1174,0	2,68				169,6	32,8	132,9

For de oprindelige Pæle findes:

Pæl Nr.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	+ 0,461	+ 0,321	+ 0,0715	+ 0,069	— 0,030	+ 0,110
2	+ 0,461	— 0,321	+ 0,0715	— 0,036	— 0,030	— 0,121
3	— 0,461	— 0,321	+ 0,0715	— 0,036	+ 0,037	+ 0,129
4	— 0,461	+ 0,321	+ 0,0715	+ 0,064	+ 0,037	— 0,118
5	0	+ 0,321	+ 0,0715	+ 0,069	— 0,049	+ 0,140
6	0	— 0,321	+ 0,0715	— 0,036	— 0,049	— 0,140
7	0	— 0,321	+ 0,0715	— 0,036	+ 0,056	+ 0,148
8	0	+ 0,321	+ 0,0715	+ 0,069	+ 0,056	— 0,148
9	0	0	+ 0,0715	+ 0,131	— 0,022	0
10	0	0	+ 0,0715	+ 0,017	— 0,022	0
11	0	0	+ 0,0715	— 0,098	— 0,022	0
12	0	0	+ 0,0715	— 0,017	+ 0,004	0
13	0	0	+ 0,0715	— 0,098	+ 0,004	0
14	0	0	+ 0,0715	— 0,098	+ 0,004	0

B_1 — B_6 er Koefficienterne til Belastningen i Udtrykket for Pæletrykkenes lodrette Komposanter.

Pæletrykkene i de tænkte Pæle og Vridningsmomenter findes paa ganske analog Maade.

TREDIE AFSNIT.

Plane Pælegrupper som specielt Tilfælde af rumlige Pælegrupper.

I. Almindelig Teori.

§ 47. **Definition.** Ved de i 1. Afsnit behandlede plane Pælegrupper forstod vi saadanne, hvis Pæle var parallelle med og placeret symmetrisk om Kraftplanen.

Imidlertid ser man umiddelbart, at det, der i Virkeligheden betinger en Pælegruppes Behandling som plan Pælegruppe med Hensyn til en bestemt Kraftplan, er, at enhver Bevægelse svarende til Kræfter i Kraftplanen foregaar om Akser vinkelret paa denne.

Vi vil derfor fastslaa følgende almindelige Definition:

At en Pælegruppe er plan overfor en bestemt Kraftplan vil sige, at en vilkaarlig Kraft i denne fremkalder en Drejning om en Akse vinkelret paa Kraftplanen; Bevægelserne og Kræfterne ligger saaledes i samme Plan.

I forrige Afsnit har vi allerede været inde paa denne udvidede Definition af en plan Pælegruppe. Vi saa der, i § 28, at der findes tre og kun tre Parallelforskydninger, for hvilke den tilsvarende Kraft gaar i Forskydningens Retning; disse tre Kræfters Akser kaldtes Pælegruppens Hovedakser. Og vi fandt, at en hvilkensomhelst Skruebevægelse om de tre Skrueakser, der vinkelret skærer to og to af Hovedakserne, fremkalder en Skruekraft parallel med paagældende Skrueakse; dette gælder dog ikke den Skruebevægelse, der fremkalder et rent Moment, idet dettes Akse kun i specielle Tilfælde er parallel med Skrueaksen. Disse tre Skrueakser kaldtes Pælegruppens Hovedskrueakser, og Systemet kaldtes Forskydningshovedsystemet.

Foruden dette Hovedsystem er der i § 28 omtalt et Moment-

hovedsystem, hvor de tre Hovedakser Retninger var dem, i hvilke et Moment gav en Skruebevægelse parallel med sig selv.

Betingelserne for Muligheden for plan Pælegruppe fandtes at være:

- 1) To Hovedakser maa skære hinanden.
- 2) En ren Kraft i disse to Hovedakser maa svare til en ren Forskydning.
- 3) En ren Vinkeldrejning om den Hovedskrueakse, der skærer vinkelret de to ovennævnte Hovedakser, maa fremkalde et rent Moment parallel med Skrueaksen (d. v. s. at Forskydnings- og Momenthovedsystemerne falder sammen).

Hvis disse Betingelser er opfyldt, vil Pælegruppen være plan med de to hinanden skærende Hovedakser Plan som Kraftplan.

Vi vil nu Punkt for Punkt paavise, hvorledes de i 1. Afsnit beviste Sætninger for Kræfter i Kraftplanen fremtræder som specielle Tilfælde af de i 2. Afsnit beviste almindelige Sætninger.

- a) (1. Afsnit, § 4, S. 49): Enhver til en Parallelforskydning svarende Kraft gaar gennem et fast Punkt, Kraftplanens O-Punkt.

Dette er en direkte Følge af de ovenfor gjorte Forudsætninger 1 og 2, ifølge hvilke de to af Pælegruppens to Hovedakser ligger i Kraftplanen. Hovedakserne, hvis Skæringpunkt er O-Punktet, svarer til de i 1. Afsnit, § 6, Pkt. 3 fundne Hovedakser i plane Pælegrupper.

- b) (1. Afsnit, § 4, S. 49): Naar Pælegruppen paavirkes af et Moment, drejer den sig om en Akse gennem O-Punktet.

Dette fremgaar af de ovenfor gjorte Forudsætninger 2 og 3 for plane Pælegrupper, hvilke Forudsætninger blot giver et specielt Tilfælde af det almindelige rumlige, nemlig det, hvor Hovedkraften i Forskydningshovedsystemet er en ren Kraft, og hvor Moment- og Forskydningshovedsystemerne falder sammen.

- c) (1. Afsnit, § 4, S. 51): Pælegruppens O-Punkt er saaledes beliggende, at Pælenes Inertimoment om en Akse gennem dette Punkt er Minimum, d. v. s. mindre end om en hvilken som helst anden dermed parallel Akse.

Dette er i 2. Afsnit, § 31, Side 131, bevist for Inertimomentet om en Hovedskrueakse i en vilkaarlig rumlig Pælegruppe.

- d) (1. Afsnit, § 8, S. 57): Kraftlinie og Drejningspunkt er Polar og Antipol med Hensyn til en Ellipse, der har Hovedakser i Pælegruppens Hovedakser, og hvis Hovedakser har Længderne $\sqrt{\frac{I}{R_{II}}}$ og $\sqrt{\frac{I}{R_I}}$.

I 2. Afsnit, § 28, S. 120 har man for en rumlig Pælegruppe fundet, at for de Planer, hvor Skrueaksen for et Moment med Akse vinkelret paa Planen, ligeledes staar vinkelret paa Planen, d. v. s. for de tre Hovedplaner i Momenthovedsystemet, er Kraftretning og den dertil svarende Fælleslinie, d. v. s. Retning til Drejningspunkt, konjugerede Diametre i en Ellipse med Halvakser:

$$\sqrt{\frac{y_v''}{S_M}} \text{ og } \sqrt{\frac{y_v'}{S_M}};$$

da y_v'' og y_v' er Parallelforskydningerne, der svarer til Kraften 1 henholdsvis i II. og I. Hovedakse, kan man sætte:

$$y_v'' = 1 : R_{II} \text{ og } y_v' = 1 : R_I,$$

hvor R_{II} og R_I er Kræfterne for Forskydningen 1 i II. og I. Hovedakse, og da S_M er Vinkeldrejningen svarende til Momentet 1, kan man sætte:

$$S_M = 1 : I,$$

hvor I er Pælens Inertimoment om 0-Punktet. De to Halvaksers Længder kan derfor skrives:

$$\sqrt{\frac{I}{R_{II}}} \text{ og } \sqrt{\frac{I}{R_I}},$$

og den almindelige rumlige Sætning gaar saaledes over i den specielle plane.

- e) (1. Afsnit, § 8, S. 58): Alle de Kræfter, der giver Pæletrykket Nul i en vilkaarlig Pæl, gaar gennem et fast Punkt K , Pælens Antipol med Hensyn til Polarellipsen. Alle Kræfter af samme Størrelse, der tangerer en Cirkel med K som Centrum, fremkalder det samme Pæletryk i Pælen.

Dette fremgaar som specielt plant Tilfælde af det i 2. Afsnit, § 32 anførte, idet Plan EBA, Fig. 57, her repræsenterer Kraftplanen. Punkt K er derfor Skæringspunktet mellem Kraftplanen og vedkommende Pæls Nulakse.

At det faste Punkt K er Pælens Antipol i Polarellipsen fremgaar af den under d) ovenfor omtalte Sætning. Der skal iøvrigt her gøres opmærksom paa de i 2. Afsnit, § 32, S. 138 fundne Nulplaner for de tre Koordinatretninger.

De i 1. Afsnit, § 6 anførte Sætninger 1—6 fremgaar paa følgende Maade af de i 2. Afsnit beviste Sætninger:

- 1) For to paa hinanden vinkelrette Parallelforskydninger er Kræfterne vinkelret paa Bevægelsen lige store. Dette ses af Udtrykkene (78) i § 29; det fremgaar iøvrigt ogsaa direkte af Betti's Sætning.
- 2) Sammenhørende Retninger til Drejningspunkt og Kraftretninger danner involutoriske Liniebundter.

Dette følger af den i § 28 beviste Sætning om Fælleslinier.

- 3) Der findes to paa hinanden vinkelrette Retninger, i hvilke en Parallelforskydning giver en Kraft i sin egen Retning; disse to Retninger kaldes Pælegruppens Hovedakser, og de bestemmes af Ligningen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\sum v \operatorname{tg} \alpha}{\sum v - \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Eksistensen af de to Hovedakser følger direkte af de opstillede Betingelser for plane Pælegrupper.

Ligningen til Bestemmelse af Hovedaksernes Vinkel med Z -Aksen findes for den plane Pælegruppe som specielt Tilfælde af den rumlige ved i Ligning (79), § 30 i 2. Afsnit at sætte $\mu = 0$; herved findes ved Elimination af P :

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\sum v \operatorname{tg} \alpha_x}{\sum v - \sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x}.$$

Denne Ligning ses at være analog med den fra 1. Afsnit anførte.

- 4) Hvis man ud fra O afsætter som Radius vector de til de forskellige Bevægelsesretninger svarende Kræfter, vil man

fremstille en Ellipse, hvis Hovedakser er Pælegruppens Hovedakser.

Da Kraftplanen ifølge de ovenfor angivne Betingelser for plan Pælegruppe indeholder de to Hovedakser, vil Kraftplanen skære den i 2. Afsnit, § 28, S. 113, fundne Ellipsoide i den nævnte Ellipse.

- 5) I en Ellipse med Hovedakser i Pælegruppens Hovedakser og med Halvakser af Længde $\sqrt{R_I}$ og $\sqrt{R_{II}}$ vil konjugerede Diametre være sammenhørende Kraftretninger og Retninger til Drejningspunkt.

Dette fremgaar af den ovenfor under d) nævnte Sætning, idet den der omtalte Ellipse gaar over i den her nævnte ved Multiplikation med $\frac{R_I R_{II}}{I}$.

- 6) Hovedaksernes Retninger og Længder findes lettest grafisk ved Land's Cirkelkonstruktion, idet man gaar ud fra en vandret og en lodret Bevægelse.

Dette følger af det under 3) nævnte. Udtrykket (18) i 1. Afsnit for Kræfterne i de to Hovedakser bliver her:

$$\left. \begin{matrix} R_I \\ R_{II} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\Sigma v + \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Sigma v - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x)^2 + 4 (\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x)^2}.$$

Det er nu eftervist, hvorledes de i 1. Afsnit opstillede Sætninger fremgaar af de almindelige rumlige, der er udledt i 2. Afsnit, og det vil af det følgende fremgaa, at de for plane Pælegrupper opstillede Formler ligeledes er specielle Tilfælde af de i 2. Afsnit fundne.

Den Plan, med Hensyn til hvilken en Pælegruppe er plan, vil vi i det følgende kalde Kraftplanen. Da en plan Pælegruppe i Almindelighed indgaar som en Del af en rumlig, vil vi nedenfor ikke alene opskrive Pæletrykkene for Kræfter i Kraftplanen, men ogsaa for Kræfter udenfor denne.

Tillige vil vi for Kraftplanen angive Sammenhæng mellem Kraft og Drejningspunkt, idet vi baade for Kræfter og Bevægelser i Kraftplanen vil følge Udviklingen i 1. Afsnit, § 4.

For Kræfter udenfor Kraftplanen vil vi benytte det i 2. Afsnit fundne specialiseret paa det foreliggende Tilfælde, saaledes at det følgende vil fremtræde som en Kombination af 1. og 2. Afsnit.

Undersøgelsen vil her ligesom tidligere blive delt i 3 Dele.

- 1) Piller, hvis Pæle er simpelt understøttet foroven og forneden.
- 2) Piller, hvis Pæle er indspændt forneden, simpelt understøttet foroven.
- 3) Piller, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden.

II. Piller, hvis Pæle er simpelt understøttet foroven og forneden.

§ 48. **Sammenhæng mellem Kraft og Drejningspunkt.**
Angaaende Pælenes Vinkler henvises til § 29.

Der tænkes lagt et Koordinatsystem med XZ-Planen i Kraftplanen, og XY-Planen regnes som Pilleunderkant; enhver Bevægelse svarende til en Kraft i Kraftplanen foregaar altsaa om en Akse parallel med Y-Aksen.

Hvis man giver Pillen en Parallelforskydning 1 nedad, vil der fremkaldes en Kraft R' , hvis lodrette Komposant er Σv og hvis vandrette Komposant er $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x$.

R' danner en Vinkel α' med den lodrette, bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma v} \quad (156)$$

og den gaar gennem det Punkt af Pilleunderkanten, der er Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter v .

Hvis man giver Pillen en Parallelforskydning 1 i X-Aksens negative Retning, vil der fremkaldes en Kraft R'' , hvis lodrette Komposant er $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x$, og hvis vandrette Komposant er $\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x$.

R'' danner en Vinkel α'' med den lodrette, bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x}{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x} \quad (156a)$$

og den gaar gennem det Punkt af Pilleunderkanten, der er Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter $v \operatorname{tg} \alpha_x$.

De to Kræfter R' og R'' skærer hinanden i Pælegruppens O-Punkt, og herigennem gaar altsaa de to af Pælegruppens Hovedakser, hvis Vinkler ω med den lodrette bestemmes af Ligningen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma v - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x} = \frac{2}{\cotg \alpha' - \operatorname{tg} \alpha''} \quad (157)$$

ω regnes positiv, naar III. Hovedakse skærer X-Aksen i dens positive Retning.

Koordinaterne til O-Punktet er:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}, \quad \text{hvor } c = x'_0 - x''_0, \\ x_0 &= x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Her er x'_0 Abscissen til R' -Liniens Skæringspunkt med Pilleunderkanten, og x''_0 Abscissen til R'' -Liniens Skæringspunkt med Pilleunderkanten.

Pælegruppens O -Punkt er saaledes beliggende, at Pælenes Inertimoment om en Akse derigennem vinkelret paa Kraftplanen er Minimum af Inertimoment om alle Akser vinkelret paa Kraftplanen.

Hvis man paavirker Pælegruppen med et Moment M , vil Pillen dreje sig om en Akse gennem O -Punktet.

Drejningsvinklen φ bestemmes ved Ligningen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{I_y}, \\ \text{hvor Inertimomentet } I_y \text{ er:} \\ I_y &= \sum v \eta_y^2. \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

η_y er den vandrette Afstand fra Drejningsaksen:

$$\eta_y = x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha_x. \quad (159a)$$

§ 49. Pæletrykkene.

a) Kræfter i Kraftplanen.

Analogt med Ligningen (16) i § 5 findes her:

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\sum v} \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha_x}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{v}{\sum v \operatorname{tg} \alpha_x} \frac{\operatorname{tg} \alpha_x - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M_y \frac{v \eta_y}{I_y}. \quad (160)$$

b) Kræfter udenfor Kraftplanen.

I Fig. 65 er XZ -Planen Kraftplan og I og III de i denne Plan beliggende Hovedakser, hvis Vinkler ω_1 og $\omega_1 + 90^\circ$ findes af ovenstaaende Ligning; II er den tredje Hovedakse. L_1 og L_3 er de to Hovedskruetakser, den tredje Hovedskruetakse er den ovenfor anvendte Akse vinkelret paa Plan XZ gennem I og III's Skæringspunkt, Punkt O .

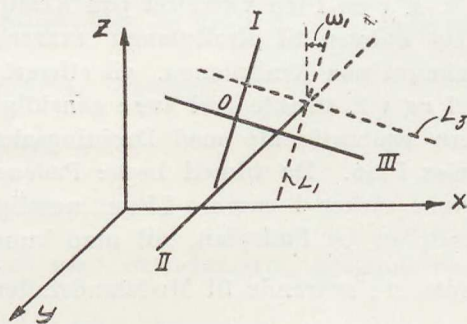


Fig. 65.

Pæletrykket bliver da for en Kraft Q_y i II. Hovedakse, et Moment M_1 i Retning I og et Moment M_3 efter III:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_y \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y} + M_1 \frac{-\sin \omega_1 v \eta_x + \cos \omega_1 v \eta_z}{I_1} \\ &\quad - M_3 \frac{\cos \omega_1 v \eta_x + \sin \omega_1 v \eta_z}{I_3} \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

Koordinaterne x_{II} og z_{II} til L_1 og L_3 's Skæringspunkt er:

$$\left. \begin{aligned} x_{II} &= \frac{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y \cdot x - \Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \cdot y}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y} \\ z_{II} &= -\frac{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_y \cdot y}{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y} \\ \eta_x &= y + z_{II} \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \eta_z = y \operatorname{tg} \alpha_x - (x - x_{II}) \operatorname{tg} \alpha_y, \\ I_1 &= I_z - Z_{xz} \operatorname{tg} \omega_1; \quad I_3 = I_x + Z_{xz} \operatorname{tg} \omega_1, \\ \operatorname{tg} \omega_1 \text{ og } Z_{xz} &\text{ har altid modsat For tegn,} \\ I_z &= \Sigma v \eta_z^2; \quad I_x = \Sigma v \eta_x^2; \quad Z_{xz} = -\Sigma v \eta_x \eta_z. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

III. Piller, hvis Pæle er indspændt forneden, men simpelt understøttet foroven.

§ 50. **Tænkte Pæle.** Angaaende Definitionen af de tænkte Pæle henvises til § 35.

Vi vil her lægge 1. tænkte Pæl parallel med XZ-Planen, altsaa parallel med Kraftplanen. 2. tænkte Pæl og den oprindelige Pæl ligger i en Plan vinkelret paa 1. tænkte Pæl, d. v. s. i en Plan vinkelret paa Kraftplanen.

Da enhver til Kraftplanen svarende Drejningsakse staar vinkelret paa Kraftplanen, vil ethvert Tryk i den oprindelige Pæl og i 2. tænkte Pæl være gensidig proportionale og begge være proportionale med Drejningsaksens Afstand fra de to Pæles Plan. Da tilmed begge Pælenes Komposanter i Kraftplanen virker i samme Linie, nemlig Skæringslinien mellem Kraftplan og Pæleplan, vil man kunne behandle de to Pæle under et; svarende til Modstandstallet $v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha$ for den oprindelige Pæl, vil Modstandstallet for begge Pæle under et være:

$$\left. \begin{aligned} &v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}, \\ \text{eller udtrykt ved den almindelige Pæls Vinkler:} \\ &v + \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_x \operatorname{tg}^2 \alpha_y \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

I de fleste Tilfælde vil Leddet $u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}$ være uden videre Betydning og kan udelades. Hvis 2. tænkte Pæl er parallel med YZ-Planen, er $\operatorname{tg} \alpha_{z_t} = -\operatorname{tg} \alpha_y$; $\operatorname{tg} \alpha_{x_t} = 0$; dette sker, hvis den oprindelige Pæl enten er parallel med XZ-Planen eller med YZ-Planen.

§ 51. **Sammenhæng mellem Kraft og Drejningspunkt.**
Hvis man giver Pillen en Parallelforskydning 1 nedad, vil der fremkaldes en Kraft R' , hvis lodrette Komposant er:

$$\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x),$$

og hvis vandrette Komposant er:

$$\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - u) \operatorname{tg} \alpha_x.$$

Her er $u = \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_x$.

R' danner en Vinkel α' med den lodrette, bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - u) \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x)}, \quad (165)$$

og den gaar gennem det Punkt af Pilleunderkanten, der er Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter $v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x$.

Hvis man giver Pillen en Parallelforskydning 1 i X-Aksens negative Retning, vil der fremkaldes en Kraft R' , hvis lodrette Komposant er:

$$\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - u) \operatorname{tg} \alpha_x,$$

og hvis vandrette Komposant er:

$$\Sigma((v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u).$$

R'' danner en Vinkel α'' med den lodrette, bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\Sigma((v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u)}{\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - u) \operatorname{tg} \alpha_x}. \quad (165a)$$

og den gaar gennem det Punkt af Pilleunderkanten, der er Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter:

$$(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - u) \operatorname{tg} \alpha_x.$$

De to Kræfter R' og R'' skærer hinanden i Pælegruppens O -Punkt, og herigennem gaar altsaa de to af Pælegruppens Hovedakser, hvis Vinkler ω med den lodrette bestemmes af Ligningen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2}{\cotg \alpha' - \operatorname{tg} \alpha''}. \quad (166)$$

ω regnes positiv, naar III. Hovedakse skærer X -Aksen i dennes positive Retning.

Koordinaterne til O -Punktet er:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}, \text{ hvor } c = x'_0 - x''_0, \\ x_0 &= x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

Her er x'_0 Abscissen til R' -Liniens Skæringspunkt med Pilleunderkanten, og x''_0 Abscissen til R'' -Liniens Skæringspunkt med Pilleunderkanten.

Hvis man paavirker Pælegruppen med et Moment M , vil Pillen dreje sig om en Akse gennem O -Punktet.

Drejningsvinklen φ bestemmes ved Ligningen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{I_y}, \\ \text{hvor Inertimomentet:} \\ I_y &= \Sigma (v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \eta_y^2 + \Sigma u \eta_{ys}^2. \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

η_y er den vandrette Afstand fra Drejningsaksen:

$$\eta_y = x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha_x. \quad (168a)$$

η_{ys} er den lodrette Afstand fra Drejningsaksen til 1. tænkte Pæl:

$$\eta_{ys} = z_0 - (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha_x. \quad (168b)$$

§ 52. Pæletrykkene.

a) Kræfter i Planen.

Analogt med Ligningerne (35) og (37) findes her:
Oprindelig Pæl:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_z \frac{v}{\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha_x}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} \\ &+ Q_x \frac{v}{\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - u) \operatorname{tg} \alpha_x} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_x - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{v \eta_y}{I_y} \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

1. tænkte Pæl (Komposant efter X-Aksen):

$$\left. \begin{aligned} T_s \cos \alpha_x &= -Q_z \frac{u}{\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' \operatorname{tg} \alpha_x + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} \\ &+ Q_x \frac{u}{\Sigma(v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - u) \operatorname{tg} \alpha_x} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha_x + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M_y \frac{u \eta_{y_s}}{I_y} \end{aligned} \right\} \quad (169a)$$

Tillige findes for 2. tænkte Pæl (Komposant efter Y-Aksen):

$$T_t \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} = P \cos \alpha \frac{u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{v} \quad (169b)$$

b) Kræfter udenfor Kraftplanen.

For saadanne Kræfter maa den oprindelige Pæl og 2. tænkte Pæl regnes hver for sig. Iøvrigt henvises til § 49 og Fig. 65.

Man finder da:

For den oprindelige Pæl:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_y \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)} + M_1 \frac{-\sin \omega_1 v \eta_x + \cos \omega_1 v \eta_z}{I_1} \\ &- M_3 \frac{\cos \omega_1 v \eta_x + \sin \omega_1 v \eta_z}{I_3} \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Her er:} \quad u_t &= \frac{3EI \cos^3 \alpha}{s_1^3 \cos^2 \alpha_x}, \\ I_x &= \Sigma v \eta_x^2 + \Sigma u \eta_{x_s}^2 + \Sigma u_t \eta_{x_t}^2; \quad I_z = \Sigma v \eta_z^2 + \Sigma u \eta_{z_s}^2 + u_t \eta_{z_t}^2, \\ Z_{xz} &= -\Sigma v \eta_x \eta_z - \Sigma u \eta_{x_s} \eta_{z_s} - \Sigma u_t \eta_{x_t} \eta_{z_t}, \\ I_1 &= I_z - Z_{xz} \operatorname{tg} \omega_1; \quad I_3 = I_x + Z_{xz} \operatorname{tg} \omega_1, \\ x_{II} &= \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)x + \Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t})y}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)}, \\ z_{II} &= -\frac{\Sigma(v \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t})y}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)}, \\ \eta_x &= y + z_{II} \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \eta_z = y \operatorname{tg} \alpha_x - (x - x_{II}) \operatorname{tg} \alpha_y, \\ \eta_{x_s} &= -y \operatorname{tg} \alpha_x; \quad \eta_{z_s} = y, \\ \eta_{x_t} &= y \operatorname{tg} \alpha_{z_t} + z_{II}; \quad \eta_{z_t} = y \operatorname{tg} \alpha_{x_t} - (x - x_{II}), \\ \operatorname{tg} \alpha_{x_t} &= -\sin \alpha_x \cos \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \operatorname{tg} \alpha_{z_t} = -\cos^2 \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y. \end{aligned} \right\} \quad (170a)$$

Ang. Definition af η_{x_s} , η_{z_s} o. s. v. se § 38.

For 1. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} T_s \cos \alpha_x &= M_1 \frac{-\sin \omega_1 u \eta_{x_s} + \cos \omega_1 u \eta_{z_s}}{I_1} \\ &\quad - M_3 \frac{\cos \omega_1 u \eta_{x_s} + \sin \omega_1 u \eta_{z_s}}{I_3} \end{aligned} \right\} \quad (170b)$$

For 2. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} T_t \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} &= Q_y \frac{u_t}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)} + M_1 \frac{-\sin \omega_1 u_t \eta_{x_t} + \cos \omega_1 u_t \eta_{z_t}}{I_1} \\ &\quad - M_3 \frac{\cos \omega_1 u_t \eta_{x_t} + \sin \omega_1 u_t \eta_{z_t}}{I_3} \end{aligned} \right\} \quad (170c)$$

IV. Piller, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden.

§ 53. **Tænkte Pæle.** Angaaende Definitionen af de tænkte Pæle henvises til § 41; man vil der se, at der indføres to paa hinanden vinkelrette tænkte Pæle, der skærer den oprindelige Pæl vinkelret i dennes Midtpunkt.

Som i § 50 for Pæle, der kun var indspændt i den ene Ende, vil vi her lægge 1. tænkte Pæl parallel med XZ-Planen, og Fremgangsmaaden ved Beregningen er da helt den samme i § 50, naar man blot stadig tager Pælens Vridningsmomenter med. Hvis en Pæl er parallel med XZ-Planen, Kraftplanen, vil 2. tænkte Pæl staa vinkelret paa denne Plan, og Vridningsmodstanden af denne 2. tænkte Pæl vil da være det i § 20, 1. Afsnit, saakaldte Pælens Drejningsmoment. Saaledes indgaar dette, som i 1. Afsnit fremkom uden nogen nærmere Tilknnytning til hele Systemet, som et naturligt Led heri, og atter her ser man, at de i 1. Afsnit behandlede plane Pælegrupper er specielt Tilfælde af en rumlig Pælegruppe.

§ 54. **Sammenhæng mellem Kraft og Drejningspunkt.** Hvis man giver Pillen en Parallelforskydning 1 nedad, vil der fremkaldes en Kraft R' , hvis lodrette Komposant er:

$$\Sigma (v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x),$$

og hvis vandrette Komposant er

$$\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x.$$

R' danner en Vinkel α' med den lodrette bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x)}. \quad (171)$$

og den gaar gennem det Punkt af Pilleunderkanten, der ligger et Stykke:

$$s'_0 = \frac{\Sigma s_a r \operatorname{tg} \alpha_x (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_x)}{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} \quad (171 a)$$

i X-Aksens negative Retning fra Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter:

$$v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x.$$

Hvis man giver Pillen en Parallelforskydning 1 i X-Aksens negative Retning, vil der fremkaldes en Kraft R'' , hvis lodrette Komposant er:

$$\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x,$$

og hvis vandrette Komposant er:

$$\Sigma((v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r).$$

R'' danner en Vinkel α'' med den lodrette, bestemt ved Ligningen:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\Sigma((v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r)}{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x}, \quad (171 b)$$

og den gaar gennem det Punkt af Pilleunderkanten, der ligger et Stykke:

$$s''_0 = \frac{\Sigma r s_a (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_x)}{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x} \quad (171 c)$$

i X-Aksens positive Retning fra Tyngdepunktet for de lodrette Kræfter:

$$(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x.$$

Hovedaksernes Retninger er bestemt af Ligningen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2}{\cotg \alpha' - \operatorname{tg} \alpha''}. \quad (172)$$

Koordinaterne til O-Punkter er:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \frac{c - (s'_0 + s''_0)}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} \\ x_0 &= x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

Betegnelserne er defineret i § 51.

Hvis man paavirker Pælegruppen af et Moment M , vil Pilen dreje sig om en Akse gennem O -Punktet.

Drejningsvinklen φ bestemmes af Ligningen:

$$\varphi = \frac{M}{I_y}, \quad (174)$$

hvor Inertimomentet I_y bestemmes ved:

$$I_y = \Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \eta_y^2 + \Sigma r \eta_{y_s}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}. \quad (174a)$$

Her er:

$$\begin{aligned} \eta_y &= x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha_x \\ \eta_{y_s} &= z_0 + s_a - (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x - x_0) \operatorname{tg} \alpha_x; \quad s_a = \frac{1}{2} s_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$

§ 55. Pæletrykkene.

a) Kræfter i Planen.

Analogt med Ligningerne (61) og (63) i § 22 findes her:

Oprindelig Pæl:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_z \frac{v}{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha_x}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} \\ &+ Q_x \frac{v}{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_x - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M_y \frac{v \eta_y}{I_y}. \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

1. tænkte Pæl (Komposant efter X-Aksen):

$$\left. \begin{aligned} T_s \cos \alpha_x &= -Q_z \frac{r}{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha_x + 1}{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha'} \\ &+ Q_x \frac{r}{\Sigma(v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha_x + 1}{\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha'} + M_y \frac{r \eta_{y_s}}{I_y}. \end{aligned} \right\} \quad (175a)$$

Tillige findes for 2. tænkte Pæl (Komposant efter Y-Aksen):

$$T_t \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} = P \cos \alpha \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{v}. \quad (175b)$$

Pælens Vridningsmomenter bliver:

Oprindelige Pæle:

$$M_v \cos \alpha = - \frac{I}{F} \frac{s_2}{s_1} v \frac{M_y}{I_y} \operatorname{tg} \alpha_y. \quad \left. \vphantom{\frac{I}{F} \frac{s_2}{s_1} v \frac{M_y}{I_y} \operatorname{tg} \alpha_y} \right\} (175c)$$

2. tænkte Pæl:

$$M_{v_l} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} = - \frac{1}{1.2} r_l s_1^2 \frac{M_y}{I_y}.$$

b) Kræfter udenfor Kraftplanen:

Oprindelig Pæl:

$$P \cos \alpha = Q_y \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_l)} + M_1 \frac{-\sin \omega_1 v \eta_{lx} + \cos \omega_1 v \eta_{lz}}{I_1} - M_3 \frac{\cos \omega_1 v \eta_{lx} + \sin \omega_1 v \eta_{lz}}{I_3}. \quad (176)$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \Sigma v \eta_{lx}^2 + \Sigma r_l \eta_{lx}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1} \\ I_z &= \Sigma v \eta_{lz}^2 + \Sigma r_l \eta_{lz}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}; \\ Z_{xz} &= -\Sigma v \eta_{lx} \eta_{lz} - \Sigma r_l \eta_{lx} \eta_{lz} - \Sigma r_l \eta_{lx} \eta_{lz} \\ I_1 &= I_z - \operatorname{tg} \omega_1 Z_{xz}; \quad I_3 = I_x + \operatorname{tg} \omega_1 Z_{xz} \\ x_{II} &= \frac{\Sigma(x_v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_l(x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x)) - \Sigma(y v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y - (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) r_l \operatorname{tg} \alpha_{xl})}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_l)} \\ z_{II} &= - \frac{\Sigma(y v \operatorname{tg} \alpha_y + r_l(s_a + (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) \operatorname{tg} \alpha_{zl}))}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_l)} \\ \eta_{lx} &= y + z_{II} \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \eta_{lz} = y \operatorname{tg} \alpha_x - (x - x_{II}) \operatorname{tg} \alpha_y \\ \eta_{lx_s} &= -\operatorname{tg} \alpha_x (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y); \quad \eta_{lz_s} = y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y. \\ \eta_{x_l} &= (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) \operatorname{tg} \alpha_{zl} + z_{II} + s_a; \\ \eta_{z_l} &= (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) \operatorname{tg} \alpha_{xl} - (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x - x_{II}). \end{aligned} \right\} (177)$$

For 1. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} T_s \cos \alpha_x &= M_1 \frac{-\sin \omega_1 r \eta_{lx_s} + \cos \omega_1 r \eta_{lz_s}}{I_1} \\ &- M_3 \frac{\cos \omega_1 r \eta_{lx_s} + \sin \omega_1 r \eta_{lz_s}}{I_3}. \end{aligned} \right\} (178)$$

For 2. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned} T_l \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} &= Q_y \frac{r_l}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_l)} + M_1 \frac{-\sin \omega_1 r_l \eta_{lx_l} + \cos \omega_1 r_l \eta_{lz_l}}{I_1} \\ &- M_3 \frac{\cos \omega_1 r_l \eta_{lx_l} + \sin \omega_1 r_l \eta_{lz_l}}{I_3}. \end{aligned} \right\} (178a)$$

Pælernes Vridningsmomenter bliver:

Den oprindelige Pæl:

$$M_v \cos \alpha = -\frac{I}{F} \cdot \frac{s_2}{s_1} v \left(M_1 \frac{1 + \sin \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_x + \cos \omega_1}{I_1} + M_3 \frac{\cos \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_x - \sin \omega_1}{I_3} \right).$$

For 1. tænkte Pæl:

$$M_{v_s} \cos \alpha_x = -\frac{1}{12} r s_1^2 \left(M_1 \frac{1 + \sin \omega_1 - \cos \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_x}{I_1} + M_3 \frac{\cos \omega_1 + \sin \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_x}{I_3} \right). \quad (178)$$

For 2. tænkte Pæl:

$$\frac{M_{v_l} \cos \alpha}{\cos \alpha_x} = -\frac{1}{12} r_l s_1^2 \left(\frac{\sin \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_{x_l} + \cos \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_{z_l}}{I_1} + M_3 \frac{\cos \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_{x_l} - \sin \omega_1 \operatorname{tg} \alpha_{z_l}}{I_3} \right).$$

§ 56. **Eksempel.** Pælene er simpelt understøttet foroven og forneden, og Pælene regnes alle at have samme v -Kraft.

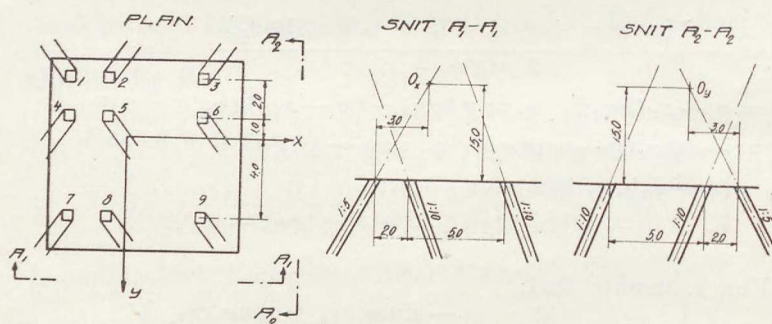


Fig. 66.

Som det fremgaar af Figuren har Pælene 1, 4 og 7 $\operatorname{tg} \alpha_x = \frac{1}{5}$ og de øvrige Pæle $\operatorname{tg} \alpha_x = -\frac{1}{10}$; Pælene 1, 2 og 3 har $\operatorname{tg} \alpha_y = \frac{1}{5}$, de øvrige Pæle $\operatorname{tg} \alpha_y = -\frac{1}{10}$.

Med de givne Hældninger og Placeringer af Pælene indser man umiddelbart, at Pælegruppen baade er plan overfor XZ-Planen og overfor YZ-Planen som Kraftplaner, iøvrigt ogsaa overfor en Plan $\neq$ XY-Planen i Højden $z = 15,0$ m.

Ved at betragte Snit $A_1 - A_1$ vil man se, at Sætningen om Inertimomentets Minimum giver, at XZ -Planens O -Punkt ligger i Skæringspunktet mellem Pælene med Hældning 1:5 og Tyngdepunktet for Pælene med Hældning 1:10. Naar alle Pælene regnes at have samme v -Kraft, findes O -Punktet derfor let.

Paa samme Maade findes YZ -Planens O -Punkt, og man vil se, at det ligger i samme Højde.

Naar Pælenes v -Kræfter regnes ens, bliver 1. Hovedakse lodret; som Koordinatsystemet er lagt, er Z -Aksen 1. Hovedakse, en Linie 15 m lodret over Y -Aksen 2. Hovedakse, og en Linie 15 m lodret over X -Aksen 3. Hovedakse.

Pæletrykkene findes nu let. Formel (121) i § 33 kan umiddelbart anvendes her.

Pæl	v	$\text{tg } \alpha_x$	$\text{tg } \alpha_y$	x	y	$v \text{tg}^2 \alpha_y$	$v \text{tg}^2 \alpha_x$	η_x	η_y	η_z	$v \eta_x^2$	$v \eta_y^2$	$v \eta_z^2$
1	1	+0,2	+0,2	-3,0	-3,0	+0,04	+0,04	0	0	0	0	0	0
2	1	-0,1	+0,2	-1,0	-3,0	+0,04	+0,01	0	-2,5	+0,5	0	6,25	0,25
3	1	-0,1	+0,2	+4,0	-3,0	+0,04	+0,01	0	+2,5	-0,5	0	6,25	0,25
4	1	+0,2	-0,1	-3,0	-1,0	+0,01	+0,04	-2,5	0	-0,5	6,25	0	0,25
5	1	-0,1	-0,1	-1,0	-1,0	+0,01	+0,01	-2,5	-2,5	0	6,25	6,25	0
6	1	-0,1	-0,1	+4,0	-1,0	+0,01	+0,01	-2,5	+2,5	+0,5	6,25	6,25	0,25
7	1	+0,2	-0,1	-3,0	+4,0	+0,01	+0,04	+2,5	0	+0,5	6,25	0	0,25
8	1	-0,1	-0,1	-1,0	+4,0	+0,01	+0,01	+2,5	-2,5	-0,5	6,25	6,25	0,25
9	1	-0,1	-0,1	+4,0	+4,0	+0,01	+0,01	+2,5	+2,5	0	6,25	6,25	0
Sum	9					-0,18	+0,18				37,50	37,50	1,50

Koefficienterne for Pæletrykkenes lodrette Komposanter er:

Pæl Nr.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	+1,11	+1,11	+0,111	0	0	0
2	-0,55	+1,11	+0,111	0	-0,067	+0,333
3	-0,55	+1,11	+0,111	0	+0,067	-0,333
4	+1,11	-0,55	+0,111	+0,067	0	-0,333
5	-0,55	-0,55	+0,111	+0,067	-0,067	0
6	-0,55	-0,55	+0,111	+0,067	+0,067	+0,333
7	+1,11	-0,55	+0,111	-0,067	0	+0,333
8	-0,55	-0,55	+0,111	-0,067	-0,067	-0,333
9	-0,55	-0,55	+0,111	-0,067	+0,067	0

Denne Gruppe falder i Virkeligheden ind under de i § 58 nævnte specielle Tilfælde.

V. Specielle Tilfælde.

§ 57. **Pælegruppen er symmetrisk om en Plan.** Dette Tilfælde falder i Beregningen ganske sammen med det almindelige i § 48—55 behandlede Tilfælde. Hovedakserne falder som i Fig. 65 vist. Specielt kan 2. Hovedakse skære en af de andre Hovedakser, og Pælegruppen kunde da behandles som en dobbelt plan Pælegruppe, se næste Paragraf. Dette betaler sig dog i Almindelighed ikke, da man i saa Fald skulde foretage en Koordinattransformation.

Der er intet nyt at bemærke udover det i de nævnte Paragraffer anførte.

§ 58. **Pælegruppen er symmetrisk om to paa hinanden vinkelrette Planer, d. v. s. at Pælegruppen er dobbelt plan.** De to paa hinanden vinkelrette Kraftplaner vælges til henholdsvis XZ-Plan og YZ-Plan. Herved falder 1. Hovedakse i Z-Aksen; begge Kraftplaners O-Punkter falder i den.

a) Pælene er simpelt understøttet baade foroven og forneden. XZ-Planens O-Punkt findes af Formlen:

$$z_{0x} = - \frac{\sum v x \operatorname{tg} \alpha_x}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x} \quad (179)$$

YZ-Planens O-Punkt findes af Formlen:

$$z_{0y} = - \frac{\sum v y \operatorname{tg} \alpha_y}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y} \quad (179a)$$

Pæletrykkene kan findes af Formlen:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_x} + Q_y \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha_y} + Q_z \frac{v}{\sum v} \\ &\quad - M_x \frac{v \eta_x}{I_x} + M_y \frac{v \eta_y}{I_y} + M_z \frac{v \eta_z}{I_z} \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_x &= y + z_{0y} \operatorname{tg} \alpha_y, \\ \eta_y &= x + z_{0x} \operatorname{tg} \alpha_x, \\ \eta_z &= y \operatorname{tg} \alpha_x - x \operatorname{tg} \alpha_y, \\ I_x &= \sum v \eta_x^2; \quad I_y = \sum v \eta_y^2; \quad I_z = \sum v \eta_z^2. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Bøjningerne i de to Kraftplaner er ikke principielt forskellige fra det i 1. Afsnit anførte. Derimod vil vi se lidt paa

det nye Inertimoment I_z , der betinger Pillens Modstandskraft mod Vridning:

$$I_z = \Sigma v (y \operatorname{tg} \alpha_x - x \operatorname{tg} \alpha_y)^2 = \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_x \cdot y^2 \left. \begin{array}{l} \\ + \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha_y \cdot x^2 - 2 \Sigma x y v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y. \end{array} \right\} \quad (182)$$

Man ser, at hvis en Pæl har samme Fortegn for $\operatorname{tg} \alpha_x$ og $\operatorname{tg} \alpha_y$, vil den give mindre Bidrag end en Pæl gennem samme Punkt og med forskelligt Fortegn for $\operatorname{tg} \alpha_x$ og $\operatorname{tg} \alpha_y$. Det er ogsaa ganske indlysende, at hvis man drejer en Pæl om en lodret Linie gennem dens Punkt i Pilleunderkanten, vil Bidraget til Pillens Vridningsmodstand være Minimum, nemlig Nul, naar Pælen skærer Z-Aksen, og være Maksimum, naar den ligger i en lodret Plan vinkelret paa Minimumsstillingens lodrette Plan. Det vil iøvrigt altid være en god Regel, at man lader enten $\operatorname{tg} \alpha_x$ eller $\operatorname{tg} \alpha_y$ være Nul for enhver Pæl. Herved opnaar man at gøre Rammearbejdet lettere, og man sikrer sig samtidig at faa god Vridningsmodstand i Pillen.

b) Pælene er indspændt forneden og simpelt understøttet foroven.

De tænkte Pæle indføres ligesom i § 50.

XZ-Planens O-Punkt findes af Formlen:

$$z_{0x} = - \frac{\Sigma (v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - u) \operatorname{tg} \alpha_x \cdot x}{\Sigma ((v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u)} \quad (183)$$

YZ-Planens O-Punkt findes af Formlen:

$$z_{0y} = - \frac{\Sigma (v \operatorname{tg} \alpha_y + u_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) y}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)} \quad (183a)$$

Pæletrykkene findes af Formlerne:

Oprindelig Pæl:

$$P \cos \alpha = Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma ((v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u)} + Q_y \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)} \left. \begin{array}{l} \\ + Q_z \frac{v}{\Sigma (v + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} - M_x \frac{v \eta_x}{I_x} + M_y \frac{v \eta_y}{I_y} + M_z \frac{v \eta_z}{I_z} \end{array} \right\} \quad (184)$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_x &= \Sigma v \eta_x^2 + \Sigma u \eta_{x_s}^2 + \Sigma u_l \eta_{x_l}^2, \\
 I_y &= \Sigma v \eta_y^2 + \Sigma u \eta_{y_s}^2 + \Sigma u_l \eta_{y_l}^2, \\
 I_z &= \Sigma v \eta_z^2 + \Sigma u \eta_{z_s}^2 + \Sigma u_l \eta_{z_l}^2, \\
 \eta_x &= y + z_{0y} \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \eta_y = x + z_{0x} \operatorname{tg} \alpha_x; \quad \eta_z = y \operatorname{tg} \alpha_x - x \operatorname{tg} \alpha_y, \\
 \eta_{x_s} &= -y \operatorname{tg} \alpha_x; \quad \eta_{y_s} = z_{0x} - x \operatorname{tg} \alpha_x; \quad \eta_{z_s} = y, \\
 \eta_{x_l} &= y \operatorname{tg} \alpha_{z_l} + z_{0y}; \quad \eta_{y_l} = z_{0x} \operatorname{tg} \alpha_{x_l} + x \operatorname{tg} \alpha_{z_l}; \quad \eta_{z_l} = y \operatorname{tg} \alpha_{x_l} - x.
 \end{aligned} \right\} (185)$$

1. tænkte Pæl:

$$\left. \begin{aligned}
 T_s \cos \alpha_x &= Q_x \frac{u}{\Sigma ((v + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_l}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u)} \\
 - Q_z \frac{u \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma (v + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_l} + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} &- M_x \frac{u \eta_{x_s}}{I_x} + M_y \frac{u \eta_{y_s}}{I_y} + M_z \frac{u \eta_{z_s}}{I_z}.
 \end{aligned} \right\} (186)$$

2. tænkte Pæl:

For Kræfter i XZ-Planen faas:

$$T_l \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} = P \cos \alpha \frac{u_l \operatorname{tg} \alpha_{z_l}}{v}. \quad (186a)$$

For vilkaarlige Kræfter faas:

$$\left. \begin{aligned}
 T_l \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} &= Q_x \frac{u_l \operatorname{tg} \alpha_{x_l}}{\Sigma ((v + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_l}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u)} + Q_y \frac{u_l}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_l)} \\
 + Q_z \frac{u_l \operatorname{tg} \alpha_{z_l}}{\Sigma (v + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_l} + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} &- M_x \frac{u_l \eta_{x_l}}{I_x} + M_y \frac{u_l \eta_{y_l}}{I_y} + M_z \frac{u_l \eta_{z_l}}{I_z}.
 \end{aligned} \right\} (186b)$$

Hvis alle de oprindelige Pæle er parallelle med XZ- og YZ-Planen (som f. Eks. Fig. 67), faar man følgende Udtryk:

$$\left. \begin{aligned}
 z_{0x} &= - \frac{\Sigma (v - u) \operatorname{tg} \alpha_x \cdot x}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u)}, \\
 z_{0y} &= - \frac{\Sigma (v - u_l) \operatorname{tg} \alpha_y \cdot y}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_l)}.
 \end{aligned} \right\}$$

Trykket i den oprindelige Pæl:

$$\begin{aligned}
 P \cos \alpha &= Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u)} + Q_y \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_l)} \\
 + Q_z \frac{v}{\Sigma (v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_l \operatorname{tg}^2 \alpha_y)} &- M_x \frac{v \eta_x}{I_x} + M_y \frac{v \eta_y}{I_y} + M_z \frac{v \eta_z}{I_z}.
 \end{aligned}$$

$$\eta_{x_t} = z_{0y} - y \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \eta_{y_t} = -x \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \eta_{z_t} = -x.$$

Trykket i 1. tænkte Pæl:

$$T_s \cos \alpha_x = Q_x \frac{u}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u)} - Q_z \frac{u \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma (v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_y)} \\ - M_x \frac{u \eta_{x_s}}{I_x} + M_y \frac{u \eta_{y_s}}{I_y} + M_z \frac{u \eta_{z_s}}{I_z}.$$

Trykket i 2. tænkte Pæl:

$$T_t \cos \alpha_y = Q_y \frac{u_t}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + u_t)} - Q_z \frac{u_t \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma (v + u \operatorname{tg}^2 \alpha_x + u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_y)} \\ - M_x \frac{u_t \eta_{x_t}}{I_x} + M_y \frac{u_t \eta_{y_t}}{I_y} + M_z \frac{u_t \eta_{z_t}}{I_z}.$$

c) Pælene er indspændt baade foroven og forneden.

XZ-Planens O-Punkt findes af Formlen:

$$z_{0x} = - \frac{\Sigma (v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} - r) \operatorname{tg} \alpha_x \cdot x + \Sigma r s_a (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_x)}{\Sigma ((v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r)}. \quad (187)$$

YZ-Planens O-Punkt findes af Formlen:

$$z_{0y} = - \frac{\Sigma (v \operatorname{tg} \alpha_y + r_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}) y + \Sigma r_t s_a (1 - \operatorname{tg} \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_{z_t})}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_t)}. \quad (187a)$$

Pæletrykkene findes af Formlerne:

Oprindelig Pæl:

$$P \cos \alpha = Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma ((v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r)} + Q_y \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_t)} \\ + Q_z \frac{v}{\Sigma (v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} - M_x \frac{v \eta_{x_s}}{I_x} + M_y \frac{v \eta_{y_s}}{I_y} + M_z \frac{v \eta_{z_s}}{I_z}. \quad (188)$$

Her er:

$$I_x = \Sigma v \eta_{x_s}^2 + \Sigma r \eta_{x_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{x_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}, \\ I_y = \Sigma v \eta_{y_s}^2 + \Sigma r \eta_{y_s}^2 + \Sigma r_t \eta_{y_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1},$$

$$\begin{aligned}
 I_z &= \Sigma v \eta_z^2 + \Sigma r \eta_s^2 + \Sigma r_t \eta_{z_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1} \\
 \eta_x &= y + z_{0_y} \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \eta_y = x + z_{0_x} \operatorname{tg} \alpha_x; \quad \eta_z = y \operatorname{tg} \alpha_x - x \operatorname{tg} \alpha_y; \\
 \eta_{x_s} &= -\operatorname{tg} \alpha_x (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y); \quad \eta_{y_s} = z_{0_x} + s_a - (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) \operatorname{tg} \alpha_x; \\
 \eta_{z_s} &= y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y; \quad \eta_{x_t} = (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) \operatorname{tg} \alpha_{z_t} + z_{0_y} + s_a; \\
 \eta_{y_t} &= (z_{0_x} + s_a) \operatorname{tg} \alpha_{x_t} + (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) \operatorname{tg} \alpha_{z_t}; \\
 \eta_{z_t} &= (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_y) \operatorname{tg} \alpha_{x_t} - (x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x).
 \end{aligned}
 \tag{189}$$

1. tænkte Pæl:

$$\begin{aligned}
 T_s \cos \alpha_x &= Q_x \frac{r}{\Sigma ((v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r)} \\
 &- Q_z \frac{r \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma (v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} - M_x \frac{r \eta_{x_s}}{I_x} + M_y \frac{r \eta_{y_s}}{I_y} + M_z \frac{r \eta_{z_s}}{I_z}.
 \end{aligned}
 \tag{190}$$

2. tænkte Pæl:

For Kræfter i XZ-Planen faas:

$$T_t \frac{\cos \alpha}{\cos \tilde{\alpha}_x} = P \cos \tilde{\alpha} \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{v}. \tag{190a}$$

For vilkaarlige Kræfter faas:

$$\begin{aligned}
 T_t \frac{\cos \tilde{\alpha}}{\cos \alpha_x} &= Q_x \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_{x_t}}{\Sigma ((v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t}) \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r)} + Q_y \frac{r_t}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_t)} \\
 &+ Q_z \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{\Sigma (v + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{z_t} + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x)} - M_x \frac{r_t \eta_{x_t}}{I_x} + M_y \frac{r_t \eta_{y_t}}{I_y} + M_z \frac{r_t \eta_{z_t}}{I_z}.
 \end{aligned}
 \tag{190b}$$

Pælenes Vridningsmomenter er:

Oprindelig Pæl:

$$M_p \cos \alpha = -\frac{I}{F} \cdot \frac{s_2}{r_1} v \left(M_x \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{I_x} + M_y \frac{\operatorname{tg} \alpha_y}{I_y} + M_z \frac{1}{I_z} \right).$$

1. tænkte Pæl.

$$M_{v_s} \cos \alpha_x = -\frac{1}{12} r s_1^2 \left(M_x \frac{1}{I_x} - M_x \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{I_z} \right). \tag{190c}$$

2. tænkte Pæl:

$$M_{v_t} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x} = -\frac{1}{12} r_t s_1^2 \left(M_x \frac{\operatorname{tg} \alpha_{x_t}}{I_x} + M_y \frac{1}{I_y} + M_z \frac{\operatorname{tg} \alpha_{z_t}}{I_z} \right).$$

Hvis alle de oprindelige Pæle er parallelle med XZ- og YZ-Planen (som f. Eks. i Fig. 67), faar man følgende Udtryk:

$$z_{0x} = - \frac{\Sigma(v-r)\operatorname{tg} \alpha_x \cdot x + \Sigma r s_a (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_x)}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r)}$$

$$z_{0y} = - \frac{\Sigma(v-r_t)\operatorname{tg} \alpha_y \cdot y + \Sigma r_t s_a (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_y)}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_t)}$$

Trykket i den oprindelige Pæl:

$$P \cos \alpha = Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r)} + Q_y \frac{v \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_y + r_t)} + Q_z \frac{v}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_y)} - M_x \frac{v \eta_x}{I_x} + M_y \frac{v \eta_y}{I_y} + M_z \frac{v \eta_z}{I_z},$$

$$\eta_{x_t} = -\operatorname{tg} \alpha_y (y - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) + z_{0y} + s_a; \quad \eta_{y_t} = -(x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x) \operatorname{tg} \alpha_y;$$

$$\eta_{z_t} = -(x - s_a \operatorname{tg} \alpha_x).$$

Trykket i 1. tænkte Pæl:

$$T_s \cos \alpha_x = Q_x \frac{r}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r)} - Q_z \frac{r \operatorname{tg} \alpha_x}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_y)} - M_x \frac{r \eta_{x_s}}{I_x} + M_y \frac{r \eta_{y_s}}{I_y} + M_z \frac{r \eta_{z_s}}{I_z}. \quad (190d)$$

Trykket i 2. tænkte Pæl:

$$T_t \cos \alpha_y = Q_y \frac{r_t}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_t)} - Q_z \frac{r_t \operatorname{tg} \alpha_y}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha_x + r_t \operatorname{tg}^2 \alpha_y)} - M_x \frac{r_t \eta_{x_t}}{I_x} + M_y \frac{r_t \eta_{y_t}}{I_y} + M_z \frac{r_t \eta_{z_t}}{I_z}.$$

Pælens Vridningsmomenter er:

Oprindelig Pæl:

$$M_v \cos \alpha = - \frac{I}{F} \cdot \frac{s_2}{s_1} v \left(M_x \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{I_x} + M_y \frac{\operatorname{tg} \alpha_y}{I_y} + M_z \frac{1}{I_z} \right).$$

1. tænkte Pæl:

$$M_{v_s} \cos \alpha_x = - \frac{1}{12} r s_1^2 \left(M_x \frac{1}{I_x} - M_z \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{I_z} \right).$$

2. tænkte Pæl:

$$M_{v_t} \cos \alpha_y = - \frac{1}{12} r_t s_1^2 \left(M_y \frac{1}{I_y} - M_z \frac{\operatorname{tg} \alpha_y}{I_z} \right).$$

§ 59. **Alle Pælene er parallelle.**

a) Pælene er simpelt understøttet baade foroven og forneden.

En saadan Pælegruppe er bevægelig og kan kun optage en Kraft parallel med Pæleretningen.

Vi vil i det følgende forudsætte, at Pilleunderkanten ligger vinkelret paa Pælene; hvis dette ikke er Tilfældet med den virkelige Pilleunderkant, indlægges en regningsmæssig, og denne tages til XY-Plan.

Det fremgaar direkte, at I. Hovedakse er parallel med Pælene, II. og III. Hovedakse maa derfor være vinkelret derpaa. Modstand mod Tryk i II. og III. Hovedakse og mod Vridning om I. Hovedakse er Nul.

Paa Grund af Pælenes Parallelisme er Beliggenheden af II. og III. Hovedakse ubestemt i Højderetningen, og vi vil derfor lægge dem begge i Pilleunderkanten.

Da Kraften for en Forskydning baade i II. og III. Hovedakse er Nul, er disse Hovedakser Retninger ubestemt, og vi vælger derfor Momenthovedakserne til Hovedakser.

Hvis man har lagt X-Aksen i III. og Y-Aksen i II. Hovedakse, findes Pæletrykkene:

$$P = Q_1 \frac{v}{\Sigma v} - M_x \frac{vy}{I_x} + M_y \frac{vx}{I_y}.$$

$$I_x = \Sigma vy^2; \quad I_y = \Sigma vx^2 \quad (191)$$

Løvrigt er dette Tilfælde ikke andet end almindelig skæv Bøjning af et plant Tværsnit^{*)}. Her er v -Kræfterne Tværsnitsenheden koncentreret i Pælenes Midte.

II. og III. Hovedakse maa skære hinanden i v -Kræfternes Tyngdepunkt, gennem hvilket ogsaa I. Hovedakse vil gaa.

Beregningen af en vilkaarlig Pælegruppe begynder man derfor med, at man paa sædvanlig Maade finder dette Tyngdepunkt og med det som Begyndelsespunkt indlægger et vilkaarligt Koordinatsystem XY.

Hovedaksernes Vinkel ω med X-Aksen findes i Analogi med Lign. (17) i 1. Afsnit af Ligningen:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\Sigma vxy}{\Sigma vx^2 - \Sigma vy^2}. \quad (192)$$

^{*)} Se saaledes A. Ostfeld: Elasticitetslære 1916, S. 369.

Hvad der er II. Hovedakse bestemmes derved, at dens ω og Σvxy skal have modsat Fortegn.

Hovedakserne kan ogsaa konstrueres grafisk, f. Eks. ved Hjælp af Land's Cirkel, se Fig. 24, S. 55.

Hovedinertimomenterne er *):

$$\left. \begin{aligned} I_{II} &= \Sigma vx^2 - \text{tg } \omega \Sigma vxy \\ I_{III} &= \Sigma vx^2 + \text{tg } \omega \Sigma vxy. \end{aligned} \right\} \quad (192a)$$

Hvis det i 1. Afsnit § 7 anførte vendes om, saaledes at Kraft ombyttes med Vinkeldrejning og Moment med Parallelforskydning, ser man, at for den her behandlede Pille er Kraftangrebepunktet og Nullinie, d. v. s. Drejningsakse, Pol og Antipolar med Hensyn til en Ellipse, hvis Halvakser er:

$$\sqrt{\frac{I_{III}}{\Sigma v}} \quad \text{og} \quad \sqrt{\frac{I_{II}}{\Sigma v}}^{**})$$

Saalænge Nullinien ligger udenfor alle Pælene, vil der ikke komme Træk i nogen Pæl. Man vil derfor kunne tale om Pælegruppens Kærne, d. v. s. det Areal, indenfor hvilket Kraften skal angribe for ikke at give Træk i nogen Pæl. Hvis man som Pælegruppens Kontur betegner den Linie, der faas ved at trække rette Linier fra Midtpunkt til Midtpunkt af de yderste Pæle i Gruppen, saaledes at alle Pælene findes indenfor denne Kontur, vil Pælegruppens Kærne begrænses af Antipolarerne til alle udadgaaende Knæpunkter i denne Kontur.

b) Pælene er indspændt forneden, men simpelt understøttet foroven.

En saadan Pille er ikke bevægelig, da den kan optage en vilkaarlig Belastning.

Vi indfører som sædvanlig de tænkte Pæle. 1. Hovedakse ligger i Tyngdepunktslinien for de oprindelige Pæles v -Kræfter, III. Hovedakse i Tyngdepunktslinien for 1. tænkte Pæle og II. Hovedakse i Tyngdepunktslinien for 2. tænkte Pæle; naar Modstandstallet er ens for en Pæls 1. og 2. tænkte Pæl, hvad vi her forudsætter, vil II. og III. Hovedakse skære hinanden, nemlig i et Punkt af Tyngdepunktslinien for u -Kræfterne virkende i de oprindelige Pæles Retning.

*) Se saaledes A. Ostfeld: Elasticitetslære 1916, S. 51 og 52.

**) » » » » » » 379.

Vi indfører nu som regningsmæssig Pilleunderkant den paa de oprindelige Pæle vinkelrette Plan, der indeholder II. og III. Hovedakse.

De to Retninger for de tænkte Pæle er vilkaarlig, ligeledes II. og III. Hovedakse, vi finder derfor de to under a) nævnte Hovedakser for de oprindelige Pæle, II. og III. Momenthovedakse, og parallel med disse indfører vi de tænkte Pæle og II. og III. Hovedakse.

Man har nu:

For Kræfter parallelle med de oprindelige Pæle vil de tilsvarende Drejningsakser ligge i den regningsmæssige Pilleunderkant.

Hovedinertimomenterne for Kræfter parallelle med de oprindelige Pæle, d. v. s. for Momenter om III. og II. Hovedakse, hedder:

$$\left. \begin{aligned} I_{III} &= \sum v \eta_x^2 + \sum u \eta_{x_t}^2 \\ I_{II} &= \sum v \eta_y^2 + \sum u \eta_{y_t}^2 \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

η_x og η_{x_t} er Afstanden fra III. Hovedskrueakse til henholdsvis oprindelige Pæle og 2. tænkte Pæle; η_y og η_{y_s} Afstanden fra II. Hovedskrueakse til henholdsvis oprindelige Pæle og 1. tænkte Pæle.

Hvis den regningsmæssige og den virkelige Pilleunderkant falder sammen, bortfalder det sidste Led i ovenstaaende Udtryk, og Trykket i de oprindelige Pæle er i saa Tilfælde uafhængigt af Pælenes Indspænding.

Trykket i de oprindelige Pæle bliver:

$$\left. \begin{aligned} P &= Q_1 \frac{v}{\sum v} - M_{III} \frac{v \eta_x}{I_{III}} + M_{II} \frac{v \eta_y}{I_{II}} \\ \text{Trykket i 1. tænkte Pæl:} \\ T_s &= \frac{M_{II}}{I_{II}} u \eta_{y_s} \\ \text{Trykket i 2. tænkte Pæl:} \\ T_t &= - M_{III} \frac{u \eta_{x_t}}{I_{III}} \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

En Kraft Q_2 i Pilleunderkanten gennem II. og III. Hovedakses Skæringspunkt giver hver af de oprindelige Pæle en Transversalkraft i Kraftens Retning:

$$T = Q_2 \frac{u}{\Sigma u}. \quad (194a)$$

Et Moment med Akse parallel med de oprindelige Pæle vil give en Transversalkraft i Pælene paa:

$$T = M_z \frac{u\eta_z}{I_z}; \quad I_z = \Sigma u\eta_z^2, \quad (194b)$$

hvor η_z er den polære Afstand fra Pælene til Skæringspunktet mellem II. og III. Hovedakse. Denne Transversalkraft virker vinkelret paa Linien fra Pælen til det nævnte Skæringspunkt.

c) Pælene er indspændt baade foroven og forneden.

Ogsaa her indføres de tænkte Pæle, men her i Pælenes Midtpunkt. Paa samme Maade som før indlægges en regningsmæssig Pilleunderkant i den Plan, hvor de tænkte Pæles Resultant virker, for lige lange Pæle bliver dette i Pælenes Midtpunkt.

Hermed er Opgaven den samme som den under b) behandlede, naar man blot medtager Pælenes Vridningsmodstand.

Man finder derfor:

$$\left. \begin{aligned} I_{III} &= \Sigma v\eta_x^2 + \Sigma r\eta_{x_t}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}, \\ I_{II} &= \Sigma v\eta_y^2 + \Sigma r\eta_{y_s}^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}, \\ I_I &= \Sigma r\eta_z^2 + \Sigma \frac{EI}{s_1}. \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

Pælenes Vridningsmomenter er:

For den oprindelige Pæl:

$$\left. \begin{aligned} M_v &= -\frac{M_z}{I_z} \frac{EI}{s_1}, \\ \text{For 1. tænkte Pæl:} \\ M_{v_s} &= -\frac{M_{III}}{I_{III}} \frac{EI}{s_1}, \\ \text{For 2. tænkte Pæl:} \\ M_{v_t} &= -\frac{M_{II}}{I_{II}} \frac{EI}{s_1}. \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

Pæl Nr.	x	y	$\text{tg } \alpha_x$	$\text{tg } \alpha_y$	$\cos \alpha$	$\frac{10^3}{E} v$	$v \text{tg } \alpha_x$	$v \text{tg } \alpha_y$	$v \text{tg}^2 \alpha_x$	$v \text{tg}^2 \alpha_y$	η_x	η_y	η_z	$v \eta_x^2$	$v \eta_y^2$	$v \eta_z^2$
1	-6,0	-2,0	0	+0,20	0,98	34,5	0	+6,9	0	1,38	0	-6,0	-1,2	0	1242	49,68
2	-4,0	-2,0	0	+0,20	0,98	34,5	0	+6,9	0	1,38	0	-4,0	-0,8	0	552	22,08
3	+4,0	-2,0	0	+0,20	0,98	34,5	0	+6,9	0	1,38	0	+4,0	+0,8	0	552	22,08
4	+6,0	-2,0	0	+0,20	0,98	34,5	0	+6,9	0	1,38	0	+6,0	+1,2	0	1242	49,68
5	-6,0	+2,0	0	-0,20	0,98	34,5	0	-6,9	0	1,38	0	-6,0	+1,2	0	1242	49,68
6	-4,0	+2,0	0	-0,20	0,98	34,5	0	-6,9	0	1,38	0	-4,0	+0,8	0	552	22,08
7	+4,0	+2,0	0	-0,20	0,98	34,5	0	-6,9	0	1,38	0	+4,0	-0,8	0	552	22,08
8	+6,0	+2,0	0	-0,20	0,98	34,5	0	-6,9	0	1,38	0	+6,0	-1,2	0	1242	49,68
9	-1,0	-2,0	+0,20	0	0,98	34,5	+6,9	0	1,38	0	-2,0	0	-0,4	138	0	5,52
10	+1,0	-2,0	-0,20	0	0,98	34,5	-6,9	0	1,38	0	-2,0	0	+0,4	138	0	5,52
11	-1,0	+2,0	+0,20	0	0,98	34,5	+6,9	0	1,38	0	+2,0	0	+0,4	138	0	5,52
12	+1,0	+2,0	-0,20	0	0,98	34,5	-6,9	0	1,38	0	+2,0	0	-0,4	138	0	5,52
Sum						414,0	0	0	5,52	11,04				552	7176	309,12

VI. Eksempler.

§ 60.

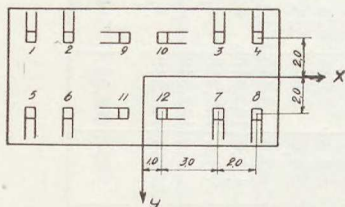


Fig. 67.

Pælernes Tværsnitsareal: $0,18 \text{ m}^2$,» Inertimoment: $I=0,002 \text{ m}^4$,» Længde: $s_1=s_2=5,0 \text{ m}$.

Pillen regnes igennem baade for simpelt understøttede Pæle, Pæle indspændt forneden og Pæle indspændt baade foroven og forneden.

Som det direkte fremgaar af Fig. 67, er Pælegruppen symmetrisk baade om XZ-Planen og YZ-Planen.

a) Pælene er simpelt understøttede.

Man ser umiddelbart, at:

$$z_{0x} = \frac{1,0}{0,2} = 5,0 \text{ m}; \quad z_{0y} = \frac{2,0}{0,2} = 10,0 \text{ m}.$$

Beregningen er udført i Tabellen paa forrige Side.

Koefficienterne til Pæletrykkenes lodrette Komposanter.

Pæl Nr.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	0	+ 0,624	0,0833	0	- 0,030	- 0,133
2	0	+ 0,624	0,0833	0	- 0,019	- 0,090
3	0	+ 0,624	0,0833	0	+ 0,019	+ 0,090
4	0	+ 0,624	0,0833	0	+ 0,030	+ 0,133
5	0	- 0,624	0,0833	0	- 0,030	+ 0,133
6	0	- 0,624	0,0833	0	- 0,019	+ 0,090
7	0	- 0,624	0,0833	0	+ 0,019	- 0,090
8	0	- 0,624	0,0833	0	+ 0,030	- 0,133
9	+ 1,25	0	0,0833	+ 0,125	0	- 0,045
10	+ 1,25	0	0,0833	+ 0,125	0	+ 0,045
11	- 1,25	0	0,0833	- 0,125	0	+ 0,045
12	- 1,25	0	0,0833	- 0,125	0	- 0,045

b) Pælene er indspændt i Bunden, men simpelt understøttet foroven.

Af Tabellen paa næste Side findes:

$$z_{0x} = + \frac{27,56}{6,092} = + 4,53 \text{ m},$$

$$z_{0y} = + \frac{110,24}{11,608} = + 9,51 \text{ m}.$$

Prel Nr.	$\cos \alpha_t$	$\frac{10^3}{E} u$	$\frac{10^3}{E} u_t$	$u_t \operatorname{tg}^2 \alpha_{yt}$	$(v-u) \operatorname{tg} \alpha_x \cdot x$	$v \operatorname{tg}^2 \alpha_x$	$(v-u_t) \operatorname{tg} \alpha_y \cdot y$	$u \operatorname{tg}^2 \alpha_x$	η_x	η_{x_s}	η_{x_t}	η_y	η_{y_s}	η_z	η_{z_t}	I_x	I_y	I_z
1	0,98	0,048	0,047	0,002	0	0	-13,78	0	-0,08	0	+9,91	-6,0	+4,53	-1,2	+6,0	4,836	1243	51,56
2	0,98	0,048	0,047	0,002	0	0	-13,78	0	-0,08	0	+9,91	-4,0	+4,53	-0,8	+4,0	4,836	553	23,02
3	0,98	0,048	0,047	0,002	0	0	-13,78	0	-0,08	0	+9,91	+4,0	+4,53	+0,8	-4,0	4,836	553	23,02
4	0,98	0,048	0,047	0,002	0	0	-13,78	0	-0,08	0	+9,91	+6,0	+4,53	+1,2	-6,0	4,836	1243	51,56
5	0,98	0,048	0,047	0,002	0	0	-13,78	0	+0,08	0	+9,91	-6,0	+4,53	+1,2	+6,0	4,836	1243	51,56
6	0,98	0,048	0,047	0,002	0	0	-13,78	0	+0,08	0	+9,91	-4,0	+4,53	+0,8	+4,0	4,836	533	23,02
7	0,98	0,048	0,047	0,002	0	0	-13,78	0	+0,08	0	+9,91	+4,0	+4,53	-0,8	-4,0	4,836	533	23,02
8	0,98	0,048	0,047	0,002	0	0	-13,78	0	+0,08	0	+9,91	+6,0	+4,53	-1,2	-6,0	4,836	1243	51,56
9	1,00	0,047	0,048	0	-6,89	1,38	0	+0,002	-2,00	+0,4	+9,51	-0,094	+4,73	-0,4	+1,0	142,349	4,3	5,76
10	1,00	0,047	0,048	0	-6,89	1,38	0	+0,002	-2,00	+0,4	+9,51	+0,094	+4,73	+0,4	-1,0	142,349	4,3	5,76
11	1,00	0,047	0,048	0	-6,89	1,38	0	+0,002	+2,00	-0,4	+9,51	-0,094	+4,73	+0,4	+1,0	142,349	4,3	5,76
12	1,00	0,047	0,048	0	-6,89	1,38	0	+0,002	+2,00	-0,4	+9,51	+0,094	+4,73	-0,4	-1,0	142,349	4,3	5,76
Sum		0,572	0,568	0,016	-27,89	5,52	-110,24	+0,008								608,08	7202	321,36

Oprindelig Pæl

1. tænkte Pæl

2. tænkte Pæl

Faktor 10^4 Faktor 10^4

Pæl Nr.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	0	+0,594	0,0832	+0,005	-0,029	-0,129	+79	0	0	0	+0,30	-3,00	0	+40,5	-0,23	+7,6	+0,08	+8,78
2	0	+0,594	0,0832	+0,005	-0,019	-0,086	+79	0	0	0	+0,30	-3,00	0	+40,5	-0,23	+7,6	+0,05	+5,86
3	0	+0,594	0,0832	+0,005	+0,019	+0,086	+79	0	0	0	+0,30	-3,00	0	+40,5	-0,23	+7,6	-0,05	-5,86
4	0	+0,594	0,0832	+0,005	+0,029	+0,129	+79	0	0	0	+0,30	-3,00	0	+40,5	-0,23	+7,6	-0,08	-8,78
5	0	-0,594	0,0832	-0,005	-0,029	+0,129	+79	0	0	0	+0,30	+3,00	0	+40,5	+0,23	+7,6	+0,08	+8,78
6	0	-0,594	0,0832	-0,005	-0,019	+0,086	+79	0	0	0	+0,30	+3,00	0	+40,5	+0,23	+7,6	+0,05	+5,86
7	0	-0,594	0,0832	-0,005	+0,019	-0,086	+79	0	0	0	+0,30	+3,00	0	+40,5	+0,23	+7,6	-0,05	-5,86
8	0	-0,594	0,0832	-0,005	+0,029	-0,129	+79	0	0	0	+0,30	+3,00	0	+40,5	+0,23	+7,6	-0,08	-8,78
9	+1,133	0	0,0832	+0,113	0	-0,043	+77	0	-0,23	-0,31	+0,32	-3,00	0	+41,3	0	+7,3	0	+1,50
10	-1,133	0	0,0832	+0,113	0	+0,043	+77	0	+0,23	-0,31	+0,32	-3,00	0	+41,3	0	+7,3	0	-1,50
11	+1,133	0	0,0832	-0,113	0	+0,043	+77	0	-0,23	+0,31	+0,32	+3,00	0	+41,3	0	+7,3	0	+1,50
12	-1,133	0	0,0832	-0,113	0	-0,043	+77	0	+0,23	+0,31	+0,32	+3,00	0	+41,3	0	+7,3	0	-1,50

Pæl Nr.	$\begin{matrix} \text{tg } \alpha_x \cdot x \\ (v - r) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{tg } \alpha_y \cdot y \\ (v - r) \end{matrix}$	η_x	η_{x_s}	η_{x_t}	η_y	η_{y_s}	η_z	η_{z_s}	η_{z_t}	I_x	I_y	I_z
1	0	-13,725	-0,436	0	+10,77	-6,0	+5,23	-1,2	-2,49	+6,00	28,70	1247,9	58,04
2	0	-13,725	-0,436	0	+10,77	-4,0	+5,23	-0,8	-2,49	+4,00	28,70	557,8	26,68
3	0	-13,725	-0,436	0	+10,77	+4,0	+5,23	+0,8	-2,49	-4,00	28,70	557,8	26,68
4	0	-13,725	-0,436	0	+10,77	+6,0	+5,23	+1,2	-2,49	-6,00	28,70	1247,9	58,04
5	0	-13,725	+0,436	0	+10,77	-6,0	+5,23	+1,2	+2,49	+6,00	28,70	1247,9	58,04
6	0	-13,725	+0,436	0	+10,77	-4,0	+5,23	+0,8	+2,49	+4,00	28,70	557,8	26,68
7	0	-13,725	+0,436	0	+10,77	+4,0	+5,23	-0,8	+2,49	-4,00	28,70	557,8	26,68
8	0	-13,725	+0,436	0	+10,77	+6,0	+5,23	-1,2	+2,49	-6,00	28,70	1247,9	58,04
9	-6,86	0	-2,00	+0,4	+10,27	-0,444	+5,528	-0,4	-2,00	+1,49	158,68	12,9	7,10
10	-6,86	0	-2,00	-0,4	+10,27	+0,444	+5,528	+0,4	-2,00	-1,49	158,68	12,9	7,10
11	-6,86	0	+2,00	-0,4	+10,27	-0,444	+5,528	+0,4	+2,00	+1,49	158,68	12,9	7,10
12	-6,86	0	+2,00	-0,4	+10,27	+0,444	+5,528	-0,4	+2,00	-1,49	158,68	12,9	7,10
Sum	-27,44	-109,800									864,32	7274,4	367,28

Oprindelig Pæl

1. tænkte Pæl

2. tænkte Pæl

Faktor 10^4 Faktor 10^4

Pæl Nr.	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	0	+0,52	0,0832	+0,017	-0,028	-0,113	+246	0	0	0	+1,38	-13,0	0	+140,0	-0,91	+23,4	+0,31	+30,7
2	0	+0,52	0,0832	+0,017	-0,019	-0,075	+246	0	0	0	+1,38	-13,0	0	+140,0	-0,91	+23,4	+0,21	+20,5
3	0	+0,52	0,0832	+0,017	+0,019	+0,075	+246	0	0	0	+1,38	-13,0	0	+140,0	-0,91	+23,4	-0,21	-20,5
4	0	+0,52	0,0832	+0,017	+0,028	+0,113	+246	0	0	0	+1,38	-13,0	0	+140,0	-0,91	+23,4	-0,31	-30,7
5	0	-0,52	0,0832	-0,017	-0,028	+0,113	+246	0	0	0	+1,38	+13,0	0	+140,0	+0,91	+23,4	+0,31	+30,7
6	0	-0,52	0,0832	-0,017	-0,019	+0,075	+246	0	0	0	+1,38	+13,0	0	+140,0	+0,91	+23,4	+0,21	+20,5
7	0	-0,52	0,0832	-0,017	+0,019	-0,075	+246	0	0	0	+1,38	+13,0	0	+140,0	+0,91	+23,4	-0,21	-20,5
8	0	-0,52	0,0832	-0,017	-0,028	-0,113	+246	0	0	0	+1,38	+13,0	0	+140,0	+0,91	+23,4	-0,31	-30,7
9	+0,89	0	0,0832	+0,080	-0,002	-0,038	+241	0	-0,91	-0,87	+1,43	-10,5	0	+144,0	0	+22,9	0	+7,8
10	-0,89	0	0,0832	+0,080	+0,002	+0,038	+241	0	+0,91	+0,87	+1,43	-10,5	0	+144,0	0	+22,9	0	-7,8
11	+0,89	0	0,0832	-0,080	-0,002	+0,038	+241	0	-0,91	+0,87	+1,43	+10,5	0	+144,0	0	+22,9	0	+7,8
12	-0,89	0	0,0832	-0,080	+0,002	-0,038	+241	0	+0,91	+0,87	+1,43	+10,5	0	+144,0	0	+22,9	0	-7,8

14*

I den S. 209 anførte Tabel er angivet Koefficienterne til Pæletrykkenes Komposanter, de oprindelige Pæles efter Z-Aksen, 1. tænkte Pæl efter X-Aksen, og 2. tænkte Pæl efter Y-Aksen.

Hvis Pælegruppen paavirkes af en Kraft paa 10 t og et Moment paa 10 tm i hver Hovedakse, vil Pæl Nr. 1 altsaa forneden blive paavirket af et Indspændingsmoment:

$$M = 50 \frac{\sqrt{76,3^2 + \left(\frac{56,73}{0,98}\right)^2}}{10^4} = 0,479 \text{ tm.}$$

For en Kraft paa 10 t i YZ-Planens vandrette Hovedakse vil Pillen faa en Parallelforskydning:

$$e = \frac{10 \cdot 10^3}{11,61E} = 0,0043 \text{ m.}$$

c) Pælene er indspændt baade foroven og forneden. Her er de tænkte Pæles Modstandstal 4 Gange saa store som for Tilfælde b).

Af Tabellen Side 210 findes:

$$z_{0x} = + \frac{27,44 - 5,75}{7,808} = 2,78.$$

$$z_{0y} = + \frac{109,800 - 5,74}{13,312} = 7,82.$$

$$s_a = \frac{1}{2} 5,0 \cdot 0,98 = 2,45.$$

Paa forrige Side er angivet Koefficienterne til Pæletrykkenes Komposanter.

Pælenes Vridningsmomenter:

Pæl Nr.	Oprindelig Pæl.			1. tænkte Pæl Faktor 10^4			2. tænkte Pæl Faktor 10^4		
	B_4	B_5	B_6	B_4	B_5	B_6	B_4	B_5	B_6
1	0	-0,105	-10,4	-4,63	0	0	0	-0,54	+2,13
2	0	-0,105	-10,4	-4,63	0	0	0	-0,54	+2,13
3	0	-0,105	-10,4	-4,63	0	0	0	-0,54	+2,13
4	0	-0,105	-10,4	-4,63	0	0	0	-0,54	+2,13
5	0	+0,105	-10,4	-4,63	0	0	0	-0,54	-2,13
6	0	+0,105	-10,4	-4,63	0	0	0	-0,54	-2,13
7	0	+0,105	-10,4	-4,63	0	0	0	-0,54	-2,13
8	0	+0,105	-10,4	-4,63	0	0	0	-0,54	-2,13
9	-0,89	0	-10,4	-4,53	0	+2,13	0	-0,55	0
10	+0,89	0	-10,4	-4,53	0	-2,13	0	-0,55	0
11	-0,89	0	-10,4	-4,53	0	+2,13	0	-0,55	0
12	+0,89	0	-10,4	-4,53	0	-2,13	0	-0,55	0

Hvis Pælegruppen paavirkes af en Kraft paa 10 t og et Moment paa 10 tm i hver Hovedakse, vil Pæl Nr. 1 blive paa-
virket af følgende Momenter (se Side 172).

$$M_{us} = 10 \frac{(-0,54 + 2,13)}{10^4} \cdot \frac{1}{0,98} + 10 (246 + 1,38 - 13,0) 10^{-4} \frac{5,0}{2} = + 0,5876 \text{ tm.}$$

$$M_{os} = - 0,5843 \text{ tm.}$$

$$M_{ut} = 10 \frac{4,63}{10^4} + 10 (140 - 0,91 + 23,4 + 0,31 + 30,7) 10^{-4} \frac{5}{2 \cdot 0,98} = + 0,5006 \text{ tm.}$$

$$M_{ot} = - 0,4914 \text{ tm.}$$

FJERDE AFSNIT.

Sammendrag til praktisk Anvendelse.

I dette Afsnit fremstilles den i de foregaaende Afsnit udviklede Beregningsmetode i sammentrængt Form, saaledes som den, der skal anvende Metoden, vil faa Brug for den.

Der anføres derfor ingen Beviser, men der vil i Teksten blive anført i Parentes de Paragraffer, hvor en nærmere Undersøgelse af vedkommende Ting er at finde.

I. Plane Pælegrupper.

§ 61. Ved en plan Pælegruppe forstaas en saadan, hvor alle Pælene er parallel med og symmetrisk anbragt om Kraftplanen.

§ 62. **Pælegrupper, hvis Pæle er simpelt understøttet foroven og forneden.** Der indføres et Koordinatsystem med X-Aksen i Pilleunderkant, positiv til højre, og Z-Aksen, positiv opad.

Pælenes Vinkel med den lodrette kaldes α og regnes positiv fra den lodrette med Uret (positiv naar aftagende z giver aftagende x).

Vi indfører for hver Pæl:

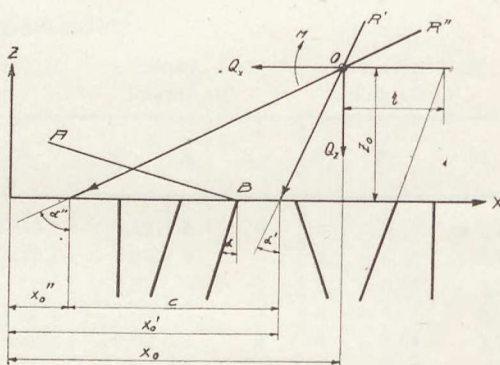


Fig. 68.

$$v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha,$$

hvor s_2 er Pælens Sammentrykningslængde, se Side 43.

For en lodret Parallelforskydning 1 nedad (§ 4) fremkaldes Kraften R' , hvis lodrette Komponent er Σv og hvis vandrette Komponent er $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha$. Abscissen til denne Krafts Skæringspunkt med Pilleunderkant er:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\Sigma v x}{\Sigma v} \\ R' \text{ danner Vinklen } \alpha' \text{ med den lodrette:} \\ \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma v} \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

For en vandret Parallelforskydning 1 til venstre fremkaldes Kraften R'' , hvis vandrette Komponent er $\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha$ og hvis lodrette Komponent er $\Sigma v \operatorname{tg} \alpha$. Abscissen til denne Krafts Skæringspunkt med Pilleunderkanten er:

$$\left. \begin{aligned} x''_0 &= \frac{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha \cdot x}{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha} \\ R'' \text{ danner Vinklen } \alpha'' \text{ med den lodrette:} \\ \operatorname{tg} \alpha'' &= \frac{\Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha}{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (198a)$$

R' og R'' skærer hinanden i Pkt. O , Pælegruppens O -Punkt. Enhver Kraft gennem dette Punkt fremkalder en Parallelforskydning af Pillen.

Der findes gennem dette Punkt to Kraftretninger vinkelret paa hinanden, for hvilke Kraft og Parallelforskydning gaar i samme Retning. Disse to Retninger kaldes Pælegruppens Hovedakser.

O -Punktets Koordinater findes af Ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}, \quad \text{hvor } c = x'_0 - x''_0, \\ x_0 &= x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (199)$$

Hvis Pillen paavirkes af et Moment M , vil den dreje sig om O -Punktet. Drejningsvinklen φ bestemmes ved:

$$\varphi = \frac{M}{I}, \quad (200)$$

hvor I er Pælenes Inertimoment om O -Punktet:

$$I = \Sigma v \eta^2. \quad (200a)$$

$\eta = x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha$ er den vandrette Afstand (positiv til højre) fra O -Punktet til Pælene.

Pælegruppens O -Punkt er saaledes beliggende, at Pælenes Inertimoment om dette Punkt er Minimum. Dette fører tidt til en direkte Bestemmelse af O -Punktet uden nogen Beregning.

Hvis Pillen paavirket af en vandret Kraft Q_x og en lodret Kraft Q_z , begge gennem O -Punktet og positive i Koordinat-aksernes negative Retninger, samt af et Moment M positiv med Uret, findes Pæletrykkenes lodrette Komposanter af Ligningen (§ 5):

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\Sigma v} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{v}{\Sigma v \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{v \eta}{I}. \quad (201)$$

Pæletrykket i en Pæl bliver Nul (§ 8):

1) For en lodret Kraft, naar Kraften har Abscissen $x_0 + e_v$, hvor:

$$e_v = - \frac{I}{\eta \Sigma v} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}. \quad (202a)$$

Alle lodrette Kræfter paa samme Side af denne lodrette Linie giver Pæletryk med samme Fortegn.

2) For en vandret Kraft, naar Kraften har Z -Koordinaten $z_0 + e_l$:

$$e_l = \frac{I}{\eta \Sigma v \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}. \quad (202b)$$

Alle vandrette Kræfter paa samme Side af denne lodrette Linie giver Pæletryk med samme Fortegn.

Enhver Kraft gennem det Punkt, der har Koordinaterne $x_0 + e_v$ og $z_0 + e_l$, giver Pæletrykket Nul, og alle ligestore Kræfter, der tangerer en Cirkel med dette Punkt som Centrum, og som drejer samme Vej om Punktet, giver samme Pæletryk i den paagældende Pæl.

Hvis Pilleunderkanten ikke er retlinet, kan en hvilken som helst ret Linie indføres som regningsmæssig Pilleunderkant, idet alle Koordinater og Vinkler da henføres hertil.

Angaaende gennemregnede Eksempler se § 11 og § 68.

§ 63. Specielle Tilfælde (§ 10).

1. Alle Pælene i Pælegruppen er parallelle.

Idet η maales fra Pælenes Tyngdepunktslinie vinkelret paa Pælene, faas Pæletrykket:

$$P = Q_z \frac{v}{\Sigma v} + M \frac{v\eta}{I}. \quad (203)$$

Denne Formel er ganske analog med den almindelige Bøjningsformel for et Tværsnit, der er paavirket af en excentrisk Normalkraft.

2. Pælene kan deles i to Grupper, indenfor hvilke de er indbyrdes parallelle.

Ifølge Sætningen om Inertimomentets Minimum ligger O-Punktet i Skæringspunktet mellem de to Pæleretningers Tyngdepunktslinier.

Har den ene Pælegruppe Hældningen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n_1}$ og den anden Hældningen $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{n_2}$ findes Pæletrykkene:

Første Gruppe (Hældning $\frac{1}{n_1}$):

$$\left. \begin{aligned} P_s &= Q_z \frac{1}{n_1 + n_2} \sqrt{1 + n_1^2} \frac{v}{\Sigma_s v} + Q_x \frac{n_2}{n_1 + n_2} \sqrt{1 + n_1^2} \frac{v}{\Sigma_s v} + M \frac{v\eta}{I} \cdot \frac{\sqrt{1 + n_1^2}}{n_1} \\ \text{Anden Gruppe (Hældning } -\frac{1}{n_2}\text{):} \\ P_l &= Q_z \frac{1}{n_1 + n_2} \sqrt{1 + n_2^2} \frac{v}{\Sigma_l v} - Q_x \frac{n_1}{n_1 + n_2} \sqrt{1 + n_2^2} \frac{v}{\Sigma_l v} + M \frac{v\eta}{I} \cdot \frac{\sqrt{1 + n_2^2}}{n_2} \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Ved $\Sigma_s v$ forstaas en Summation kun over første Gruppens Pæle, ved $\Sigma_l v$ en Summation kun over anden Gruppens Pæle. $\frac{\Sigma_s v}{v}$ og $\frac{\Sigma_l v}{v}$ kan tilnærmelsesvis sættes lig henholdsvis første og anden Pælegruppens Pæleantal.

Hvis den ene Pælegruppe bestaar af Lodpæle, f. Eks. $n_1 = n, n_2 = \infty$, findes:

Tryk i Skraapæle:

$$P_s = Q_x \sqrt{1 + n^2} \frac{v}{\Sigma_s v} + M \frac{v\eta}{I} \cdot \frac{\sqrt{1 + n^2}}{n}.$$

Tryk i Lodpæle:

$$P_l = Q_z \frac{v}{\Sigma_l v} - Q_x n \frac{v}{\Sigma_l v} + M \frac{v\eta}{I}.$$

(204a)

Er Skraapælernes Hældning negativ, skal Fortegnene for Q_x 's Bidrag til Pæletrykkene have modsat Fortegn.

Formlerne egner sig godt til en foreløbig Dimensionering, idet Momentet M ikke bør faa større Betydning, naar man placerer Pælene saa centralt om Kraftlinien som muligt og spreder dem godt. Herom se nærmere § 73.

3. Pælegruppen er symmetrisk om en lodret Linie.

I dette Tilfælde er R' lodret og R'' vandret. O-Punktet, der selvfølgelig ligger i Symmetrilinien, har Ordinaten:

$$z_0 = - \frac{\sum v x \operatorname{tg} \alpha}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (205)$$

Man ser, at z_0 kun afhænger af Skraapælene. Hvis Skraapælene i den ene Halvdel af Pælegruppen er parallelle, ligger O-Punktet i Skæringspunktet mellem Skraapælernes Tyngdepunktslinie og Symmetrilinien. Dette ses umiddelbart af Sætningen om Minimum af Inertimoment.

Pæletrykkenes lodrette Komposant er:

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\sum v} + Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\sum v \operatorname{tg}^2 \alpha} + M \frac{v \eta}{I}. \quad (205a)$$

§ 64. **Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt forneden, simpelt understøttet foroven.** Naar en Pæl, f. Eks. B i Fig. 68, er indspændt forneden, vil der for en Bevægelse vinkelret paa Pælens Længderetning fremkaldes en Modstand i samme Retning, i Fig. 68 i Linie AB , og da denne Modstand er proportional med AB 's Afstand fra det paagældende Drejningspunkt, kan man erstatte Indspændingen af en tænkt Pæl i AB , naar man blot sørger for, at Pælen gør samme Modstand som Indspændingen. Ligesom man for de virkelige

Pæle har indført $v = \frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha$, maa man da for de tænkte

Pæle indføre $u = \frac{3EI}{s_1^3} \cos^3 \alpha$, hvor s_1 er den Side 43 definerede Indspændingslængde. Ved at erstatte Indspændingsmodstanden med en Pælemodstand opnaar man, at Problemet bliver mere overskueligt, idet det da ikke er forskelligt fra det i § 61 undersøgte, og at man derfor kan skrive ganske de samme Formler op som der, naar blot alle Pæle, baade virkelige og tænkte, medtages (§ 12).

Kraften R' skærer Pilleunderkanten i et Punkt med Abscisse (§ 13):

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha) x}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} \\ R' \text{ danner Vinklen } \alpha' \text{ med den lodrette:} \\ \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Kraften R'' skærer Pilleunderkanten i et Punkt med Abscisse:

$$\left. \begin{aligned} x''_0 &= \frac{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha \cdot x}{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha} \\ R'' \text{ danner Vinklen } \alpha'' \text{ med den lodrette:} \\ \operatorname{tg} \alpha'' &= \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)}{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (206a)$$

Pælegruppens O -Punkt har Koordinaterne:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \frac{c}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}; \quad c = x'_0 - x''_0, \\ x_0 &= x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Hvis Piller paavirkes af et Moment M , vil den dreje sig om O -Punktet. Drejningsvinklen φ bestemmes ved:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{I_1}, \\ I_1 &= \Sigma v \eta^2 + \Sigma u \eta_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

hvor

η_s er den lodrette Afstand fra O -Punktet til de tænkte Pæle:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha, \\ \eta_s &= z_0 - (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (208a)$$

Her gælder ligesom i § 62, at Pælegruppens O -Punkt er saaledes beliggende, at Pælenes (her baade de oprindelige og de tænkte) Inertimoment om dette Punkt er Minimum.

Hvis Piller paavirkes af en vandret Kraft Q_x og en lodret Kraft Q_z , begge gennem O -Punktet og positive i Koordinaternes negative Retninger, samt af et Moment M positivt med Uret, findes Pæletrykkene, de virkelige Pæles lodrette og de tænkte Pæles vandrette Komposanter, af Ligningerne (§ 14):

De virkelige Pæle:

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{v}{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{v \eta}{I_1}.$$

De tænkte Pæle:

$$T \cos \alpha = -Q_z \frac{u}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + Q_x \frac{u}{\Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{u \eta_s}{I_1}.$$

(209)

Indspændingsmomentet forneden i Pælene bliver:

$$M_t = Ts_1. \quad (209a)$$

Pæletrykket i en Pæl bliver Nul (§ 15)

1) For en lodret Kraft, naar Kraften har Abscissen:

$$x_0 + e_v, \quad \text{hvor:}$$

a) for en virkelig Pæl:

$$e_v = -\frac{I_1}{\eta \Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}.$$

b) for en tænkt Pæl:

$$e_v = \frac{I_1}{\eta \Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}.$$

(210)

2) For en vandret Kraft, naar Kraften har Z-Koordinaten:

$$z_0 + e_t, \quad \text{hvor:}$$

a) for en virkelig Pæl:

$$e_t = \frac{I_1}{\eta \Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}.$$

b) for en tænkt Pæl:

$$e_t = \frac{I_1}{\eta_s \Sigma(v - u) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}.$$

(210a)

Hvis Pilleunderkanten ikke er retlinet (§ 16), kan man indlægge en regningsmæssig Pilleunderkant og i den finde baade

x'_0 og x''_0 ved Formlerne (206) og (206a), hvor x er Abscissen til de virkelige Pæles Skæringspunkter med den regningsmæssige Pilleunderkant, naar man gør x'_0 Stykket x'_p mindre og x''_0 Stykket x''_p større, hvor:

$$x'_p = \frac{\Sigma u \operatorname{tg} \alpha \cdot s_p \sec \alpha}{\Sigma (v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)}; \quad x''_p = \frac{\Sigma u s_p \sec \alpha}{\Sigma (v - u) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (211)$$

s_p er det Stykke, der afskæres paa den virkelige Pæl mellem den virkelige og den regningsmæssige Pilleunderkant (se Fig. 36).

Ellers er Beregningen ganske uforandret.

Angaaende gennemregnede Eksempler se § 19.

§ 65. Specielle Tilfælde. (§ 18).

1. Alle Pælene i Pælegruppen er parallelle.

Dette Tilfælde svarer til Nr. 2 af de specielle Tilfælde i § 63. O-Punktet ligger i Skæringspunktet mellem Tyngdepunktslinierne for de virkelige og de tænkte Pæle.

Hvis Pælene er lodrette og Pilleunderkanten vandret, findes:

Tryk i virkelige Pæle:

$$P = Q_z \frac{v}{\Sigma v} + M \frac{v \eta}{I}; \quad I = \Sigma v \eta^2. \quad (212)$$

Tryk i tænkte Pæle:

$$T = Q_x \frac{u}{\Sigma u}. \quad (212a)$$

Man ser saaledes, at Trykket i de virkelige Pæle er uafhængigt af Indspændingen, samt at hele den vandrette Kraft Q_x i Pilleunderkanten optages af Indspændingen.

2. Pælegruppen er symmetrisk om en lodret Linie.

R' er lodret og falder i Symmetrilinien, R'' er vandret. O-Punktet, der selvfølgelig ligger i Symmetrilinien, har Ordinaten:

$$z_0 = - \frac{\Sigma (v - u) \operatorname{tg} \alpha \cdot x}{\Sigma (v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)}. \quad (213)$$

Pæletrykkene bliver:

Virkelige Pæle (lodret Komposant):

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} + Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)} + M \frac{v \eta}{I_1}. \quad (213a)$$

Tænkte Pæle (vandret Komposant):

$$T \cos \alpha = -Q_z \frac{u \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + u \operatorname{tg}^2 \alpha)} + Q_x \frac{u}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + u)} + M \frac{u \eta_s}{I_1}. \quad (213b)$$

Man ser, at Q_x intet Pæletryk giver i Lodpæle, og at Q_z ingen Transversalkraft giver i Lodpæle.

3. Alle Pælene skærer hinanden i samme Punkt.

For saadanne Pælegrupper er der ingen Lempelser i en eksakt Beregning, derimod skal der i § 73 angives en Tilnærmelsesformel.

§ 66. **Pælegrupper, hvis Pæle er indspændt baade foroven og forneden.** Naar en Pæl er indspændt baade foroven og forneden, vil den, naar Pælehovedet faar en Vinkeldrejning og en Parallelforskydning vinkelret paa Pælens Længderetning, blive paavirket af en Transversalkraft og et Moment. Som man i § 64 ved de enkeltindspændte Pæle indførte en tænkt Pæl gennem Pælehovedet, kan man her indføre en tænkt Pæl gennem Pælens Midte, idet Transversalkraften ved en Beregning vil vise sig at være proportional med Afstanden fra det paagældende Drejningspunkt til en Linie vinkelret paa Pælen gennem dennes Midtpunkt. Naar Transversalkraften flyttes herved, vil Momentet i Pælehovedet være proportionalt med Vinkeldrejningen, saaledes at det kun giver et Bidrag til Pælegruppens Inertimoment. Dette Moment kaldes Pælens Drejningsmoment. Alle de hidtil anførte Formler kan derfor ogsaa anvendes her, naar blot de tænkte Pæle medtages. For disse indføres:

$$r = \frac{12EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha,$$

svarende til v for de virkelige Pæle (§ 20).

Kraften R' skærer Pilleunderkanten i et Punkt med Abscisse (§ 21): $x'_0 - s'_0$.

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= \frac{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)x}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)}; & s'_0 &= \frac{\Sigma s' r \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)}, \\ \text{hvor:} & & s' &= \frac{1}{2} s_1 \sec \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

R' danner Vinklen α' med den lodrette:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \quad (214a)$$

Kraften R'' skærer Pilleunderkanten i et Punkt med Abscisse: $x''_0 + s''_0$.

$$x''_0 = \frac{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha \cdot x}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha}; \quad s''_0 = \frac{\Sigma r s'}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (215)$$

R'' danner Vinklen α'' med den lodrette:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (215a)$$

Pælegruppens O-Punkt har Koordinaterne:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \frac{c - (s'_0 + s''_0)}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}; & c &= x'_0 - x''_0, \\ x_0 &= x'_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha' - s'_0. \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Hvis Piller paavirket af et Moment M , vil den dreje sig om O-Punktet. Drejningsvinklen φ bestemmes ved:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{I_2} \\ I_2 &= \Sigma v \eta^2 + \Sigma r \eta_t^2 + \frac{1}{3} \Sigma r s'^2. \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

η_t er den lodrette Afstand fra O-Punktet til de tænkte Pæle:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= x - x_0 + z_0 \operatorname{tg} \alpha \\ \eta_t &= z_0 + s' - (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

Her gælder ganske det samme som i § 62 om Beliggenheden af Pælegruppens O-Punkt.

Hvis Piller paavirket af en vandret Kraft Q_x og en lodret Kraft Q_z , begge gennem O-Punktet og positive i Koordinat-aksernes negative Retninger, samt af et Moment M positiv med Uret, findes Pæletrykkene, de virkelige Pæles lodrette og de tænkte Pæles vandrette Komposanter, af Ligningerne (§ 22):

De virkelige Pæle:

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha &= Q_z \frac{v}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} \\ &+ Q_x \frac{v}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{v \eta}{I_2} \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

De tænkte Pæle:

$$\left. \begin{aligned} T \cos \alpha &= - Q_z \frac{r}{\Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} \\ &+ Q_x \frac{r}{\Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'} + M \frac{u \eta_t}{I_2} \end{aligned} \right\}$$

Pælenes Drejningsmoment bliver:

$$M_s = - \frac{r s_1^2}{3 I_2} M. \quad (219a)$$

Indspændingsmomenterne i Pælene bliver da:

$$\left. \begin{aligned} \text{Foroven: } M_0 &= M_s - T \frac{s_1}{2} \\ \text{Forneden: } M_u &= M_s + T \frac{s_1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (219b)$$

Pæletrykket i en Pæl bliver Nul (§ 23):

1) For en lodret Kraft, naar Kraften har Abscissen: $x_0 + e_v$, hvor:

a) for en virkelig Pæl:

$$e_v = - \frac{I_2}{\eta \Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}, \quad (220)$$

b) for en tænkt Pæl:

$$e_v = \frac{I_2}{\eta_t \Sigma(v + r \operatorname{tg}^2 \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha'' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}.$$

2) For en vandret Kraft, naar Kraften har Z-Koordinaten:

$z_0 + e_t$, hvor:

a) for en virkelig Pæl:

$$e_t = \frac{I_2}{\eta \Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'},$$

b) for en tænkt Pæl:

$$e_t = \frac{I_2}{\eta_t \Sigma(v - r) \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha'' - \operatorname{tg} \alpha'}.$$

(220a)

Hvis Pilleunderkanten ikke er retlinet (§ 24), kan man indlægge en regningsmæssig Pilleunderkant. Herved vil hele Udviklingen være den samme som for en Pille med retlinet Underside, naar man blot overalt erstatter $s' = \frac{1}{2}s_1 \sec \alpha$ med $s' = (\frac{1}{2}s_1 + s_p) \sec \alpha$, hvor s_p er det Stykke, der afskæres paa en virkelig Pæl mellem den virkelige og den regningsmæssige Pilleunderkant.

§ 67. **Specielle Tilfælde.** (§ 25).

1. Alle Pælene i Pælegruppen er parallelle.

O-Punktet ligger i Skæringspunktet mellem Tyngdepunkts-linierne for de virkelige og de tænkte Pæle.

Hvis Pælene er lodrette og lige lange, og Pilleunderkanten vandret, findes:

Tryk i virkelige Pæle:

$$\left. \begin{aligned} P &= Q_z \frac{v}{\Sigma v} + M \frac{v\eta}{I_2} \\ I_2 &= \Sigma v\eta^2 + \frac{1}{2}s_1^2 \Sigma r. \end{aligned} \right\} \quad (221)$$

Tryk i tænkte Pæle:

$$T = Q_x \frac{r}{\Sigma r},$$

hvor Q_x altsaa er en vandret Kraft gennem de virkelige Pæles Midtpunkt.

2. Pælegruppen er symmetrisk om en lodret Linie.

R' er lodret og falder i Symmetrilinien, R'' er vandret. O-Punktet, der selvfølgelig ligger i Symmetrilinien, har Ordinaten:

$$z_0 = - \frac{\Sigma(v-r) \operatorname{tg} \alpha + \Sigma rs'}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)}. \quad (222)$$

Pæletrykkene bliver:

Virkelige Pæle (lodret Komposant):

$$P \cos \alpha = Q_z \frac{v}{\Sigma(v+r \operatorname{tg}^2 \alpha)} + Q_x \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)} + M \frac{v\eta}{I_2}. \quad (222a)$$

Tænkte Pæle (vandret Komposant):

$$T \cos \alpha = - Q_z \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{\Sigma(v+r \operatorname{tg}^2 \alpha)} + Q_x \frac{r}{\Sigma(v \operatorname{tg}^2 \alpha + r)} + M \frac{r\eta}{I_2}.$$

Man ser, at Q_x intet Pæletryk giver i Lodpæle, og at Q_z ingen Transversalkraft giver i Lodpæle.

Pælenes Drejningsmoment bliver:

$$M_s = -\frac{rs_1^2}{3I_2} M. \quad (222b)$$

§ 68. **Eksempler.** I første Afsnit §§ 11, 19 og 26 er der gennemregnet en Del Eksempler, i § 11 for simpelt understøttede Pæle, i § 19 for Pæle, der er indspændt forneden, simpelt understøttet foroven, og i § 26 for Pæle, der er indspændt baade forneden og foroven. Der er anvist en praktisk Form for Opstillingen af Beregningen, saaledes at denne bliver overskuelig og hurtigt gennemført.

Der skal her anføres enkelte færdige Formler for forskellige Pælegrupper med simpelt understøttede Pæle.

Eksempel 1. En Pille med kun tre Pæle.

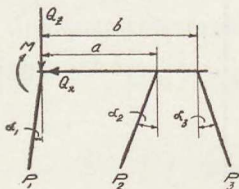


Fig. 69.

En saadan Pille er statisk bestemt, og Pæletrykkene er derfor uafhængig af Pæletværsnit og Pælelængder.

Pæletrykkene kan bestemmes grafisk ved Hjælp af den culmannske Hjælpe-linie (se Hütte III, 1919, S. 217). Her skal kun anføres en analytisk Beregning.

$$\left. \begin{aligned} k &= a \operatorname{tg} \alpha_3 + b \operatorname{tg} \alpha_2 - (b-a) \operatorname{tg} \alpha_1, \\ P_1 \cos \alpha_1 &= Q_z \frac{a \operatorname{tg} \alpha_3 + b \operatorname{tg} \alpha_2}{k} - Q_x \frac{b-a}{k} - M \frac{\operatorname{tg} \alpha_3 + \operatorname{tg} \alpha_2}{k}, \\ P_2 \cos \alpha_2 &= -Q_z \frac{b \operatorname{tg} \alpha_1}{k} + Q_x \frac{b}{k} + M \frac{\operatorname{tg} \alpha_3 + \operatorname{tg} \alpha_1}{k}, \\ P_3 \cos \alpha_3 &= Q_z \frac{a \operatorname{tg} \alpha_1}{k} - Q_x \frac{a}{k} + M \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

α_1 , α_2 og α_3 er positive som vist i Figuren.

Hvorledes disse Formler kan anvendes som foreløbige Tilnærmelser for Piller med flere end tre Pæle, men med kun tre Pæleretninger, vil blive nærmere omtalt i § 73.

Denne Type af Pælegrupper kommer meget ofte i Anvendelse ved Bolværker.

Hvis $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_3$, ser man at Momentet optages udelukkende af P_1 og P_2 .

Hvis man samtidig sætter $\operatorname{tg} \alpha_3 = 2 \operatorname{tg} \alpha_1$ og regner alle Pælenes v -Kræfter ligestore, vil man se, at en lodret Kraft gennem O-Punktet giver Pillen en lodret Parallelforskydning.

Pæletrykkene bliver da, naar man sætter $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{n}$:

$$\left. \begin{aligned} P_1 \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} &= Q_z \frac{2a+b}{3a} - Q_x \frac{(b-a)n}{3a} - M \frac{1}{a}, \\ P_2 \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} &= -Q_z \frac{b}{3a} + Q_x \frac{bn}{3a} + M \frac{1}{a}, \\ P_3 \frac{2n}{\sqrt{1+4n^2}} &= Q_z \frac{1}{3} - Q_x \frac{n}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

Eksempel 2. Pillen, der er symmetrisk om Midten, har m Lodpæle i en indbyrdes Afstand a og 1 Skraapæl med Hældningen $1:n$ til hver Side. Afstanden mellem disse er b .

Pælegruppens O -Punkt ligger i Skraapælenes Skæringspunkt:

$$z_0 = b \frac{n}{2}.$$

Hvis alle Pælenes v -Kræfter regnes lige store, findes Pæletrykkene:

$$\left. \begin{aligned} \text{Lodpæle: } P_l &= Q_z \frac{1}{m+2} + M \frac{12x}{a^2 m(m^2-1)}, \\ \text{Skraapæle: } P_s &= Q_z \frac{1}{m+2} \pm Q_x \frac{\sqrt{1+n^2}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

hvor x maales ud fra Midtlinien, positiv til højre.

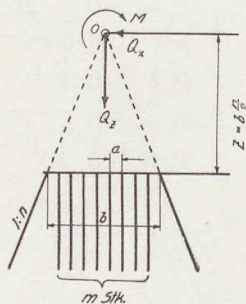


Fig. 70.

Eksempel 3. Pillen er symmetrisk og har 2 Lodpæle og 2 Skraapæle. Alle Pælene forudsættes at have samme v -Kraft.

Skraapælene har Hældningen $1:n$.

Pæletrykkene er da:

$$\left. \begin{aligned} P_1 \} &= \frac{Q_z}{4} \mp \frac{M}{b}, \\ P_4 \} &= \frac{Q_z}{4} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \pm \frac{Q_x}{2} \sqrt{1+n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

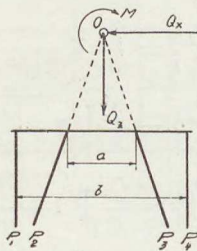


Fig. 71.

Eksempel 6. Pillen har kun 1 Skraapæl, men m parallelle Lodpæle, der alle har den indbyrdes Afstand a , og som alle antages at have samme v -Kraft.

Afstanden i Pilleunderkant mellem Skraapæl og Tyngdepunktslinien for Lodpælene kaldes b .

Pæletrykkene er:

$$\left. \begin{aligned} \text{I Skraapælen: } P_s &= Q_x \sqrt{1+n^2}, \\ \text{I Lodpælene: } P_l &= \frac{Q_z}{m} - Q_x \frac{n}{m} - M \frac{12x}{a^3 m (m^2 - 1)}. \end{aligned} \right\} (229)$$

Eksempel 7. Pillen er symmetrisk om Midten og indeholder kun Skraapæle, m i hver Pillehalvdel, alle Skraapælene har Hældningen $1:n$, og deres indbyrdes vandrette Afstand er a .

Pælegruppens O-Punkt ligger i Afstanden $b \frac{n}{2}$ fra Pilleunderkant, hvor b er Afstanden fra Midte til Midte af de to Skraapælebundter.

Hvis alle Pælene forudsættes at have samme v -Kraft, findes Pæletrykkene:

$$P = Q_z \frac{\sqrt{1+n^2}}{2nm} \pm Q_x \frac{\sqrt{1+n^2}}{2m} + M \frac{6x}{a^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) m (m^2 - 1)}. \quad (229a)$$

x er den vandrette Afstand fra O-Punkt til Pæl, positiv til højre.

Eksempel 8. Som sidste Eksempel skal her gennemregnes en Pille, hvis Pæle er indspændt foroven og forneden. Pillen har kun to lodrette Pæle af Længde l_1 og l_2 med den indbyrdes Afstand a ; Pælenes Tværsnit er det samme. Med den paa Fig. 76 viste Belastning findes:

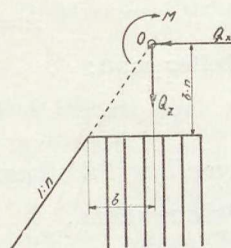


Fig. 74.

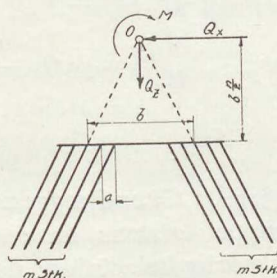


Fig. 75.

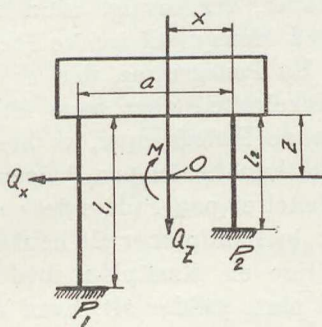


Fig. 76.

Sætter man:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \frac{l_2}{l_1 + l_2}; \quad z = \frac{1}{2} l_1 l_2 \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1^3 + l_2^3} \\ k &= \frac{a^2}{l_1 + l_2} + 3 i^2 \frac{(l_1 - l_2)^2}{l_1^3 + l_2^3}, \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

hvor i er Pæletværsnittets Inertiradius, findes:

Pæletrykkene:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= Q_z \frac{l_2}{l_1 + l_2} - M \frac{a}{k(l_1 + l_2)}, \\ P_2 &= Q_z \frac{l_1}{l_1 + l_2} + M \frac{a}{k(l_1 + l_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (230a)$$

Indspændingsmomenterne i Pælene foroven og forneden er:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} M_{0_1} \\ M_{u_1} \end{aligned} \right\} &= \pm Q_x \frac{l_1 l_2^3}{l_1^3 + l_2^3} - M \frac{i^2}{l_1 k} \left(1 \pm \frac{3(l_1 - l_2) l_1^2}{l_1^3 + l_2^3} \right) \\ \left. \begin{aligned} M_{0_2} \\ M_{u_2} \end{aligned} \right\} &= \pm Q_x \frac{l_1^3 l_2}{l_1^3 + l_2^3} - M \frac{i^2}{l_2 k} \left(1 \pm \frac{3(l_1 - l_2) l_2^2}{l_1^3 + l_2^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (230b)$$

II. Dobbeltplane, rumlige Pælegrupper.

§ 69. **Grundlæggende Begreber.** Ved en rumlig Pælegruppe forstaas en saadan, der er i Stand til at optage en vilkaarlig Belastning; denne vil altid kunne reduceres til Kræfter i tre faste paa hinanden vinkelrette Linier samt Momenter om disse tre Linier.

At en rumlig Pælegruppe er plan med Hensyn til en bestemt Kraftplan vil sige, at Kræfter i denne Plan kun giver Piller Bevægelser om Akser vinkelret paa Planen, d. v. s. at alle Bevægelser foregaar i Planen.

Ved en dobbeltplan, rumlig Pælegruppe maa man derfor forstaa en rumlig Pælegruppe, for hvilken der findes to Kraftplaner, der iøvrigt altid maa staa vinkelret paa hinanden, med Hensyn til hvilke Pælegruppen er plan.

En Pælegruppe, der er symmetrisk om to paa hinanden vinkelrette Planer, maa altid være dobbeltplan, og det er saadanne Pælegrupper, vi her vil beskæftige os med. Vi vil tilige kun tænke paa Pælegrupper, hvor de to Kraftplaner staar vinkelret paa Pilleunderkanten. Denne vælges til XY-Plan, og de to Kraftplaner til henholdsvis XZ- og YZ-Plan.

For en Kraftplan, med Hensyn til hvilken en Pælegruppe er plan, gælder alt, hvad der er anført for de i §§ 61—68 be-

handlede plane Pælegrupper, idet der med Hensyn til Formler henvises til § 58.

§ 70. **Pælenes Hældningsvinkler; tænkte Pæle.** Idet vi henviser til Fig. 54, skal vi definere følgende Vinkler:

Ved α forstaas en Pæls Vinkel med Z-Aksen.

Ved α_x forstaas Vinklen mellem Z-Aksen og Pælens Projektion paa XZ-Planen; α_x regnes positiv, naar den for aftagende z giver aftagende x .

Ved α_y forstaas Vinklen mellem Z-Aksen og Pælens Projektion paa YZ-Planen; α_y regnes positiv, naar den for aftagende z giver aftagende y .

For Pælegrupper med Pæle, der er simpelt understøttet baade foroven og forneden, gælder alle de i §§ 62 og 63 angivne Formler, naar man indfører $\operatorname{tg} \alpha_x$ og $\operatorname{tg} \alpha_y$ i Stedet for $\operatorname{tg} \alpha$ for Kræfter i henholdsvis XZ- og YZ-Planen.

Ligesom man for den plane Pælegruppe indførte tænkte Pæle, naar Pælene var indspændt, vil vi her indføre tænkte Pæle.

Naar en Pæl, der er indspændt forneden, men simpelt understøttet foroven (§ 35), faar en Forskydning vinkelret paa sin Længderetning, vil der fremkomme en Modstand herimod, og denne Modstand vil ligge i en Plan gennem Pælehovedet vinkelret paa Pælens Retning. Hvis man derfor i denne Plan indfører to paa hinanden vinkelrette tænkte Pæle, kan man fjerne Indspændingen. Den 1. tænkte Pæl kan passende lægges parallel med XZ-Planen; den faar da en Vinkel med X-Aksen lig α_x . 2. tænkte Pæl faar da Vinklen α_t med Y-Aksen bestemt ved:

$$\cos \alpha_t = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_x}. \quad (231)$$

Ved Vinklen α_{x_t} vil vi forstaa Vinklen mellem Y-Aksen og 2. tænkte Pæls Projektion paa XY-Planen. α_{x_t} regnes positiv, naar den for aftagende y giver aftagende z .

Ved Vinklen α_{z_t} vil vi forstaa Vinklen mellem Y-Aksen og 2. tænkte Pæls Projektion paa YZ-Planen. α_{z_t} regnes positiv, naar den for aftagende y giver aftagende z .

Man finder:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{x_t} &= -\sin \alpha_x \cos \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y, \\ \operatorname{tg} \alpha_{z_t} &= -\cos^2 \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y. \end{aligned} \right\} \quad (231a)$$

Svarende til Udtrykket:

$$u = \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha,$$

der i § 64 indførtes for plane Pælegrupper, indføres her:

$$\left. \begin{array}{l} \text{For 1. tænkte Pæl: } u = \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_x. \\ \text{» 2. » » : } u_t = \frac{3EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_t. \end{array} \right\} \quad (231b)$$

Naar en Pæl, der er indspændt baade foroven og forneden (§ 41), faar en Forskydning vinkelret paa sin Længderetning samt en Vinkeldrejning, vil der fremkomme en Modstand herimod, der vil bestaa af en Transversalkraft og et Moment. Som for den enkeltindspændte Pæl kan man her indføre to paa hinanden vinkelrette tænkte Pæle, men her i en Plan vinkelret paa Pælen gennem dennes Midtpunkt. Foruden Modstanden fra disse tænkte Pæle vil en Vinkeldrejning fremkalde et Moment i Pælen; dette Moment kan altid opfattes som Vridningsmomenter i den virkelige og de tænkte Pæle, og Resultanten af disse Vridningsmomenter vil altid være et Moment:

$$M_s = -\frac{EI}{s_1} \varphi,$$

hvis Akse vil være parallel med paagældende Drejningsakse.

Vridningsmomentet i 2. tænkte Pæl vil sammen med Trykket i 1. tænkte Pæl fremkalde Bøjningsmomenter i Pælen i 1. tænkte Pæls Plan, og Vridningsmomentet i 1. tænkte Pæl vil sammen med Trykket i 2. tænkte Pæl fremkalde Bøjningsmomenter i Pælen i 2. tænkte Pæls Plan.

Vi vil ligesom for den enkeltindspændte Pæl indføre 1. tænkte Pæl parallel med XZ-Planen, og finder samme Vinkler for de tænkte Pæle.

Svarende til Udtrykket

$$r = \frac{12EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha,$$

der i § 66 indførtes for plane Pælegrupper, indføres her:

$$\left. \begin{array}{l} \text{For 1. tænkte Pæl: } r = \frac{12EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_x. \\ \text{» 2. » » : } r_t = \frac{12EI}{s_1^3} \cos^2 \alpha_t. \end{array} \right\} \quad (231c)$$

Ligesom man for en plan Pælegruppe finder de i § 62 omtalte to Hovedakser, finder man for en rumlig Pælegruppe tre paa hinanden vinkelrette Hovedakser. For de symmetriske Pælegrupper, som omtales her, vil I. Hovedakse falde i Z-Aksen, II. Hovedakse i en vandret Linie i YZ-Planen, og III. Hovedakse i en vandret Linie i XZ-Planen. En Parallelforskydning i en Hovedakse vil fremkalde en Parallelforskydning i Kraftens Retning, og en Vinkeldrejning om en Akse, der skærer vinkelret to Hovedakser, vil fremkalde et Moment med Akse parallel med Drejningsaksen.

§ 71. **Pæletryk.** Disse findes ved Hjælp af det i § 58 anførte og skal ikke nærmere udvikles her. For Pælegrupper, hvis Pæle alle er parallelle, henvises til § 59.

I §§ 56 og 60 findes gennemregnede Eksempler, hvor der er givet Anvisning paa en let og overskuelig Maade at stille Beregningen op paa.

III. Sammenligning mellem ældre Beregningsmaader og eksakt Beregning, Dimensionering og Tilnærmelsesformler.

§ 72. **Ældre Beregningsmaader.** Der findes i de forskellige Haandbøger og Lærebøger*) om Fundering Regler for Beregning af Pæletryk i Pæleværker; disse Regler er meget forskellige, og ingen Steder finder man en almengyldig Udvikling, det er altid mere eller mindre specielle Tilfælde, der behandles**).

Grundreglen for de mange forskellige Beregninger er imidlertid denne, at Forholdet mellem en Skraapæls vandrette og lodrette Belastning skal være lig Tangens af Pælens Vinkel med den lodrette. Med denne Regel klarer man alt, idet Beregningen i hvert enkelt Tilfælde udformes særligt, i de fleste Tilfælde saaledes, at der er Ligevægt mellem de ydre Kræfter og Pæletrykkene, i andre Tilfælde uden Hensyn hertil.

*) Se saaledes: Brennecke: Der Grundbau, 1906. — Engels: Handbuch des Wasserbaues, 1914. — Schönweller: Fundering, 1912. — Lütken: Brobygning I, 1914. — Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch, 1919.

**) I den nye Udgave (1923) af Prof. Schönwellers Fundering er den af Prof. A. Ostenfeld i Teknisk Tidsskrift 1921 Nr. 1 angivne Beregningsmetode for Pæleværker anført i en lidt modificeret Skikkelse.

Der skal nedenfor fremføres nogle af de bedste og mest typiske Pæleberegninger, der er fremsat, og det skal undersøges, hvorledes de forholder sig i Forhold til den i denne Bog udviklede rationelle Beregningsmetode.

1) Pæleværker med kun Lodpæle.

Da disse Pæleværkers Beregning for Kræfter parallelle med Pælene ganske falder sammen med Beregningen af et plant Tværsnit, der paavirkes til Bøjning af en ekscentrisk Normalkraft, er de tidligere Beregninger heraf i Almindelighed fuldstændig korrekte. Hvis de ydre Kræfters Resultant ikke falder i Pæleretningen, fremkommer der en Bøjning, der fordeles over alle Pælene.

2) Pæleværker med Skraapæle, der alle hælder til samme Side, samt Lodpæle.

Pælegruppen paavirkes af ydre Kræfter, hvis lodrette Resultant er R og hvis vandrette Resultant er H . R fordeles over Pillen i en trapezformet Trykfigur som den i Fig. 77 viste. Hver Række Pæle tildeles sin Del af denne Belastning, saaledes at der bliver Ligevægt mellem R og Pæletrykkenes lodrette Komposant. Hvis man i en Række kun har Lodpæle, optager disse direkte deres lodrette Belastning. Paa

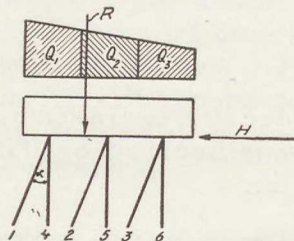


Fig. 77.

de Rækker, der indeholder Skraapæle, fordeles den vandrette Kraft. Hvis man i en saadan Række vil optage en vandret Kraft H_n , bliver Trykket i Skraapælene: $S_s = H_n \operatorname{cosec} \alpha$. Trykket i Lodpælene bliver: $S_l = Q_n - H_n \cotg \alpha$, hvor Q_n er den til paagældende Række svarende lodrette Kraft. Hvis S_l bliver negativ, maa man enten lade optage mindre vandret Kraft i den Række, eller forbinde Skraapælene og Lodpælene til Pælebukke, saaledes at Lodpælene kan optage Træk. Anvendes der Betonpæle, kan man lettere overføre Træk i en Pæl.

Denne Fremgangsmaade findes hos Lütken og Engels. Prof. Lütken tilføjer, at i Stedet for den anvendte Trapezbelastning over Pillens Grundflade, bør man indføre Inertimomentet af det samlede Pæletværsnitsareal med Hensyn til Tyngdepunktsaksen som afgørende for Kræfternes virkelige Fordeling over de enkelte Pælerækker.

Det er øjensynligt, at den Fejl, man begaar ved den anførte Fremgangsmaade, er, at man regner med, at Pælegruppens O-Punkt er Tyngdepunktet i Pilleunderkant af det samlede Pæletværsnit og maaler Ekscentriciteten derudfra i Stedet for at regne med Pælegruppens virkelige O-Punkt. At Metoden er vilkaarlig, fremgaar deraf, at man indenfor visse Grænser kan fordele den vandrette Kraft efter Behag. Metoden kan derfor føre til ganske misvisende Resultater, hvilket fremgaar af det i Fig. 78 viste Eksempel.

Pælegruppen paavirkes af en Kraft R , der gaar gennem Pilleunderkantens Midtpunkt. Hvis R 's lodrette Komponent er N og vandrette Komponent H , findes Trykket i P_2 , naar der er lige mange Lodpæle i alle tre Rækker:

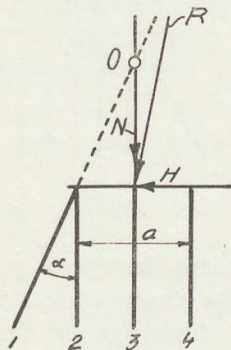


Fig. 78.

1) Efter gammel Beregning:

$$P_2 = \frac{N}{3} - H \cotg \alpha,$$

hvor α er Skraapæleens Vinkel.

2) Efter den rationelle Beregning:

$$P_2 = \frac{N}{3} - \frac{5}{6} H \cotg \alpha.$$

Hvis $N = 10H$ og $\cotg \alpha = 3,0$ findes:

$$1) P_2 = \frac{1}{3} H; \quad 2) P_2 = \frac{2,5}{3} H.$$

Pæletrykket i P_2 er altsaa i Virkeligheden 2,5 Gange saa stort som det, man finder efter den gamle Beregningsmaade. Hvis man kun sætter saa mange Lodpæle i hver Række, som der fordres efter den gamle Beregningsmaade, vil man finde $P_2 = \frac{8,94}{3} H$. Pæletrykket vil altsaa efter den gamle Metode kun findes lig ca. $\frac{1}{9}$ af dets virkelige Værdi.

For Pælegrupper med en eller kun faa Skraapæle angiver Prof. Schönweller en udmærket Beregningsmaade:

I Fig. 79 er vist en Pælegruppe med kun een Skraapæl og for Resten Lodpæle. Hvis Pælegruppen paavirkes af en skraa Kraft R , vil der fremkomme et Tryk i Skraapælen.

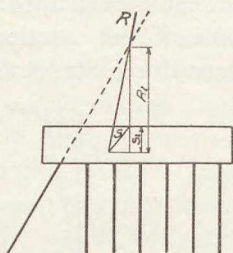


Fig. 79.

Dette maa have en saadan Størrelse S , at dets vandrette Komposant er lig den ydre Krafts vandrette Komposant; derved er S bestemt, og ved at sammensætte S og R faas en lodret Kraft:

$$R_1 = R_t - S_t,$$

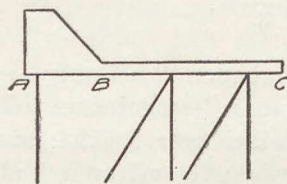
for hvilken Lodpælene skal beregnes; disse beregnes paa almindelig Maade efter Bøjningsformlen for ekscentrisk Normalkraft.

Hvis der er flere Skraapæle, regner man, at dissers Tryk virker i deres Tyngdepunktslinie, og Beregningen gennemføres derefter ligesom før.

Saalænge der kun er een Skraapæl, er Beregningen fuldstændig korrekt, og saalænge Afstanden mellem de yderste Skraapæle kun er forsvindende i Forhold til Afstanden mellem de yderste Lodpæle, giver den en god Tilnærmelse.

En mere vilkaarlig Beregning angives hos Prof. Schönweller for Pælegrupper med Pælebukke, idet der her paa Forhaand tildeles Pælebukkenes Trækpæl fuldt tilladeligt Træk.

I en rationel Beregning af en Pælegruppe maa man helt bort fra at regne med Pælebukke og kun betragte saadanne som en Foranstaltning, der gør det muligt at optage Træk i Pælene. Dog kan man ved specielle Udformninger af Piller komme saa langt bort fra Forudsætningen om, at Pillen er uendelig stiv i Forhold til Pælene, at man bliver nødt til at gaa over til en saadan Betragtning som at tale om Pælebukke, hvis man da ikke vil regne Pillen og Pælene ud efter Elasticitetsligningerne.



F.g. 80.

I Fig. 80 er vist en saadan Pille. Stykket AB er den egentlige Pille, medens BC er en tynd Plade, der kun tjener som Anker for Jordtrykket paa Spunsvæg og Pille samt til at give en forøget Belastning til Formindskelse af Trækket i Pælebukkenes Lodpæle. Imidlertid vil man her i Europa i de fleste Tilfælde

foretrække at gøre Pladen BC saa tyk, at man kan regne hele Stykket ABC som uendelig stift, medens den almindelige amerikanske Praksis er, at BC er en Tømmerunderbygning, der fortsættes ind under Kajmuren AB (se Fig. 16).

3) Pæleværker, der indeholder baade Lodpæle, fremad hældende og bagud hældende Skraapæle.

Fremgangsmaaden skal illustreres af et Eksempel.

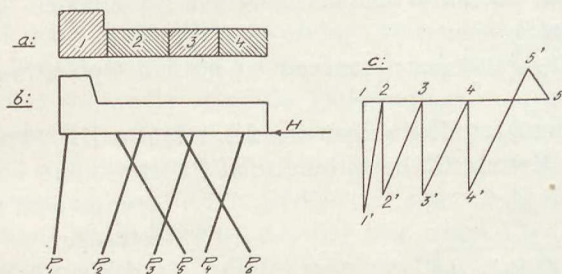


Fig. 81.

I Fig. 81 b er vist en Kajmur, der er understøttet med en Spunsvæg P_1 og 5 Pæle $P_2 - P_6$. Den lodrette Belastning er vist i Fig. 81 a , som angiver Fordelingen over Pillen. Den vandrette Belastning er H lig 1—5 i Fig. 81 c .

Først fordeles den lodrette Belastning over Spunsvæg og Trykpæle paa den i Fig. 81 a viste Maade, Belastningsareal 1 optages af P_1 o. s. v.

Dernæst foretages en Opløsning af den vandrette Kraft paa den i Fig. 81 c viste Maade:

1—1' afsættes lig den lodrette Belastning i P_1 og 1'—2 tegnes parallel med P_1 ; 2—2', 3—3' og 4—4' er lig den lodrette Belastning i henholdsvis P_2 , P_3 og P_4 og 2'—3, 3'—4 og 4'—5' er tegnet parallel med henholdsvis P_2 , P_3 og P_4 . Gennem 5 tegnes en Linie parallel med de to parallelle Trækpæle P_5 og P_6 , og denne Linie skærer 4'—5' i Punkt 5'. Pæletrykkene er da: I P_1 1'—2, i P_2 2'—3, i P_3 3'—4, i P_4 4'—5' og i P_5 og P_6 $\frac{1}{2}$ (5—5').

Man vil umiddelbart se, at Pillen ved denne Kraftopløsning ikke er i Ligevægt, hvilket ikke har forhindret Metodens hyppige Anvendelse, selv ikke hvor Pillen kun indeholder tre Pæle og saaledes er statisk bestemt, og Pæletrykkene saaledes entydigt bestemt ved den enkle Fordring, at Pillen skal være i Ligevægt. Dette kunde man vel opnaa ved at jonglere noget

med Pæletrykkene, men det er det typiske ved mange ældre Pæleberegninger, at man her har set bort fra den for Statiken, d. v. s. Ligevægtslæren, saa vigtige Fordring om Ligevægt. Hvis man ved en Pælegruppe, hvis Pæle ikke kan optage Træk, ser bort fra Fordringen om Ligevægt, vil man meget let kunne komme til det Resultat, at den i Fig. 28 viste Pælegruppe belastet med den der viste Belastning, faar Tryk i alle Pælene, medens Belastningen i Virkeligheden slet ikke kan optages.

4) Pæletrykkene beregnes ved en grafisk Opløsning i Pæleretningerne.

Som nævnt i Indledningen er der i Hütte III. 1919, S. 217 angivet en Metode til Bestemmelse af Pæletrykkene i en Pælegruppe med tre Pæleretninger.

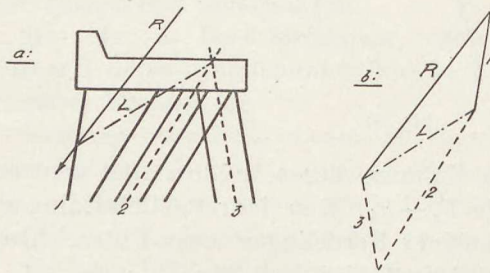


Fig. 82.

I Fig. 82a er vist en saadan Pælegruppe, der angribes af en ydre Kraft R , i Fig. 82b er Opløsningen vist. R opløses i Pæleretningen 1 og Hjælpe-
linien L , der trækkes fra R 's Skæringspunkt med Tyngdepunkts-
linien for Pæleretning 1 (paa Figuren er kun vist een Pæl) til
Skæringspunktet mellem Tyngdepunktet for de to andre Pæle-
retninger. Komposanten efter L opløses atter efter Pæleret-
ningerne 2 og 3, og Trykkene i de tre Pæleretninger bliver
1, 2 og 3, vist i Fig. 82b. Indenfor hver Pæleretning deles
Trykket (i Retning 3 Trækket) ligeligt over Pælene.

Denne Beregningsmetode betyder et overordentligt Fremskridt fra den under 3 nævnte; her er dog altid Ligevægt, og hvis R gaar gennem Pælegruppens O -Punkt, er Metoden korrekt, og dette vil i de i Praksis forekommende Tilfælde nogenlunde være Tilfældet. Hvis der kun er een Pæl i hver Retning, er Metoden altid korrekt; Pillen er da statisk bestemt.

§ 73. **Dimensionering og Tilnærmelsesformler.** En direkte Dimensionering af en Pælegruppe kan der aldrig være tale om; der er saa mange Ting at variere paa, at man er nødt til forsøgsvis at fastslaa nogle Ting for saa ved Dimensionering at bestemme Resten.

I det følgende skal der gives nogle praktiske Vink og Tilnærmelsesformler, hvorved man kan blive i Stand til at foretage en foreløbig Dimensionering; bagefter en saadan bør man altid foretage en nøjagtig Beregning af Pæletrykkene for derved at afgøre Pælenes endelige Antal og Placering; ved den endelige Beregning finder man de største Pæletryk, naar man kun belaster med de ydre Kræfter, der for paagældende Pæl giver Tryk med samme Fortegn, se herom (202) i § 62.

Før vi gaar over til almindelige Dimensioneringsformler, skal der henvises til § 68, hvor der er angivet færdige Pæletryksformler for nogle specielle Pælegrupper.

En gammel Regel, der næsten er klassisk, siger om Beregning af et Fundament, at det skal have Sikkerheden 1,5 mod Væltning om forreste Kant, hvilket vil sige, at Momentet om forreste Kant af de lodrette Kræfter skal være 1,5 Gange Momentet af de vandrette Kræfter; denne Regel, som er opstillet og gælder Fundamenter, der staar direkte paa Jord, har man uden videre overført paa Pæleværker saaledes, at man skulde have 1,5 Gang Sikkerhed mod Væltning om forreste Pæl.

At en saadan Sætning ikke kan opstilles almindeligt for Pæleværker, er vist af Prof. Schönweller*).

For imidlertid at faa en til denne Sætning svarende Sikkerhed for Pæleværker kan man sige følgende:

Naar Pælene i en Pælegruppe ikke kan overføre Træk (eller kun en enkelt Pæl er i Stand dertil), maa man kunne multiplicere de af de til Væltning virkende Kræfter, hvis Bestemmelse er tvivlsom (særlig Jordtryk) med Sikkerhedsgraden og kunne optage de saaledes fastsatte ydre Kræfter uden at faa Træk i nogen Pæl. (Se Punkt 5 i Slutningen af denne Paragraf).

Selv naar Pælene i en Pælegruppe kan overføre saavel Træk som Tryk, er der dog god Grund til udover at kræve den sædvanlige Sikkerhed ved Fastsættelse af tilladeligt Pæletryk at kræve nogen Sikkerhed mod Væltning (forstaaet som ovenfor), idet der nemlig i en saadan Pælegruppe vel er Proportionalitet mellem de ydre Kræfter og Pæletrykkene, men det kun er nogle af de ydre Kræfter, der er usikre og derfor bør forhøjes.

Vi vil i det følgende, hvor intet andet er nævnt, tale om plane Pælegrupper, da det er det mest almindelige forekommende Tilfælde.

*) Schönweller: Fundering 1923.

Ved de angivne Dimensioneringsformler er det forudsat, at alle Pælene har samme v -Kraft.

1) Alle Pælene er parallelle.

For en saadan Pælegruppe gælder som tidligere sagt for Kræfter parallelle med Pælene den almindelige Bøjningsformel:

$$P = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{I} x.$$

Hvis der findes m Rækker Lodpæle med k i hver, og Rækkerne alle har samme Afstand a , findes:

$$P_{\max} = \frac{Q}{km} + \frac{M}{\frac{1}{6} akm(m+1)}. \quad (232)$$

Her kan man variere k , m og a ; fastslås der et tilladeligt Pæletryk, og fastsættes k og den ene af Størrelserne a eller m , er dermed den anden givet.

Det ses umiddelbart, at man udnytter Pælene bedst, naar Q virker i Pælenes Tyngdepunktslinie. For varierende Beliggenhed af Q maa man sørge for, at Pælenes Tyngdepunktslinie ligger mellem Q 's Yderstillinger, bedst saaledes at de til Yderstillingerne svarende Pæletryk er lige store.

Hvis Pælegruppen paavirkes af to Momenter, M_1 og M_2 , der ligger i to paa hinanden vinkelrette Planer (svarende til skæv Bøjning af et plant Tværsnit), findes:

$$P_{\max} = \frac{Q}{km} + \frac{M_1}{\frac{1}{6} akm(m+1)} + \frac{M_2}{\frac{1}{6} a_1 mk(k+1)}, \quad (232a)$$

hvor a_1 er Pælenes Afstand i Rækkerne.

Hvis Pælegruppen paavirkes af Kræfter, der ikke er parallelle med Pælene, kan Kræfternes Resultant opløses i en Komposant i Pæleretningen og en Komposant vinkelret herpaa. Denne sidste maa optages af Pælenes Indspænding.

Er Pælene kun indspændt i Bunden, opløses Kræfternes Resultant i dens Skæringspunkt med Pilleunderkanten. Den paa Pælene vinkelrette Komposant optages ligeligt af alle Pælene ved Bøjning i disse.

Er Pælene indespændt baade foroven og forneden, opløses Kræfternes Resultant i dens Skæringspunkt med en Plan gennem Pælenes Midtpunkt. Man er da paa den sikre Side, naar

man lader den med Pælene parallelle Komposant optage af disse i Normaltryk uden Hensyn til Indspændingen og samtidig regner med et Indspændingsmoment i Pælene:

$$\left. \begin{aligned} M_o &= M_s \pm T \frac{s_1}{2}, \\ M_s &= -\frac{I s_2}{F s_1} \cdot \frac{M}{\Sigma y^2} \end{aligned} \right\} \quad (232b)$$

hvor

T er den paa Pælene vinkelrette Komposant divideret med Pæleantallet.

I og F er den enkelte Pæls Inertimoment, s_2 og s_1 dens Sammentryknings- og Indspændingslængde, M det Moment, der fremkommer, naar den med Pælene parallelle Komposant flyttes til disses samlede Tyngdepunkt, og y er Pælenes Afstand fra den Linie i Pilleunderkanten, om hvilken M giver Bøjning.

2) Pælegruppen indeholder kun to Pæleretninger.

a) Pælene er simpelt understøttet.

Den ene af de to Pæleretninger har Hældningen $\frac{1}{n_1}$ og den anden Hældningen $-\frac{1}{n_2}$. I den ene Pæleretning er der m_1 Rækker Pæle med k_1 i hver, og Rækkerne har alle samme Afstand a_1 ; i den anden Pæleretning har man de tilsvarende Værdier m_2 , k_2 og a_2 , Pælegruppen angribes af en lodret Kraft Q_z , en vandret Kraft Q_x , begge gennem Pælegruppens O-Punkt, d. v. s. Skæringspunktet mellem de to Pæleretningers Tyngdepunktslinier, samt af et Moment M (se § 10, Punkt 2).

Første Pæleretning (Hældning $\frac{1}{n_1}$):

$$\left. \begin{aligned} P_{s_{max}} &= Q_z \frac{n_1}{n_1+n_2} \cdot \frac{1}{k_1 m_1} + Q_x \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2} \cdot \frac{1}{k_1 m_1} \\ &\quad + M \frac{6a_1(m_1-1)}{a_1^2 k_1 m_1 (m_1^2-1) + a_2^2 k_2 m_2 (m_2^2-1)} \\ \text{Anden Pæleretning (Hældning } -\frac{1}{n_2}\text{):} \\ P_{l_{max}} &= Q_z \frac{n_2}{n_1+n_2} \cdot \frac{1}{k_2 m_2} - Q_x \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2} \cdot \frac{1}{k_2 m_2} \\ &\quad + M \frac{6a_2(m_2-1)}{a_1^2 k_1 m_1 (m_1^2-1) + a_2^2 k_2 m_2 (m_2^2-1)} \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

En Dimensionering af en saadan Pælegruppe kan man passende begynde med Fastsættelse af Pælens Hældninger, og disse maa helst vælges saaledes, at Resultanten af de ydre Kræfter til ingen af Siderne bliver mere skraa end Pæleretningerne. Man maa dernæst fastslaa Pælens tilladelige Maksimumstryk. Hvis man i første Omgang ser bort fra Momentet og til Gengæld sætter P_{max} lig et Tryk, der er lavere end det tilladelige Tryk, efter Skøn i Forhold til, hvor stort Momentet kan blive, kan man direkte af Formlerne bestemme $k_1 m_1$ og $k_2 m_2$ og skønsvist fordele Pælene i Rækkerne; derefter kan man ved Momentets Bidrag til Pæletrykkene, der jo maa være lig Forskellen mellem det tilladelige og det valgte Pæletryk, bestemme a_1 og a_2 . Hvis disse enten bliver for store eller for smaa, maa man fastsætte det valgte Pæletryk, der svarer til $M = 0$, henholdsvis mindre eller større, eller fordele Pælene i flere Rækker. Jo mere man er Herre over Pælens Placering, des mindre Indflydelse faar Momentet.

Det kan være, at andre Maader i visse Tilfælde fører hurtigere til Maalet, men i alt Fald vil man ret hurtigt kunne dimensionere en saadan Pælegruppe. Den første Dimensionering uden Hensyn til Momentet kan ogsaa foretages som en grafisk Opløsning.

Hvis den ene Pæleretning er lodret, f. Eks. $n_2 = \infty$, bliver Pæletryksformlerne simplere, nemlig:

$$\left. \begin{aligned} P_{s_{max}} &= Q_x \frac{n_1}{k_1 m_1} + M \frac{6a_1(m_1 - 1)}{a_1^2 k_1 m_1 (m_1^2 - 1) + a_2^2 k_2 m_2 (m_2^2 - 1)} \\ P_{t_{max}} &= Q_z \frac{1}{k_2 m_2} - Q_x \frac{n_1}{k_2 m_2} + M \frac{6a_2(m_2 - 1)}{a_1^2 k_1 m_1 (m_1^2 - 1) + a_2^2 k_2 m_2 (m_2^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \quad (233a)$$

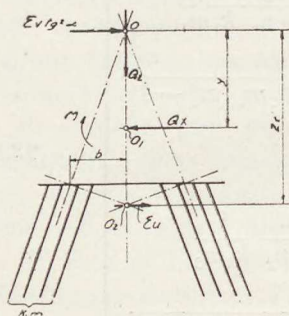


Fig. 83.

Hvis der yderligere kun findes een Række Skraapæle, bliver Formlen endnu simplere, denne er angivet i Eksempel 6, § 68.

b) Pælene er indspændt i Bunden.

Vi vil kun her behandle en om en lodret Linie symmetrisk Pælegruppe.

Pælegruppens O -Punkt O_1 kan findes som det Punkt, hvorigennem Pælegruppens Reaktion overfor en vandret Bevægelse gaar.

Ved en saadan Bevægelse 1 vil der fremkomme Normaltryk i Pælene med en vandret Resultant $\Sigma v \lg^2 \alpha$ gaaende gennem Pkt. O , Skæringspunktet for de to Pæleretningers Tyngdepunkts-linier. Desuden vil der fremkomme Transversalkræfter i Pælene, og disses Resultant er vandret og lig Σu og gaar gennem det paa Figuren viste Pkt. O_2 .

Hvis man sætter:

$$\frac{v}{u} = \frac{\frac{EF}{s_2}}{3 \frac{EI}{s_1^3}} = \frac{Fs_1^3}{3Is_2} = \gamma_1,$$

findes Afstanden y mellem O og O_1 af Ligningen:

$$\left. \begin{aligned} y \left(\gamma_1 \frac{1}{n^2} + 1 \right) &= z_t = b \left(n + \frac{1}{n} \right), \\ y &= b \frac{(1 + n^2)n}{\gamma_1 + n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (223b)$$

Man vil se, at saasnart Pælenes Hældning og b er fastslaaet, er y bestemt og dermed Pkt. O_1 . Og samtidig er Pæletrykkene bestemt ved de samme Størrelser a , k og m som i Formlerne (233), idet en vandret Kraft Q_x gennem Pkt. O_1 dels optages af Skraapælene, nemlig med $Q_x \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + n^2}$, og dels af Indspændingerne, nemlig med $Q_x \frac{n^2}{\gamma_1 + n^2}$; man har da tilnærmet:

$$\left. \begin{aligned} P_{max} &= Q_z \frac{1}{2km} + Q_x \frac{n}{2km} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + n^2} \\ &+ M \frac{6a(m-1)}{2km \left(a^2(m^2-1) + \frac{y^2}{1+n^2} + \frac{(z_t-y)^2}{\gamma_1(1+n^2)} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (233c)$$

Transversalkraften i Pælene er tilnærmet:

$$\left. \begin{aligned} T &= Q_x \frac{1}{2km} \cdot \frac{n^2}{\gamma_1 + n^2} \\ &+ M \frac{6 \frac{z_t-y}{\gamma_1 \sqrt{1+n^2}}}{2km \left(a^2(m^2-1) + \frac{y^2}{1+n^2} + \frac{(z_t-y)^2}{\gamma_1(1+n^2)} \right)}. \end{aligned} \right\}$$

c) Pælene er indspændt baade foroven og forneden.

Dette Tilfælde behandles paa samme Maade som ovenfor, idet man her blot skal tilføje Pælenes Transversalkræfter i Pælenes Midte og derfor skal sætte:

$$\left. \begin{aligned} z_t &= b \left(n + \frac{1}{n} \right) + \frac{s_1}{2} \sec \alpha \quad \text{og} \\ \gamma_2 &= \frac{\frac{EF}{s_2}}{12 \frac{EI}{s_1^3}} = \frac{Fs_1^3}{12Is_2} = \frac{\gamma_1}{4} \end{aligned} \right\} \quad (233d)$$

Herved findes:

$$y = z_t \frac{n^2}{\gamma_2 + n^2}.$$

Udtrykkene for Pæletryk og Transversalkræfter er ganske som (233c).

Bøjningsmomenterne i Pillen er:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_s \pm T \frac{s_1}{2}, \quad \text{hvor} \\ M_s &= - \frac{Is_2}{Fs_1} \cdot \frac{12M}{2km \left(a^2(m^2 - 1) + \frac{y^2}{1+n^2} + \frac{(z_t - y)^2}{\gamma_2(1+n^2)} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (233e)$$

3) Pælegrupper med tre Pæleretninger.

a) Med særligt Henblik paa Bolværker.

Vi betragter kun her Pælegrupper med simpelt understøttede Pæle.

Her vil Formlerne (223) § 68 komme i Anvendelse.

Hvis der kun er 1 Pæl i hver Retning, er Formlerne eksakte; hvis der derimod er flere Pæle i hver Retning, maa man som P_1 , P_2 og P_3 i Fig. 69 regne med Tyngdepunktslinierne for de tre Pæleretninger (se forrige Paragraf Pkt. 4), men i dette Tilfælde giver Formlerne kun en Tilnærmelse, idet der er set bort fra et eventuelt Moment, d. v. s. at man regner, at den ydre Kraft gaar gennem Pælegruppens O-Punkt. Hvis man er ret frit stillet med Hensyn til Pælenes Placering, vil man ved en nøjagtig Beregning kunne omplacere Pælene, saaledes at Pælegruppens O-Punkt kommer til at ligge i Nærheden af den Linie, hvori den ydre Kraft virker, hvorved Pæleantallet ikke behøver at variere; og man vil i de fleste

Tilfælde ikke faa fornuftige Pæletryk, uden at dette ret nær er Tilfældet.

Selv om Tilnærmelsen saaledes ofte vil give det rigtige Pæleantal, bør man dog aldrig undlade efter Dimensioneringen at eftervise Pæletrykkene ved en nøjagtig Beregning.

b) Med særligt Henblik paa Bropiller.

α) Pælene er simpelt understøttede.

Bropiller vil saa godt som altid være symmetrisk om en lodret Linie. Man bør altid placere Lodpælene saa langt fra hinanden som muligt, da de derved bliver godt i Stand til at optage et Moment.

En saadan Pille er vist i hystaaende Fig. 84.

Hvis de parallelle Skraapæle i den ene Halvdel af Pillen ikke har særlig stor Afstand, d. v. s. at a ikke er ret stor, kan man ved en foreløbig Dimensionering regne med følgende Fordeling af Kræfterne:

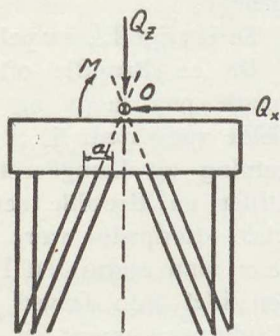


Fig. 84.

En lodret Kraft Q_z optages ligeligt af alle Pælene.

En vandret Kraft Q_x optages udelukkende af Skraapælene; dette gælder eksakt.

Et Moment optages udelukkende af Lodpælene.

Denne Fordeling af Belastningen bør man altid ved saadanne Piller tilstræbe ved at gøre Afstanden a mellem Skraapælene lille, da disse baade bliver paavirket af Q_z og Q_x , medens Lodpælene kun bliver paavirket af Q_z og saaledes vanskeligere kan udnyttes.

Paa denne Maade er det ikke svært at finde de passende Pæleantal, for derefter ved en nøjagtig Beregning at bestemme Pæletrykkene.

Det sker dog, særlig hvis Pælegruppen indeholder mange Pæle, at man ikke kan samle Skraapælene saaledes som her forudsat. I saa Tilfælde er Kraftfordelingen ikke saa klar, idet man maa regne med, at Skraapælene ogsaa bliver paavirket af Momentet. Ved en foreløbig Dimensionering tager man Hensyn hertil ved at fastslaa et lidt mindre tilladeligt Tryk i Skraapælene.

Da Pælegruppens O-Punkt ligger i Skæringspunktet mellem de to Skraapæleretningers Tyngdepunktslinier, vil man se, at det er heldigt at placere Skraapælene saaledes, at O-Punktet kommer til at ligge i Nærheden af den vandrette Linie, hvor Q_x virker. Dog skal man ikke for at opnaa dette, hvis Q_x ligger meget højt, give Skraapælene en altfor lille Hældning, da det altid betaler sig at optage noget Moment i Lodpælene for at udnytte disse lige saa meget som Skraapælene.

Se iøvrigt Eksempel 2—6 i § 68.

Da en Bropille ofte skal kunne optage vandrette Kræfter baade paa langs og paa tværs af Broen, vil man i saa Tilfælde være nødt til at ramme Skraapæle baade i Broens Tværetning og Længderetning. Hvis ovenstaaende Fig. 84 forestiller en Bropille set i Broens Længderetning, kan de der viste »Lodpæle« være Skraapæle i Broens Længderetning. Her faar man endnu en Fordel ved at ramme disse yderst i Pillen, idet man derved gør Pillen i Stand til at optage et stort Vridningsmoment (se nærmere herom i 3. Afsnit, Side 197).

β) Pælene er indspændt (enten kun fornedet eller baade foroven og fornedet).

Her kan ligesom for Pælegrupper med kun 2 Pæleretninger findes det Stykke y , som Pælegruppens O-Punkt kommer til at ligge længere nede, end hvis Pælene var simpelt understøttet:

$$y = \frac{\frac{n^2}{1+n^2} z_t + \frac{k_l}{k_s} \left(z_t - \frac{b}{n} \right)}{(\gamma + n^2) + \frac{k_l}{k_s} (1 + n^2)} \quad (234)$$

hvor k_s er Skraapælenes og k_l Lodpælenes Antal.

Man kan da regne med følgende Fordeling af Kræfterne, hvorved man er paa den sikre Side:

En lodret Kraft, Q_z , optages ligeligt i Normaltryk i alle Pælene.

En vandret Kraft, Q_x , optages dels af Skraapælene, dels af Pælenes Indspændinger.

Den Del, der optages af Indspændingerne, er:

$$\left. \begin{aligned} Q'_x &= Q_x \frac{\gamma}{(\gamma + n^2) + \frac{k_l}{k_s}(1 + n^2)} \\ \text{Den Del, der optages af Indspændingerne, er:} \\ Q''_x &= Q_x \frac{n^2 + \frac{k_l}{k_s}(1 + n^2)}{(\gamma + n^2) + \frac{k_l}{k_s}(1 + n^2)} \end{aligned} \right\} \quad (234a)$$

Indspændingsmomenterne i Pælene er da:

Pælene kun indspændt forneden:

$$M_u = \frac{s_1}{k_l + k_s} Q''_x. \quad (234b)$$

Pælene indspændt baade foroven og forneden:

$$M = \pm \frac{s_1}{2(k_l + k_s)} Q''_x.$$

Et Moment, M , optages udelukkende af Lodpælene.

Der fremkommer dog tillige følgende Indspændingsmomenter i Pælene:

Pælene kun indspændt forneden:

$$M = \frac{z_t s_1}{k_l + k_s} \cdot \frac{M}{\gamma \Sigma y^2}, \quad (234c)$$

hvor y er Afstanden fra Pillens Midte til Lodpælene.

Pælene indspændt baade foroven og forneden:

$$M = M \left(-\frac{Is_2}{Fs_1 \Sigma y^2} \pm \frac{z_t s_1}{2(k_l + k_s)} \cdot \frac{1}{\gamma \Sigma y^2} \right). \quad (234d)$$

4) Pælegrupper, hvis Pæle alle gaar gennem samme Punkt. (Pælene indspændt forneden).

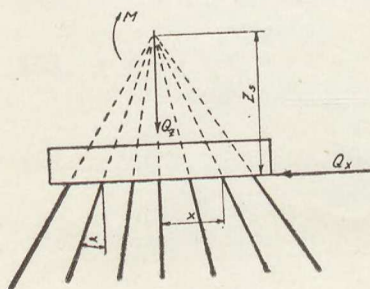


Fig. 85.

En saadan Pille er, hvis Pælene var simpelt understøttede, bevægelig, og derfor vil Pælenes Indspænding ikke her, som ved andre Piller, være af sekundær Betydning, men være af afgørende Betydning for Pælenes Stabilitet og maa derfor medtages.

Naar en saadan Pille er symmetrisk om en lodret

Akse, kan man opstille følgende Tilnærmelsesformler, se § 18 Punkt 3:

Naar Pælenes Antal er m , og de angribes af en lodret Kraft Q_z i Symmetrilinien, en vandret Kraft Q_x i Pilleunderkanten samt af et Moment, findes Pæletrykkene:

$$P = Q_z \frac{\cos \alpha}{\sum \cos^2 \alpha} + M \frac{x}{\sum x^2}. \quad (235)$$

Den vandrette Komposant af Transversalkraften i Pælehovedet er:

$$T \cos \alpha = \frac{Q_x}{m} + M \frac{1}{z_s m}. \quad (235a)$$

Ved en foreløbig Beregning kan man sætte:

$$P_{max} = \frac{Q_z}{m} + \frac{6M}{am(m+1)}, \quad (235b)$$

hvor a er Pælenes indbyrdes Afstand.

Ved Hjælp af disse Formler gennemføres en foreløbig Dimensionering let.

5) Pælegrupper, hvis Pæle ikke kan overføre Træk.

Hvis Resultanten af de ydre Kræfter ligger saaledes, at den overhovedet kan optages af Pælegruppen, maa man først skønne, hvor mange af Pælene, der er virksomme, d. v. s. faar Tryk, regne igennem og eventuelt regne om, hvis det skønnede har vist sig at være forkert; Gennemregningen foregaar efter de ovenanførte Regler. Se iøvrigt nærmere § 8. De tilladelige Yderstillinger for den ydre Kraft i en saadan Pælegruppe er anført i § 8 (se Fig. 28), hvoraf fremgaar, at der ikke maa findes noget Punkt i Kraftlinien, der har alle Pælene til samme Side.

RETTELSE.

Side 44, Formel (3), $\varphi = + \frac{T_s s^2}{2EI_r} - \dots$, læs: $\varphi = - \frac{T_s s^2}{2EI_r} - \dots$

» 50, Linie 15 f. o., $\frac{F}{s_2} \cos^2 \alpha$, »: $\frac{EF}{s_2} \cos^2 \alpha$.

» 55, Formel (18), $\pm \sqrt{(\Sigma v - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + 4 (\Sigma v \operatorname{tg} \alpha)^2}$,
læs: $\pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Sigma v - \Sigma v \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 + 4 (\Sigma v \operatorname{tg} \alpha)^2}$.

» 57, Linie 4 f. o., $M = - R_{lf_v} = - R_v f_l$, læs: $M = R_{lf_v} = R_v f_l$.

» 62, » 11 f. o., »som« er faldet ud.

» 64, » 12 f. n., $\Sigma v x$ og Σv gælder kun for Skraapælene.

» 65, » 20 f. o., Side 17, læs: Side 57.

» 69, næstsidste Linie før § 11, $\varepsilon = O$, læs: $\varepsilon = 0$.

» 97, Lin. 1 og 2 f. n., $M_o = M_s - T \frac{s'}{2}$, læs: $M_o = M_s - T \frac{s_1}{2}$.

$$M_u = M_s + T \frac{s'}{2} \qquad M_u = M_s + T \frac{s_1}{2}.$$

» 117, » 10 f. o., »i en« skal udelades.

» 117, » 8 f. n., » S_M i denne Linie;« læs: » S_M ; denne Linie,«.

» 118, » 1 f. o., »Ellipsoide«, læs: »Ellipsoide (Retnings-
ellipsoide, se § 6, Pkt. 5)«.

» 119, » 5 f. o. y_l og y_v , læs: y'_l og y'_v .

» 141, » 3 f. n., Nulmomentets Plan, læs: Nulmomentets
Akse.

» 153, » 8 f. n., En lodret Bevægelse, »: En vandret Be-
vægelse.

» 153, » 6 og 7 f. n.,
En vandret Komposant, læs: En lodret Komposant.

» » » »: » vandret »

» 156, » 10 f. o., $\dots - (\Sigma v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \cdot x \dots$, læs:
 $\dots - \Sigma (v \operatorname{tg} \alpha_x \operatorname{tg} \alpha_y \cdot x \dots$

