DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

—60

T.B. 579 gl.

F. V. Meyer.

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

Dubl.

Grundtræk

af

Sandsynlighedsregningen

ved

Adolph Steen.

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

Kjøbenhavn.

C. A. Reitzels Forlag.

1864.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

Forord.

De smaa Forhold, hvorunder vi i saa mange Henseender arbejde i Danmark, gjöre sig i höj Grad gjældende med Hensyn til Arbejder, der tilsigte at fremme Undervisningen i Fag, der maae tælle et indskrænket Antal Dyrkere. Sandsynlighedsregningens Behandling støder tilmed paa den Vanskelighed, at Undervisningen deri for Nogle maa indskrænkes til de mest elementære Udviklinger og Anvendelser paa Spil, Livrenter, Livsforsikkringer m. m. (jfr. de af Overskoledirektøren udgivne Meddelelser angaaende Skolelærer-Examen 1861), medens den for Andre hviler paa vanskelige mathematiske Theorier, hvilket for Ex. gjælder om de Studerende ved Universitetet, der forberede sig til Magisterkonferens i Mathematik, Astronomi eller Physik. En Bog, der satte sig blot eet af disse Formaal, vilde neppe kunne erholde noget synderligt Publikum; ved derimod at forene begge Formaal i en kort Fremstilling, tör man haabe, at paa den ene Side de, der attraae det Mindre, ved nogen Vejledning kunne finde sig tilrette i hvad de behøve, paa den anden Side de, der fordre Mere, erholde en Ledetraad, der kan tjene til Grundlag for videregaaende

Studium, og at derhos de ikke faa Studerende, som nu beskjæftige sig med de mathematiske Discipliner, erholde lettet Adgang til et begrændset Bekjendtskab med et vigtigt Afsnit af Mathematikken.

Jeg tör ikke haabe, at Vanskelighederne ved dette Arbejde ere overvundne. Hvor Fordringerne have været stridende, har jeg foretrukket den exakte Fremstilling for den populære, da det dog tilsidst er igjennem en exakt Udvikling, at Kundskaben udbredes sikkrest, om end tillige langsomst. Ved Fremstillingen af de mindste Qvadraters Methode tör jeg ikke vente, at min Mangel paa Praxis har været uden al Indflydelse paa den theoretiske Udvikling; men kunde Gangen og Formen i Fremstillingen end have været heldigere, saa haaber jeg dog i ethvert Tilfælde, at det Meddelte skal være klart og brugbart ved et første Studium.

Mai 1864.

Sandsynlighedsregning.

Historie og Litteratur.

Sandsynlighedsregningens Historie giver et smukt Exempel paa, hvorledes der af tilsyneladende underordnede videnskabelige Betragtninger kan udvikle sig store og smukke Resultater af almindelig Gyldighed og gjennemgribende Betydning; thi den har sin Rod i Spörgsmaal hentede fra Spillebordet og den hjælper os til at udgranske Naturens og den sociale Samfundsordens Love.

Man havde allerede længe vidst, at Risico og Gevinst i Spil maatte staae i vist Forhold til hinanden efter de Omstændigheder, der vare gunstige eller ugunstige for Spilleren, men det var først Fermat (1601—1665) og Pascal (1625—1662), som underkastede disse Spörgsmaal en exakt Behandling og løste vanskeligere Problemer af den Art. De besvarede det Spörgsmaal, hvorledes to eller flere Spillere skulde dele Indsatsen, naar de vilde standse Spillet inden det var sluttet, og da denne Deling maatte ske i Forhold til hvers rimelige Udsigt til at vinde, saa blev Opgaven disse Sandsynligheders nöjagtige Bestemmelse, og de løste den hver paa sin Maade, Fermat mest almindelig ved Kombinationslæren.

Huyghens (1629—1695) samlede de forskjællige hidtil løste Problemer og tilföjede nye, i et Værk kaldet: de Ratiociniis in ludo aleæ 1657, der kan betragtes som det første Værk over denne Materie. Derefter have Hudde,

Witt og Halley (1656—1742) anvendt Theorien paa Menneskelivets Forhold; den sidste konstruerede den første Dødelighedstavle. Jacob Bernoulli (1654—1705) opstillede og løste forskjællige Problemer og gav en ny og grundigere Theori, støttet dels til Læren om Kombinationer, dels til Binomialformlen, udkommen 1713 ved hans Neveu Nicolas Bernoulli under Titel af: Ars conjectandi. Han fandt, som han siger efter 20 Aars Drøftelse, Beviset for den höjst vigtige Sætning, hvorefter ved et stort Antal Forsøg eller Iagttagelser Forholdet imellem de indtrufne eller iagttagne Begivenheder stedse nærmer sig mere til Forholdet imellem Sandsynlighederne for dem, jo flere Forsøg der gjöres eller jo flere Iagttagelser der anstilles. Omtrent samtidig udkom Montmort essai sur les jeux de hasard (2 Udg. 1714) og Moivre doctrine of chances, det sidste 1711 i philos. transactions under en anden Titel, men i de tre selvstændige Udgaver (1718—38—58), dette Værk i udførligere Skikkelse oplevede, har det den nævnte Titel. Moivre (1667—1754) anvender ikke blot Kombinationstheorien, men ogsaa rekurrente Rækker og lineære Differensligninger med konstante Koefficienter. I Anledning af Jac. Bernoullis Theorem undersøger han Sandsynligheden for, at Afvigelsen imellem de to Forhold (imellem Begivenhedernes eller Forsøgenes Antal paa den ene Side og deres Sandsynligheder paa den anden) ligger indenfor visse givne Grændser. Denne Undersøgelse er mærkelig dels ved Anvendelsen af Stirlings Fremgangsmaade for en approximativ Beregning af Produkter af meget store Tal, dels ved sit Forhold til Sandsynlighedsregningens vigtigste Udvikling i den nyeste Tid. Nu følger en Række Forfattere, der især fæste Opmærksomheden paa Sandsynlighedsregningens Anvendelse paa forskjællige Forhold i Befolkningen, med Hensyn til Fødsler, Ægteskaber og Dødelighed, saasom Deparcieux, Kerseboom, Wargentin, Simpson, Süssmilch, Baily og Duvillard, der have givet Formler til Beregning af Livrenter og Livsforsikkringer. Daniel Bernoulli lærte at

skjælne imellem det mathematiske Haab og det moralske Haab, hvilket sidste han ogsaa forsøgte at underkaste exakt Beregning.

Hidtil havde man af de bekjendte Chancer for hver Begivenhed beregnet Sandsynligheden for dens Indtræffen; Bernoulli og Moivre havde tilmed vist, at af en stor Mængde Begivenheder maatte Antallet af de enkelte Begivenheder stedse nærme sig til Proportionalitet med deres Sandsynligheder. Bayes viste (Philos. transactions 1763), hvorledes man af en lang Række gjorte Forsøg eller Iagttagelser med Rimelighed kunde slutte sig til en vis begrændset Sandsynlighed for Begivenhedernes Indtræffen, samt bedömme, hvorvidt de indtrufne Begivenheder skyldes bestemte Aarsager.

Laplace (1749—1827) samlede den hele Sandsynlighedsregnings Theori i Foredrag ved l'école normale 1795, hvortil sluttede sig essai philos. sur le calcul de probabilité (6 Udg. 1840) uden Anvendelse af mathematiske Betegnelser og som Indledning til Théorie analytique des probabilités (2 Udg. 1814). Han anvender navnlig den omvendte Differensregning og sin nye Theori om genererende Funktioner, og behandler omtrent alle de Problemer, paa hvilke Sandsynlighedsregningen har fundet Anvendelse. Deriblandt maa ogsaa mærkes det rimelige Udfald af Vidneforhører, Afstemninger i vælgende og lovgivende Forsamlinger, Domsafsigelser. Disse Spörgsmaal ere mere specielt tagne for af Poisson (1781—1840) recherches sur les probabilités des jugemens Paris 1837, som forudskikker en meget klar Fremstilling af Sandsynlighedsregningens Theori.

Den vigtigste Anvendelse af Sandsynlighedsregningen er dog den, som gaaer ud paa at finde det rimeligste Resultat af flere anstillede Iagttagelser. Côtes (1682—1716) havde givet en simpel Regel derfor, som vel var praktisk, men ikke korrekt og gav Anledning til formegen Famlen. Efterat Lagrange (1736—1813) og Laplace havde behandlet Problemet, blev det Legendre

(1752—1833) og især Gauss (1777—1855), som fandt dets Løsning ved den saakaldte mindste Qvadraters Methode, hvorefter det Resultat stiller sig som det rimeligste, der gjör Summen af Qvadraterne paa Fejlene til Minimum. Efter at have udviklet Methoden i Theoria motus corporum coelestium Hamburg 1809 og anvendt den 1810 paa Bestemmelsen af Planeten Pallas's Bane, forelagde Gauss sin Theori i tre Afhandlinger 1821, 1823 og 1826, af hvilke de to første ere samlede under Titel: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ Gött. 1823, den sidste som supplementum theor. combin. o. s. v. (En Oversættelse af disse og flere mindre Arbejder af Gauss haves paa Fransk af Bertrand Méthode des moindres carrés Paris 1855). Encke har i Berlin. Astron. Jahrbücher for 1834, 35, 36 videre bearbejdet Theorien og Bessel har anvendt den i stor Udstrækning ved de preussiske Gradmaalinger.

Af andre gode Skrifter mærkes:

Quetelet lettres sur la théorie des probabilités. Bruxelles 1846.

Cournot élémens du calc. des prob. Paris 1843.

Liagre calcul des prob. et théorie des erreurs. Bruxelles 1852.

En kort Fremstilling af de mindste Qvadraters Methode findes i Brünnow Lehrbuch der sphär. Astronomi Berlin 1862 og i Kunzek Höhere Physik Wien 1856.

Sandsynlighedens mathematiske Bestemmelse.

1. En Begivenhed kaldes sandsynlig, naar der er Mere, der taler for dens Indtræffen end imod den. Det kommer derved ikke an paa om Begivenheden er forbigangen eller tilkommende, virkelig eller blot mulig; Sandsynligheden betragtes i Almindelighed som ganske uafhængig af om Begivenhederne ere indtrufne, om de ville indtræffe oftere, altsaa fra et aldeles abstrakt Standpunkt.

Den subjektive Sandsynlighed er afhængig af personlig Kjendskab til de Forhold, der betinge Begivenheden, og er forskjællig fra den objektive, som afhænger af de virkelige Forhold. Poisson kalder den første probabilité, den sidste chance. Plat og Krone med en enkelt bestemt Mønt kunne saa godt som aldrig objektivt have samme Sandsynlighed; men subjektivt faae de det, saalænge man ikke kjender Møntens Tilböjelighed til lettere at vise den ene Side frem end den anden.

2. Den mathematiske Sandsynlighed p for en Begivenhed er Forholdet mellem Antallet af Tilfælde, som ere gunstige for den, og det hele Antal mulige Tilfælde, forsaavidt de alle ere lige mulige (have samme chance). Sandsynligheden for at trække en hvid Kugle af en Urne A med 4 hvide og 6 sorte og af en Urne B med 10 hvide og 15 sorte er i begge Tilfælde $p = \frac{2}{5}$, hvilket ogsaa ses klarere ved den Betragtning, at hver Urne indeholder Kugler i Grupper af 2 hvide og 3 sorte, A 2 saadanne, B 5, at man lige let kan gribe en Kugle af hver Gruppe, og at Sandsynligheden for hvidt i hver af dem er $\frac{2}{5}$.

Sandsynligheden for en Begivenhed er altid mindre end 1, men den behøver ikke at kunne udtrykkes som rational Brøk; Tilfældene kunne være uendelig mange og deres Forhold kan da blive irrationalt. Naar en Mønt kastes paa et vist Areal z, saa vil Sandsynligheden for, at dens Midtpunkt falder paa et vist Areal ζ deraf, være $\frac{\zeta}{z}$, som kan være irrational.

3. Lad E betegne en vis Begivenhed, for hvilken v Tilfælde ere gunstige, u ugunstige, mulige $v+u=a$, saa er Sandsynligheden

$$\text{derfor } p=\frac{v}{v+u}=\frac{v}{a}, \quad \text{derimod } q=\frac{u}{v+u}=\frac{u}{a}. \tag{1}$$

Heraf følger $$p+q=1, \tag{2}$$

altsaa Summen af Sandsynlighederne for to Begivenheder, der udelukke hinanden, er 1. Har man $v=u$, faaes $p=q=\frac{1}{2}$.

Vished indtræder, naar alle mulige Tilfælde tillige ere gunstige, og fremstilles ved $p=1$. Fuldstændig Uvished haves, naar de gunstige og ugunstige Tilfælde ere lige mange, $p=q=\frac{1}{2}$. Umulighed finder Sted, naar intet Tilfælde er gunstigt, saa faaes $p=0$.

Sandsynlighed for at kaste Sex med een Terning er $\frac{1}{6}$, Sandsynlighed for ikke-Sex er $\frac{5}{6}$. Kastes med to Terninger paa een Gang eller efter hinanden, saa kunne disse vise tilsammen

12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 Öjne
paa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 Maader.

Sandsynlighed for 7 Öjne er da $\frac{1}{6}$, for et andet Antal $\frac{5}{6}$, for 6, 7 eller 8 Öjne $\frac{4}{9}$, for flere end 8 og færre end 6 derimod $\frac{5}{9}$, for 5, 6, 7, 8, 9 Öjne bliver det $\frac{2}{3}$, imod dette Antal $\frac{1}{3}$ o. s. v.

Hovedsætninger om Sandsynligheden som afhængig af givne Betingelser (a priori).

4. Antages en Begivenhed at være indtruffen, saafremt to andre, E_1 og E_2, ere indtrufne, saa vil Sand-

synligheden for den afhænge af Sandsynlighederne for disse to. Beholdes Betegnelserne i 3 med Indices og betegnes den Begivenhed, som ikke er E_1, ved F_1 og ligesaa ikke-E_2 ved F_2, saa haves saamange mulige Tilfælde, som der gives Kombinationer af de mulige Tilfælde for hver, altsaa $a_1 a_2$, ligeledes $v_1 v_2$ gunstige, hvorimod $v_1 u_2$, $u_1 v_2$ og $u_1 u_2$ angive de gunstige Tilfælde for følgende Kombinationer: $E_1 F_2$, $E_2 F_1$, $F_1 F_2$. Sandsynligheden for Sammentræf af E_1 og E_2 (baade E_1 og E_2) er da

$$P = \frac{v_1 v_2}{a_1 a_2} = p_1 p_2. \qquad (3)$$

Første Hovedtheorem. Sandsynligheden for en Begivenhed, som først er indtruffet, naar **baade** den ene **og** den anden af to andre Begivenheder ere indtrufne, er Produktet af Sandsynlighederne for disse to Begivenheder.

Ex. Sandsynligheden for to Sexer med to Terninger er $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (jfr. Ex. i 3).

Sandsynligheden for baade E_1 og F_2 er $\frac{v_1 u_2}{a_1 a_2} = p_1 q_2$, for baade F_1 og E_2 er $\frac{u_1 v_2}{a_1 a_2} = q_1 p_2$, for baade F_1 og F_2 er $\frac{u_1 u_2}{a_1 a_2} = q_1 q_2$. Da

$$p_1 p_2 + p_1 q_2 + q_1 p_2 + q_1 q_2 = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) = 1,$$

er der Vished for en af de fire Forbindelser $E_1 E_2$, $E_1 F_2$, $F_1 E_2$, $F_1 F_2$.

Er en Begivenhed afhængig af Sammentræf af flere Begivenheder, der hver for sig have Sandsynlighederne $p_1, p_2 \ldots p_n$, saa er Sandsynligheden derfor

$$P = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n.$$

Da Faktorerne i dette Produkt ere mindre end 1, bliver den sammensatte Begivenheds Sandsynlighed stedse mindre jo mere sammensat den er. Uendelig mange Begivenheders Sammentræf kan give en uendelig lille Sandsynlighed, men et Produkt af uendelig mange Faktorer kan ogsaa konvergere til en endelig Størrelse. Haves saaledes en Række Urner, hvori befindes 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 o. s. v. Kugler, hvoraf

1 hvid i hver, Resten sorte, saa er Sandsynligheden for at trække 1 sort Kugle af dem alle

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{63}{64}\ldots = P.$$

Denne Størrelse konvergerer til $\frac{1}{2}$, naar Urnernes Antal voxer i det Uendelige, fordi ifølge Wallis's Udtryk for π (jfr. min Differential- og Integralregn. p. 149) haves

$$\frac{2}{\pi} = \frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{35}{36}\cdot\frac{63}{64}\ldots, \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{8}{9}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{80}{81}\ldots$$

Ligeledes ses Sandsynligheden for at trække en sort Kugle af alle dem med et lige Antal Kugler at nærme sig til $\frac{2}{\pi} = 0{,}6366\ldots$ og af dem med et ulige Antal til $\frac{\pi}{4} = 0{,}7854\ldots$

Ex. At bestemme Sandsynligheden for at udføre Subtraktionen af to i ciffrede Tal uden at laane (have Tallene ulige mange Ciffre, er i det højeste Antal).

Da hvert Ciffer kan have ti Værdier, gives der 100 Kombinationer af de under hinanden staaende Ciffre. Følgende 55 Tilfælde ville være gunstige. Næmlig
er det øverste Ciffer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
vil der henholdsvis i 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Tilfælde ikke være at laane. Sandsynlighed for ikke at laane er ved hver enkelt Subtraktion 0,55, altsaa for to i ciffrede Tal er Sandsynligheden $0{,}55^i$. For to 7ciffrede Tal bliver det $0{,}55^7 = 0{,}0152244$ (imellem $\frac{1}{66}$ og $\frac{1}{65}$).

5. Sandsynligheden for at Begivenheden E indtræffer m og ikke-E eller F n Gange vil med de brugte Betegnelser ifølge 4 være

$$P = p^m q^n, \qquad (4)$$

og da heri Faktorernes Orden er vilkaarlig, ses tilmed, at den Orden, hvori de m Gange E og de n Gange F følge paa hverandre, er aldeles uden Indflydelse paa Sandsynligheden P, saa at der for Ex. er samme Sandsynlighed for ethvert af følgende Sammentræf: *EEF*, *EFE* og *FEE*. Sættes $m+n=\mu$, saa vil (4) for $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ stedse give $(\frac{1}{2})^\mu$, som alene afhænger af μ.

6. At bestemme Sandsynligheden p' for, at E skal indtræffe mindst 1 Gang af n.

Man finder simplest Løsningen ved først at søge Sandsynligheden for ikke-E eller F n Gange, som er

$$q^n = (1-p)^n.$$

Men de to Begivenheder, som bestaae den ene i lutter F og den anden i ikke lutter F (mindst 1 Gang E), udelukke hinanden, saa at Summen af deres Sandsynligheder er 1 (jfr. (2)), altsaa haves

$$(1-p)^n + p' = 1,$$

hvoraf

$$p' = 1-(1-p)^n. \tag{5}$$

Heraf kan atter findes, hvormange Gjentagelser der skulle finde Sted for at Sandsynligheden for Sammentræffet bliver p', næmlig

$$n = \frac{\log(1-p')}{\log(1-p)}. \tag{6}$$

Et Problem af denne Art, Gjenstand for Strid imellem Pascal og en vis Chev. de Méré, angaaer hvormange Kast man skal gjöre baade med 1 Terning og med 2, for at have ligestor Sandsynlighed for og imod at faae henholdsvis Sex og Dobbeltsex. Sættes $p' = \frac{1}{2}$ og henholdsvis $p = \frac{1}{6}$ og $p = \frac{1}{36}$, faaes følgende Værdier

$$n = -\frac{\log 2}{\log 5 - \log 6} = 3{,}8018\ldots,$$

$$n = -\frac{\log 2}{\log 35 - \log 36} = 24{,}605\ldots,$$

saa at 4 Kast med 1 Terning giver Sandsynligheden for Sex over $\frac{1}{2}$, men først 25 Kast med 2 ville lade Sandsynlighed for Dobbeltsex overskride $\frac{1}{2}$. De Méré antog urigtig det hele Antal mulige Kast (henholdsvis 6 og 36) proportionalt med det Antal, som gav Sandsynlighed lidt over $\frac{1}{2}$ for enkelt eller dobbelt Sex, altsaa 4 og 24.

Et andet Spörgsmaal af samme Art er: naar i et Lotteri Antallet af Gevinster forholde sig til Antaltet af Nitter som 1 til N, hvormange Nummere bör man saa

tage for at have Sandsynlighed $\frac{1}{2}$ for at vinde? Man finder

$$n = -\frac{\log 2}{\log\left(1-\frac{1}{N}\right)}.$$

I det gamle Tallotteri droges 5 Tal af 90, altsaa Sandsynlighed for et bestemt Tal var $\frac{1}{18}$; derved faaes $13 > n > 12$.

Det er altid muligt i (5) at tage n saa stor, at Sandsynlighed for mindst 1 Gang E bliver saa stor man vil; thi $(1-p)^n$ konvergerer til 0. Medens det Umulige aldrig indtræffer, saa kan det lidet sandsynlige (p meget lille) ved et tilstrækkeligt Antal Gjentagelser bringes til at faae enhver Sandsynlighed for at indtræffe, saa nær Vished man vil. Det samme ses paa følgende Maade.

Sættes i nedenstaaende Formel (Ramus Alg. p. 184), hvor i voxer i det Uendelige,

$$e^x = \text{Lim}\left(1+\frac{x}{i}\right)^i,$$

$i = n$, $x = -np$, faaes

$$e^{-np} = \text{Lim}\,(1-p)^n,$$

følgelig $$\text{Lim}\,p' = 1 - e^{-np} = \frac{e^{np}-1}{e^{np}}.$$

Da heri n er uendelig, saa kan man ved at gjöre p uendelig lille, faae en endelig Værdi m for np, eller sættes $p = \frac{1}{\alpha}$, $n = m\alpha$, saa er

$$p' = \frac{e^m-1}{e^m}, \qquad (7)$$

som konvergerer til 1, naar m voxer. Er $pn = 1$, $p = \frac{1}{n}$, saa haves $$p' = \frac{e-1}{e} = 0{,}6321\ldots,$$

altsaa næsten $\frac{2}{3}$ er Sandsynligheden for, at E skal indtræffe mindst 1 Gang ved et Antal Gjentagelser, som er omvendt proportional med Sandsynligheden for E. Indeholder en Urne 10000 sorte og 1 hvid Kugle, er Sandsynlighed for 1 Gang hvidt i 10000 Træk, naar den trukne Kugle hver Gang lægges ned igjen, $\frac{e-1}{e}$ eller næsten $\frac{2}{3}$. (7) bestemmer Sandsynligheden for mindst 1 Gang hvidt i m Gange 10000 Træk.

7. Hvis den indtrufne Begivenhed ændrer Forholdet imellem de gunstige og de mulige Tilfælde, saa maae Faktorerne i Produktet undergaae deraf følgende Forandringer. Indeholder en Urne a hvide og b sorte Kugler, $a+b=c$, saa er Sandsynligheden for at trække to hvide Kugler efter hinanden, naar den udtrukne ikke lægges ned,

$$P = p_1 p_2 = \frac{a(a-1)}{c(c-1)}.$$

Sandsynligheden for m hvide og n sorte i en ligegyldig, men bestemt Orden bliver

$$\frac{a(a-1)\ldots(a-(m-1))\,b(b-1)\ldots(b-(n-1))}{c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-(m+n-1))}.$$

For $a=\infty$, $b=\infty$, bliver dette Udtryk til $\frac{a^m b^n}{c^{m+n}}$, altsaa det samme som om Kuglerne lagdes ned igjen; ved et uendeligt Antal Kugler er det ligegyldigt, om et udtrukket endeligt Antal lægges ned eller ej.

Ex. Sandsynligheden for af et Spil Kort med 16 røde og 16 sorte Kort at trække de 16 røde i 16 Træk er

$$\frac{16.15.14\ldots3.2.1}{32.31.30\ldots19.18.17} = \frac{1}{601080390}.$$

I 601080390 Forsøg vilde de 16 røde Kort have Sandsynligheden næsten $\frac{2}{3}$ for at indtræffe 1 Gang (jfr. 6).

8. Antages en Begivenhed at kunne indtræffe paa forskjællig Maade, under Forudsætning af forskjællige Sandsynligheder for hver Maade, saa afhænger dens Sandsynlighed af dem, der gjælde for de forskjællige Forudsætninger. Er Begivenheden indtruffen, naar enten E_1 eller E_2 er indtruffet og man har for E_1 v_1 gunstige, u_1 ugunstige, a_1 mulige Tilfælde og lignende for E_2, saa kunne de, hvis et af de a_1 Tilfælde indtræffer ligesaa let som et af de a_2, uden Forandring i deres Sandsynlighed ændres til (jfr. 2),

for E_1 $v_1 a_2$ gunst., $u_1 a_2$ ugunst., $a_1 a_2$ mul. Tilf.,
for E_2 $v_2 a_1$ — $u_2 a_1$ — $a_1 a_2$ — —,
altsaa i Alt $v_1 a_2 + v_2 a_1$ — $u_1 a_2 + u_2 a_1$ — $2 a_1 a_2$ — —.

Sandsynligheden for enten E_1 eller E_2 er altsaa

$$p = \frac{v_1 a_2 + v_2 a_1}{2 a_1 a_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_1}{a_1} + \frac{v_2}{a_2}\right).$$

Men Sandsynligheden for Begivenhedens Indtræffen igjennem et af de a_1 Tilfælde er netop $p_1 = \frac{1}{2}\frac{v_1}{a_1}$ og igjennem et af de a_2 bliver det $p_2 = \frac{1}{2}\frac{v_2}{a_2}$; thi da et af de første ligesaa let indtræffer som et af de sidste, saa er Sandsynlighed for et Tilfælde af hver Gruppe for sig $\frac{1}{2}$, og naar man griber i første Gruppe er Sandsynligheden for Begivenheden $\frac{v_1}{a_1}$, altsaa (jfr. (3), baade — og) $p_1 = \frac{1}{2}\frac{v_1}{a_1}$, og paa samme Maade faaes p_2. Man har da

$$p = p_1 + p_2. \qquad (8)$$

Andet Hovedtheorem. Sandsynligheden for en Begivenhed, som er indtruffet, naar **enten** den ene **eller** den anden af to andre Begivenheder er indtruffet, er Summen af Sandsynlighederne for disse to Begivenheder.

Det Anførte udvides let til det Tilfælde, hvor Begivenheden indtræffer paa een af n Maader, idet man først faaer

$$p = \frac{1}{n}\left(\frac{v_1}{a_1} + \frac{v_2}{a_2} + \frac{v_3}{a_3} \ldots \frac{v_n}{a_n}\right)$$

og dernæst $p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$.

Ex. 1. En Kugle skal trækkes af een af to Urner, den ene med 5 hvide og 1 sort, den anden med 3 hvide og 4 sorte. Sandsynligheden for, at den bliver hvid, er da

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{7}\right) = \frac{53}{84},$$

Middeltallet af Sandsynlighederne for hvidt af hver Urne for sig. Man kunde have givet Urnerne lige mange Kugler uden Forandring af Sandsynlighederne ved at give den ene 35 hvide 7 sorte, i Alt 42, den anden 18 hvide 24 sorte, ligeledes 42; samles de i een, faaes 53 hvide 31 sorte og 84 i Alt, altsaa $p = \frac{53}{84}$.

Ex. 2. En Urne indeholder n hvide og sorte Kugler i ubekjendt Forhold, Sandsynligheden for at trække en hvid søges.

$n+1$ Tilfælde ere mulige og lige rimelige, Sandsynligheden for hvert altsaa $\frac{1}{n+1}$. Der kan være

af hvide Kugler $0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots . n-1, \quad n,$

af sorte altsaa $n, \quad n-1, \quad n-2, \quad n-3 \ldots . \quad 1, \quad 0.$

Sandsynligheden for at Trækket giver hvidt er altsaa under de forskjællige Forudsætninger

enten $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{0}{n}$, eller $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, eller $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n} \ldots .$

eller $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}$, eller $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{n}$.

Følgelig Sandsynligheden for hvidt i det Hele

$$p = \frac{1}{(n+1)n}\Big(0+1+2+\ldots(n-1)+n\Big) = \frac{1}{2},$$

hvilket var at forudse.

Ex. 3. Indeholder samme Urne flere hvide end sorte Kugler, findes Sandsynligheden for hvidt paa følgende Maade.

a. $n = 2i+1$ giver $i+1$ Tilfælde mulige, nærmlig der kan være

af hvide Kugler $i+1, \quad i+2, \quad i+3 \ldots 2i, \quad 2i+1,$

af sorte $\quad i, \quad i-1, \quad i-2 \ldots 1, \quad 0.$

Man faaer da

$$p = \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1}{2i+1}\Big((i+1)+(i+2)\ldots 2i+(2i+1)\Big) = \frac{3i+2}{2(2i+1)}.$$

$i=0$, $n=1$, $p=1$, Vished for hvidt; $i=\infty$, $n=\infty$, $p=\frac{3}{4}$, altsaa for andre i $\frac{3}{4} < p < 1$.

b. $n = 2i+2$ giver ligeledes $i+1$ mulige Tilfælde, nærmlig svarende til

hvide Kugler $i+2, \quad i+3 \ldots 2i+1, \quad 2i+2,$

sorte $\quad i, \quad i-1 \ldots \quad 1, \quad 0.$

Herved bliver $\quad p = \frac{3i+4}{2(2i+2)},$

indesluttet imellem de samme Grændser som før.

Differensen imellem de to Sandsynligheder er

$$\frac{3i+4}{2(2i+2)} - \frac{3i+2}{2(2i+1)} = \frac{i}{4(i+1)(2i+1)},$$

hvis Maximum indtræffer for $i = \frac{1}{2}$, men da i skal være hel, maa man tage $i = 1$, o: $n = 4$ og $n = 3$ give den største Differens $\frac{1}{24}$, hvorimod baade $i = 0$ og $i = \infty$ give Differensen 0.

Ex. 4. Indeholder een Urne c Kugler, hvoraf a hvide, bliver Sandsynligheden for hvidt $\frac{a}{c}$ uden Hensyn til Fordelingen i Grupper, men hvis Grupperne fordeles paa en given Maade i flere Urner, afhænger Sandsynligheden for hvidt af Fordelingen. Antages Grupperne at indeholde

$c_1, c_2 \ldots c_r$ Kugler, tilsammen c,

hvoraf ere $a_1, a_2 \ldots a_r$ hvide, tilsammen a,

saa er Sandsynligheden for at gribe hvidt i hver Gruppe, naar de ere samlede i een Urne, henholdsvis $\frac{c_1}{c}, \frac{c_2}{c} \ldots \frac{c_r}{c}$, men naar de ere fordelte hver i sin Urne er Sandsynligheden $\frac{1}{r}$. Da dernæst Sandsynligheden for i hver Gruppe at gribe hvidt er $\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2} \ldots \frac{a_r}{c_r}$, saa bliver Sandsynligheden for hvidt, naar alle ere samlede

$$p = \frac{c_1}{c} \cdot \frac{a_1}{c_1} + \frac{c_2}{c} \cdot \frac{a_2}{c_2} + \cdots + \frac{c_r}{c} \cdot \frac{a_r}{c_r} = \frac{a}{c},$$

og naar de ere fordelte i r Urner

$$p = \frac{1}{r}\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \cdots + \frac{a_r}{c_r}\right).$$

Ere 2 hvide og 1 sort Kugle fordelte i to Urner, U_1 og U_2, uden nærmere Angivelse af Fordelingsmaaden, saa ere følgende Tilfælde mulige:

U_1 kan indeholde enten 1 sort eller den første hvide eller den anden hvide,

U_2 vil saa indeholde enten 2 hvide eller 1 sort og anden hvide eller 1 sort og første hvide.

I hvert Tilfælde er Sandsynligheden for hvidt henholdsvis

$$\tfrac{1}{2}(1+0), \quad \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1), \quad \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1),$$

og da alle tre Tilfælde ere lige mulige, bliver Sandsynligheden for hvert $\frac{1}{3}$, følgelig for hvidt i Alt

$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(1+0)+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)=\tfrac{2}{3},$$

ganske som om der kun var 1 Urne.

9. Er Sandsynligheden for hvert af de a_1 Tilfælde i 8 ikke den samme som for hvert af de a_2, saa fik man istedenfor samme Faktor til $\frac{v_1}{a_1}$, $\frac{v_2}{a_2}\ldots\frac{v_n}{a_n}$ en ny Faktor til hver. Antages saaledes Sandsynlighederne for de forskjællige Maader, hvorpaa Begivenheden kan indtræffe, at være $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, og Sandsynligheden for dens Indtræffen under hver Forudsætning $p_1, p_2 \ldots p_n$, saa har den i det Hele for sig Sandsynligheden

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n. \qquad (9)$$

10. Sandsynligheden for at Begivenheden E indtræffer m Gange og ikke-E eller F n Gange, idet Ordenen af de paa hverandre følgende E og F er aldeles vilkaarlig, vil ifølge (4) og (8) være

$$P = p^m q^n + p^m q^n + p^m q^n + \ldots (C_{m+n,m}) = C_{m+n,m} p^m q^n,$$

idet $C_{m+n,m}$ eller Antallet af Kombinationer af $m+n$ Elementer til n er det samme som Antallet af Permutationer af m E og n F. Man faaer da ifølge bekjendte Formler

$$P = \frac{[m+n]}{[m][n]} p^m q^n. \qquad (10)$$

Heraf følger, at Sandsynlighederne for Begivenheder, som afhænge af $m+n$ Sammentræf af E og F, uden Hensyn til Ordenen, blive de forskjællige Led i Binomialformlen, efter det forskjællige Antal E og F. Derfor vil Summen af disse Sandsynligheder blive, idet $m+n=\mu$,

$$(p+q)^\mu = 1,$$

hvorved udtrykkes, at een af dem er vis.

Sandsynligheden for, at E indtræffer mindst m Gange iblandt $\mu = m+n$, vil ifølge (8) og (10) være

$$\left.\begin{aligned} P = p^\mu + \frac{\mu}{1} p^{\mu-1}q + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^{\mu-2}q^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots\ldots n} p^m q^n. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Saaledes er Sandsynligheden for 2 Gange Sex i 4 Kast med een Terning $\frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{216} = 0{,}116..$, men for mindst 2 Gange Sex i 4 Kast

$$p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 = \frac{1+4.5+6.25}{6^4} = \frac{171}{1296} = 0{,}132...$$

Ligeledes Sandsynligheden for mindst 1 Gang Krone i 2 Kast med en Mønt, hvor Chancerne for Plat og Krone ere lige, er $p^2+2pq = \frac{3}{4}$. D'Alembert beregnede dette urigtig, idet han sagde, hvis Krone falder først, er Sagen afgjort, kommer Plat først, saa kan derefter følge Krone eller Plat; af 3 Tilfælde ere 2 gunstige, Sandsynligheden $\frac{2}{3}$. Fejlen er, at det Tilfælde, hvor Krone falder først, regnes for 1, medens det indeholder 2, baade Krone-Krone og Krone-Plat.

Antages Sandsynlighederne for Plat og Krone ikke ens, hvilket er det rimeligste, uden at det dog vides, hvilken der har störst Chance for sig, saa kan man fremstille Sandsynligheden for den gunstigste ved $\frac{1}{2}(1+\delta)$, for den anden ved $\frac{1}{2}(1-\delta)$. En Gjentagelse af den samme Begivenhed, Plat eller Krone, vil have en Rimelighed for sig, som er

$$\tfrac{1}{4}(1+\delta)^2 + \tfrac{1}{4}(1-\delta)^2 = \tfrac{1}{2}(1+\delta^2),$$

derimod for, at ingen Gjentagelse skal finde Sted, faaes

$$\tfrac{1}{4}(1-\delta^2) + \tfrac{1}{4}(1-\delta^2) = \tfrac{1}{2}(1-\delta^2).$$

Forholdet imellem disse bliver istedenfor 1

$$\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} = 1 - \frac{2\delta^2}{1+\delta^2}.$$

Holdes der 1 Rd. paa Gjentagelse af enten Plat eller Krone, saa maa der holdes $\left(1 - \frac{2\delta^2}{1+\delta^2}\right)$ Rd. imod, for Ex. hvis $\delta = \frac{1}{10}$, bliver $1 - \frac{2\delta^2}{1+\delta^2} = 94\ \beta$.

Ex. A og B spille et Parti, hvor det kommer an paa Færdighed, og A mener at Partiet bliver lige, naar han giver B 2 Points forud af de 3, der kræves for at vinde. Hvilken Sandsynlighed har A for at vinde 1 Point, og hvorledes forholder hans Færdighed sig til B's?

Da A ikke kan vinde uden at have 3 Points efter hverandre, saa maa han antage at have ligesaa megen Sandsynlighed for dette, som imod det. Er A's Sandsynlighed for at vinde 1 Point altsaa p, saa maa

$$p^3 = \tfrac{1}{2}, \quad \text{følgelig} \quad p = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} = 0{,}79.$$

Heraf følger, at B's Sandsynlighed for at vinde 1 Point er

$$q = 1 - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} = 0{,}21,$$

og da Spillernes Færdighed maa være proportional med Sandsynligheden for at vinde, faaes Forholdet imellem A's og B's Færdighed at være

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{1}{0{,}26} = 3{,}85.$$

Havde A kun kunnet give 1 Point forud, maatte han antages at besidde Sandsynligheden $\frac{1}{2}$ for at vinde mindst 3 Points iblandt 4, altsaa (ifølge (11))

$$p^4 + 4p^3q = \tfrac{1}{2},$$

men $q = 1 - p$ giver

$$4p^3 - 3p^4 = \tfrac{1}{2},$$

hvoraf $\quad p = 0{,}6143, \quad q = 0{,}3857$

og Forholdet imellem A's og B's Færdighed

$$\frac{0{,}6143}{0{,}3857} = 1{,}59.$$

Hovedsætninger om Sandsynligheden som afhængig af stedfundne Begivenheder (a posteriori).

11. Antages en indtruffen Begivenhed E at kunne være fremkaldt af forskjællige Aarsager, og at Sandsynligheden for den, naar den ene Aarsag virker, er p_1, men

Sandsynligheden for den, under Forudsætning af den anden virkende Aarsag, er p_2, saa findes Sandsynlighederne ϖ_1 og ϖ_2 for, at virkelig den første eller den anden Aarsag har været tilstede, paa følgende Maade. Da Begivenheden kan indtræffe enten under den ene eller under den anden Forudsætning, saa er Sandsynligheden for at den overhovedet skal indtræffe p_1+p_2. Dernæst er Sandsynligheden for at baade Begivenheden er indtruffet og den første Aarsag har været virkende $(p_1+p_2)\varpi_1$, men da der for Begivenheden under første Aarsags Virkning haves Sandsynligheden p_1, saa maae disse Størrelser være ligestore, og samme Betragtning anstilles med Hensyn til den anden Mulighed. Man har altsaa

$$(p_1+p_2)\varpi_1 = p_1, \quad (p_1+p_2)\varpi_2 = p_2,$$

følgelig $$\varpi_1 = \frac{p_1}{p_1+p_2}, \quad \varpi_2 = \frac{p_2}{p_1+p_2}. \qquad (12)$$

Tredie Hovedtheorem. Sandsynligheden for, at en indtruffen Begivenhed skyldes en vis Aarsag, er Qvotienten af Sandsynlighederne for Begivenhedens Indtræffen paa Grund af denne Aarsag og for Begivenhedens Indtræffen overhovedet.

Ex. 1. Er en hvid Kugle trukket af en af Urnerne i Ex. 1 til 8, saa er der en Sandsynlighed $\varpi_1 = \frac{35}{53}$ for, at Trækket er sket af den første, $\varpi_2 = \frac{18}{53}$ for, at det er sket af den anden.

En Udvidelse af (12) til et større Antal af mulige Aarsager sker let og giver almindelig

$$\varpi_r = \frac{p_r}{p_1+p_2+p_3\cdots p_n}.$$

Ex. 2. En Urne indeholder n Kugler, hvoraf 1 er udtrukken og befunden hvid. Hvilken Sandsynlighed er der for, at Urnen indeholder r hvide Kugler? Hvilken er der for, at et nyt Træk skal give en hvid Kugle igjen?

Eftersom de hvide Kuglers Antal er $1, 2, 3 \ldots r \ldots n$, bliver Sandsynligheden for hvidt a priori $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \cdots \frac{r}{n} \cdots \frac{n}{n}$,

altsaa for et Indhold af netop r hvide bliver Sandsynligheden

$$\varpi_r = \frac{r}{1+2+3\ldots n} = \frac{2r}{n(n+1)}.$$

Vished faaes kun for $r = \frac{n(n+1)}{2}$ (Trigonaltallene), men da tillige $r \leqq n$, kan kun haves $r = n = 1$. ϖ_r bliver $\frac{1}{2}$ for $r = \frac{n(n+1)}{4}$, samt $r \leqq n$, altsaa $r = n = 3$.

Sandsynligheden for i et nyt Træk at faae hvidt bliver forskjællig, eftersom den udtrukne Kugle lægges ned igjen efter Trækningen eller ej. Lægges den ned, saa kan hvidt komme ud, hvis baade Sammensætningen af Urnen er saaledes, at r Kugler ere hvide (Sands. ϖ_r), og man i saa Tilfælde trækker hvidt $\left(\text{Sands. } \frac{r}{n}\right)$, men da heri r kan være enten 1, eller 2, eller 3 ... eller n, saa er Sandsynligheden for at den næste udtrukne Kugle er hvid

$$p' = \frac{\varpi_1 + 2\varpi_2 + 3\varpi_3 \ldots n\varpi_n}{n} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{1^2+2^2+3^2\ldots n^2}{n},$$

som bliver (ifølge min Ren Math. p. 350 øverst)

$$p' = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3.n} = \frac{2n+1}{3n}.$$

For $n = \infty$ faaes $p' = \frac{2}{3}$, som er Minimum; naar n aftager, voxer p' indtil $n = 1$ giver $p' = 1$.

Lægges den trukne Kugle ikke i Urnen igjen, saa kan hvidt komme ud, baade fordi Sammensætningen af Urnen er af en vis Beskaffenhed (Sandsynlighed ϖ_r), og der i saa Tilfælde kommer hvidt $\left(\text{Sands. } \frac{r-1}{n-1}\right)$, hvorved mærkes, at r enten kan være 1 eller 2 o. s. v. Man finder altsaa for et nyt Træk af en hvid Kugle Sandsynligheden

$$p' = \frac{0.\varpi_1 + 1.\varpi_2 + 2.\varpi_3 \ldots + (r-1)\varpi_r \ldots + (n-1)\varpi_n}{n-1}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{0.1+1.2+2.3\ldots+(r-1)r\ldots+(n-1)n}{n-1} = \frac{2}{3},$$

idet Tælleren er en Differensrække af anden Orden. Resultatet er uafhængigt af n.

Ex. 3. Hvis $n-1$ Kugler ere udtrukne af samme Urne som i Ex. 2 og alle ere hvide, hvad er da Sandsynligheden for at den resterende er hvid?

To Tilfælde ere mulige, enten indeholder Urnen lutter hvide eller 1 ikke-hvid og $n-1$ hvide. Sandsynlighederne for at faae $n-1$ hvide Kugler under de to Forudsætninger ere 1 og $\frac{1}{n}$ (det sidste lig Sandsynligheden for at lade den ikke-hvide tilbage), altsaa Sandsynligheden for det første er

$$\varpi_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}.$$

$n=1$ giver $\varpi_1 = \frac{1}{2}$, som var at vente; $n=\infty$ giver $\varpi_1 = 1$, der er Vished efter uendelig mange Træk af samme Art.

12. Ex. Antages en Urne at indeholde højest 3 Kugler, af hvilke een er trukket ud og lagt ned igjen n Gange og de x Gange har den været hvid; hvilken Sandsynlighed har enhver af Urnens mulige Sammensætninger for sig?

Da man har $0 < x < n$, saa gives der 3 Muligheder, nemlig, idet de ikke-hvide Kugler betegnes som sorte,

1 hv. 1 s., 2 hv. 1 s., 1 hv. 2 s.;

Sandsynligheden for x hvide $(n-x)$ sorte (jfr. (11)) er da

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{n-x} = \frac{2^x}{3^n}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} = \frac{2^{n-x}}{3^n},$$

hvoraf udledes Sandsynlighederne for de forskjællige Sammensætninger ifølge (12)

$$\varpi_1 = \frac{3^n}{\mu}, \qquad \varpi_2 = \frac{2^{n+x}}{\mu}, \qquad \varpi_3 = \frac{2^{2n-x}}{\mu},$$

idet $$\mu = 3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x}.$$

Nu vil Sandsynligheden for i et nyt Træk at faae en hvid Kugle ifølge (3) og (8) eller (9) være

$$p' = \tfrac{1}{2}\varpi_1 + \tfrac{2}{3}\varpi_2 + \tfrac{1}{3}\varpi_3$$

eller $$p' = \frac{3^{n+1} + 2^{n+x+2} + 2^{2n-x+1}}{6(3^n + 2^{n+x} + 2^{2n-x})}.$$

Er heri $\frac{x}{n} = \frac{1}{2}$, faaes

$$\varpi_1 = \frac{9^x}{9^x + 2.8^x}, \quad \varpi_2 = \frac{8^x}{9^x + 2.8^x} = \varpi_3, \quad \frac{\varpi_1}{\varpi_2 + \varpi_3} = \frac{9^x}{2.8^x},$$

hvilken sidste er mindre end 1, naar $x < 6$, men større end 1 for $x \gtrless 6$, og for $x = \infty$, $n = \infty$ faaes $\varpi_1 = 1$, saa at Sandsynligheden for en Sammensætning af Urnen af 1 hvid og 1 sort Kugle nærmer sig til Vished, naar det udtrukne Antal hvide Kugler er det Halve af det hele Antal. Man finder $p' = \frac{1}{2}$, uafhængig af x og n.

Er dernæst $\frac{x}{n} = \frac{2}{3}$, vil ϖ_2 nærme sig til 1, p' til $\frac{2}{3}$, naar x og n voxe, ligeledes for $\frac{x}{n} = \frac{1}{3}$ vil ϖ_3 konvergere til 1, p' til $\frac{1}{3}$.

I de her betragtede tre Tilfælde, hvor Antallet af Trækningerne har været meget stort, har Sandsynligheden for Urnens Sammensætning af hvide og sorte Kugler i samme Forhold som de udtruknes stedse nærmet sig mere til 1, Symbolet for Vished, ligesom ogsaa Sandsynligheden for i et nyt Træk at faae hvidt har nærmet sig til det samme Forhold. Men dette er kun Følgen af en almindelig Lov.

For en Begivenhed E med Sandsynligheden p for sig, q imod sig, vil man have Sandsynligheden

$$P_\alpha = \frac{[\alpha+\beta]}{[\alpha]\,[\beta]}\, p^\alpha q^\beta$$

for α Gjentagelser af E og β af ikke-E. Antages nu $n = \alpha + \beta$ at være konstant, kan man søge α og β saaledes bestemte, at P_α bliver Maximum; P_α skal i saa Tilfælde være det største Led i $(p+q)^{\alpha+\beta} = (p+q)^n$. Men nu er

$$\frac{P_r}{P_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{p}{q} = \left(\frac{n+1}{r} - 1\right) \frac{p}{q},$$

hvilket aftager, naar r voxer. Man vil følgelig have

$$\frac{P_1}{P_0} > \frac{P_2}{P_1} > \cdots > \frac{P_\alpha}{P_{\alpha-1}} > \frac{P_{\alpha+1}}{P_\alpha} > \cdots > \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} > \frac{P_n}{P_{n-1}},$$

og skal nu P_α være Maximum, saa maa

$$\frac{P_\alpha}{P_{\alpha-1}} > 1 > \frac{P_{\alpha+1}}{P_\alpha},$$

følgelig $P_\alpha > P_{\alpha-1}$ og $P_{\alpha+1} < P_\alpha$ eller Rækken af Led i $(p+q)^n$ maa være voxende til P_α, aftagende fra P_α, saaledes

$$\ldots . P_{\alpha-2} < P_{\alpha-1} < P_\alpha \quad \text{og} \quad P_\alpha > P_{\alpha+1} > P_{\alpha+2} \ldots .$$

Betragtes blot $P_{\alpha-1}$, P_α og $P_{\alpha+1}$, faaes

$$\frac{[\alpha+\beta]}{[\alpha-1][\beta+1]} p^{\alpha-1} q^{\beta+1} < \frac{[\alpha+\beta]}{[\alpha][\beta]} p^\alpha q^\beta ,$$

$$\frac{[\alpha+\beta]}{[\alpha][\beta]} p^\alpha q^\beta > \frac{[\alpha+\beta]}{[\alpha+1][\beta-1]} p^{\alpha+1} q^{\beta-1} ,$$

eller $$\frac{p}{\alpha} > \frac{q}{\beta+1} \quad \text{og} \quad \frac{q}{\beta} > \frac{p}{\alpha+1} ,$$

følgelig faaes $$\frac{\alpha+1}{\beta} > \frac{p}{q} > \frac{\alpha}{\beta+1} , \tag{13}$$

saa at Forholdet imellem Sandsynlighederne for og imod E ikke afviger meget fra $\frac{\alpha}{\beta}$ og mindre jo större α og β blive. — Det samme indses ogsaa ved at sætte den sidste Relation under hel Form, nærmlig som $$q\alpha + q > p\beta , \quad p\beta + p > q\alpha$$

eller $$p\beta + p > q\alpha > p\beta - q ,$$

hvoraf erholdes

$$\frac{p}{q}\left(1+\frac{1}{\beta}\right) > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p}{q} - \frac{1}{\beta} , \tag{14}$$

saa at $\frac{\alpha}{\beta}$ nærmer sig til $\frac{p}{q}$, naar β voxer. Endelig faaes ogsaa af (13) ved Addition af 1

$$\frac{\alpha+\beta+1}{\beta} > \frac{p+q}{q} > \frac{\alpha+\beta+1}{\beta+1} ,$$

altsaa $$\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+1} > \frac{q}{p+q} > \frac{\beta}{\alpha+\beta+1} ,$$

og paa lignende Maade kan man faae

$$\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1} > \frac{p}{p+q} > \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1} ,$$

saa at $\frac{q}{p+q}$ og $\frac{p}{p+q}$ konvergere henholdsvis til $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ og $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Herved indses det

Fjerde Hovedtheorem. Forholdet imellem det Antal Gange en Begivenhed er indtruffet og ikke er indtruffet i et stort Antal Tilfælde, er stedse nærmere ved Forholdet imellem Sandsynlighederne for og imod Begivenheden, jo större det hele Antal Tilfælde er. Dette er Jac. Bernoullis Theorem, Loven for de store Tal.

Det følger omvendt heraf, at naar Sandsynligheden for en Begivenhed er bekjendt, saa vil man omtrentlig kunne forud angive det Antal Gange, den i et stort Antal Tilfælde vil indtræffe; derimod lader der sig mindre sikkert udsige Noget om deres Fordeling paa et ringe Antal Tilfælde, om man end fra et rent mathematisk Standpunkt maa antage dem at fremkomme i Forhold til deres Sandsynlighed.

13. Er Antallet af mulige Tilfælde, eller af Hypotheser, eller af virkende Aarsager uendelig stort, som almindelig maa være Tilfældet i Naturen, og varierer tillige Sandsynligheden kontinuerlig, maa der i Formlerne indkomme bestemte Integraler. Antages saaledes E at være indtruffet m Gange, F n Gange, saa vil man kunne bestemme, med hvilken Rimelighed man for E kan antage Sandsynligheden x, imod samme $1-x$, idet x varierer fra 0 til 1. Sandsynligheden for $m\,E$ og $n\,F$ vil nemlig under Forudsætning af disse Sandsynligheder være

$$k\,x^m(1-x)^n,$$

idet k er $C_{m,n}$. Indsættes heri efterhaanden 0ω, 1ω, 2ω, $3\omega \ldots (r-1)\omega$, idet $1 = r\omega$, saa faaes Sandsynligheden for Begivenheden under Forudsætning af de nævnte x, og altsaa for dens Indtræffen under den ene eller den anden Forudsætning

$$k\,[0^m(1-0)^n + \omega^m(1-\omega)^n + (2\omega)^m(1-2\omega)^n + \cdots$$
$$\cdots + ((r-1)\omega)^m(1-(r-1)\omega)^n].$$

Følgelig giver (12) Sandsynligheden for, at Begivenheden er indtruffet under Forudsætning af Sandsynlighed x, at være

$$\varpi = \frac{x^m(1-x)^n}{0^m(1-0)^n + \omega^m(1-\omega)^n + \cdots (r-1)^m\omega^m(1-(r-1)\omega)^n},$$

hvor dog k som fælles Faktor i Tæller og Nævner er udeladt. Antages nu $r = \infty$, $\omega = dx$, faaes x kontinuerlig varierende fra 0 til 1 og Nævneren kan udtrykkes ved

$$\frac{1}{dx}\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$

som en Sum af uendelig mange uendelig smaa Elementer. Sandsynligheden for, at x udtrykker Chancen for Begivenheden, er altsaa

$$\varpi_x = \frac{x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n dx}, \qquad (16)$$

som vel er uendelig lille, men dog tjener til Sammenligning af de forskjællige ϖ, idet for Ex.

$$\frac{\varpi_x}{x^m(1-x)^n} = \frac{\varpi_y}{y^m(1-y)^n}.$$

Heraf faaes igjen Sandsynligheden for, at Begivenhedens Chance er indesluttet imellem visse Grændser, α og β,

$$\varpi = \frac{\int_\alpha^\beta x^m(1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m(1-x^n) dx}, \qquad (17)$$

idet Chancen er enten den ene eller den anden af Chancerne fra α til β og Summen af uendelig mange uendelig smaa Elementer ændres til et bestemt Integral. Saaledes vil for Ex. Sandsynligheden for, at et Træk af m hvide Kugler efter hverandre ($n = 0$) af en Urne med hvide og sorte Kugler skal hidrøre fra et overvejende Antal hvide Kugler være

$$\varpi = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m dx}{\int_0^1 x^m dx} = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}.$$

Naar Begivenheden E har vist sig m Gange, F n Gange, saa vil Sandsynligheden for, at E skal indtræffe igjen, findes saaledes. Er Chancen for E x, saa har den Sandsynlig-

heden ϖ_x for sig og under denne Forudsætning vil E igjen indtræffe med en Rimelighed

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx},$$

men da x kan have alle Værdier fra 0 til 1, saa bliver Sandsynligheden for E's Gjentagelse

$$p' = \frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}. \qquad (18)$$

Derimod vilde Sandsynligheden for, at den nye Begivenhed blev F, være

$$p'' = \frac{\int_0^1 x^m(1-x)^{n+1}dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}.$$

Man overbeviser sig let om, at $p'+p''=1$.

Nævnerne i (16)—(18) samt Tælleren i (18) beregnes let, idet delvis Integration giver

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

og deraf udledes

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{[n]\,[m]}{[m+n+1]}.$$

Som Følge heraf er

$$p' = \frac{[n]\,[m+1]}{[m+n+2]}\cdot\frac{[n]\,[m]}{[m+n+1]} = \frac{m+1}{m+n+2}. \qquad (19)$$

Denne Formel viser, at naar E er indtruffet m Gange af $m+n$, saa er Sandsynligheden for et nyt E den samme som for af en Urne med $m+n+2$ Kugler, hvoraf $m+1$ hvide, at trække 1 hvid Kugle. Hver ny Gjentagelse af Begivenheden virker som om den lagde en ny hvid Kugle i Urnen.

Ex. 1. Naar en udkastet Mønt flere Gange efter hverandre har vist Krone, men slet ikke Plat, $n=0$, saa er Sandsynligheden for næste Gang at faae

Krone $p' = \frac{m+1}{m+2}$, for Plat $p'' = \frac{1}{m+2}$,

og Sandsynligheden for, at Mønten har overvejende Tilbøjelighed til at vise Krone, er

$$\varpi = \frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}.$$

For $m = 10$ faaes $p' = \frac{11}{12}$, $p'' = \frac{1}{12}$, $\varpi = \frac{2047}{2048}$.

Ex. 2. Antallet af Planeter, som have direkte Bevægelse (fra Vest til Øst) er nu 86, medens ingen have Bevægelse i den modsatte Retning; derfor vil Sandsynligheden for, at ogsaa den næste, som opdages, gaaer i samme Retning, være $p' = \frac{87}{88}$, for den modsatte Retning $p'' = \frac{1}{88}$, og Sandsynligheden for, at der gives Aarsager, som begunstige denne Retning, bliver $\varpi = \frac{2^{87}-1}{2^{87}}$. Medtages derimod Drabanterne, der i Antal ere 22, saa have 9 tilbagegaaende Bevægelse og derved faaes $p' = \frac{87}{110}$, $p'' = \frac{23}{110}$.

14. Hvis i de foregaaende Formler og i (10) m og n blive store Tal, kan Beregning af Produkterne $[m]$ og $[n]$ ad sædvanlig Vej blive uoverkommelig; men i saa Tilfælde benyttes Beregning med Tilnærmelse. Man har nemlig ved delvis Integration (jfr. min Differential- og Integralregn. p. 153 Formel (107))

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx,$$

følgelig for n positiv hel

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = [n]. \qquad (20)$$

Man kan altsaa sætte en approximativ Beregning af Integralet i (20) istedenfor Beregningen af $[n]$. Funktionen $e^{-x}x^n$ forsvinder baade for $x = 0$ og for $x = \infty$, og har et Maximum for $x = n$, hvortil svarer Værdien

$$H = e^{-n} n^n.$$

Sættes nu $$e^{-x} x^n = H e^{-t^2},$$

saa vil til $x = 0$ og $x = \infty$ svare $t^2 = \infty$, medens til $x = n$ svarer $t = 0$; Integralet i (20) kan nu deles i to

fra 0 til n og fra n til ∞, saa at man faaer

$$\int_0^n e^{-x} x^n dx + \int_n^\infty e^{-x} x^n dx,$$

hvor t indføres for x, men det ene Integrals Grændser maa saa blive fra $-\infty$ til 0, det andet fra 0 til $+\infty$, da man ved i begge Tilfælde at tage $+\infty$ fik Resultatet 0. Man har følgelig

$$[n] = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = H \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{dx}{dt} dt. \qquad (21)$$

Men til Beregning heraf kræves $\frac{dx}{dt}$ bestemt ved t, hvilket ikke kan ske explicit under endelig Form, derimod faaes ved Differentiation af Ligningen imellem x og t (simplest ved det logarithmiske Differential)

$$(x-n)\frac{dx}{dt} = 2tx,$$

som let tilfredsstilles ved følgende Række for x

$$x = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots \qquad (22)$$

Man har som umiddelbar Følge af, at $t=0$ gjör $x=n$, $A_0 = n$. Indføres Rækken (22) i Differentialligningen faaes efter Division med t

$$(A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \cdots A_{2r-1} t^{2r-2} + A_{2r} t^{2r-1} + \cdots)(A_1 + 2A_2 t + 3A_3 t^2 + \cdots (2r-1)A_{2r-1} t^{2r-2} + 2rA_{2r} t^{2r-1} + \cdots)$$
$$= 2(n + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots A_{2r-1} t^{2r-1} + A_{2r} t^{2r} + \cdots).$$

Heraf udledes

$$2r\,[A_1 A_{2r-1} + A_2 A_{2r-2} + A_3 A_{2r-3} + \cdots A_{r-1} A_{r+1} + \tfrac{1}{2} A_r^2] = 2A_{2r-2},$$
$$(2r+1)[A_1 A_{2r} + A_2 A_{2r-1} + A_3 A_{2r-2} + \cdots A_r A_{r+1}] = 2A_{2r-1},$$

følgelig

$$A_1 A_{2r-1} = \frac{2A_{2r-2}}{2r} - [A_2 A_{2r-2} + A_3 A_{2r-3} + \cdots A_{r-1} A_{r+1} + \tfrac{1}{2} A_r^2],$$

$$A_1 A_{2r} = \frac{2A_{2r-1}}{2r+1} - [A_2 A_{2r-1} + A_3 A_{2r-2} + \cdots A_r A_{r+1}].$$

Indsættes heri $r = 1, 2, 3 \ldots$, faaes, idet $A_0 = n$,

$$A_1^2 = 2n, \quad A_1 A_2 = \frac{2A_1}{3}, \quad A_1 A_3 = \tfrac{1}{2}(A_2 - A_2^2),$$

$$A_1 A_4 = \frac{2A_3}{5} - A_2 A_3, \quad A_1 A_5 = \frac{A_4}{3} - (A_2 A_4 + \tfrac{1}{2} A_3^2),$$

$$A_1 A_6 = \frac{2A_5}{7} - (A_2 A_5 + A_3 A_4) \quad \text{o. s. v.}$$

Heraf udledes

$$A_1 = \sqrt{2n}, \quad A_2 = \tfrac{2}{3}, \quad A_3 = \frac{\sqrt{2n}}{18n}, \quad A_4 = -\frac{2}{135n},$$

$$A_5 = \frac{\sqrt{2n}}{1080n^2} \quad \text{o. s. v.},$$

saa at man faaer ifølge (21), dog uden Indførelse af de nævnte Koefficienters specielle Værdier,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = H \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (A_1 + 2A_2 t + 3A_3 t^2 + \cdots) dt. \quad (23)$$

Men heri er $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2r+1} dt = 0,$$

da Elementerne fra $-\infty$ til 0 ere med modsatte Tegn lige med dem fra 0 til $+\infty$. Fremdeles faaes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2r} dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2r} dt = 2 \cdot \frac{2r-1}{2} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2r-2} dt,$$

det sidste frembragt ved delvis Integration efter Differentialets Omskrivning til $e^{-t^2} t^{2r-1} t\, dt$. Fortsat Anvendelse af denne Formel giver først

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2r} dt = \frac{1.3.5 \ldots (2r-1)}{2^r} \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

og dernæst, efter Indførelse af den bekjendte Værdi $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ af det sidste Integral (se min Differential- og Integralregn. p. 161 Formel (126)) og Multiplikation med 2,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2r} dt = \frac{1.3.5 \ldots 2r-1}{2^r} \sqrt{\pi}. \quad (24)$$

Rækken for Integralet (20) indskrænkes saaledes til de Led, der indeholde A med ulige Indices og man erholder derved, idet H's Værdi indføres,

$$[n] = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right), \quad (25)$$

som kaldes Stirlings Formel. Rækken (25) er i Begyndelsen meget konvergent, bliver senere divergent (jfr. Comptes rendus de l'acad. t. XXXV (1852) p. 317), men kan dog i de fleste Tilfælde bruges. Man kan ogsaa erholde en Række for Summen af Logarithmerne af Tallene fra 1 til n (jfr. Ramus Differ.- og Integralr. p. 361 Formel (47)). Prøves Rækken paa $n = 10$ findes ved Logarithmeregning

$$\log [10] = 6{,}5597642,$$

medens virkelig $\log [10] = \log 3628800 = 6{,}5597630$.

n kunde endog tænkes saa stor, at alene det første Led gav tilstrækkelig Tilnærmelse.

Anvendes dette paa (10) under den sidste Forudsætning, faaes, idet

$$[m+n] = (m+n)^{m+n} e^{-(m+n)} \sqrt{2\pi(m+n)},$$

$$[m]\,[n] = m^m n^n e^{-(m+n)} 2\pi\sqrt{mn},$$

Sandsynligheden for m Gange E og n Gange F

$$P = \left(\frac{(m+n)p}{m}\right)^m \left(\frac{(m+n)q}{n}\right)^n \sqrt{\frac{m+n}{2\pi mn}}. \qquad (26)$$

Søgte man heraf Maximum af P, idet p og q ere de variable, fik man i Overensstemmelse med fjerde Hovedtheorem $p = \frac{m}{m+n}$, $q = \frac{n}{m+n}$. Men denne største Sandsynlighed kan dog være lille nok, saaledes giver $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $m = n = \frac{m+n}{2} = \frac{\mu}{2}$, Værdien $P = \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}$, som aftager stærkt med μ. Sættes $\mu = 100$, faaes $P = 0{,}07979$ at være Sandsynligheden for den rimeligste Begivenhed, $1 - P = 0{,}92021$ imod denne. Der kan altsaa holdes 92 imod 8 paa, at den rimeligste Begivenhed ikke indtræffer.

Sandsynligheden for, at $\frac{m}{n}$ skal afvige fra $\frac{p}{q}$, vil aftage, eftersom Afvigelsen voxer. Antages Afvigelsen omvendt proportional med Qvadratroden af det hele Antal Begivenheder, altsaa lig $\frac{g}{\sqrt{\mu}}$, og sættes $p = q = \frac{1}{2}$, saa er

$$m = \tfrac{1}{2}\mu\left(1 + \frac{g}{\sqrt{\mu}}\right), \quad n = \tfrac{1}{2}\mu\left(1 - \frac{g}{\sqrt{\mu}}\right),$$

følgelig

$$P = \left(1+\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}\mu\left(1+\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)}\left(1-\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}\mu\left(1-\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi(\mu-g^2)}}$$

$$= \left(1-\frac{g^2}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}\mu}\left(1+\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}g\sqrt{\mu}}\left(1-\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}g\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{2}{\pi(\mu-g^2)}}.$$

Men heri er

$$\left(1-\frac{g^2}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}\mu} = 1+\frac{g^2}{2}+\frac{\mu(\mu+2)}{1.2}\frac{g^4}{4\mu^2}+\cdots,$$

som for store μ nærmer sig til $e^{\frac{1}{2}g^2}$; paa lignende Maade haves

$$\left(1+\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{-\frac{1}{2}g\sqrt{\mu}} = \left(1-\frac{g}{\sqrt{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}g\sqrt{\mu}}$$ tilnærmelsesvis lig $e^{-\frac{1}{2}g^2}$,

og endelig kan μ med Tilnærmelse sættes for $\mu - g^2$. Man finder saaledes

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\,e^{-\frac{1}{2}g^2}. \qquad (27)$$

Heraf læres, at Sandsynligheden for m og n afvigende fra $\frac{1}{2}\mu$ aftager stærkt, naar g voxer. Er saaledes $\mu = 200$, $g = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots$, $\frac{g}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{20}$, saa vil Sandsynligheden for at faae $m = 105$, $n = 95$, idet $p = q = \frac{1}{2}$, være $P = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}} = 0{,}04394$, medens $g = 0$ giver $P = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}05642$. Sandsynligheden for en Afvigelse af $\frac{1}{20}$ forholder sig altsaa til Sandsynligheden for slet ingen Afvigelse fra $100\,E$ og $100\,F$, som $e^{-\frac{1}{4}}$ til 1 eller omtrent som 3 til 4. — Antog man $\frac{g}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{2}$, $m = \frac{3}{4}\mu$, $n = \frac{1}{4}\mu$, samt $\mu = 200$, saa blev $P = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,e^{-25} = \frac{78}{10^{14}}$, altsaa meget ringe Sandsynlighed for at $m = 150$, $n = 50$ istedenfor $m = n = 100$.

Det mathematiske og det moralske Haab.

15. Sandsynlighedsregningen tjener blandt Andet til at bedømme Udsigten til at vinde eller tabe ved kom-

mende Begivenheder, hvorunder hører Anvendelse paa Spil, Livrenter og Livsforsikkringer. Antages A, B, C ... at være Personer, som i Tilfælde af at visse Begivenheder, henholdsvis E, F, G ..., indtræffe, have Udsigt til en vis Fordel g, og antages henholdsvis p, q, r ... at være Sandsynlighederne for disse Begivenheder, saa findes Værdien af Enhvers Udsigt til Gevinst eller det mathematiske Haab ved følgende Betragtning.

Er Antallet af lige mulige Tilfælde a, de for E gunstige v_1, de for F v_2, de for G v_3 o. s. v., saa er $p = \frac{v_1}{a}$, $q = \frac{v_2}{a}$, $r = \frac{v_3}{a}$ ...; A har for sig v_1 lige gunstige Tilfælde, B har v_2 o. s. v., saa at, medens et Antal af a Personer vilde have lige Andel i Gevinsten eller have en Udsigt lig $\frac{g}{a}$, saa har nu

A Udsigten $v_1 \frac{g}{a} = pg$, B har qg, C har rg o. s. v.

Det mathematiske Haab er lig Produktet af den Gevinst, der kan opnaaes, og Sandsynligheden for at naae den.

Ved Hazardspil afhænger Sandsynligheden af Spillets Indretning; kræver Spillet en vis Færdighed, har denne Indflydelse paa Sandsynligheden, men lader sig sjeldent bestemme uden lang Erfaring.

Antages Spillerne A og B at udsætte sig for Tab af henholdsvis Summerne α og β, saa bestemmes disses Størrelse af Enhvers Sandsynlighed for at vinde, p og q, idet $p + q = 1$; B har Sandsynligheden q for at vinde α fra A, hans mathematiske Haab er $q\alpha$, A har ligeledes det mathematiske Haab $p\beta$. Partiet vil nu ikke være lige, med mindre

$$q\alpha = p\beta \quad \text{eller} \quad \frac{p}{q} = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{28}$$

eller Spillernes Risiko maa være proportional med deres Sandsynlighed for at vinde.

Ved Hjælp af disse Regler findes Størrelsen af Indsatsen i et Spil og bestemmes, hvorledes den attraaede Gevinst skal deles, hvis Spillet standser før det kan bringes

til Ende. Herhid hører det af Chevalier de Méré fremsatte problème des partis. A og B antages at have lige Færdighed i Spillet, det er vundet af den, som først faaer 5 Points, idet kun 1 Point kan tages ad Gangen; naar nu A har 3 Points, B 4 og Spillet maa hæves, hvorledes skulle de da dele Indsatsen? Havde hver haft 4 Points, saa var Partiet lige og hver skulde have Halvdelen; men nu mangler A 1 Point i en ligesaa gunstig Stilling som B, og for at faae det har han Sandsynligheden $\frac{1}{2}$, hvorefter han først vil have Ret til den halve Indsats. Hans mathematiske Haab er altsaa $\frac{1}{4}$ af Indsatsen, medens B's er $\frac{3}{4}$.

16. Ved Anvendelsen af disse Grundsætninger paa Spil komme dog ogsaa de Spillendes Formuesomstændigheder i Betragtning og den deraf følgende Indflydelse, et stort Tab kan have paa deres Stilling. Absolut eller mathematisk taget bliver Sandsynligheden og Haabet at bestemme efter de angivne Regler, men relativt, fra et socialt eller moralsk Standpunkt, ville disse Regler ikke være tilstrækkelige, og ved personlige Spörgsmaal kommer det netop an paa den relative Værdi. Allerede den Bemærkning, at ved begrændsede Formuer har et nogenlunde stort Tab relativ större Betydning end en ligesaa stor Gevinst, vidner herom; dersom A og B eje lige meget og A taber en $\frac{1}{10}$ af sin Formue til B, saa faaer efter Spillet dette Tab en större Betydning for A end Gevinsten har for B, thi A har kun $\frac{9}{10}$ af sin Formue, medens B har $\frac{11}{10}$, det lidte Tab er $\frac{1}{9}$ af den forringede Formue, medens Gevinsten kun er $\frac{1}{11}$ af den forøgede. Dan. Bernoulli har derfor forsøgt i Modsætning til det mathematiske Haab at opstille et moralsk Haab som Gjenstand for Beregning.

Faaer en Persons virkelige, physiske, Formue x en Tilvæxt kdx, hvor k er konstant, saa kommer det altsaa an paa dennes Forhold til x, saa at Tilvæxten til hans moralske Formue kan udtrykkes ved

$$\frac{kdx}{x},$$

og ved Integration heraf faaes den hele moralske Formue

$$y = k \mathrm{l}.x + C, \qquad (29)$$

hvor C er en Konstant afhængig af den moralske Formues Størrelse for en vis Værdi af den physiske Formue. Hverken x eller y kan antages Nul eller negativ, thi den blotte Tilværelse er et Bevis paa Raadighed over de Indtægtskilder, der nødvendig kræves til Livets Ophold, uden Hensyn til Maaden, hvorpaa de flyde.

Antages nu en Person i Besiddelse af en physisk Formue a og Udsigt til med givne Sandsynligheder $p, q, r \ldots$ at opnaae Fordelene $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, saa kan hans moralske Formue ifølge (29) modtage en af Værdierne

$$k \mathrm{l}.(a+\alpha) + C, \quad k \mathrm{l}.(a+\beta) + C, \quad k \mathrm{l}.(a+\gamma) + C \ldots$$

med de angivne Sandsynligheder. Paa dette Standpunkt har den moralske Formue altsaa Værdien

$$Y = kp \mathrm{l}.(a+\alpha) + kq \mathrm{l}.(a+\beta) + kr \mathrm{l}.(a+\gamma) \cdots + C,$$

idet alle Konstanterne samles i een. Antages den dertil svarende physiske Formue at være X, saa vil ogsaa haves

$$Y = k \mathrm{l}.X + C,$$

men disse to Udtryk for Y give den tilsvarende physiske Formue

$$X = (a+\alpha)^p . (a+\beta)^q . (a+\gamma)^r \ldots$$

Fradrages herfra den oprindelige Formue a, faaes det moralske Haab at være

$$(a+\alpha)^p . (a+\beta)^q . (a+\gamma)^r \cdots - a, \qquad (30)$$

medens det mathematiske var $p\alpha + q\beta + r\gamma + \cdots$

Deraf følger, at ethvert Spil er ufordelagtigt. En Spiller med Formue a og Sandsynlighed p for at vinde gjör en Indsats μ, Modparten altsaa ifølge (28) $\frac{(1-p)\mu}{p}$, hvilken den Første kan vinde, saa at Formuen derved bliver $a + \frac{1-p}{p}\mu$, men taber han, bliver den $a - \mu$; for det første Tilfælde er Sandsynligheden p, for det sidste $1-p$. Ifølge (30) er det moralske Haab altsaa

$$\left(a + \frac{1-p}{p}\mu\right)^p \left(a-\mu\right)^{1-p} - a = a\left(\left(1 + \frac{1-p}{p}\frac{\mu}{a}\right)^p \left(1 - \frac{\mu}{a}\right)^{1-p} - 1\right),$$

hvilken Størrelse kan vises at være negativ. Det kommer næmlig blot an paa at indse, at

$$p \,\mathrm{l.}\left(1+\frac{1-p}{p}\frac{\mu}{a}\right)+(1-p)\,\mathrm{l.}\left(1-\frac{\mu}{a}\right)<0.$$

Men dette kan omskrives til

$$\int(1-p)\left(\frac{1}{1+\frac{1-p}{p}\frac{\mu}{a}}-\frac{1}{1-\frac{\mu}{a}}\right)\frac{d\mu}{a}<0,$$

som er rigtigt.

17. De anførte Sætninger finde ogsaa Anvendelse paa Handel og Forsikkringsvæsen, men medens Spillet ikke blot er moralsk fordærveligt, men ogsaa fremkalder økonomiske Tab, saa kan Handel i Forbindelse med Forsikkring kun bringe økonomiske Fordele, fordi Spillet blot flytter Værdierne fra en Haand til en anden, medens Handelen med Flytningen tillige skaber nye Værdier. Antages en Kjøbmand at have $\frac{1}{\alpha}$ af sin Formue 1 ombord paa et Skib, for hvis heldige Hjemkomst der er Sandsynligheden p, saa vil hans forventede moralske Formue være

$$kp\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+C.$$

Men forsikkrer han den Del af sin Formue, som er udsat for Undergang, saa maa han ifølge (28) betale Assurandøren en Sum, der forholder sig til dennes Risico $\frac{p}{\alpha}$ som Sandsynlighederne for dens Udbetaling og Ikke-Udbetaling, $1-p$ og p, altsaa $\frac{1-p}{\alpha}$. Dermed formindskes Kjøbmandens forventede Udbytte til $\frac{1}{\alpha}-\frac{1-p}{\alpha}=\frac{p}{\alpha}$, men for dette Beløb har han Sikkerhed, saa at hans moralske Formue bliver

$$k\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)+C.$$

Men man har

$$\mathrm{l.}\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)>p\,\mathrm{l.}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right),$$

fordi, idet $\frac{p}{\alpha}<\frac{1}{\alpha}$,

$$\int \frac{pd \cdot \frac{1}{\alpha}}{1+\frac{p}{\alpha}} > \int \frac{pd \cdot \frac{1}{\alpha}}{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

Kjøbmandens moralske Formue er altsaa forøget ved Hjælp af Forsikkringen, saa at han kan offre et Tillæg til Præmien, hvorved Assurandøren og hans Medhjælpere faae en Indtægt. Kaldes dette Tillæg β, bliver hele Præmien $\frac{1-p}{\alpha}+\beta$. Tillægget β bör ikke være saa stort, at den moralske Formue, naar Forsikkringen finder Sted, bliver mindre end den uden Forsikkring vilde være, altsaa den höjeste Værdi af β faaes af Ligningen

$$\text{l.}\left(1+\frac{p}{\alpha}-\beta\right) = p\,\text{l.}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right),$$

altsaa

$$\beta = 1+\frac{p}{\alpha}-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^p.$$

Vælges β mindre, saa har Kjøbmanden Fordel derved, og da Assurandøren ved at gjöre Forsikkringen til en Forretning, overtager en stor Mængde Forsikkringer, saa vil hans Fordel ifølge 12, Loven for de store Tal, ligeledes blive saa godt som sikkret.

18. I det gamle Tallotteri (det genuesiske) uddroges i hver Trækning 5 Tal af 90; men derved, at Gevinsterne udbetaltes med lavere Beløb end der efter Rimelighed tilkom Spillerne, sikkredes Staten som Entreprenør en betydelig Fordel. Der kunde spilles paa Udtræk, bestemt Udtræk (det første Tal, det andet o. s. v.), Ambe, Terne og Qvaterne; nedenstaaende Tavle giver de fornødne Talstörrelser til Bedömmelse af Forholdet.

90 Tal indeholde	5 Tal indeholde	Forholdet imellem Gevinst og Indsats	
		skulde være	var
90 Udtræk	5	18	15
90 best. Udt.	1 (af hver Slags)	90	70
4005 Amber	10	400,5	270
117480 Terner	10	11748	5400
2555190 Qvart.	5	511038	40000

Kaldes Indsatsen 1, saa er det mathematiske Haab, hvormed Gevinsten $14 = 15 - 1$ paa Udtræk kan forventes, $\frac{14}{18} = \frac{7}{9}$, som altsaa er Værdien af et Lod, der har kostet 1, inden Trækningen er skeet. Lotteriet derimod kan med Sandsynligheden $\frac{17}{18}$ vinde Spillerens Indsats 1, altsaa dets mathematiske Haab er $\frac{17}{18}$. Endnu større viser Fordelen sig paa de andre Spillemaader; saaledes har Spilleren Sandsynligheden $\frac{10}{4005}$ for at vinde 1 Ambe, hvorfor han faaer sin Indsats samt 269, altsaa hans mathematiske Haab er $\frac{2690}{4005}$, men Lotteriet har Sandsynligheden $\frac{3995}{4005}$ for at vinde 1, altsaa det mathematiske Haab er $\frac{3995}{4005}$. Til Oversigt meddeles følgende Tavle over begge Parters mathematiske Haab, med Udeladelse af de fælles Nævnere, Tallene i første Rubrik af forrige Tavle.

	Spiller.	Lotteri.	Differens.
Udtræk . . .	70	85	15
Best. Udtræk	69	89	20
Ambe	2690	3995	1305
Terne	53990	117470	63480
Qvaterne . .	199995	2555185	2355190

Et Spil af denne Beskaffenhed er at betragte som en Skat, der yder Staten større Fordel i samme Forhold, som de angivne Differenser ere større. Erfaringen bekræfter dette og til Exempel derpaa anføres, at et andet Spil, Trente-et-quarante, som var tilladt visse Spillehuse i Paris, gav med en Fordel af kun 0,011 af hver Indsats, men med en hurtig Gang af Spillet, saa stor Indtægt, at der for Tilladelsen kunde betales Staten en Afgift af 5 til 6 Millioner aarlig.

I Klasselotteriet trækkes i 6 Klasser dels Gevinster, dels Frilodder til næste Klasse, hvorom efterstaaende Tavle giver nærmere Oplysning.

Klasse.	Antal Lodder.	Antal Gevinster.	Sum af Gevinster.	Antal Frilodder.
1	50000	200	45700 Rd.	1800
2	48000	240	59400 —	2160
3	45600	280	72600 —	2520
4	42800	320	86800 —	2880
5	39600	340	97150 —	3060
6	36200	3600	328250 —	32600

Antages en Spiller at kjøbe et Lod til første Klasse for 2 Rd. med den Beslutning, blot at fortsætte Spillet, saalænge dette Lod giver ham Adgang dertil, enten direkte eller igjennem Frilodder til de næste Klasser, og man ser bort fra den Forpligtelse, Spilleren i Tilfælde af Gevinst har til at kjøbe et Lod til næste Klasse, saa findes hans mathematiske Haab X, eller Værdien af det kjøbte Lod inden Trækningen af første Klasse har fundet Sted, paa følgende Maade. Beregningen sker simplest ved at søge det mathematiske Haab af Spillet, som om der kun var een Middelgevinst at opnaae i hver Klasse, altsaa i første Klasse $\frac{45700}{200}$, med Sandsynlighed for at faae den $\frac{200}{50000}$, hvilket giver $\frac{45700}{50000}$; men dertil maa lægges Sandsynligheden for at spille med i næste Klasse igjennem et Frilod, $\frac{1800}{50000}$, Gange den Fordel, som denne Klasse giver, hvortil atter henhører Frilodder til næste Klasse o. s. v., indtil de 6 Klasser ere spillede igjennem, da Spilleren atter igjennem et Frilod kan gaae over til det næste Lotteries første Klasse med det mathematiske Haab X. Saaledes erholdes Ligningen (med Udeladelse af overflødige Nuller)

$$X = \frac{457}{500} + \frac{18}{500}\left[\frac{594}{480} + \frac{216}{4800}\left[\frac{726}{456} + \frac{252}{4560}\left(\frac{868}{428} + \frac{288}{4280}\left(\frac{9715}{3960} + \frac{306}{3960}\left(\frac{32825}{3620} + \frac{326}{362}X\right)\right)\right)\right]\right]$$

eller

$$X = 0{,}914 + 0{,}036\left[1{,}237 + 0{,}045\left[1{,}592 + 0{,}055\left(2{,}028 + 0{,}067\left(2{,}453 + 0{,}077(9{,}068 + 0{,}901X)\right)\right)\right]\right],$$

altsaa

$$X = \frac{0{,}914 + 0{,}036\left[1{,}237 + 0{,}045\left[1{,}592 + 0{,}055\left(2{,}028 + 0{,}067\,(2{,}453 + 0{,}077 \cdot 9{,}068)\right)\right]\right]}{1 - 0{,}036 \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}055 \cdot 0{,}067 \cdot 0{,}077 \cdot 0{,}901}$$

eller $X = \frac{0{,}961}{1 - 0{,}0000004} = 0{,}961$ Rd. $= 92$ ß.

Et Lod, som er kjøbt for 2 Rd., har altsaa en Værdi af 92 ß.

Anvendelse paa Livrenter og Livsforsikkringer.

19. Ved enhver Forsikkring raader Tilfældet ligesaavel som i Hasardspil, men der arbejdes ved Forsikkringen netop paa at forebygge Følgerne af Uheld, idet ethvert Tab følges af en tilsvarende Erstatning. Forsikkringen af Menneskeliv og af Indtægter for en Tid eller for den øvrige Del af Livet beroer paa Erfaring og Iagttagelse af Lovene for Dødeligheden. Halley har lært, hvorledes man kan komme til Kundskab om Fordelingen af flere i samme Aar fødte Personers Afgang ved Døden i de forskjællige Aldere, eller hvorledes Dødelighedstavler konstrueres. Naar man næmlig antager Befolkningen i et Distrikt for nogenlunde konstant, saa maa Antallet af Døde og Fødte i samme Tid være omtrent det samme. Betegnes Antallet af de Døde af r^{te} Aars Alder med a_r, saa vil

$$S_0 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_x,$$

idet det x^{te} Aar er den höjeste Alder, hvori Nogen er død, være Antallet af Fødte, af Alder 0. Derefter faaes Antallet af 1-aarige at være $S_1 = S_0 - a_1$, af 2-aarige $S_2 = S_1 - a_2, \ldots$ af x-aarige $S_x = S_{x-1} - a_x = 0$. Ved en Række Iagttagelser af denne Art udfindes Loven for Dødeligheden, som da viser sig noget forskjællig efter Klima, Levemaade og Kjøn. Hvert Land benytter derfor sin Dødelighedstavle, med dobbelte Rubrikker, for Mænd og for Qvinder. Til Exempel skal her meddeles Finlaisons Tavler, som findes i Planen for vore Livrente- og Livsforsikkringsanstalter af 1842 (se Plan in 4^{to}) og gaae ud fra 10000 1-aarige.

Alder.	Levende af 1-aarige		Alder.	Levende af 1-aarige		Alder.	Levende af 1-aarige	
	Mænd.	Qvinder.		Mænd.	Qvinder.		Mænd.	Qvinder.
1	10000	10000	36	6922	7465	71	2756	4028
2	9821	9860	37	6835	7384	72	2575	3846
3	9673	9739	38	6747	7303	73	2396	3655
4	9552	9632	39	6658	7222	74	2223	3455
5	9453	9530	40	6569	7141	75	2054	3248
6	9371	9444	41	6481	7061	76	1890	3040
7	9302	9370	42	6393	6981	77	1740	2824
8	9241	9308	43	6307	6901	78	1588	2600
9	9186	9254	44	6222	6822	79	1433	2373
10	9132	9209	45	6137	6743	80	1277	2146
11	9081	9169	46	6053	6664	81	1123	1922
12	9031	9130	47	5972	6586	82	972	1713
13	8983	9090	48	5890	6508	83	828	1522
14	8935	9046	49	5807	6431	84	694	1349
15	8887	8998	50	5720	6353	85	567	1192
16	8834	8936	51	5627	6277	86	450	1047
17	8773	8869	52	5526	6201	87	342	911
18	8703	8798	53	5417	6123	88	248	781
19	8622	8724	54	5300	6044	89	171	656
20	8531	8649	55	5177	5963	90	113	534
21	8432	8576	56	5048	5878	91	70	416
22	8318	8503	57	4912	5789	92	43	307
23	8202	8430	58	4773	5696	93	25	212
24	8086	8357	59	4631	5599	94	14	138
25	7972	8284	60	4489	5499	95	7	84
26	7860	8212	61	4347	5397	96	3	49
27	7758	8140	62	4208	5291	97	1	25
28	7659	8068	63	4068	5179	98	0	11
29	7561	7995	64	3924	5061	99	0	4
30	7465	7921	65	3774	4936	100	0	1
31	7371	7848	66	3621	4805			
32	7278	7774	67	3455	4665			
33	7187	7699	68	3285	4517			
34	7097	7623	69	3112	4364			
35	7009	7546	70	2935	4202			

Da ifølge Tavlen af 10000 Drengebørn paa 1 Aar de 9821 blive 2 Aar, saa er Sandsynligheden for at Drengebørn paa 1 Aar blive 1 Aar ældre, 0,9821. Sandsynligheden for at 1-aarige Drengebørn blive 10 Aar, er 0,9132. Sandsynligheden for en 10-aarig Dreng at blive 70 Aar, er $\frac{2935}{9132} = 0{,}321$, altsaa af 1000 paa 10 Aar naae 321 op til 70 Aar. For Piger ere de tilsvarende Tal henholdsvis 0,9860, 0,9209 og $\frac{4202}{9209} = 0{,}456$.

Naar Sandsynligheden for Personer af en vis given Alder at naae en anden Alder er netop $\frac{1}{2}$, saa er Differensen imellem disse Aldere den sandsynlige Levetid for den førstnævnte Aldersklasse. Da af 10000 Drenge paa 1 Aar 5048 blive 56 Aar, men kun 4912 blive 57 Aar, saa er den sandsynlige Levetid for 1-aarige Drenge imellem 56 og 57 Aar; for 1-aarige Piger er den imellem 64 og 65 Aar. Af 8887 15-aarige Drenge naae 4489 en Alder af 60 Aar, den sandsynlige Levetid altsaa 45 Aar; da af 8998 15-aarige Piger de 4517 blive 68 Aar, saa er deres sandsynlige Levetid 53 Aar.

Gjennemsnitslevetiden eller Middellevetiden for Personer af en vis Alder faaes ved ligelig at fordele paa dem de Aar, som alle Personer af denne Alder have tilbage at leve i. Antages i Tavlen Antallet af $(a+r)$-aarige Personer at være A_r, saa findes Middellevetiden for a-aarige paa følgende Maade. Af de A_0 a-aarige blive $A_0 - A_1$ kun 1 Aar ældre, deres samlede Levetid er $A_0 - A_1$ Aar; derimod blive $A_1 - A_2$ netop 2 Aar ældre, den samlede Levetid for dem er da $2(A_1 - A_2)$ Aar; ligesaa leve de $A_2 - A_3$, der opnaae hver 3 Leveaar, tilsammen $3(A_2 - A_3)$ Aar o. s. v. Tages Summen af de saaledes fundne Antal Leveaar og divideres med det oprindelige Antal Levende A_0 af a Aars Alder, faaes Middellevetiden, men under den Forudsætning, at de $A_1, A_2, A_3 \ldots$ netop ere afgaaede ved Døden ved hvert Aars Udgang; da dette ikke er Tilfældet, søges Fejlen hævet ved fra det endelige Resultat at trække $\frac{1}{2}$, hvorved alle Dødsfald egent-

lig antages at træffe midt i Aaret. Man faaer da Middellevetiden for a-aarige at være

$$M_a = \frac{A_0 - A_1 + 2(A_1 - A_2) + 3(A_2 - A_3) + \cdots x(A_{x-1} - A_x)}{A_0} - \frac{1}{2},$$

idet x er den höjeste Alder, Nogen af dem naaer. Deraf faaes

$$\left.\begin{aligned} M_a &= \frac{A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_x}{A_0} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_x}{A_0} + \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

For 90-aarige Mænd faaes ved Tavlen en Middellevetid af $\frac{163}{113} + \frac{1}{2} = 1{,}94$ Aar. Tavlerne i Planen for Livsforsikkringsanstalten af 1842 indeholde særlige Tavler over Middellevetiden.

I Reglen er den sandsynlige Levetid og Middellevetiden forskjællige, som følgende Exempler oplyse. De i Tavlen angivne Aar lægges til Alderen for at finde den sandsynlige Alder og Middeltallet af Alderen, der opnaaes.

Alder.	Sandsynlig Levetid.		Middellevetid.	
	Mænd.	Qvinder.	Mænd.	Qvinder.
15	45	53	42	47
21	41	48	38	43
50	20	25	20	24

Middellevetiden for Nyfødte, Livets Middelvarighed, faaes af (31), idet A_0 er Antallet af Nyfødte, A_r af r-aarige. Antages Befolkningen konstant, vil det hele Antal af Levende af alle Aldere kunne findes ved at multiplicere Antallet af Nyfødte med Sandsynligheden for at naae enhver Alder og tage Summen af alle disse Produkter. Men da man ved Dødelighedstavlen kun i Spring kan angive Sandsynligheden for at blive 1, 2, 3 ... Aar ældre, saa tages simplest Middeltallet af Sandsynligheden for hver to paa hinanden følgende Aar til Faktor. Derved bliver Befolkningens Störrelse

$$P = \frac{A_0+A_1}{2A_0}\cdot A_0 + \frac{A_1+A_2}{2A_0}\cdot A_0 + \frac{A_2+A_3}{2A_0}\cdot A_0 + \cdots \frac{A_{x-1}+A_x}{2A_0}\cdot A_0$$
$$= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots A_{x-1} + A_x,$$

altsaa ved Division med A_0 faaes

$$\frac{P}{A_0} = M_0, \qquad (32)$$

saa at ved en konstant Befolkning er Livets Middelvarighed lig Forholdet imellem Befolkningens Størrelse og Antallet af hvert Aars Fødsler.

20. En simpel Livrente er den Annuitet, som betales en Mand fra nu af indtil hans Død; dens Værdi er den Sum, der strax maa betales Livrenteanstalten derfor. Sættes Livrenten til 1, Rentefoden til r, saa vil den første Udbetaling af 1 om 1 Termin, henført til Nutiden, være $\frac{1}{1+r}$; men da Livrenten kun betales, saafremt Vedkommende er i Live, saa maa denne Sum multipliceres med Sandsynligheden for en a-aarig at blive $(a+1)$-aarig, $\frac{A_1}{A_0}$. Altsaa er

Værdien af den første Udbetaling $\frac{A_1}{A_0(1+r)}$,

ligesaa af den anden $\frac{A_2}{A_0(1+r)^2}$ o. s. v.

Heraf faaes Værdien af Livrenten

$$L_a = \frac{1}{A_0}\left(\frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \frac{A_3}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{A_x}{(1+r)^x}\right).$$

Den mest praktiske Beregning af Livrenter sker efterhaanden for den højeste Alder, den næsthøjeste o. s. v. nedad. Man har nemlig

$$L_{a+1} = \frac{1}{A_1}\left(\frac{A_2}{1+r} + \frac{A_3}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A_x}{(1+r)^{x-1}}\right),$$

idet $A_{x+1} = 0$, og deraf findes

$$L_a = \frac{A_1}{A_0(1+r)}(L_{a+1}+1). \qquad (33)$$

Da nu Livrentens Værdi for den højeste Alder, 97 Aar for Mænd, 100 for Qvinder, maa være 0, saa beregnes den

derefter for alle Aldere. For Mænd haves $L_{97} = 0$, $L_{96} = \frac{1}{3(1+r)}(L_{97}+1)$, $L_{95} = \frac{3}{7(1+r)}(L_{96}+1)$ o. s. v. Andre Livrenters Værdi findes ved Multiplikation af Værdien af Livrenten 1 med Livrentens Størrelse.

En opsat Livrente nydes ikke strax, men først efter et bestemt Antal Terminers Forløb. For en a-aarig vil en saadan, hvis Udbetaling begynder om n Terminer, være

$$l_{a,n} = \frac{1}{A_0}\left(\frac{A_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{(1+r)^{n+2}} + \cdots + \frac{A_{n+x}}{(1+r)^x}\right),$$

idet ligefrem de første Led i Formlen for L_a, svarende til de Terminer, da ingen Udbetaling sker, blive 0. Men nu haves

$$L_{a+n} = \frac{1}{A_n}\left(\frac{A_{n+1}}{1+r} + \frac{A_{n+2}}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A_{n+x}}{(1+r)^x}\right),$$

altsaa er

$$l_{a,n} = \frac{A_n}{A_0}\frac{L_{a+n}}{(1+r)^n}, \qquad (34)$$

som er Sandsynligheden for at opnaae $a+n$ Aar Gange Livrenten for $(a+n)$-aarige ført tilbage til Nutiden. (34) kan til Regningens Lettelse omskrives til

$$l_{a,n} = \left(1 - \frac{A_0 - A_n}{A_0}\right)\frac{L_{a+n}}{(1+r)^n}.$$

En ophørende Livrente er den, som standser ved en vis Alder. For en a-aarig vil den, naar Varigheden er n Aar, være Differensen imellem en simpel Livrente, som begynder strax, og en i n Aar opsat, altsaa

$$\lambda_{a,n} = L_a - l_{a,n} = L_a - \frac{A_n}{A_0}\frac{L_{a+n}}{(1+r)^n}. \qquad (35)$$

Endelig kunne Livrenter være opsatte i n Terminer, ophørende m Terminer senere, og da beregnes som Differensen imellem en i n Terminer opsat og en i $n+m$ Terminer opsat, altsaa

$$l_{a,n} - l_{a,n+m} = \frac{A_n}{A_0}\frac{L_{a+n}}{(1+r)^n} - \frac{A_{n+m}}{A_0}\frac{L_{a+n+m}}{(1+r)^{n+m}}. \qquad (36)$$

21. Overlevelsesrenter ere Livrenter, hvis Udbetaling først begynder efter en anden Persons Død; deres Beregning afhænger af Sandsynligheden for, at to Personer begge blive i Live. Antages A's Alder a, B's b Aar, og Sandsynligheden for at blive r Aar ældre henholdsvis $\frac{A_r}{A_0}$, $\frac{B_r}{B_0}$, saa er Sandsynligheden for at baade A og B ere i Live som r-aarige, $\frac{A_r B_r}{A_0 B_0}$. Af N Par, bestaaende af en a-aarig og en b-aarig (hvis Kjönnene ere forskjællige, er A Manden), ville rimeligvis $\frac{A_r B_r}{A_0 B_0} N$ blive r-aarige. Derimod ville ved Døden være opløste

$$\left(\frac{A_0 - A_r}{A_0} \cdot \frac{B_r}{B_0} + \frac{A_r}{A_0} \cdot \frac{B_0 - B_r}{B_0}\right) N \text{ Par,}$$

og uddøde $\quad \frac{A_0 - A_r}{A_0} \cdot \frac{B_0 - B_r}{B_0} N$ Par.

Samlivets Middelvarighed for et Par af de angivne Aldere findes paa samme Maade som Middellevetiden for en enkelt, og bliver

$$M_{a,b} = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + \cdots + A_x B_x}{A_0 B_0} + \frac{1}{2}. \quad (37)$$

Middelvarigheden af A's Overleven over B vil være

$$\left.\begin{aligned} V_{a,b} &= \frac{A_1(B_0 - B_1) + A_2(B_0 - B_2) + \cdots + A_x(B_0 - B_x)}{A_0 B_0} \\ &= M_a - M_{a,b}. \end{aligned}\right\} (38)$$

Ombyttes a og b, A og B, faaes $V_{b,a}$, Middelvarigheden af B's Overlevelsestid.

Middelvarigheden af den Tid, hvori begge Parter ere døde, bliver

$$\frac{(A_0 - A_1)(B_0 - B_1) + \cdots + (A_0 - A_x)(B_0 - B_x)}{A_0 B_0}$$
$$= x - (M_a + M_b) + M_{a,b}.$$

Man vil nu kunne beregne Værdien af en Forbindelsesrente paa to Personer, nemlig af den Udbetaling, som sker terminvis, saalænge begge Parter leve, idet Fremgangsmaaden kun skiller sig fra den for Bereg-

ning af Livrenter ved, at Sandsynligheden $\frac{A_r B_r}{A_0 B_0}$ indtræder for $\frac{A_r}{A_0}$. Man finder

$$F_{a,b} = \frac{1}{A_0 B_0}\left(\frac{A_1 B_1}{1+r} + \frac{A_2 B_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A_x B_x}{(1+r)^x}\right),$$

følgelig $$F_{a,b} = \frac{A_1 B_1}{A_0 B_0 (1+r)}(F_{a+1,b+1}+1). \qquad (39)$$

Heraf findes igjen Værdien af den Overlevelsesrente, der betales B ved A's Død; thi der maa fra Værdien af en Livrente til B trækkes Værdien af Forbindelsesrenten paa A's og B's Liv, saa at man faaer

$$O_b = L_b - F_{a,b}. \qquad (40)$$

Ved Hjælp af det Udviklede kan nu let beregnes opsatte, ophørende og opsatte ophørende Overlevelsesrenter.

22. Livsforsikkring kaldes den Sum, der udbetales ved en bestemt Persons Død. Værdien af en Livsforsikkring 1, som betales ved en a-aarig Persons Død, beregnes saaledes: enten bliver 1 at udbetale om 1 Termin med Sandsynligheden $\frac{A_0 - A_1}{A_0}$, eller efter 2 Terminer med Sandsynligheden $\frac{A_1 - A_2}{A_0}$, eller efter 3 med $\frac{A_2 - A_3}{A_0}$ o. s. v.; men disse Værdier maa føres tilbage til Nutiden ved Division med $1+r$, $(1+r)^2$, $(1+r)^3$ o. s. v., og Summen af de saaledes frembragte Størrelser udgjör den søgte Værdi. Man faaer

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{A_0 - A_1}{A_0}\frac{1}{1+r} + \frac{A_1 - A_2}{A_0}\frac{1}{(1+r)^2} + \frac{A_2 - A_3}{A_0}\frac{1}{(1+r)^3} + \cdots \\ &= \frac{1}{1+r} + \frac{1}{A_0}\left(\frac{A_1}{(1+r)^2} + \frac{A_2}{(1+r)^3} + \frac{A_3}{(1+r)^4} + \cdots\right) \\ &\quad - \frac{1}{A_0}\left(\frac{A_1}{1+r} + \frac{A_2}{(1+r)^2} + \frac{A_3}{(1+r)^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{1+r} + \frac{L_a}{1+r} - L_a = \frac{1 - r L_a}{1+r}. \qquad (41) \end{aligned}$$

De mindste Qvadraters Methode.

I. Fejlloven.

23. Selv de omhyggeligste Iagttagelser lide af Fejl; derfor give ogsaa forskjællige Iagttagelser af samme Gjenstand forskjællige Resultater. Fejlene hidrøre fra forskjællige Kilder, som dog deles i to Hovedgrupper. Nogle Fejl opstaae af Omstændigheder, der forandre sig fra en Gang til en anden og ere uafhængige af det fundne Resultat; de kaldes uregelmæssige eller tilfældige. De kunne ikke rettes ved en Beregning af deres Störrelse efter de Aarsager, der have frembragt dem, men alene deres sandsynlige Værdi kan bestemmes. Saadanne ere de, der hidrøre fra vore Sandseredskabers Ufuldkommenhed og Mangel paa Øvelse, fra Luftzittringer, der forstyrre Gjenstandenes Omrids, enkelte uundgaaelige Mangler ved Instrumenterne, saasom Mangel paa fuldstændig Stivhed, nogle Virkninger af Temperaturen paa Instrumenterne, som ikke kunne beregnes, m. m. Andre Fejl virke stedse paa samme Maade og hidrøre fra Omstændigheder, der væsentlig hænge sammen med Iagttagelsens Resultater; de kaldes konstante eller regelmæssige. Disse kunne være Virkninger af bestemte Naturlove (for Ex. den astronomiske Refraktion), som kunne underkastes exakt Beregning, eller af Iagttagerens Uduelighed, som ikke bör forudsættes, eller af Fejl i Instrumenternes Konstruktion, som maa bestemmes forud og rettes. Undertiden kunne Fejl være at regne snart til den ene, snart til den anden Klasse; saaledes Fejl i et Vinkelinstruments Inddeling regnes for konstante ved gjentagen Maalning af den samme Vinkel, for tilfældig ved Maaling af forskjællige Vinkler.

De konstante Fejl bör altsaa hæves, men de tilfældige ere uundgaaelige, de maae blot gjöres uskadelige ved en Bestemmelse af deres rimelige Störrelse. Theoretisk taget kunne disse Fejl antage alle mulige Störrelser fra $-\infty$ til $+\infty$, men praktisk indsnevres Grændserne, idet de smaa Fejl lettere ske end de store, saa at der gives Fejl af en

vis Størrelse, som ikke blive begaaede. De ville dernæst rimeligvis lige let falde til begge Sider og ophæve hverandre saaledes, at man ved en enkelt Størrelses gjentagne Maaling med forskjællige Resultater tör regne paa, at Maalningernes Middelværdi nærmest svarer til Sandheden. Hvis derimod en Størrelse ikke bestemmes ved direkte Maaling, men ved Hjælp af flere andre maalte Størrelser, hver behæftede med sin Fejl, saa kommer det an paa at udfinde, hvilken Kombination af Fejl der giver den rimeligste Værdi af den søgte Størrelse. Men dertil behöves först Loven for Fordelingen af Fejl af enhver Størrelse.

24. Antages en vis Fejl f at have en meget lille Sandsynlighed for sig, som tilmed afhænger af Størrelsen af f, saa kan den udtrykkes ved

$$h\varphi(f),$$

hvor h er meget lille, φ en Funktion, som egentlig er diskontinuert, da den pludselig maa blive Nul, naar f overskrider Maximum af Fejl, men til större Lethed for Regningen tör antages kontinuert, naar den blot udenfor det nævnte Maximum bliver umærkelig. Sandsynligheden for at Fejlen antager en af Værdierne a, $a+h$, $a+2h \ldots$ $a+(n-1)h$, er (enten — eller)

$$h\left[\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\cdots+\varphi(a+(n-1)h)\right];$$

men konvergerer heri h til 0, faaes, idet $a+nh=b$, altsaa $n=\frac{b-a}{h}$ voxer i det Uendelige, Sandsynligheden for en Fejl imellem a og b

$$\int_a^b \varphi(f)\,df. \tag{42}$$

Sættes heri $a=f$, $b=f+df$, faaes Sandsynligheden for en Fejl imellem f og $f+df$ at være $\varphi(f)\,df$.

Den første Fordring, der maa stilles til φ, er at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(f)\,df = 1. \tag{43}$$

Sættes $y=\varphi(f)$, vil herved være fremstillet Ligningen for en Kurve, hvis Ordinater ere proportionale med

Sandsynlighederne for de tilsvarende Fejl, som ere Abscisser. Arealet imellem Kurven, Abscisseaxen og to Ordinater udtrykker Sandsynligheden for Fejl, hvis Störrelse falder imellem de to Abscisser til disse Ordinater. Funktionen $\varphi(f)$ kaldes Fejlloven, Kurven $y = \varphi(f)$ Fejlkurven.

25. Antages nu Störrelserne $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ at have de iagttagne Værdier $o_1, o_2, o_3 \ldots o_n$, altsaa Fejlene $f_1 = o_1 - x_1$, $f_2 = o_2 - x_2 \ldots f_n = o_n - x_n$, saa ville Sandsynlighederne for disse Fejl være $\varphi(f_1)df$, $\varphi(f_2)df \ldots \varphi(f_n)df$, og Sandsynligheden for deres Sammentræf (baade — og) bliver

$$P = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) \cdot \varphi(f_3) \ldots \varphi(f_n)df^n. \quad (44)$$

Den rimeligste Kombination af Fejlene er den, som gjör P til Maximum, men saalænge P er saa sammensat ved sin Afhængighed af flere Variable, og Formen af φ er ubekjendt, kan dette Maximumsproblem ikke løses.

Problemet bliver simplere, naar de forskjællige Feil $f_1, f_2 \ldots f_n$ hidrøre fra n forskjællige Maalninger af samme Störrelse x, altsaa $x_1 = x_2 = x_3 \ldots = x_n$, saa at

$$f_1 = o_1 - x, \; f_2 = o_2 - x \ldots f_n = o_n - x.$$

I saa Tilfælde forudsættes den rimeligste Værdi for x at være Middeltallet af Maalningerne, altsaa

$$x = \frac{o_1 + o_2 + o_3 + \cdots + o_n}{n}$$

og $f_1 + f_2 + f_3 \cdots + f_n = o_1 + o_2 + o_3 \cdots + o_n - nx = 0$,

som udtrykker, at ligestore positive og negative Fejl lige let indtræffe.

Under denne Forudsætning søges Betingelsen for Maximum af P; man faaer med forkortet Betegnelse φ for $\varphi(f)$

$$\frac{dP}{dx} = P\left[\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{df_1}\frac{df_1}{dx} + \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{df_2}\frac{df_2}{dx} \cdots + \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{df_n}\frac{df_n}{dx}\right] = 0, \quad (45)$$

hvor $\frac{df_1}{dx} = -1$, $\frac{df_2}{dx} = -1, \ldots \frac{df_n}{dx} = -1$, altsaa

$$\frac{\varphi'(f_1)}{\varphi(f_1)} + \frac{\varphi'(f_2)}{\varphi(f_2)} + \cdots + \frac{\varphi'(f_n)}{\varphi(f_n)} = 0.$$

Indføres Betegnelsen $F(f) = \frac{\varphi'(f)}{\varphi(f)}$, faaes de to Ligninger

$$F(f_1) + F(f_2) + F(f_3) + \cdots + F(f_n) = 0,$$
$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = 0.$$

Af den sidste udledes $f_n = -(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1})$, som indsat i den første giver

$$F(f_1) + F(f_2) + \cdots + F(f_{n-1}) = -F(-f_1 - f_2 \cdots - f_{n-1}).$$

Antages nu $f_1 = f_2 \cdots = f_n = 0$, faaes

$$n F(0) = 0, \quad \text{altsaa} \quad F(0) = 0.$$

Fremdeles giver $f_1 = f$ og $f_2 = f_3 \cdots = f_{n-1} = 0$

$$F(f) = -F(-f) \quad \text{eller} \quad F(-f) = -F(f),$$

altsaa F er en ulige Funktion og følgelig udledes af en foregaaende Ligning,

$$F(f_1) + F(f_2) + \cdots + F(f_{n-1}) = F(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}),$$

der som bekjendt svarer til

$$F(f) = af = \frac{\varphi'(f)}{\varphi(f)}.$$

Heri maa Konstanten a nærmere bestemmes. Da P skal være Maximum, maa $\frac{d^2P}{dx^2}$ være negativ for $x = \frac{o_1 + o_2 + \cdots + o_n}{n}$, og af

$$\frac{dP}{dx} = -P\left[F(f_1) + F(f_2) + \cdots + F(f_n)\right] = 0$$

faaes

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -\frac{dP}{dx}\left[F(f_1) + \cdots + F(f_n)\right]$$
$$-P\left[\frac{dF}{df_1}\frac{df_1}{dx} + \frac{dF}{df_2}\frac{df_2}{dx} + \cdots + \frac{dF}{df_n}\frac{df_n}{dx}\right],$$

som i Henhold til foregaaende Resultater bliver

$$\frac{d^2P}{dx^2} = P\left[\frac{dF}{df_1} + \frac{dF}{df_2} + \cdots + \frac{dF}{df_n}\right] = naP.$$

Altsaa a maa være negativ, saa at man kan sætte $a = -2h^2$; Betydningen af h skal senere angives.

Man faaer heraf

$$F(f) = -2h^2 f = \frac{\varphi'(f)}{\varphi(f)}, \quad \varphi(f) = be^{-h^2 f^2}, \quad (46)$$

idet b er en ny Konstant. (46) angiver Fejlloven som en kontinuert Funktion, der aftager stærkt, naar f voxer, især udover en vis Grændse, hvor den kan betragtes som forsvindende; den kan altsaa bruges istedenfor den diskontinuerte Funktion, især da Fejlens virkelige Grændser dog vanskelig kunne fastsættes med Sikkerhed.

26. Da man nu har ifølge (43)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} be^{-h^2 f^2} df = 1,$$

saa faaes ved at man gjör $hf = t$,

$$\frac{b}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{b}{h}\sqrt{\pi} = 1, \quad b = \frac{h}{\sqrt{\pi}}, \quad (47)$$

og deraf Fejlloven $\varphi(f) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 f^2}$. (48)

Sandsynligheden for Fejl imellem $+f$ og $-f$ bliver

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-f}^{+f} e^{-h^2 f^2} df = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-t}^{+t} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+t} e^{-t^2} dt. \quad (49)$$

Da man i Tavler har beregnet Værdierne af dette Integral for saadanne t, som falde indenfor de af Fejlenes Grændser afhængige Værdier, kan Sandsynligheden for Fejl i ethvert Interval let findes. Saadanne Tavler findes flere Steder, saasom i Berl. astron. Jahrb. 1834, Cournot expos. de la théorie des chances et des probab., Quetelet lettres sur la probab.

Sandsynligheden for Fejl fra $-a$ til $+a$ er

$$p_a = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-h^2 f^2} df,$$

der for $hf = t$ bliver til

$$p_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-t^2} dt.$$

Sandsynligheden for Fejl fra a til b vil være

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2f^2}df = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^b e^{-h^2f^2}df - \int_0^a e^{-h^2f^2}df\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{bh} e^{-t^2}dt - \int_0^{ah} e^{-t^2}dt\right),$$

og hvis dette Udtryk multipliceres med 2, faaes Sandsynligheden for Fejl enten fra a til b eller fra $-a$ til $-b$.

Nedenstaaende Tavle vil være tilstrækkelig til de fleste Beregninger.

ah	p_a	ah	p_a	ah	p_a	ah	p_a	ah	p_a
0,01	0,01128	0,36	0,38933	0,71	0,68467	1,12	0,88679	1,82	0,98994
2	02256	7	39921	2	69143	4	89308	4	99074
3	03384	8	40901	3	69810	6	89910	6	99147
4	04511	9	41874	4	70468	8	90484	8	99216
5	05637	0,40	42839	5	71116	1,20	91031	1,90	99279
6	06762	0,41	0,43797	6	71754	1,22	0,91553	1,92	0,99338
7	07886	2	44747	7	72382	4	92051	4	99392
8	09008	3	45689	8	73001	6	92524	6	99443
9	10128	4	46623	9	73610	8	92973	8	99489
0,10	11246	5	47548	0,80	74210	1,30	93401	2,00	99532
0,11	0,12362	6	48466	0,81	0,74800	1,32	0,93807	2,05	99626
2	13476	7	49375	2	75381	4	94191	10	99702
3	14587	8	50275	3	75952	6	94556	15	99764
4	15695	9	51166	4	76514	8	94902	20	99814
5	16800	0,50	52050	5	77067	1,40	95229	2,25	99854
6	17901	0,51	0,52924	6	77610	1,42	0,95538	2,30	0,99886
7	18999	2	53790	7	78144	4	95830	35	99911
8	20094	3	54646	8	78669	6	96105	40	99931
9	21184	4	55494	9	79184	8	96365	45	99947
0,20	22270	5	56332	0,90	79691	1,50	96611	2,50	99959
0,21	0,23352	6	57162	0,91	0,80188	1,52	0,96841	2,55	0,99969
2	24430	7	57982	2	80677	4	97059	60	99976
3	25502	8	58792	3	81156	6	97263	65	99982
4	26570	9	59594	4	81627	8	97455	70	99987
5	27633	0,60	60386	5	82089	1,60	97635	2,75	99990
6	28690	0,61	0,61168	6	82542	1,62	0,97804	2,80	0,99992
7	29742	2	61941	7	82987	4	97962	85	99994
8	30788	3	62705	8	83423	6	98110	90	99996
9	31828	4	63459	9	83851	8	98249	95	99997
0,30	32863	5	64203	1,00	84270	1,70	98379	3,00	99998
0,31	0,33891	6	64938	1,02	0,85084	1,72	0,98500		
2	34913	7	65663	4	85865	4	98613		
3	35928	8	66378	6	86614	6	98719		
4	36936	9	67084	8	87333	8	98817		
5	37938	0,70	67780	1,10	88021	1,80	98909		

DANMARKS TEKNISKE BIBLIOTEK

Sandsynligheden for en Fejl fra 0,2 og 0,3 til begge Sider er ifølge Tavlen

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0,2}^{0,3} e^{-t^2}dt = 0,32863 - 0,22270 = 0,10593.$$

Omvendt, naar Integralet p_a er givet, findes deraf ah, om fornødent ved en Interpolation. Saaledes, naar en vis Værdi r af a giver

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{rh} e^{-t^2}dt = 0,5,$$

faaes ved Interpolation i ovenstaaende Tavle

$$rh = 0,47694 = \varrho. \qquad (50)$$

Da Sandsynligheden for at begaae en Fejl indenfor Grændserne $+r$ og $-r$ er $\frac{1}{2}$, saa kaldes $r = \frac{\varrho}{h}$ den sandsynlige Fejl. Konstanten h ses heraf at være omvendt proportional med den sandsynlige Fejl, saa at h voxer, naar den sandsynlige Fejl aftager, og omvendt.

Betragtes to forskjællige Systemer af Iagttagelser, hvor h optræder med forskjællige Værdier h og h', saa ville Sandsynlighederne for Fejl imellem $+a$ og $-a$ i det ene, $+a'$ og $-a'$ i det andet System være

$$p_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{ah} e^{-t^2}dt \quad \text{og} \quad p'_{a'} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{a'h'} e^{-t^2}dt,$$

og for at disse skulle være ligestore, maa man have

$$ah = a'h'.$$

Der er altsaa samme Sandsynlighed for saadanne Fejl i de to Systemer, som ere omvendt proportionale med Konstanterne h. I samme Forhold som h voxer, aftager den Fejl, som med en vis given Sandsynlighed kan begaaes. Er $h' = 2h$, saa bliver $a' = \frac{1}{2}a$, saa at i et vist System begaaes en vis Fejl ligesaa let som den halve Fejl i et andet System, hvor Størrelsen h er dobbelt saa stor. Tilmed bemærkes, at $\varphi(f)$ ifølge (46) og (48) aftager, naar h voxer. Størrelsen h kan derfor betragtes som Maal for Nöjagtigheden. Det

ligger i h's Betydning, at denne Størrelse i de almindelige Formler maa forblive ubestemt, og først i specielle Undersøgelser kan bestemmes af de foreliggende Iagttagelser selv.

27. Det vil nu være muligt at angive Betingelsen for Maximum af (44); thi i Henhold til det fundne Udtryk for $\varphi(f)$ er

$$P = \frac{h_1 h_2 h_3 \dots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-(h_1^2 f_1^2 + h_2^2 f_2^2 \cdots + h_2^2 f_n^2)},$$

hvilket aabenbart er Maximum, naar

$$h_1^2 f_1^2 + h_2 f_2^2 + h_n^2 f_n^2 = \Sigma(h^2 f^2) \text{ er Minimum.}$$

Den rimeligste Kombination er den, som gjör Summen af Qvadraterne paa Produkterne af Fejlene og Maalene for Nöjagtigheden mindst mulig. Er Maalet for Nöjagtigheden ens for alle, $h_1 = h_2 = h_3 = \cdots = h_n$, saa bliver

$$\Sigma(f^2) \text{ Minimum,}$$

altsaa, hvis alle Iagttagelser ere lige nöjagtige, saa skal man vælge den Kombination, der gjör Summen af Fejlenes Qvadrater mindst mulig.

28. En Undersøgelse af Fejlkurvens Figur vil give Resultater, som ere angivne i nedenstaaende Tavle for blot positive Fejl, idet næmlig $\varphi(f)$ som en lige Funktion giver en Kurve symmetrisk med Hensyn til Ordinataxen.

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 f^2}, \quad \frac{dy}{df} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 f^2} f, \quad \frac{d^2 y}{df^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 f^2}(1 - 2h^2 f^2).$$

f	$= 0$	$= \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0{,}71}{h}$	$= \frac{1}{h}$	$= \frac{2}{h}$	∞
y	$\frac{h}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56h$	$\frac{h}{\sqrt{\pi e}} = 0{,}34h$	$\frac{h}{e\sqrt{\pi}} = 0{,}21h$	$\frac{h}{e^4\sqrt{\pi}} = 0{,}01h$	0
$\frac{dy}{df}$	$= 0$	< 0	< 0	< 0	0
$\frac{d^2 y}{df^2}$	< 0	$= 0$	> 0	> 0	0
Punkt.	Maximum.	Vendepunkt.	Aftagende Ordinater med Krumn. imod de pos. y.		Abscisseaxen Asymptote.

Jo större h er, desto större bliver Sandsynligheden for en Fejl, som er 0, og desto mindre blive Fejlene $\frac{1}{h\sqrt{2}}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{2}{h}$ o. s. v., medens deres tilsvarende Sandsynligheder voxe i samme Forhold som h. Efterat Kurven er passeret Vendepunktet til begge Sider af Ordinataxen, sker der en langsommere Tilnærmelse til Axen, men disse Vendepunkter rykke ogsaa nærmere til Ordinataxen, altsaa indskrænke de rimeligste Fejls Störrelse, naar h voxer.

29. Ofte indføres den sandsynlige Fejl istedenfor Nöjagtighedens Maal; ogsaa den aftager, naar h voxer. Da (50) giver $h = \frac{\varrho}{r}$, saa faaes

$$p_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho \cdot \frac{a}{r}} e^{-t^2} dt \qquad (51)$$

som et nyt Udtryk for Sandsynligheden for en Fejl imellem $-a$ og $+a$.

I saadanne Tilfælde, hvor det blot kommer an paa Bestemmelsen af Fejlens Forhold til den sandsynlige Fejl, er denne Formel bekvem, og efter den forhen meddelte Tavle kan man beregne p_a for Værdier af $\frac{a}{r}$ fra 1 til 6, ud over hvilken Grændse Fejlen meget sjældent vil falde, som nedenstaaende Tavle viser.

$\frac{a}{r}$	$\varrho \cdot \frac{a}{r}$	p_a	$1 - p_a$
1	0,47694	0,50000	0,50000
2	0,95388	0,82266	0,17734
3	1,43082	0,95698	0,04302
4	1,90776	0,99302	0,00698
5	2,38470	0,99926	0,00074
6	2,86164	0,99995	0,00005

Heraf ses, at af 1000 Fejl ere rimeligvis 500 over, 500 under den sandsynlige r, medens 823 ere under $2r$, 177 over $2r$, 957 under og 43 over $3r$, 993 under og 7 over $4r$, 999 under og 1 over $5r$, men ingen större. Af 100000 vilde ikkun 5 rimeligvis overskride det Sex-

dobbelte af den sandsynlige Fejl. Satte man $p_a = 0{,}9999$, fik man $\varrho \cdot \frac{a}{r} = 2{,}75108 = \varrho \cdot 5{,}76820 = t$. Ifølge heraf behøver t ikke at overskride 3, som derfor ogsaa er den sædvanlige Grændse for Tavler til Beregning af Integralet p_a.

30. Istedenfor den sandsynlige Fejl kan man ogsaa bruge Middelfejlen. Kaldes hele Antallet af Fejl n, saa vil det imellem f og $f+df$ liggende Antal Fejl rimeligvis være

$$n \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 f^2} df.$$

Summen af disse Fejls Qvadrater faaes ved Multiplikation af Antallet med f^2, altsaa

$$n \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 f^2} f^2 df,$$

følgelig Summen af alle mulige Fejls Qvadrater

$$n \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 f^2} f^2 df.$$

Divideres endelig denne Sum med n, faaes Middelfejlens Qvadrat

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 f^2} f^2 df = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^2 dt,$$

som ifølge (24) bliver

$$m^2 = \frac{1}{2h^2} = \frac{r^2}{2\varrho^2}, \quad \text{altsaa} \quad m = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{r}{\varrho\sqrt{2}}. \tag{52}$$

Middelfejlen er omvendt proportional med Nöjagtighedens Maal, ligefrem proportional med den sandsynlige Fejl. Abscissen til Fejlkurvens Vendepunkt er Middelfejlen. Ifølge Værdien af ϱ i (50) giver (52) Forholdet imellem den sandsynlige Fejl og Middelfejlen

$$r = \frac{\varrho}{h} = 0{,}47694\sqrt{2} \cdot m = 0{,}67449 \cdot m. \tag{53}$$

Middelfejlens Relation til h kunde ogsaa være bestemt paa anden Maade. Havde man nemlig en Række virkelig begaaede Fejl, saa vilde Sandsynligheden for dem, under

Forudsætning af samme Nöjagtighed for dem alle, være ifølge (44)

$$P = \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 \Sigma(f^2)},$$

som vil være en Funktion af h, der bliver Maximum, naar

$$\frac{dP}{dh} = \frac{h^{n-1}}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 \Sigma(f^2)} (n - 2h^2 \Sigma(f^2)) = 0,$$

altsaa naar

$$h = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma(f^2)}}. \quad (54)$$

Men ifølge Definitionen paa Middelfejlen som den Fejl, der begaaet ved alle Iagttagelser fik samme Qvadratsum som de virkelige Fejl, haves

$$m^2 = \frac{\Sigma(f^2)}{n}, \quad (55)$$

saa at (54) og (55) igjen give (52).

Fejlloven og Sandsynligheden for Fejl fra $-a$ til $+a$ udtrykte ved Middelfejlen blive

$$\varphi(f) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{f^2}{2m^2}}, \quad p_a = \frac{\sqrt{2}}{m\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{m\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt. \quad (56)$$

Exempel paa Rigtigheden af Fejlloven viser en Undersøgelse af Bessel angaaende 470 Iagttagelser af Stjernerne Ataïr og Prokyon, foretagne af Bradley, for at bestemme deres Rektascension. Ved Sammenligning af Bradleys Resultater med de nu fuldkommen bekjendte Rektascensioner, fandt Bessel først den sandsynlige Fejl at være $r = 0'',2637$, idet det halve Antal Fejl laa indenfor, det andet halve Antal udenfor denne Grændse. Tages r til Enhed, vil en Fejl af $0'',1$ svare til $\frac{0,1}{0,2637} r = 0,3792 r$, og af en Tavle som den Pag. 54 faaes Sandsynligh. for Fejlen $0'',1$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,3792 r} e^{-t^2} dt = 0,20186,$$

som ved Multiplikation med 470 angiver det hele Antal Fejl, der skulde være af denne Störrelse, til 94,86, altsaa 95; i Virkeligheden var der 94. Sandsynligheden for Fejl imellem $0'',1$ og $0'',2$ er

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\,.\,0{,}3792\,r} e^{-t^2}dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0{,}3792\,r} e^{-t^2}dt = 0{,}18916.$$

Antallet af disse Fejl blev beregnet til 88,89, altsaa 89, medens der virkelig fandtes 88. En Oversigt over hele Udbyttet af Regningen indeholdes i nedenstaaende Tavle, hvor den første Rubrik angiver Fejlens höjere Grændse, den lavere er 0″,1 mindre.

Fejl.	Sandsynlighed.	Beregnet Antal.	Iagttaget Antal.	Fejl.	Sandsynlighed.	Beregnet Antal.	Iagttaget Antal.
0″,1	0,20186	95	94	0″,6	0,07607	36	36
0″,2	0,18916	89	88	0″,7	0,05150	24	26
0″,3	0,16603	78	78	0″,8	0,03265	15	14
0″,4	0,13667	64	58	0″,9	0,01940	9	10
0″,5	0,10532	50	51	1″,0	0,01117	5	7
				over 1	0,01017	5	8

Middelfejlen herved er $\frac{r}{\varrho\sqrt{2}} = \frac{0{,}2637}{0{,}47694\sqrt{2}} = 0{,}39095$. Det fortjener at udhæves, hvorledes de större Fejl her, som i Almindelighed, forekomme lidt hyppigere end Theorien angiver, hvilket er Tegn til, at der ingen væsentlig Fejl er begaaet ved Valget af Grændserne $\pm\infty$ i (43), da ellers det Modsatte maatte vise sig.

Et andet Exempel afgiver Quetelets Undersøgelser over de ved de franske Sessioner optagne Maalninger af de Værnepligtiges Höjde. Ved Hjælp af visse Opgivelser fra Sessionerne beregnede han, hvorstort Antal Personer der maatte have en vis Afvigelse fra Middelhöjden, og fandt dette overensstemmende med den virkelige Fordeling, dog med den Forskjæl, at Beregningen viste et ringere Antal Undermaalere end Virkeligheden, formodentlig hidrørende fra Bestræbelser for at undgaae Værnepligtsbyrden. (Se Quetelet lettre XXI, p. 140 og 401.)

31. Antages den Störrelse, som er underkastet gjentagne Maalninger, at være afsat paa en ret Linie fra et fast Begyndelsespunkt, saa ville alle de ved Maalningerne fundne Störrelser, afsatte fra samme Punkt, falde med deres

Endepunkter paa begge Sider af Liniens andet Endepunkt. Men man kan ogsaa tænke sig istedenfor Afvigelserne fra dette Endepunkt i samme rette Linie Afvigelser i samme Plan til alle Sider, saaledes som for Ex. ved Skydeøvelser alle Kuglernes Afvigelser fra Skivens Centrum. Beregningen af Sandsynlighederne for Afvigelser med Hensyn til to retvinklede x- og y-Axer igjennem Skivens Centrum meddeles efter Wrede (Öfversigt af Kongl. Vetensk. Akad. Förh. 1857. Nr. 3). Antages Maalet for Nöjagtigheden i Retning af x-Axen at være h, i Retning af y-Axen k, saa ere Sandsynlighederne for Afvigelser x og y fra disse henholdsvis ifølge (48)

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx, \quad \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2y^2} dy.$$

Sandsynligheden for disses Sammentræf (baade — og) er

$$P = \frac{hk}{\pi} e^{-h^2x^2 - k^2y^2} dx\, dy,$$

hvilken Funktion maa opfylde Betingelsen

$$\frac{hk}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2 - k^2y^2} dx\, dy = 1,$$

som ogsaa ses at være Tilfældet, naar den omformes til

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx \cdot \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2y^2} dy = 1,$$

stemmende med (43). Fejlloven er her

$$Z = \frac{hk}{\pi} e^{-h^2x^2 - k^2y^2},$$

der graphisk fremstilles som en Overflade med en Række plane Snit gaaende igjennem Z-Axen af samme Form som Fejlkurven (se 28). Sættes fremdeles

$$h^2x^2 + k^2y^2 = z^2,$$

som er en Ellipse med Halvaxerne $\frac{z}{h}$ og $\frac{z}{k}$, saa faaes den samme Sandsynlighed for alle Afvigelser x og y, som ere Koordinater til denne Ellipse, næmlig

$$\frac{hk}{\pi} e^{-z^2} dx\, dy.$$

Dette forestiller et Volumenelement indenfor Overfladen paa en Basis $dx\, dy$, der imidlertid kan omformes til et Element af Ellipsens Areal,

$$d \cdot \frac{\pi z^2}{hk} = \frac{2\pi}{hk} z\, dz.$$

Sandsynligheden for at Afvigelsen skal falde indenfor en Ellipse svarende til et vist z bliver nu

$$P_z = 2 \int_0^z e^{-z^2} z\, dz = 1 - e^{-z^2}.$$

Sættes heri $P_z = \frac{1}{2}$, faaes den Ellipse, der skiller alle Afvigelserne i to Halvdele, den ene faldende indenfor og den anden udenfor den, nærmlig bestemt ved

$$1 - e^{-z^2} = \tfrac{1}{2}, \quad z = \sqrt{1.2}.$$

Betegnes de sandsynlige Fejl i Retning af x-Axen og y-Axen, henholdsvis ved r_x og r_y, saa bliver

$$hr_x = 0{,}47694 = kr_y,$$

og den nysnævnte Ellipses Axer faaes ved Multiplikation af henholdsvis r_x og r_y med

$$\frac{z}{hr_x} = \frac{z}{kr_y} = \frac{\sqrt{1.2}}{0{,}47694} = 1{,}7456.$$

2. Fejl ved afhængige Størrelser.

32. De ved Iagttagelserne fundne Størrelser være $o_1, o_2, o_3 \ldots$, og af disse afhænger paa en eller anden bekjendt Maade en Funktion U; Fejlene ved de iagttagne Størrelser være $f_1, f_2, f_3 \ldots$ og ved U være den u, de tilsvarende Middelfejl betegnes henholdsvis ved $m_1, m_2, m_3 \ldots$ samt μ. Man skal af den Afhængighed imellem U og Størrelserne o, som er bejendt, udlede Relationen imellem u og Fejlene f, samt imellem μ og alle m.

1. Er $U = ao$, saa bliver $o + f$ den sande Værdi af den iagttagne Størrelse, saa at $U + u = a(o + f)$, følgelig $u = af$, som igjen efter Loven for Bestemmelsen af Middelfejlen giver $\mu = am$.

2. Er $U = o_1 + o_2$, saa faaes $U+u = o_1+f_1+o_2+f_2$, følgelig $u = f_1 + f_2$. Bestemmelsen af Middelfejlen μ kræver en mere detailleret Beregning. Sandsynlighederne for Fejlene f_1 paa o_1 og f_2 paa o_2 ere ifølge den første (56) henholdsvis

$$\frac{1}{m_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{f_1^2}{2m_1^2}} df \quad \text{og} \quad \frac{1}{m_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{f_2^2}{2m_2^2}} df.$$

Følgelig faaes Sandsynligheden for disses Sammentræf eller for Fejlen u sammensat netop af to bestemte Fejl f_1 og f_2 at være

$$\frac{1}{2\pi m_1 m_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f_1^2}{m_1^2}+\frac{f_2^2}{m_2^2}\right)} df^2,$$

men heri sættes $f_2 = u - f_1$, som giver

$$\frac{f_1^2}{m_1^2}+\frac{f_2^2}{m_2} = \frac{f_1^2(m_1^2+m_2^2)}{m_1^2 m_2^2} - \frac{2uf_1}{m_2^2} + \frac{u^2}{m_2^2}$$

$$= \left(\frac{f_1\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{m_1 m_2} - \frac{um_1}{m_2\sqrt{m_1^2+m_2^2}}\right)^2 + \frac{u^2}{m_1^2+m_2^2}.$$

Sandsynligheden for det berørte Sammentræf kan altsaa omskrives til

$$\frac{1}{2\pi m_1 m_2} e^{-\frac{u^2}{2(m_1^2+m_2^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f_1\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{m_1 m_2} - \frac{um_1}{m_2\sqrt{m_1^2+m_2^2}}\right)^2} df^2.$$

Men da Fejlen u kan opstaae ved alle mulige Værdier af f_1, saalænge blot $f_2 = u - f_1$, saa vil Fejlloven med Hensyn til Fejlen u være

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi m_1 m_2} e^{-\frac{u^2}{2(m_1^2+m_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f_1\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{m_1 m_2} - \frac{um_1}{m_2\sqrt{m_1^2+m_2^2}}\right)^2} df.$$

Sættes nu

$$\frac{f_1\sqrt{m_1^2+m_2^2}}{m_1 m_2} - \frac{um_1}{m_2\sqrt{m_1^2+m_2^2}} = t\sqrt{2},$$

ændres dette, idet tillige for $\varphi(u)$ indføres det første Udtryk (56), til

$$\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\mu^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2(m_1^2+m_2^2)}} e^{-\frac{u^2}{2(m_1^2+m_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(m_1^2+m_2^2)}} e^{-\frac{u^2}{2(m_1^2+m_2^2)}}. \qquad (57)$$

Af (57) følger $\mu = \sqrt{m_1^2+m_2^2}$, (58)
som bestemmer Middelfejlen paa U ved Middelfejlene paa o_1 og o_2. Da der er et konstant Forhold mellem Middelfejlene og de sandsynlige Fejl, maa samme Relation gjælde for disse, altsaa, idet R er denne Fejl paa U, r_1 og r_2 paa o_1 og o_2, haves

$$R = \sqrt{r_1^2+r_2^2}, \qquad (59)$$

hvilket ogsaa kunde være fundet ad direkte Vej.

3. Udvidelse af de i 1 og 2 meddelte Resultater giver for det Tilfælde, hvor

$$U = a_1 o_1 + a_2 o_2 + a_3 o_3 \cdots = \Sigma(ao),$$

tilsvarende Relationer

$$\mu^2 = \Sigma(a^2 m^2), \quad R^2 = \Sigma(a^2 r^2). \qquad (60)$$

4. Er U en Funktion af en aldeles almindelig Form

$$U = F(o_1, o_2, o_3 \ldots),$$

saa kan denne, naar Fejlene anses for meget smaa Tilvæxter til Størrelserne o, udvikles i Række efter stigende Potenser af disse Tilvæxter, hvis höjere Potenser uden mærkelig Fejl for den praktiske Beregning kunne udelades. Man faaer da efter Subtraktion af U fra begge Sider

$$u = \frac{dU}{do_1} f_1 + \frac{dU}{do_2} f_2 + \frac{dU}{do_3} f_3 + \cdots,$$

der falder ind under Tilfældet 3 og altsaa giver

$$\mu^2 = \Sigma\left(\frac{dU^2}{do^2} m^2\right), \quad R^2 = \Sigma\left(\frac{dU^2}{do^2} r^2\right). \qquad (61)$$

33. At finde den sandsynlige Værdi af en flere Gange med samme Nöjagtighed maalt Størrelse x (jfr. 25).

Man skal have $\Sigma(f^2)$, der efter Gauss simplere betegnes $[f^2]$, at være Minimum. Man har for n Maalninger

Fejlene $f_1 = o_1 - x$, $f_2 = o_2 - x$, ... $f_n = o_n - x$,
følgelig $[f^2] = [o^2] - 2[o]x + nx^2$.

Minimum faaes, naar

$$\frac{d.[f^2]}{dx} = -2[o] + 2nx = 0, \quad x = \frac{[o]}{n}, \qquad (62)$$

som udtrykker, at x er Middeltallet af Observationerne. At Minimum virkelig finder Sted, ses paa sædvanlig Maade, og at Fejlene virkelig falde til begge Sider og hæve hverandre, følger af

$$[f] = [o] - nx,$$

som ifølge (62) er 0. Kaldes Middelfejlen og den sandsynlige Fejl, man ved Observationen er udsat for, henholdsvis m og r, saa blive disse Fejl paa den maalte Störrelse ifølge (60), idet $a_1 = a_2 \cdots = \frac{1}{n}$,

$$\mu = \sqrt{n \cdot \frac{m^2}{n^2}} = \frac{m}{\sqrt{n}}, \qquad R = \frac{r}{\sqrt{n}}. \qquad (63)$$

Altsaa Middelfejlen og den sandsynlige Fejl paa den maalte Störrelse ere saa mange Gange mindre end de tilsvarende Feil paa Observationerne som Qvadratroden af Observationernes Antal angiver.

Indføres det fundne x i $[f^2]$, faaes

$$[f^2] = [o^2] - \frac{[o]^2}{n}, \qquad (64)$$

som udtrykker Summen af Fejlenes Qvadrater under den Forudsætning, at Middeltallet af Maalningerne er x's virkelige Værdi. Under samme Forudsætning vilde Middelfejlen faaes af

$$nm^2 = [o^2] - \frac{[o]^2}{n},$$

men m er ligesaa lidt den virkelige Middelfejl, som Middeltallet af Maalningerne er det virkelige x. Paa Grund deraf maa man søge Grændser, hvorimellem Middelfejlen kan være indesluttet, eller finde den sandsynlige Fejl paa Middelfejlen. Dette sker ved overhovedet at finde Sandsynligheden for at begaae en vis Fejl paa Middelfejlen. Ere de virkelige Fejl v_1, v_2, ... v_n, vil Sandsynligheden

for deres Sammentræf, naar Middelfejlen kaldes m, være ifølge (56)

$$P_m = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} m^n} e^{-\frac{[v^2]}{2m^2}} dv^n.$$

Men Sandsynligheden for dette Sammentræf bliver, saafremt Middelfejlen afviger fra m, for Ex. er $m+\omega$, til

$$P_{m+\omega} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (m+\omega)^n} e^{-\frac{[v^2]}{2(m+\omega)^2}} dv^n.$$

Er nu m den sandsynligste Værdi af Middelfejlen, saa maa

$$\frac{P_{m+\omega}}{P_m} < 1, \quad \text{l.} \frac{P_{m+\omega}}{P_m} < 0,$$

og man har

$$\text{l.} P_{m+\omega} - \text{l.} P_m = -n \text{l.} \left(1+\frac{\omega}{m}\right) - \frac{[v^2]}{2m^2}\left(\left(1+\frac{\omega}{m}\right)^{-2} - 1\right)$$

$$= -\left(n - \frac{[v^2]}{m^2}\right)\frac{\omega}{m} + \frac{1}{2}\left(n - \frac{3[v^2]}{m^2}\right)\frac{\omega^2}{m^2},$$

hvor höjere Potenser af ω bortkastes som forsvindende. Men denne Störrelse er for alle ω negativ, saafremt

$$n = \frac{[v^2]}{m^2} \quad \text{eller} \quad m^2 = \frac{[v^2]}{n}, \tag{65}$$

altsaa naar Middelfejlen beregnes af de virkelige Fejl, hvorved faaes

$$\text{l.} P_{m+\omega} - \text{l.} P_m = -n\frac{\omega^2}{m^2},$$

som endelig giver

$$P_{m+\omega} = P_m e^{-n\frac{\omega^2}{m^2}}.$$

Heraf findes altsaa Sandsynligheden for at begaae en Fejl ω paa m, og da denne Fejllov udtrykt ved den sandsynlige Fejl skal have den ved (48), idet $h = \frac{\varrho}{r}$, bestemte Form, saa maa man have

$$h^2 = \frac{\varrho^2}{r^2} = \frac{n}{m^2},$$

eller den sandsynlige Fejl paa m vil være bestemt ved

$$r = \frac{m\varrho}{\sqrt{n}}, \tag{66}$$

saa at Middelfejlens Grændser blive

$$m\left(1+\frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{og} \quad m\left(1-\frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right). \tag{67}$$

Det heri indgaaende m kan ifølge Sagens Natur kun findes tilnærmelsesvis, og dertil haves følgende Methode. Var den søgte Størrelse ikke Middeltallet x, bestemt ved (62), men afvigende derfra $x+\xi$, saa blive de virkelige Fejl ligesaa meget afvigende fra dem, der faaes naar Middeltallet tages for x og Udtrykket (64) for $[f^2]$, altsaa

$$v_1 = f_1+\xi, \quad v_2 = f_2+\xi, \quad \ldots \quad v_n = f_n+\xi,$$

følgelig ved at qvadrere og addere

$$[v^2] = [f^2] + 2\xi[f] + n\xi^2 = [f^2] + n\xi^2,$$

idet $[f] = 0$. Heraf ses, at Summen af de Feilqvadrater, som faaes ved at bruge Middeltallet til Beregning af Fejlene, altid er for lille. En rimelig Rettelse af denne Fejl sker ved ifølge (65) at sætte nm^2 for $[v^2]$ og x's Middelfejl μ i (63) istedenfor ξ, altsaa $\xi^2 = \frac{m^2}{n}$; man finder derved, idet $[f^2]$ er bestemt ved (64),

$$nm^2 = [f^2] + m^2, \quad \text{altsaa} \quad m = \sqrt{\frac{[f^2]}{n-1}}. \tag{68}$$

Altsaa en Tilnærmelse til Middelfejlen paa Iagttagelserne faaes ved een ubekjendt Størrelses Maalning, naar den beregnes som om Antallet af Maalninger var een mindre end det virkelig er.

Derefter faaes igjen Middelfejlen og den sandsynlige Fejl paa den maalte Størrelse ifølge (63)

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{[f^2]}{n-1}}, \qquad R = \frac{0{,}67449}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{[f^2]}{n-1}}. \tag{69}$$

Ex. Ved den telegraphiske Bestemmelse af Længdeforskjællen imellem Observatoriet i Ann Arbor og en Station ved Detroit bleve den 21de Mai 1861 31 Stjerner iagttagne begge Steder og gave Resultater, hvis Middeltal var

$$2^m\,43^s,49.$$

Beregnes Summen af Qvadraterne paa Differenserne imellem

de iagttagne Længdeforskjælligheder og denne Middelstörrelse, faaes

$$[f^2] = [o^2] - \frac{[o]^2}{n} = 1{,}77.$$

Da $n = 31$, giver (68) Middelfejlen paa den enkelte Iagttagelse

$$m = \sqrt{\frac{1{,}77}{30}} = 0^s{,}243,$$

hvoraf den sandsynlige Fejl paa de samme Störrelser faaes at være

$$r = 0{,}67449 \,.\, 0^s{,}243 = 0^s{,}164.$$

Middelfejlen og den sandsynlige Fejl paa den maalte Störrelse blive nu ifølge (69)

$$\mu = \frac{0{,}243}{\sqrt{31}} = 0^s{,}044, \quad R = 0{,}67449 \,.\, 0{,}044 = 0^s{,}029.$$

Regnes R for 0,03, faaes Længdeforskjællen liggende imellem $2^m\,43^s{,}46$ og $2^m\,43^s{,}52$ (jfr. Brünnow Lehrb. der sphär. Astr.).

34. At finde den sandsynlige Værdi af en Störrelse x, som flere Gange er maalt, men med forskjællig Nöjagtighed.

Man skal have $\Sigma[h^2f^2]$, som kortere skrives $[h^2f^2]$, at være Minimum. Men da $h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = \frac{\varrho}{r}$, saa skal $\left[\frac{f^2}{m^2}\right]$ eller $\left[\frac{f^2}{r^2}\right]$ være Minimum, idet $m_1, m_2 \ldots$ og $r_1, r_2 \ldots$ ere Middelfejlene og de sandsynlige Fejl paa de enkelte Maalninger. Man har

$$\left[\frac{f^2}{m^2}\right] = \left[\frac{o^2}{m^2}\right] - 2\left[\frac{o}{m^2}\right]x + \left[\frac{1}{m^2}\right]x^2,$$

altsaa

$$\frac{d \cdot \left[\frac{f^2}{m^2}\right]}{dx} = -2\left[\frac{o}{m^2}\right] + 2\left[\frac{1}{m^2}\right]x = 0. \quad (70)$$

Analog Bestemmelse faaes ved at bruge den sandsynlige Fejl istedenfor Middelfejlen, saa at man finder

$$x = \frac{\left[\frac{o}{m^2}\right]}{\left[\frac{1}{m^2}\right]} \quad \text{og} \quad x = \frac{\left[\frac{o}{r^2}\right]}{\left[\frac{1}{r^2}\right]}. \quad (71)$$

Ifølge denne x's Afhængighed af o maae Middelfejlen μ og den sandsynlige Fejl R paa x (jfr. (60), idet $a_s = \frac{\frac{1}{m_s^2}}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}$ eller analog Bestemmelse haves af a ved r) bestemmes ved

$$\mu^2 = \frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}, \quad R^2 = \frac{1}{\left[\frac{1}{r^2}\right]}. \tag{72}$$

En simplere Form for disse Resultater faaes, naar man sætter

$$m_s = \frac{m}{\sqrt{p_s}}, \tag{73}$$

hvorved Middelfejlene paa hver Iagttagelse antages omvendt proportionale med Qvadratroden af de nye Størrelser p. Men ifølge (63) ere Middelfejlene ogsaa omvendt proportionale med Qvadratroden af Iagttagelsernes Antal, altsaa Størrelserne p ere ligefrem proportionale med dette Antal. Man har derfor følgende Relationer:

$$p_s m_s^2 = \text{konst.}, \quad p_s r_s^2 = \text{konst.}, \quad \frac{p_s}{h_s^2} = \text{konst.}$$

Størrelserne p kaldes Vægtene og kunne ligefrem betragtes som Antallet af lige gode og nöjagtige Iagttagelser, hvis Nöjagtighed anses for Enhed for Nöjagtigheden. Ved Hjælp heraf ændres de foregaaende Formler (70) og (71) til

$$[p]x - [po] = 0, \quad x = \frac{[po]}{[p]}. \tag{74}$$

Den første omskrives til

$$[p(x-o)] = [pf] = 0,$$

der viser, at Forholdet er, som om der var $[p] = p_1+p_2+p_3\ldots$ Iagttagelser, af hvilke p_1 havde Fejlen f_1, p_2 Fejlen f_2 o. s. v. Den anden (74) viser, at x afhænger af o og p paa samme Maade som et Tyngdepunkts Koordinat for et System af Vægte afhænger af Koordinaterne til disses Tyngdepunkt og Vægtene selv.

I den anden (74) har x Formen $[ao]$, idet $a_s = \frac{p_s}{[p]}$, og herefter bliver Middelfejlen paa x formedelst (73) til

$$\mu^2 = \frac{[p_s^2 m_s^2]}{[p]^2} = \frac{[p_s m^2]}{[p]^2} = \frac{m^2}{[p]}. \qquad (75)$$

Da den maalte Størrelse ikke nöjagtig er bestemt ved den anden (74), saa ville de virkelige Fejl kunne fremstilles ved $v_1 = f_1 + \xi$, $v_2 = f_2 + \xi \ldots$ ligesom i 33, hvorved dog erindres, at den første Ligning er tilstede p_1 Gange, v_2 p_2 Gange o. s. v. Ved at qvadrere og addere det hele saaledes tilstedeværende Antal Ligninger faaes

$$[pv^2] = [pf^2] + 2[pf]\xi + [p]\xi^2,$$

men ifølge den første (74) er $[pf] = 0$, saa at derved erholdes $[pv^2] = [pf^2] + [p]\xi^2$.

Heri søges nu Middelfejlen m i (73) indført. Den findes paa lignende Maade som (65), idet Sandsynligheden for den virkelige Fejl v_s er ifølge (56) og (73)

$$\frac{1}{m_s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{v_s^2}{m_s^2}} dv = \frac{\sqrt{p_s}}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{v_s^2 p_s}{m^2}} dv,$$

og følgelig Sandsynligheden for de virkelige Fejls Sammentræf

$$\frac{\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}{m^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{[p_s v_s^2]}{m^2}} dv^2.$$

Ligesom næmlig (65) er udledt af den tilsvarende Formel i 33, findes heraf

$$m^2 = \frac{[pv^2]}{n}.$$

Man kan altsaa i den oven angivne Ligning sætte $[pv^2] = nm^2$, fremdeles kan for ξ tages det ved (75) bestemte μ, saa at man faaer

$$nm^2 = [pf^2] + m^2,$$

hvoraf faaes en rimelig Bestemmelse for m analog med (68),

$$m = \sqrt{\frac{[pf^2]}{n-1}}, \qquad (76)$$

hvilket Udtryk indført i (75) endelig giver

$$\mu = \sqrt{\frac{[pf^2]}{(n-1)[p]}}. \qquad (77)$$

Sammenholdes (75) med (73), ses $[p]$ eller Summen af Vægtene at kunne anses for Vægten af x.

Ex. Antag en Vinkel maalt gjentagne Gange med det samme Instrument, og antag de i de foregaaende Formler forekommende Størrelser saaledes bestemte

p	o	f	f^2	pf^2
4	34° 53′ 10″	− 0,2	0,04	0,16
6	34° 53′ 13″,3	+ 3,1	9,61	57,66
7	34° 53′ 7″,7	− 2,5	6,25	43,75

saa findes ved (74)

$$x = \frac{4.34°\,53'\,10'' + 6.34°\,53'\,13'',3 + 7.34°\,53'\,7'',7}{17}$$

$$= 34°\,53'\,7'',7 + \frac{4.2,3 + 6.5,6}{17} = 34°\,53'\,10'',2.$$

Forskjællen imellem denne og de iagttagne o er f. Da $[p] = 17$, $n = 3$, faaes, idet $[pf^2] = 101,57$,

$$m = \sqrt{\frac{101,57}{2}} = 7'',1, \quad \mu = \frac{7,1}{\sqrt{17}} = 1'',7.$$

35. At finde de rimeligste Værdier af de Ubekjendte, som afhænge af Ligninger, hvis Antal overskrider de Ubekjendtes.

Herved kan forekomme to Tilfælde, idet enten de Ubekjendte, foruden at opfylde visse af Iagttagelserne følgende Ligninger, tillige skulle tilfredsstille visse Betingelser, hidrørende fra det foreliggende Spörgsmaals Natur, eller de kunne være ganske uafhængige af hverandre. Saaledes ved Maalningen af Vinklerne i et Triangelnet skulle Vinklerne i hver Trekant stedse være tilsammen to Rette, derimod Elementerne af en Planetbane ere ganske uafhængige af hverandre. Begge Problemer ere imidlertid ikke forskjællige i Theorien, da man næmlig ved Hjælp af Betingelsesligningerne kan eliminere saamange Ubekjendte, som Antallet af disse Ligninger udgjör.

Antages nu V_1, V_2, $V_3 \ldots V_\mu$ at være μ Funktioner af bekjendt Form af de ν Ubekjendte x, y, $z \ldots$ $(\mu > \nu)$,

som kaldes Elementerne, og af Konstanterne $a_1, b_1, c_1 \ldots$ $a_2, b_2, c_2 \ldots$ o. s. v., og man har fundet Værdier af Funktionerne V ved ligefrem Iagttagelse, næmlig henholdsvis $M_1, M_2, M_3 \ldots M_\mu$, som dog ikke ere nöjagtige, saa har man, idet

$$V_1 - M_1 = f_1, \quad V_2 - M_2 = f_2, \quad \ldots \quad V_\mu - M_\mu = f_\mu,$$

at $[f^2]$ skal være Minimum.

Det simpleste Tilfælde faaes, naar Funktionerne V ere af første Grad eller lineære, altsaa

$$V_s = a_s x + b_s y + c_s z + \cdots + k_s, \tag{78}$$

hvorved Minimum skal haves for

$$[f^2] = \Sigma(ax + by + cz + \cdots + k - M)^2.$$

Dertil udkræves

$$0 = \frac{d \cdot [f^2]}{dx} = \Sigma \cdot 2a(ax + by + cz \cdots + k - M)$$
$$= 2\,[a(ax + by + cz \cdots + k - M)] = 2[af],$$

som, idet $k - M = -K$, kan omformes til

$$\left.\begin{aligned} [a^2]x + [ab]y + [ac]z + \cdots &= [aK], \\ \text{og paa lignende Maade faaes ved Differentiation} & \\ \text{med Hensyn til } y, z \ldots & \\ [ba]x + [b^2]y + [bc]z + \cdots &= [bK], \\ [ca]x + [cb]y + [c^2]z + \cdots &= [cK], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Dette giver ν Ligninger til Bestemmelse af $x, y, z \ldots$, hvilke kaldes Normalligningerne.

Ex. Var der kun to Ubekjendte, fik man

$$[a^2]x + [ab]y = [aK],$$
$$[ba]x + [b^2]y = [bK],$$

altsaa

$$x = \frac{[ab][bK] - [b^2][aK]}{[ab]^2 - [a^2][b^2]} \quad \text{og} \quad y = \frac{[ab][aK] - [a^2][bK]}{[ab]^2 - [a^2][b^2]}.$$

Anvendes paa at finde en ret Linie igjennem de fire Punkter

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 88 \quad a_3 = 182 \quad a_4 = 274$$
$$b_1 = 3{,}5, \quad b_2 = 5{,}7, \quad b_3 = 8{,}2, \quad b_4 = 10{,}3,$$

hvis Ligning altsaa har Formen

$$b = ax + y,$$

idet x og y ere de ubekjendte Konstanter, b og a Koordinaterne, hvoraf ovenstaaende specielle Værdier ere givne. Her ville nu Störrelserne b svare til M, medens de med b betegnede Störrelse i (78) ere 1, de med k betegnede 0, $K = M$. Man faaer da

$$[a^2] = 115944, \quad [b^2] = 4, \quad [ab] = 544,$$
$$[aK] = 4816{,}2, \quad [bK] = 27{,}7,$$

følgelig $\quad x = 0{,}025, \quad y = 3{,}52475,$

og den sandsynligste Ligning for den rette Linie bliver med X og Y som løbende Koordinater

$$Y = 0{,}025\,X + 3{,}525.$$

Sammenlignes nu de Ordinater, som heraf findes for $X = a_1, = a_2, = a_3, = a_4$ med de opgivne Værdier, faaes følgende Afvigelser

$f_1 = +0{,}025, \; f_2 = +0{,}025, \; f_3 = -0{,}125, \; f_4 = +0{,}075,$

og deraf $\quad [f^2] = 0{,}0225.$

Vare de Funktioner, som ere betegnede ved V, ikke lineære, saa kunde dog Problemet reduceres til at afhænge af lineære Ligninger. Hvis de bekjendte Funktioner havde den almindelige Form

$$V_s = \varphi_s(x, y, z \ldots),$$

saa kunde man tænke sig $x, y, z \ldots$ tilnærmelsesvis bestemte ved $X, Y, Z \ldots$, saa at man havde $x = X + x'$, $y = Y + y'$, $z = Z + z' \ldots$, hvor x', y', z' ere meget smaa. Man fik da ved Taylors Formel, idet M_s er en bestemt ved Iagttagelse funden Værdi af V_s,

$$V_s + \frac{dV_s}{dx}x' + \frac{dV_s}{dy}y' + \frac{dV_s}{dz}z' + \cdots = M_s, \qquad (80)$$

med Bortkastelse af de smaa Fejls höjere Potenser. Ligningerne (80) af samme Antal som Funktionerne V træde da istedenfor Ligningerne (78), og Problemets Løsning er saaledes givet ved det Foregaaende.

Hidtil ere alle Iagttagelserne, der have frembragt de forskjællige M, antagne lige gode. Hvis dette ikke tör antages, maa Maalet for Nöjagtigheden h indgaae i Ligningerne (78) som Faktor, idet man blot skal finde, naar $[h^2v^2] = h_1^2v_1^2 + h_2^2v_2^2 + h_3^2v_3^2 + \cdots$ bliver Minimum. Beregningen kræver i saa Tilfælde kun, at Koefficienterne i Normalligningerne indeholde Störrelserne h^2 som Faktor, saasom

$$[h^2a^2]x^2 + [h^2ab]y + [h^2ac]z + \cdots = [h^2aK]. \quad (81)$$

Istedenfor h kunne ogsaa bruges Vægtene, som ifølge 34 ere proportionale med Qvadraterne af Störrelserne h; man faaer derved istedenfor (81)

$$[pa^2]x^2 + [pab]y + [pac]z + \cdots = [paK]. \quad (82)$$

Det ligger i Sagens Natur, at Bestemmelsen af h er baade vigtig og vanskelig. Bedst naaes den, naar de enkelte Iagttagelser kunne betragtes som Middeltal af flere lige gode Iagttagelser, da saa h er ligefrem proportional med Qvadratroden af disses Antal (jfr. (52) og (63)). Men ved Iagttagelser af forskjællig Art og Beskaffenhed, under forskjællige Omstændigheders Indflydelse (Atmosphærens Tilstand) bliver Bestemmelsen af Vægtene meget vanskelig; den er dog ikke af ren mathematisk Natur, men vedkommer snarere den Art videnskabelige Undersøgelser, hvorpaa den her angivne ren mathematiske Theori skal anvendes.

36. Den ofte besværlige Løsning af Normalligningerne kan ske paa en meget smuk og overskuelig Maade ved Hjælp af særegne Udvidelser, Gauss har givet sine forhen omtalte Betegnelser $[ab]$, $[ac]$ o. s. v. Multipliceres næmlig den første (79) med $\frac{[ab]}{[a^2]}$ og trækkes fra den anden, faaes

$$[b\beta_1]y + [b\gamma_1]z + \cdots = [bz_1], \quad (83)$$

hvor

$$[b\beta_1] = [b^2] - \frac{[ab]^2}{[a^2]}, \quad [b\gamma_1] = [bc] - \frac{[ab][ac]}{[a^2]},$$

$$[bz_1] = [bK] - \frac{[ab][aK]}{[a^2]}.$$

Ligesaa ved Multiplikation af den første (79) med $\frac{[ac]}{[a^2]}$ og Subtraktion fra den tredie faaes

$$[b\gamma_1]y + [c\gamma_1]z + \cdots = [c\varkappa_1] \qquad (83)$$

med tilsvarende Betydning af $[c\gamma_1]$, $[c\varkappa_1]$. Saaledes faaes af de ν Ligninger (79) med ν Ubekjendte et Antal $\nu-1$ Ligninger med $\nu-1$ Ubekjendte, deraf igjen $\nu-2$ Ligninger, begyndende med

$$[c\gamma_2]z \ldots, \quad [c\delta_2]z \ldots, \quad [c\varepsilon_2]z \ldots \text{ o. s. v.}, \qquad (84)$$

idet

$$[c\gamma_2] = [c\gamma_1] - \frac{[b\gamma_1]^2}{[b\beta_1]}, \quad [c\delta_2] = [c\delta_1] - \frac{[b\gamma_1][b\delta_1]}{[b\beta_1]} \text{ o. s. v.}$$

Antages den sidste Ubekjendte $\ddot{o}$ at have Koefficienter betegnede med l, saa faaes tilsidst een Ligning til Bestemmelse af $\ddot{o}$, af Formen

$$[l\lambda_{\nu-1}]\ddot{o} = [l\varkappa_{\nu-1}],$$

saa at derefter de Ubekjendte kunne faaes efterhaanden ifølge en vis Gjentagelse af det samme System Beregninger.

Man vil nu kunne fremstille $[f^2]$ først ved $x, y, z \ldots$, og derpaa ved det nylig dannede System kunne bortskaffe disse Størrelser, saa at $[f^2]$ udtrykkes ved Konstanterne $a, b, c \ldots$ samt Størrelserne K. Man faaer næmlig ligefrem

$$[f^2] = [K^2] - 2[aK]x - 2[bK]y \ldots$$
$$\ldots\ldots + [a^2]x^2 + [b^2]y^2 + 2[ab]xy \ldots,$$

men naar man multiplicerer Ligningerne (79) hver med sin af Størrelserne $x, y, z \ldots$ og adderer, erholdes

$$[a^2]x^2 + [b^2]y^2 \cdots + 2[ab]xy + \cdots = [aK]x + [bK]y + \cdots,$$

følgelig

$$[f^2] = [K^2] - [aK]x - [bK]y - [cK]z - \cdots$$

Heraf fjernes x ved den første (79), idet denne multipliceret med $\frac{[aK]}{[a^2]}$ lægges til, hvorved udledes

$$[f^2] = [K^2] - \frac{[aK]^2}{[a^2]} - [b\varkappa_1]y - [c\varkappa_1]z \ldots$$

Paa lignende Maade elimineres y ved den første (83), hvilket giver

$$[f^2] = [K^2] - \frac{[aK]^2}{[a^2]} - \frac{[b\varkappa_1]^2}{[b\beta_1]} - [c\varkappa_2]z \ldots \text{ o. s. v.}$$

Efterat alle Elementerne ere bortskaffede, faaes

$$[f^2] = [K^2] - \frac{[aK]^2}{[a^2]} - \frac{[b\varkappa_1]^2}{[b\beta_1]} - \frac{[c\varkappa_2]^2}{[c\gamma_2]} - \cdots = [K\varkappa_\nu]. \quad (85)$$

Men her har man ikke den virkelige Sum af Fejlqvadraterne. Antages Fejlene virkelig at være $v = f + u$, idet de virkelige Værdier af Elementerne ere $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta \ldots$, saa vil

$$v = a(x+\xi) + b(y+\eta) + c(z+\zeta)\cdots - K = f + a\xi + b\eta + c\zeta \cdots,$$

følgelig
$$u = a\xi + b\eta + c\zeta \ldots \quad (86)$$

Heraf udledes

$$[v^2] = [f^2] + 2[af]\xi + 2[bf]\eta + 2[cf]\zeta + \cdots [u^2],$$

men, som forhen vist, er $[af] = 0$, $[bf] = 0$, $[cf] = 0 \ldots$,

følgelig
$$[v^2] = [f^2] + [u^2], \quad (87)$$

saa at de virkelige Fejlqvadraters Sum stedse er större end det i (85) givne Udtryk derfor.

Af Udtrykket for $[u^2]$ kan man finde Iagttagelsens Middelfejl. Man har næmlig ligefrem af (86)

$$[u^2] = A_0\xi + B_0\eta + C_0\zeta + \cdots, \quad (88)$$

idet

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= [a^2]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta + \cdots, \\ B_0 &= [ab]\xi + [b^2]\eta + [bc]\zeta + \cdots, \\ C_0 &= [ac]\xi + [bc]\eta + [c^2]\zeta + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Sættes Værdien af ξ af den første (89) ind i (88), faaes

$$[u^2] = \frac{A_0^2}{[a^2]} + \left(B_0 - \frac{[ab]}{[a^2]}A_0\right)\eta + \left(C_0 - \frac{[ac]}{[a^2]}A_0\right)\zeta + \cdots,$$

hvor i Henhold til de i (83) brugte Betegnelser haves

$$\left.\begin{aligned} B_0 - \frac{[ab]}{[a^2]}A_0 &= [b\beta_1]\eta + [b\gamma_1]\zeta + \cdots = B_0', \\ C_0 - \frac{[ac]}{[a^2]}A_0 &= [b\gamma_1]\eta + [c\gamma_1]\zeta + \cdots = C_0', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Man har derved

$$[u^2] = \frac{A_0^2}{[a^2]} + B_0'\eta + C_0'\zeta + \cdots,$$

hvori atter indsættes Udtrykket for η af den første (90). Derved bliver

$$[u^2] = \frac{A_0^2}{[a^2]} + \frac{B_0'^2}{[b\beta_1]} + C_0''\zeta + \cdots,$$

hvor $$C_0'' = C_0' - \frac{[c\beta_1]}{[b\beta_1]} B_0' = [c\gamma_2]\zeta + \cdots$$

Paa denne Maade fortsættes Eliminationen af Fejlene $\xi, \eta, \zeta \ldots$ paa Elementerne, saa at man tilsidst erholder

$$[u^2] = \frac{A_0^2}{[a^2]} + \frac{B_0'^2}{[b\beta_1]} + \frac{C_0''^2}{[c\gamma_2]} + \cdots,$$

og derved

$$[v^2] = [f^2] + \frac{A_0^2}{[a^2]} + \frac{B_0'^2}{[b\beta_1]} + \frac{C_0''^2}{[c\gamma_2]} + \cdots,$$

hvor den til $[f^2]$ lagte Størrelse, bestaaende af ν Led, maa være positiv ifølge sin Betydning. Men Størrelserne A_0, B_0', $C_0'' \ldots$ kunne atter erstattes ved andre. Saaledes af den første (89) følger

$$A_0 = [av] - [af] = [av],$$

idet $[af] = 0$. Fremdeles sættes

$$[bv] - \frac{[ab][av]}{[a^2]} = \left[\left(b - \frac{[ab]a}{[a^2]}\right)v\right] = [bv_1],$$

$$[bf] - \frac{[ab][af]}{[a^2]} = [b\varphi_1] = 0,$$

saa at ifølge den første (90) er

$$B_0' = \left([b^2] - \frac{[ab]^2}{[a^2]}\right)\eta + \left([bc] - \frac{[ab][ac]}{[a^2]}\right)\zeta + \cdots$$

$$= [bv_1] - [b\varphi_1] = [bv_1],$$

og paa lignende Maade

$$C_0'' = [cv_2] \text{ o. s. v.}$$

Man erholder da endelig

$$[v^2] = [f^2] + \frac{[av]^2}{[a^2]} + \frac{[bv_1]^2}{[b\beta_1]} + \frac{[cv_2]^2}{[c\gamma_2]} + \cdots \quad (91)$$

Men sættes nu Middelfejlen paa v lig m, saa har man $\mu m^2 = v^2$, og deraf igjen Middelfejlen paa $[av]$ at være $m\sqrt{[a^2]}$, paa $[bv_1]$ faaes den $m\sqrt{[b\beta_1]}$, idet den er

$$m\sqrt{\left[\left(b-\frac{[ab]a}{[a^2]}\right)^2\right]} = m\sqrt{[b^2]-2\frac{[ab][ab]}{[a^2]}+\frac{[ab]^2[a^2]}{[a^2]^2}}$$
$$= m\sqrt{[b\beta_1]},$$

paa $[cv_2]$ fremdeles $m\sqrt{[c\gamma_2]}$ o. s. v. Derved ændres (91) til

$$\mu m^2 = [f^2] + \nu m^2,$$

som endelig giver

$$m = \sqrt{\frac{[f^2]}{\mu-\nu}}, \qquad (92)$$

hvoraf ses, at Middelfejlen paa en Iagttagelse findes, naar Summen af Fejlqvadraterne, bestemte ved (85), altsaa ved Minimumsbetingelserne (71), divideres med Differensen imellem Ligningernes og Elementernes Antal, og af Qvotienten uddrages Qvadratroden. Til Ligningerne regnes ikke blot de ved Iagttagelserne bestemte Ligninger, men ogsaa de mulige Betingelsesligninger, som Problemets Natur maatte medføre (jfr. 35). Af (92) findes igjen den sandsynlige Fejl

$$r = 0{,}67449\sqrt{\frac{[f^2]}{\mu-\nu}}. \qquad (93)$$

Af Middelfejlen og den sandsynlige Fejl paa Iagttagelsen findes igjen de tilsvarende Fejl paa Elementerne ved Hjælp af de Udtryk, der erholdes for disse ved den successive Beregning, som forhen er angivet. Istedenfor den fuldstændige Beregning heraf meddeles kun Anvendelser paa de simpleste Tilfælde.

Er der kun eet Element, altsaa et System af μ Ligninger af Formen

$$V_s = a_s x + k_s,$$

faaes kun een Normalligning

$$[a^2]x = [aK], \quad x = \frac{[aK]}{[a^2]},$$

hvor den sandsynlige Fejl ifølge (72) er

$$r_x = \frac{r}{\sqrt{[a^2]}},$$

idet $\frac{a_1^2}{[a^2]^2} + \frac{a_2^2}{[a^2]^2} + \cdots = \frac{1}{[a^2]}$ og r Fejlen paa Iagttagelsen, bestemt ved (93).

Er der to Elementer, altsaa de forelagte Ligninger af Formen $V_s = a_s x + b_s y + k_s$,

vil (83) give y saaledes

$$y = \frac{[b\varkappa_1]}{[b\beta_1]},$$

hvor $[b\varkappa_1]$ ifølge sin ovenfor angivne Betydning afhænger af K paa følgende Maade

$$[b\varkappa_1] = [bK] - \frac{[ab][aK]}{[a^2]} = \left[\left(b - \frac{[ab]}{[a^2]}a\right)K\right].$$

Den sandsynlige Fejl paa $[b\varkappa_1]$ vil altsaa være

$$r\sqrt{\left[\left(b - \frac{[ab]}{[a^2]}a\right)^2\right]} = r\sqrt{[b\beta_1]},$$

følgelig paa y $\qquad r_y = \frac{r}{\sqrt{[b\beta_1]}}.$

Derefter faaes x af den første (79)

$$x = \frac{[aK] - [ab]y}{[a^2]} = \frac{[aK]}{[a^2]} - \frac{[ab]}{[a^2]}\frac{[b\varkappa_1]}{[b\beta_1]},$$

hvis sandsynlige Fejl bliver afhængig af den sandsynlige Fejl $r_{ak} = r\sqrt{[a^2]}$ paa $[aK]$ og $r_{b\varkappa_1} = r\sqrt{[b\beta_1]}$ paa $[b\varkappa_1]$, næmlig saaledes

$$r_x^2 = \frac{r_{ak}^2}{[a^2]^2} + \frac{[ab]^2}{[a^2]^2}\frac{r_{b\varkappa_1}^2}{[b\beta_1]},$$

hvoraf altsaa udledes

$$r_x = r\sqrt{\frac{1}{[a^2]} + \frac{[ab]^2}{[a^2]^2}\frac{1}{[b\beta_1]}}.$$

Paa lignende Maade fortsættes Beregningen af de sandsynlige Fejl og Middelfejlene i Tilfælde af flere Elementer. For tre faaes

$$r_z = \frac{r}{\sqrt{[c\gamma_2]}}, \quad r_y = r\sqrt{\frac{1}{[b\beta_1]} + \frac{[b\gamma_1]^2}{[b\beta_1]^2}\frac{1}{[c\gamma_2]}},$$

$$r_x = r\sqrt{\frac{1}{[a^2]} + \frac{[ab]^2}{[a^2]^2}\frac{1}{[b\beta_1]} + \left(\frac{[ac]}{[a^2]} - \frac{[ab]}{[a^2]}\frac{[b\gamma_1]}{[b\beta_1]}\right)^2 \frac{1}{[c\gamma_2]}}.$$

37. Ex. 1. Man har ved Iagttagelser fundet V_1 tilnærmelsesvis bestemt ved $M_1 = 3$, saa at $V_1 = 3 + f_1$; ligeledes haves $M_2 = 5$, $M_3 = 21$, $M_4 = 14$. Fremdeles antages 4 Ligninger til Bestemmelse af V_1 at være givne saaledes:

$$\begin{aligned} V_1 &= x - y + 2z = 3 + f_1, \\ V_2 &= 3x + 2y - 5z = 5 + f_2, \\ V_3 &= 4x + y + 4z = 21 + f_3, \\ V_4 &= -x + 3y + 3z = 14 + f_4. \end{aligned}$$

Man har nu Konstanterne og de deraf dannede Koefficienter i Normalligninger bestemte som vist i nedenstaaende tabellariske Oversigt.

a	b	c	K
1	−1	2	3
3	2	−5	5
4	1	4	21
−1	3	3	14

$[a^2] = 27$, $[ab] = 6$, $[ac] = 0$, $[aK] = 88$,
$[b^2] = 15$, $[bc] = 1$, $[bK] = 70$,
$[c^2] = 54$, $[cK] = 107$.

Deraf faaes

$$[b\beta_1] = 15 - \frac{6^2}{27} = 13{,}667, \quad [b\gamma_1] = 1 - 0 = 1, \quad [c\gamma_1] = 54 - 0 = 54,$$

$$[bz_1] = 70 - \frac{6.88}{27} = 50{,}445, \quad [cz_1] = 107 - 0 = 107,$$

$$[c\gamma_2] = 54 - \frac{1}{13{,}667} = 53{,}927, \quad [cz_2] = 107 - \frac{50{,}445}{13{,}667} = 103{,}31.$$

Man vil nu have

$$z = \frac{103{,}31}{53{,}927} = 1{,}916,$$

$$y = -\frac{1{,}916}{13{,}667} + \frac{50{,}445}{13{,}667} = \frac{49{,}529}{13{,}667} = 3{,}551,$$

$$x = -\frac{6}{27}y - 0.z + \frac{88}{27} = \frac{88 - 6.3{,}551}{27} = 2{,}470.$$

Indsættes disse Værdier i de oprindelige Ligninger, beregnes let

$$f_1 = 0{,}249, \quad f_2 = 0{,}068, \quad f_3 = 0{,}095, \quad f_4 = 0{,}069,$$

følgelig $[f^2] = 0{,}080411,$

og ved Hjælp af (92), idet $\mu = 4$, $\nu = 3$, faaes da Middelfejlen paa Iagttagelsen

$$m = \sqrt{\frac{0{,}080411}{4-3}} = 0{,}283.$$

Heraf udledes igjen Middelfejlene paa x, y, z ved Hjælp af Formlerne i Slutningen af 36, blot med m for r. Saaledes bliver først

$$m_z = \frac{0{,}283}{\sqrt{53{,}927}} = 0{,}039,$$

dernæst

$$m_y = 0{,}283 \sqrt{\frac{1}{13{,}667} + \frac{1}{13{,}667^2} \cdot \frac{1}{53{,}927}}$$

$$= \frac{0{,}283}{13{,}667} \sqrt{\frac{13{,}667 \cdot 53{,}927 + 1}{53{,}927}} = 0{,}077,$$

og endelig

$$m_x = 0{,}283 \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{6^2}{27^2} \cdot \frac{1}{13{,}667} + \frac{6^2}{27^2} \cdot \frac{1}{13{,}667^2} \cdot \frac{1}{53{,}927}}$$

$$= \frac{0{,}283}{9 \cdot 13{,}667} \sqrt{\frac{(3 \cdot 13{,}667 + 4)\, 13{,}667 \cdot 53{,}927 + 4}{53{,}927}} = 0{,}058.$$

Ex. 2. Naar de tre Vinkler i en Trekant antages maalte et forskjælligt Antal Gange med følgende Middelværdier

$$A = 36^\circ\, 25'\, 47'' \quad 4 \text{ Gange},$$
$$B = 90^\circ\, 36'\, 28'' \quad 2 \quad - \ ,$$
$$C = 52^\circ\, 57'\, 57'' \quad 3 \quad - \ ,$$

saa findes her en Afvigelse fra den eneste mulige Vinkelsum af 180°, hvilken bliver at fordele paa de tre Vinkler. Betegnes Fejlene paa disse henholdsvis ved f_1, f_2, f_3, saa haves følgende Ligninger

$$f_1 = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = 12'' - x - y,$$

den sidste frembragt ved at sætte $C = 180° - A - B$, saa at Fejlene paa A, B, C komme til at staae i følgende Relation $f_3 = 12'' - f_1 - f_2$. Man antager dernæst Antallet af Gjentagelser af Maalningerne for at svare til Vægtene, saa at man har $p_1 = 4$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$. Derefter findes let

$$[pa^2] = 7,\ [pab] = 3,\ [paK] = 36,\ [pb^2] = 5,\ [pbK] = 36,$$

følgelig

$$\left.\begin{matrix} 7x + 3y = 36 \\ 3x + 5y = 36 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} f_1 = x = 2'',77 \\ f_2 = y = 5'',54 \end{matrix}\right\} f_3 = 12 - x - y = 3'',69.$$

Heraf faaes

$$[pf^2] = 132{,}9231, \quad m = \sqrt{\frac{132{,}9231}{3-2}} = 11'',53,$$

hvoraf igjen Fejlene paa x og y kunne findes.

Begge disse Exempler ere tagne af Liagre calc. de probab.

Indhold.

Side

Historie og Litteratur . . . . . 1.

Sandsynlighedens mathematiske Bestemmelse (1—3) . . . . . 5.

Hovedsætninger om Sandsynligheden som afhængig af givne Betingelser (a priori) (4—10) . . . . . 6.

Hovedsætninger om Sandsynligheden som afhængig af stedfundne Begivenheder (a posteriori) (11—14) . . . . . 17.

Det mathematiske og det moralske Haab (15—18) . . . . . 30.

Anvendelse paa Livrenter og Livsforsikkringer (19—22) . . . . . 38.

De mindste Qvadraters Methode.

1. Fejlloven (23—31) . . . . . 46.

2. Fejl ved afhængige Störrelser (32—37) . . . . . 59.