DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

÷5269. Foto.

~~440~~

5269



~~5269~~

Hertil hører en Eksempelsamling.

Opmaalingslære

til Brug ved

Landinspektørelevernes Undervisning i Landmaaling

af

H. V. Nyholm,
Professor
ved den Kgl. Vetr. og Landbohøjskole.

Her er to Ord: Det ene hedder Teori og det andet
Praksis, og det er godt at have dem begge to.
Bj. Bjørnson: En glad Gut.

Udgivet paa den Kgl. Vetr. og Landbohøjskoles Foranstaltning.

Kjøbenhavn.
I Kommission hos Boghandler H. Christensen.
Fr. G. Knudtzons Bogtrykkeri (Fr. G. Knudtzon & Oskar Enevoldsen).
1907—09.

Indholdsfortegnelse.

Side

Indledning 1

1. Afsnit. Opmaaling af et Terræn, naar Projektionsfladen er plan.

1. Kapitel: Princippet for Opmaalingens Udførelse.

§ 1. Punktbestemmelse i Almindelighed 6
§ 2. Det plane Koordinatsystem 8
§ 3. Forarbejder for Opmaalingen af et Terræn 11

2. Kapitel: Opmaalinger, hvis Resultat foreligger i Talform.

I. Hovedpunkters Bestemmelse.

§ 4. Forskellige Metoder til og almindelige Regler for Hovedpunkters Bestemmelse 13
§ 5. Triangulation 15
Planen 16
Triangulationspunkternes Mærkning og Signaler 21
Vinkelmaalingen 25
Basismaalingen 27
Udjævningen 27
Azimuth- og Sideberegningen samt Koordinatberegningen 34
Flere Grundlinjer 35
Utilgængelige Punkters Nedførelse 36
Ekscentriske Vinkelmaalinger 36
Indordning af Punktsystemer mellem Hovedpunkter af højere Orden 37
Nogle almindelige Bemærkninger om Triangulationsplaner 41
Fremskæring og Sideskæring 45
Nøjagtigheden 47
Tilbageskæring 54
Hansens Problem 59
§ 6. Polygonmaaling 61
Uundgaaelige Fejl ved Polygonmaalingen, Beregningens Udførelse 65

Side

Polygonmaalingens Fejlteori 66
Udskilning af lovmæssige Fejl 72
Beregning af et Knudepunkt 75
Logaritmeregningen 77
Opsøgning af grove Fejl 80
Planen for Polygonmaalingen 81
Polygonpunkternes Mærkning og Signaler 84
Maalingens Udførelse 85
§ 7. Linjetriangulation 86
II. Terrænpunkters Bestemmelse.
§ 8. Forskellige Metoder til Terrænpunkters Bestemmelse . . 92
§ 9. Maalebogsføringen 98
III. Særlige Opmaalinger.
§ 10. Matrikulsmaalinger 100
§ 11. Bymaalinger 101

3. Kapitel: Bordmaaling.

§ 12. Almindelige Bemærkninger om Bordmaaling 107
§ 13. Hovedpunkters Bestemmelse 108
Fremskæring og Sideskæring 109
Tilbageskæring 110
Triangulation 114
Polygonmaaling 117
§ 14. Terrænpunkters Bestemmelse 120

2. Afsnit. Opmaalingen af et Terræn, hvis Udstrækning er saa stor, at Projektionsfladen ikke kan betragtes som en Plan.

4. Kapitel: Almindelige Forudsætninger og Beregning af Størrelser paa Sfæroiden.

§ 15. Den foreliggende Opgave 123
§ 16. Jordsfæroiden 127
§ 17. Sfæriske Trekanter 134
§ 18. Retvinklede sfæroidiske Koordinater 139
§ 19. Retvinklede sfæriske Koordinater 143

5. Kapitel: Cylindriske Projektioner.

§ 20. Fremstilling af cylindriske Projektioner 150
§ 21. Koordinatsystemers Udstrækning 152
§ 22. Retvinklede Koordinater i den konforme, cylindriske Projektion 154
§ 23. Samlet Fremstilling af Fremgangsmaaden ved et helt Lands (Danmarks) Opmaaling 158

6. Kapitel: Koniske Projektioner.

§ 24. Fremstilling af koniske Projektioner 165
§ 25. Den konforme, koniske Projektion 167

Side

7. **Kapitel:** Andre Projektioner.

§ 26. Perspektiviske Projektioner 179
§ 27. Vilkaarlige Projektioner 182

3. **Afsnit.** Højdemaaling eller Nivellement.

8. **Kapitel:** Nivellering.

§ 28. Nivelleringens Formaal 184
§ 29. Jordkrumning og Refraktion 187
§ 30. Nivellering af en Linje 192
§ 31. Nivellementets Fejlteori 202
§ 32. Nivellements-Fikspunkter 216
§ 33. Nivellement med hældende Sigter 220
§ 34. Fladenivellement 223

9. **Kapitel:** Trigonometrisk Højdemaaling.

§ 35. Trigonometrisk Højdemaaling paa korte Afstande 230
§ 36. Trigonometrisk Højdemaaling paa længere Afstande . . 232

4. **Afsnit.** Særlige Opmaalingsmetoder, Afsætning af Punkter og Linjer (Tracering), Tilvejebringelse af Kort, Arealberegning og Prøve af en Opmaaling.

10. **Kapitel:** Særlige Opmaalingsmetoder, ved hvilke der mere tilstræbes Hurtighed end stor Nøjagtighed, og som i sig forener Terræn- og Højdemaaling.

§ 37. Boussolemaaling 237
§ 38. Tachymetri 240
§ 39. Fotografiske Opmaalingsmetoder 245

11. **Kapitel:** Afsætning af Punkter og Linjer i Marken, (Tracering).

§ 40. Afsætning af Punkter og rette Linjer 251
§ 41. Udstikning af Kurver 255

12. **Kapitel:** Tilvejebringelse af Kort.

§ 42. Korttegning 273
§ 43. Kopiering og Mangfoldiggørelse af Kort 281

13. **Kapitel:** Arealberegning.

§ 44. Grundlaget for Arealberegning 286
§ 45. Arealberegningens Udførelse 293
§ 46. Afsætning af Arealer 306

14. **Kapitel:** Prøve af en Opmaaling.

§ 47. Forskellige Kortprøvemetoder 313
§ 48. Den Oppermannske Kortprøve 315

Side

5. Afsnit. De vigtigste danske Opmaalingsarbejder.

15. Kapitel: Ældre Opmaalinger.

§ 49. De ældre, før 1761 udførte Opmaalinger 323
§ 50. Videnskabernes Selskabs Opmaalinger 324

16. Kapitel: Geodætiske og topografiske Opmaalinger.

§ 51. Gradmaalingens Arbejder 330
§ 52. Generalstabens Opmaalinger 337

17. Kapitel: Økonomiske og Matrikulsmaalinger.

§ 53. Ældre økonomiske og Matrikulsmaalinger 347
§ 54. Nyere Matrikulsmaalinger 352
§ 55. Kjøbenhavns Opmaaling 354

Hertil hører en Eksempelsamling. 1. Hefte.

Opmaalingslære

til Brug ved

Landinspektørelevernes Undervisning i Landmaaling

af

H. V. Nyholm,
Professor
ved den Kgl. Vetr. og Landbohøjskole.

Her er to Ord: Det ene hedder Teori og det andet
Praksis, og det er godt at have dem begge to.
Bj. Bjørnson: En glad Gut.

Udgivet paa den Kgl. Vetr. og Landbohøjskoles Foranstaltning.

Kjøbenhavn.
I Kommission hos Boghandler H. Christensen.
Det Hoffensbergske Etabl.
1907

Forord til 1. Hefte.

Da jeg i Efteraaret 1894 blev ansat som Lærer i Landmaaling ved den Kgl. Vetr. og Landbohøjskole, fortsatte jeg til en Begyndelse Landinspektørelevernes Undervisning i Landmaaling i det Spor, som var fulgt af min Formand, Professor P. P. Freuchen; men da Undervisnings- og Eksamensplanen af 1895 i en ret betydelig Grad forøgede Fordringerne i Landmaaling, hvortil kom den for dette Fag gunstige Omstændighed, at ogsaa Matematikundervisningen blev udvidet, ændrede jeg lidt efter lidt Undervisningen i Landmaaling. I 1897—99 udgav jeg derfor en Række autograferede Forelæsninger over Opmaalingslære; da disse nu er udsolgte, har jeg paabegyndt Udarbejdelsen af en Opmaalingslære, og de Erfaringer, jeg har indhøstet som Lærer i Faget, er altsaa komne denne til gode. Idet jeg udsender 1. Hefte, maa jeg takke min Assistent, Landinspektør K. Hendriksen for hans gode Hjælp ved Udarbejdelsen af Tegningerne og ved Korrekturlæsningen.

September 1907.

Forf.

Indholdsfortegnelse til 1. Hefte.

Side

Indledning 1

1. Afsnit. Opmaaling af et Terræn, naar Projektionsfladen er plan.

1. Kapitel: Princippet for Opmaalingens Udførelse.

§ 1. Punktbestemmelse i Almindelighed 6

§ 2. Det plane Koordinatsystem 8

§ 3. Forarbejder for Opmaalingen af et Terræn 11

2. Kapitel: Opmaalinger, hvis Resultat foreligger i Talform.

I. Hovedpunkters Bestemmelse.

§ 4. Forskellige Metoder til og almindelige Regler for Hovedpunkters Bestemmelse 13

§ 5. Triangulation 15

Planen 16

Triangulationspunkternes Mærkning og Signaler 21

Vinkelmaalingen 25

Basismaalingen 27

Udjævningen 27

Azimuth- og Sideberegningen samt Koordinatberegningen 34

Flere Grundlinjer 35

Utilgængelige Punkters Nedførelse 36

Ekscentriske Vinkelmaalinger 36

Indordning af Punktsystemer mellem Hovedpunkter af højere Orden 37

Nogle almindelige Bemærkninger om Triangulationsplaner 41

Fremskæring og Sideskæring 45

Nøjagtigheden 47

Tilbageskæring 54

Hansens Problem 59

Side

§ 6. Polygonmaaling 61
Uundgaaelige Fejl ved Polygonmaalingen, Beregningens Udførelse 65
Polygonmaalingens Fejlteori 66
Udskilning af lovmæssige Fejl 72
Beregning af et Knudepunkt 75
Logarithmeregningen 77
Opsøgning af grove Fejl 80
Planen for Polygonmaalingen 81
Polygonpunkternes Mærkning og Signaler 84
Maalingens Udførelse 85
§ 7. Linjetriangulation 86
II. Terrænpunkters Bestemmelse.
§ 8. Forskellige Metoder til Terrænpunkters Bestemmelse . . 92
§ 9. Maalebogsføringen 98
III. Særlige Opmaalinger.
§ 10. Matrikulsmaalinger 100
§ 11. Bymaalinger 101
3. Kapitel: Bordmaaling.
§ 12. Almindelige Bemærkninger om Bordmaaling 107
§ 13. Hovedpunkters Bestemmelse 108
Fremskæring og Sideskæring 109
Tilbageskæring 110
Triangulation 114
Polygonmaaling 117
§ 14. Terrænpunkters Bestemmelse 120

Indledning.

1. *Jordens matematiske Overflade* er den Flade, som gennemskærer samtlige Tyngderetninger normalt i Højde med Havets Middelniveau. Tænkte man sig, at Jorden bestod af en flydende Masse, og at ingen ydre Kræfter paavirkede den, saa vilde dens naturlige Overflade falde sammen med den matematiske. Denne har ved videnskabelige Maalinger, de saakaldte *Gradmaalinger*, vist sig tilnærmelsesvis at være en Omdrejningsellipsoide og benævnes *Sfæroiden*. Dens Omdrejningsakse kaldes *Jordaksen*, og dennes Endepunkter benævnes Polerne, *Nord-* og *Sydpolen*. Skæringslinjen mellem den matematiske Jordoverflade og en Plan, som indeholder Jordaksen, benævnes *Meridian* og er Sfæroidens frembringende Ellipse; efter de af den danske Gradmaaling foretagne Maalinger er dennes halve store Akse, a og halve lille Akse (Omdrejningsaksen), b:

$$a = 6377019 \text{ Meter}, \quad b = 6355762 \text{ Meter}.$$

Skæringslinjen mellem den matematiske Jordoverflade og en Plan vinkelret paa Jordaksen benævnes *Parallel* og er en Cirkel; den Parallel, hvis Plan staar vinkelret paa Midten af Jordaksen, benævnes Ækvator.

Et Punkts Beliggenhed paa den matematiske Jordoverflade kan angives ved dets Brede og Længde.

Den sfæroidiske Brede er den Vinkel, som Punktets Normal danner med Ækvators Plan.

Den geografiske Længde er Vinklen mellem Punktets Meridianplan og en vilkaarlig valgt Udgangs-Meridianplan.

2. Ved en Opmaaling af en Del af Jordens naturlige Overflade projiceres dennes enkelte Punkter, *Terrænpunkterne*, paa den matematiske Jordoverflade, idet man gennem hvert Punkt fælder

en Normal paa denne. Punktet vil da være fuldstændig bestemt, naar man angiver 1) dets Projektions Beliggenhed paa den matematiske Jordoverflade og 2) den projicerende Linjes Længde.

Bestemmelsen af Beliggenheden af Terrænpunkternes Projektioner benævnes *Landmaaling* (i snævrere Forstand), medens Bestemmelsen af de projicerende Linjers Længder benævnes *Nivellering* (Højdemaaling).

Den korrekte Fremgangsmaade kræver efter det fremsatte, at man udfører Projiceringen paa selve Ellipsoidefladen, men man kan dog — selv ved Opmaalingen af hele Landsdele — udføre Projiceringen paa en Kugleflade, hvis Radius afpasses saaledes, at Kuglefladen slutter sig meget nær til vedkommende Del af Ellipsoidefladen; og drejer det sig om Opmaalinger af forholdsvis smaa Landstrækninger — indtil 1 Kvadratmil —, kan man med en for alle Formaal tilstrækkelig Nøjagtighed betragte Projektionsfladen som en Plan (ɔ: se bort fra Krumningen paa vedkommende Del af Ellipsoidefladen), hvilket i høj Grad letter Arbejdet.

Ved Nivelleringen kan man, da to Punkters Højdeforskel kan bestemmes med en langt større Nøjagtighed end deres Afstand, kun se bort fra Jordkrumningen ved Nivellering af ganske korte Linjer og smaa Flader.

3. De enkelte Arbejder ved Opmaaling kan i sidste Instans alle henføres til Maaling af Længder og Vinkler.

Som *Enhed for Længdemaal* benyttes nu næsten overalt *Meteren* (m), hvis Længde (omtrent en Timilliontedel af Meridiankvadranten) blev fastslaaet i 1793 i Frankrig til 443.296 Pariserlinjer (den gamle franske Alen var delt i 24 Tommer à 12 Linjer).

De vigtigste Metermaalbetegnelser er: 1 *Kilometer* (km) = 1000 m, 1 *Decimeter* (dm) = 0.1 m, 1 *Centimeter* (cm) = 0.01 m, 1 *Millimeter* (mm) = 0.001 m; samt for Flademaal: 1 *Ar* (a) = 100 Kvadratmeter (□ m), 1 *Hektar* (ha) = 100 Ar = 10000 □ m, 1 *Kvadratkilometer* (□ km) = 100 ha = 1000000 □ m.

Ved *Lov af 4. Maj 1907* blev Meteren antagen som Grundlag for det danske System for Maal.

Den danske Længdeenhed var indtil da 1 *Fod* (1′), som i

---

[1]) Ved Forordningerne af 1. Maj 1683 og 10. Januar 1698 indførtes ensartet Maal og Vægt i Danmark, Længdeenheden blev ansat til 1 Alen, uden at denne dog synes at have været nærmere defineret.

Kgl. Resol. af 28. Juni 1820 bestemte, at »Foden skulde være $^{12}/_{38}$ af Længden af det enkelte Pendul, der svinger Sekund paa 45° Brede og med Skagens Længde.« Denne Fod var 139.0808 Pariserlinjer.

Henhold til Kongelig Resolution af 3. Juni 1835 skulde være 139.13 gamle Pariserlinjer (den rhinlandske Fod)[1]). 1 *Alen* (1⁰) var 2′; Foden deltes i 10 *Tommer* (10″) à 10 *Linjer* (10‴). Til Angivelse af Længder blev i Landmaalingen ved alle Matrikulsmaaliger benyttet Alen og efter Omstændighederne Tiende- og Hundredededele heraf. Ved tekniske Maalinger benyttede man ofte Foden. Til Angivelse af store Afstande benyttedes 1 *Mil* = 12000⁰.

Enhed for Flademaal var 1 *Kvadratalen* (1 □⁰) og til større Maal 1 *Tønde Land* (Td. Ld.) = 14000 □⁰; i alle Matrikulsdokumenter angaves Arealet i Td. Ld. og Kvadratalen (f. Eks. $17^{318}/_{14000}$ Td. Ld.), medens man andre Steder angav det i Td. Ld. med Decimaler (f. Eks. 17.02 Td. Ld.).

Sammenligning mellem Metermaal og ældre dansk Maal[2]).

1 m	= 3.1862′	1′	= 0.3138535 m
1 m	= 1.5931⁰	1⁰	= 0.6277070 m
1 dm	= 3.1862″	1″	= 3.1385 cm
1 cm	= 3.1862‴	1‴	= 3.1385 mm
1 mm	= 0.31862‴	1 Mil	= 7.53248 km
1 km	= 1593.1⁰	1 geog. Mil[1])	= 7.42044 km
1 km	= 0.1328 Mil	1 □⁰	= 0.3940 □ m
1 □ m	= 2.5380 □⁰	1 Td. Ld.	= 0.55162 ha
1 a	= 253.80 □⁰	1 □ Mil	= 56.7385 □ km
1 ha	= 1.8128 Td. Ld.	1 geog. □ Mil	= 55.063 □ km
1 □ km	= 181.28 Td. Ld.	1 □ Mil	= 10 285.7 Td. Ld.

Meter forandres til Alen ved til Logaritmen at addere 0.2022430.

Alen forandres til Meter ved til Logaritmen at addere 9.7977570 — 10.

Som *Enhed for Vinkelmaal* benyttes 1 Grad (1⁰), der er $^1/_{90}$ af Kvadranten, og Graden deles i 60 Minutter (60′) à 60 Sekunder (60″); dog angives Vinkler, naar større Nøjagtighed ikke fordres, i Reglen i Grader, Minutter og Tiendedele af Minutter; i Stedet for denne Inddeling, der kaldes den *sexagesimale*, be-

[1]) 1 *geografisk Mil* er $^1/_{15}$ af en Ækvatorgrad; den angives i Almindelighed til 7.4204 Kilometer, dette svarer dog til Bessels og ikke til den danske Gradmaalings Jorddimensioner.

[2]) I Loven af 4. Maj 1907 er der ved Omsætningen fra dansk Maal til Metermaal anvendt færre Decimaler end her angivet.

nyttes i de senere Aar ogsaa den *centesimale*, ved hvilken Kvadranten deles i 100^0 à $100'$ à $100''$. I Regninger udtrykkes Vinkler ogsaa jævnlig i rene Tal, Enheden er da den Vinkel, hvis Bue er lig Radien; denne Vinkel vil vi betegne ved ω, den er for den sexagesimale Deling:

i Grader, $\omega^0 = \frac{180}{\pi} = 57^0.29578$ med Logaritmen 1.7581226

i Minutter, $\omega' = \frac{10800}{\pi} = 3437'.747$ — — 3.5362739

i Sekunder, $\omega'' = \frac{648000}{\pi} = 206264''.8$ — — 5.3144251,

og for den centesimale Deling:

i Grader, $\omega^0 = \frac{200}{\pi} = 63^0.66198$ med Logaritmen 1.8038801

i Minutter, $\omega' = \frac{20000}{\pi} = 6366'.198$ — — 3.8038801

i Sekunder, $\omega'' = \frac{2000000}{\pi} = 636619''.8$ — — 5.8038801.

En Vinkel, som er udtrykt i rene Tal, omsættes altsaa til Vinkelmaal ved Multiplikation med ω, medens omvendt en Vinkel, som er udtrykt i Vinkelmaal, omsættes til rent Tal ved Division med ω.

4. Resultatet af en Opmaaling foreligger — forsaavidt det ikke umiddelbart fremstilles grafisk — i de i Marken førte *Maalebøger*, som derfor maa føres med den højeste Grad af Akkuratesse og Tydelighed; hvert Tal maa være tydeligt og intet maa kunne misforstaas, saa at enhver — ikke alene Maaleren — kan forstaa den. Maalebøgerne er Originaldokumenter og bør derfor aldrig tilintetgøres, selv om de er benyttede til den nødvendige Beregning eller Kortkonstruktion; man kan ved dem til enhver Tid finde Fejl, som er begaaede ved Beregningen eller Kortkonstruktionen, eller fremstille nye Kort, ligesom man i Marken gennem Maalebogens Tal kan paapege Terrænpunkter, som er forsvundne. Maalebøgerne bør endvidere nøjagtig angive paa Titelbladet, hvad Maalingen omfatter, hvem der har udført den, og naar den er udført.

Medens Maalebogsoptegnelserne saaledes er Opmaalingens primære Resultat, kan man som et sekundært Resultat fremstille Terrænets Projektion ved et *Kort*, som er et med Projektionen ligedannet Billede. Kortets *Maalestoksforhold* er det lineære Forhold mellem Afstande paa Kortet og de tilsvarende

Afstande i Projektionen. Er det opmaalte Terræn ikke større, end at man har kunnet betragte Projektionsfladen som en Plan, frembyder Fremstillingen af Kortet ingen Vanskelighed; men har man projiceret paa Ellipsoide- eller Kuglefladen, opstaar der særlige Vanskeligheder; thi ingen af disse dobbelt krumme Flader lader sig udfolde i en Plan, Kortet kan derfor ikke blive nøjagtigt, enten bliver det ikke ligedannet med Projektionen, eller ogsaa bliver Maalestoksforholdet forskelligt paa forskellige Steder af Kortet. Dette Forhold behandles i 2. Afsnit.

Ogsaa for Nivellementer er det primære Resultat Optegnelserne i Maalebogen, medens den grafiske Fremstilling er det sekundære Resultat. En Linje fremstilles grafisk ved sin *Profil*, ɔ: en Udfoldning af det lodrette Snit, der indeholder Linjen; Højderne tegnes i Reglen i større Maalestoksforhold end Længderne, ofte bruges $^1/_{200}$ for Højder og $^1/_{2000}$ for Længder. Højdeforholdene i et Terræn fremstilles i Reglen grafisk ved *ækvidistante Horisontalkurver*, som er Projektioner af Skæringslinjerne mellem den naturlige Jordoverflade og Kugleflader, som er koncentriske med den den vedkommende Del af Ellipsoidefladen erstattende Kugleflade, og hvis Radier vokser med en konstant Størrelse, *Ækvidistancen*, som kan have forskellige Værdier.

5. Man kan skelne mellem 3 Arter af Opmaaling:

I. *Den geodætiske Opmaaling* har det rent videnskabelige Formaal at bestemme Jordens Størrelse og Form, men under Løsningen af denne Opgave tilvejebringer den et System af Hovedpunkter, hvis Beliggenhed er bestemt med den højeste Grad af Nøjagtighed, og som derfor danner et fortrinligt Grundlag for de senere Opmaalinger og Nivellementer.

II. *Den topografiske Opmaaling* har det Formaal at tilvejebringe Oversigtskort over større Dele af Jordoverfladen. Da de topografiske Kort i Reglen udarbejdes i smaa Maalestoksforhold, kan de ikke gøre Fordring paa stor Nøjagtighed m. H. t. de enkelte Terrænpunkters Bestemmelse.

III. *Den økonomiske Opmaaling* tilsigter en detailleret Opmaaling af større eller mindre Landstrækninger, i Reglen med Ejendomsforhold (Matrikulsforhold), Administrationsforhold eller tekniske Formaal for Øje. Oftest forlanges Resultatet af Opmaalingen grafisk fremstillet ved Kort i stort Maalestoksforhold. Disse Opmaalinger udføres paa Grund af de enkelte Terrænpunkters store Betydning (Skelpunkter) med en minutiøs Nøjagtighed.

I. Afsnit.

Opmaaling af et Terræn, naar Projektionsfladen er plan.

I. Kapitel.

Princippet for Opmaalingens Udførelse.

§ 1. Punktbestemmelse i Almindelighed.

6. Opmaalingen af en Del af den naturlige Jordoverflade, et *Terræn,* bestaar, som allerede i Indledningen omtalt, i Bestemmelsen af Projektionen af et efter Omstændighederne større eller mindre Antal Terrænpunkter, et Arbejde, som kan udføres paa mange forskellige Maader og ved Hjælp af meget forskelligartede Instrumenter; men ét er imidlertid fælles for alle Metoder: *Man bestemmer først et System af Hovedpunkter* (med indbyrdes store Afstande), *paa dette maaske atter et underordnet System og saaledes trappevis nedad, indtil man har faaet et System af indbyrdes saa nær ved hinanden liggende Hovedpunkter, at man i Forhold til dette sidste kan fastlægge* (bestemme) *Terrænpunkterne.* Det vil nemlig være indlysende, at, da intet praktisk Arbejde kan udføres eksakt, vil hvert enkelt Punkts Bestemmelse være behæftet med en Fejl — om denne maaske end kun er ringe —, og hvert efterfølgende Punkt, der bestemmes i Forhold til et tidligere bestemt, faar altsaa foruden sin egen Fejl tillige dettes. Bestemte man nu helt igennem Punkt paa Punkt, vilde Fejlene ophobe sig saa stærkt, at Arbejdet snart vilde være ganske værdiløst. Ved den ovenfor angivne Fremgangsmaade reducerer man derimod Fejlophobningen til det mindst mulige.

7. Idet de to første Punkters indbyrdes Beliggenhed bestemmes derved, at man paa en eller anden Maade udmaalerderes Afstand, vil hvert enkelt efterfølgende Punkt — det være et Hoved- eller et Terrænpunkt — blive bestemt i Forhold til *to* forud fastlagte Punkter, og dets Bestemmelse kan altsaa foregaa i Overensstemmelse med et af de 5 fra Geometrien bekendte Tilfælde ved Trekantens Bestemmelse.

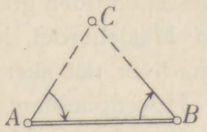


Fig. 1.

1. Trek. bestemt ved 1 Side og 2 hosl. Vinkler. Paa Fig. 1 vil Punkt *C* være bestemt i Forhold til de givne Punkter *A* og *B*, naar man maaler $\angle A$ og $\angle B$. Fremgangsmaaden benævnes *Fremskæring* eller Bestemmelse ved skærende Sigter.

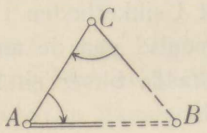


Fig. 2.

2. Trek. bestemt ved 1 Side, 1 hosl. og 1 modst. Vinkel. Paa Fig. 2 vil Punkt *C* være bestemt i Forhold til de givne Punkter *A* og *B*, naar man maaler $\angle A$ og $\angle C$ eller $\angle B$ og $\angle C$. Fremgangsmaaden benævnes *Sideskæring*.

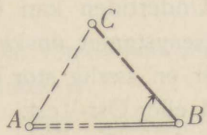


Fig. 3.

3. Trek. bestemt ved 2 Sider og en mellem. Vinkel. Paa Fig. 3 vil Punkt *C* være bestemt i Forhold til de givne Punkter *A* og *B*, naar man maaler $\angle B$ og Siden *BC*. Fremgangsmaaden benævnes *Bestemmelse ved polære Koordinater* eller Bestemmelse ved Sigte og Maal.

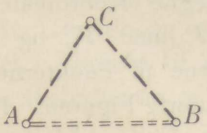


Fig. 4.

4. Trek. bestemt ved 1 Vinkel, 1 hosl. og 1 modst. Side. Fremgangsmaaden benyttes i Reglen ikke.

5. Trek. bestemt ved 3 Sider. Paa Fig. 4 vil Punkt *C* være bestemt i Forhold til de givne Punkter *A* og *B*, naar man maaler Siderne *AC* og *BC*.

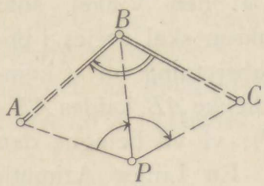


Fig. 5.

Desuden kan et Punkt bestemmes i Forhold til *tre* forud fastlagte Punkter ved de Vinkler, under hvilke de givne Punkters Forbindelseslinjer ses fra Punktet. Paa Fig. 5 vil Punktet *P* være bestemt i Forhold til de givne Punkter *A*, *B* og *C* ved Maaling af $\angle APB$ og $\angle BPC$. Fremgangsmaaden benævnes *Tilbageskæring*.

Opmaalingen kan enten 1) kræves udført saaledes, at

den støtter sig til Hovedpunkter, hvis Beliggenhed er forud bestemt, eller 2) være selvstændig, *lokal*, naar ingen saadanne Hovedpunkter eksisterer. Dette betyder dog kun, at en Del af Opmaalingsarbejdet under Forudsætningen 1) er forud udført.

§ 2. Det plane Koordinatsystem.

8. Resultatet af en Opmaaling fremstilles undertiden grafisk uden Beregning, navnlig ved Anvendelse af Maalebordet, hvor det sker direkte, og ved Linjetriangulationen, hvor det sker indirekte; men i Almindelighed beregnes alle Hovedpunkters Beliggenhed i Forhold til *retvinklede Koordinatakser*, hvorved bl. a. opnaas den store Fordel, at hvert enkelt Hovedpunkt kan konstrueres *uafhængigt* af de andre, saaledes at Usikkerheden i det enkelte Punkts Konstruktion ikke faar Indflydelse paa de andre Punkter, ligesom der herved i de fleste Tilfælde bliver en Mulighed for en Fordeling af de tilfældige Fejl.

Koordinataksesystemet vælges saaledes, at Abscisseaksen er positiv mod Nord og Ordinataksen positiv mod Øst, hvorhos den positive Omløbsretning er lig Urets. Undertiden kan dog særlige Forhold gøre en anden Stilling af Aksesystemet ønskelig; dette er f. Eks. Tilfældet, naar Terrænet har en særlig stor Udstrækning i en anden Retning end Nord-Syd eller Øst-Vest. (Se ogsaa hvad herom er anført under »Prøve af en Opmaaling«). De fire Kvadranter ligger som paa Fig. 6 med Romertal angivet.

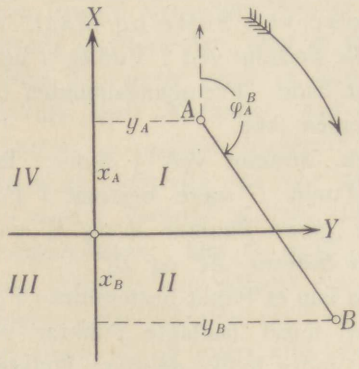


Fig. 6.

Vi vil betegne Koordinaterne til Punkt P med Y_P og X_P Koordinaterne til Punkterne A og B er paaførte Figuren. Den Vinkel, som Linjen AB danner med Abscisseaksens positive Retning, ɔ: den Vinkel, som Abscisseaksen skal drejes i positiv Omløbsretning for at komme til at dække AB, kaldes AB's *Azimuth*[1]); vi vil betegne den med φ_A^B. En Linjes Azimuth

[1]) Ved Maalinger paa Kuglen og Ellipsoiden har Udtrykket »Azimuth« en noget anden Betydning (se 2. Afsnit); ved plane Maalinger vilde det være korrektere at betegne den her definerede Vinkel som *Retningsvinkel*; men naar Forveksling ikke kan finde Sted, bruges almindelig den første Betegnelse.

kan altsaa have alle Værdier mellem 0 og 360°; i 4. Kvadrant er det dog ret almindeligt at angive den med negativt Fortegn, f. Eks. er $287^0\,19'.5 = -72^0\,40'.5$. Længden af Linjen AB betegner vi med s_A^B [1]).

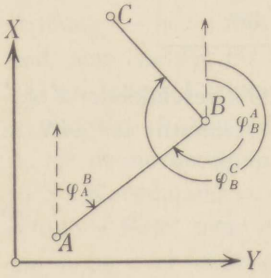


Fig. 7.

Af Azimuth for Linjen AB (Fig. 7) faas Azimuth for BA ved Addition eller Subtraktion af 180°; at det er ligegyldigt, om man adderer eller subtraherer 180°, ligger i, at dette for BA's Azimuth giver en Forskel paa 360°, som er lig 0°. Altsaa haves

$$\varphi_B^A = \varphi_A^B \pm 180^0. \quad \ldots \quad (1)$$

Vi regner her alle Vinkler med Fortegn, ɔ: $\angle\, ABC$ er den Del af Omdrejningen, som Linjen BA skal udføre om B i positiv Omløbsretning for at komme til at dække BC, medens $\angle\, CBA$ er $\angle\, ABC$'s Eksplementvinkel. Man har da

$$\varphi_B^C = \varphi_B^A + \angle\, ABC \quad \ldots \quad (2)$$

eller

$$\angle\, ABC = \varphi_B^C - \varphi_B^A, \quad \ldots \quad (3)$$

ɔ: en Vinkel kan beregnes som Differensen mellem Vinkelbenenes Azimuther.

Ved Addition af (1) og (2) faas

$$\varphi_B^C = \varphi_A^B + \angle\, ABC \pm 180^0. \quad \ldots \quad (4)$$

9. Kender man Punkt A's retvinklede Koordinater samt AB's Længde og Azimuth, ɔ: Punktet B's Beliggenhed er angivet i Forhold til A ved *polære Koordinater*, faas B's retvinklede Koordinater af Formlerne

$$\left.\begin{aligned} y_B &= y_A + s_A^B \sin \varphi_A^B \text{ og} \\ x_B &= x_A + s_A^B \cos \varphi_A^B. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

$s_A^B \sin \varphi_A^B$ og $s_A^B \cos \varphi_A^B$ kaldes henholdsvis *Ordinattilvæksten* og *Abscissetilvæksten* [2]). Idet Linjers Længder altid regnes positive, ses det, at Tilvæksterne bliver positive eller negative efter Størrelsen af φ, saaledes:

---

[1]) Vi betegner altsaa Azimuth for Linjen fra A til B med φ_A^B, Længden af Linjen fra A til B med s_A^B og Koordinaterne til Punkt A med y_A og x_A. Er der ingen Fare for Misforstaaelse, vil vi dog efter Omstændighederne udelade den ene eller begge Indices.

[2]) Tilvæksterne vil ogsaa hyppigt blive betegnede ved Δy_A^B og Δx_A^B, hvor dog efter Omstændighederne en eller begge Indices kan udelades.

φ ligger i	Ordinattilvækst	Abscissetilvækst
1. Kvadrant	pos.	pos.
2. —	pos.	neg.
3. —	neg.	neg.
4. —	neg.	pos.

10. Omvendt kan man, naar A og B's retvinklede Koordinater er givne, beregne Længde og Azimuth for AB af Formlerne

$$\operatorname{tg} \varphi_A^B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

og

$$s_A^B = \frac{y_B - y_A}{\sin \varphi_A^B} = \frac{x_B - x_A}{\cos \varphi_A^B}\ ^{1)}; \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Formlen

$$s_A^B = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

anvendes kun sjælden, da den ikke er logaritmisk.

Ved Brugen af (6) faas to Værdier for φ_A^B, den ene 180^0 større end den anden; hvilken af disse der er den rigtige, ses — forsaavidt man ikke straks indser det efter sit Kendskab til Punkternes Beliggenhed — af Fortegnene for Ordinat- og Abscissetilvæksten; det ovenfor staaende Skema angiver straks, i hvilken Kvadrant Azimuth ligger.

For at faa Kontrol paa Beregningen af φ_A^B og s_A^B kan man gaa ud fra Formlen

$$\operatorname{tg} (45^0 - \varphi_A^B) = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi_A^B}{1 + \operatorname{tg} \varphi_A^B};$$

idet man for $\operatorname{tg} \varphi_A^B$ indsætter Værdien efter (6), faas

$$\operatorname{tg} (45^0 - \varphi_A^B) = \frac{x_B - x_A - (y_B - y_A)}{x_B - x_A + (y_B - y_A)},$$

som dog, for at Kontrollen ogsaa skal omfatte den rigtige Beregning af $x_B - x_A$ og $y_B - y_A$, bør omformes til

---

[1]) Afviger de to Værdier for s_A^B, som beregnes af Udtrykkene i (7), lidt fra hinanden, saa er

den Værdi, som faas af $\frac{y_B - y_A}{\sin \varphi}$ nøjagtigst, naar $\varphi > 45^0$, og

— — — — $\frac{x_B - x_A}{\cos \varphi}$ — — $\varphi < 45^0$;

thi i første Tilfælde er sin nøjagtigst bestemt (den har de mindste Differenser), i sidste Tilfælde cos.

$$\operatorname{tg}(45^0 - \varphi_A^B) = \frac{x_B + y_A - (x_A + y_B)}{x_B + y_B - (x_A + y_A)}. \quad \ldots\ldots (9)$$

Beregningen opstilles som i *Eksempel 1*. I det her anvendte Skema benytter vi — som i de fleste andre Beregningsskemaer — et i 1ste lodrette Kolonne til venstre staaende Hoved, som gælder for alle Regninger, af hvilke hver enkelt udfylder en lodret Kolonne. I den 2den Kolonne finder vi altsaa Beregningen af Afstand og Azimuth for Linjen fra N til S, og under denne Beregning svarer da y_A og x_A til N's og y_B og x_B til S's Koordinater o. s. v. — Rubrikken til log sin φ og log cos φ udfyldes først, naar φ senere er funden. De gældende Værdier for φ og s er understregede. n foran en Logaritme betyder, at denne svarer til den numeriske Værdi af et Tal, som er negativt.

§ 3. Forarbejder for Opmaalingen af et Terræn.

11. Inden man skrider til Udførelsen af en Opmaaling, maa man ved en foregaaende *Rekognoscering* have gjort sig nøje bekendt med vedkommende Terræn. Eksisterer der ældre Kort — hvilket altid vil være Tilfældet her i Landet —, har man en væsentlig Støtte i disse. Af de officielle danske Kort egner navnlig efterfølgende[1]) sig til dette Brug:

1) Matrikulskortene i 1:4000,
2) De minorerede Matrikulskort i 1:20000,
3) Generalstabens Maalebordsblade i 1:20000,
4) Generalstabens Atlasblade,
   a) over Sjælland, Fyn og tilliggende Øer i 1:80000[2]),
   b) over Jylland og Bornholm i 1:40000,
5) Generalstabens Kort i 1:100000.

Efter først at have studeret disse Kort nøje, bør man tage dem med sig ud i Terrænet og sammenholde dem med dette, hvorhos man klarer sig bestemt, hvad der med det foreliggende Formaal for Øje vil blive Genstand for Opmaaling, samt berigtiger paa Øjemaal eller ved Skridtning alle Uoverensstemmelser, som i saa Henseende har Betydning. Endvidere lægger man Mærke til de Punkter, hvorfra Udsigten er fri i alle Retninger, saavel som til Terrænets Overskuelighed i det hele.

Kommer man i det Tilfælde at skulle foretage Opmaaling i

---

[1]) Disse Kort vil senere blive nærmere omtalte.

[2]) Udkommer efterhaanden i 1:40000.

et Terræn, over hvilket der ikke eksisterer ældre Kort, maa man forud for den egentlige Opmaaling tilvejebringe et Oversigtskort ved *Krokering*, ɔ: en foreløbig Opmaaling, ved hvilken der ingen Krav stilles til Nøjagtigheden, men som dog giver en fuldstændig Oversigt over, hvad der skal opmaales. En saadan Krokering udføres efter lignende Principper som den endelige Opmaaling men med simplere Midler. Længderne bestemmes ved Skridtning eller ved primitive Længdemaalingsapparater, og Vinklerne maales med Haandboussole eller derved, at man med et Baandmaal maaler de 3 Sider i en lille Trekant.

Alt maa udføres saaledes, at det let og hurtigt kan konstrueres, og Konstruktionen udføres i Marken.

De ældre Kort eller nye Krokier bør være i saa smaa Maalestoksforhold som muligt, for at blive mere haandterlige og bekvemmere at føre med sig, idet de paa den anden Side skal kunne indeholde det nødvendige, uden at Tydeligheden gaar tabt. De bør være saaledes udstyrede, at man kan have dem i Lommen eller i en lille Mappe, og for at de ikke skal beskadiges, bør de opklæbes paa Lærred eller Pap, ligesom det ofte kan være heldigt at fernisere[1]) dem, for at de kan taale at blive vaade; i saa Tilfælde kan man dog ikke skrive paa dem.

Hvilke ældre Kort man bør benytte som Oversigtskort, og i hvilket Maalestoksforhold de bør være, maa rette sig efter Opmaalingens Formaal og Omfang. Naar Terrænet ikke er meget lille, vil det være praktisk at have forskellige Oversigtskort (Krokier, Brouillons) svarende til Opmaalingens forskellige Trin, altsaa Kort i smaa Maalestoksforhold til Brug ved Bestemmelsen af Hovedpunkterne og Kort i større Maalestoksforhold over de enkelte Terrændele til Brug ved Detailmaalingen; disse sidste maa være saa tydelige, at man paa dem kan indtegne alle Terrængenstande, som skal medtages ved Maalingen, og navnlig ved økonomiske Opmaalinger alle Skel.

Idet der henvises til det følgende, skal her bemærkes, at det i Reglen vil være fordelagtigt at anvende:

ved Triangulationen til Grundlag for økonomiske Opmaalinger Atlasbladene (navnlig i 1:40000) eller Maalebordsbladene,

ved Polygonmaalingen Maalebordsbladene eller de minorerede Matrikulskort, eller endnu bedre et Maalebordsblad, paa

---

[1]) Man stryger dem over med et ganske tyndt Lag Husblas, hvorefter Fernisering kan udføres med Etikettelak, uden at denne slaar igennem.

hvilket man fra det minorerede Matrikulskort har overført Skel og Matr. Nr., og

ved Detailmaalingen over tæt bebyggede Landsbyer o. l. smaa Krokier, som er lavede med det særlige Formaal for Øje.

12. Paa Grundlag af det ved Rekognosceringen erhvervede Kendskab til Terrænet lægger man en *Plan* for Opmaalingen, og jo omhyggeligere Rekognosceringen er udført, desto lettere vil det være at udarbejde en Plan, som kan gennemføres, uden at man ved Udførelsen støder paa uforudsete Vanskeligheder. Det maa derfor betegnes som en meget slet Økonomi at ville spare Tid ved Forarbejderne; den ved disse anvendte Tid kommer rigelig igen paa Opmaalingsarbejdets senere Trin.

Opmaalingen kan udføres paa mange forskellige Maader, af hvilke det i det enkelte Tilfælde gælder om at vælge den, som med mindst muligt Arbejde (altsaa ogsaa med mindst mulig Udgift) giver en til Formaalet svarende Nøjagtighed, idet det vel maa erindres, at mangfoldige Omstændigheder har Indflydelse paa Nøjagtighedsfordringen, saaledes f. Eks. Grundenes Værdi, den Sikkerhed, med hvilken de enkelte Terrænpunkter er betegnede i Marken o. s. v.

Endvidere maa det bemærkes, at Arbejdet i Marken i Almindelighed er dyrere end Hjemmearbejdet, hvorfor man bør indskrænke det første saa meget, som det lader sig gøre, og udføre alt, hvad der er muligt, hjemme, og det saa meget mere, som man i Marken er afhængig af Vejret.

Vi vil i det følgende skelne mellem

1) Opmaalinger, hvis Resultat foreligger i Talform, og
2) Bordmaaling.

---

2. Kapitel.

Opmaalinger, hvis Resultat foreligger i Talform.

I. Hovedpunkters Bestemmelse.

§ 4. Forskellige Metoder til og almindelige Regler for Hovedpunkters Bestemmelse.

13. Det enkelte Hovedpunkts Bestemmelse foregaar efter en af de seks i § 1 Punkt 7 angivne Fremgangsmaader; men

gælder det om at bestemme et *System af Hovedpunkter*, skælner man mellem 3 Opmaalingsmetoder, nemlig:

I. ***Triangulation,*** ved hvilken hvert nyt Hovedpunkt kan tænkes bestemt i Forhold til to forud fastlagte Hovedpunkter ved Fremskæring eller Sideskæring. Idet man dog i Reglen for Kontrollens Skyld maaler alle 3 Vinkler i hver Trekant, opstaar der en Række af Trekanter (Fig. 8), af hvilke hver efterfølgende har en Side fælles med den foregaaende (de to første Hovedpunkter er bestemte ved Maaling af deres Afstand). Endvidere kan enkelte Punkter bestemmes i Forhold til 3 af de forud fastlagte ved Tilbageskæring.

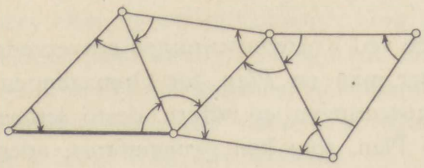


Fig. 8.

II. ***Polygonmaaling,*** ved hvilken hvert enkelt Hovedpunkt bestemmes i Forhold til de to foregaaende ved polære Koordinater; paa Fig. 9 er Punkt 3 saaledes bestemt i Forhold til 1 og 2 ved Maaling af Siden 2—3 og Vinklen 1—2—3.

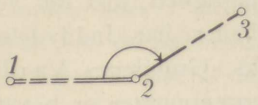


Fig 9.

III. ***Linjetriangulation,*** ved hvilken der over Terrænet lægges et Net af Hovedlinjer, som knyttes sammen til store Trekanter, hvis Sider maales. Er Opgaven ikke selvstændig, knyttes Linjerne til forud givne Hovedpunkter.

14. Ved Anvendelsen af de nævnte Opmaalingsmetoder lægger man da et System af Hovedpunkter (eller Hovedlinjer), *Nettet* over hele det Terræn, som skal maales.

Nettet kan være mere eller mindre sammensat, og de enkelte Hovedpunkter kan have indbyrdes større eller mindre Afstande efter Beskaffenheden og Udstrækningen af Terrænet. Man indskrænker sig imidlertid aldrig til at maale netop saa mange Stykker (Vinkler og Sider) i Nettet, som er nødvendige til dettes Bestemmelse; det er tværtimod en absolut Fordring, at man skaffer sig overskydende Maal. Er alle Nettets Punkter bestemte ved e maalte Stykker, og har man maalt n ($n > e$), vil der være $n - e$ overskydende Maal, og der vil da for hvert af disse kunne opstilles én *Betingelsesligning* (saml. Fejlteorien § 22). De overskydende Maal giver dels 1) Sikkerhed mod Tilstedeværelsen af grove Fejl og dels 2) Muligheden for en *Fejludjævning* med

det Formaal ved den at forøge Resultatets Nøjagtighed. Ved Indsætning af de ved Maalingerne fundne Værdier for Vinkler og Sider i Betingelsesligningerne vil det nemlig altid vise sig, at disse ikke tilfredsstilles. Er Uoverensstemmelserne ikke større, end at de kan forklares ved tilfældige (uundgaaelige) Fejl, har man opnaaet den forlangte Sikkerhed, og er de større, maa Fejlene naturligvis opsøges og rettes. Ofte nøjes man med den nævnte Sikkerhed, idet man blandt de n maalte Stykker udvælger e til Bestemmelse af Systemet; dette er navnlig Tilfældet, naar man fremstiller Maalingens Resultat ved en umiddelbar Konstruktion, f. Eks. ved Linjetriangulation, hvor man konstruerer Linjesystemet af e Stykker og undersøger, om Længderne af de overskydende $n - e$, maalte paa Kortet, indenfor Maalingsnøjagtigheden stemmer med de tilsvarende Længder, maalte i Marken.

Vil man foretage en Fejludjævning, kan denne gøres mere eller mindre rationel; ved mindre Arbejder indskrænker man sig ofte til ved en eller anden vilkaarlig valgt Fremgangsmaade (Prøven sig frem) at tillægge de maalte Størrelser saadanne Rettelser, at Betingelsesligningerne tilfredsstilles, medens man ved større Arbejder foretager Udjævningen efter mindste Kvadraters Metode (saml. Fejlteoriens 10. Kapitel).

Vi vil nu gaa over til Behandlingen af de enkelte Opmaalingsmetoder, idet det dog skal bemærkes, at man naturligvis ingenlunde ved et Terræns Opmaaling er bunden til en enkelt af disse; man kombinerer dem efter Omstændighedernes Krav, og navnlig benytter man forskellige Metoder paa Arbejdets forskellige Trin.

Ved en større Opmaaling benyttes de i Reglen i følgende Orden:

Triangulation (herunder Tilbageskæring),
Polygonmaaling og
Linjetriangulation.

Behandlingen vil derfor finde Sted i denne Orden.

§ 5. Triangulation.

15. En Række Trekanter, som er saaledes forbundne med hverandre, at den enkelte Trekant kun har én Side fælles med de foregaaende Trekanter, er fuldstændig bestemt, naar man i hver Trekant maaler mindst 2 Vinkler samt i hele Systemet én Side, *Grundlinjen*. Er f. Eks. paa Fig. 10 Siden AB og de med Buer betegnede Vinkler maalte, vil alle Siders Længde kunne beregnes, idet

$$BC = AB \frac{\sin A.a}{\sin C.c}^{1)} \text{ og } AC = AB \frac{\sin B.b}{\sin C.c},$$

hvor $C.c = 180^0 - (A.a + B.b)$; af BC vil BD og CD kunne beregnes o. s. v. I Almindelighed maaler man imidlertid alle tre Vinkler i hver Trekant.

Triangulationen er den Opmaalingsmetode, som ligger til Grund for alle større Opmaalinger. Er Terrænet meget stort, bestemmer man først et overordnet System af Punkter med store Afstande; mellem disse bestemmes et underordnet System med mindre Afstande og saaledes fortsættes, indtil man har faaet et Net af Punkter, saa tæt, at man dertil kan knytte det Linjenet, hvorfra de enkelte Terrænpunkter bestemmes.

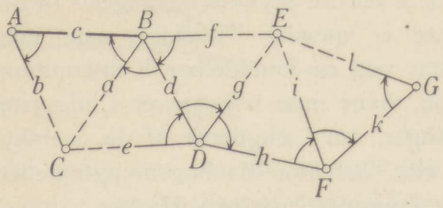


Fig. 10.

Triangulationen anvendes imidlertid ogsaa ved mindre Opmaalinger; thi Nøjagtigheden er ubetinget større ved Vinkelmaaling end ved Længdemaaling, og derhos vil denne Metode i Reglen være den hurtigste. Dog vil den naturligvis kun være anvendelig i overskueligt Terræn; den vil saaledes ikke kunne anvendes i Skovterræn. I dette Afsnit er der nærmest Tale om Triangulationer, hvis Punkters indbyrdes Afstande kun er nogle faa Tusind Meter og i hvert Fald ikke overstiger 8—10 Kilometer.

Planen.

16. Ved Planlægningen vælger man et System af Punkter, saaledes at man fra hvert enkelt Punkt kan se mindst 2 andre, og at Forbindelseslinjerne kan komme til at danne en sammenhængende Række af Trekanter; disses Form maa naturligvis rette sig efter Terrænet, men man stræber efter at gøre dem saa nær som muligt ligesidede (se Punkt 42), og man bør helst undgaa Vinkler paa under 30^0.

Skal Triangulationen knyttes til forud bestemte Hovedpunkter, maa disse selvfølgelig indgaa i Systemet.

Man sørger derhos for udover de til Systemets Bestemmelse nødvendige at kunne maale et passende Antal Vinkler, for at

[1]) Ved Vinkel $A.a$ forstaas den Vinkel, som har Toppunkt i A, og hvis Ben er forbundne ved Siden a.

man ved disse efter Omstændighederne kan faa Kontrol eller tillige gennem en Udjævning forøge Nøjagtigheden. Paa den anden Side maa man ikke lade Systemet blive for sammensat, jo enklere desto bedre.

17. Planlægningen begynder med, at man hjemme udarbejder en *foreløbig Plan* paa et Kort; hertil egner Generalstabens Kort sig udmærket, og man staar sig i Reglen ved at anvende Atlasbladene i 1:40000. For de Dele af Landet, hvor disse ikke er udkomne, maa man ty til Atlasbladene i 1:80000; men disse er temmelig smaa, og, forsaavidt det ikke drejer sig om Triangulationer med meget lange Sigter, maa man hyppigt erstatte dem af Maalebordsbladene i 1:20000.

Først gør man sig da grundig bekendt med Kortet over vedkommende Terræn, og dernæst udsøger man paa dette et passende Punktsystem; af Hensyn til Oversigten er det i Reglen heldigst at vælge Punkterne paa Terrænets højeste Steder, men man maa tillige ved Valget af Punkterne tage Hensyn til, at de frembyder gode Betingelser for Opstilling af Theodoliten, hvortil navnlig hører, at denne kan staa fuldstændig fast, og at man har Plads til at bevæge sig omkring den; man bør saaledes ikke, hvad der ved smaa Triangulationer ofte er fristende, vælge et Punkt paa et Jorddige.

Er det vanskeligt at finde tilstrækkelig mange Punkter, i hvilke man kan faa Opstilling, *Jordpunkter*, kan man ogsaa i Nettet lade indgaa Punkter, i hvilke Opstilling overhovedet ikke er mulig, *utilgængelige Punkter*, f. Eks. Kirkespir, Dampskorstene o. l.; og findes der i Terrænet gode Punkter af denne Art, bør de, selv om de ikke indgaar i det egentlige Trekantnet, bestemmes, baade fordi de er meget nyttige, da de i Reglen kan ses fra næsten alle Terrænets Punkter, og fordi de ikke er udsatte for at blive forandrede eller beskadigede. Den Ulempe, at man ikke kan faa Opstilling i et utilgængeligt Punkt, kan iøvrigt ofte afhjælpes ved en ekscentrisk Opstilling af Theodoliten.

Man maa nu paa Kortet under fornøden Hensyntagen til Terrængenstandene undersøge, om de Sigter, ved hvilke Punkterne forbindes saaledes, at der dannes et passende Trekantnet, kan faas; er der Tvivl om dette, bør man tegne Profilen af Terrænet gennem vedkommende Punkter eller i hvert Fald de farlige Punkter af Profilen; til Vejledning kan tjene, at et Hus paa Landet sjælden vil være mere end 8 m højt, et fritstaaende Træ ikke over 25 m og Træerne i en Skov sjælden over 30 m. (De højeste Træer her i Landet er c. 38 m.)

Anvender man Stokke med Flag som Signaler, bør man som Regel ikke tage Sigte uden at kunne se Foden af Stokken; skulde det undtagelsesvis blive nødvendigt, maa man, inden Sigtet tages, sikre sig, at Stokken staar nøjagtig lodret. Bruger man derimod høje Signaler, og har man forvisset sig om, at Sigtepunktet ligger nøjagtig over Stationspunktet, vil det naturligvis være tilstrækkeligt, naar man kan se Sigtepunktet skarpt.

Det skal bemærkes, at det ikke er sikkert, at man kan se fra *A* til *B*, fordi man kan se fra *B* til *A*, hvilket fremgaar af Fig. 11, hvor den øverste Profil svarer til Brugen af Stokke med Fordring om, at man skal kunne se Foden af Stokken, den anden til Brugen af høje Signaler, hvor man kun skal kunne se Sigtepunktet (de smaa Kredse).

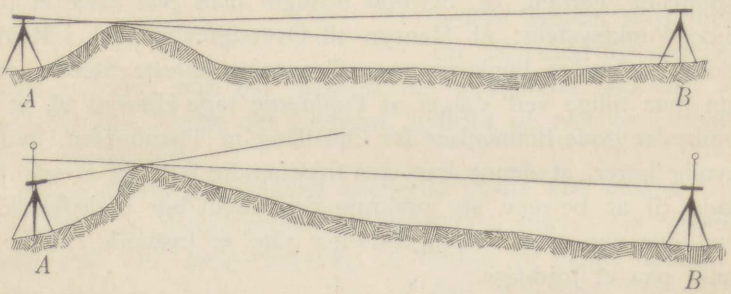


Fig. 11.

18. Endnu staar tilbage at finde en *Grundlinje*, *Basis*. Undtagelsesvis kan ved mindre Triangulationer en af selve Nettets Sider egne sig til nøjagtig Maaling, og den kan da benyttes som Basis; men er dette ikke Tilfældet, maa man paa passende Sted i Terrænet vælge en særlig Basis, som af Hensyn til Terrænforholdene altid bliver betydelig kortere end Nettets Sider. Basis maa tilfredsstille Fordringen om at kunne maales nøjagtig, og den maa tillige kunne sættes i Forbindelse med en af Nettets Sider gennem gode Trekanter. Den bedste Form for disse Forbindelsestrekanter er den, som foranlediger det mindst mulige Nøjagtighedstab ved Overgangen fra Basis til den første Side i Trekantnettet; dette Nøjagtighedstab er udtrykt ved Middelfejlen paa en Trekantside, *a*, som er beregnet af Siden *b* gennem de udjævnede Værdier for Vinklerne i Trekanten, og denne Middelfejl er ifølge Fejlteorien, Ekspl. 40 bestemt ved

$$m_a = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{m}{\omega}\,a\,\sqrt{\cot^2 o'_1 + \cot o'_1 \cot o'_2 + \cot^2 o'_2}, \quad . \quad . \quad (10)$$

hvor o'_1 og o'_2 er de udjævnede Værdier for de Vinkler, som

ligger henholdsvis over for a og b, medens m er Middelfejlen paa de maalte Vinkler.

Eksempelvis skal anføres

Trekantens Form.	Trekantsidens Længde i Forhold til Grundlinjen.	Middelfejl paa Trekantsiden, naar Grundlinjen, **b**, betragtes som fejlfri og m er udtrykt i Minutter
Ligesidet	1	0.00024 bm
Ligebenet, Vinklen over for Grundlinjen $= 28^0\,57'$	2	0.00092 bm
Ligebenet, Vinklen over for Grundlinjen $= 14^0\,22'$	4	0.00376 bm

Det er værd at bemærke, at man ved at beregne en Trekantside, som er 4 Gange saa lang som Basis, gennem to ligebenede Trekanter med Topvinkel $28^0\,57'$ for Trekantsiden faar Middelfejlen (Fejlteorien Formel (22))

$$0.00046 \text{ m } \sqrt{4b^2 + 16b^2} = 0.00206 \text{ bm},$$

hvilket, sammenholdt med ovenstaaende Værdi 0.00376 bm for Middelfejlen paa en Trekantside af samme Længde beregnet gennem en enkelt Trekant, viser, at der opnaas langt større Nøjagtighed ved at danne Overgangen fra Basis gennem to end gennem én Trekant. Man bør derfor som Regel gøre Overgangen gennem flere Trekanter, som da siges at danne et særligt *Basisnet*, og i dette vil det være heldigt, om der — ligesom i ethvert andet Trekantnet — findes overskydende Sigter, saa at det kan udjævnes samlet.

Blandt de mange Former, som et Basisnet kan have, skal her kun nævnes den i Fig. 12 viste; ved denne maaler man den mindste Diagonal AB i en Firkant af rhombisk Form, og fra denne beregner man den anden Diagonal, Trekantsiden, CD. Skal man gaa fra en meget kort Grundlinje til en betydelig længere Trekantside, kan man lægge flere saadanne rhombiske Firkanter indeni hverandre. Det ligger i Sagens

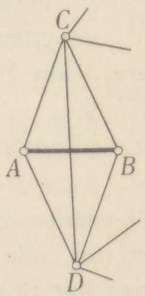


Fig. 12.

Natur, at man ikke kan opnaa regelmæssige Figurer i Praksis. Ofte kan en Grundlinje faas langs Kanten af en Landevej eller en Jærnvej.

Forsaavidt Triangulationen knytter sig til forud givne Hovedpunkter, er der selvfølgelig ikke Anledning til at maale nogen Basis.

19. Efter saaledes paa Kortet at have udarbejdet den foreløbige Plan og indtegnet Trekantnettet med Blyant, skrider man til *Rekognosceringen*, ved hvilken man i Terrænet undersøger, om den foreløbige Plan lader sig gennemføre, idet man i hvert enkelt Punkt forvisser sig om, at man kan faa de Sigter, som derfra skal haves. Efterhaanden som man da endelig fastslaar Stationerne, bør man afsætte deres Plads paa Kortet og notere alle de Sigter, som kan faas, ikke alene til andre Jordpunkter men ogsaa til utilgængelige Punkter (Taarnspidser o. l.), som man maatte faa Brug for at bestemme. Det er nødvendigt at notere sig alle Sigter, da det ved den endelige Planlægning kan vise sig ønskeligt at benytte Sigter, som man ikke havde tænkt sig.

Til Undersøgelsen af hvilke Sigter der kan faas, kan man ikke nøjes med en Terrænkikkert, men man bør medføre en mindre Theodolit, og er der Punkter, som man kunde frygte for ikke at kunne genfinde senere under maaske mindre gunstige Belysningsforhold, bør man maale og notere Retningens Vinkel med en anden tydelig Retning.

Da det er af største Betydning for at kunne se Signalerne, at disse viser sig paa klar Baggrund, bør man under Rekognosceringen ved Valget af hvert nyt Punkt rette Sigtet mod de forudvalgte Punkter og derefter slaa Kikkerten igennem; man vil derved se den Baggrund, Signalet viser sig paa, set fra vedkommende andet Punkt, og man kan da ofte ved en lille Flytning af Punktet undgaa en uheldig Baggrund.

Benytter man som Signaler Stokke med Flag, bør man notere disses Farve.

Ved mindre Triangulationer anbringer man Signalerne i Stationspunkterne samtidig med Rekognosceringen.

Efter Hjemkomsten udarbejder man *den endelige Plan* for Trekantnettet, idet man under Hensyntagen til, hvad der i det efterfølgende vil blive sagt om Udjævningen, vælger de Sigter, man har Brug for. Planen tegnes paa Kortet efter følgende Regler:

1) Findes der i Nettet Trekantsider, som forbinder Punkter, der forud er bestemte, og som derfor betragtes som fejlfri, betegnes disse Sider med dobbelte Linjer,
2) direkte maalte Sider (Grundlinjer) betegnes med tykke Linjer, og
3) alle andre Sider med tynde Linjer.

Samtidig iagttages:

4) at Sider, langs hvilke der ved Vinkelmaalingen kun tages Sigte fra den ene Ende, trækkes helt op paa den Halvdel, der vender imod det Endepunkt, fra hvilket Sigtet er taget, medens den anden Halvdel punkteres,
5) at de Sider, langs hvilke der er taget Sigte fra begge Ender, trækkes helt op, og
6) at en Linje, langs hvilken intet Sigte er taget, naar der er Grund dertil, kan betegnes ved en punkteret Linje, som gøres dobbelt, dersom dens Længde kendes.
7) Forud givne Vinkler kan betegnes ved to Buer.

Man plejer at betegne Triangulationspunkterne med store Bogstaver, og det er praktisk at lade disse være nærliggende Stednavnes Begyndelsesbogstaver, til hvilke der da, for at skelne dem, kan tilføjes et lille Bogstav. Et Triangulationspunkt ved Byen »Bendstrup« kan saaledes betegnes »Be«.

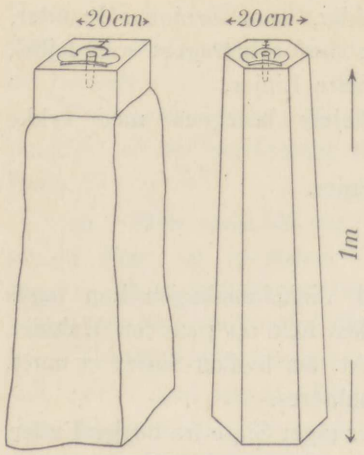
Triangulationspunkternes Navne paaføres den endelige Plan med Tusk. De af Gradmaalingen og Generalstaben bestemte Hovedpunkter er betegnede ved den Bakke, de staar paa, eller et nærliggende Stednavn, f. Eks. »Lerup Bavnehøj«.

Til Slut skal bemærkes, at den paa den foreløbige Planlægning anvendte Tid og Ulejlighed rigelig lønnes ved Rekognosceringen og Udarbejdelsen af den endelige Plan. Det maa aldrig ved Rekognosceringen vise sig, at man ikke kan faa et Sigte, som findes paa den foreløbige Plan, medmindre dette skyldes Terrængenstande, som ikke fandtes paa det ved Planlægningen benyttede Kort.

Med vore gode topografiske Kort bør man derfor som Regel kunne gennemføre den foreløbige Plan uden væsentlige Ændringer.

Triangulationspunkternes Mærkning og Signaler.

20. Den Maade, paa hvilken Triangulationspunkterne mærkes i Marken, er afhængig af, om de skal bevares i Fremtiden eller



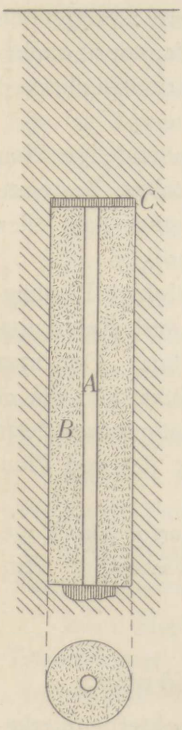
1/20 s. St.
Fig. 13.

ikke[1]), og i sidste Tilfælde af den Tid, som Opmaalingsarbejdet vil vare.

Skal Triangulationspunkterne bevares i Fremtiden, kan de mærkes med:

1) *Granitsten*, der, som Fig. 13, første Tegning, viser, har et tilhugget firkantet Hoved, i hvilket selve Stalionspunktet er mærket ved et lille Hul; den øvrige Del af Stenen er kun raat tilhugget. Stenen maa støbes fast i Beton eller paa anden Maade anbringes saaledes, at den absolut ikke kan bringes til at forandre Plads, og den maa saa dybt ned i Jorden, at Frosten ikke kan forskyde den, hvilket man regner at være knap 1 Meter.

2) I Stedet for Granitsten kan man anvende *Betonblokke* f. Eks. som den i Fig. 13, anden Tegning, viste. Stenen eller Blokken rager c. 15 cm. op over Jordens Overflade; kun paa trafikerede Steder (Vejkanter) i Højde med denne.



1/20 s. S.
Fig. 14.

3) For at sikre Punktet, og tillige for at dette ikke skal volde Ulempe for Jordens Bruger, benyttes undertiden en *underjordisk Afmærkning*. Saaledes har Generalstaben i de senere Aar afmærket Placeringsstationer ved et underjordisk, lodret staaende, 1 Meter langt og 3.5 cm vidt galvaniseret Jærnrør *A* (Fig. 14), der i hele sin Længde er nedstøbt som Kærne i en Betoncylinder, *B*, af 21 cm Tværsnit. Rørets øverste Ende er 50 cm under Jordens

[1]) Det skal her bemærkes, at en Supplering af en Opmaaling eller Paavisning af forsvundne Skelpunkter lettes i en ganske overordentlig Grad, naar de ved den oprindelige Opmaaling bestemte Hovedpunkter er bevarede, og at det derfor i Reglen vil være en slet Økonomi ikke at bevare disse. Kravet om Hovedpunkternes Bevaring er ogsaa i de senere Aar blevet almindeligt.

Overflade, og hele Cylinderens øverste Flade er dækket af en Flise, *C*. Medens Opmaalingsarbejdet staar paa, er Røret dog kun lukket ved en Korkprop, og den lette Adgang til det tilvejebragt ved et Kloakrør, der stilles paa Betoncylinderen. Røret tjener tillige til at afstive en Landmaalerstok, naar en saadan anvendes for at gøre Punktet synligt.

For at kunne genfinde Punktet maa man tegne en lille Skitse af det nærmeste Terræn, og paa denne anføres 3—4 Maal til faste Terrænpunkter.

Skal Triangulationspunkterne ikke bevares i Fremtiden, maa de mærkes paa en saadan Maade, at man kan være sikker paa, at de ikke kan forsvinde eller forskydes i den Tid, Opmaalingsarbejdet, ɔ: ikke alene Triangulationen, men ogsaa de paafølgende Arbejder til Bestemmelse af Linjenettet og de enkelte Terrænpunkter, varer. Mærkningen kan ske ved Nedramning af *solide Pæle* (større eller mindre), i hvis øverste Flade Punktets Sted betegnes ved et med et Centrumsbor boret lodret Hul. Ved smaa Triangulationer anvendes ofte Pæle af rektangulært Tversnit (c. 5 × 8 cm), som nedrammes med Bredsiden mod Nord. Punktets Sted betegnes da ved Aksen af en Landmaalerstok af sædvanlig Tykkelse (c. 3 cm) anbragt rørende Pælen paa Midten af dennes nordre Side (Fig. 15). Man kan ogsaa benytte *Drænrør* eller bedre *Jærnrør* af 2—4 cm's Lysning, som nedgraves eller nedbores i lodret Stilling, helst i en Dybde af c. 10 cm under Jordens Overflade. Punktets Sted betegnes da ved Rørets Længdeakse.

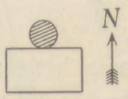


Fig. 15.

21. Signalernes Størrelse og Form retter sig efter Sigtevidden; er denne ikke over 2500—3000 Meter, kan man i Almindelighed nøjes med almindelige Landmaalerstokke, som forsynes med Flag. Ved Landbohøjskolen er i Stedet for Flag anvendt et af 4 Vinger af rødmalet Blik bestaaende Signalapparat, som sættes paa Stokken (se Fig. 16). Er Stokkene anbragte som vist i Fig. 15, gælder det kun om at sætte dem lodret og fast i Jorden; men da det er af stor Vigtighed, at de bevarer den lodrette Stilling, bør de, naar Sigtelængden da ikke er meget lille, fortøjes eller afstives, og er Stationspunktet betegnet ved et lille Hul i en Pæl eller en Sten, er en saadan Fortøjning eller Afstivning nødvendig; den kan da tilvejebringes ved Barduner eller Afstivningsstokke.

Bardunerne maa være af tykke Begsnore (disse trækker sig ikke sammen, naar de bliver vaade) eller af Staaltraad; de

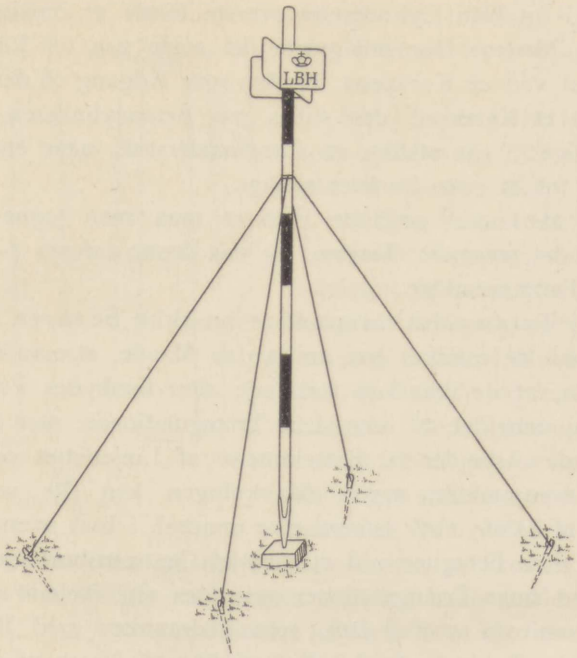


Fig. 16.

maa befæstes til Pæle i Jorden (Fig. 16) og udstrammes i 4 paa hverandre vinkelrette Retninger, saa at det bliver muligt at bringe Signalstokken til at staa lodret ved Hjælp af en Libelle. En saadan Fortøjning giver et temmelig stabilt Signal.

Afstivningsstokkene, af hvilke der kan benyttes 1, 2 eller 3, stikkes godt fast i Jorden i en skraa Stilling og befæstes til Signalstokken ved smaa om denne anbragte Ringe af Jærn, som ved Led er forbundne med andre Ringe, gennem hvilke Afstivningsstokkene stikkes. Stokkene klemmes fast i Ringene ved Skruer. Selvfølgelig kan man ogsaa anvende en almindelig Surring.

Paa større Afstande — indtil 10 Kilometer — kan man i Reglen nøjes med lignende Signaler, bestaaende af en tykkere Stok (c. 7 cm), forneden forsynet med en Jærntap til Anbringelse i Stenens Hul og foroven med nogle Tværstykker, saaledes anbragte, at Signalet er symmetrisk m. H. til Aksen. En stærk Maling er af stor Betydning (uægte Zinnober giver en smuk og tydelig rød Farve), og Stokken males i Bælter. Den anbringes lodret i Punktet og fortøjes med 4 stærke Staaltraadsbarduner.

Ved Landbohøjskolen har man bygget Signaler saaledes: 4 Stokke slaas i en skraa Stilling med en Mukkert saa langt ned i Jorden, at de staar fast (Fig. 17); over dem anbringes en malet Sejldugshætte, som ved smaa Remme spændes fast til Stokkene; i Hættens indvendige Spids er anbragt en lille Træpyramide med Huller til Stokkenes øverste Ende. Ved en Lodsnor ophængt i en Krog i Midten af Pyramidens nederste Flade sikrer man sig, at Hættens Spids er lodret over Stationspunktet. Er dette betegnet ved en Pæl, kan det være praktisk ogsaa i denne at indskrue en Krog og forbinde de to Kroge ved en solid Snor, som altsaa bliver lodret. Dette Signal lider — ligesom de andre her omtalte Signaler — under den Mangel, at det maa fjernes, naar der skal maales Vinkler i Punktet, en Mangel, som dog afhjælpes, naar der anvendes 3 Meter lange Stokke eller Lægter. Dette Signal ses udmærket; men da det ikke er særlig stabilt, maa der stadig føres Tilsyn med det.

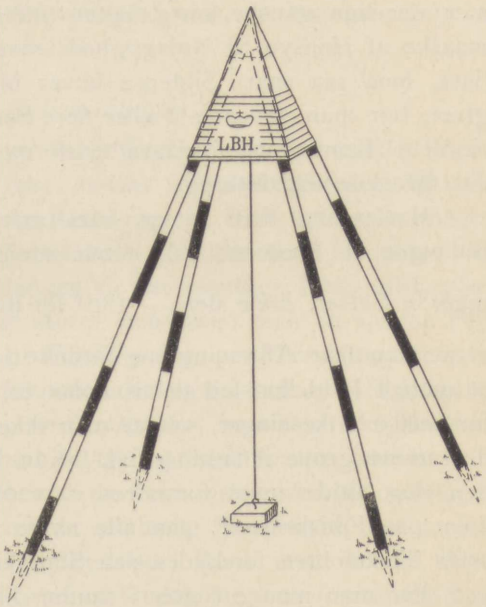


Fig. 17.

Er Sigterne saa lange, at de her omtalte Signaler ikke kan anvendes, maa man benytte Tømmersignaler, hvis Sigtepunkt bør ligge nøjagtig over Stationspunktet; er dette ikke Tilfældet, maa Ekscentriciteten bestemmes og tages i Beregning (se Instrumentlæren).

Vinkelmaalingen.

22. Vinklerne maales efter Nøjagtighedsfordringen, som særlig er afhængig af Sigternes Længder, med en Mikroskop- eller Nonius-Theodolit, hvilken sidste i Reglen har en mindste direkte Aflæsning paa 0,5 Minut. Er Sigterne ikke ud over 3 Kilometer, vil man som oftest kunne arbejde hele Dagen; men de

gunstigste Maalinger faas tidlig Formiddag og sen Eftermiddag, og det kan i stærkt Solskin, og naar der er megen Bevægelse (Sitren) i Luften, — selv med kortere Sigter — blive nødvendigt at indstille Arbejdet nogle Timer midt paa Dagen. Det er værd at lægge Mærke til, at man af Hensyn til Belysningen bør tage de lange Sigter i vestlig Retning om Formiddagen og de lange Sigter i østlig Retning om Eftermiddagen. Forekommer der kun ganske korte Sigter (indtil 1200 Meter), kan man maaske af Hensyn til Nøjagtighedskravet nøjes med at maale 1 Sats, men saa snart Sigterne bliver blot lidt længere end angivet, bør man anvende 2 eller flere Satser; de derved opnaaede Fordele (Kontrol og Nøjagtighedsforøgelse) kan rigelig erstatte det forøgede Tidsforbrug.

Maaler man flere Satser, maa man mellem disse forandre Stillingen af Kredsen; kan denne drejes, maa man, naar man tager n Satser, dreje den $\frac{1}{n}$ 180^0 for hver Sats, hvorved opnaas, 1) at man faar Aflæsningerne fordelte jævnt Kredsen rundt, saa at mulige Inddelingsfejl delvis ophæves, og 2) at man faar helt forskellige Aflæsninger, saa at man ikke fristes til Gentagelse af de samme grove Aflæsningsfejl. Kan Kredsen ikke drejes, vil den dog altid kunne forandres c. 120^0 ved at flytte Theodoliten paa Fodskruerne; paa alle nyere Instrumenter kan iøvrigt selve Theodoliten forskydes paa Stativhovedet.

Har man mange Sigter i samme Station, er det af Hensyn til en mulig Forskydning eller Drejning af Theodoliten fordelagtigt at fordele dem i flere Grupper, og da navnlig at tage Sigter til Punkter af forskellige Ordner i forskellige Grupper; i alle Satser begyndes med samme Punkt, som vælges saaledes, at det viser sig paa klar Baggrund og til alle Tider af Dagen skarpt og tydeligt; egner intet af de foreliggende Punkter sig hertil, benyttes et Kirkespir eller andet passende Punkt, uanset om det indgaar i Triangulationsnettet. Man maa gøre sig det til en ufravigelig Regel aldrig at tage Sigte til et Punkt, som ikke ses fuldstændig skarpt.

23. Inden man skrider til Vinkelmaalingen, bør man have Maalebogen fuldstændig i Orden og indført de Punkter, til hvilke Sigter skal tages. Maalebogen kan bekvemt føres som i *Eksempel 2*. Her er taget 3 Satser. Kun Kolonnerne 3, 4, 5 og 6 udfyldes i Marken, dog ikke Summen, alt andet hjemme. Det kan være praktisk at skrive alt, hvad der noteres i Marken, med Blyant og alt, hvad der føres hjemme, med Tusk. Ved Opgø-

relsen efter Hjemkomsten udfyldes først Kolonnen 7, og Regningen kontroleres ved, at Summen i 7 skal være Middeltallet af Summerne i 3, 4, 5 og 6 (beregnes kun for Minutter og Sekunder). Derefter udfyldes 8, idet Tallene i 7 formindskes med Tallene svarende til det første Sigte i 7; Regningen prøves ved, at Summen i 8 + det første Sigtes Minut og Sekundantal i 7 multipliceret med Sigternes Antal skal være lig Summen i 7. Endelig udfyldes 9, og Prøven skal vise, at Summen i 9 er Middeltal af Summerne i 8.

Basismaalingen.

24. Udmaaling af en Basis forekommer ved lokale Triangulationer, som altsaa ikke støttes til forud bestemte Hovedpunkter. Det er af største Betydning, at Basis udmaales meget nøjagtigt; thi enhver Fejl paa Basis vil ikke alene fordobles saa mange Gange ved Overgangen til det egentlige Trekantnet, som den første Side i dette er større end Basis; men en saadan Fejl yirker, selv om den er af tilfældig Art, paa Trekantnettet som en lovmæssig Fejl. Derfor anvendes ogsaa ved store Triangulationer særlige Apparater, *Basisapparater*, som dog ikke skal beskrives her; vi vil tværtimod antage, at Basis maales med et sædvanligt Staalbaand. Dette maa da være justeret meget omhyggeligt, og man bør kun anvende saadanne Staalbaand, ved hvilke Stikketykkelsen er uden Indflydelse. Basis maa maales flere Gange med den højeste Grad af Omhu, og om fornødent maa den nivelleres; Maalingen maa helst foregaa i Graavejr, for at Temperaturen kan være saa ensartet som muligt; denne maales ved et paa Jordens Overflade anbragt Termometer og tages i Beregning. Skifter Temperaturen, maa man under Maalingen maale den med konstante Mellemrum og beregne dens Middelværdi. Det er klart, at det har den største Betydning for et godt Resultat, at Grundlinjen er valgt saaledes i Terrænet, at den frembyder særdeles gode Betingelser for Maaling.

Paa Grund af de særlige Forhold, maa man ikke taale, at de forskellige Maalingsresultaters indbyrdes Forskel nærmer sig til de i Instrumentlæren som tilladelige angivne Grænser for Afvigelserne mellem to Maalinger af samme Linje.

Udjævningen.

25. Et Trekantnet, i hvilket man har maalt én Basis samt i hver Trekant 2 Vinkler, vil være fuldstændig bestemt; men der haves ingen Kontrol paa Maalingen. For hver Vinkel, man

maaler udover to i hver Trekant, opnaar man, som vist i Punkt 14, én Overbestemmelse, der enten kan benyttes alene til Kontrol eller til en Udjævning.

Drejer det sig om smaa Trekantnet (Sigter paa 1000—1500 Meter), vil det i Reglen være tilstrækkeligt at sikre sig en rigtig Vinkelmaaling ved at maale alle tre Vinkler i hver Trekant, og, dersom deres Sum ligger tilstrækkelig nær ved 180^0, fordele Fejlen i hver enkelt Trekant; kan man da tillige faa et langt Sigte som f. Eks. *AD* (se Fig. 18), vil man derved efter Beregningen af Systemets Koordinater kunne sikre sig saavel Maalingens som Beregningens Rigtighed, idet man da indenfor Maalingsnøjagtigheden skal have

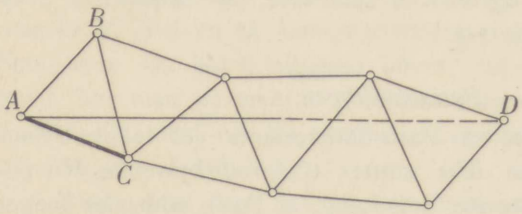


Fig. 18.

$$\varphi_A^B + \angle BAD = \text{arc tg}\,\frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}.$$

Drejer det sig derimod om større Trekantnet, bør man ikke forsmaa den Nøjagtighedsforøgelse, som kan opnaas ved en Udjævning efter de mindste Kvadraters Metode, om man end efter Omstændighederne kan gøre Udjævningen mere eller mindre rationel.

26. Vi vil nu undersøge, hvilke forskellige Arter af Fundamentalligninger (Betingelsesligninger), der fremkommer ved Udjævning af et Trekantnet samt hvormange af enhver Art, alt under Forudsætning af, at Udjævningen foregaar som Korrelatudjævning.

Er Punktsystemets Form bestemt ved e maalte Vinkler, medens der er maalt n ($n > e$), vil der opstaa $n - e$ Fundamentalligninger.

Disse kan henregnes til 4 Klasser.

I. *Stationsligninger*, som udtrykker, at Summen af Vinklerne omkring et Punkt skal være 360^0; denne Klasse af Betingelsesligninger fremkommer kun, naar Vinklerne er maalte uafhængigt af hverandre, ikke ved Satsmaaling.

II. *Vinkelsumsligninger*, som udtrykker, at Summen af Vinklerne i en n Kant skal være $(n-2)\,180^0$; i Almindelighed fremkommer Vinkelsumsligningerne i Trekanter; men det hænder

dog, at de fremkommer i andre Polygoner (Fig. 23 og 24), og Forholdet fremtræder navnlig, naar et Trekantnet som i Fig. 24 omslutter en Polygon.

III. *Sinusligninger*, som fremkommer, naar en Række Trekanter danner en sluttet Kreds, saaledes at den sidste Trekant har en Side fælles med den første. Sinusligningen udtrykker da, at man ved at regne ud fra en Side gennem Trekantrækken skal komme tilbage til denne Sides Værdi.

Disse Ligninger har Formen

$$\frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \ldots \sin \alpha_n}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \ldots \sin \alpha_n} = 1.$$

(se dog Side 31, Fig. 24).

IV. *Basisligninger* forekommer, hvor der er maalt 2 eller flere Grundlinjer, og udtrykker, at den ene Grundlinje skal have den Værdi, som faas ved at beregne den af den anden gennem de maalte Vinkler. Er de to Grundlinjer g_1 og g_2, faar den Formen

$$\frac{g_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_n}{g_2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_n} = 1.$$

Hyppigst er g_1 og g_2 dog ikke maalte Grundlinjer men Sider, der gennem en forudgaaet Udjævning er tillagte uforanderlige Værdier.

27. For at kunne opstille Regler for, hvormange Fundamentalligninger der fremkommer, betragter vi først et Trekantnet, i hvilket der kun er maalt én Grundlinje, medens det iøvrigt er bestemt ved maalte Vinkler.

Et saadant Trekantnet, der indeholder p Punkter, vil være bestemt ved $2\ (p-2)$ Vinkler; de to første Punkter er nemlig bestemte ved Grundlinjen, og der kræves to maalte Vinkler til Bestemmelse af hvert af de øvrige — hvad enten det er bestemt ved Frem-, Side- eller Tilbageskæring. Er der i Nettet maalt m Vinkler, bliver

Antallet af Betingelsesligninger ialt: $m - 2p + 4 \ldots\ldots$ (11).

Af *Stationsligninger* fremkommer der — dersom Vinklerne er maalte uafhængigt af hverandre — saa mange, som der er Punkter, omkring hvilke alle Vinklerne er maalte.

Udsletter man af Trekantnettet 1) alle halvt optrukne Linjer, og 2) dernæst alle helt optrukne, hvis ene Endepunkt nu ikke ved andre Linjer er forbunden med andre Punkter i Nettet, saa vil den opstaaede Figur indeholde samme Antal Vinkelsumsligninger som den oprindelige. Er der efter den angivne Forandring l_1

Linjer og p_1 Punkter, bliver Opgaven reduceret til at finde Antallet af Vinkelsumsligninger i en p_1 Kant med $l_1 - p_1$ Diagonaler; p_1 Kanten giver da 1 og hver af Diagonalerne 1 Vinkelsumsligning, og herved bliver

Antallet af Vinkelsumsligninger: $l_1 - p_1 + 1$ . . . . . (12)

Denne Formel gælder imidlertid ogsaa, naar man — hvilket er simplere — lader l_1 betegne Antallet af alle Nettets fuldt optrukne Linjer og p_1 Antallet af de ved disse forbundne Punkter; thi sletter man ikke de under 2) omtalte Linjer, vil hver af disse gøre baade l_1 og p_1 1 større[1]).

For hver overkomplet Linje (helt eller halvt optrukken) i Systemet fremkommer en Sinusligning. Til Nettets Bestemmelse kræves der, naar det bestaar af p Punkter,

$$2(p-2) + 1 \text{ Sider,}$$

de to første Punkter er nemlig bestemte ved Grundlinjen, og der kræves 2 Sider til Bestemmelse af hvert af de øvrige; er der da ialt i Nettet l Linjer, bliver

Antallet af Sinusligninger: $l - 2p + 3$[2]). . . . . (13)

Antallet af Stationsligninger + Antallet af Vinkelsumsligninger (bestemt ved (12)) + Antallet af Sinusligninger (bestemt ved (13)) skal ifølge det fremsatte være lig det hele Antal Betingelsesligninger (bestemt ved (11)), idet det dog erindres, at Stations ligninger kun fremkommer, naar Vinklerne er maalte uafhængigt af hverandre, altsaa ikke ved Satsmaaling.

Er der endelig i Trekantnettet ikke én Basis men s Sider med givne Værdier, bliver

Antallet af Basisligninger: $s - 1$ . . . . . (14)

Ved Hjælp af de her angivne Regler vil man altid kunne udfinde, hvormange Fundamentalligninger af hver Art, der bliver i et Trekantnet.

Knyttes Nettet til nogle i Forvejen bestemte Punkter, maa man ved Bestemmelsen af Fundamentalligningernes Antal sammen med de maalte Stykker med

---

[1]) (12) gælder ogsaa, naar der ingen Vinkelsumsligninger bliver; thi da vil den sidste af de Linjer, som skulde være slettede, forøge l_1 med 1 og p_1 med 2.

[2]) Forekommer der i Nettet Punkter, som er bestemte ved Tilbageskæring, kræves der til disses Bestemmelse ikke som ellers 2 men 3 Sigter, hvorfor Antallet af Sinusligninger, bestemt ved (13), maa formindskes med 1 for hvert Punkt i Nettet, til hvilket der ingen Sigter er.

tage saa mange af de givne Vinkler og Sider, som behøves til de givne Punkters relative Bestemmelse. Ved Udjævningen, som foregaar paa ganske samme Maade, maa der da selvfølgelig ikke tillægges disse Stykker Rettelser.

I efterfølgende Eksempler antages Vinklerne maalte ved Satsmaaling, og der fremkommer da i de paa hosstaaende Fig. 19—24 viste Trekantnet de i Skemaet angivne Antal af Fundamentalligninger; det maa bemærkes, at Summen af Tallene i 3die og 4de Kolonne maa være lig Tallet i 2den Kolonne.

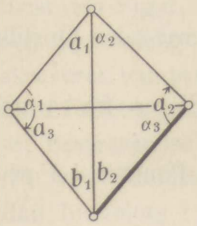


Fig. 19.

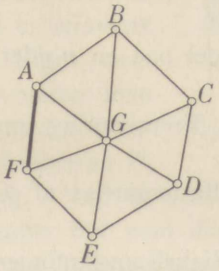


Fig. 20.

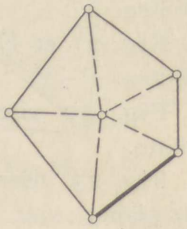


Fig. 21.

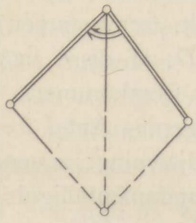


Fig. 22.

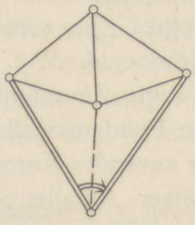


Fig. 23.

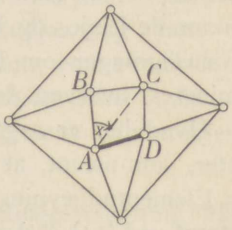


Fig. 24.

Figur	Fundamentalligninger $m-2p+4$	Vinkelsumsligninger l_1-p_1+1	Sinusligninger $l-2p+3$	Basisligninger $s-1$
19	$8-8+4=4$	$6-4+1=3$	$6-8+3=1$	$1-1=0$
20	$3n-1-2(n+1)+4 = n+1$	$2n-(n+1)+1 = n$	$2n-2(n+1)+3 = 1$	$1-1=0$
21	$2n-2(n+1)+4 = 2$	$n-n+1 = 1$	$2n-2(n+1)+3 = 1$	$1-1=0$
22	$4-8+4=0$	$2-3+1=0$	$5-8+3=0$	$2-1=1$
23	$10-10+4=4$	$7-5+1=3$	$8-10+3=1$	$2-1=1$
24	$24-16+4=12$	$16-8+1=9$	$16-16+3=3$	$1-1=0$

Fig. 19 viser en Firkant med Diagonalsigter. De tre Vinkelsumsligninger bliver

$$a_1 + \alpha_1 + b_1 = 180^0, \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$
$$a_2 + \alpha_2 + b_2 = 180^0 \text{ og } \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$
$$a_3 + \alpha_3 + b_1 + b_2 = 180^0; \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

den tilsyneladende 4de Vinkelsumsligning er indbefattet i de 3 andre, hvilket ses af, at (a) + (b) — (c) giver

$$\alpha_1 - a_3 + a_2 - \alpha_3 + a_1 + \alpha_2 = 180^0.$$

Fig. 20 er Eksempel paa en n-sidet Stjerne med Opstilling i Midten.

Fig. 21 er Eksempel paa en n-sidet Stjerne uden Opstilling i Midten.

Fig. 22 viser en Fremskæring med Sigter fra 3 givne Punkter.

Fig. 23 viser en Bestemmelse af 2 ny Punkter i Forhold til 3 givne.

Fig. 24. De 9 Vinkelsumsligninger fremkommer i de 8 Trekanter og i Firkanten. Fremstillingen af Sinusligningerne, som her er noget vanskeligere, sker saaledes: Trækkes den punkterede Linje, og betragtes $\angle x$ som maalt, fremkommer der 4 Sinusligninger om Punkterne A, B, C og D; af disse kan x elimineres, hvorved de 3 søgte Sinusligninger fremkommer.

Hvad her er sagt om Fundamentalligningernes Antal forudsætter, som nævnt, at der anvendes Korrelatudjævning; anvendes der Elementudjævning, bliver Antallet af Fundamentalligninger bestemt ved (11) + Antallet af Elementer, som kræves til Systemets Bestemmelse, ɔ: det bliver lig Antallet af maalte Størrelser.

28. Fremgangsmaaden ved Udjævningsberegningen er angivet i Fejlteorien, særlig i Eksemplerne 35 og 36, og kræver næppe nærmere Forklaring. I de til denne Bog hørende Eksempler 3, 4, 5 og 6 er vist, hvorledes Beregningen kan opstilles. I Ekspl. 3 og 4 lægges Rettelserne, som det er rigtigt, paa de maalte Retninger; i Ekspl. 5 derimod lægges Rettelserne paa de maalte Vinkler, hvilket kun er rigtigt, dersom de er uafhængigt maalte; men det maa bemærkes, at denne Fremgangsmaade ofte — om end mindre rigtigt — er benyttet, selv om der er anvendt Satsmaaling; heraf Betegnelserne Retningsudjævning og Vinkeludjævning. I Ekspl. 6 bestemmes et Punkt ved Fremskæring fra tre givne Punkter, denne Opgave forekommer ret jævnlig, hvorfor her angives et Beregningsskema, hvis Hoved kan forblive uforandret, naar man benytter Beteg-

nelserne A, B, C og P for de tre givne Punkter og det Punkt, som skal bestemmes, saaledes som paa Modelfiguren til venstre angivet.

Ved Udjævningen af større Trekantnet vil Arbejdet — som i Fejlteorien Side 85 omtalt — lettes meget betydeligt derved, at man i Stedet for at udjævne hele Nettet under ét, udjævner det gruppevis for mindre Dele ad Gangen. I det paa Fig. 25 viste Net kan man f. Eks. først udjævne den Stjerne, som er skraveret skraat, dernæst den Figur, som er skraveret lodret, og endelig den Figur, som er skraveret vandret, hvorefter man fordeler Fejlene paa de maalte Vinkler til Bestemmelse af Punkterne P_1 og P_2 ved Fremskæring. Ved en saadan Inddeling i Grupper bør man dog for Nettets Stabilitets Skyld sørge for, at hver ny Gruppe støtter sig til mindst 3 Punkter i den foregaaende.

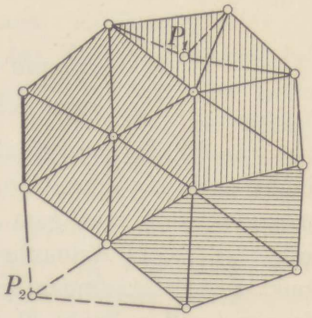


Fig. 25.

Ved Fejludjævning i Trekantnet anvender man som oftest fordelagtigst Korrelatudjævning; Elementudjævning bør dog f. Eks. anvendes, naar et Punkt er bestemt ved Fremskæring fra flere end 3 givne Punkter (saml. Fejlteorien Ekspl. 38).

Ved Retningsudjævning faas, foruden de sædvanlige, følgende Regningskontroller:

1) Summen af Koefficienterne i hver Betingelsesligning bliver Nul, og
2) for hver Station bliver $[pv] = 0$, eller, forsaavidt alle Vægtene er lige store, $[v] = 0$.

ad. 1) Dette følger af, at hver Vinkelrettelse i Betingelsesligningerne erstattes af en Differens mellem to Retningsrettelser, saa at hver af Koefficienterne til Vinkelrettelserne indgaar to Gange med modsat Fortegn (Rettelsen paa Vinkel $o_1 = (1 . 2)$ bliver saaledes $v_2 - v_1$, og den indgaar i den første Betingelsesligning ved Leddet $\frac{df_1}{do_1}(v_2 - v_1)$; (se Fejlteorien Side 67)).

ad. 2) Adderes nemlig de Korrelatligninger, som hører til samme Station, efter at hver enkelt er multipliceret med sit p, faas

$$[pv] = [a]\,k_1 + [b]\,k_2 + \ldots\ldots,$$

hvor Klammestørrelserne betegner de partielle Summer, og hver af Størrelserne $[a]$, $[b]$ . . . bliver i Henhold til ovenstaaende lig Nul; thi hver Gang der i en Betingelsesligning indgaar en af Stationens Retninger, maa der ogsaa indgaa en anden med samme Koefficient men modsat Fortegn.

Azimuth- og Sideberegningen samt Koordinatberegningen.

29. Er Triangulationen knyttet til forud bestemte Punkter, vil Azimuth for mindst én af disse Punkters Forbindelseslinjer være given, og man gaar da ud fra denne ved Beregningen af de øvrige Siders Azimuther, som udføres efter Reglerne i § 2 Punkt 8. Er Maalingen selvstændig (lokal), og har ikke særlige Hensyn (se § 2 Punkt 8) gjort sig gældende ved Valget af Absciseaksens Retning, bestemmer man en Sides Hældning mod Nordlinjen ved Hjælp af en Boussole eller paa anden Maade (et Par Metoder findes angivne i den matematiske Geografi); som Regel kræves dog ikke særlig stor Nøjagtighed ved denne Bestemmelse.

Man kan beregne Azimutherne til Trekantnettets Sider i en saadan Orden, at man kun kommer til at udføre Additioner, idet man af en Sides Azimuth bestandig faar en andens ved Addition af en Vinkel, medens man faar Azimuth for PQ af Azimuth for QP ved Addition af 180^0. Er saaledes i Fig. 20 Azimuth for GA given, kan Azimuth beregnes for Siderne i følgende Orden: GA, GB, GC, GD, GE, GF, $\underline{GA}$, AG, AF, FA, $\underline{FG}$, FE, EF, $\underline{EG}$ o. s. v., hvorved man faar Kontrol hver Gang, man kommer til en af de understregede Sider.

Som Regel har man ikke Brug for selve Sidernes Længder men kun for Logaritmerne til disse, som bekvemt kan beregnes som vist i Ekspl. 7. Fra Udjævningsberegningen kender man log sin af de rettede Værdier for de Vinkler, som indgaar i Sinusligningerne; de øvrige log sin vil i Reglen indgaa baade i Kolonne 4 og 5, saa at en Fejl i Opslaget ikke vil opdages, idet man trods den vil komme tilbage til den rigtige Værdi for Udgangssiden eller faa den rigtige Værdi for den Side, man slutter med. En saadan Fejl vil imidlertid røbe sig ved den efterfølgende Koordinatberegning. Ogsaa Azimuthberegningen er vist i Eksempel 7.

Koordinatberegningen udføres efter Formel (5) i § 2, idet man beregner Koordinattilvæksterne fra Punkt til Punkt, hvilket bør

gøres saaledes, at man benytter sig af den Kontrol paa Beregningen, som kan faas derved, at man beregner hvert Punkt mindst ad to Veje. Ved denne Dobbeltberegning kan der dog paa Grund af Regningsunøjagtigheden komme en ringe Uoverensstemmelse mellem de ad forskellige Veje beregnede Koordinater til samme Punkt, hvorfor man tager Middeltallet.

Med Hensyn til Logaritmeregningens Nøjagtighed skal her kun bemærkes, at man, eftersom Sigterne er over eller under 500 Meter, i Reglen bør benytte en 6-cifret eller en 5-cifret Tabel. (Se iøvrigt herom under Polygonmaaling § 6, Punkt 55).

Triangulationsberegningen, der omfatter Udjævnings-, Azimuth- og Side- samt Koordinatberegningen m. m., udføres paa Papir i Folioformat, som sammensys og pagineres. Den ledsages af et Triangulationskort, som udstyres ganske som Triangulationsplanen (se Side 20—21) og udarbejdes enten paa et Kort eller paa kvadreret Papir. Punkterne angives med en lille Kreds med en Trekant udenom. Et Triangulationskort findes paa Plan 2.

Koordinatberegningen kan opstilles som i Eksempel 8.

Flere Grundlinjer.

30. Ved Opmaalingen af et Terræn, som har stor Udstrækning i en enkelt Retning, saaledes som det f. Eks. er Tilfældet ved Opmaalingen af et Vandløbs Omgivelser (Vandløbsreguleringer), en Banestrækning o. l., vil det hyppig være hensigtsmæssigt at støtte Opmaalingen til et Trekantnet, bestaaende af en Række Trekanter, i hvilke man maaler alle tre Vinkler, hvorhos man skaffer sig en yderligere Kontrol saavel paa Maalingen som paa Sideberegningen ved at maale en Grundlinje i hver Ende af Nettet. Er der n Trekanter, opstaar der da, dersom man ikke vil tillægge de maalte Grundlinjer Rettelser, n Vinkelsumsligninger og 1 Basisligning; en saa besværlig Udjævningsberegning vil næppe staa i Forhold til den derved opnaaede Nøjagtighedsforøgelse, hvorfor man sædvanlig indskrænker sig til at fordele Vinkelsumsfejlen i hver Trekant for sig og benytte den ene af de maalte Grundlinjer til Kontrol.

En fuldtud rationel Fejludjævning, ved hvilken man tillægger saavel de maalte Linjer som de maalte Vinkler (Retninger) Rettelser, udføres saa at sige aldrig, da det er overordentlig vanskeligt at fastslaa de uensartede Vinkel- og Længdemaalingers relative Vægt.

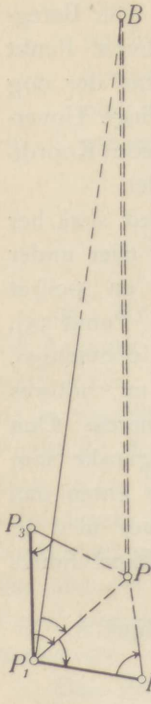


Fig. 26.

Utilgængelige Punkters Nedførelse.

31. Havde det ved den videre Maaling været ønskeligt at benytte et utilgængeligt Punkt P (se Fig. 26), kan man erstatte dette af et nyt Jordpunkt, P_1, i Nærheden (det utilgængelige Punkts Nedførelse[1]).

Dette vælges da saaledes, at man fra det kan sigte til et andet Hovedpunkt, B, hvis Koordinater kendes, til P og til et andet Jordpunkt P_2, der maa ligge saaledes, at Afstanden $P_1 P_2$ kan maales nøjagtigt, og at man fra P_2 kan sigte til P.

Idet man nu i $\triangle P P_1 P_2$ maaler Vinklerne P_1 og P_2, kan PP_1 beregnes af $P_1 P_2$. Af de givne Koordinater til P og B udledes ved Formlerne (6) og (7) φ_P^B og s_P^B, hvorefter man i $\triangle PBP_1$ kender Siderne PP_1 og PB samt Vinkel P_1, og man har da

$$\sin B = \frac{PP_1}{PB} \sin P_1; \quad \angle P = 180^0 - (P_1 + B)$$

og endelig

$$\varphi_P^{P_1} = \varphi_P^B + \angle BPP_1.$$

Da nu Azimuth for og Længde af PP_1 kendes, kan P_1's Koordinater beregnes ved Formlerne (5).

Kontrol paa P_1's Bestemmelse kan faas

1) dersom man fra P_1 kan sigte til et tredje Hovedpunkt A, idet man da skal have

$$\varphi_{P_1}^A = \varphi_{P_1}^B + \angle BP_1A, \text{ hvor } \varphi_{P_1}^B = \varphi_P^B + \angle B,$$

eller 2) dersom man ogsaa fra P_2 kan sigte til B, idet man da beregner baade P_1 og P_2's Koordinater, hvorefter Afstanden $P_1 P_2$ beregnet af disse skal stemme med den maalte Værdi for denne Afstand.

Under alle Omstændigheder kan man faa Kontrol paa PP_1's Længde ved ogsaa at maale Linjen $P_1 P_3$ og Vinklerne P_1 og P_3 i $\triangle PP_1P_3$.

Ekscentriske Vinkelmaalinger.

32. Er man nødt til at benytte en ekscentrisk Opstilling af Theodoliten, maa man for senere at kunne reducere den maalte

[1]) Udtrykket er laant fra det tyske »Herunterbringen eines Punktes«.

Sats (se Instrumentlæren), bestemme Centreringselementerne; disse er (se Fig. 27) Vinklen u, som Retningen fra den ekscentriske Standplads C_1 til den rette Standplads C danner med Retning fra C_1 til et Hovedpunkt P, og Afstanden $CC_1 = e$, af hvilke den sidste maa bestemmes med den højeste Grad af Nøjagtighed.

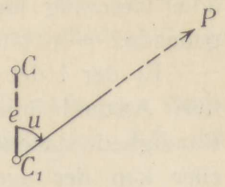


Fig. 27.

Ofte kan man maale baade e og u direkte. Dette er f. Eks. Tilfældet, naar man af en eller anden Grund ikke kan faa de Sigter, man skal have, fra et Jordpunkt, medens man kan faa Opstilling ganske tæt ved dette.

Kan man bestemme u men ikke e direkte, saaledes som det f. Eks. er Tilfældet, naar man benytter en ekscentrisk Standplads tæt ved Siden af et utilgængeligt Punkt (Spir, Møllespids e. l.), maa man, som vist i Fig. 28, bestemme e indirekte ved Maaling af Afstanden mellem C_1 og et andet Punkt C_2 og Vinklerne C_1 og C_2 i $\triangle CC_1C_2$.

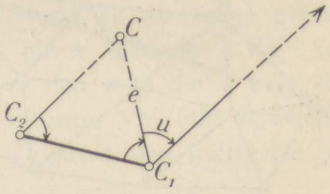


Fig. 28.

Kan man hverken bestemme u eller e direkte, som f. Eks. naar man benytter en ekscentrisk Opstilling i et Klanghul paa et Kirketaarn, maa man, som vist i Fig. 29, maale en lille Grundlinje AB, og idet man da tillige maaler de 5 med fulde Buer betegnede Vinkler i Firkant $ABCC_1$, kan $CC_1 = e$ beregnes med Kontrol (nemlig baade gennem $\triangle BCC_1$ og $\triangle ACC_1$), medens man til Bestemmelse af u har

$$u = AC_1P - AC_1C.$$

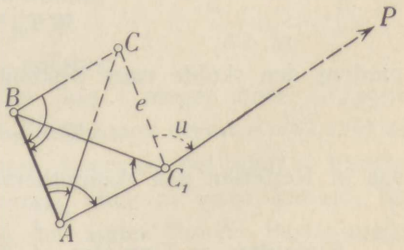


Fig. 29.

Indordning af Punktsystemer mellem Hovedpunkter af højere Orden.

33. Er der i et Terræn givet nogle Hovedpunkter af højere Orden med indbyrdes store Afstande, og skal der mellem disse ved Triangulation indordnes et Punktsystem af lavere Orden, altsaa med indbyrdes smaa Afstande, til Grundlag for en økonomisk Opmaaling af Terrænet, da bliver Fremgangsmaaden

ikke væsentlig forskellig fra den, som er fremstillet i det foregaaende.

Er der i det overordnede System kun givet 2 Hovedpunkter, hvis Afstand imidlertid er saa stor, at man ikke med det til Raadighed staaende Instrument kan tage Sigte imellem dem, eller kan der overhovedet ikke faas Sigte imellem dem, løses Opgaven — som vel ikke i egentlig Forstand er en Indordning, da de to Hovedpunkter kun giver en Afstand og en Azimuth — saaledes:

Man vælger sit Punktsystem saaledes (Fig. 30), at det indeholder de givne Hovedpunkter, udfører Udjævningsberegningen paa sædvanlig Maade (samlet eller gruppevis), skaffer sig for en af Siderne, f. Eks. BA (ved Maaling paa et topografisk Kort), nogenlunde rigtige Værdier for Azimuth og Længde og beregner, udgaaende fra disse, Azimuther og Længder for de til Bestemmelse af Koordinattilvæksterne fra B til C nødvendige Sider.

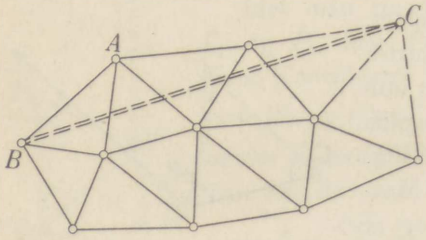


Fig. 30.

Lad os antage, at disse Tilvækster bliver Δy og Δx, medens de af de givne Koordinater for B og C beregnede er $\Delta' y$ og $\Delta' x$, da bestemmes BC's Azimuth ved

$$\operatorname{tg} \varphi_B^C = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

medens den skulde være bestemt ved

$$\operatorname{tg} \varphi'^C_B = \frac{\Delta' y}{\Delta' x},$$

saa at Rettelsen paa Azimutherne bliver

$$\varphi'^C_B - \varphi_B^C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Endvidere er Længden af BC bestemt ved

$$s_B^C = \frac{\Delta x}{\cos \varphi_B^C} = \frac{\Delta y}{\sin \varphi_B^C},$$

medens den skulde være bestemt ved

$$s'^C_B = \frac{\Delta' x}{\cos \varphi'^C_B} = \frac{\Delta' y}{\sin \varphi'^C_B},$$

saa at Rettelsen paa log Siderne bliver

$$\log s'^C_B - \log s_B^C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Regningen gennemføres nu med de rettede Værdier for Azi-

muther og log Sider; og man vil da, idet man gaar ud fra de for B givne Koordinater (indenfor Regningsnøjagtigheden) faa de for C givne Koordinater.

Havde man fra B kunnet faa Sigte til C, vilde man straks (indenfor Maalingsnøjagtigheden) have Azimuth for BA, bestemt ved:

$$\varphi_B^A = \varphi_B^C + \angle\, CBA.$$

34. Er der i det overordnede System givet flere end to Punkter, maa man sørge for, at disse i Forbindelse med det underordnede Systems Punkter kommer til at danne et Net af gunstigt formede Trekanter, og at Forbindelseslinjerne mellem de givne Hovedpunkter indgaar i Nettet som Trekantsider. For at forstaa Betydningen af dette sidste tænker vi os, at Punkterne D, E, F og G skal bestemmes i Forhold til de forud givne Punkter A, B og C; denne Opgave bliver med det i Fig. 31 viste Trekantnet meget simpel, medens den med det i Fig. 32 viste Trekantnet kun kan løses ad indirekte Vej (paa lignende Maade som den i Fig. 24 angivne Opgave) ved Indførelse af Vinklen x og Eliminering af denne.

Nettets Form bliver noget forskellig, eftersom man fastlægger hele det underordnede Net paa en Gang, eller man ved Fastlæggelsen af dette gaar punktvis frem; vi vil betegne de to Fremgangsmaader som 1) Netindordning og 2) Punktindordning.

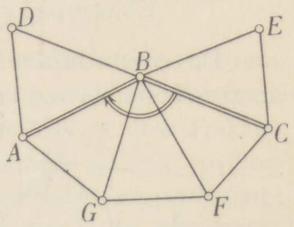


Fig. 31.

Ved Netindordningen udføres hele Udjævningen under et eller dog i meget store Grupper.

Ved Punktindordningen bestemmes derimod ét Punkt ad Gangen, det første ved de Sigter, hvormed det staar i Forbindelse med de givne Hovedpunkter; efter at være fastlagt, betragtes det da som fejlfrit. Til det andet Punkts Bestemmelse kan benyttes de Sigter, hvormed det staar i Forbindelse med de givne Hovedpunkter eller det først fastlagte Punkt o. s. v.

Punktindordningen kræver, sammenlignet med Netindordningen, ofte et noget større Antal maalte Vinkler (Sigter), ɔ: et større Arbejde i Marken, og, da Betingelsesligningernes Antal kun er afhængigt af de

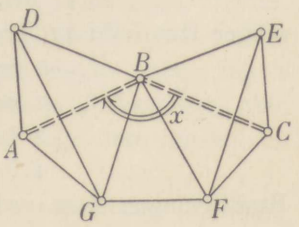


Fig. 32.

maalte Stykkers Antal, et større Antal Betingelsesligninger; men Udjævningsarbejdet simplificeres til Gengæld meget betydeligt derved, at Udjævningen udføres i smaa Grupper, saa at man kun faar faa Normalligninger at løse ved hver Gruppes Udjævning, og Punktindordningen har derhos den Fordel, at man aldrig behøver at gaa videre med Beregningen, før det enkelte Punkt er rigtig fastlagt.

Netindordningen kræver i Modsætning hertil et mindre Markarbejde og et stort samlet Udjævningsarbejde.

Netindordningen er selvfølgelig den mest rationelle.

Ved Udjævningen maa man, uden Hensyn til hvilken Fremgangsmaade man vælger, for at bestemme Betingelsesligningernes Antal i Overensstemmelse med, hvad herom er anført i Punkt 26, medtage saamange givne Vinkler og Sider i det overordnede Net, som behøves til de givne Punkters relative Bestemmelse. (Hvilke Stykker man medtager, kan forsaavidt faa Indflydelse paa Betingelsesligningerne, som enkelte Sideligninger kan komme til at optræde som Basisligninger).

Eksempel paa Netindordning (Fig. 33).

De overordnede Hovedpunkter A, C og E er givne; de antages bestemte ved Længderne af AC og CE samt Vinklen ECA.

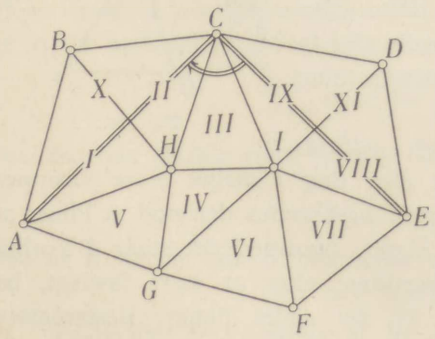


Fig. 33.

Betingelsesligninger:

$$m - 2p + 4 =$$
$$29 - 18 + 4 = 15.$$

Vinkelsumsligninger:

$$l_1 - p_1 + 1 =$$
$$19 - 9 + 1 = 11.$$

Sideligninger:

$$l - 2p + 3 =$$
$$19 - 18 + 3 = 4.$$

Basisligninger:

$$s - 1 = 2 - 1 = 1.$$

De 11 Vinkelsumsligninger faas i de 11 Trekanter I—XI, de 4 Sinusligninger er

1 om Punkt H (Stjerne),
1 om Punkt I (Stjerne),
1 i Firkant $ICDE$ og
1 i Firkant $ABCH$.

Basisligningen faas ved at regne fra AC gennem CH og CI til CE.

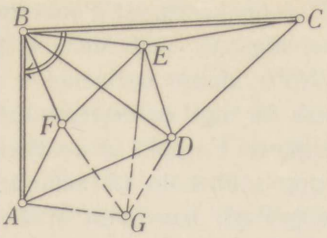


Fig. 34.

Eksempel paa Punktindordning.

De overordnede Hovedpunkter A, B og C (Fig. 34) er givne; de antages bestemte ved Længderne af AB og BC i Forbindelse med $\angle CBA$.

Betingelsesligninger: $m - 2p + 4 = 20 - 14 + 4 = 10$,
Vinkelsumsligninger: $l_1 - p_1 + 1 = 11 - 6 + 1 = 6$,
Sinusligninger: $l - 2p + 3 = 15 - 14 + 3 = 4$,
Basisligninger: $s - 1 = 2 - 1 = 1$.

Udjævningen udføres saaledes:

	Antal Vinkelsumsligninger.	Antal Basis- eller Sideligninger.
1) D bestemmes ved Sigter fra og til A, B og C	2	1
2) E — - — - - - B, C og D	2	1
3) F — - — - - - A, B og E	2	1
4) G — - — fra A, F, E og D	0	2
Ialt	6	5

Det vil af det fremsatte forstaas, at Punktindordningen fremkommer som den videst mulige Udstykning af Trekantnettet i Grupper. I Reglen vil det være mest praktisk at dele Trekantnettet i flere mindre Grupper, indeholdende 1, 2 eller flere Punkter; i Nettet i Fig. 33 kan f. Eks. den 1ste Gruppe omfatte Punkterne H og I, den 2den F og G, den 3die B og den 4de D.

Nogle almindelige Bemærkninger om Triangulationsplaner.

35. Planen bør være saa enkel som muligt, og man maa, allerede naar den foreløbige Plan lægges, vel overveje, hvorledes Udjævningen kan udføres; og, idet man tager Hensyn til, at denne ikke bliver besværligere end nødvendigt, maa man da sørge for, at hvert enkelt Punkt bliver godt bestemt, ɔ: at det bestemmes ved Sigter, som skærer hverandre under gode Vinkler, og som kan tages under gode ydre Forhold (god Belysning o. l.). Man træffer ofte en vis Tilbøjelighed til at benytte mange Sigter ved det enkelte Punkts Bestemmelse; dette er forkasteligt, man staar sig ved at anvende Arbejdet paa at tage flere Satser paa færre Sigter (saml. Fejlteorien Side 84—85).

Af allerstørste Vigtighed er det, at *man aldrig undlader at sætte nærliggende Punkter i bestemmende Forbindelse med*

hverandre. For at forstaa dette, vil vi tænke os, at Punkterne A og B er bestemte, som vist paa Fig. 35 ved Maaling af Vinklerne i Trekanterne ACD og BCD, altsaa uafhængigt af hinanden. Selv om nu A og B, hvert for sig, er bestemt med en fuldstændig tilfredsstillende Nøjagtighed i Forhold til de fjernt liggende Punkter C og D, kan de dog i Forhold til hinanden faa en betydelig Fejl; har hvert af dem en plan Middelfejl, m, kan Længden af AB faa en Fejl paa $3\sqrt{2}\,m$, hvilken Fejl let kan blive altfor stor paa denne korte Linje, saaledes at man ved den efterfølgende Maaling af en brudt Linje mellem A og B ikke faar denne til at stemme tilstrækkelig nøje. — Skal man have bestemt saadanne nærliggende Punkter, bør man i Overensstemmelse med de af den tyske General *Schreiber* angivne Regler først bestemme et Punkt, *Ledepunktet*, og dernæst de andre Punkter, *Følgepunkterne*, saaledes at Fejlene i disses Beliggenhed i Forhold til Ledepunktet bliver saa smaa som muligt. Samtlige Følgepunkter maa derfor bestemmes fra samme Hovedpunkter og saaledes, at man i disse direkte maaler Vinklerne mellem Retningerne til Ledepunktet og Følgepunktet; derimod behøver Ledepunktet ikke at være bestemt fra de samme Hovedpunkter, som benyttes til Følgepunkternes Bestemmelse. Er f. Eks. i Fig. 36 A et Ledepunkt og B et Følgepunkt, som skal bestemmes ved Sigter til og fra C og D samt A, da maales i C og D de med enkelte Buer betegnede Vinkler (ikke $\angle\, BDC$ og $\angle\, DCB$); og Udjævningen skal støttes til Fig. 36, saaledes at de givne Stykker er AC, AD og $\angle\, CAD$ (ikke til Fig. 37, hvor de givne Stykker er AD, CD og $\angle\, ADC$).

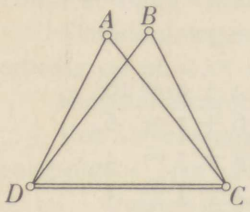


Fig. 35.

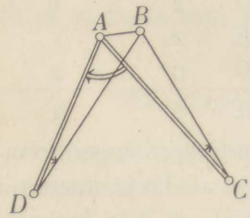


Fig. 36.

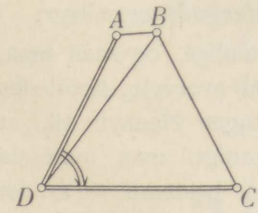


Fig. 37.

36. De utilgængelige Punkter, som der her i Landet kan være Tale om at anvende, er i Reglen Kirkespir (muligvis ogsaa Spir paa andre Bygninger), Kirkegavle, Møllespidser og Dampskorstene. Kirkespir, Fig. 38*a*, vil i Reglen være gode i alle Henseender, men det maa ved en Skitse i Planen eller Maalebogen

bestemt betegnes, hvilket Punkt, der er benyttet som Sigtepunkt. (Paa Fig. 38 er Sigtepunkterne betegnede ved Pile).

Kirkegavle er mindre gode, navnlig fordi det ikke altid er muligt at faa Sigte til dem fra alle Sider (de mest almindelige Former er viste i Fig. 38 *b* og *c*).

Møller er i Reglen gode, dersom de har den i Fig. 38 *d* viste Form, men det bør dog undersøges, om Møllespidsen er

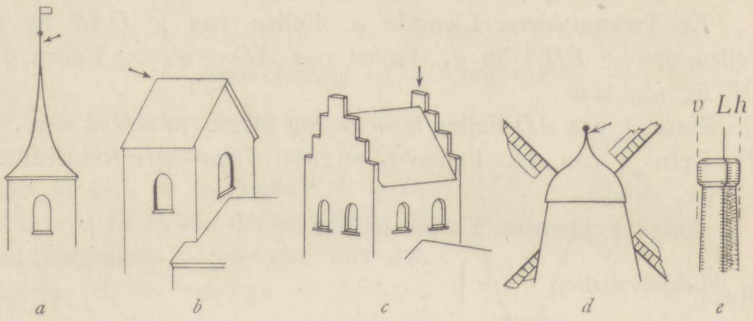


Fig. 38

centrisk anbragt paa Møllen, hvilket kan ske ved at tage Opstilling med en Theodolit i en lille Afstand fra Møllen, sigte paa dennes Spids og lade Møllehatten dreje rundt.

Dampskorstene er i Reglen saa brede foroven, at man ikke paa korte Afstande kan sigte nøjagtig til Midten; man bør derfor med første Kikkertstilling i Satsen sigte paa venstre Kant af Skorstenen (Fig. 38 *e*, Linjen *v*), med anden Kikkertstilling paa højre Kant (Linjen *h*); Middeltallet bliver da rigtigt. De fleste Skorstene (hyppig ogsaa Kirketaarne) er forsynede med Lynafleder (*L*), og det vil i Reglen, dersom Punktet kun har Betydning, saalænge Maalingerne varer, være langt bedre at benytte denne som Sigtepunkt; men skal Punktet bevares i Fremtiden, medfører dette den store Fare, at Lynaflederen kan blive flyttet.[1])

37. Et Spørgsmaal af praktisk Betydning er: Dersom man med et bestemt Instrument (Middelfejlen paa en maalt Vinkel *m*) skal udføre en Triangulation over et givet Terræn, opnaar man da størst Nøjagtighed ved at lade Trekantnettet bestaa af flere smaa eller af færre større Trekanter, ɔ: ved at anvende kortere eller længere Sigter?

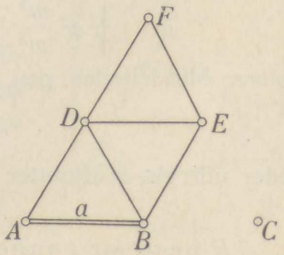


Fig. 39.

[1]) Kirkespir og Dampskorstene kan i stærk Blæst svaje indtil 1 dm.

Spørgsmaalet lader sig ikke besvare i Almindelighed; men vi vil søge at klare det ved at undersøge, om Punkt F (Fig. 39) er nøjagtigst bestemt fra to givne Punkter A og B gennem de tre ligesidede Trekanter ABD, BDE og EDF eller fra de givne Punkter A og C gennem en ligesidet Trekant ACF, idet det antages, at AB saavelsom AC er fejlfri givne, og at man i begge Tilfælde maaler alle tre Vinkler i Trekanterne og fordeler Vinkelsumsfejlene.

F bestemt gennem tre Trekanter.

Er Trekantsidens Længde a, Fejlen paa $\angle DAB$ lig u_1, Fejlen paa $\angle FDA$ lig u_2, Fejlen paa $AD = u'_1$ og Fejlen paa DF lig u'_2, faar

D i Retn. $\perp$ paa AD Fejlen $t_1 = au_1$ og i Retn. af AD $l_1 = u'_1$ og F i Retn. $\perp$ paa AF Fejlen $t_2 = 2au_1 + au_2$ og i Retn. af AF $l_2 = u'_1 + u'_2$.

Ifølge Fejlteorien Ekspl. 40 har

u_1 Middelværdien $m\sqrt{\frac{2}{3}}$,

u_2 — $m\sqrt{2}$ ($\angle FDA$ beregnet som en Sum af 3 Vinkler),

u'_1 — $a\frac{m}{\omega}\sqrt{\frac{2}{3}}$,

u'_2 — $a\frac{m}{\omega}\sqrt{2}$ (DF er beregnet gennem 3 Trekanter),

altsaa bliver Middelfejlen paa D

$$m_D = \sqrt{\frac{2}{3}a^2\frac{m^2}{\omega^2} + \frac{2}{3}a^2\frac{m^2}{\omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}a\frac{m}{\omega} \quad \ldots\ldots (17)$$

(dette Udtryk stemmer med Udtrykket (22) Side 53).

Idet dernæst Middelværdien af t_2 er

$$\sqrt{4a^2\frac{m^2}{\omega^2}\frac{2}{3} + a^2\frac{m^2}{\omega^2}2} = \frac{am}{\omega}\sqrt{\frac{14}{3}},$$

og Middelværdien af l_2 er

$$\sqrt{a^2\frac{m^2}{\omega^2}\frac{2}{3} + a^2\frac{m^2}{\omega^2}2} = \frac{am}{\omega}\sqrt{\frac{8}{3}},$$

bliver Middelfejlen paa F

$$m_F = \sqrt{\frac{22}{3}}a\frac{m}{\omega}$$

eller udtrykt i Minutter

$$m_F = 0.00079\,am. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

F bestemt gennem én Trekant.

Middelfejlen paa F bliver (saml. (17)) $\frac{4}{\sqrt{3}}a\frac{m}{\omega} = 0.00067\,am.$ (b)

Ved Sammenligning af (a) og (b) ses det, at F bliver noget nøjagtigere bestemt gennem en stor ligesidet end gennem 3 mindre ligesidede Trekanter. Man bør derfor — om muligt — først danne et Trekantnet, bestaaende af flere fjerntliggende Punkter[1]), mellem hvilke man derefter bestemmer flere nærmere ved hinanden liggende Punkter; herfor taler ogsaa, at man da i det første Net kan forøge Nøjagtigheden ved at maale flere Satser, og at denne Ordning giver den simpleste gruppevise Udjævning.

Fremskæring og Sideskæring

38. Fremskæring og Sideskæring frembyder — forsaavidt man kan faa Sigte mellem de to Punkter A og B, i Forhold til hvilke det ny Punkt P skal bestemmes — intet nyt, idet der kommer til at foreligge en Trekant ABP, i hvilken man kender φ_A^B og s_A^B samt 2 Vinkler.

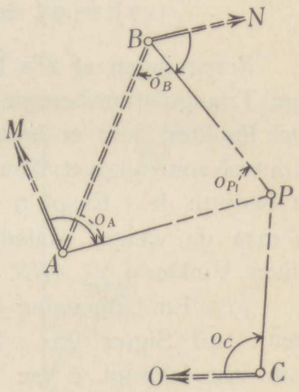


Fig. 40.

Kan man derimod ikke faa Sigte mellem A og B, beregnes φ_A^B og s_A^B af Formlerne (6) og (7) i § 2, hvorefter Opgaven løses saaledes:

Fremskæring. Man maaler (se Fig. 40) i A og B de Vinkler, som Retningerne til P danner med to andre fra de nævnte Punkter udgaaende Retninger AM og BN, hvis Azimuther man kender. Man har da

$$\varphi_A^P = \varphi_A^M + \angle MAP \quad \text{og} \quad \varphi_B^P = \varphi_B^N + \angle NBP$$

og derefter

$$\angle o_A = \varphi_A^P - \varphi_A^B \quad \text{og} \quad \angle o_B = \varphi_B^A - \varphi_B^P.$$

Sideskæring. $\angle o_A$ bestemmes som ved Fremskæring, medens $\angle o_P$ maales direkte (Fig. 41).

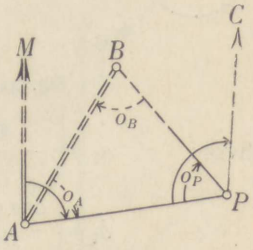


Fig. 41.

Man bør her — som altid — skaffe sig Kontrol mod grove Fejl saavel i Maalingen som i Beregningen ved et overskydende Sigte, selv om man ikke vil benytte dette til en Udjævning. Ved Fremskæring kan dette ske derved, at man i et

[1]) Dog maa man naturligvis aldrig tage saa lange Sigter, at man ikke kan indstille skarpt paa Signalet, ɔ: at m i væsentlig Grad forøges.

forud bestemt Punkt C, maaler den Vinkel OCP, som Retningen til P danner med Retningen til O, hvis Azimuth er bekendt. Efter at have beregnet P's Koordinater skal man da have

$$\varphi_C^P = \varphi_C^O + \angle\, OCP = \text{arc tg}\frac{y_P - y_C}{x_P - x_C},$$

hvilken Ligning skal være saa nøje tilfredsstillet, at man ikke kan befrygte grove Fejls Tilstedeværelse.

Ved Sideskæring kan man fra P tage Sigte til det forud bestemte Punkt C, og man skal da i Lighed med det foregaaende have

$$\varphi_P^C = \varphi_P^A + \angle APC = \text{arc tg}\frac{y_C - y_P}{x_C - x_P}.$$

Beregningen af P's Koordinater kan indgaa i den sædvanlige Triangulationsberegning; men da der jævnlig forekommer en Del Punkter, som er bestemte ved Frem- eller Sideskæring med Kontrol som angivet, kan det være praktisk til disse Beregninger at benytte de i Ekspl. 9 angivne Skemaer. Betegnelserne A og B maa da vælges saaledes, at $o_A = \angle BAP$ og $o_B = \angle PBA$ bliver Vinkler i $\triangle ABP$.

39. En Udjævning efter m. K. M. udføres, naar P er bestemt ved Sigter fra 3 Punkter, lettest ved Korrelatudjævning som vist i Ekspl. 6 (se ogsaa Fejlteorien Ekspl. 35). Er der taget Sigter fra flere Punkter, anvendes fordelagtigst (se Fejlteorien Ekspl. 38) Elementudjævning.

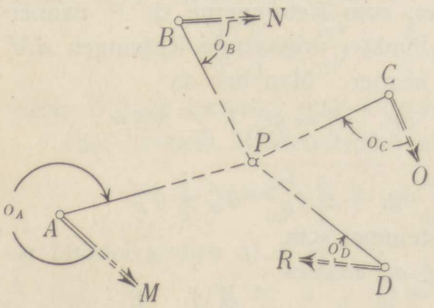


Fig. 42.

Fremgangsmaaden ved denne Udjævning er delvis vist i Fejlteorien, Ekspl. 31, i hvilket Betingelsesligningerne er dannede. Disse er (Fig. 42).

$$v_A = a_1 x + b_1 y + l_1$$
$$v_B = a_2 x + b_2 y + l_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

hvor: $a_1 = -\dfrac{\sin \varphi_A^{P_0}}{s_A^{P_0}}\omega$, $a_2 = -\dfrac{\sin \varphi_B^{P_0}}{s_B^{P_0}}\omega$ . . o. s. v.,

$$b_1 = \frac{\cos \varphi_A^{P_0}}{s_A^{P_0}}\omega,\ b_2 = \frac{\cos \varphi_B^{P_0}}{s_B^{P_0}}\omega \text{ . . o. s. v. og}$$

$$l_1 = \text{arc tg}\frac{Y_0 - y_A}{X_0 - x_A} - \varphi_A^M - o_A,\ l_2 = \text{arc tg}\frac{Y_0 - y_B}{X_0 - x_B} - \varphi_B^N - o_B$$

o. s. v.

De sandsynligste Værdier for y og x findes nu af Normalligningerne

$$[al] + [aa]\,x + [ab]\,y = 0$$
$$[bl] + [ab]\,x + [bb]\,y = 0$$

o. s. v.,

hvorefter de sandsynligste Værdier for P's Koordinater er

$$Y_0 + y \text{ og } X_0 + x.$$

Middelfejlene paa y og x findes umiddelbart af

$$m_y^2 = \frac{[aa]}{[aa]\,[bb] - [ab]^2}\,m^2 \text{ og } m_x^2 = \frac{[bb]}{[aa]\,[bb] - [ab]^2}\,m^2,$$

hvor m er Middelfejlen paa de maalte Vinkler.

Regningen kan udføres som i Ekspl. 10.

Af Udtrykket for AP_0's Azimuth

$$\varphi_A^{P_0} = \text{arc tg}\,\frac{Y_0 - y_A}{X_0 - x_A}$$

udledes ved Differentiation i Overensstemmelse med Fejlteoriens Ekspl. 31

$$d\varphi_A^{P_0} = -\frac{\sin\varphi_A^{P_0}}{s_A^{P_0}}\,\omega\,x + \frac{\cos\varphi_A^{P_0}}{s_A^{P_0}}\,\omega y, \quad (18)$$

og indsættes heri

$$\varphi_A^{P_0} = \varphi_{P_0}^A + 180^0,$$

faas

$$d\varphi_{P_0}^A = \frac{\sin\varphi_{P_0}^A}{s_{P_0}^A}\,\omega\,x - \frac{\cos\varphi_{P_0}^A}{s_{P_0}^A}\,\omega y \ldots (19)$$

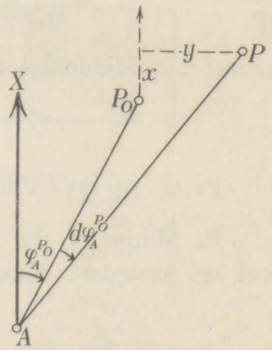


Fig. 43.

Formel (18) angiver altsaa den Tilvækst, som Azimuth for AP_0 faar, Formel (19) den Tilvækst, som Azimuth for P_0A faar, naar P_0's Koordinater faar Tilvæksterne y og x. Disse to Udtryk, som iøvrigt er identiske, knytter sig til Fig. 43.

Nøjagtigheden.

40. Fremskæring. Vi vil søge Middelfejlen paa C bestemt ved Fremskæring fra A og B, der betragtes som fejlfri. For Simpelheds Skyld lægger vi Begyndelsespunktet i B og Abscisseaksen ud ad BA. Med de paa Fig. 44 anvendte Betegnelser, og idet Koordinaterne til C kaldes y og x bliver da

$$a = c\,\frac{\sin A}{\sin(A+B)},\quad b = c\,\frac{\sin B}{\sin(A+B)}$$

og

$$y = c\,\frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)},\quad x = c\,\frac{\sin A \cos B}{\sin(A+B)}.$$

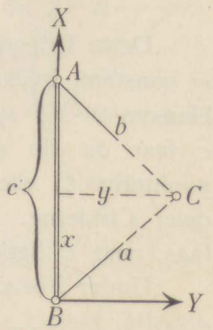


Fig. 44.

Vinklerne antages maalte med samme Nøjagtighed (Middelfejlen m). Middelfejlen paa y og x bestemmes da ved

$$m_y^2 = \left\{\left(\frac{dy}{dA}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dB}\right)^2\right\} m^2 \quad \text{og} \quad m_x^2 = \left\{\left(\frac{dx}{dA}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dB}\right)^2\right\} m^2.$$

Differentialkvotienterne er

$$\frac{dy}{dA} = c\frac{\sin^2 B}{\sin^2(A+B)} = \frac{b\sin B}{\sin(A+B)}, \quad \frac{dy}{dB} = \frac{a\sin A}{\sin(A+B)},$$

$$\frac{dx}{dA} = c\frac{\cos B\sin B}{\sin^2(A+B)} = \frac{b\cos B}{\sin(A+B)}, \quad \frac{dx}{dB} = -\frac{a\cos A}{\sin(A+B)};$$

altsaa bliver

$$\left.\begin{aligned} m_y^2 &= \frac{b^2\cos^2 B + a^2\cos^2 A}{\sin^2(A+B)}\, m^2 \\ \text{og} \qquad m_x^2 &= \frac{b^2\sin^2 B + a^2\sin^2 A}{\sin^2(A+B)}\, m^2, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

hvoraf C's Middelfejl

$$\boldsymbol{M^2 = m_y^2 + m_x^2 = \frac{a^2+b^2}{\sin^2(A+B)}\, m^2.}$$

Er m udtrykt i Vinkelmaal, maa i (20) i Stedet for m sættes $\frac{m}{\omega}$.

Et Minimum for M kan kun indtræffe, naar $a = b$; dette kan ses saaledes: Kaldes Medianen fra C for z (Fig. 45), faas af den skraverede Trekant

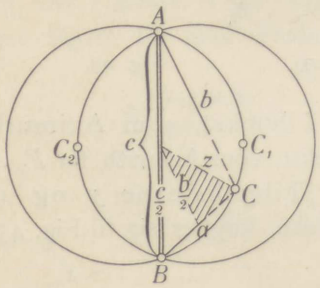


Fig. 45.

$$z^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2}\cos C$$

og af $\triangle ABC$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

altsaa

$$2z^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2,$$

hvorved (20) kan skrives

$$M^2 = \frac{4z^2 + c^2}{2\sin^2 C}\, m^2.$$

Dette Udtryk bliver Minimum samtidig med z, saalænge C er konstant, hvilket er Tilfældet, naar C ligger paa en af to med Hensyn til AB symmetrisk beliggende Cirkler gennem A og B; z faar da sin mindste Værdi, naar C ligger i et af Midtpunkterne C_1 eller C_2 af de mindste af de to Buer, hvori AB deler Cirklerne. Et absolut Minimum for M^2 kan altsaa kun faas, naar C ligger i den vinkelrette paa Midten af AB.

Under Forudsætning af, at $a = b$, reduceres (20) da til

$$M^2 = \frac{2a^2}{\sin^2 2A}\, m^2 = \frac{8a^6}{4a^2c^2 - c^4}\, m^2,$$

som bliver Minimum samtidig med

$$u = \frac{a^6}{4a^2 - c^2}, \text{ altsaa naar } \frac{du}{da} = \frac{6a^5(4a^2 - c^2) - 8a^7}{(4a^2 - c^2)^2} = 0,$$

o: $$a^2 = \frac{3}{8}c^2 \text{ eller } \cos A = \frac{c}{2a} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ hvoraf}$$

$$A = B = 35^0\,16' \text{ og } \boldsymbol{C = 109^0\,28'}.$$

Den nøjagtigste Bestemmelse faas altsaa, naar Sigterne er lige lange og skærer hinanden under en Vinkel paa $109^0\,28'$.

Af Formlerne (20) udledes eksempelvis følgende Tabel, gældende for lige lange Sigter:

Snitvinkel	m_y	m_x	M
60^0	0.82 mc	1.41 mc	1.63 mc
75^0	0.73 mc	0.95 mc	1.20 mc
90^0	0.71 mc	0.71 mc	1.00 mc
$109^0\,28'$	0.75 mc	0.53 mc	0.92 mc
130^0	0.92 mc	0.43 mc	1.02 mc
150^0	1.41 mc	0.38 mc	1.46 mc

Snitvinklen bør altsaa helst ligge mellem 75^0 og 130^0.

Af (20) ses, at alle Punkter, som ligger paa Halvcirklen over AB som Diameter, faar samme Middelfejl, mc.

41. Sideskæring. Vi vil søge Middelfejlen paa C bestemt ved Sideskæring i Forhold til A og B, der betragtes som fejlfri; idet Koordinatsystemet lægges som angivet i Punkt 40, og C's Koordinater kaldes y og x, bliver da (Fig. 46)

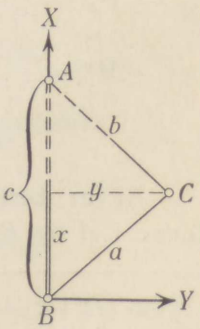


Fig. 46.

$$a = c\frac{\sin(B+C)}{\sin C}$$

altsaa: $$y = c\frac{\sin B \sin(B+C)}{\sin C} \text{ og } x = c\frac{\cos B \sin(B+C)}{\sin C}.$$

Vinklerne antages maalte med samme Nøjagtighed (Middelfejlen m). Middelfejlene paa y og x bestemmes da ved

$$m_y^2 = \left\{\left(\frac{dy}{dB}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dC}\right)^2\right\} m^2 \text{ og } m_x^2 = \left\{\left(\frac{dx}{dB}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dC}\right)^2\right\} m^2.$$

Differentialkvotienterne er

$$\frac{dy}{dB} = c\frac{\sin(2B+C)}{\sin C}, \quad \frac{dx}{dB} = c\frac{\cos(2B+C)}{\sin C},$$

som da[1])

$$c\sin(2B+C) = a\sin A - b\sin B$$

og

$$c\cos(2B+C) = -(a\cos A + b\cos B),$$

ændres til

$$\frac{dy}{dB} = \frac{a\sin A - b\sin B}{\sin C} \text{ og } \frac{dx}{dB} = -\frac{a\cos A + b\cos B}{\sin C},$$

og

$$\frac{dy}{dC} = -c\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = -b\frac{\sin B}{\sin C},$$

$$\frac{dx}{dC} = -c\frac{\cos B\sin B}{\sin^2 C} = -b\frac{\cos B}{\sin C}.$$

Herefter bliver

$$\left.\begin{aligned} m_y^2 &= \frac{a^2\sin^2 A + 2b^2\sin^2 B - 2ab\sin A\sin B}{\sin^2 C} m^2, \\ m_x^2 &= \frac{a^2\cos^2 A + 2b^2\cos^2 B + 2ab\cos A\cos B}{\sin^2 C} m^2, \\ \text{og}\quad \boldsymbol{M}^2 &= \frac{a^2 + 2b^2 - 2ab\cos C}{\sin^2 C} m^2, = \frac{\boldsymbol{b^2 + c^2}}{\boldsymbol{\sin^2 C}} \boldsymbol{m^2}, \\ &\text{(idet } a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2\text{)}. \end{aligned}\right\} (21)$$

Af (21) læres, at man bør maale den mindste af Vinklerne i A og B.

---

[1]) $c\sin(2B+C) = c\sin(B+(B+C)) = c\sin(A-B)$
$= (b\cos A + a\cos B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$
$= a\sin A\cos^2 B - b\sin B\cos^2 A$ } benyt $b\sin A = a\sin B$
$= a\sin A - a\sin A\sin^2 B - b\sin B + b\sin B\sin^2 A$
$= a\sin A - b\sin B.$
$c\cos(2B+C) = -c\cos(B+(B+C)) = -c\cos(A-B) =$
$-(b\cos A + a\cos B)(\cos A\cos B + \sin A\sin B)$
$= -(b\cos^2 A\cos B + a\cos A\cos^2 B + b\sin A\cos A\sin B + a\sin A\sin B\cos B)$
$= -(a\cos A + b\cos B).$ $(b\sin A = a\sin B)$

Ved Sammenligning af Udtrykkene for M ved Fremskæring (20) og ved Sideskæring (21) ses det, at C's Bestemmelse ved Fremsk. eller Sidesk. er nøjagtigst, eftersom $c \gtrless a$, ɔ: eftersom C ligger indenfor eller udenfor en Cirkel om B som Centrum med Radius c. (Fig. 47).

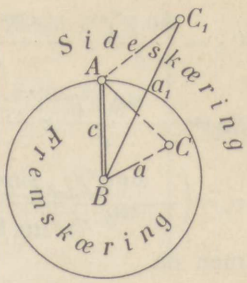


Fig. 47.

42. Maaling af alle tre Vinkler i Trekanten. Vi vil søge Middelfejlen paa C, bestemt i Forhold til A og B, der betragtes som fejlfri, ved Maaling af alle tre Vinkler i Trekant ABC, idet Koordinatsystemet (Fig. 48) lægges som angivet i Punkterne 40 og 41. De sandsynligste Værdier for Koordinaterne til C kan bestemmes ved Elementudjævning. Til Elementer vælger vi Koordinaterne til C, som vi kalder Y og X; Y_0 og X_0 (svarende til Punkt C_0) betegner de foreløbige Koordinater, beregnede af de maalte Vinkler A og B, medens de sandsynligste Rettelser til disse er y og x. Fundamentalligningerne bliver da

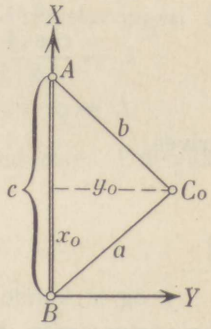


Fig. 48.

$$\angle A = 180^0 - \varphi_A^C,\ \angle B = \varphi_B^C \text{ og } \angle C = \varphi_A^C - \varphi_B^C,$$

hvor

$$\varphi_A^C = \text{arc tg}\,\frac{Y - y_A}{X - x_A} \text{ og } \varphi_B^C = \text{arc tg}\,\frac{Y - y_B}{X - x_B}.$$

Omdannelsen til Betingelsesligninger sker saaledes:

$$A + v_A = 180^0 - \varphi_A^{C_0} - d\varphi_A^{C_0},$$
$$B + v_B = \varphi_B^{C_0} + d\varphi_B^{C_0}$$

og
$$C + v_C = \varphi_A^{C_0} - \varphi_B^{C_0} + d\varphi_A^{C_0} - d\varphi_B^{C_0},$$

hvor

$$\varphi_A^{C_0} = \text{arc tg}\,\frac{Y_0 - y_A}{X_0 - x_A} \text{ og } \varphi_B^{C_0} = \text{arc tg}\,\frac{Y_0 - y_B}{X_0 - x_B},$$

medens $d\varphi_A^{C_0}$ og $d\varphi_B^{C_0}$ faas af Formel (18), idet vi dog for Kortheds Skyld lader vA, vB og vC være udtrykte i rene Tal, saa at Faktoren ω bortfalder.

Betingelsesligningerne antager altsaa Formen

$$v_A = \frac{\sin \varphi_A^{C_0}}{b} x - \frac{\cos \varphi_A^{C_0}}{b} y + 180^0 - \varphi_A^{C_0} - A,$$

$$v_B = -\frac{\sin \varphi_B^{C_0}}{a} x + \frac{\cos \varphi_B^{C_0}}{a} y + \varphi_B^{C_0} - B \text{ og}$$

$$v_C = \left(-\frac{\sin \varphi_A^{C_0}}{b} + \frac{\sin \varphi_B^{C_0}}{a}\right) x + \left(\frac{\cos \varphi_A^{C_0}}{b} - \frac{\cos \varphi_B^{C_0}}{a}\right) y + \varphi_A^{C_0} - \varphi_B^{C_0} - C;$$

men da

$$\varphi_A^{C_0} = 180^0 - A \text{ og } \varphi_B^{C_0} = B,$$

kan de, idet vi sætter

$$a_1 = \frac{\sin A}{b}, \quad a_2 = -\frac{\sin B}{a}, \quad a_3 = -\frac{\sin A}{b} + \frac{\sin B}{a},$$

$$b_1 = \frac{\cos A}{b}, \quad b_2 = \frac{\cos B}{a}, \quad b_3 = -\left(\frac{\cos A}{b} + \frac{\cos B}{a}\right),$$

$$l_1 = 0, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 180^0 - (A + B + C),$$

skrives

$$v_A = a_1 x + b_1 y + l_1,$$
$$v_B = a_2 x + b_2 y + l_2 \text{ og}$$
$$v_C = a_3 x + b_3 y + l_3.$$

y og x kunde nu findes paa sædvanlig Maade af Normalligningerne; men dette har ingen Interesse her. Derimod findes Middelfejlene paa y og x af Formlerne (se Fejlteorien Formlerne (61) og (62)):

$$m_y^2 = \frac{[aa]}{[aa][bb] - [ab]^2} m^2 \text{ og } m_x^2 = \frac{[bb]}{[aa][bb] - [ab]^2} m^2,$$

hvor m er Middelfejlen paa de maalte Vinkler udtrykt i rene Tal. Klammestørrelserne har her følgende Værdier

$$[aa] = 2\left(\frac{\sin^2 A}{b^2} + \frac{\sin^2 B}{a^2} - \frac{\sin A \sin B}{ab}\right),$$

$$[bb] = 2\left(\frac{\cos^2 A}{b^2} + \frac{\cos^2 B}{a^2} + \frac{\cos A \cos B}{ab}\right) \text{ og}$$

$$[ab] = 2\frac{\sin A \cos A}{b^2} - 2\frac{\sin B \cos B}{a^2} - \frac{\cos A \sin B}{ab} + \frac{\sin A \cos B}{ab};$$

af disse dannes ved en simpel Regning Udtrykket

$$[aa][bb] - [ab]^2 = 3\left(\frac{\sin A \cos B}{ab} + \frac{\cos A \sin B}{ab}\right)^2 = 3\frac{\sin^2(A+B)}{a^2 b^2}$$

$$= 3\frac{\sin^2 C}{a^2 b^2}.$$

Herefter bliver

$$\left.\begin{aligned} m_y^2 &= \frac{2}{3}\,\frac{a^2\sin^2 A + b^2\sin^2 B - ab\sin A\sin B}{\sin^2 C}\,m^2, \\ m_x^2 &= \frac{2}{3}\,\frac{a^2\cos^2 A + b^2\cos^2 B + ab\cos A\cos B}{\sin^2 C}\,m^2 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

og

$$\left.\boldsymbol{M^2 = \frac{2}{3}\,\frac{a^2+b^2+ab\cos(A+B)}{\sin^2 C}\,m^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3\sin^2 C}\,m^2,}\right\}$$

idet $a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C = c^2$.

(22) viser, at alle Punkter, som ligger paa Halvcirklen over AB som Diameter, har samme Middelfejl.

Et Minimum for M kan kun indtræffe, naar $a = b$, hvilket kan ses paa tilsvarende Maade som for Fremskæringen (se Punkt 40), idet man faar

$$M^2 = \frac{4z^2 + 3c^2}{6\sin^2 C}\,m^2.$$

Under Forudsætningen af, at $a = b$, reduceres Udtrykket (22) da til

$$M^2 = \frac{2a^2 + c^2}{3\sin^2 C}\,m^2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

her bliver

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{c^2}{4a^2}, \text{ altsaa } \cos^2\frac{C}{2} = 1 - \frac{c^2}{4a^2} \text{ og}$$

$$\sin^2 C = \frac{c^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{4a^2}\right),$$

hvilket indsat i (a) giver

$$M^2 = \frac{4}{3c^2}\cdot\frac{2a^6 + a^4c^2}{4a^2 - c^2}\,m^2,$$

som bliver Minimum samtidig med

$$u = \frac{2a^6 + a^4c^2}{4a^2 - c^2},$$

o: for

$$\frac{du}{da} = \frac{4a^3(8a^4 - a^2c^2 - c^4)}{(4a^2 - c^2)^2} = 0$$

eller

$$a^2 = \frac{c^2}{16}(1 \pm \sqrt{33}),$$

hvilket, idet $\sin\frac{C}{2} = \frac{c}{2a}$, giver $\frac{C}{2} = 50^0\,22'$,

$$\boldsymbol{C = 100^0\,44'.}$$

Den nøjagtigste Bestemmelse af C i Forhold til A og B, naar alle 3 Vinkler i Trekanten maales, finder alt-

saa Sted, naar Sigterne fra A og B er lige lange og skærer hinanden under en Vinkel paa $100^0\,44'$.

Af Formlerne (22) udledes eksempelvis, gældende for den ligebenede Trekant, hosstaaende Tabel

$\angle C$	m_Y	m_X	M
$100^0\,44'$	$0.34\,mc$	$0.72\,mc$	$0.80\,mc$
90^0	$0.41\,mc$	$0.71\,mc$	$0.83\,mc$
60^0	$0.82\,mc$	$0.82\,mc$	$1.16\,mc$

Dersom man virkelig gav alle Trekanterne i Nettet den her som den nøjagtigste angivne Form ($a = b$ og $C = 100^0\,44'$) vilde hver efterfølgende Trekant blive mindre end den foregaaende; de bestemte Punkter vilde da efterhaanden komme til at ligge tættere og tættere ved hverandre, medens man søger at faa dem jævnt fordelte.

Som Følge heraf maa man i Praksis tilstræbe at gøre Trekanterne ligesidede, uagtet Middelfejlen paa hvert nyt Punkt i Forhold til de to foregaaende herved bliver $1.16\,mc$, medens den for den gunstigste Form kun er $0.8\,mc$.

Af Formlerne (20), (21) og (22) kan man danne sig en Forestilling om den Nøjagtighed, som kan opnaas ved Triangulation; men det maa erindres, at Nøjagtigheden i Reglen bliver større paa Grund af Udjævningen.

For en Triangulation, ved hvilken Vinklerne maales med et Halvminutsinstrument med 2—3 Satser, kan Middelfejlen paa det enkelte Punkt erfaringmæssig anslaas til 0.2 Alen.

Tilbageskæring.

43. Tilbageskæringen gaar ud paa at bestemme et Punkt P ved Sigter fra dette til 3 givne Punkter A, B og C. Denne Opgave er først løst af Hollænderen *Snellius* (1614), senere af Franskmanden *Pothenot*, efter hvem den benævnes Pothenots Problem. Metoden har den Fordel, at man kun behøver Opstilling i selve Punktet og altsaa kan bestemme sin Standplads i Forhold til 3 utilgængelige Punkter; den egner sig derfor til Supplering af de paa anden Maade bestemte Hovedpunkter. Kun i det Tilfælde, at P ligger paa Cirklen (den rette Linje) gennem A, B og C, bliver Opgaven ubestemt.

Blandt de forskellige Maader, paa hvilke P's Koordinater kan beregnes, skal her omtales to.

1. Fremgangsmaade. Med de paa Fig. 49 angivne Betegnelser (o, x_1, x_2 og $o_1 + o_2$ er de fire Vinkler i Firkanten $ABCP$) haves til Bestemmelse af de ubekendte, x_1, x_2 og s

$$x_1 + x_2 + o_1 + o_2 + o = 360^0 \quad (\alpha)$$

og

$$s = \frac{s_1}{\sin o_1} \sin x_1 = \frac{s_2}{\sin o_2} \sin x_2, \quad (\beta)$$

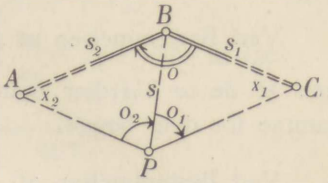


Fig. 49.

s_1, s_2, φ_B^A og φ_B^C kan, dersom de ikke kendes, beregnes af Formlerne (6) og (7), hvorefter

$$o = \varphi_B^A - \varphi_B^C.$$

For at løse Ligningerne (α) og (β) sætter man

$$\frac{s_1}{\sin o_1} = n_1 \text{ og } \frac{s_2}{\sin o_2} = n_2,$$

hvorved (β) reduceres til

$$s = n_1 \sin x_1 = n_2 \sin x_2; \ldots\ldots\ldots (23)$$

n_1 og n_2 er altsaa Diametrene i Cirklerne henholdsvis gennem BCP og ABP.

Sætter man endvidere Tallet $\frac{n_1}{n_2} = \operatorname{tg} z$, giver (23)

$$\frac{\sin x_1}{\sin x_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} z},$$

$$\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 + \sin x_2} = \frac{1 - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} z},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x_1 - x_2)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x_1 + x_2)} = \operatorname{tg}(45^0 - z),$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \operatorname{tg}(45^0 - z),$$

$$\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) = \operatorname{arc\,tg} \left\{ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \operatorname{tg}(45^0 - z) \right\} \ldots (24)$$

Hertil faas af (α)

$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = 180^0 - (o_1 + o_2 + o); \ldots\ldots (25)$$

ved Addition og Subtraktion af de to sidste Ligninger findes x_1 og x_2, hvorefter

$$\varphi_B^P = \varphi_B^C + 180^0 - (o_1 + x_1) = \varphi_B^A - 180 + (o_2 + x_2),$$

medens s bestemmes af (23).

Endelig er

$$y_P = y_B + s \sin \varphi_B^P \text{ og } x_P = x_B + s \cos \varphi_B^P.$$

Ved Bestemmelsen af z af $\operatorname{tg} z = \frac{n_1}{n_2}$ er det ligegyldigt, hvilken af de to Værdier man vælger, da $\operatorname{tg}(45^0 - z)$ bliver den samme for dem begge.

Ved Bestemmelsen af $\frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ af (24) maa man benytte den Værdi, som gør baade x_1 og x_2 til Trekantvinkler (ɔ: $< 180^0$), hvorved tillige s bliver positiv.

Som alt nævnt er Opgaven ubestemt, naar P ligger paa Cirklen gennem A, B og C, hvilket stemmer med, at i dette Tilfælde bliver $n_1 = n_2$ og $\operatorname{tg} z = 45^0$, samtidig med at $x_1 + x_2 = 180^0$, hvorved $\frac{1}{2}(x_1 - x_2) = \text{arc tg}(\infty \cdot 0)$, altsaa ubestemt. Ligger specielt P, A, B og C paa en ret Linje, bliver $o_1 = o_2 = 180^0$ eller 0^0, $\sin o_1 = \sin o_2 = 0$, $n_1 = n_2 = \infty$ og altsaa $\operatorname{tg} z = \frac{\infty}{\infty}$.

44. 2. Fremgangsmaade. Et af de tre givne Punkter, f. Eks. A (Fig. 50) vælges til Udgangspunkt, og for Kortheds Skyld betegner vi

Azimuth for AB ved φ_1 og AB ved s_1
— - AC - φ_2 - AC - s_2
— - AP - φ - AP - s,

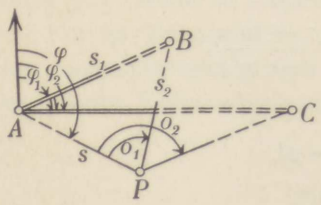


Fig. 50.

Vinklerne APB og APC, ɔ: de Vinkler, som PA skal drejes i pos. Omløbsretning for at komme til at gaa gennem henholdsvis s_1's og s_2's andet Endepunkt, betegnes o_1 og o_2. φ_1, φ_2, s_1 og s_2 beregnes, dersom de ikke kendes fra den foregaaende Beregning, af Formlerne (6) og (7).

Det gælder nu om at beregne s og φ, hvorefter man har

$$y_P = y_A + s \sin \varphi \text{ og } x_P = x_A + s \cos \varphi.$$

Til Bestemmelse af s og φ faas af Trekanterne ABP og ACP

$$s = \frac{s_1}{\sin o_1} \sin(\varphi + (o_1 - \varphi_1)) = \frac{s_2}{\sin o_2} \sin(\varphi + (o_2 - \varphi_2)),$$

som, naar man sætter

$$o_1 - \varphi_1 = P_1,\ o_2 - \varphi_2 = P_2,\ \frac{s_1}{\sin o_1} = n_1 \text{ og } \frac{s_2}{\sin o_2} = n_2,$$

reduceres til

$$s = n_1 \sin(\varphi + P_1) = n_2 \sin(\varphi + P_2). \ldots\ldots (26)$$

Idet man endvidere sætter Tallet $\frac{n_1}{n_2} = \operatorname{tg} z$, faas af (26)

$$\frac{\sin(\varphi+P_1)}{\sin(\varphi+P_2)} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} z},$$

hvoraf

$$\frac{\sin(\varphi+P_1) - \sin(\varphi+P_2)}{\sin(\varphi+P_1) + \sin(\varphi+P_2)} = \frac{1 - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} z},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(P_1 - P_2)}{\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{1}{2}(P_1+P_2)\right)} = \operatorname{tg}(45^0 - z),$$

$$\operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{1}{2}(P_1+P_2)\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(P_1 - P_2)}{\operatorname{tg}(45^0 - z)},$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(P_1 - P_2)}{\operatorname{tg}(45^0 - z)} - \frac{1}{2}(P_1 - P_2). \ldots\ldots (27)$$

Sluttelig faas s af (26) ved Indsættelse af den fundne Værdi for φ. Ved Bestemmelsen af z af $\operatorname{tg} z = \frac{n_1}{n_2}$ er det ligegyldigt, hvilken af de to Værdier man vælger, da $\operatorname{tg}(45^0 - z)$ bliver den samme for dem begge.

Da s skal være positiv, maa man ved Beregningen af (27) tage den Værdi for φ, som giver $\sin(\varphi + P_1)$ samme Fortegn som n_1 og dermed $\sin(\varphi + P_2)$ samme Fortegn som n_2.

n_1 og n_2 betegner de numeriske Værdier for Diametrene til de omskrevne Cirkler henholdsvis om $\triangle APB$ og $\triangle APC$ med positivt eller negativt Fortegn, eftersom o'erne er Vinkler i de nævnte Trekanter eller Eksplementvinkler til disse Trekanters Vinkler. Som alt nævnt er Opgaven ubestemt, naar P ligger paa Cirklen gennem A, B og C, hvilket stemmer med, at i dette Tilfælde bliver $n_1 = \pm n_2$; $z = \pm 45^0$ og

$$P_1 = \begin{cases} P_2 \\ P_2 + 180^0 \end{cases} \text{ og } \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{1}{2}(P_1+P_2)\right) = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases}$$

Ligger specielt A, B, C og P paa en ret Linje, bliver $o_1 = o_2 = 180^0$ eller 0^0, $\sin o_1 = \sin o_2 = 0$; $n_1 = \pm\, n_2 = \pm\, \infty$, altsaa $\operatorname{tg} z = \pm\, \frac{\infty}{\infty}$.

45. Af det i det foregaaende fremsatte fremgaar umiddelbart, at Bestemmelsen af Punkt P bliver usikker, naar dette ligger i Nærheden af Cirklen om Trekant ABC[1]), hvilket viser sig i Beregningen ved 1. Fremgangsmaade derved, at $o + o_1 + o_2$ ligger i Nærheden af 180^0 og ved 2. Fremgangsmaade derved, at P_1 ligger i Nærheden af P_2 eller $P_2 + 180^0$. Man sikrer sig bedst mod at faa P til at ligge paa eller i Nærheden af den nævnte Cirkel, naar det ligger inden i de givne Punkters Trekant eller saaledes, at $\angle o$ er $> 180^0$.

Regningens Udførelse ved de angivne Fremgangsmaader er vist i Eksemplerne 11 og 12.

Man bør her — som altid — skaffe sig Kontrol mod grove Fejl saavel i Maalingen som i Beregningen ved et overskydende Sigte, selv om man ikke vil benytte dette til Udjævning. Har man fra P, foruden de til dette Punkts Bestemmelse nødvendige Sigter til A, B og C, et Sigte til Punkt D, kræver Kontrollen, at Ligningen

$$\varphi_P^D = \varphi_P^C + \angle\, CPD = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_D - y_P}{x_D - x_P}$$

er saa nøje tilfredsstillet, at man ikke kan befrygte grove Fejls Tilstedeværelse.

Er der i P til Bestemmelse af dette Punkt taget Sigter til $n + 1$ Punkter, A, B, C o. s. v., vil de sandsynligste Værdier for P's Koordinater kunne bestemmes ved Elementudjævning. Til Elementer vælger vi Koordinaterne til P, som vi kalder Y og X; Y_0 og X_0 betegner de foreløbige Koordinater svarende til P_0, beregnede af 3 af Sigterne fra P, medens de sandsynligste Rettelser til Koordinaterne er y og x. Der fremkommer da n Fundamentalligninger af Formen (Fig. 51).

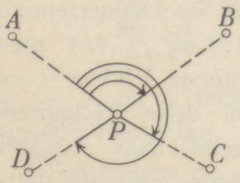


Fig. 51.

$$\angle\, APB = \varphi_P^B - \varphi_P^A,$$
$$\angle\, APC = \varphi_P^C - \varphi_P^A,$$
o. s. v.

[1]) Den bedste Bestemmelse af P opnaas i Reglen ved to korte Sigter, skærende hinanden under en Vinkel paa $60^0 - 120^0$ og et langt Sigte. Se F. D. Gauss: »Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, 2. Aufl. Side 86—87, 1893.

Disse omdannes ved Taylors Formel til Betingelsesligningerne

$$\angle AP_0B + d(\angle AP_0B) = \varphi^B_{P_0} + d\varphi^B_{P_0} - (\varphi^A_{P_0} + d\varphi^A_{P_0}),$$
$$\angle AP_0C + d(\angle AP_0C) = \varphi^C_{P_0} + d\varphi^C_{P_0} - (\varphi^A_{P_0} + d\varphi^A_{P_0}),$$

o. s. v.,

hvor

$$\varphi^A_{P_0} = \text{arc tg}\frac{y_A - Y_0}{x_A - X_0},\quad \varphi^B_{P_0} = \text{arc tg}\frac{y_B - Y_0}{x_B - X_0}\text{ o. s. v.}$$

Betingelsesligningerne omformes ved Anvendelse af Formel (19) til

$$\left.\begin{aligned} d(\angle AP_0B) &= \left(\frac{\sin\varphi^B_{P_0}}{s^B_{P_0}} - \frac{\sin\varphi^A_{P_0}}{s^A_{P_0}}\right)\omega x \\ &\quad -\left(\frac{\cos\varphi^B_{P_0}}{s^B_{P_0}} - \frac{\cos\varphi^A_{P_0}}{s^A_{P_0}}\right)\omega y + \varphi^B_{P_0} - \varphi^A_{P_0} - \angle AP_0B, \\ d(\angle AP_0C) &= \left(\frac{\sin\varphi^C_{P_0}}{s^C_{P_0}} - \frac{\sin\varphi^A_{P_0}}{s^A_{P_0}}\right)\omega x \\ &\quad -\left(\frac{\cos\varphi^C_{P_0}}{s^C_{P_0}} - \frac{\cos\varphi^A_{P_0}}{s^A_{P_0}}\right)\omega y + \varphi^C_{P_0} - \varphi^A_{P_0} - \angle AP_0C, \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

o. s. v.,

eller med de sædvanlige Betegnelser

$$v_1 = a_1x + b_1y + l_1$$
$$v_2 = a_2x + b_2y + l_2$$

o. s. v.

De sandsynligste Værdier for P's Koordinater findes nu ganske som i Punkt 39.

Regningen med tilhørende Kontrol opstilles som vist i Eksempel 13.

Hansens Problem.

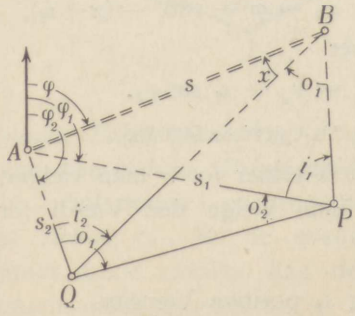


Fig. 52.

46. Hansens Problem gaar ud paa en Bestemmelse af to Punkter P og Q (se Fig. 52) i Forhold til to givne Punkter A og B ved Vinkelmaaling, idet man i P tager Sigte til Q, A og B og Q til A, B og P.

Beregningen, som har en Del fælles med Tilbageskæringsberegningen, kan udføres saaledes, som

nu skal vises. Med de paa Fig. 52 anvendte Betegnelser er s og φ bekendte (de kan under alle Omstændigheder beregnes af A og B's Koordinater), medens o_1, o_2, i_1 og i_2 er de maalte Vinkler; til Bestemmelse af de fire ubekendte o, x, s_1 og s_2 haves da

$$o = 180^0 - o_1 - o_2 - i_1 + i_2, \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$s_1 = s\frac{\sin(o+x)}{\sin i_1} \quad \ldots (\beta) \qquad s_2 = s\frac{\sin x}{\sin i_2} \quad \ldots (\gamma)$$

og

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sin o_1}{\sin o_2} \quad \ldots (\delta)$$

Af de tre sidste Udtryk faas

$$\frac{\sin(o+x)}{\sin x} = \frac{\sin o_1 \sin i_1}{\sin o_2 \sin i_2},$$

og idet man nu sætter

$$\frac{\sin o_1 \sin i_1}{\sin o_2 \sin i_2} = \frac{1}{\operatorname{tg} z},$$

faas

$$\frac{\sin(o+x)}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

og

$$\frac{\sin(o+x) - \sin x}{\sin(o+x) + \sin x} = \frac{1 - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} z}$$

eller

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{o}{2}}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{o}{2}\right)} = \operatorname{tg}(45^0 - z),$$

hvoraf

$$x = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{o}{2}}{\operatorname{tg}(45^0 - z)} - \frac{o}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

s_1 og s_2 kan nu bestemmes af (β) og (γ).

Nu er

$$\varphi_1 = \varphi + 180^0 - (x + o + i_1) \text{ og } \varphi_2 = \varphi + 180^0 - (x + i_2),$$

hvorefter de søgte Koordinater bliver

$$y_P = y_A + s_1 \sin\varphi_1, \quad y_Q = y_A + s_2 \sin\varphi_2,$$
$$x_P = x_A + s_1 \cos\varphi_1, \quad x_Q = x_A + s_2 \cos\varphi_2.$$

Det er ligegyldigt, hvilken af de to Værdier for z man vælger, og ved Bestemmelsen af x maa man vælge den Værdi for

$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{o}{2}}{\operatorname{tg}(45^0 - z)}$, som giver s_1 og s_2 positive Værdier.

Opgaven bliver ubestemt:

1) Naar $\operatorname{tg} z = \frac{\sin o_2 \sin i_2}{\sin o_1 \sin i_1} = \frac{0}{0}$, altsaa ogsaa $\operatorname{tg}(45^0 - z)$ ubestemt. De forskellige sammenhørende Vinkelværdier (0^0 eller 180^0), for hvilke $\operatorname{tg} z$ bliver ubestemt, viser, at dette Tilfælde indtræffer, naar A, P og Q (spec. A, B, P og Q) ligger i en ret Linje, eller naar det ene eller begge de søgte Punkter ligger uendelig fjernt.

2) Naar

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{o}{2}}{\operatorname{tg}(45^0 - z)} = \begin{cases} \frac{0}{0}, \text{ d: for } o = 0^0, \text{ altsaa ifølge } (\varepsilon)\ z = 45^0, \\ \frac{\infty}{\infty}, \text{ d: for } o = 180^0, \text{ — — - } z = -45^0. \end{cases}$$

Punkterne B, P og Q ligger da i en ret Linje.

Man maa altsaa vogte sig for saadanne Tilfælde, hvor P ligger for nær ved BQ eller Q ved AP, og PQ bør ikke blive for lang eller for kort i Forhold til AB.

Prøve paa Maalingens og Beregningens Rigtighed kan faas, naar man fra P eller Q sigter til et tredje givet Punkt, eller naar man bestemmer et nyt Punkt fra P og Q og fra dette nye Punkt tager Sigte til et andet givet Punkt.

Beregningen kan opstilles som i Ekspl. 14.

§ 6. Polygonmaaling.

47. Den *brudte Linje* 0, 1, 2, 3, . . . n (Fig. 53) er bestemt, naar man kender Længden af Siderne s_0, s_1, s_2, . . . s_{n-1} og Størrelsen af Vinklerne o_1, o_2, o_3 . . . o_{n-1}, hvor Siden, eller, som den kaldes, *Polygonsiden*, s_p (øverste Indeks udeladt), for-

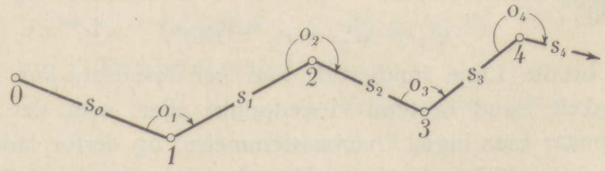


Fig. 53.

binder *Polygonpunkterne* p og $p+1$, og hvor Vinklen, eller, som den kaldes, *Polygonvinklen*, o_p, er den Vinkel, som Siden s_{p-1} skal drejes i positiv Omløbsretning om p for at komme til at dække s_p. Er de ovenfor nævnte Sider og Vinkler i en brudt Linje maalte, kan denne altsaa konstrueres, idet man efterhaanden afsætter s_0, o_1, s_1, o_2 o. s. v.; men en saadan Kon-

struktion vil i Almindelighed ikke være tilstrækkelig nøjagtig, da de uundgaaelige Fejl ved Afsætningen af Sider og Vinkler vil ophobe sig fra Punkt til Punkt. Skal den brudte Linjes Polygonpunkter tjene som Hovedpunkter, beregner man derfor deres Koordinater.

Skal den brudte Linje ikke henføres til noget forud givet Koordinatsystem, kan man vilkaarlig vælge Koordinaterne (y_0 og x_0) til det første Punkt og Azimuth for Siden s_0; de øvrige Polygonpunkters Koordinater kan da beregnes af Formlerne i § 2. Først beregnes Azimutherne af Formel (4), som giver

$$\varphi_{p+1} = \varphi_p + o_{p+1} \pm 180^0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

hvor φ_p (med Udeladelse af øverste Indeks) er Azimuth for Retningen fra p til $p+1$; og dernæst beregnes efterhaanden Koordinaterne fra Punkt til Punkt ved Formel (5), som giver

$$y_{p+1} = y_p + s_p \sin \varphi_p \quad \text{og} \quad x_{p+1} = x_p + s_p \cos \varphi_p. \quad \ldots \quad (31)$$

Skal den brudte Linje henføres til et givet Koordinatsystem, vil man altid lade den udgaa fra et forud paa en eller anden Maade (f. Eks. ved Triangulation) bestemt Hovedpunkt, hvis Koordinater altsaa er bekendte, og fra hvilket der udgaar en Linje, hvis Azimuth er bekendt. Er Hovedpunktet A (Fig. 54) og Azimuth for AM givne, kan Azimuth for $A-1$ beregnes, naar man foruden de øvrige Polygonvinkler maaler $\angle o_A$, idet man da har

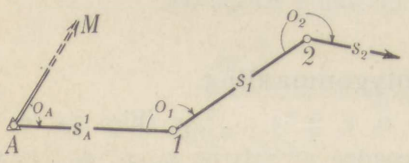


Fig. 54.

$$\varphi_A^1 = \varphi_A^M + o_A,$$

eller, for at udtrykke det analogt med de øvrige Azimuthberegninger,

$$\varphi_A^1 = \varphi_M^A + o_A \pm 180^0.$$

Er den brudte Linje imidlertid, som her forudsat, kun knyttet til et enkelt forud bestemt Hovedpunkt eller, som det kaldes, *blind*, opnaar man ingen Overensstemmelse, og derfor lader man den i Praksis altid forbinde to Hovedpunkter.

Har man da i en saadan brudt Linje (Fig. 55) maalt alle Polygonvinkler og desuden én Vinkel i hvert Tilknytningspunkt, altsaa $n+2$ Vinkler, samt alle $n+1$ Sider, ialt $2n+3$ Stykker, faar man 3 Overbestemmelser, idet der til Bestemmelsen af de n Punkters Koordinater kun behøves $2n$ maalte Stykker. De tre Overbestemmelser kan udtrykkes ved 3 Betingelsesligninger, som dannes saaledes:

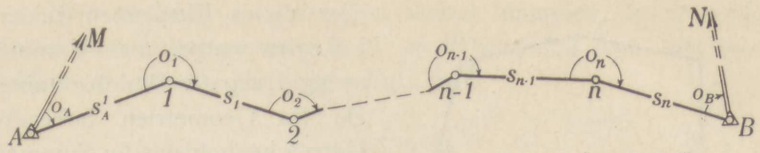


Fig. 55.

$$\begin{aligned}
\text{Af}\quad \varphi_A^1 &= \varphi_M^A + o_A \,(\pm)\, 180^0,\\
\varphi_1 &= \varphi_A^1 + o_1 \,(\pm)\, 180^0,\\
\varphi_2 &= \varphi_1 + o_2 \,(\pm)\, 180^0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_n &= \varphi_{n-1} + o_n \,(\pm)\, 180^0\\
\text{og}\quad \varphi_B^N &= \varphi_n + o_B \,(\pm)\, 180^0
\end{aligned}$$

faas ved Addition $\varphi_B^N = \varphi_M^A + [o] - (n+2)\,180^0$

eller den 1. Betingelsesligning:

$$[o] = \varphi_B^N - \varphi_M^A + (n+2)\,180^0. \ldots\ldots\ldots (32)$$

Hertil skal imidlertid bemærkes, at ved Additionen er stadig benyttet nederste Fortegn foran de 180^0; men da man lige saa vel kan benytte øverste, og da tilmed φ_B^N og φ_M^A kan forandres ved Addition eller Subtraktion af 360^0, kan $[o]$ i (32) afvige 360^0 (eller et Multiplum heraf) fra den angivne Værdi.

$$\begin{aligned}
\text{Af}\quad y_1 &= y_A + s_A^1 \sin\varphi_A^1, & x_1 &= x_A + s_A^1 \cos\varphi_A^1\\
y_2 &= y_1 + s_1 \sin\varphi_1, & x_2 &= x_1 + s_1 \cos\varphi_1,\\
y_3 &= y_2 + s_2 \sin\varphi_2, & x_3 &= x_2 + s_2 \cos\varphi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= y_{n-1} + s_{n-1} \sin\varphi_{n-1} & x_n &= x_{n-1} + s_{n-1} \cos\varphi_{n-1}\\
\text{og}\quad y_B &= y_n + s_n \sin\varphi_n & x_B &= x_n + s_n \cos\varphi_n
\end{aligned}$$

faas: $y_B = y_A + [s \sin\varphi]$ og $x_B = x_A + [s \cos\varphi]$

eller 2. og 3. Betingelsesligning:

$$[s \sin\varphi] = y_B - y_A \quad \text{og} \quad [s \cos\varphi] = x_B - x_A. \ldots (33)$$

Dersom den brudte Linje føres tilbage til sit Udgangspunkt, opstaar en *lukket Polygon*. Eftersom Polygonpunkternes Nummerering foregaar i negativ eller i positiv Omløbsretning (Fig. 56 eller 57), bliver Polygonvinklerne lig Polygonens Vinkler

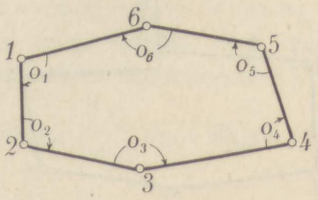


Fig. 56.

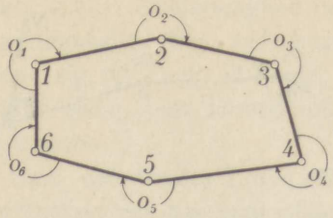


Fig. 57.

eller disses Eksplementvinkler. I Reglen vælger man Nummerering i negativ Omløbsretning. De fra Geometrien bekendte Udtryk henholdsvis for Summen af Vinklerne og for Summen af Vinklernes Eksplementvinkler i en n Kant

$$[o] = (n-2)\,180^0 \quad \text{og} \quad [o] = [n+2]\,180^0$$

bliver da identiske med (32) (dog med en Forskel paa 360^0); thi lukkes den brudte Linje i Fig. 55, derved at man bringer B til at falde sammen med A, og altsaa N med 1, M med n og o_B med o_A, opstaar der en $n+1$ Kant (Fig. 58), og den 1. Betingelsesligning dannes da saaledes:

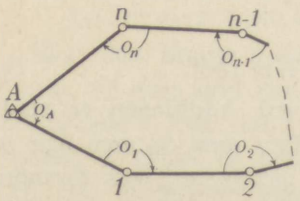


Fig. 58.

$$\begin{aligned}
\text{Af}\quad \varphi_1 &= \varphi'_A + o_1 (\pm)\,180^0,\\
\varphi_2 &= \varphi_1 + o_2 (\pm)\,180^0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_n &= \varphi_{n-1} + o_n (\pm)\,180^0\\
\varphi'_A &= \varphi_n + o_A (\pm)\,180^0,\\
\hline
\text{faas}\quad 0 &= [o] - (n+1)\,180^0,\\
\text{eller}\quad [o] &= (n+1)\,180^0,
\end{aligned}$$

medens Summen af Vinklerne i en $n+1$ Kant efter Geometrien skulde være

$$[o] = (n-1)\,180^0,$$

altsaa 360^0 mindre.

2. og 3. Betingelsesligning (33) reduceres til $[s \sin \varphi] = 0$ og $[s \cos \varphi] = 0$, da Koordinaterne til Begyndelses- og Slutningspunktet her bliver de samme.

For den lukkede Polygon, n Kant, er altsaa Betingelsesligningerne

$$[o] = (n-2)\,180^0, \quad [s \sin \varphi] = 0 \quad \text{og} \quad [s \cos \varphi] = 0. \qquad (34)$$

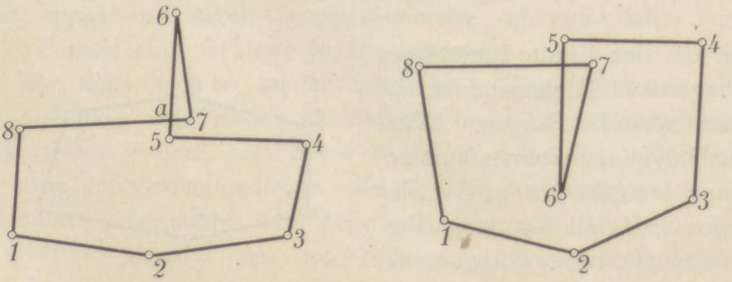


Fig. 59.

Naar to Sider i en Polygon skærer hinanden, forøges eller formindskes Vinkelsummen med 360^0, saaledes som vist henholdsvis i 1. og 2. Tegning i Fig. 59.

Uundgaaelige Fejl ved Polygonmaalingen, Beregningens Udførelse.

48. Paa Grund af, at de ved Maalingen fundne Værdier for Sider og Vinkler er behæftede med uundgaaelige Fejl, og — forsaavidt man ikke har med lukkede Polygoner at gøre — tillige paa Grund af *Netfejlen*, ɔ: Fejlen i det foreliggende Net, altsaa i de givne Azimuther og Koordinater, bliver Betingelsesligningerne ikke tilfredsstillede. I Almindelighed fordeler man først Vinkelsumsfejlen,

$$\beta = \varphi_B^N - \varphi_M^A + (n+2)\ 180^0 - [o]$$

paa alle de til Bestemmelse af den brudte Linje maalte Vinkler (altsaa ogsaa Vinklerne i de to Tilknytningspunkter), idet man, dersom der er r maalte Vinkler, og Vinkelsumsfejlen er β Minutter, giver hver Vinkel en Rettelse paa $\frac{\beta}{r}$ Minut, saaledes at man dog sørger for, at Vinklerne ikke derved bliver angivne med flere Decimaler af Minutter, end der ellers anvendes (som Regel angives kun Tiendedele af Minutter). Hvilke Vinkler, der da faar de største Rettelser, maa anses for ligegyldigt, skøndt der nok teoretisk set kunde være Anledning til at tillægge Vinkler med lange Ben større Vægt og altsaa mindre Rettelser end Vinkler med korte Ben.

Efter Vinkelsumsfejlens Fordeling beregnes samtlige Azimuther efter (30), og Beregningen kontroleres derved, at man, naar man gaar ud fra φ_M^A, skal faa den rigtige Værdi for φ_B^N; af de fundne Azimuther og de maalte Sider beregnes samtlige Koordinattilvækster sædvanlig med Logaritmer. Dog kan man ogsaa benytte Koordinattabeller, af hvilke navnlig: F. G. Gauss: »Polygonometrische Tafeln« kan anbefales. Fejlene paa Summerne af Ordinat- og Abscissetilvæksterne henholdsvis

$$dy = y_B - y_A - [s \sin \varphi] \text{ og } dx = x_B - x_A - [s \cos \varphi]$$

fordeles paa de enkelte Tilvækster proportionalt med disses Størrelse; er Summen af alle Ordinattilvæksternes numeriske Værdier $\{\Delta y\}$, bliver Rettelsen paa Δy_p altsaa $\frac{\Delta y_p}{\{\Delta y\}}\, dy$; i Ekspl. 16 er saaledes Rettelsen paa Δy_{32} bestemt ved $\frac{-164}{350}$ 0.20 m. $=$ — 0.09 m.

Denne Fordeling udføres bekvemt med Regnestokken; iøvrigt sørger man for, at Koordinaterne (Tilvæksterne) ikke bliver angivne med flere Decimaler af Længdeenheden, end der ellers anvendes, (sædvanlig Centimeter).

Størrelsen

$$d = \sqrt{dy^2 + dx^2}$$

kaldes den brudte Linjes (Polygonens) *Gab*; den angiver Afstanden mellem det Punkt B (Fig. 60), hvori den brudte Linjes Slutningspunkt skulde ligge, og det Punkt B', hvori det ved Beregningen kommer til at ligge.

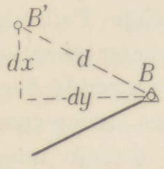


Fig. 60.

Af de rettede Koordinattilvækster beregnes Punkternes Koordinater, idet man ved den brudte Linje gaar ud fra de givne Koordinater til dens Begyndelsespunkt, medens man ved den lukkede Polygon (den lokale Maaling) kan vælge Koordinaterne til et af Polygonpunkterne vilkaarligt; man sørger da i Reglen for, at alle Polygonpunkterne kommer til at ligge i 1. Kvadrant.

Beregningen opstilles som i Ekspl. 15, der viser en lukket Polygon, og i Ekspl. 16 og 17, der viser forskellige brudte Linjer.

Benyttes Koordinattabeller, kan Beregningen opstilles som i Ekspl. 18. Alle de nævnte Eksempler hidrører fra Polygonnettet i Plan 1. Koordinaterne maa i Reglen angives i Centimeter; kræves der kun mindre Nøjagtighed, kan man nøjes med halve Decimeter.

Polygonmaalingens Fejlteori.

49. Vinkelsumsfejlens og Gabets tilladelige Størrelse beror paa de anvendte Instrumenters Godhed, Forholdene, under hvilke Maalingen er udført, Maalerens Dygtighed og for de brudte Linjers Vedkommende tillige paa, hvor nøjagtig den fundamentale Maaling (Triangulation eller Polygonmaaling) er udført; derfor kan der heller ikke angives bestemte Grænser for Vinkelsumsfejlens eller Gabets Størrelse; men der kan dog opstilles Grænser, som gælder under almindelige Forhold, o: saadanne Forhold, hvor ikke særlige Omstændigheder virker ugunstigt (ugunstige Omstændigheder kan f. Eks. være blød Grund, langt Græs, stærkt Fald, uheldig Opstilling af Theodoliten, korte Polygonsider o. l.).

Vinkelsumsfejlen hidrører ved lukkede Polygoner alene fra Fejlene i de maalte Vinkler, medens den ved brudte Linjer tillige hidrører fra Netfejlen (Fejlen i de givne Azimuther). Er

Antallet af Vinkler i en lukket Polygon eller en brudt Linje (herunder indbefattet Vinklerne i den brudte Linjes Tilknytningspunkter) n, og betegnes Middelfejlen paa en maalt Vinkel ved m og Middelværdien for den relative Fejl i de to givne Azimuther ved m_1, bliver Middelfejlen paa Vinkelsummen i en lukket Polygon ifølge Fejlteoriens Formel (22)

$$m\sqrt{n}$$

og i en brudt Linje

$$\sqrt{nm^2 + m_1^2}.$$

Forsaavidt Vinklerne er maalte med én Sats med et Halvminutsinstrument, kan m sættes til $^1/_3$ Minut. m_1's Værdi er afhængig af den fundamentale Maalings Godhed, og den maa ordentligvis antages at være mindre, naar den brudte Linje er ført mellem triangulerede Hovedpunkter, end naar den er ført mellem Polygonpunkter; for ikke at gøre Sagen for indviklet, vil vi imidlertid ikke gøre Forskel paa disse to Tilfælde men sætte $m_1 = {}^1/_2$ Minut.

Idet Fejlgrænsen i Overensstemmelse med Fejlteorien § 18 sættes til 3 Gange Middelfejlen, bliver *Fejlgrænsen for Vinkelsummen*

i en lukket Polygon: $3\,m\sqrt{n} = \sqrt{n}$ *Minutter* og . . . . . (35)

i en brudt Linje: $3\sqrt{n\,m^2 + m_1^2} = \sqrt{n+2}$ *Minutter*[1]) . . (36)

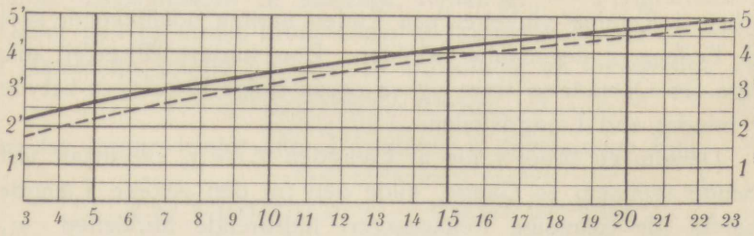


Fig. 61.

I hosstaaende Fig. 61 er Antallet af Polygonpunkter (for den brudte Linje inkl. Tilknytningspunkterne) afsat som Abscisser, medens Ordinaterne til den fuldt optrukne og den punkterede Kurve angiver Vinkelsummens Fejlgrænse henholdsvis for en brudt Linje og en lukket Polygon.

I Praksis kan man saavel for den brudte Linje som for den lukkede Polygon benytte Udtrykket $\sqrt{n+2}$ Minutter for nævnte

[1]) egentlig: $\sqrt{n + 2.25}$ *Minutter.*

Fejlgrænse, saa at man lader den fuldt optrukne Kurve gælde i begge Tilfælde.

Gabets Fremkomst skyldes, som alt nævnt, 1) Vinkelmaalingsfejlen, 2) Længdemaalingsfejlen og for brudte Linjers Vedkommende tillige 3) Netfejlen (Fejlen i de givne Punkters Koordinater og dermed ogsaa i de givne Azimuther); men Forholdet mellem de to første Fejlkilders Virkning bliver forskelligt, eftersom den brudte Linje har en strakt Form eller den afviger væsentlig fra denne.

Har den brudte Linje en strakt Form (se Fig. 62), og er B det Punkt, hvori dens Slutningspunkt skulde ligge, medens det ligger i B', skyldes Fejlen dl, Længdefejlen, i Linjens

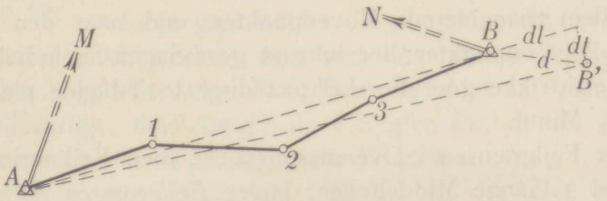


Fig. 62.

Længderetning — idet vi foreløbig ser bort fra Netfejlen — næsten udelukkende Fejlene i de maalte Sidelængder, og den er med stor Tilnærmelse lig deres Sum, medens Fejlen dt, Tværfejlen, i Retning vinkelret paa Linjen næsten udelukkende skyldes Fejlene i de maalte Vinkler. Den lineære Tværfejl maa ifølge sin Oprindelse være og er ogsaa ifølge Erfaringen betydelig mindre end Længdefejlen.

Dersom en brudt Linje af Længden $L = [s]$ var maalt fortløbende igennem to Gange, vilde den fra den enkelte Længdemaaling (de tilfældige Fejlaarsager) hidrørende Middelfejl, m_L, reduceres til $\frac{m_L}{\sqrt{2}}$; da den brudte Linje imidlertid ikke maales fortløbende, men hver Polygonside maales for sig, forøges Længdemaalingsfejlen baade med de Fejl, som hidrører fra, at der ikke maales nøjagtig til Polygonpunkterne, Fejlene i Polygonpunkternes Definering og med Aflæsningsfejlene. Tages der Hensyn til begge disse Fejl og tillige til Vinkelmaalingsfejlen, vil man — ved et rimeligt Skøn — kunne anslaa Middelværdien for Gabet til m_L.

Forsaavidt den brudte Linje er maalt under helt andre Forhold end dem, under hvilke den fundamentale Maaling (Triangula-

tionen) er udført, vil altid nogle lovmæssige Fejl (f. Eks. hidrørende fra en ikke fuldstændig nøjagtig Justering af Staalbaandet) gøre sig gældende, og man maa da i Overensstemmelse med Instrumentlæren for m_L benytte Værdien

$$m_L = \sqrt{m_1^2 L + m_2^2 L^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

hvor m_1 for Maaling i Meter har Værdien $m_1 = 0.003$, medens m_2 har Værdien $m_2 = 0.0002$, og hvor L er Summen af Polygonsiderne. Man vil imidlertid under saadanne Omstændigheder kunne foretage en Udskilning af lovmæssige Længdemaalingsfejl; dog tør man ikke vente, at Udskilningen bliver fuldstændig, man maa tvertimod paaregne, at der vil blive en Rest af kendelig Størrelse tilbage af disse Fejl, og denne Rest, som maaske paa korte Linjer kan være forsvindende ved Siden af de tilfældige Fejl, vil navnlig gøre sig gældende paa de lange Linjer. Anslaas denne Rest til $^1/_3$ af de lovmæssige Fejls Middelværdi, bliver Værdien for m_L altsaa

$$\sqrt{m_1^2 L + \left(\frac{m_2}{3}\right)^2 L^2}. \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

Her er endnu ikke taget Hensyn til Netfejlen, hvilken noget nær faar samme Værdi ved korte som ved lange brudte Linjer; anslaas Middelværdien for den relative Fejl i Koordinaterne for to hinanden nærliggende Hovedpunkter til 0.1 Meter, bliver — under Hensyntagen til samtlige Fejlkilder — Fejlgrænsen for Gabet paa en strakt brudt Linje af Længden $[s]$ Meter, udtrykt i Meter: for brudte Linjer uden Udskilning af lovmæssige Fejl:

$$\Delta = 3\sqrt{0.003^2\,[s] + 0.0002^2\,[s]^2 + 0.1^2} \quad \ldots\ldots (39)$$

og for brudte Linjer efter Udskilning af lovmæssige Fejl:

$$d = 3\sqrt{0.003^2\,[s] + \frac{1}{9}\,0.0002^2\,[s]^2 + 0.1^2}. \quad \ldots\ldots (40)$$

Ved at konstruere de Kurver, som disse Ligninger fremstiller, naar $[s]$ er Abscissen og Δ eller d Ordinaten, viser det sig, at de falder meget nær sammen med de rette Linjer, som fremstilles ved de for Regningen langt simplere Ligninger:

$$\Delta = 0.3 + 0.0005^*)\,[s]\ Meter \quad \ldots\ldots\ldots (41)$$

$$\text{og } d = 0.3 + 0.0002^{**})\,[s]\ Meter. \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Ved brudte Linjer, som ikke har en strakt Form, eller ved lukkede Polygoner kan man ikke angive almindelige Regler for, hvorledes Længdemaalings- og Vinkelmaalingsfejlens

*) egentlig 0.00048.

**) egentlig 0.00018.

Samvirken bliver; men da Netfejlen ikke kommer i Betragtning ved lukkede Polygoner, og da saavel Netfejlens som de lovmæssige Fejls Indflydelse relativt set er mindre ved ikke strakte end ved strakte, brudte Linjer, maa det antages, at Gabet ikke her vil blive større end ovenfor angivet.

Ved lukkede Polygoner, hvis Sider er maalte under omtrent samme Forhold, eller ved brudte Linjer, som er førte mellem Punkter i en omtrent under samme Forhold maalt Polygon, har de lovmæssige Fejl i Længdemaalingen kun ringe Indflydelse, og man maa derfor anvende den ved (42) angivne Fejlgrænse.

Netfejlen bliver selvfølgelig noget mindre, naar de brudte Linjer føres direkte mellem trianguleredе Hovedpunkter, end naar de føres mellem forud bestemte Polygonpunkter, og for lukkede Polygoner bortfalder den ganske; man kan imidlertid benytte de angivne Fejlgrænser under de foran definerede almindelige Forhold, idet man dog saa maa være opmærksom paa, at de ydre Forhold kan være saadanne, at de gør en Overskridelse af de angivne Fejlgrænser forklarlig baade for Vinkelsumsfejlen og for Gabet. Paa saadanne ydre Forhold er allerede foran nævnt nogle Eksempler, navnlig hidrørende fra Omstændigheder, som vanskeliggør en nøjagtig Maaling; men de ydre Forhold kan ogsaa bevirke, at Netfejlen bliver særlig stor; dette er saaledes Tilfældet, naar en brudt Linje er ført mellem to relativt tæt ved hinanden liggende men til forskellige brudte Linjer hørende Polygonpunkter. Man bør derfor forlange, at Maaleren, naar Fejlgrænserne undtagelsesvis overskrides, i en Anmærkningsrubrik giver en Forklaring over de Aarsager, som formenes at have fremkaldt Overskridelsen.

Dersom Fejlgrænsen (42) overskrides, bør Maalingen, naar ikke særlig ugunstige Forhold er tilstede, kasseres; anderledes er det med Fejlgrænsen (41), at denne overskrides, betyder nemlig ikke, at Maalingen i og for sig er daarlig; thi dersom Gabet, efter at de lovmæssige Fejl er udskilte, ikke mere overskrider Fejlgrænsen (42), saa fortæller den oprindelige Overskridelse kun, at der forefindes lovmæssige Fejl, som er større, end man bør taale, hvilket i Reglen betyder, at Staalbaandet ikke er tilstrækkelig godt justeret.

For at undgaa for store Gab, bør man ikke gøre de brudte Linjer for lange, helst ikke ud over et Par Tusind Meter.

I Fig. 63 er de brudte Linjers (Polygoners) Længde i Meter, $[s]$, afsatte som Abscisser, medens de tilladelige Gab, eftersom der er foretaget en Udskilning af lovmæssige Fejl eller ikke, er

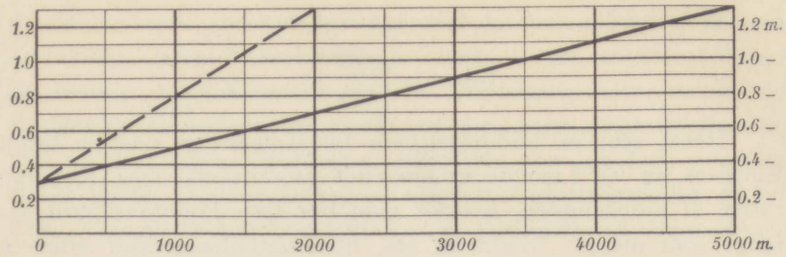


Fig .63.

angivne ved Ordinaterne til den fuldt optrukne eller den punkterede Linje.

Da de her angivne Fejlgrænser, saavel for Vinkelsumsfejlen som for Gabet, er udviklede paa teoretisk Grundlag men iøvrigt ved »et rimeligt Skøn«, tør man ikke tillægge dem fuld Gyldighed, før de er prøvede. Ved en ret omfattende Forsøgsrække er det imidlertid godtgjort, at de nævnte Fejlgrænser under »almindelige Forhold« ingenlunde er for snævre[1]).

Ved smaa lokale Maalinger kan man — hvad enten de er knyttede til en Triangulation eller en Polygonmaaling — opnaa en endogsaa langt større Nøjagtighed end her er angivet.

50. Vi vil søge et Udtryk for Tværfejlens Middelværdi. Bestaar den strakte brudte Linje, hvis Længde er L, af n lige lange Polygonsider, altsaa af Længden $s = \frac{L}{n}$, og er Fejlene (udtrykte i rene Tal) paa de maalte Polygonvinkler $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$, da bliver Tværfejlen

i Punkt 1 bestemt ved $t_1 = sv_1$,

- — 2 — — $t_2 = 2sv_1 + sv_2$,

- — 3 — — $t_3 = 3sv_1 + 2sv_2 + sv_3$,

. . . . . .

- — n — — $t_n = nsv_1 + (n-1)sv_2 + \ldots + 2sv_{n-1} + sv_n$,

og naar Polygonvinklernes Middelfejl er m, bliver Middelværdien for t_n ifølge Fejlteorien Formel (22)

$$m_t = ms\sqrt{n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2}$$

$$= ms\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}$$

eller med en almindelig Tilnærmelse

$$m_t = ms\sqrt{\frac{n^3}{3}}$$

[1]) Se »Nyholm og Thygesen: En Undersøgelse vedrørende de tilladelige Grændser for Vinkelsumsfejlen og Gabet ved Polygonmaaling«, Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulsvæsen, 4. Bind Side 193 o. flg.

og sættes heri $n = L : s$, faas endelig

$$m_t = m \sqrt{\frac{L}{3\,s}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Heraf ses, at Middelværdien for Tværfejlen paa en brudt Linje af en vis Længde er omvendt proportional med Kvadratroden af Sidelængden, hvorfor man bør gøre Polygonsiderne saa lange som muligt. Samtidig ses, at Tværfejlen vokser efter en ugunstig Lov, idet den vokser stærkere end Længden, nemlig med Potensen $^3/_2$ af denne. En brudt Linje paa 3000 Meter med 300 Meter lange Sider giver f. Eks. for $m = {}^1/_3$ Minut $m_t = 0.53$ Meter.

Her er imidlertid Tale om en blind brudt Linje; for den ved begge Ender tilknyttede brudte Linje bliver Tværfejlen selvfølgelig, naar Vinkelsumsfejlen er fordelt, meget mindre (saml. Side 68).

Det kan i denne Forbindelse have Interesse at se Forholdet mellem Tvær- og Længdefejlen paa et ved polære Koordinater bestemt Punkt. Er den maalte Side s og den maalte Vinkel o, bliver Tvær- og Længdefejlenes Middelværdier (bortset fra lovmæssige Fejl) henholdsvis $s\,\frac{m_o}{\omega}$ og $m\sqrt{s}$. Sættes disse Størrelser ligestore og indføres de sædvanlige Værdier for m_o og m samt den tilsvarende Værdi for ω, faas $s = 950$ Meter, ɔ: med den sædvanlige Maalingsnøjagtighed bliver Tvær- og Længdefejlenes Middelværdier ligestore, naar Siden er 950 Meter.

Udskilning af lovmæssige Fejl.

51. Den foran omtalte Udskilning af lovmæssige Fejl er af meget stor Betydning og burde derfor aldrig undlades. Bestemmelsen af den lovmæssige Fejls Størrelse vilde foregaa simplest, dersom man kunde maale en Del Afstande mellem triangulerede Hovedpunkter direkte i Marken. Hver enkelt af disse Afstandes Længdefejl, ɔ: Afstanden beregnet af de triangulerede Punkters Koordinater minus den maalte Afstand, udtrykkes da i pro mille af Linjens Længde, og af de saaledes bestemte Længdefejl beregnes Middeltallet K, der maa antages som Middelværdi for den lovmæssige Fejl, idet man maa gaa ud fra, at de tilfældige Fejl har gjort nogle brudte Linjer for lange og andre for korte, medens de lovmæssige Fejl virker paa samme Maade paa alle maalte Linjer.

Da man nu i Almindelighed ikke direkte kan maale saa-

danne Afstande mellem trianguleredе Hovedpunkter, maa man bestemme Længdefejlene af nogle brudte Linjer, saaledes: Blandt de mange omtrent under samme Omstændigheder mellem trianguleredе Hovedpunkter maalte brudte Linjer, som forekommer ved enhver større Opmaaling, udvælger man en Del, som har strakt Form. I disse beregnes, efter at Vinkelsumsfejlen er fordelt, alle Koordinattilvæksterne. Er Summen af den enkelte brudte Linjes Ordinattilvækster $[\Delta y]$ og af dens Abscissetilvækster $[\Delta x]$, faas (se Fig. 62)

$$tg\ \varphi_A^{B'} = \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]} \text{ og } tg\ \varphi_A^B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A};$$

$$AB' = \frac{[\Delta y]}{\sin \varphi_A^{B'}} = \frac{[\Delta x]}{\cos \varphi_A^{B'}} \text{ og } AB = \frac{y_B - y_A}{\sin \varphi_A^B} = \frac{x_B - x_A}{\cos \varphi_A^B},$$

hvorefter Længdefejlen med meget stor Tilnærmelse er

$$dl = AB - AB'.^{1})$$

Længdefejlen kan ogsaa bestemmes grafisk, idet man paa et Papir indkonstruerer A og B i lille Maalestoksforhold (Fig. 64) og derpaa ved Hjælp af dy og dx, som afsættes i modsat Retning af den, som angives ved deres Fortegn, i stort Maalestoksforhold (f. Eks. $^1/_{10}$), Punkt B', hvorefter man fra B' fælder en Perpendikulær paa AB, Fodpunktet, F's Afstand fra B, maalt i det store Maalestoksforhold, er da Længdefejlen.

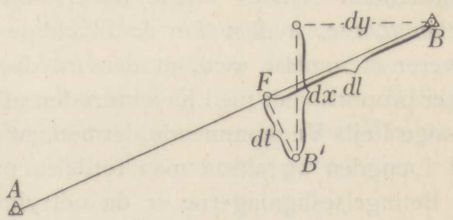


Fig. 64.

Hver enkelt brudt Linjes Længdefejl udtrykkes nu i pro mille af den brudte Linjes hele Længde, $[s]$, hvorefter man ligesom før beregner Længdefejlenes Middeltal, K. Dersom dette da har en kendelig Størrelse, under alle Omstændigheder dersom det overskrider 0,2 pro mille (Værdien af m_2 i Formel (37)), rettes hver enkelt maalt Side i alle Opmaalingens brudte Linjer ved Addition af Ks (med Fortegn); og derefter udføres den endelige Beregning af de brudte Linjer paa sædvanlig Maade. Idet man ved denne Fremgangsmaade faar den væsentligste Del

[1]) Tværfejlen er udtrykt ved $dt = (\varphi_A^B - \varphi_A^{B'}) \frac{AB}{\omega}$.

af den lovmæssige Fejl fjernet, vil de enkelte brudte Linjers Gab reduceres betydeligt, og man vil for de brudte Linjer, som ikke har en strakt Form, opnaa en ikke uvæsentlig Nøjagtighedsforøgelse.

Fordeling af den brudte Linjes (Polygonens) Fejl.

52. En eksakt Fordeling af disse Fejl efter m. K. M. vilde kræve, at der tillægges de maalte Sider og Vinkler relativ Vægt, hvilket er meget vanskeligt, fordi de er inkommensurable Størrelser; vi vil derfor — ligesom vi ved Udjævningen af et Trekantnet deler dette i Grupper — først, som omtalt Side 65, fordele Vinkelsumsfejlen saaledes, at alle Vinkler (bortset fra Afrundingen) faar lige store Rettelser, hvilket, idet der tillægges dem alle samme Vægt, er i Overensstemmelse med m. K. M.

Herefter bringes de to andre Betingelsesligninger ved m. K. M. til at være tilfredsstillede, idet der lægges Rettelser paa de maalte Sider. Disses Vægte bliver omvendt proportionale med Sidelængderne, hvilket for de tilfældige Fejls Vedkommende er i Overensstemmelse med, at den fra disse hidrørende Middelfejl vokser proportionalt med Kvadratroden af Længden, og for de lovmæssige Fejls Vedkommende dermed, at de vokser proportionalt med Længden og altsaa maa fordeles proportionalt med denne.

Betingelsesligningerne er da udtrykte i hosstaaende Skema, hvor Siden s_r's Rettelse er betegnet ved (s_r).

	(s_1)	(s_2)	(s_3)	. . . . .	(s_n)	q
k_1	$\sin \varphi_1$	$\sin \varphi_2$	$\sin \varphi_3$	. . . . .	$\sin \varphi_n$	dy
k_2	$\cos \varphi_1$	$\cos \varphi_2$	$\cos \varphi_3$	. . . . .	$\cos \varphi_n$	dx
$\frac{1}{p}$	s_1	s_2	s_3	. . . . .	s_n	

Herefter bliver Normalligningerne

$$\left[\frac{\sin^2 \varphi}{p}\right] k_1 + \left[\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{p}\right] k_2 = dy$$

$$\text{og} \quad \left[\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{p}\right] k_1 + \left[\frac{\cos^2 \varphi}{p}\right] k_2 = dx,$$

Rettelsen paa Side s_r

$$(s_r) = \frac{\sin \varphi_r}{p_r} k_1 + \frac{\cos \varphi_r}{p_r} k_2$$

og Rettelserne henholdsvis paa Δy_r og Δx_r

$$(\Delta y_r) = \frac{\sin^2 \varphi_r}{p_r} k_1 + \frac{\sin \varphi_r \cos \varphi_r}{p_r} k_2$$

og

$$(\Delta x_r) = \frac{\sin \varphi_r \cos \varphi_r}{p_r} k_1 + \frac{\cos^2 \varphi_r}{p_r} k_2.$$

Skøndt denne Fremgangsmaade, som afgiver et kønt Eksempel paa Korrelatudjævning, ikke bliver meget besværlig, naar der anvendes passende Tabeller, vil den dog i de fleste Tilfælde ikke give en Nøjagtighedsforøgelse, som staar i Forhold til Arbejdet.

I Almindelighed fordeler man, som omtalt Side 65, Fejlene paa de enkelte Tilvækster proportionalt med disse, hvilket stemmer med, at Fejlen (s) paa Siden s henholdsvis paa vedkommende Ordinat- og Abscissetilvækst foranlediger Fejlene (s) sin φ og (s) cos φ; saaledes vil f. Eks. en Længdemaalingsfejl paa en Side med Azimuth 90° ingen Fejl give paa vedkommende Abscissetilvækst, medens den vil virke med sit fulde Beløb paa Ordinattilvæksten.

Hvilken Fremgangsmaade man vælger ved Fordelingen, har næppe stor praktisk Betydning; men man bør sørge for, at de brudte Linjer ikke bliver for lange, og at Siderne frembyder gunstigst mulige Betingelser for Maaling, hvorved det i Reglen vil lykkes at reducere dy og dx til ganske smaa Størrelser, navnlig dersom man først har udskilt de lovmæssige Fejl.

Beregning af et Knudepunkt.

53. Støder flere fra forud bestemte Hovedpunkter udgaaende brudte Linjer sammen i et Punkt, vil det ofte være rigtigt at beregne dette som et *Knudepunkt*. Paa Fig. 65 støder f. Eks. de tre brudte Linjer, som udgaar fra A, B og C sammen i P. Man beregner da Azimuth for en fra P udgaaende Polygonside, f. Eks. P-5 gennem hver af de tre brudte Linjer; har nu den brudte Linje I n_1 Vinkler (inkl. Vinklerne ved A og P), den brudte Linje II n_2 Vinkler (inkl. Vinklen ved B) og den brudte Linje III n_3 Vinkler (inkl. Vinklerne ved C og P), saa vil man faa 3 Værdier for φ_P^5, nemlig

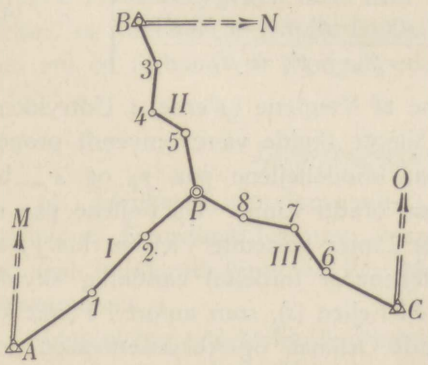


Fig. 65.

gennem I: $\varphi_1 = \varphi + d\varphi_1$, med Middelfejl $m\sqrt{n_1}$,

altsaa Vægten $p_1 = \frac{1}{n_1}$,

gennem II: $\varphi_2 = \varphi + d\varphi_2$ med Middelfejl $m\sqrt{n_2}$,

altsaa Vægten $p_2 = \frac{1}{n_2}$

og gennem III: $\varphi_3 = \varphi + d\varphi_3$ med Middelfejl $m\sqrt{n_3}$,

altsaa Vægten $p_3 = \frac{1}{n_3}$,

hvor φ er en foreløbig Værdi for den søgte Azimuth, φ^5_P, hvis sandsynligste Værdi bliver

$$\varphi^5_P = \varphi + \frac{p_1 d\varphi_1 + p_2 d\varphi_2 + p_3 d\varphi_3}{p_1 + p_2 + p_3} \quad \ldots\ldots (44)$$

Den saaledes fundne Værdi for φ^5_P indføres nu i de forskellige brudte Linjer; disses Vinkelfejl fordeles paa sædvanlig Maade, og Azimutherne beregnes.

Herefter beregnes gennem hver brudt Linje et Sæt Koordinater til P, nemlig i Eksemplet

gennem I: $y_1 = y_0 + dy_1$ og $x_1 = x_0 + dx_1$,
— II: $y_2 = y_0 + dy_2$ - $x_2 = x_0 + dx_2$,
— III: $y_3 = y_0 + dy_3$ - $x_3 = x_0 + dx_3$,

hvor y_0 og x_0 er foreløbige Koordinater til P, medens disses sandsynligste Værdier bliver

$$\left.\begin{aligned} y_P &= y_0 + \frac{p_1 dy_1 + p_2 dy_2 + p_3 dy_3}{p_1 + p_2 + p_3} \\ \text{og} \quad x_P &= x_0 + \frac{p'_1 dx_1 + p'_2 dx_2 + p'_3 dx_3}{p'_1 + p'_2 + p'_3}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (45)$$

En rationel Bestemmelse af Vægtene (p'erne) i Udtrykkene (45) er ikke mulig. Disse Vægte skulde være omvendt proportionale med Kvadraterne paa Middelfejlene paa y_P og x_P, bestemte gennem vedkommende brudte Linje. Da Fejlene paa de gennem de forskellige brudte Linjer bestemte Værdier for y_P og x_P (navnlig efter at Vinkelfejlene er fordelte) væsentlig skyldes Længdemaalingsfejlene, og da Fejlen (s), som anført i Punkt 52, henholdsvis paa vedkommende Ordinat- og Abscissetilvækst, foranlediger Fejlene (s) sin φ og (s) cos φ, turde det rimeligste være, at sætte p'erne i (45) omvendt proportionale med henholdsvis Summen af Ordinattilvæksterne og Summen af Abscissetilvæksterne i vedkommende brudte Linje (de numeriske Værdier), medmindre man, dersom Afvigelserne mellem de forskellige Sæt Koordinater

til P ikke er for store, vil indskrænke sig til at vælge de endelige Værdier ved et Skøn.

Eksempel 17 viser Beregningen af et Knudepunkt; ved Beregningen af y_P og x_P er Vægtene satte lig de reciprokke Værdier af Summerne af vedkommende Koordinattilvækster multiplicerede med 1000. Eksemplet hidrører fra Polygonnettet i Plan I.

54. Ved lukkede Polygoner med en eller flere brudte Linjer kan en lignende Fremgangsmaade benyttes. I Fig. 66 kan man f. Eks. fra 1 som Udgangspunkt beregne den sandsynligste Værdi for Azimuth for en fra 6 udgaaende Side og derefter de sandsynligste Værdier for Koordinaterne til 6, idet man efter de angivne Regler gaar fra 1 til 6 ad tre forskellige Veje; denne Fremgangsmaade vil dog kun være anvendelig, naar man har maalt den brudte Linje med samme Nøjagtighed som den hele Polygon, Hovedpolygonen.

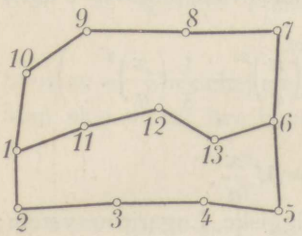


Fig. 66.

Den Opgave, at maale et Terræn alene ved Polygonmaaling, uden foregaaende Triangulation, vil imidlertid kun foreligge, naar man skal foretage en mindre selvstændig Opmaaling i vanskelig overskueligt Terræn (et Skovterræn eller en tæt bebygget Landsby), og Forholdene vil da hyppig føre med sig, at Hovedpolygonen kan lægges saaledes, at den frembyder væsentlig bedre Betingelser for Maaling end de brudte Linjer; i saa Fald bør man først beregne Hovedpolygonen, idet man fordeler dens Uoverensstemmelser, og derefter de brudte Linjer ganske paa samme Maade, som om de forbandt to trianguleredе Punkter.

Logaritmeregningen.

55. Hvilken Logaritmetabel, man skal anvende ved Beregning af Koordinattilvækster, beror for en Del paa et Skøn; her skal imidlertid gives et Par Momenter til Vejledning ved Bedømmelsen.

Regningsnøjagtigheden bør være saa stor, at den fra Beregningen hidrørende Fejls Middelværdi, μ, praktisk set er forsvindende ved Siden af den fra Maalingen hidrørende Fejls Middelværdi, m_1. Denne Fordring kan betragtes som tilfredsstillet, naar $\mu < \frac{1}{4} m_1$; thi Resultatets Middelfejl, m, bliver da

$$m = \sqrt{m_1^2 + \mu^2} < \sqrt{m_1^2 + \frac{1}{16} m_1^2} = 1.03\, m_1,$$

saa at m og m_1 praktisk set er ligestore.

For at være paa den sikre Side, vil vi imidlertid skærpe Fordringen, idet vi ikke alene forlanger, at μ men ogsaa den Værdi, f, som Regnefejlen i Almindelighed ikke overstiger, skal være mindre end $^1/_4\, m_1$, saa at man skal have

$$f < \frac{1}{4} m_1.$$

Den største Regnefejl, som Ordinattilvæksten, $\Delta = s \sin \varphi$ kan faa, bestemmes ved Rækken

$$\log (a + x) = \log a + M \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right)^3 \ldots \right),$$

som med stor Tilnærmelse giver

$$\log (a + x) = \log a + M \frac{x}{a},$$

hvor $M = 0.4343$ er Modulus i det Briggiske Logaritmesystem; en Fejl x paa Tallet giver altsaa en Fejl $y = M \frac{x}{a}$ paa den tilsvarende Logaritme, medens en Fejl y paa Logaritmen giver en Fejl $x = \frac{ay}{M}$ paa det tilsvarende Tal.

Forudsættes det, at den største Fejl, man kan faa ved Opslag i en p-cifret Logaritmetabel, er $\frac{1}{2.10^p}$, hvilket er rigtigt, naar der bortses fra nogle Grænsetilfælde, bliver Fejlen paa

$$\log \Delta = \log s + \log \sin \varphi$$

$< \frac{1}{10^p}$, og altsaa den fra Logaritmeregningen hidrørende Fejl paa Ordinattilvæksten, $f < \frac{\Delta}{M . 10^p}$.

Den fra Maalingen hidrørende Middelfejl, m_Δ, paa $\Delta = s \sin \varphi$ faas ved Hjælp af Fejlteoriens Formel (22), som giver

$$m_\Delta^2 = \sin^2 \varphi\, m_s^2 + s^2 \cos^2 \varphi\, m_\varphi^2$$

$$m_\Delta = \sqrt{m_s^2 \sin^2 \varphi + s^2 m_\varphi^2 - s^2 \sin^2 \varphi\, m_\varphi^2}$$

$$= \Delta \sqrt{\frac{m_s^2}{s^2} + \frac{m_\varphi^2}{\sin^2 \varphi} - m_\varphi^2}.$$

Betingelsen $\qquad f < \frac{1}{4} m_1$

giver altsaa

$$\frac{\Delta}{M . 10^p} < \frac{1}{4} \Delta \sqrt{\frac{m_s^2}{s^2} + \frac{m_\varphi^2}{\sin^2 \varphi} - m_\varphi^2};$$

og da Rodstørrelsen faar sin mindste Værdi, $\frac{m_s}{s}$, for $\varphi = 90^0$ eller 270^0, vil Betingelsen altid være tilfredsstillet, naar

$$\frac{1}{M.10^p} < \frac{1}{4}\frac{m_s}{s},$$

eller med Tilnærmelse

$$\frac{m_s}{s} > \frac{1}{10^{p-1}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Triangulation: Ifølge Fejlteorien Ekspl. 40 haves for en Side i en ligesidet Trekant

$$m_s = 0.00024\ sm,$$

hvor m er Middelfejlen paa de tre maalte Vinkler i Minutter. Man skal altsaa her have

$$\frac{m_s}{s} = 0.00024\ m > \frac{1}{10^{p-1}},$$

o: for $p = 5$, $m > 0'.4$ og for $p = 6$, $m > 0'.04$

Naar Middelfejlen paa de maalte Vinkler er $> 0'.4$, anvendes altsaa en 5-cifret Logaritmetabel, og er Middelfejlen $\begin{matrix} < 0'.4 \\ > 0'.04 \end{matrix}$ anvendes en 6-cifret. Middelfejlen vil imidlertid næppe ved nogen Triangulation være større end $0'.4$, og derfor kan der kun anvendes 5-cifrede Logaritmer, naar Siderne er ganske korte (5—600 Meter, saml. Side 35). Bliver Middelfejlen $< 0'.04 =$ c. 2.5 Sekund, maa der anvendes 7-cifrede Logaritmer.

Polygonmaaling: Her skyldes Middelfejlen paa Siden de tilfældige Fejl (idet de lovmæssige Fejl i denne Forbindelse er uden Betydning); man har altsaa

$$m_s = 0.003\ \sqrt{s},$$

saa at (46) giver

$$\frac{m_s}{s} = \frac{0.003}{\sqrt{s}} > \frac{1}{10^{p-1}}$$

eller

$$s < (0.003 \times 10^{p-1})^2,$$

o: for $p = 5$, $s < 900$ m og for $p = 4$, $s < 9$ m.

For ganske korte Sider spiller Aflæsningsfejlen og Fejlen i Polygonpunkternes Definering en forholdsvis stor Rolle; sætter vi derfor, uanset Sidelængden, $m_s = 0.05$ m, faas for $p = 4$

$$s < 0.05 \times 10^{p-1} = 50 \text{ m}.$$

Man maa altsaa ved Polygonmaaling anvende 5-cifrede Logaritmer; kun ved ganske korte Sider 4-cifrede.

Opsøgning af grove Fejl.

56. Dersom det, naar man opsummerer samtlige maalte Vinkler i en brudt Linje, viser sig, at Fejlen paa Summen er saa stor, at den ikke kan skyldes tilfældige Fejl, (den overskrider den i Punkt 49 angivne Fejlgrænse), og at en grov Fejl ved Vinkelmaalingen altsaa maa være til Stede, maa denne opsøges i Marken. Man kan imidlertid ogsaa finde Fejlen ved Regning. Man beregner da alle Sidernes Azimuther, begyndende dels fra det ene og dels fra det andet Endepunkt. Derefter beregner man Koordinaterne fra Punkt til Punkt, begyndende ligeledes dels fra den ene og dels fra den anden Ende. Det Punkt, som ved disse Beregninger (indenfor den Nøjagtighed, som iøvrigt kan ventes), faar samme Koordinater, er det i hvilket Vinkelfejlen ligger. Drejer det sig om en lukket Polygon, kan man begynde Regningen i et vilkaarligt Punkt og regne begge Veje rundt. Denne Fremgangsmaade begrundes derved, at den urigtig maalte Vinkel ved ingen af de to Beregninger faar Indflydelse paa Azimutherne, før man har passeret det Punkt, i hvilket Vinkelfejlen ligger; dette vil forstaas af hosstaaende Fig. 67, hvor Vinklen i 4 er maalt 20^0 for stor. Ved fra 1 at regne højre om, faas Punkterne 1, 2, 3, 4, 5 og 1^a; ved at regne venstre om, faas derimod Punkterne 1, 5', 4, 3', 2' og $1^{a'}$, saa at kun Punkt 4 faar samme Beliggenhed ved begge Beregninger. I Stedet for at beregne Polygonpunkternes Koordinater, kan man ogsaa konstruere Figuren.

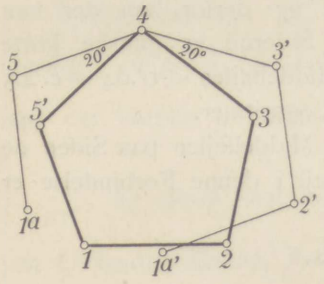


Fig. 67.

Viser det sig, at Fejlene paa Summen af Ordinattilvæksterne og paa Summen af Abscissetilvæksterne, tagne hver for sig, er større, end det ifølge de i Punkt 49 angivne Fejlgrænser er tilladeligt, maa der være begaaet en grov Fejl ved Sidemaalingen. Er i Fig. 68 Fejlen begaaet paa Siden 1-2, idet denne er maalt Stykket *d* for kort, bliver ved Beregningen alle de efterfølgende Punkter forskudte et Stykke *d* i

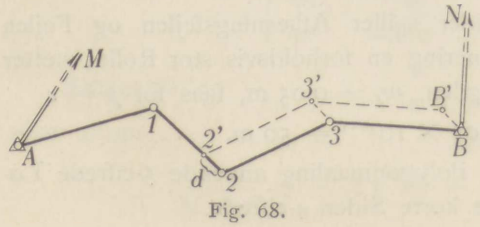


Fig. 68.

Retning $\neq$ 2-1, og Slutningspunktet falder i B' i Stedet for i B. Polygonens Gab bliver

$$d = \sqrt{(y_B - y_{B'})^2 + (x_B - x_{B'})^2},$$

og dette angiver Størrelsen af den begaaede Fejl. Gabets Retning, som er bestemt ved

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_B - y_{B'}}{x_B - x_{B'}},$$

angiver, bortset fra de tilfældige Fejl, Azimuth for den Side, paa hvilken Fejlen er begaaet. Man maa erindre, at tg φ har to Værdier, og at den omhandlede Azimuth kan have enhver af disse Værdier.

Findes der ikke iblandt den brudte Linjes Azimuther nogen, som har en i Nærheden af φ liggende Værdi, saa maa der være begaaet mere end én Længdemaalingsfejl, eller ogsaa maa der være Vinkelfejl, som hæver hinanden.

Ved brudte Linjer af meget strakt Form, vil alle eller flere Siders Azimuther være meget nær ligestore, og det vil da ikke være muligt at afgøre, paa hvilken af dem Fejlen er begaaet.

Selv om man paa disse Maader har fundet en Maalefejl, maa denne dog altid konstateres ved Eftermaaling i Marken.

Planen for Polygonmaalingen.

57. Ved Polygonmaalingen tilvejebringes et System af Hovedpunkter (underordnede i Forhold til de trianguleredе), i Forhold til hvilke de enkelte Terrænpunkter bestemmes dels direkte fra Polygonsiderne dels indirekte fra *Maalelinjer*, som udstikkes og maales mellem Punkter i Polygonsiderne. De brudte Linjer danner et *Polygonnet*.

Polygonmaaling vil kunne anvendes næsten overalt; thi Terrænet skulde lægge særlige Hindringer i Vejen for Maaling af rette Linjer, om man ikke skulde kunne føre brudte Linjer igennem, eftersom disse netop tilsteder, at man kan sno sig gennem Terrænet efter dettes Form.

Ved mindre selvstændige Opmaalinger, hvor Terrænforholdene umuliggør en Triangulation, bør man — som allerede foran omtalt — som Regel føre en Hovedpolygon, der kan tjene som fast Ramme for Maalingen rundt langs Terrænets Grænser, efter Omstændighederne uden- eller indenfor disse, og mellem Hovedpolygonens Punkter maa man da, hvor det kræves, føre brudte Linjer.

Er Opmaalingen derimod knyttet til en forudgaaende Triangulation, fører man mellem de ved denne bestemte Hovedpunkter brudte Linjer, som man tilstræber at give en strakt Form, hvorved opnaas,

1) at man kommer ad kortest Vej og altsaa med mindst mulig Fejlophobning fra et Triangulationspunkt til et andet, og

2) at man har Mulighed for Udskilning af de lovmæssige Fejl ved Længdemaaling.

Polygonpunkterne bør vælges saaledes, at man faar de bedst mulige Betingelser for

1) Vinklernes Maaling,

2) Sidernes Maaling,

3) den efterfølgende Bestemmelse af Terrænpunkterne og

4) Polygonpunkternes Bevarelse, ɔ: de vælges paa saadanne Steder, hvor de volder Brugerne af Jorden mindst Ulempe.

ad 1. Gode Betingelser for Vinkelmaaling er,

a) at man kan faa en bekvem og sikker Opstilling over Polygonpunktet,

b) at man kan se Foden af Signalet i de Punkter, til hvilke der skal sigtes; tvinger Forholdene til at slaa af paa denne Fordring, maa man sikre sig, at Signalerne staar nøjagtig lodret, og

c) at Vinkelbenene (Polygonsiderne) er lange.

Polygonsiderne bør altsaa gøres saa lange, som Omstændighederne tillader; men paa den anden Side bør der ikke være for stor Forskel paa deres Længde, da den Forudsætning, at Vinklerne er maalte med samme Nøjagtighed, i saa Fald ikke er til Stede.

ad 2. Gode Betingelser for Sidemaaling er,

a) at Polygonsiderne ligger i nogenlunde jævnt og vandret Terræn,

b) at Bevoksningen ikke lægger Hindring i Vejen for Anbringelsen af Maaleredskabet, og at Jordoverfladen hverken er saa haard, at Stikkerne vanskelig kan anbringes (f. Eks. paa Vejbaner), eller saa blød, at de ikke kan staa fast (f. Eks. paa Pløjemarker).

Vejkanter og faste Græsmarker med kort Græs frembyder i Reglen gode Betingelser for Maaling af Polygonsider, hvorimod man bør undgaa at lægge disse over Pløjemarker, blød Engbund eller saaledes, at man skal maale over Jordvolde o. l.

Frembyder Terrænet Vanskeligheder for en enkelt Polygonsides Maaling, som f. Eks. naar en Aa med sumpet Terræn paa begge Sider løber tværs over en Polygonside, eller naar denne gaar over en Slugt, kan Maalingen udføres indirekte, idet man

opsøger et Punkt, hvorfra Afstanden til Polygonsidens ene Endepunkt kan maales under gunstige Omstændigheder, og hvorfra man kan se begge Endepunkter. Maales da alle tre Vinkler i vedkommende Trekant (paa Fig. 69 Trekant 8, 8^a, 9) og den ene Side (8^a-8), kan Polygonsiden (8-9) beregnes.

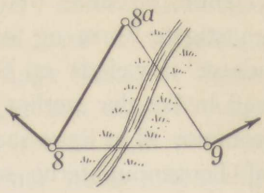


Fig. 69.

Paa lignende Maade kan man fjerne ganske korte Polygonsiders skadelige Virkning. Fig. 70 viser saaledes et Tilfælde, hvor man paa Grund af tæt Bevoksning ikke kan undgaa den korte Side 8-9, og hvor man paa Grund af Aaen ikke kan maale fra 7-9; kan man imidlertid sigte fra 7 til 9, saa springer man Punkt 8 over ved den brudte Linjes Beregning og beregner Længden af 7-9 efter at have maalt 7-8 og 8-9 samt en eller alle Vinkler i Trekant 7, 8, 9. En anden Maade at undgaa den korte Side paa fremgaar iøvrigt af Fig. 59 1. Figur, Side 64, hvor man for at undgaa den korte Side 5-a, indfører Punkterne 6 og 7.

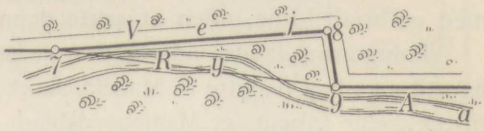


Fig. 70.

Paa lignende Maade forholder man sig, naar en brudt Linje skal knyttes til et ved Triangulation bestemt Hovedpunkt, som er saaledes beliggende (f. Eks. paa en Høj), at man kun vanskelig og med betydeligt Nøjagtighedstab kan maale den derfra udgaaende Side. I Fig. 71 er Polygonsiden P-1 bestemt ved Trekant P, 1, 1^a, hvori alle tre Vinkler og Siden 1-1^a er maalte. Skal en brudt Linje knyttes til et utilgængeligt Triangulationspunkt, maa dette nedføres, saaledes som omtalt i Punkt 31.

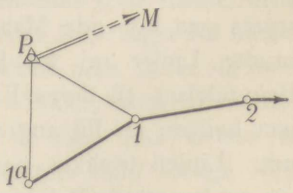


Fig. 71.

58. Under Hensyn til det fremsatte udarbejder man, inden Arbejdet paabegyndes i Marken, for et passende Areal ad Gangen først en foreløbig og senere efter Rekognoscering en endelig Plan for Polygonmaalingen, en Polygonnetplan. Ved dette Arbejde bør de forskellige Hensyn afpasses saaledes, at man først udvælger et System af brudte Linjer, ved hvilke Hensynet til Vinklernes og Sidernes nøjagtige Maaling er det over-

vejende, og disse brudte Linjer af 1. Klasse bør gives den gunstigste Form og føres direkte mellem Triangulationspunkterne; senere udvælges et System af brudte Linjer af 2. Klasse, ved hvilke der særligt tages Hensyn til, dels at de brudte Linjer kommer til at ligge saa bekvemt og fordelagtigt for Bestemmelsen af Terrænpunkterne som muligt, og dels at Polygonpunkterne vælges saaledes, at de volder Brugerne af Jorden mindst Ulempe; disse brudte Linjer af 2. Klasse maa ofte føres mellem forud bestemte Polygonpunkter. I 1. Klasses brudte Linjer bør man ikke taale ganske korte Polygonsider, hvorimod de ikke altid kan undgaas i 2. Klasses. Iøvrigt maa nærliggende Polygonpunkter — ligesom nærliggende Triangulationspunkter — altid sættes i bestemmende Forbindelse med hverandre; man maa heller ikke passere forbi et paa en Bakketop liggende Triangulationspunkt med en brudt Linje, uden at sætte denne i Forbindelse med hint.

Polygonnetplanen udarbejdes helst paa et Oversigtskort, hvortil man kan benytte et Matrikulskort eller, dersom Terrænet er tilstrækkelig aabent, et Maalebordsblad. Triangulationspunkterne indtegnes forud og angives ved en lille Kreds med en Trekant om Punktet, medens Polygonpunkterne angives ved en lille Kreds, Knudepunkter ved 2 Kredse. Polygonpunkternes Benævnelse, sædvanlig Arabertal, paaskrives, ligesom ogsaa Triangulationspunkternes. Planen maa ikke savne Maalestok, Nordlinje og Angivelse af, hvad den indeholder.

Den endelige Polygonberegning (omfattende de brudte Linjer) ledsages af et *Polygonnetkort*, som konstrueres paa Millimeterpapir i et efter Forholdene afpasset Maalestoksforhold. Det udstyres paa lignende Maade som Planen. For at skille de enkelte brudte Linjer ud fra hverandre, trækkes langs disse fra deres Begyndelses- til deres Endepunkt en farvet Linje, Regnelinje, paa hvilken en Pil angiver den Retning, i hvilken den er beregnet. Linjen trækkes paa den Side, paa hvilken de ved Beregningen benyttede Polygonvinkler findes (venstre Side). De brudte Linjer gives Numre, som angiver den Orden, i hvilken de er beregnede. Polygonnetkortet kan efter Omstændighederne falde sammen med Triangulationskortet. Eksempel paa et Polygonnetkort findes paa Plan 1, hvor alt, hvad der henhører til Polygonmaalingen, er indtegnet med Blaat.

Polygonpunkternes Mærkning og Signaler.

59. Polygonpunkterne mærkes paa ganske lignende Maade som i Punkt 20 omtalt for Triangulationspunkterne, dog kan man

her efter Omstændighederne benytte noget mindre Granitsten eller Betonblokke, og da Polygonpunkternes Antal er betydeligt, spiller det, som allerede omtalt, en ikke ringe Rolle, at de anbringes saaledes, at de volder Jordens Bruger den mindst mulige Ulempe, altsaa i Vejkanter, paa udyrkede Jorder eller allerhelst i Skel. Vigtige Polygonpunkter, som det har været nødvendigt at anbringe paa dyrkede Marker, bør forsænkes, ɔ: afmærkes underjordisk. For at kunne genfinde Polygonpunkterne — og da særlig de underjordisk afmærkede — maa der for hvert af dem i Maalebogen tegnes en lille Skitse, paa hvilken anføres 2, 3 eller flere Maal til let kendelige Punkter i Terrænet; disse Skitser bør indføres saaledes i Bogen, at de alle vender Nord opad, og de maa være saa tydelige, at enhver efter dem kan genfinde Punktet. Fig. 72 viser en saadan Skitse.

Som Signaler i Polygonpunkterne anvendes i Reglen Landmaalerstokke med Flag, om fornødent afstivede (Side 24).

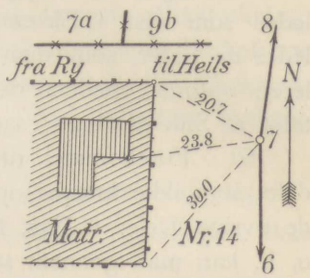


Fig. 72.

Maalingens Udførelse.

60. Polygonvinklerne maales med en Theodolit, som giver en mindste Aflæsning paa $^1/_2$ eller 1 Minut, og hvis Kikkert kan slaas igennem. I Reglen vil én Sats give tilstrækkelig Nøjagtighed; men det maa erindres, at det ikke tager ret meget længere Tid at tage endnu en Sats, hvorved man sikrer sig mod grove Fejl. Forekommer der enkelte Vinkler, som frembyder mindre gode Betingelser for Maaling, f. Eks. paa Grund af mindre god Opstilling eller korte Sigter, bør man forøge Nøjagtigheden ved at maale disse med flere Satser.

Hyppig kan man ved at tage Sigte fra et Polygonpunkt til et eller andet fjernere Triangulationspunkt skaffe sig en god Kontrol eller Hjælp til Opsøgning af mulig begaaede Fejl.

Da Middelfejlen paa en med én Sats maalt Polygonvinkel, som foran nævnt, kan sættes til $^1/_3$ Minut, bliver den højst tilladelige Forskel mellem to Maalinger af en Polygonvinkel

$$3\sqrt{2}\,\frac{1}{3} = 1.4 \text{ Minut.}$$

Polygonsiderne maales med Staalbaand to Gange, helst i

forskellig Retning. Har Polygonsiden mere end c. $^3/_4$ Meters Fald paa 100 Meter, maa man enten nivellere den med et Haandniveau, saa at man senere kan beregne Reduktionen for Fald, eller ogsaa maa man benytte Loddet under Maalingen. Det er maaske sikrest at benytte Lod ved den ene Maaling og nivellere ved den anden.

Ved Sammenligning af de to Maalingers Resultater maa man her, hvor de lovmæssige Fejl spiller en meget underordnet Rolle, holde sig til Fejlgrænsen $3m_1\sqrt{2}L$, hvis Værdier er beregnede i Instrumentlæren.

Maalingen af Polygonsiderne kan føres i Maalebogen saaledes som vist i Eksempel 19. Det første Skema viser, hvorledes de Sider, som man paa Grund af stærkt Fald har nivelleret, opføres, medens det andet Skema viser, hvorledes Resultatet af Sidemaalingen samles og Middeltallene beregnes.

61. Forekommer der ved en Opmaaling enkelte Terrændele, som ikke kræves opmaalte med saa stor Nøjagtighed som de øvrige Dele, f. Eks. Moser, Søgrænser, Bevoksningsgrænser o. l., kan man gennem saadanne Terrændele føre brudte Linjer, hvis Vinkler maales med simplere Instrumenter som Vinkelsøjlen, Sekstanten, Reflektoren o. l., eller hvis Siders Azimuther bestemmes direkte ved Boussolen. Ved Maalingen af saadanne brudte Linjer gaar man iøvrigt frem paa samme Maade som sædvanlig, idet man dog efter Omstændighederne ogsaa slaar af paa Nøjagtigheden ved Sidemaalingen. I Reglen konstrueres disse brudte Linjer uden Beregning af Polygonpunkternes Koordinater[1]).

§ 7. Linjetriangulation.

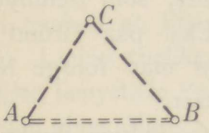


Fig. 73.

62. Ved Linjetriangulationen bestemmes Hovedpunktet, C, i Forhold til to givne Hovedpunkter A og B ved Maaling af Afstandene AC og BC. A og B er Punkter i en Hovedlinje, og deres Sted i denne bestemmes ved Maaling af deres Afstande fra dennes ene Endepunkt. Denne Opmaalingsmetode kan anvendes enten selvstændig, naar det gælder om at opmaale et Terræn af ikke for stor Udstrækning, og Terrænforholdene tilsteder Udstikning og Maaling af lange Linjer, eller til Bestemmelse af underordnede Linjenet ved Op-

[1]) Polygonmaalingens Anvendelse ved Opmaalinger i Byer, som i flere Henseender frembyder særlige Forhold, omtales i § 11 Bymaalinger, Side 101.

maalinger, hvor Hovedpunkterne er bestemte ved Triangulation og Polygonmaaling.

Den selvstændige Linjetriangulation finder nu til Dags kun ringe Anvendelse, dels fordi smaa lokale Maalinger overhovedet mere og mere taber deres Betydning, og dels fordi man, hvor saadanne skal udføres, arbejder baade hurtigere og nøjagtigere ved at benytte en lille Triangulation eller Polygonmaaling som Grundlag, hvorved der ogsaa frembydes bedre Betingelser for Fikspunkternes Bevarelse.

63. Ved den selvstændige Linjetriangulation udstikker man en lang Linje, Grundlinjen, gennem det Terræn, der skal maales, helst gennem dettes længste Udstrækning; paa denne bygger man saa mange Trekanter, som Forholdene kræver, og det bør saa vidt mulig undgaas at bygge Trekanter paa andre Hovedlinjer end Grundlinjen. Ved Valget af Trekantsider tages følgende Hensyn:

1) at Trekantsiderne kan udstikkes og maales nøjagtig,

2) at den Vinkel, som ligger ligeoverfor Grundlinjen, ikke afviger for meget fra 90^0,[1])

---

[1]) For at finde den gunstigste Snitvinkel, vil vi — ligesom i Punkterne 40, 41 og 42 —, idet Koordinatsystemet lægges som paa Fig. 74, søge Udtryk for y og x.

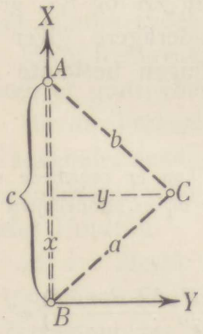


Fig. 74.

Man har da

$$y^2 = a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2$$

hvoraf

$$x = \frac{c}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{c}{2} + \frac{(a+b)\,(a-b)}{2c} \quad (47)$$

og derefter atter

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{16}}, \quad (48)$$

eller, idet vi for Kortheds Skyld sætter Kvadratrodstørrelsen, som angiver Trekantens Areal, lig T,

$$y = \frac{2}{c}\,T. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Ved Anvendelse af Fejlteoriens Formel (22) faas nu

$$m_x^2 = \left(\frac{dx}{da}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{dx}{db}\right)^2 m_b^2 \quad \text{og} \quad m_y^2 = \left(\frac{dy}{da}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 m_b^2,$$

hvor

$$\frac{dx}{da} = \frac{a}{c}, \quad \frac{dx}{db} = -\frac{b}{c}, \quad \frac{dy}{da} = \frac{2}{c}\frac{dT}{da} = \frac{a}{4cT}\,(b^2 + c^2 - a^2)$$

og

$$\frac{dy}{db} = \frac{b}{4cT}\,(a^2 + c^2 - b^2),$$

3) at Trekanterne bliver saa store som muligt, idet man dog ikke uden Nødvendighed gaar væsentlig udenfor det Terræn, som skal maales, da Arbejdet derved forøges, og

4) at Trekantsiderne ligger hensigtmæssigt for Tilknytning af Terrænpunkterne.

Ved Maaling af Trekantsiderne er Trekanterne bestemte, men man har ingen Overbestemmelse; en saadan tilvejebringes derved, at man maaler Længden af nogle Prøvelinjer, som gaar tværs over Trekanterne, idet man samtidig bestemmer deres Endepunkters Beliggenhed i Hovedlinjerne. En saadan Linje, f. Eks. ⑥ i Fig. 75, er bestemt ved Beliggenheden af Endepunkterne M og N i ② og ①, og dens Længde giver altsaa *én* Kontrol. Gaar Prøvelinjen, som f. Eks. ⑦, tværs over to Trekanter, faas en tredobbelt Kontrol; Linjen vil nemlig være bestemt ved Beliggenheden af J og L i ② og ④, og Længderne af JK og KL giver da hver sin Kontrol, medens Punktet K yderligere giver én Kontrol, da det skal ligge i den ved Maalingen bestemte Afstand fra B (eller C).

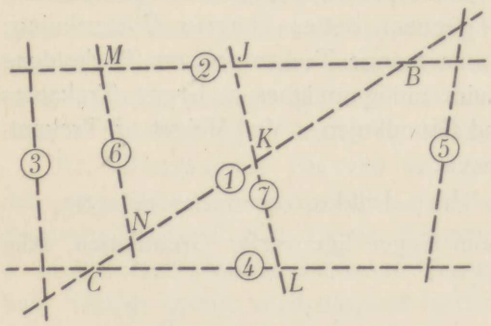


Fig. 75.

---

og hvor tillige — idet det forudsættes at a og b kun er behæftede med tilfældige Fejl — $m_a = m_1\sqrt{a}$ og $m_b = m_1\sqrt{b}$, hvor m_1 er Middelfejlen paa Længdeenheden (se Instrumentlæren).

C's Middelfejl er nu bestemt ved

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \left\{\frac{a^3+b^3}{c^2} + \frac{a^3(b^2+c^2-a^2)^2 + b^3(a^2+c^2-b^2)^2}{16\,c^2\,T^2}\right\} m_1^2.$$

Ligesom i Punkterne 40 og 42 kan M kun opnaa et absolut Minimum for $a = b$, hvilket giver

$$M^2 = \frac{8\,a^5}{c^2\,(4\,a^2-c^2)}\,m_1^2;$$

M bliver da Minimum samtidig med

$$\frac{a^5}{4\,a^2-c^2},$$

d: for $a = \sqrt{\frac{5}{12}}\,.\,c = \mathbf{0.65}\,c$ og $C = \mathbf{100^0\,34'}$.

Trods dette turde det dog være rigtig, naar C, saaledes som det her er Tilfældet, skal bestemmes ved Konstruktion, at holde paa den rette Vinkel.

Viser det sig ved Konstruktionen, at en Prøvelinjes Længde paa Kortet afviger saa meget fra dens maalte Længde i Marken, at Uoverensstemmelsen maa skyldes grove Fejl, maa disse opsøges ved Eftermaaling i Marken. Man vil i Reglen af Prøvelinjernes Beliggenhed kunne skønne, paa hvilken Linje Fejlen ligger.

Prøvelinjerne vælges saaledes:

1. at man ved dem faar virkelig Sikkerhed for, at ingen grove Fejl er til Stede, og
2. at de ligger hensigtsmæssig for Terrænpunkters Tilknytning.

ad 1. Vil man være sikker paa, at ingen grov Fejl kan være til Stede i en Trekant, maa en saadan Fejl paa en hvilkensomhelst Trekantside give sig tydelig tilkende paa mindst en af Prøvelinjerne.

En Hovedlinje kontroleres bedst af en Prøvelinje, som er omtrent parallel med den og ikke for langt fra den.

I Almindelighed faas en god Kontrol paa alle en nogenlunde retvinklet Trekants Sider ved to Prøvelinjer omtrent parallele med Kateterne.

I Trekant ① ② ③ (Fig. 76) er saaledes:
③ kontroleret af ⑤, da en Fejl paa ③ viser sig tydelig paa ⑤,
② — ④, — ② — ④;
① — ④ og ⑤, — ① viser sig — om end noget mindre tydelig — paa dem begge.

Heraf fremgaar, at Trekanten er godt kontroleret.

Havde Trekanten kun én Prøvelinje, nemlig ⑥, faas en mindre god men dog antagelig Kontrol.

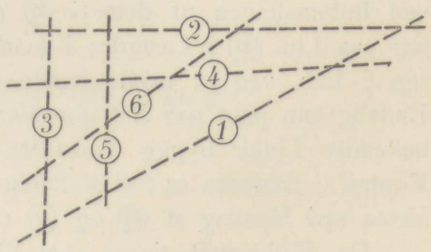


Fig. 76.

ad 2. Hertil kræves, at Afstandene fra Linjen til de Terrænpunkter, som skal bestemmes fra den, er saa smaa som muligt.

Under Hensyntagen til det her anførte, lægger man en fuldstændig Plan for hele Opmaalingen, hvorefter man indtegner Prøvelinjerne, forsynede med Numre, paa Krokien.

Af praktiske Hensyn vil man ikke kunne udstikke alle Hovedlinjer paa en Gang, hvorfor man, naar den enkelte Linje optages, maa dække Stokkehullerne paa en saadan Maade (bedst som angivet paa Fig. 77, hvor *A* og *B* er to smaa Pløkke), at

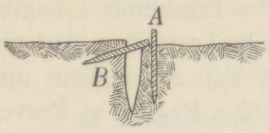


Fig. 77.

den kan rejses igen, naar man skal bestemme dens Skæringspunkter med andre Hovedlinjer.

Ved Maalingen benyttes Staalbaand eller Kæde. Man maaler i Reglen først Grundlinjen, idet man med en lille Pløk, forsynet med en Paaskrift, som angiver Linjens Nr. og Punktets Afstand i Linjen, mærker alle 200 Meters Punkter, for at man fra disse kan bestemme Beliggenheden af Skæringspunkterne med andre Hovedlinjer. Senere maales de andre Hoved- og Prøvelinjer, idet man samtidig sørger for at faa alle Skæringspunkter bestemte.

64. Ved Opmaalinger, hvor der ved Triangulation og Polygonmaaling er bestemt et System af Hovedpunkter, kan man mellem Polygonsiderne, som da træder i Stedet for Trekantsiderne ved den selvstændige Linjetriangulation, udstikke Linjer, *Maalelinjer* (saml. Punkt 57), hvis Endepunkter indmaales i Polygonsiderne, f. Eks. Lin. (58) og (59) paa Plan 1, medmindre de gaar gennem selve Polygonpunkterne, enten med begge Ender, f. Eks. Lin. (37) paa Plan 1 eller med den ene Ende f. Eks. Lin. (39) paa Plan 1. Linjernes Længder tjener da som Kontrol, men man maa her som ved den selvstændige Linjetriangulation sørge for, at Kontrollen bliver effektiv. Linje (38) paa Plan 1 kontroleres saaledes ved sin Længde, men derimod haves der ingen virkelig Kontrol paa Punkt *a*'s Beliggenhed, da en Fejl ved Indmaalingen af dette i (37) saa at sige ingen Indflydelse har paa Lin. (38)'s Længde; i saadanne Tilfælde maa man sikre sig, f. Eks. ved at maale baade fra 26 til *a* og fra 17 til *a*. Endelig kan man paa Polygonsider, Maalelinjer eller paa andre bekendte Linjer bygge Trekanter, som da maa have fornøden Kontrol. Saaledes er f. Eks. Punkt *f* bestemt ved Trekant *e L f*, altsaa ved Maaling af (86) og (87) og kontroleret ved (88).

Da Linjenettet tjener som Grundlag for Detailmaalingen, maa de enkelte Polygonsider og Maalelinjer ligge saa tæt, at man fra dem kan bestemme alle Terrænpunkter; med Hensyn til Maalebogsføringen henvises til Afsnittet »Terrænpunkters Bestemmelse«.

65. *Linjenetpunkterne*, ɔ: Skæringspunkterne mellem Polygonsiderne og Maalelinjerne eller mellem disse sidste indbyrdes, indkonstrueres ofte direkte; men det er indlysende, at Kontrollen bliver mere effektiv og Konstruktionen nøjagtigere, naar man beregner Koordinaterne til Linjenetpunkterne, ligesom man da ogsaa

faar Midler til Fordelingen af de ved Bestemmelsen af Maalelinjernes Længde opstaaede Smaafejl. En saadan Koordinatberegning er gennemført ved de tyske Matrikulsmaalinger, og Fremgangsmaaden skal kortelig angives her.

Linjen mellem Polygonpunkterne n og $n+1$ (Fig. 78) er bestemt ved Endepunkternes Koordinater; a, b, c, o. s. v. er Linjenetpunkter paa den givne Linje, og vi lader endvidere s_n, s_a, s_b o. s. v. betegne de ved Maalingen fundne Værdier for n-a, a-b, b-c o. s. v. Først undersøges, om $[s] = s_n + s_a + s_b + \ldots$ indenfor Maalingsnøjagtigheden er lig Afstanden mellem n og $n+1$, som, eftersom $\varphi \gtrless 45^0$ (Anm. Side 10), bestemmes af den første eller anden af Ligningerne

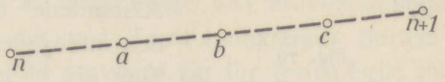


Fig. 78.

$$s_n^{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\sin \varphi_n^{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\cos \varphi_n^{n+1}},$$

efterat φ_n^{n+1} er bestemt af

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n},$$

og har denne Prøve givet et tilfredsstillende Resultat, ɔ: ligger Fejlen, $s_n^{n+1} - [s]$, indenfor de Fejlgrænser, som, eftersom der er udskilt lovmæssige Fejl eller ikke, er angivne ved (42) eller (41), fordeles $s_n^{n+1} - [s]$ paa de enkelte maalte Stykker proportionalt med disses Længde. Idet Rettelsen paa Siden s_r herved bliver $(s_n^{n+1} - [s]) \frac{s_r}{[s]}$, faas

$$\Delta y_r = \left\{ s_r + (s_n^{n+1} - [s]) \frac{s_r}{[s]} \right\} \sin \varphi_n^{n+1},$$

eller, idet

$$\sin \varphi_n^{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{s_n^{n+1}},$$

$$\Delta y_r = \frac{y_{n+1} - y_n}{[s]} s_r \text{ og analogt } \Delta x_r = \frac{x_{n+1} - x_n}{[s]} s_r;$$

og sættes

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{[s]} = O \text{ og } \frac{x_{n+1} - x_n}{[s]} = A,$$

faas endelig $\Delta y_r = O s_r$ og $\Delta x_r = A s_r$. . . . . (50)

Ved Addition af alle Udtryk af denne Form faas

$$\left.\begin{aligned} [\Delta y] = O[s] = \frac{y_{n+1} - y_n}{[s]} \cdot [s] &= y_{n+1} - y_n \\ \text{og analogt} \qquad [\Delta x] &= x_{n+1} - x_n \end{aligned}\right\}, \ldots (51)$$

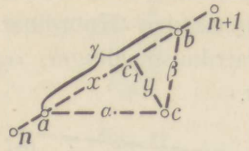


Fig. 79.

hvilke Udtryk giver Kontrol paa Regningen, idet de skal tilfredsstilles indenfor Regningsnøjagtigheden.

Er et Punkt, c, (Fig. 79), bestemt ved Afstandene α og β fra a og b med den indbyrdes Afstand γ faas (se Anm. Side 87)

$$x = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma} \quad \text{og} \quad y = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$$

eller til Logaritmeregning

$$x = \frac{\gamma}{2} + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{2\gamma} \quad \text{og} \quad y = \sqrt{(\alpha-x)(\alpha+x)}.$$

Punktet c_1, beregnes som andre Linjenetpunkter (f. Eks. a og b, hvis de da ikke er Polygonpunkter) i Linjen mellem n og $n+1$, idet man kender Afstanden $n\text{-}c_1 = n\text{-}a + x$, og endelig bestemmes Punkt c ved

$$\Delta y^c_{c_1} = \mp Ay \quad \text{og} \quad \Delta x^c_{c_1} = \mp Oy,$$

hvor øverste eller nederste Fortegn gælder, eftersom Perpendikulæren gaar til højre eller venstre, da

$$\varphi^c_{c_1} = \varphi^{n+1}_n \pm 90^0.$$

Beregningen kan opstilles som i Ekspl. 20, der refererer sig til Linjenettet paa Plan 1. Først indføres for hver enkelt Linje Koordinaterne til Begyndelses- og Slutningspunktet, hvorhos $y_{n+1} - y_n$ og $x_{n+1} - x_n$ dannes; de maalte Afstande indføres i 4. Kolonne; i 1. og 2. Kolonne beregnes — ligesom i Eksempel 1 — φ^{n+1}_n og log s^{n+1}_n, underneden opføres log $[s]$, og nu kan log O og log A dannes og opføres i 5. Kolonne. Resten af Beregningen vil forstaas uden nærmere Forklaring. For Punkt f's Vedkommende beregnes $x = e\text{-}f'$ og $y = f'\text{-}f$, og den sidste indføres i 4. Kolonne.

Linjenetberegningen ledsages af et *Linjenetkort*, som udstyres paa samme Maade som Polygonnetkortet, og som, naar Pladsen tillader det, kan falde sammen med dette, saaledes som det ses paa Plan 1. Linjenetpunkterne kan passende betegnes ved smaa Bogstaver, og alt, hvad der henhører til Linjenettet, indtegnes med Rødt.

II. Terrænpunkters Bestemmelse.

§ 8. Forskellige Metoder til Terrænpunkters Bestemmelse.

66. Hvert enkelt Terrænpunkt bestemmes i Forhold til givne Hovedpunkter (Hovedlinjer); at knytte Terrænpunkter til

andre forud bestemte Terrænpunkter kan kun anses tilstedeligt i enkelte Undtagelsestilfælde. Ved Terrænpunkters Bestemmelse er der altsaa som Regel ingen Mulighed for Fejlophobning, og det er derfor fuldtud berettiget at slaa noget af paa de skarpe Nøjagtighedsfordringer, som er nødvendige ved Hovedpunkters Bestemmelse. Derimod vil der ved Terrænpunkternes Bestemmelse være særlig Anledning til at vogte sig for grove Fejl; thi ofte haves her ikke, saaledes som ved Hovedpunkters Bestemmelse, Kontrol, og en Fejl vil da kunne indsnige sig, uden at hverken Maaleren eller Kortkonstruktøren opdager det. Som Følge heraf kræver Detailmaalingen den højeste Grad af Opmærksomhed og Paapasselighed; Maaleren tør saaledes ikke overlade til uøvede Medhjælpere at læse af paa Staalbaand eller Baandmaal, hvorimod han, naar Medhjælperen kan oplæres dertil, faar en god Kontrol ved først selv at læse af og notere Maalet og derpaa lade Medhjælperen læse af. Det skal imidlertid allerede her bemærkes, at der i de senere Aar er opstaaet et temmelig bestemt Krav om, at alle vigtige Terrænpunkter, navnlig alle Skelpunkter, skal indmaales dobbelt, altsaa med Kontrol.

Hvilken Nøjagtighed, der bør kræves ved Bestemmelsen af det enkelte Terrænpunkt, er afhængig ikke alene af Opmaalingens Formaal (saml. Punkt 12) men ogsaa af selve Punktets Betydning og den Skarphed, hvormed det er betegnet i Marken. Maalene til et i sig selv vagt Punkt, f. Eks. en Søgrænse eller en nedtrampet og ujævn Grøftekant angives saaledes kun i hele eller halve Meter, og til en Bevoksningsgrænse behøver man maaske endogsaa kun at bestemme dem ved Skridtning. Ganske anderledes forholder det sig med de vigtige og faste Punkter, navnlig Skelpunkter, der er fastslaaede ved en lovformelig Konstateringsforretning, men ogsaa Hushjørner, skarpe Grøftehjørner o. l.; disse angives i Almindelighed i halve Decimeter, undtagelsesvis i Centimeter, og ved Opmaalinger af dyre Byggegrunde anvendes selvfølgelig den højeste Grad af Nøjagtighed, o: Maalene noteres da i Millimeter.

67. Det enkelte Terrænpunkts Bestemmelse foregaar — ligesom det enkelte Hovedpunkts — efter en af de i § 1 Punkt 7 angivne Fremgangsmaader, som vi her vil omtale i den Orden, i hvilken de hyppigst kommer til Anvendelse.

1. Trekanten bestemt ved 2 Sider og en melleml. Vinkel.

a. Et Terrænpunkt P (Fig. 80) vil være bestemt ved Længden af Perpendikulæren til P paa en Hovedlinje AB og Fodpunktets

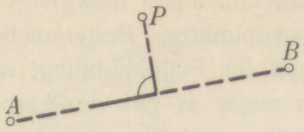


Fig. 80.

Beliggenhed i denne. Idet man maaler ud ad Hovedlinjen, standser man, naar man skønner, at Fodpunktet falder paa den foreliggende Staalbaandslængde; man mærker *P* med en Landmaalerstok, dersom Punktet ikke træder frem i Marken (Hushjørner), Fodpunktet bestemmes ved Hjælp af et Vinkelspejl eller Glasprisme, dets Beliggenhed i Hovedlinjen noteres, og Perpendikulæren maales, dersom den er kort, med Baandmaal, ellers med Staalbaandet taget ud af Linjen. Vinkelspejlet eller Glasprismet bør være forsynet med Lod.

Lange Perpendikulærer (udover et Par Staalbaandslængder) giver en usikker Bestemmelse af Punktet og bør derfor undgaas. Findes der ret mange lange Perpendikulærer vil det desuden af Hensyn til Tiden være hurtigere at indlægge en ny Hovedlinje i kortere Afstand fra vedkommende Terrænpunkter.

Dersom baade Hovedlinjen og Perpendikulæren har betydelig Hældning, kan man ikke anvende Vinkelspejlet eller Glasprismet (se Instrumentlæren), og selv om den ene af de nævnte Linjer er vandret, vil Brugen dog medføre den Ulempe, at Billedet i Spejlet kommer til at staa skævt. I disse Tilfælde tyr man da til Vinkelsøjlen, eller man anvender en af de nedenfor nævnte Fremgangsmaader.

Undertiden anvendes Vinkelspejle, som ikke giver en ret Vinkel, men en Vinkel paa 45^0 eller 60^0.

b. Et Terrænpunkt *P* (Fig. 81) vil være bestemt ved Afstanden fra et Hovedpunkt, *A*, og den Vinkel, som Retningen *AP* danner med en bekendt fra *A* udgaaende Retning, *AB*. Punktet er da bestemt ved polære Koordinater eller Sigte og Maal. *A* vil i Reglen være et Polygonpunkt eller et trianguleret Hovedpunkt; men det kan ogsaa være et Punkt i en Polygonside. Denne Fremgangsmaade kan med Fordel anvendes til Bestemmelse af enkelte Punkter, som ligger langt fra Polygonsider og Maalelinjer; desuden finder det særlig Anvendelse ved den Oppermannske Prøve.

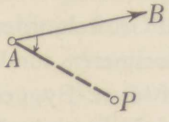


Fig. 81.

P's Koordinater kan beregnes, hvilket bør ske, naar det ligger langt fra *A*; ligger det i Nærheden, kan det indkonstrueres paa Kortet, idet $\angle BAP$ afsættes med Transportør.

2. Trekanten bestemt ved 3 Sider.

Et Terrænpunkt *C* (se Fig. 73 Side 86) vil være bestemt ved

dets Afstande fra to Hovedpunkter. I de fleste Tilfælde vil disse ligge i en Hovedlinje, i hvilken de vælges, samtidig med at denne maales, og naar ikke andre Hensyn gør sig gældende, er det bekvemt at vælge dem i to 20 Meters Punkter. Punkterne, *A* og *B*, saavelsom Terrænpunktet, *C* (dersom dette da ikke træder frem i Terrænet), mærkes med Stokke, der i *A* og *B* stilles skraat eller mærkes med Signalflag til Adskillelse fra andre Stokke. Afstandene *AC* og *BC* maales, dersom de er korte, med Baandmaal, ellers med Staalbaand, udtaget af Linjen. Man maa her som overalt, hvor Staalbaandet udtages af Linjen, vogte sig for at faa Uorden i Stikkerne.

Kan man ikke se fra *C* til Hovedlinjen, udstikker man to Linjer gennem *C* (skærende hinanden under en god Vinkel) og bestemmer deres Skæringspunkter *A* og *B* med Hovedlinjen, hvorefter *AC* og *BC* samt *A* og *B*'s Afstande fra nærmeste Tohundrede Meters Punkt i Hovedlinjen maales.

Da denne Fremgangsmaade er besværligere end Bestemmelsen ved Perpendikulærmaal, benyttes den kun, naar denne sidste ikke kan benyttes, enten fordi Terrængenstande forhindrer Udstikning og Maaling af en Perpendikulær paa Hovedlinjen til Punktet, eller naar Terrænet hælder.

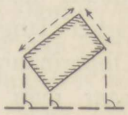


Fig. 82.

Det er, som alt nævnt, kun undtagelsesvis tilladeligt at bestemme et Terrænpunkt i Forhold til andre Terrænpunkter, og dette tør i hvert Fald kun finde Sted, naar disse sidste er skarpt betegnede i Marken og godt bestemte. Er saaledes de tre Hjørner af et Hus eller en Gaard bestemte paa anden Maade (f. Eks. ved Perpendikulærmaal), tør man bestemme det fjerde ved Maal fra to af de andre, saaledes som vist paa Fig. 82.

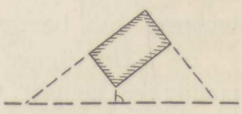


Fig. 83.

En bedre Bestemmelse faas dog i dette Tilfælde som vist paa Fig. 83, hvor der er lagt en Trekant udenom Huset, saaledes at dettes to Vægge falder sammen med Trekantsiderne; det fjerde Hushjørne vil da kunne bestemmes ved Perpendikulærmaal.

3. Trekanten bestemt ved 1 Side og 2 hosl. Vinkler.

a. Et Terrænpunkt kan bestemmes ved Fremskæring ganske paa samme Maade som et Hovedpunkt ved Sigter fra to Polygonpunkter eller trianguleredе Hovedpunkter. Ogsaa denne Fremgangsmaade anvendes til Bestemmelse af enkelte Punkter, som ligger langt fra Polygonsiderne eller Maalelinjerne, endvidere til Bestemmelse af utilgængelige Punkter eller Punkter, til hvilke

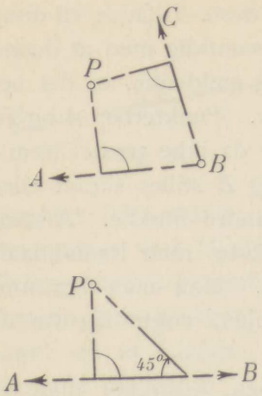


Fig. 84.

Afstanden vanskelig kan maales, samt ved den Oppermannske Prøve.

Punktet indkonstrueres ved Koordinaterne eller direkte.

Et Terrænpunkt kan bestemmes som Skæringspunkt mellem to Perpendikulærer, der er oprejste paa to Polygonsider eller Maalelinjer, som skærer hinanden under en Vinkel, der ikke afviger for meget fra 90^0. I Stedet for de to Perpendikulærer kan anvendes en Perpendikulær paa en Hovedlinje og en Linje, som danner en Vinkel paa 45^0 med samme Hovedlinje. Begge Dele ses paa Fig. 84.

4. Trekanten bestemt ved 1 Side, 1 hosl. og 1 modst. Vinkel.

Et Terrænpunkt kan bestemmes ved Sideskæring, ganske paa samme Maade som et Hovedpunkt, i Forhold til to Polygonpunkter eller trianguleredе Hovedpunkter. Denne Fremgangsmaade anvendes til Bestemmelse af enkelte Terrænpunkter, som ligger langt fra Polygonsider eller Maalelinjer, samt ved den Oppermannske Prøve, men den er selvfølgelig kun anvendelig, naar man kan faa Opstilling i Punktet. Punktet kan indkonstrueres ved Koordinaterne eller direkte.

5. Tilbageskæring i Forhold til Polygonpunkter eller trianguleredе Hovedpunkter kan undtagelsesvis anvendes til Bestemmelse af afsides beliggende Terrænpunkter. Fremgangsmaaden anvendes meget ved den Oppermannske Prøve. Koordinaterne maa beregnes.

68. Det ligger i Sagens Natur, at man ikke ved en Opmaaling er henvist til en enkelt af de her angivne Fremgangsmaader til Terrænpunkters Bestemmelse; man maa tværtimod afpasse Fremgangsmaaden efter Omstændighedernes Krav, og der kan komme Tilfælde, hvor ingen af de angivne Fremgangsmaader er anvendelige, og hvor man altsaa maa hjælpe sig paa anden Maade.

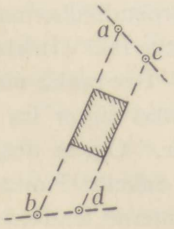


Fig. 85.

Der kan ikke skelnes bestemt mellem de Linjer, som hører til Linjenettet, og de Linjer, som tjener til Bestemmelse af Terrænpunkter; man lægger saaledes ofte med Fordel en Maalelinje gennem et eller flere Terrænpunkter af Hensyn til disses Bestemmelse. Fig. 85 viser

saaledes, hvorledes et Hus kan bestemmes paa en fordelagtig Maade ved Linjerne *ab* og *cd*, som føres mellem Polygonsider eller Maalelinjer.

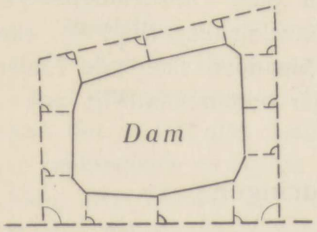


Fig. 86.

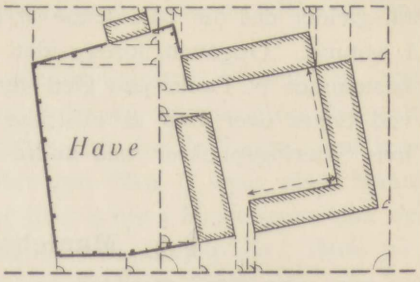


Fig. 87.

Undertiden kan man supplere Linjenettet ved Perpendikulærer, som oprejses med den højeste Grad af Omhyggelighed paa Maalelinjer, idet saadanne Perpendikulærer selv kan benyttes som Maalelinjer; men man bør da skaffe sig Kontrol ved et Tværmaal mellem to Punkter, ét i hver Perpendikulær. Figurerne 86 og 87 viser saadanne Bestemmelser af en Dam og en Gaard. Ligeledes kan Linjenettet stundom suppleres ved smaa Trekanter, som bygges paa Polygonsider eller Maalelinjer; man bør dog altid have Kontrol paa disse Trekanter, hvilket kan faas enten ved Maaling af en Tværlinje eller ved i Polygonsiden (Maalelinjen) at bestemme Fodpunktet til et eller andet Punkt i Trekanten, helst Toppunktet; kan Perpendikulæren maales, opnaas en ypperlig Kontrol, men selv om dette ikke er Tilfældet, er Kontrollen tilstrækkelig.

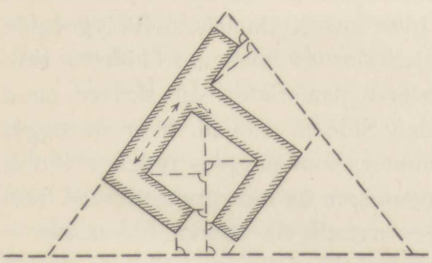


Fig. 88.

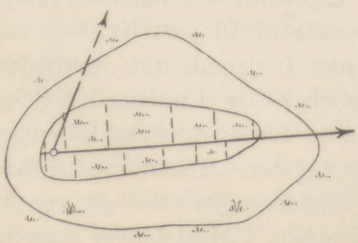


Fig. 89.

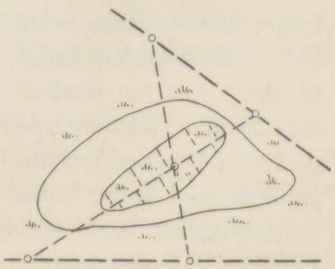


Fig. 90.

Fig. 88 viser Opmaalingen af en Gaard ved en Trekant lagt uden om denne.

Forekommer der i det Terræn, som skal maales, en lille Ø, gælder det om paa denne at bestemme én Linje og et Punkt i samme. Opgaven løses, idet man efter Omstændighederne bestemmer et Punkt paa Øen ved Vinkelmaaling (Fig. 89) eller ved tværs over Øen at udstikke to hinanden skærende Linjer, hvis Skæringspunkter med andre Linjer bestemmes (Fig. 90).

§ 9. Maalebogsføringen.

69. Ved Detailmaalingen har det en overordentlig stor Betydning, at Resultatet af Maalingen er omhyggelig opskrevet, at hvert Tal er tydeligt, og at man ikke kan være i Tvivl om, hvorhen det hører; og da enhver Sagkyndig skal kunne forstaa Opskriften, maa der ved denne følges visse almindelige Regler. Her skal omtales to Metoder, som vi vil benævne Maalebogsmetoden og Maalebladsmetoden.

Ved Maalebogsmetoden, som er anvendt i det øverste Eksempel paa Plan 3, føres hver enkelt Maalelinje (Polygonside) for sig. Maalene i selve Linjen skrives imellem to lodrette Streger, idet man begynder nederst paa Siden og skriver opad. Perpendikulærerne vises til den Side af Linjen, hvor de ligger, og de ved disse bestemte Punkter, som angives tydeligt ved en lille Prik, forbindes, efterhaanden som de indtegnes; derved fremkommer i Maalebogen en — naturligvis stærkt forvansket — lille Skitse af Terrænet omkring Maalelinjen. Skitsen træder tydeligere frem, naar man tænker sig Strimlen mellem de to lodrette Streger udklippet, og de afklippede Stykker satte sammen; men de to Streger har den Fordel, at man mellem dem faar god Plads til Maalene i Linjen. Skal de indtegnede Terrænpunkter forbindes med andre Terrænpunkter, som ikke er maalte fra samme Linje, maa der ikke savnes en Henvisning til den Linje, hvorfra disse er bestemte. Ligeledes bør paa hver enkelt Side i Maalebogen findes en Angivelse af Linjens Nr. svarende til det, som er paaført Linjen paa Linjenetkortet; endvidere maa Linjens Retning, dens Begyndelses- og Endepunkts Beliggenhed i Polygonpunkter eller i andre Linjer og dens Skæringspunkter med andre Linjer nøjagtig angives. Afstandene til Skæringspunkterne med andre Linjer understreges med én og Afstandene til Endepunktet med to Streger. I Maalebogen maa anvendes de sædvanlige Signaturer, altsaa Signaturer for Bevoks-

ningen, for Stengærder, levende Hegn o. s. v.; endvidere maa Matr. Nr. eller anden Ejendomsbetegnelse paaskrives, og Skellene kan passende betegnes ved Kryds. Alle Navne paaføres, og det angives, hvor de ved Opmaalingens Grænser afbrudte Veje fører hen.

Maalebogen bør være saaledes indrettet, at man let finder enhver Linje. Dette kan opnaas derved, at man giver de maalte Linjer (Polygonsider og Maalelinjer) fortløbende Numre — saaledes som det er vist paa Linjenettet paa Plan 1, hvor disse Numre er omkredsede — og saa fører hver Linje i Maalebogen paa den Side, hvis Sidetal er det samme som Linjens Nr.; dette vil i Reglen ikke være vanskeligt, da de fleste Linjer kan staa paa én Side, og er dette ikke Tilfældet, kan man ved Maalebogens Paginering lade de Sider, over hvilke en Linje strækker sig, have samme Sidetal og derhos et Bogstav (f. Eks. *7a*, *7b* o. s. v.). Volder denne Ordning Vanskelighed, maa man foran i Maalebogen sætte en Indholdsfortegnelse, som angiver paa hvilken Side i Bogen hver enkelt Linje findes.

Endelig er det en Selvfølge, at man paa Maalebogens Titelblad nøjagtig maa angive, hvad Maalingen omfatter, naar den har fundet Sted samt Maalerens Navn og Stilling.

Ved Maalebladsmetoden, som er anvendt i det nederste Eksempel paa Plan 3, tegnes et helt lille Kort, et Maaleblad, til hvilket man dog ikke stiller Fordring om Nøjagtighed; men paa den anden Side kan et saadant Maaleblad, naar det da er omfattende og indholdsrigt, ikke tegnes helt paa fri Haand; Linjenettet maa i hvert Fald indtegnes nogenlunde rigtigt, inden Maalingen begynder, og ved Afsætningen af de enkelte Maal staar man sig — naar man da ikke er meget øvet — ved at anvende en lille Kantmaalestok.

Medens man enkelte Steder tilstræber at gøre Maalebladene saa store som muligt, benytter man andre Steder ganske smaa Maaleblade, og det vil ses, at man da nærmer sig meget stærkt til Maalebogsmetoden, særligt naar man ved denne erstatter de to Streger med en enkelt Streg og fører Maalene i Linjen paa Siden af denne.

Hvor Maalebladene afbrydes, maa der findes en Angivelse af det tilgrænsende Maaleblads Nr. I Eksemplet paa Plan 3 er fulgt det Princip, at Maalene i en Linje paaskrives Maalebladet saaledes, at Tallene staar vinkelret paa Linjens Retning og vender Foden mod Linjens Nulpunkt; dersom de hører til et Linjenetpunkt, er de understregede med én Streg, og angiver de Linjens

Endepunkt, med to Streger. Iøvrigt maa Maalebladet ligesom Maalebogen forsynes med Signaturer, Titel o. s. v.

Maalebladets omtrentlige Maalestoksforhold er afhængigt af, hvor tæt Terrængenstandene ligger; i aabne Terræner kan de tegnes i 1:2000, i tæt bebyggede Landsbyer eller i Byer maa man stundom gaa helt op til 1:200. Man kan iøvrigt benytte Maalebladе i forskellige Maalestoksforhold til de forskellige Terrændele.

Undertiden, f. Eks. i Bayern, fører man Maalebladene med autografisk Blæk i Marken for at kunne mangfoldiggøre dem uden at udsætte sig for, at der derved skal komme Fejl ind, medens man andre Steder, f. Eks. i Baden, fotograferer dem.

III. Særlige Opmaalinger.

§ 10. Matrikulsmaalinger.

70. Vor Matrikul har hidtil været en *Skattematrikul*, idet den indeholder det nødvendige Materiale til en rigtig Fordeling af Grundskatterne. Matrikulsmaalingerne er derfor udførte med det Formaal at tilvejebringe Matrikulskort, der kunde tjene til Beregning af Ejendommenes Arealer og — efter at Jorderne var boniterede — af Ejendommenes Hartkorn. Man har aldrig lagt Vægt paa at gøre Matrikulen til en *Ejendomsmatrikul*, ɔ: at tillægge Matrikulsmaalingerne Betydning i Ejendomsspørgsmaal, ja, i Henhold til Rentekamrets Cirkulære af 29. Juni 1844-g blev det endogsaa foreskrevet, at der skulde paategnes enhver Kopi af Matrikulskortene, at den »ikke tjener til Hjemmel i Ejendomstrætter«.

Efter at Hartkornet nu ved Lov af 15. Maj 1903 bortfalder som Skattebasis fra Aar 1925, har Matrikulen fra nævnte Tidspunkt tabt sin Betydning som Skattematrikul; men samtidig har der her — som mange andre Steder — rejst sig et Krav om, at Matrikulen maa blive en Ejendomsmatrikul.

Det er imidlertid indlysende, at der maa stilles ganske andre Fordringer til en Opmaaling, der skal tjene til Grundlag for en Ejendomsmatrikul, end til en Opmaaling, som kun skal tjene til Grundlag for en Skattematrikul.

Som Grundlag for en Ejendomsmatrikul maa man forlange: En teknisk rigtig udført Opmaaling paa et juridisk rigtigt Grundlag, hvortil kræves.

1. Forud for Opmaalingen maa alle Skelpunkter være ganske bestemt definerede, ɔ: Skelpunkterne maa paa en eller anden

Maade være lovformelig fastslaaede, *konstaterede*, og betegnede med en Pæl eller paa anden Maade.

2. Man maa have Sikkerhed for, at Skelpunktet ikke er forandret i Tiden mellem dets Konstatering og dets Indmaaling, f. Eks. derved at Pælen er flyttet. Denne Sikkerhed kan faas enten derved, at man samtidig med Konstateringen maaler mindst 3 Afstande fra faste Terrænpunkter saasom Hushjørner eller lignende, eller derved, at Maalingen foregaar umiddelbart efter Skelkonstateringen.

3. Skelpunktet maa indmaales med en Nøjagtighed, som svarer til den Nøjagtighed, med hvilken det er angivet ved Skelkonstateringen, hvorhos man maa have Sikkerhed for, at det er rigtig indmaalt. Denne Sikkerhed kan opnaas enten derved, at det indmaales dobbelt fra to forskellige Linjer, eller ved to uafhængige Maalinger fra samme Linje.

4. Indmaalingen af Terrænpunkter maa udføres i Forhold til Polygon- og Linjenetpunkter, som er saa sikkert betegnede i Marken, at de altid kan genfindes. Det vil da være muligt til enhver Tid at genfremstille ethvert Terrænpunkt med en til Maalingen svarende Nøjagtighed.

5. Et ved Triangulation hele Landet over paa Sfæroiden (se 2. Afsnit) bestemt System af Hovedpunkter maa tjene som 1. Ordens Grundlag for Maalingen; og dette Systems Punkter maa henføres til saa mange forskellige Koordinatsystemer, at Udstrækningen af disse ikke bliver større, end at hvert enkelt af dem indenfor Maalingsnøjagtigheden kan betragtes som plant, hvorefter Triangulationen maa føres saa langt ned, at de trianguleredе Punkter kommer til at ligge saa tæt, at der mellem dem kan føres brudte Linjer, og at alle Terrænpunkter kan bestemmes fra disse eller fra Maalelinjer, som føres mellem dem.

Her er angivet, hvorledes der forholdes med Skelpunkternes Definering og Indmaaling; ved Matrikulsmaalinger indmaales imidlertid ogsaa andre Terrængenstande, men da Bestemmelsen af disse har mindre Betydning, indmaales de i Reglen kun én Gang, dog er det meget at tilraade, selv om man har bestemt alle en Bygnings Hjørner direkte, at skaffe sig Kontrol ved at maale alle Murenes Længder.

§ 11. Bymaalinger.

71. Bymaalinger frembyder i mange Henseender særlige Forhold, af hvilke de vigtigste skal omtales her, uden at det dog kan ske paa en udtømmende Maade.

Formaalet med Bymaalinger er, foruden den rent matrikulære Bestemmelse af Ejendomsskellene, i Almindelighed at tilvejebringe meget nøjagtige og meget detaillerede Kort i stor Maalestok over Byen til Brug for Administrationen og ved alle tekniske Anlæg. Det er af største Betydning for Byens forskellige Administrationsgrene, saasom Brolægnings-, Vand-, Belysnings-, Brand-, Kloakvæsen, for Sporvejs-, Telefon- og Telegrafanlæg m. fl., at der foreligger nøjagtige Kort; eksempelvis skal Opmærksomheden blot henledes paa, hvor vigtigt det er ved Nedlægning af en eller anden Ledning at vide, hvor alle andre Ledninger, Kloaker o. lign. i Gaden ligger.

Der kan naturligvis stilles meget forskellige Fordringer til saadanne Kort; men i Almindelighed forlanges det, at de skal angive:

1) Ejendomsskel (som ofte falder sammen med Husmurenes Yderkant), Gader med Fortove og Rendestene, Gadebelægningens Art (Brolægning, Asfaltering, Træbrolægning o. s. v.); Huse med alle fremspringende Piller, Trapper, Kælderhalse og Nedløbsrør og Haver med Plankeværker, Stakitværker, Hække o. s. v.,

2) Sporvejsskinner, Standere til elektriske Ledninger, Lygtepæle, Kloakbrønde, Vandhaner o. l. og

3) Beliggenheden af underjordiske Gas-, Vand- og elektriske Ledninger, samt Kloaker, ikke alene Hovedledningerne, men ogsaa Sideledningerne, som fører ind i de enkelte Ejendomme. Det er imidlertid indlysende, at underjordiske Ledninger m. m. kun kan indmaales, samtidig med at de bliver nedlagte eller eftersete.

Ved de store Byer kan der udfærdiges særlige Planer over de underjordiske Anlæg, altsaa foruden de anførte tillige over underjordiske Bane- og Sporvejsanlæg m. m.

At saadanne detaillerede Opmaalinger bliver meget dyre, er en Selvfølge, og det drejer sig ikke alene om Udgifter til Opmaalingen men tillige om en vedblivende aarlig Udgift til Vedligeholdelsen; thi skal disse Opmaalinger have vedvarende Betydning, maa de holdes fuldstændig à jour. Der er imidlertid ikke Tvivl om, at det i Længden bliver mest økonomisk for en stor Bys Administration, at oprette et permanent Opmaalingsbureau med det Hverv at tilvejebringe detaillerede Opmaalinger og Kort og holde dem à jour. Dette Bureau maa da levere Kopier af Kortene til de forskellige Administrationsgrene og udføre de særlige Opmaalinger, som disse har Brug for, og det bør vel derhos gøres de andre Administrationsgrene til en Pligt, hver Gang de foretager Forandringer i Gaderne, og da særlig underjordiske Forandringer, at anmelde det for Op-

maalingsbureauet, for at dette kan foretage de fornødne Indmaalinger, for de underjordiske Forandringers Vedkommende inden Tildækningen sker.

72. Bymaalingen baseres paa en Triangulation, som ofte maa føres langt uden om Byen; det vil i Reglen kun lykkes at bestemme ganske faa Jordpunkter inde i Byen, og da man netop her har Brug for mange trianguleredе Punkter, maa de fleste blive utilgængelige, Taarnspir eller andre fremtrædende Punkter paa monumentale Bygninger; det kan da ofte være vanskeligt at faa nærliggende Punkter satte i bestemmende Forbindelse med hinanden; man maa hjælpe sig ved ekscentriske Vinkelmaalinger og ved, hvor det er muligt, at bestemme Jordpunkter paa aabne Pladser. Det bliver altsaa nødvendigt forud for Polygonmaalingen at nedføre de utilgængelige Punkter, og til de nedførte Punkter knyttes de brudte Linjer. Som Følge af det store Nøjagtighedskrav, der stilles til en Bymaaling, er det muligt, at en til Grundlag for Matrikulsmaalingerne fuldt god Triangulation af Landet ikke vil være tilstrækkelig til Grundlag for Bymaalingen; man maa da udføre den fundamentale Triangulation lokalt, idet man dog efter Omstændighederne benytter én Side og én Azimuth eller kun én Azimuth fra den foreliggende Triangulation.

En Vanskelighed, som vi senere skal komme tilbage til, opstaar ved Afmærkningen af Triangulations- og Polygonpunkter; foreløbig vil vi tænke os dem betegnede ved Gasrør, som drives ned mellem Brostenene.

Ved Polygonmaalingen føres der brudte Linjer gennem Gaderne, hvorved der mellem disse opstaar Karréer, i hvis Ydergrænser der findes en Række Polygonpunkter. Vinklerne maales paa sædvanlig Maade; den nøjagtige Opstilling af Theodoliten over Polygonpunktet har her en særlig Betydning, fordi det ofte er umuligt at undgaa korte Sigter. Stativet kan selvfølgelig ikke trædes fast i Jorden, saa Maalingen maa udføres med megen Forsigtighed, og af Hensyn til Centreringen er det næsten nødvendigt, at Theodoliten maa kunne forskydes paa Stativet. Da det er vanskeligt eller maaske endogsaa umuligt at opstille Stokke eller andre Signaler i Polygonpunkterne, (det skulde da være en Stok, som afstives med et trebenet Jærnstativ), benytter man et Sigteapparat, som kan sættes paa et Stativ; man har da ét Stativ med Theodoliten i Toppunktet og ét Stativ med Sigteapparat i hvert af de Punkter, til hvilke der skal sigtes.

Da man ikke kan anbringe Stokke i eller mellem Brostenene,

tegner man Polygonsiderne med Rødkridt paa Brostenene eller Fliserne. Dette udføres saaledes: En tyk Snor af indtil 30 Meters Længde kridtes ind og strammes godt ud mellem Mærkerne i Endepunkterne, i hvilke den fastholdes derved, at to Medhjælpere træder paa den; derpaa løfter man den op i Midten og lader den slaa ned paa Brostenene, paa hvilken der da, naar Snoren fjernes, staar en tyk Kridtstreg. Er Linjen længere end Snoren, maa man ved Hjælp af Theodoliten afmærke nogle Punkter i Linjen, som derpaa efterhaanden tegnes mellem disse. Til Sidemaalingen kan man med Fordel anvende Maalestænger, som iøvrigt ikke hidtil har fundet Anvendelse her i Landet. Staalbaandsmaaling er paa Grund af Vanskelighederne ved Stikkernes Anbringelse ikke heldig.

Endnu skal fremhæves den overordentlig store Vanskelighed, som voldes Bymaalingerne af Trafikken i Gaderne, der ofte gør det nødvendigt at udføre Opmaalingsarbejderne, og da særlig Vinkelmaalingen, i den meget tidlige Morgenstund; og det skal bemærkes, at det i Reglen vil være lettest at maale Vinkler, naar Polygonsiderne lægges tæt udenfor Fortovenes Bordurstene eller maaske i brede Gader langs Gadens Midtlinje, da Trafikken fordeler sig paa begge Sider af denne, og da der aldrig holder Køretøjer i denne.

Gennem de enkelte tidligere omtalte Karréer maa der føres det fornødne Antal brudte Linjer og Maalelinjer; det vil imidlertid ofte være vanskeligt at føre de brudte Linjer igennem fra et Polygonpunkt i Karréen til et andet, saa at man kan blive nødt til at benytte blinde, brudte Linjer, ved hvilke man da maa sikre sig Rigtigheden af Maalingen ved at gentage denne. Ligeledes tvinges man ofte til — for at kunne faa de fornødne Linjer ind i Gaardene eller de tætte Bygningskomplekser — fra Polygonsiderne at udstikke blinde Linjer, hvis Længde og Vinkel med Polygonsiden maales; fra disse Linjer, som hyppig maa føres gennem smalle Porte eller Gennemgange, bestemmes saa de enkelte Terrænpunkter.

Maalelinjerne tegnes paa samme Maade som Polygonsiderne paa Stenbroen eller Fliserne med Kridt og maales med Maalestænger. Til Opsøgning af Fodpunkterne kan man, da Linjerne ikke er udstukne, ikke benytte Vinkelspejl; man har med Fordel benyttet en Vinkel af Træ med Ben af $1-1\frac{1}{2}$ Meters Længde; denne lægges direkte paa Jorden med det ene Ben langs Maalelinjen, hvorefter den forskydes langs denne, til det andet Ben peger mod det Punkt, der skal bestemmes, hvilket man over-

beviser sig om, f. Eks. ved at forlænge Benet med en Træstang (Maalestangen). Med dette Apparat mærkes efterhaanden alle Perpendikulærernes Fodpunkter paa Stenene med Rødkridt,

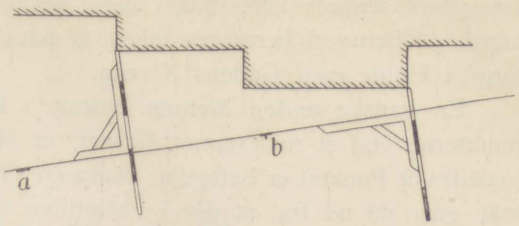
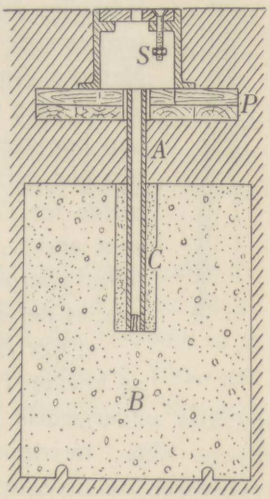


Fig. 91.

og Maaleren kan da umiddelbart aflæse disses Beliggenhed i Linjen og maale Perpendikulærernes Længde. Af Fig. 91, som er taget af en Afhandling i »Zeitschrift für Vermessungswesen 1888« om Berlins Maaling, forstaas den der anvendte Fremgangsmaade; ved *a* og *b* er vist Mærker i Fliserne.

73. En Bymaalings Betydning for Fremtiden beror væsentlig paa, hvor nøjagtigt man til enhver Tid kan paavise Fikspunkterne, ɔ: Triangulations-, Polygon- og maaske tillige Linjenetpunkterne. Men Sikringen af Fikspunkter i Byer er meget vanskelig, dels fordi der i den store By foregaar idelige Forandringer i Gaden, hvorved de vil udsættes for Beskadigelse, og dels fordi det er saa overordentlig vanskeligt at faa Arbejderne til at forstaa Betydningen af Fikspunkternes Bevarelse.

Anvendelsen af Granitsten kan ikke tilraades; thi selv om de sættes i Beton med den øverste Flade i Højde med Fortovets Fliser, vil det rimeligvis ved det første Jordarbejde i Gaden blive nødvendigt at optage dem, eller ogsaa vil de — hvad næsten er endnu værre — være udsatte for at blive forskudte. Den underjordiske Afmærkning er bedre; men ogsaa den kan blive forstyrret ved underjordiske Arbejder. I Kjøbenhavn har man afmærket Polygonpunkter med et underjordisk lodretstaaende, 0.6 m. langt Jærnrør, *A* (Fig. 92), som er faststøbt i en Cementkappe, *C*, der atter er indsat i en Betonstøbning, *B*. Røret stikker op gennem et dobbelt Plankelag, *P*, ovenpaa hvilken der hviler en firkantet, 0.2 m. dyb Jærnkasse med Laag; dette kan løftes op og drejes til Siden om Skruen *S*, hvorefter en Stok kan sættes ned i Jærnrøret.



1/20 s. S.

Fig. 92.

Laagets Overflade kan, naar man hæver eller sænker Plankelaget — hvorved Jærnrøret bliver ubeskadiget — bringes til at ligge i Højde med Gadens Niveau.

En ganske anden Metode bestaar i kun at afmærke Fikspunkterne ved et nedrammet Gasrør, et Mærke i en Flise e. l., saaledes at Punktet er betegnet, saalænge Opmaalingen staar paa; man gaar da ud fra, at der i Fremtiden vil bevares saa mange af Terrænpunkterne, at man til enhver Tid kan fremstille Maalelinjerne eller Polygonsiderne og i disse finde Polygon- og Linjenetpunkterne ved Maal fra Perpendikulærernes Fodpunkter. Det gælder da om hertil at benytte meget sikre Terrænpunkter som f. Eks. Hjørnerne af monumentale Bygninger.

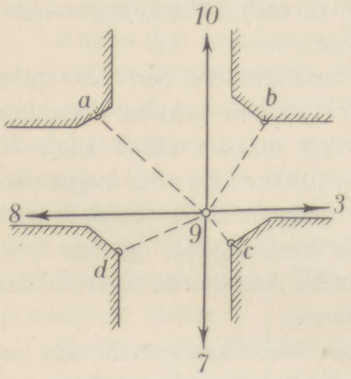


Fig. 93.

Desuden mærker man de forlængede Polygonsiders Skæring med Husmure, Sokler e. l. ved Bolte, som indmures i disse, eller man hugger smaa Mærker i solide Fundamenter eller Fliser.

Endvidere kan man sikre Fikspunkterne ved meget nøjagtige Maal fra tre eller flere saadanne Bolte, saaledes som vist paa Fig. 93, hvor der er taget Maal til de med Bolte mærkede Punkter *a*, *b*, *c* og *d*. De nævnte Bolte kan have forskellig Form; i Strassburg har man anvendt dem, som er viste i Fig. 94. En væsentlig Betingelse for denne Metodes Anvendelse er, at Opmaalingen stadig holdes à jour, man vil nemlig da altid have Terrænpunkter, som kan benyttes ved Fikspunkternes Genfremstilling. Iøvrigt bør det paabydes alle Administrationsgrene at anmelde for Opmaalingsbureauet, hver Gang der ved et eller andet Arbejde er Fare for Beskadigelse af et Fikspunkt eller en af de omtalte Bolte; men Erfaringen tyder paa, at det er vanskeligt at overholde et saadant Paabud.


4/5 s. St.
Fig. 94.

Efter Erfaringerne synes det at være fordelagtigst at bevare Triangulationspunkterne og en Del Polygonpunkter underjordisk, og med disse føres da en vis Kontrol fra Byens Side; hvorimod de øvrige Polygonpunkter og Linjenetpunkterne kun betegnes ved Gasrør eller Mærker i Fliserne, og disse Mærker saavelsom de ovenfor omtalte Mærker i Murene erstattes

da med nye Mærker, første Gang der maales i Gaden, efter at Brolægningen eller Fliserne er omlagte eller Huse ombyggede.

---

3. Kapitel.

Bordmaaling.

§ 12. Almindelige Bemærkninger om Bordmaaling.

74. Medens Resultatet ved de hidtil omtalte Opmaalingsmetoder foreligger i Talform, fremstilles det ved Bordmaalingen grafisk, idet hvert enkelt Punkt, Hoved- eller Terrænpunkt, indkonstrueres direkte paa Maalebordet, hvorefter Terrænpunkterne straks ude i Marken forbindes med hverandre, saa at der opstaar et Kort, som kun behøver at trækkes op efter Hjemkomsten for at være færdigt.

Dersom man turde gaa ud fra, at de ved Bordmaalingen anvendte Instrumenter kunde give samme Nøjagtighed, som de ved de hidtil omtalte Metoder anvendte — hvilket dog ikke er Tilfældet — og at Nøjagtigheden ved Konstruktionen paa Maalebordet er lig den, hvormed et Kort kan konstrueres hjemme, vilde en Opmaaling, som kun har det Formaal at tilvejebringe et Kort, kunne udføres ligesaa godt ved Bordmaaling som ved andre Metoder, idet vi dog ser bort fra den Nøjagtighedsforøgelse, som ved disse sidste opnaas gennem en Fejlfordeling. Men Opmaalingens Formaal er ingenlunde altid — ihvert Fald ikke alene — at tilvejebringe et Kort, og den tidligere omtalte Metode, Talmetoden, har derfor flere Fordele fremfor Maalebordsmetoden. Disse er navnlig:

a) Ved Talmetoden har man noteret og opbevaret selve de i Marken tagne Maal, som selvfølgelig er nøjagtigere end dem, som man senere maatte tage paa Kortet; og i alle Tilfælde, hvor man kan benytte selve de i Marken tagne Maal (f. Eks. ved Arealberegninger), faar man altsaa et langt nøjagtigere Resultat ved Talmetoden.

b) Ved Talmetoden foreligger Maalingsresultatet i Maalebogen (Maalebladet), som er uforgængelig, idet den kan mangfoldiggøres paa en sikker Maade; ved Maalebordsmaalingen

derimod kan det tilvejebragte Kort blive ødelagt og beskadiget, maaske inden det er færdigt, og dette kan man ikke sikre sig imod ved Mangfoldiggørelse, som desuden nødvendigvis maa medføre et Nøjagtighedstab.

c) Bordmaalingen tager længere Tid i Marken og bliver derfor dyrere end Talmetoden (saml. Side 13), og det saa meget mere som man er langt mere afhængig af Vejret, idet man ikke alene ikke kan arbejde i Regnvejr men ikke en Gang i fugtigt Vejr, da Papiret saa slaar Bobler.

d) Ved Bordmaalingen er man, da alt konstrueres straks, afskaaren fra at kunne foretage nogen Udjævning.

e) Bordmaalingen kræver langt mere Øvelse.

f) Bordmaalingen kræver et aabent og overskueligt Terræn; i Skovterræner er den uanvendelig, hvorimod man ved Polygonmaaling kan komme igennem omtrent overalt (se Side 81).

Som Følge af det anførte anvendes Bordmaaling ikke meget i den økonomiske Landmaaling, hvorimod den finder en endogsaa meget udstrakt Anvendelse ved topografiske Opmaalinger, ved hvilke Opgaven er at tilvejebringe et Kort i lille Maalestoksforhold. Alle de af den danske Generalstab udgivne Kort er saaledes optagne med Maalebord.

Tidligere, da ogsaa de økonomiske Opmaalinger havde til Formaal at tilvejebringe Kort, medens man ikke lagde Vægt paa Maalebogens Tal, er Maalebordet anvendt meget ved disse Maalinger.

§ 13. Hovedpunkters Bestemmelse.

75. Af de i § 4 angivne Metoder til Udførelse af Opmaalinger, hvis Resultat foreligger i Talform, finder Triangulation og Polygonmaaling ogsaa Anvendelse ved Bordmaaling, idet man ved disse skaffer sig et Net af Hovedpunkter over det Terræn, som skal maales; og det er ogsaa her en absolut Fordring, at man har overskydende Maal; men ved Bordmaalingen kan disse kun tjene til Sikkerhed mod grove Fejl, hvorimod en Forøgelse af Nøjagtigheden ved Fejludjævning, som alt nævnt, er umulig. Ved Triangulationen bestemmes derfor hvert enkelt Punkt i Forhold til de foregaaende ved Frem-, Side- eller Tilbageskæring, hvorfor hver enkelt af disse skal særlig omtales. Af meget stor Betydning for Resultatets Nøjagtighed er det, at Papiret er ud-

spændt stramt paa Maalebordet; dette opnaas bedst derved, at man væder det, inden det paaklistres, hvilket imidlertid medfører den Ulempe, at Papiret, naar det atter afskæres, krymper sig stærkt og maaske endogsaa uregelmæssigt. Man har, for at undgaa dette, klistret Papiret paa Zinkplader, som befæstes til Maalebordet, saa at det originale Kort kan blive siddende paa Zinkpladen og derved bevares uden væsentlig Indkrympning i Fremtiden.

Fremskæring og Sideskæring.

76. Skal Hovedpunktet P bestemmes ved Fremskæring fra A og B (Fig. 95), mellem hvilke der kan faas Sigte, og som forud findes aflagte paa Maalebordet, som a og b, orienteres Bordet først over A efter B, Linealkanten lægges til a, Sigtet rettes mod P, og Sigtestregen trækkes; derefter orienteres Bordet over B efter A, Linealkanten lægges til b, Sigtet rettes mod P, og Sigtestregen trækkes; p er da bestemt som Skæringspunktet mellem de to Sigtestreger.

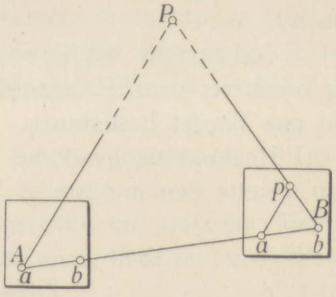


Fig. 95.

Havde man ikke Sigte mellem A og B, men var andre fra A og B udgaaende Retninger forud aflagte paa Maalebordet, vilde Fremgangsmaaden være den samme, idet man da orienterede over A og B efter disse Retninger.

Er der paa Bordet aflagt et tredje Punkt c, kan man prøve Bestemmelsen af p, idet man, naar man har orienteret over C, lægger Linealkanten til c, retter Sigtet mod P og prøver, om Sigtestregen gaar gennem p.

Fremskæring anvendes kun til Fastlæggen af Hovedpunkter, i hvilke man ikke kan faa, eller i hvert Fald ikke senere skal have Opstilling.

77. Skal Hovedpunktet P bestemmes ved Sideskæring i Forhold til A og B (Fig. 96), der forud er aflagte paa Bordet, som a og b, orienteres Bordet først over A efter B, Linealkanten lægges til a, Sigtet rettes mod P, og Sigtestregen trækkes; derefter opstilles Bordet over det Punkt P, som ønskes aflagt, og orienteres efter den aflagte Retning pa, hvilket bliver nøj-

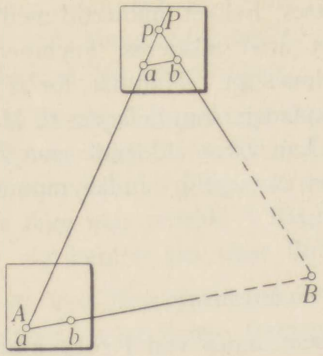


Fig. 96.

agtigst, naar man har kunnet udstikke den tilsvarende Linje i Marken paa begge Sider af P. Endelig lægges Linealkanten til Punkt b, Sigtet rettes mod B, og Sigtestregen trækkes. Skæringspunktet, p mellem denne Sigtestreg og Sigtestregen ap svarer da til det Punkt i Linjen AP, som ligger i dets Vertikal. Ligger Punktet P, i hvilket Signalet oprindelig stod, ikke nøjagtig lodret under p, bestemmer man ved Lodning dettes Projektion og oprejser Signalet her, dersom det skal bruges paa ny.

Sideskæringen medfører den store Fordel, at man faar Bordet orienteret over P, samtidig med at dette Punkts Beliggenhed paa Bordet bestemmes.

I Henhold til, hvad der er sagt i Punkt 41 (Side 50), bør man afsætte den mindste af Vinklerne i A eller B.

Tilbageskæring.

78. Dersom Punkterne A, B og C er betegnede i Marken, og de tilsvarende Punkter a, b og c er afsatte paa Bordet, kan man ved Tilbageskæring bestemme det til Punktet P i Marken svarende Punkt p paa Bordet saaledes: Man opstiller Bordet over P (Fig. 97), bestemmer ved en Lodgaffel det i P's Vertikal liggende Punkt paa Bordet, lægger Linealkanten til dette, idet man efterhaanden retter Sigtet mod A, B og C og tegner de tilsvarende Sigtestreger, hvorved man faar afsat Vinklerne v_1 og v_2. Punktet P kunde da konstrueres som Skæringspunkt mellem to Cirkler henholdsvis over ac, rummende Vinkel v_1, og over bc, rummende Vinkel v_2, dog ses det, at dersom P ligger paa Cirklen gennem de tre givne Punkter, er Opgaven ubestemt.

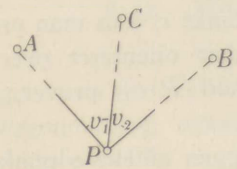


Fig. 97.

Vil man have Bordet orienteret, maa man da bagefter for-

skyde og dreje det, indtil p ligger i P's Vertikal, og Sigtet træffer et af de givne Punkter, naar Linealkanten er lagt til p og det tilsvarende Punkt paa Bordet.

Denne Metode er meget besværlig, og Konstruktionen vil derhos næppe give fornøden Nøjagtighed.

Bedre er det paa Bordet at fastspænde et Stykke Kalkerpapir og paa dette, idet man iøvrigt bærer sig ad som angivet, tegne Sigtestregerne til A, B og C med Linealkanten lagt til det Punkt paa Bordet, som ligger i P's Vertikal, hvorefter Kalkerpapiret løses og forskydes paa Bordet, indtil Sigtestregerne gaar gennem a, b og c; deres Skæringspunkt prikkes igennem, hvorved det søgte Punkt p er bestemt.

Har man foretaget en foreløbig Orientering og valgt P lodret under det Punkt paa Bordet, hvor p skønnes at ville komme til at ligge, vil man i Reglen, da Afstanden mellem P og p's Projektion er grafisk forsvindende, kunne opnaa den endelige Orientering alene ved en Drejning, idet man lægger Linealkanten til en af Sigtestregerne og drejer Bordet, indtil Sigtet træffer vedkommende Signal.

Paa denne Maade kan man benytte mere end tre givne Punkter.

Mest almindelig er det at anvende en indirekte Metode: Bordet opstilles paa det Sted i Terrænet, hvor et Punkt ønskes bestemt, og orienteres foreløbig ved Hjælp af en Orienteringsboussole efter en Nordnaal, som maa være aflagt under en tidligere Orientering.

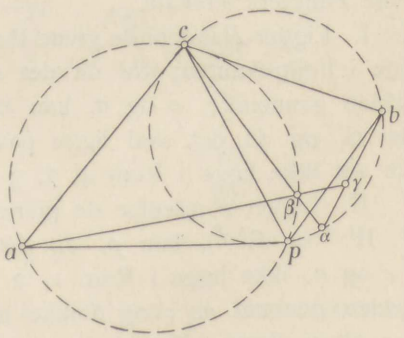


Fig. 98.

Trækkes nu Sigtestregerne Aa, Bb og Cc, vil disse, dersom Orienteringen er rigtig, skære hverandre i ét Punkt, p; men i Reglen vil Orienteringen være urigtig, og Sigtestregerne vil da ikke skære hverandre i ét Punkt, men (se Fig. 98) i tre Punkter, nemlig Bb og Cc i Punkt α, Aa og Cc i Punkt β og Aa og Bb i Punkt γ, hvorved der dannes en lille Trekant, *Fejltrekanten*, (den fejlvisende Trekant).

Da Afstandene mellem α, β og γ og p er grafisk forsvindende, er

$$\angle bac = \angle bpc,\ \angle a\gamma b = \angle apb \text{ og } \angle a\beta c = \angle apc,$$

og det søgte Punkt p (ɔ: Fællespunktet mellem Punktsystemet i Marken og Punktsystemet paa Bordet) ligger altsaa i Skæringspunktet mellem Cirklerne gennem $bc\alpha$, $ac\beta$ og $ab\gamma$, hvoraf følger, at

$$\angle pc\alpha = \angle pb\gamma = \angle pa\gamma;$$

denne Vinkel, som vi vil kalde v, er Bordets Desorientering, ɔ: den Vinkel, som det skal drejes for at blive orienteret.

Er p's Afstande fra Sigtestregerne gennem a, b og c henholdsvis p_a, p_b og p_c, faas da:

$$\sin v = \frac{p_a}{ap} = \frac{p_b}{bp} = \frac{p_c}{cp},$$

ɔ: Punktets Afstande fra de 3 Sigtestreger er proportionale med de tre tilsvarende Sigters Længder. Disse sidste kendes vel ikke nøjagtig, men dog saa nøje, at man paa Skøn kan afsætte Punktet p.

Punktet p's Beliggenhed er imidlertid ikke herved tilstrækkelig angivet; man maa tillige vide, i hvilket af Fejltrekantens 7 Rum det ligger, og dette vil altid kunne ses af P's Beliggenhed i Forhold til de tre givne Punkter.

Vi vil skelne imellem, om P ligger indeni eller udenfor de givne Punkters Trekant.

I. Ligger P indeni de givne Punkters Trekant, maa Punktet p ligge i Fejltrekanten; thi da det skal (se Fig. 99, I) ligge paa Cirklen gennem b, c og α, kan det ikke ligge i Rum 2, 5, 4 eller 6, og da det skal ligge paa Cirklen gennem a, c og β, kan det ikke ligge i Rum 4, 7, 3 eller 5.

II. Ligger P udenfor de givne Punkters Trekant (se Fig. 99, II^a, $II^{b.\alpha}$ og $II^{b.\beta}$), kan p, da det ligger paa Cirklen gennem b, c og α, ikke ligge i Rum 1, 2 eller 6, og da det ligger paa Cirklen gennem a, c og β ikke ligge i Rum 1, 3 eller 7, det maa altsaa ligge i Vinkelrummet 5 eller Siderummet 4, og da i det af disse, i hvilket de to nævnte Cirkler skærer hinanden; men Cirklerne skærer hinanden til den Side af $c\alpha$, til hvilken Tangenterne til de to Cirkler i Røringspunkterne α og β skærer hinanden.

Er Tangenterne $m\beta$ og mar (se Fig. 99, III), bliver $\angle m\beta a = x$ og $\angle bar = y$ (Periferivinkler paa samme Bue), og Tangenterne vil altsaa skære hinanden til den Side, hvor Vinkelrummet er,

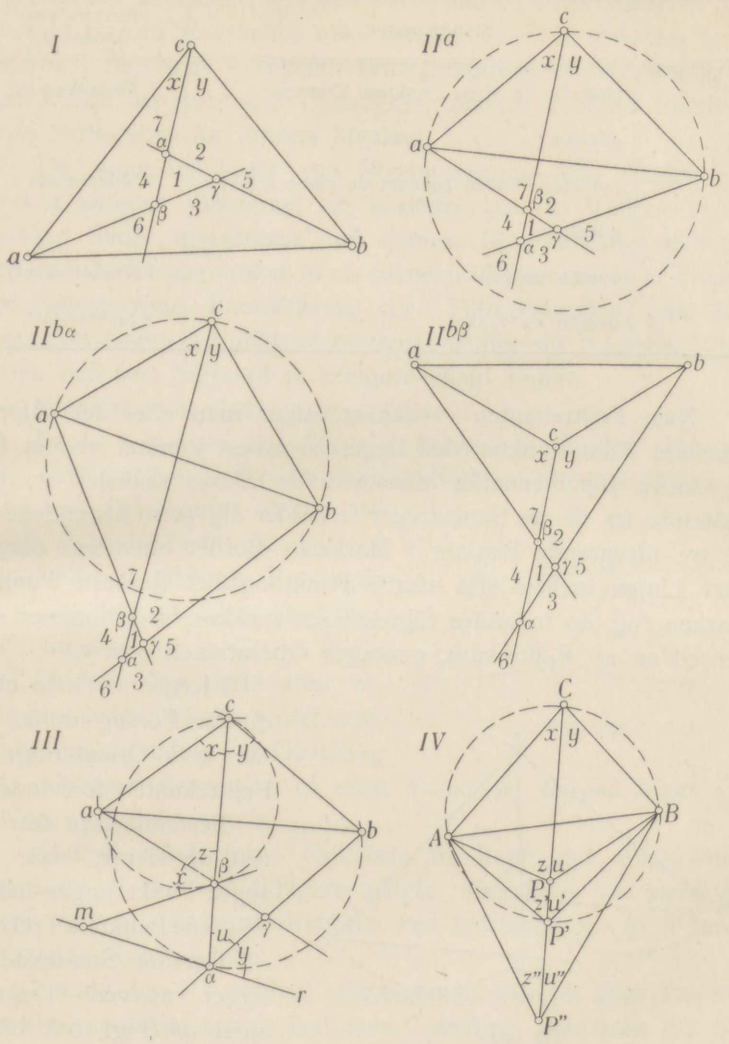


Fig. 99.

naar $x + y + z + u < 180^0$, hvilket kun vil kunne indtræffe naar P ligger udenfor Cirklen gennem de tre givne Punkter og overfor en Side (se Fig. 99, IV).

Resultatet af disse Undersøgelser er udtrykt i følgende Oversigt:[1])

[1]) Denne Teori betegnes som *Lehmanns Sætning*, og det her angivne Bevis er fremsat af Professor *P. P. Freuchen* i Zeitschrift für Vermesserungswesen 1877, Side 276.

			Standpunktet, *P*.	Punktet paa Bordet, *p*.
I			indenfor de givne Punkters Trekant	i Fejltrekanten
II			udenfor » » » »	
	a		indenfor Cirklen gennem de givne Punkter	i Siderummet
	b		udenfor » » » » »	
		α	overfor en Side	i Vinkelrummet
		β	overfor en Vinkel	i Siderummet.

Naar Fejltrekanten er dannet, afgør man efter det anførte, i hvilket Rum Punktet skal ligge, hvornæst Punktet ved et fint og skarpt Blyantsmærke afsættes efter Skøn, saaledes at dets Afstande fra de tre Sigtestreger forholder sig som Afstandene til de tre tilsvarende Punkter i Marken. Bordet orienteres derpaa efter Linjen mellem det afsatte Punkt og det fjerneste Punkt i Marken, og de to andre Sigtestreger trækkes; fremkommer der derved en ny Fejltrekant, gentages Operationen o. s. v.

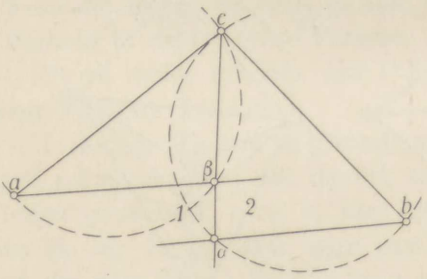


Fig. 100.

I Reglen vil man efter et Par Forsøg opnaa en saa god Orientering, at Fejltrekanten forsvinder.

Bestemmelsen sker lettest og sikrest, naar det søgte Punkt ligger indeni de givne Punkters Trekant.

Dersom Standpladsen ligger nærved Trekantsiden *ab* (Fig. 100), bliver Sigtestregerne gennem *a* og *b* meget nær parallelle; for da at afgøre, om Punktet ligger til højre eller venstre for Sigtestregen gennem *c*, maa man erindre, at det skal ligge paa Cirklerne gennem *a*, *c* og *β* og gennem *b*, *c* og *α*, og man er da ikke i Tvivl om, at det maa ligge i Rum 1.

Triangulation.

79. Triangulation paa Maalebordet — grafisk Triangulation — kan udføres efter lignende Principper som Triangulation ved Vinkelmaaler (trigonometrisk Triangulation), idet man danner

et System af Trekanter, saaledes forbundne med hverandre, at hver Trekant har en Side fælles med den foregaaende, hvorhos en af Siderne i Systemet — dersom Triangulationen er selvstændig — maa kunne benyttes som Grundlinje; den maa altsaa frembyde gode Betingelser for direkte Maaling.

Da man imidlertid ved Bordmaalingen ikke maaler men direkte afsætter Vinklerne, og saaledes kun to Vinkler i hver Trekant finder Anvendelse ved dennes Bestemmelse, reduceres den grafiske Triangulation til en sukcessiv Bestemmelse af Punkter ved Sideskæring, Fremskæring eller Tilbageskæring, idet man dog, hver Gang et Punkt er bestemt, skaffer sig Sikkerhed mod grove Fejl ved Sigte til et tidligere aflagt Punkt.

Fremgangsmaaden er da saaledes:

Er to i Marken ved Signaler betegnede Punkter A og B (Fig. 101), imellem hvilke der kan faas Sigte, afsatte paa Bordet, vil man ved Sideskæring kunne aflægge et tredje Punkt C, idet man fra A eller B aflægger Retningen til C og dernæst tager Opstilling i C; mærkes nu et fjerde Punkt D i Marken, kan dette atter bestemmes ved Sideskæring, idet man, medens man endnu har Opstilling i C, aflægger Retningen til dette Punkt og derpaa tager Opstilling over det, o. s. v.

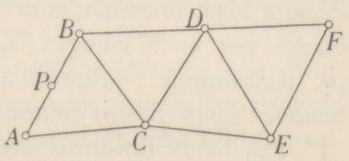


Fig. 101.

Kontrol imod grove Fejl faas fra hvert nyt aflagt Punkt ved Sigte til et af de tidligere aflagte, som ikke har været benyttet ved dets Bestemmelse; kun ved Indlægningen af C haves en saadan Kontrol ikke.

Findes der i Terrænet utilgængelige Punkter eller Punkter, i hvilke man ikke senere skal have Opstilling, men som det dog kan være fordelagtigt at faa indlagte, (f. Eks. fordi de senere kan benyttes ved Tilbageskæringer), kan de bestemmes ved Fremskæring, idet man efterhaanden fra andre Hovedpunkter aflægger Retningen til dem, og man bør da ikke indskrænke sig til to men mindst kræve tre Retninger. Endvidere kan der mellem de efterhaanden bestemte Punkter i Forhold til disse bestemmes flere ved Tilbageskæring.

Er Maalingen selvstændig, vil de to første Punkter A og B kunne bestemmes derved, at man maaler Afstanden imellem dem i Marken, og man kan da, idet man indmaaler et Punkt, P, som kan ses fra C, i Linien AB og afsætter det paa Maale-

bordet, naar C er bestemt, faa Kontrol paa dets Bestemmelse ved Sigte til P.

Ved Valget af Hovedpunkterne bør man tage Hensyn til, at de ligger bekvemt for Terrænpunkternes umiddelbare Tilknytning.

Det er indlysende, at den her angivne Metode vil medføre en betydelig Fejlophobning, og den finder derfor ogsaa kun Anvendelse ved Bestemmelsen af underordnede Trekantnet.

Skal store Arealer opmaales ved Hjælp af Maalebord, saaledes som det finder Sted ved topografiske Arbejder, maa Opmaalingen støttes til en forud udført trigonometrisk Triangulation, og denne maa, i Henhold til det foran anførte, være ført saa langt ned, at man kan være sikker paa, at der falder mindst 2 Hovedpunkter, i hvilke der kan faas Opstilling, paa hvert Terræn, svarende til, hvad der kan optages paa ét Maalebordsblad. Af praktiske Hensyn vil man dog i Reglen kræve mindst 3—4 Hovedpunkter paa hvert saadant Areal, hvilket sidste, dersom Maalebordsbladet er $10 \times 12''$ (Generalstabens Maalebordsblade) ved en Maaling i $^1/_{20000}$ i Gennemsnit udgør 4 Punkter pr. Kvadratmil. I større Maalestoksforhold vil der naturligvis behøves langt flere Punkter.

Paa hvert Bordblad konstrueres et Kvadratnet, hvis yderste Sider angiver Grænserne for den Del af Kortet, som skal tegnes paa Bordbladet. I Kvadratnettet indkonstrueres de Hovedpunkter, som falder paa Bordbladet, ved deres retvinklede Koordinater, og til disse Hovedpunkter støttes da Opmaalingen af den Del af Terrænet, som er begrænset af de til Kvadratnettets yderste Sider svarende Linjer i Marken.

Til Grundlag for Detailmaalingen behøves der langt flere Hovedpunkter end 3—4 pr. Maalebordsblad; der maa helst bestemmes saamange Hovedpunkter, at deres indbyrdes Afstand bliver c. 1300 Meter. Disse Hovedpunkter kan bestemmes ved grafisk Triangulation; men det vil i Reglen være fordelagtigst at føre den trigonometriske Triangulation længere ned, inden man paabegynder den grafiske.

Det kan undertiden være ønskeligt at angive Retningen paa et Bordblad fra et trianguleret Hovedpunkt til et andet, som ikke findes paa Bordbladet. Er de to Punkter A og B (Fig. 102), kan man bestemme Koordinaterne til Skæringspunktet, S, mellem Linjen AB, som har Ligningen

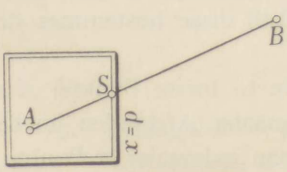


Fig. 102.

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A),$$

og et af Bordbladets Grænselinjer, som har Ligninger af Formen

$$x = p \text{ eller } y = q.$$

Polygonmaaling.

80. Polygonmaaling ved Maalebordet vil kunne udføres efter lignende Principper som ved Vinkelinstrumentet, idet en brudt Linje vil kunne overføres paa Maalebordet ved sukcessiv Afsætning af Vinkler og Sider; men Fejlophobningen vil paa denne Maade blive større, end naar Polygonpunkternes Koordinater beregnes og afsættes; thi en Vinkel kan ikke afsættes saa nøjagtig, som den kan maales, Konstruktionsfejlene ophober sig fra Punkt til Punkt, og det er ikke muligt at foretage nogen Fejludjævning eller Fejlfordeling.

Som Følge heraf vil man ikke paa Maalebordet overføre brudte Linjer med mere end ganske faa Sider. Ikke desto mindre kan man dog overspænde betydelige Arealer ved Polygonmaaling paa Maalebordet, idet man kan gøre Polygonsiderne meget lange, da det ikke er nødvendigt, at man fra hver Vinkelspids kan se Nabovinkelspidsernes Signaler, naar blot Polygonsiden kan udstikkes nøjagtigt.

Medens man ved Polygonmaaling ved Vinkelinstrument kan føre brudte Linjer gennem næsten ethvert Terræn, gælder dette altsaa ingenlunde ved Maalebordet, som kræver Udstikning af lange Linjer, der frembyder gode Betingelser for Maaling, altsaa et aabent og overskueligt Terræn. Heri maa da ogsaa søges Grunden til, at man ikke har anvendt denne Metode til at føre brudte Linjer mellem trianguleredе Hovedpunkter, hvorimod den selvstændige Polygonmaaling navnlig tidligere har fundet en udstrakt Anvendelse paa Maalebordet; de fleste gamle Matrikulskort er saaledes optagne paa denne Maade.

Ved den selvstændige Polygonmaaling søger man at danne en lukket Polygon, som ikke gerne maa have flere end 4 Sider. Ved Rekognosceringen bestemmer man den omtrentlige Plads for Siderne, idet der tages Hensyn til, at disse kommer til at frembyde de bedst mulige Betingelser for nøjagtig Udstikning og Maaling, samt til at de ligger bekvemt for Tilknytning af Terrænpunkter. Polygonen indtegnes paa en Kroki.

Dersom Terrænet ikke er større, end at det kan rummes paa et Bordblad, udføres Arbejdet saaledes: Bordet opstilles paa

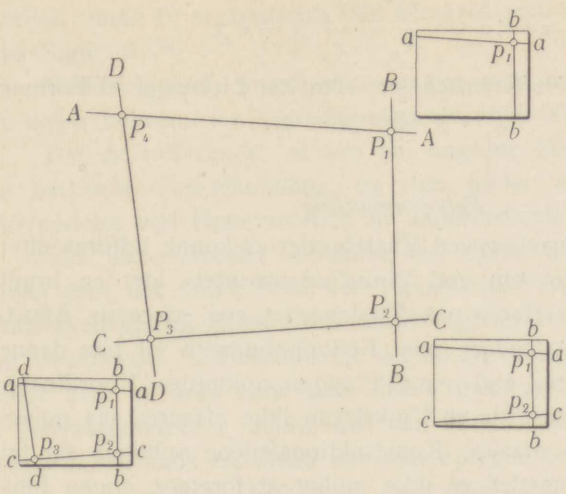


Fig. 103.

det Sted i Terrænet, hvor man har tænkt sig Skæringspunktet mellem Siderne *AA* og *BB* (Fig. 103); det til dette Skæringspunkt, P_1, i Marken svarende Punkt, p_1, paa Bordet vælges paa et passende Sted paa dette. Linealkanten lægges til p_1, og Sigtet rettes ud i den Retning, i hvilken man har tænkt sig Siden *AA*; denne udstikkes ved Hjælp af Kikkertlinealen saa langt frem i Terrænet, som man kan se i Retning af P_4, men ogsaa til den anden Side af P_1 anbringes en Stok i Linjen, hvorefter Linjen *aa* tegnes paa Bordet langs Linealkanten. Derpaa lægges Linealkanten atter til p_1, samtidig med at Sigtet rettes ud i den Retning, i hvilken man har tænkt sig Linjen *BB*, som udstikkes paa lignende Maade som *aa*, hvorefter Siden *bb* trækkes paa Bordet, efter at man dog først har sikret sig dettes rigtige Orientering ved at prøve, om Linealkanten ligger til *aa*, naar Sigtet er rettet ind i *AA*.

Det udstukne Stykke af Siden *BB* forlænges ved Hjælp af en Haandkikkert saa langt i Marken, at man faar anbragt mindst en Stok paa den anden Side af det Sted, hvor man har tænkt sig Skæringspunktet, P_2, mellem *BB* og *CC*.

Paa dette Sted opstilles nu Bordet, som orienteres efter Stokkene i Siden *BB* paa begge Sider af P_2; man skønner, hvor p_2 vil komme til at ligge paa Bordet og bestemmer dette Punkts Projektion paa Jorden, hvorefter man i Marken maaler Linjen *BB*, regnet fra P_1 til nævnte Projektion, og naar nu denne Afstand afsættes ud ad Linjen *bb* paa Bordet i vedkommende Maalestoksforhold, er p_2 bestemt, saa at Siden *CC*, idet Linealkanten lægges til p_2, kan udstikkes ligesom før *BB*.

Endelig orienteres Bordet paa det Sted i Siden *CC*, hvor man har tænkt sig Skæringspunktet mellem denne og *DD*, Punkt P_3 bestemmes som ovenfor angivet, og *DD* aflægges.

Til Sikkerhed mod grove Fejl maales Siderne AA (mellem P_1 og P_4) og DD (mellem P_3 og P_4), og man undersøger, om de fundne Længder stemmer tilstrækkelig nøje med de tilsvarende paa Bordet.

En tredje Sikkerhed kan man skaffe sig ved at orientere Bordet over P_4 og sammenligne Vinklen i dette Punkt paa Bordet med den tilsvarende i Marken, men da det her drejer sig om at orientere Bordet efter to i Marken udstukne Linjer (i Modsætning til, hvad der er Tilfældet ved Triangulationen, hvor Bordet orienteres over et Punkt efter Sigte til et andet), hvilket er meget vanskeligt, anvendes denne Prøve kun sjælden.

Brudte Linjer kan ved en ganske tilsvarende Fremgangsmaade føres mellem Polygonsiderne.

Denne Maalemetode er, som alt nævnt, anvendt ved Maalingen af de gamle Matrikulskort, og naar Terrænet da var saa stort, at det ikke kunde rummes paa ét Bordblad, brugte man en Fremgangsmaade, som, skøndt den nu ikke mere vil finde Anvendelse, skal omtales.

Man konstruerer paa Maalebordet et Kvadrat eller Rektangel efter Bordets Form, saaledes at der mellem Firkantens Sider og Bordets Kanter bliver en aaben Stribe paa omtrent 1 cm's Bredde. De saaledes konstruerede Kvadrat- eller Rektangelsider bliver da Grænselinjer for, hvad der optages paa et Bordblad.

Efter Krokien og Bordbladenes bekendte Størrelse lægger man dernæst en Plan for Terrænets Fordeling paa de forskellige Bordblade, idet man sørger for ikke at faa flere af disse end højst nødvendigt, og derhos søger at finde en Retning i Terrænet, i hvilken en lang Linje kan udstikkes og maales med Sikkerhed, og som tillige ligger saaledes, at den kan blive en passende Grænselinje mellem et Sæt sammenstødende Bordblade.

Antages Terrænet at kunne rummes paa 4 Bordblade, og er AB (Fig. 104) en Linje i Terrænet, som deler det paa passende Maade, saa vælger man sig et Punkt, O, i denne Linje, og dette bliver da Sammenstødspunkt for de 4 Bordblade, saaledes at oa paa I og III fremstiller OA i Marken, medens ob paa II og IV fremstiller OB. De til od og oc svarende Linjer i Marken udstikkes ikke. Linjen AB maales fra O til begge Sider, og derpaa arbejdes der paa hvert Bordblad for sig uden

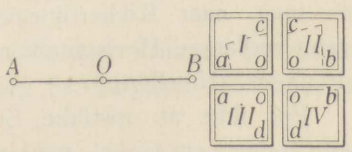


Fig. 104.

Hensyn til de andre. Polygoner udsatte fra *OA* og *OB* kan iøvrigt strække sig fra et Bordblad til et andet, naar de kun føres tilbage til nævnte Linjer. (Se f. Eks. den paa Fig. 104 ved en punkteret Linje angivne Polygon).

Efter fuldført Maaling har man brugt at sammenklæbe de forskellige Bordblade; dette Arbejde var meget vanskeligt, og selv om der blev anvendt den største Omhu, var det umuligt andet, end at en stor Del af Nøjagtigheden maatte gaa tabt.

§ 14. Terrænpunkters Bestemmelse.

81. De almindelige Bemærkninger i Punkt 66 gælder ogsaa om Terrænpunkters Bestemmelse paa Maalebordet.

Af de fem i § 1. Punkt 7 nævnte Tilfælde ved Punktbestemmelsen er det særlig Nr. 3, Sigte og Maal og Nr. 1, Fremskæring, der benyttes til Terrænpunkters Bestemmelse paa Maalebordet, om end ogsaa andre Metoder efter Omstændighederne kan finde Anvendelse.

82. Bestemmelse ved Sigte og Maal vil navnlig være hensigtsmæssig, naar man har Kikkertlinealen indrettet til Distancemaaling. Man maa da bestemme et saa stort Antal Hovedpunkter, at man fra disse kan indlægge Terrænpunkterne, uden at Afstandene bliver for store. Bordet orienteres efterhaanden i Hovedpunkterne, Medhjælperen gaar rundt til de Terrænpunkter, der ligger saaledes, at de kan bestemmes fra vedkommende Hovedpunkt; i hvert Terrænpunkt holder han Stadiet lodret, Sigtet rettes mod Stadiet, samtidig med at Linealkanten lægges til Punktet paa Bordet, og Sigtestregen trækkes, Afstanden bestemmes ved Aflæsning paa Stadiet (eventuelt med Korrektion for hældende Sigte) og afsættes ud ad Sigtestregen i vedkommende Maalestoksforhold.

Samtidig med at Terrænpunkter indlægges paa denne Maade, kan man, naar Kikkertlinealen er indrettet til Nivellering, bekvemt indlægge Horisontalkurver, hvilket vil blive nærmere omtalt under »Nivellering«.

For ikke at opstikke Stationspunktet, kan man omkring dette tegne en Cirkel med en Radius paa f. Eks. 30 Meter i vedkommende Maalestoksforhold; Afstandene, formindskede med 30 Meter, afsættes da fra Skæringspunktet mellem denne og vedkommende Sigtestreg, som bør være saa fin som mulig og kun tegnes paa de Steder, hvor det er nødvendigt, altsaa der, hvor Terrænpunktet omtrent kommer til at ligge paa Bordet, og der, hvor den skærer Cirklen.

Efterhaanden som Terrænpunkterne indlægges, forbindes de med fine Blyantslinjer.

Den her angivne Metode finder navnlig Anvendelse ved topografiske Maalinger i smaa Maalestoksforhold, hvor der ikke kræves nogen meget stor Nøjagtighed i det enkelte Terrænpunkts Bestemmelse; den anvendes saaledes ved Generalstabens Maalinger. Hovedpunkterne bestemmes da ved grafisk Triangulation (se Punkt 79) eller ved Tilbageskæring.

Dersom Kikkertlinealen ikke er indrettet til Distancemaaling, maa Afstandene maales direkte med Staalbaand eller Kæde, men Metoden bliver da for omstændelig.

83. Naar Terrænpunkterne skal bestemmes ved Fremskæring (skærende Sigter), maa Hovedpunkterne vælges saaledes, at hvert Terrænpunkt, som skal bestemmes paa denne Maade, kan ses fra to Hovedpunkter under en Vinkel, som ikke afviger for meget fra 90° (Fig. 105). Skal et Terrænafsnit aflægges, mærker man Hovedpunkterne eller maaske kun nogle af disse ad Gangen med Signaler (Stokke med Flag), gaar rundt med Medhjælperen til Terrænpunkterne, anbringer Mærkepinde med paaskrevne Nr. i disse og tegner en Kroki i stor Maalestok over Terrænafsnittet.

Paa Krokien mærker man ved hvert enkelt Terrænpunkt, fra hvilke Hovedpunkter, det kan bestemmes, og er der Terrænpunkter, som enten ikke kan bestemmes fra Hovedpunkterne eller kun kan bestemmes ved Skæring under daarlige Vinkler, bemærkes dette, for at man kan drage Omsorg for Punktets Bestemmelse paa anden Maade.

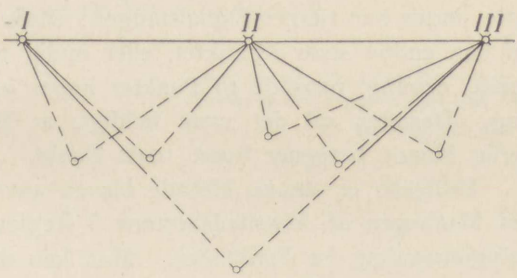


Fig. 105.

Bordet opstilles nu i det første Hovedpunkt og orienteres, Medhjælperne opstiller en Signalstang nøjagtig lodret i det som Nr. 1 betegnede Terrænpunkt, Sigtet rettes mod Signalstangen, idet Linealkanten lægges til Stationspunktet paa Bordet, og Sigtestregen trækkes, dog kun paa det Sted, hvor Punktet skønnes at ville komme til at ligge, samt ude i Randen af Papiret (Randmærker), hvor Punktets Nr. paaskrives. Herefter gøres

Tegn til Medhjælperen, som gaar til Terrænpunkt Nr. 2, hvor det samme gentager sig, o. s. v.

Naar man har taget alle Sigterne fra den første Station, orienteres Bordet i den anden, og Medhjælperen gaar rundt til Terrænpunkterne i samme Orden og anbringer atter Signalstangen i disse, Linealkanten lægges til Stationspunktet, Sigtet rettes mod Terrænpunktet, Sigtestregen trækkes, dog kun paa det Sted, hvor den skærer den tidligere aflagte Sigtestreg til samme Punkt.

Skæringspunktet mærkes nu med en Punkternaal, der sættes en lille Kreds om det, og dets Nr. paaskrives. Efterhaanden som Punkterne aflægges, forbindes de med fine Blyantslinjer. Naar alle de Punkter, til hvilke allerede et Sigte er taget, er bestemte, aflægges Første-Sigterne til de Punkter, som yderligere skal bestemmes fra Stationen.

Man maa passe godt paa, at der ikke fremkommer Fejltagelser derved, at man tror, at Medhjælperen staar i et vist Punkt, medens han i Virkeligheden staar i et andet. Bedst sikrer man sig mod saadanne Fejltagelser ved at lade ham gaa til Punkterne i deres numeriske Rækkefølge og have et nøje aftalt Signalsystem. Man bør saaledes gøre et aldeles bestemt Tegn til ham, naar man har aflagt Sigtet, og han bør atter besvare dette, inden han tjerner Signalstangen; ellers véd man ikke altid, om han endnu staar i Punktet, eller mulig er gaaet til det næste Punkt, navnlig, naar de to Punkter ligger omtrent i samme Retning. Desuden vil det være heldigt, at Medhjælperen paa en særlig Maade betegner hvert 10de Punkt.

Tidligere er denne Metode bleven anvendt i stort Omfang ved Maalingen af Matrikulskortene i Reglen i Forbindelse med Polygonmaaling (se Punkt 80). Man kan da skaffe sig Hovedpunkter overalt i Polygonsiderne, idet man kan orientere Bordet efter den udstukne Linje i Marken, som betegner Polygonsiden, og bestemme Standpladsen paa samme Maade som omtalt Side 118 (P_2).

Der vil næsten i ethvert Terræn findes Punkter, som ikke ligger bekvemt for Bestemmelse hverken ved skærende Sigter eller ved Sigte og Maal. Saadanne Punkter maa da bestemmes paa anden Maade f. Eks. ved Udlægning af en passende Linje, fra hvilken de kan fastlægges ved Perpendikulærmaal, og derpaa indkonstrueres paa Kortet.

Hertil hører en Eksempelsamling. **2. Hefte.**

Opmaalingslære

til Brug ved

Landinspektørelevernes Undervisning i Landmaaling

af

H. V. Nyholm,
Professor
ved den Kgl. Vetr. og Landbohøjskole.

Her er to Ord: Det ene hedder Teori og det andet
Praksis, og det er godt at have dem begge to.
Bj. Bjørnson: En glad Gut.

Udgivet paa den Kgl. Vetr. og Landbohøjskoles Foranstaltning.

Kjøbenhavn.
I Kommission hos Boghandler H. Christensen.
Fr. G. Knudtzons Bogtrykkeri (Fr. G. Knudtzon & Oscar Enevoldsen).
1908.

Forord til 2. Hefte.

I Afsnittet »Opmaaling af et Terræn, hvis Udstrækning er saa stor, at Projektionsfladen ikke kan betragtes som en Plan« har jeg, næst at gøre Rede for Sfæroidens Størrelse og Form og for Beregningen af en Del Størrelser, som knytter sig til denne, givet en Oversigt over de forskellige Kortprojektioner, idet jeg dog særlig har beskæftiget mig med den konforme, cylindriske Projektion, som i Henhold til »Betænkning afgiven i Januar 1904 til Landbrugsministeriet af den under 13. Januar 1903 nedsatte Kommission til at udtale sig om, hvad der under tilbørlig Hensyntagen til de pekuniære Krav, der kan stilles til Statskassen, kan gøres til Forbedring af Matrikulskortene og for at gøre dem til Ejendomskort m. m.« er anvendt ved et Par for Tiden under Udførelse værende større Matrikulsmaalinger. Den nævnte Fremstilling støtter sig til de af *C. G. Andræ* i »Den danske Gradmaaling« og *G. Zachariae* i »De geodætiske Hovedpunkter og deres Koordinater« angivne Formler, og den benytter den danske Gradmaalings Jorddimensioner, idet de fremtidige Matrikulsmaalinger maa hvile paa det af Gradmaalingen bestemte System af 1. Ordens Punkter og de af Generalstaben i Forhold til dette bestemte Systemer af 2. og 3. Ordens Punkter. Jeg har bestræbt mig for at lette de besværlige Beregninger ved Anvendelse af bekvemme Regneformler og Skemaer.

Der er endvidere given en udførlig Fremstilling af den af

Generalstaben anvendte konforme, koniske Projektion, og denne Fremstilling er i nøje Overensstemmelse med den af *G. Zachariae* i »Kortprojektioner« givne.

I Afsnittet »Højdemaaling eller Nivellering« har jeg særlig beskæftiget mig med alt, hvad der vedrører økonomiske Nivellementer, om jeg end ogsaa har omtalt Fremgangsmaaderne ved Præcissionsnivellementer og trigonometriske Højdemaalinger.

Ogsaa her ved Udarbejdelsen af 2. Hefte har min Assistent, Landinspektør K. Hendriksen ydet mig en god Hjælp ved Udarbejdelsen af Tegningerne.

August 1908.

Forf.

Indholdsfortegnelse til 2. Hefte.

Side

2. Afsnit. Opmaaling af et Terræn, hvis Udstrækning er saa stor, at Projektionsfladen ikke kan betragtes som en Plan.

4. Kapitel: Almindelige Forudsætninger og Beregning af Størrelser paa Sfæroiden.

§ 15. Den foreliggende Opgave 123
§ 16. Jordsfæroiden 127
§ 17. Sfæriske Trekanter 134
§ 18. Retvinklede sfæroidiske Koordinater 139
§ 19. Retvinklede sfæriske Koordinater 143

5. Kapitel: Cylindriske Projektioner.

§ 20. Fremstilling af cylindriske Projektioner 150
§ 21. Koordinatsystemers Udstrækning 152
§ 22. Retvinklede Koordinater i den konforme, cylindriske Projektion 154
§ 23. Samlet Fremstilling af Fremgangsmaaden ved et helt Lands (Danmarks) Opmaaling 158

6. Kapitel: Koniske Projektioner.

§ 24. Fremstilling af koniske Projektioner 165
§ 25. Den konforme, koniske Projektion 167

7. Kapitel: Andre Projektioner 179

§ 26. Perspektiviske Projektioner 179
§ 27. Vilkaarlige Projektioner 182

3. Afsnit. Højdemaaling eller Nivellement 184

8. Kapitel: Nivellering.

§ 28. Nivelleringens Formaal 184
§ 29. Jordkrumning og Refraktion 187
§ 30. Nivellering af en Linie 192
§ 31. Nivellementets Fejlteori 202
§ 32. Nivellements-Fikspunkter 216
§ 33. Nivellement med hældende Sigter 220
§ 34. Fladenivellement 223

9. Kapitel: Trigonometrisk Højdemaaling.

§ 35. Trigonometrisk Højdemaaling paa korte Afstande 230
§ 36. Trigonometrisk Højdemaaling paa længere Afstande . . 232

2. Afsnit.

Opmaaling af et Terræn, hvis Udstrækning er saa stor, at Projektionsfladen ikke kan betragtes som en Plan.

---

4. Kapitel.

Almindelige Forudsætninger og Beregning af Størrelser paa Sfæroiden.

§ 15. Den foreliggende Opgave.

84. En sammenhængende Opmaaling af en Landstrækning, der er saa stor, at Projektionsfladen ikke kan betragtes som en Plan, gaar — som allerede i Indledningen nævnt — ud paa en Bestemmelse af de enkelte Punkters Beliggenhed paa Sfæroiden; Beliggenheden angives ved Punkternes Længder og Breder.

En saadan sammenhængende Opmaaling maa altid knytte sig til et System af Hovedpunkter, som bestemmes med al den Nøjagtighed, som Videnskaben og Teknikken kan tilvejebringe, og den allerede i 1. Afsnit (Side 6) givne almindelige Regel, at man først bestemmer et System af Hovedpunkter med indbyrdes store Afstande, paa dette et underordnet System og saaledes trappevis nedad, kommer ogsaa til Anvendelse her.

Hovedpunkterne siges, eftersom de henhører til 1., 2., 3. . . . System, at være af *1.*, *2.*, *3.* . . . *Orden.*

Den *relative* Beliggenhed af Punkterne af 1. Orden bestemmes ved en Triangulation, idet man lader Hovedpunkterne indgaa som Vinkelspidser i et *Trekantnet af 1. Orden,* og dette Trekantnets Form bestemmes derved, at Vinklerne maales med de fineste Theodoliter og med et meget stort Antal Satser, hvor-

efter der med fornødent Hensyn til, at Punkterne ligger paa Sfæroiden, foretages en rationel Udjævning efter mindste Kvadraters Metode. Det skal dog i det følgende godtgøres, at det indenfor de Opgaver, som foreligger, er fuldstændig tilladeligt at betragte vedkommende Del af Sfæroiden som en Kugleflade med en Radius, der er afhængig af Breden, ɔ: af vedkommende Areals Sted paa Kloden.

Nettets Dimensioner bestemmes ved Maaling af en Basis. Denne, der er mange Gange kortere end Trekantsiderne, sættes i Forbindelse med en af disse ved et særligt Trekantnet, Basisnettet. Til Udmaaling af Længden af Basis benyttes et *Basisapparat.*

Efter Udjævningen beregnes samtlige Trekantsiders Længder, ligesom før med Hensyn til at Nettet ligger paa Sfæroiden.

Den *absolute* Beliggenhed af 1. Ordens Nettet, ɔ: dettes Beliggenhed paa Sfæroiden, fastslaas, idet man i et af Hovedpunkterne foretager astronomiske Bestemmelser af dettes Længde og Brede samt af den Vinkel, som en fra Punktet udgaaende Trekantside danner med Meridianen, Sidens *Azimuth.* Herefter beregnes nu alle Trekantsidernes Azimuther, og af disse og Sidelængderne atter Hovedpunkternes sfæroidiske Breder og geografiske Længder.

Trekantsiderne af 1. Orden gøres gerne saa lange, som de kan faas, uden at Vinkelmaalingen taber for meget i Nøjagtighed; hos os er de i Reglen 25—60 km og i Almindelighed nærmere den første end den anden Grænse. Man har imidlertid taget meget længere Sigter; saaledes har man mellem Spanien og Algier taget Sigter paa 270 km og i Himalaya endogsaa paa 340 km; der maa da observeres om Natten og benyttes meget stærke Lyssignaler i Sigtepunkterne.

Imellem 1. Ordens Punkterne indskydes Trekantnet af 2. Orden med Sider paa 10—30 km, og mellem 2. Ordens Punkterne indskydes atter Punkter af 3., 4. og lavere Orden.

85. Paa Opmaalingens senere Trin, ɔ: ved Triangulation af lavere Orden, ved Polygonmaalingen og ved Detailmaalingen er det imidlertid en absolut Fordring, at man i Overensstemmelse med Udviklingerne i 1. Afsnit maa arbejde med Planen som Projektionsflade, saa at man kan benytte retvinklede, plane Koordinater.

Da Sfæroiden er en dobbelt krum, altsaa en uudfoldelig Flade, er det umuligt at omsætte Længder og Breder til plane

Koordinater, uden at denne Omsætning, *Projektion*[1]) i udvidet Forstand, medfører Fejl, eller, som vi vil kalde det, *Forvanskning*. Paa den anden Side er det indlysende, at naar vedkommende Del af den naturlige Jordoverflade gøres tilstrækkelig lille, vil Forvanskningen kunne blive saa ringe, som man ønsker. Hvor store Landstrækninger, man kan projicere paa en enkelt Plan, altsaa ogsaa henføre til et enkelt plant Koordinatsystem, beror derfor paa, hvor stor en Forvanskning man med det foreliggende Formaal for Øje kan taale.

Ved økonomiske Opmaalinger maa Forvanskningen være saa ringe, at den kan betragtes som forsvindende i Forhold til Maalefejlen.

Ved topografiske Opmaalinger, hvis Resultat ikke foreligger i Talform men grafisk i Form af Kort, maa Forvanskningen ikke være større, end at den kan betragtes som forsvindende i Forhold til de ved Maalingen, Kortkonstruktionen og Reproduktionen tilsammen foranledigede Fejl; og da navnlig de to sidste af disse, særlig fordi de topografiske Kort i Reglen konstrueres i smaa Maalestoksforhold, bliver temmelig betydelige, vil det forstaas, at man ved topografiske Opmaalinger kan gøre de Landstrækninger, som kan projiceres paa en enkelt Plan, betydelig større end ved økonomiske Opmaalinger.

Ved Fremstilling af geografiske Kort, som ofte omfatter meget store Dele af Jordoverfladen, opgiver man endogsaa den for de topografiske Opmaalinger stillede Fordring til Forvanskningen, ɔ: man taaler, at de geografiske Kort har meget store Forvanskninger, derimod stiller man ofte særlige Krav til dem som f. Eks., at de skal vedligeholde Arealerne eller Vinklerne, og der kan derfor fremkomme uendelig mange forskellige *Kortprojektioner*.

En saadan særlig Fordring, som iøvrigt kan stilles, hvad enten Maalingsresultatet foreligger i Talform, eller det fremstilles grafisk, er, at Projektionen skal være *konform*, ɔ: den skal bevare Ligedannetheden mellem de uendelig smaa Arealer paa Kloden og de tilsvarende i Projektionen. Konformiteten medfører, at Maalestoksforholdet omkring et Punkt er det samme i alle mulige Retninger, medens det bliver forskelligt paa de forskellige Steder af det fremstillede Areal. Konformiteten kan

[1]) Projektion benyttes her saavel om den Operation, hvorved Omsætningen udføres, som om det ved Omsætningen frembragte Billede, hvad enten dette foreligger i grafisk Form eller ikke.

kun gælde for uendelig smaa Arealer, da man ellers maatte kunne overføre et Areal fra Kloden paa Planen uden Forvanskning.

En Projektions Ejendommeligheder vil i Reglen let opfattes, naar man tænker sig det *geografiske Net,* o: Paralleler og Meridianer, grafisk fremstillet.

86. Projektionerne deles i:

I. *Udfoldningsprojektioner,*
II. *Perspektiviske Projektioner* og
III. *Vilkaarlige Projektioner.*

Ved Udfoldningsprojektionerne overføres Hovedpunkterne paa en Sfæroiden eller efter Omstændighederne Kuglen tangerende eller skærende udfoldelig Flade; idet denne da udfoldes, bliver det muligt at henføre dem alle til ét plant, retvinklet Koordinatsystem. Eftersom den udfoldelige Flade er en Cylinder eller en Kegle, opstaar

a. *Cylindriske Projektioner* eller
b. *Koniske Projektioner.*

Disse to Projektioner har størst Betydning for os, da der her i Landet anvendes en cylindrisk Projektion til de økonomiske og en konisk Projektion til de topografiske Opmaalinger; de vil derfor finde indgaaende Behandling i 5. og 6. Kapitel.

Til geografiske Korts Fremstilling kan anvendes en hvilkensomhelst af de anførte Projektioner; men da de perspektiviske og de vilkaarlige Projektioner aldrig anvendes til topografiske eller økonomiske Kort og saaledes egentlig ligger udenfor vort Omraade, vil de kun finde en meget kort Omtale i 7. Kapitel.

Inden vi gaar over til Omtale af de enkelte Projektioner, vil vi i den følgende § gøre os bekendte med Jordsfæroiden og Beregningen af en Del paa denne forekommende Størrelser.

87. Her i Landet er der af Gradmaalingen bestemt et System af 1. Ordens Punkter, som af Generalstaben er udvidet til at omfatte et System af 2. og 3. Ordens Punkter, og idet saavel den økonomiske som den topografiske Opmaaling bygger paa dette Grundlag, er de Opgaver, som kommer til at foreligge, 3, nemlig:

a. Valg af Projektion. Denne bør vælges saaledes, at hele Landet kan inddeles i det færrest mulige Antal Landstrækninger, der hver for sig kan henføres til et enkelt plant Koordinatsystem, uden at den derved fremkomne Forvansk-

ning bliver større, end at den kan betragtes som forsvindende i Forhold til Maalefejlen. For hver Landstrækning vælges et passende Koordinatsystem.

b. Omsætning af de for Hovedpunkterne givne Længder og Breder til plane, retvinklede Koordinater i vedkommende Koordinatsystem.

c. Fuldstændiggørelse, under Hensyn til den valgte Projektion, af det foreliggende Trekantnet, dersom det ikke er ført saa langt ned, at dets Punkter ligger tilstrækkelig tæt til direkte Tilknytning af en Triangulation af lavere Orden og af Polygon- og Detailmaalingen.

§ 16. Jordsfæroiden.

Sfæroidens Form og Dimensioner.

88. Ved Gradmaalingerne er den matematiske Jordoverflade, som alt nævnt, bestemt som en Omdrejningsellipsoide, der benævnes Sfæroiden, og kan tænkes frembragt ved Drejning af en Ellipse om sin lille Akse. Sfæroidens Form og Størrelse er altsaa bestemt ved to af denne Ellipses Stykker, Elementer. Disse kan være

1) den halve store Akse, a, og den halve lille Akse, b,

2) a og *Ekscentriciteten*, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, eller

3) a og *Aplatissementet* (Fladtrykningen), $\alpha = \frac{a-b}{a}$.

Af Udtrykkene for e og α faas $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$.

Ligningen for Meridianen er, naar Abscisseaksen lægges ud ad Skæringslinjen mellem Meridianens Plan og Ækvators Plan og Begyndelsespunktet i Centrum

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

$$\text{eller} \quad y^2 = (1 - e^2)\,(a^2 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

$$\text{eller} \quad y^2 = (1 - 2\alpha + \alpha^2)\,(a^2 - x^2) \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

Da Gradmaalingerne paa Grund af Observationsfejlene har givet noget forskellige Resultater, har man ikke overalt benyttet nøjagtig de samme Værdier for Meridianellipsens Elementer, saaledes benyttes hyppig i andre Lande *Bessels Jorddimensioner* $\left(a = 6377397{\cdot}15 \text{ m} \text{ og } \alpha = \frac{1}{299{\cdot}1528}\right)$. Vi benytter imidlertid den Sfæroide, som er fremgaaet af den danske Gradmaalings Resultater; denne Sfæoide var nemlig benyttet ved Gradmaalingens og Generalstabens Triangulationer, før de Besselske Jorddimen-

sioner forelaa, og 1. og 2. Ordens Punkternes Længder og Breder refererer sig altsaa til den danske Sfæroide. Denne er bestemt ved Elementerne

$$\log a = 6.804617729 \text{ for Metermaal og } a = \frac{1}{300}.$$

Herefter er

$$a = 6377019 \text{ m}, \quad b = 6355762 \text{ m og}$$

$$e^2 = \frac{599}{90000}, \text{ altsaa } e^2 < \frac{1}{150}, \; e^4 < \frac{1}{22500} \text{ og } e^6 < \frac{1}{3375000}.$$

Normalens Længde.

89. Naar n er Normalens Længde, An, fra Punktet A i Meridianellipsen (se Fig. 106) til Skæringspunktet n med den store Akse og N dens Længde, AN, til Skæringspunktet N med den lille Akse, har man, idet λ er Punktet A's Brede,

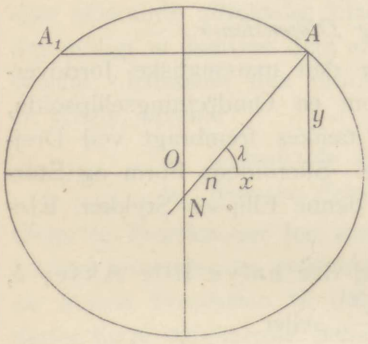


Fig. 106.

$$N = \frac{x}{\cos\lambda} \text{ og } n = \frac{y}{\sin\lambda} \quad \ldots \quad (\alpha)$$

Retningskoefficienten for Tangenten i A bestemmes af (53) ved

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1-e^2)\,x}{y},$$

følgelig bliver Normalens Retningskoefficient, idet

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\lambda,$$

$$tg\,\lambda = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{y}{(1-e^2)\,x},$$

hvoraf faas

$$y = \operatorname{tg}\lambda\,(1-e^2)\,x \quad \ldots \quad (\beta)$$

Indsættes dette Udtryk for y i (53), faas efter Multiplikation med $\cos^2\lambda$

$$\sin^2\lambda\,(1-e^2)\,x^2 = \cos^2\lambda\,(a^2-x^2),$$

som giver

$$x = \frac{a\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}},$$

der indsat i (β) giver

$$y = \frac{a\,(1-e^2)\,\sin\lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}}. \qquad (\gamma)$$

Ved Indsættelse af x og y i (α) faas nu

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}} \\ \text{og}\quad n &= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\lambda}} = N(1-e^2). \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Krumningsforhold.

90. Vi vil søge Krumningsradierne for Ellipsoidens to Hovedsnit, Meridianen og det derpaa vinkelrette Snit, Perpendikulæren.

Meridianens Krumningsradius findes, som af Zachariae angivet, af det almindelige Udtryk for Krumningsradien

$$M = -\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Da her $\frac{dy}{dx} = -\cot\lambda$, bliver

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = (1+\cot^2\lambda)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sin^3\lambda} \quad \text{og} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2\lambda}\frac{d\lambda}{dx}$$

og følgelig

$$M = -\frac{1}{\sin\lambda}\frac{dx}{d\lambda}.$$

$\frac{dx}{d\lambda}$ findes af $\qquad x = N\cos\lambda,$

som giver

$$\frac{dx}{d\lambda} = -N\sin\lambda + \cos\lambda\frac{dN}{d\lambda},$$

og $\frac{dN}{d\lambda}$ findes atter af (55), som giver

$$\frac{dN}{d\lambda} = \frac{e^2\sin\lambda\cos\lambda}{1-e^2\sin^2\lambda}N.$$

Herefter bliver da

$$M = \frac{(1-e^2)N}{1-e^2\sin^2\lambda} = \frac{n}{1-e^2\sin^2\lambda}$$

eller

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Perpendikulærens Krumningsradius. Alle i Parallelen AA_1 (Fig. 106) med Breden λ liggende Punkter har

Normaler, som skærer hverandre i samme Punkt N af den lille Akse. Perpendikulæren, som staar vinkelret paa Meridianen i A, og hvis Plan altsaa indeholder Normalen, AN, tangerer Parallelkredsen AA_1 i A, og deraf følger, at en ret Linje, $A'N$ fra et uendelig tæt ved A i Parallelkredsen liggende Punkt A' ogsaa bliver Normal til Perpendikulæren; men da to uendelig tæt ved hinanden liggende Normaler til en Kurve skærer hinanden i dennes Krumningscentrum, maa dette for Perpendikulærens Vedkommende ligge i N, og Krumningsradien bliver altsaa N.

Saavel Krumningsradien som Normalen vokser, naar man bevæger sig fra Ækvator til Polen, henholdsvis fra $a(1-e^2)$ til $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$ og fra a til $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$. Begge Hovedsnits Krumningsradier er altsaa lige store i Polen, der saaledes ses at være et Kuglepunkt.

Rækkeudvikling for M.

91. Af Hensyn til de efterfølgende Regninger vil vi udvikle det fundne Udtryk (56) for M i Række, idet vi anvender Binomialformlen paa Nævneren. Herved faas

$$M = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= a(1-e^2)\left\{1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\lambda+\frac{3\cdot5}{2.4}e^4\sin^4\lambda+\frac{3\cdot5\cdot7}{2.4.6}e^6\sin^6\lambda+\ldots\right\}, \quad (\alpha)$$

en Række, som umiddelbart ses at være meget konvergent, idet det erindres, at e^2 omtrent er $\frac{1}{150}$.

Det Led, som indeholder e^6, kan for vore Breder ikke overstige 1.2 Meter, hvorfor det i Henhold til den Nøjagtighed, med hvilken M overhovedet kan bestemmes[1]), kan bortkastes som betydningsløst.

Sættes i (α)

$$\sin^2\lambda = \frac{1-\cos 2\lambda}{2} \quad \text{og} \quad \sin^4\lambda = \frac{3-4\cos 2\lambda+\cos 4\lambda}{8},$$

faas, idet det ovennævnte Led bortkastes,

$$M = a(1-e^2)\left\{1+\frac{3}{2}e^2\frac{1-\cos 2\lambda}{2}+\frac{3\cdot5}{2.4}e^4\frac{3-4\cos 2\lambda+\cos 4\lambda}{8}\right\}$$

$$= a\left\{\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4\right)-\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{16}e^4\right)\cos 2\lambda+\frac{15}{64}e^4\cos 4\lambda\right\},$$

som dernæst bringes paa Formen

[1]) Middelfejlen paa den af den danske Gradmaaling angivne Værdi for a er 1181 Meter.

$$M = A_0 a \left\{1 - A_1 \cos 2\lambda + A_2 \cos 4\lambda\right\},$$

hvor [1])

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 1 - \tfrac{1}{4} e^2 - \tfrac{3}{64} e^4 = 0.9983340 \\ A_1 &= \tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{3}{8} e^4 = 0.0050083 \\ \text{og } A_2 &= \tfrac{15}{64} e^4 = 0.0000104. \end{aligned}\right\} (57)$$

Meridianbuens Længde.

92. Længden af en Meridianbue, hvis Endepunkter har Brederne λ og $\lambda + \Delta$, er bestemt ved

$$Q = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} M \, d\lambda$$

$$= a A_0 \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta} (1 - A_1 \cos 2\lambda + A_2 \cos 4\lambda) \, d\lambda$$

$$= a A_0 \left\{\Delta - \frac{A_1}{2}(\sin(2\lambda+2\Delta) - \sin 2\lambda) + \frac{A_2}{4}(\sin(4\lambda+4\Delta) - \sin 4\lambda)\right\}$$

$$= a A_0 \left\{\Delta - A_1 \cos(2\lambda+\Delta) \sin\Delta + \frac{A_2}{2} \cos(4\lambda+2\Delta) \sin 2\Delta\right\}.$$

Indføres heri Middelbreden, ɔ: Middeltallet af Buens Endepunkters Breder, $\lambda_m = \lambda + \frac{1}{2}\Delta$, altsaa $2\lambda_m = 2\lambda + \Delta$ og $4\lambda_m = 4\lambda + 2\Delta$, faas

$$Q = a A_0 \left\{\Delta - A_1 \sin\Delta \cos 2\lambda_m + A_2 \frac{\sin 2\Delta}{2} \cos 4\lambda_m\right\},$$

hvor Δ er udtrykt i rene Tal.

Meridianbuens Længde er altsaa her udtrykt ved dens Middelbrede og Endepunkternes Bredeforskel.

En Meridianbue af ikke for stor Udstrækning vil imidlertid med høj Grad af Tilnærmelse kunne fremstilles som en Cirkelbue, hvis Radius er Middelbredens Krumningsradius, M_m, og hvis Centervinkel er Endepunkternes Bredeforskel, Δ, altsaa ifølge (57) ved

$$M_m \Delta = a A_0 \left\{\Delta - A_1 \cos 2\lambda_m \Delta + A_2 \cos 4\lambda_m \Delta\right\}.$$

Den Fejl, som begaas ved Benyttelsen af dette Udtryk, er nemlig

$$f = Q - M_m \Delta = a A_0 \left\{A_1 \cos 2\lambda_m (\Delta - \sin\Delta) - A_2 \cos 4\lambda_m \left(\Delta - \frac{\sin 2\Delta}{2}\right)\right\},$$

[1]) For Meter er: $\log A_0 a = 6.8038936$, endvidere er $\log A_0 = 9.9992759 - 10$, $\log A_1 = 7.69969 - 10$, og $\log A_2 = 5.0170 - 10$.

eller, idet man sætter: $\sin \Delta = \Delta - \frac{\Delta^3}{\lfloor 3}$ og $\sin 2\Delta = 2\Delta - \frac{(2\Delta)^3}{\lfloor 3}$,

$$f = a A_0 \left\{ A_1 \cos 2\lambda_m \frac{\Delta^3}{\lfloor 3} - A_2 \cos 4\lambda_m \frac{4\Delta^3}{\lfloor 3} \right\}.$$

Man vil let overbevise sig om, at de Led, som vilde fremkomme, dersom man havde medtaget flere Led i Rækken for sin, vilde være forsvindende, og om, at ogsaa det 2. Led i ovenstaaende Udtryk bliver forsvindende for mindre Værdier af Δ, saa at man for disse, idet Δ udtrykkes i Gradmaal, faar

$$f < a A_0 A_1 \cos 2\lambda_m \frac{\Delta^3}{\lfloor 3\, \omega^3},$$

eller $f <$ nl. (8.4511—10) $\cos 2\lambda_m \Delta^3$,[1])

hvor Δ er udtrykt i Grader.

For en Meridianbue svarende til Danmarks halve Udstrækning i Meridianens Retning, altsaa Δ omtrent lig $1^1/_2{}^\circ$, og for Danmarks Middelbrede omtrent 56°, bliver

$f <$ 4 Centimeter,

hvilket viser, hvor stor Tilnærmelsen er.

Den geodætiske Linje.

93. Er en Theodolit opstillet i et Punkt A (Fig. 107) paa den matematiske Jordoverflade, falder Vertikalaksen sammen med A's Normal, og tager man Sigte til Punkt B, indeholder Sigteplanen Korden AB og A's Normal, AN. Er Theodoliten derimod opstillet i B og Sigtet rettet mod A, indeholder Sigteplanen Korden AB og B's Normal, BN_1. Dersom A og B ligger paa samme Meridian eller samme Parallel, ligger deres Normaler i samme Plan, og de to Sigteplaner falder da sammen. I alle andre Tilfælde ligger A og B's Normaler ikke i samme Plan, og de to Sigteplaner falder da

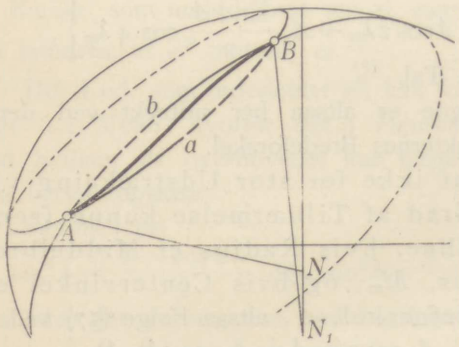


Fig. 107.

[1]) nl. x betegner det til Logaritmen x svarende Tal.

ikke sammen. Deres Spor paa Ellipsoiden henholdsvis *AaB* og *BbA* er Ellipser, og Sporet af det nordligste Punkts Normalsnit ligger Nord for Sporet af det sydligste Punkts Normalsnit. En Trekant, som begrænses af Normalsnittenes Skæringslinjer med Ellipsoiden, vil altsaa faa dobbelte Sider. Til Trekantsider kan derfor ikke benyttes Normalsnittene; man plejer i Almindelighed at lade Trekantsiden falde sammen med *den geodætiske Linje* mellem *A* og *B*.

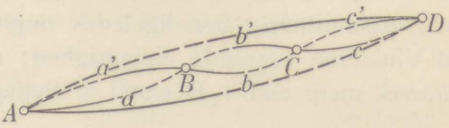


Fig. 108.

For at forstaa den geodætiske Linje, vil vi tænke os, at man opstiller en Theodolit i *A* (Fig. 108) og sigter til *B*, altsaa langs *AaB*; dernæst opstilles Theodoliten i *B*, man sigter til *A*, altsaa langs *Ba'A*, og vinker *C* ind i Sigtet *BbC*, idet man afsætter en Vinkel paa 180°; dernæst opstilles Thedoliten i *C*, man sigter til *B*, altsaa langs *Cb'B*, indvinker *D* o. s. v.; da vil man mellem to og to Nabopunkter faa dobbelte Kurver, og lader man nu Sigterne blive kortere og kortere, vil de to Normalsnit nærme sig mere og mere til hinanden og tilsidst falde sammen til én Kurve, den geodætiske Linje, om hvilken her kun skal bemærkes, at den ligger helt imellem de to Normalsnit, og at den angiver den korteste Linje mellem to Punkter paa Ellipsoiden. For de Sigtelængder, som vi i denne Bog har at gøre med, falder de to Normalsnit gennem *A* og *B* imidlertid saa tæt sammen, at vi kan se fuldstændig bort fra den Korrektion, som det paa større Afstande er nødvendigt at indføre, fordi Normalsnittene ikke falder sammen med den geodætiske Linje[1]), en Korrektion som for Sigter paa 60 km kun beløber sig til $^1/_{250}$ Sekund.

Den Nøjagtighed, med hvilken Breder og Længder angives.

94. Trigonometriske Hovedpunkters Breder og Længder maa angives med en Nøjagtighed, som svarer til den, med hvilken Punkternes relative Beliggenhed er bestemt — ikke til den Nøjagtighed, med hvilken et Punkts absolute Beliggenhed er bestemt; thi denne sidste er langt mindre end den første.

[1]) Med Hensyn til Beviset herfor henvises til: »Den danske Gradmaaling, 1. Bind § 59«.

De angivne Breder og Længder maa derfor betragtes som Koordinater i Forhold til det astronomisk bestemte Punkt.

Den plane Middelfejl ved de danske 2. Ordens Punkter vil vel kunne sættes til 0.15 — 0.30 Meter, og da

1 Sekund i Breder og Længder svarer til omtrent 30 Meter, altsaa 0.001 — - — - — — - — 0.03 — , maa disse angives med 3 Decimaler af Sekunder.[1])

Azimutherne bør ligeledes angives med en til Maalingen af Vinklerne svarende Nøjagtighed; der vil næppe nogensinde kræves mere end 1 Decimal af Sekunder.

§ 17. Sfæriske Trekanter.

Middelkuglen.

95. Størrelsen $r = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \lambda}$ . . . . . (58)

kaldes *Middelkrumningsradien;* denne er altsaa for vedkommende Punkt paa Jordoverfladen geometrisk Mellemproportional imellem Krumningsradierne for de to Hovedsnit, Meridianen og Perpendikulæren, som af alle normale Snit har henholdsvis den mindste og den største Krumningsradius.

Naar man erstatter en lille Del af Sfæroiden med en Kugleflade, benyttes Middelkrumningsradien som Radius for denne, idet man i Udtrykket (58) benytter den Værdi for λ, som svarer til det omtrentlige Tyngdepunkt for vedkommende Terræn.

Dette Valg af Radius er i sig selv naturligt, og det bliver saa meget mere berettiget, som det af *Grunert*[2]) er bevist, at Størrelsen $r = \sqrt{MN}$ er aritmetisk Middeltal af Krumningsradierne for alle Normalsnit gennem vedkommende Punkt. Det har iøvrigt ikke stor Betydning, hvilken Værdi man tillægger Radius i den Kugleflade, der skal erstatte en Del af Ellipsoiden, eftersom denne Radius kun kommer til Anvendelse i Korrektionsled, der indeholder Faktoren $\frac{1}{r^2}$, og som er saa smaa, at de i Reglen kan beregnes ved 4cifrede Logaritmer.

96. I det følgende vil der jævnlig blive Brug for Rækkeudviklinger af trigonometriske Funktioner af $\frac{b}{r}$, hvor b er en

[1]) For Længder gælder dette dog kun ved Ækvator; under vore Breder svarer 1 Sekund til omtrent 25 m.

[2]) Se: »Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, III, 1896«, Pag. 226.

Bue paa Middelkuglen, og $\frac{b}{r}$ altsaa en Centervinkel. Hvormange Led, man behøver at medtage af disse stærkt konvergente Rækker, kan ses deraf, at Centervinklen og altsaa ogsaa den trigonometriske Funktion af denne maa angives med samme Nøjagtighed som Breder og Længder (Side 134), altsaa med 3 Decimaler af Sekunder, hvilket i Tal svarer til omtrent $\frac{1}{2\times 10^8}$.

Buen b vil, dersom den er en Trekantside, hos os næppe overstige 40 km, saa at

$$\frac{b}{r} < \frac{1}{150}, \quad \left(\frac{b}{r}\right)^2 < \frac{1}{22500}, \quad \left(\frac{b}{r}\right)^3 < \frac{1}{3375000} \text{ og } \left(\frac{b}{r}\right)^4 < \frac{1}{506250000}.$$

De Led, som indeholder disse Størrelser, kaldes Led af 1., 2., 3.... Orden. Det er altsaa tilstrækkeligt at medtage Leddene af de 3 første Ordener.

Er b ikke en Trekantside men Buen mellem to Punkter, hvis Afstand dog ikke overstiger 100 km (hvilket jævnlig forekommer i det følgende), da er

$$\frac{b}{r} < \frac{1}{60}, \quad \left(\frac{b}{r}\right)^2 < \frac{1}{3600}, \quad \left(\frac{b}{r}\right)^3 < \frac{1}{216000}, \quad \left(\frac{b}{r}\right)^4 < \frac{1}{12960000}$$

$$\text{og } \left(\frac{b}{r}\right)^5 < \frac{1}{777600000},$$

hvoraf ses, at Leddet af 4. Orden maa medtages.

Ogsaa Horisontalvinkler beregnes undertiden ved Rækkeudvikling af $\frac{b}{r}$, hvor b er en Trekantside; da en Horisontalvinkel aldrig kræves bestemt med mere end 1 Decimal af Sekunder, hvilket i Tal svarer til omtrent $\frac{1}{2\times 10^6}$, er det tilstrækkeligt ved dens Beregning at medtage Leddene af de 3 første Ordener.

Resultatet heraf er: Det er tilladeligt at bortkaste Leddene af højere end 3. Orden, undtagen naar det drejer sig om Beregning af Buer paa over 40 km, da bortkastes Leddene af højere end 4. Orden.

De almindeligst anvendte Rækker er herefter:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3}, \qquad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{\lfloor 4}, \qquad \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}.$$

97. Her skal nu antydes, hvor tæt Ellipsoiden slutter sig til Kuglen med Radius $r = \sqrt{MN}$, *Middelkuglen.*

Tænker man sig gennem et Punkt P (Fig. 109) paa Ellipsoiden lagt 3 Kugleflader, alle med Centrum i Normalen og

med Radierne M, r og N, da vil alle disse 3 Kugleflader i P have Tangentplan fælles med Ellipsoiden, og saavel Kuglefladen med Radius r som Ellipsoidefladen vil — naar man ikke fjerner sig langt fra P — ligge helt imellem de to Kugleflader med Radierne M og N. Ellipsoiden og Middelkuglen maa altsaa ubetinget slutte sig nærmere sammen end Kuglerne med Radierne M og N, om hvilke vi nu vil bevise, at de kun fjerner sig meget lidt fra hinanden.

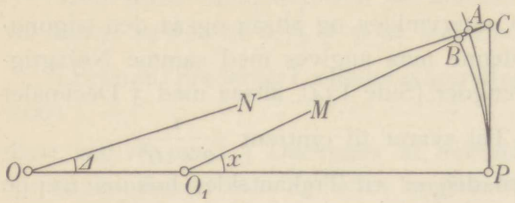


Fig. 109.

Lad Skæringslinjerne mellem et Normalsnit gennem P og den fælles Tangentplan til P samt Kuglerne med Radierne M og N være henholdsvis den rette Linje PC og Cirkelbuerne PB og PA, da haves med de paa Fig. 109 anførte Betegnelser paa Vinklerne

$$PC = N \operatorname{tg} \Delta = M \operatorname{tg} x,$$

hvoraf, idet $\operatorname{tg} \Delta$ og $\operatorname{tg} x$ udvikles i Række, faas

$$x + \frac{x^3}{3} = \frac{N}{M}\left(\Delta + \frac{\Delta^3}{3}\right).$$

Ved at opløfte denne Ligning til 3 Potens, faas, idet Leddene af højere end 4. Orden i Overensstemmelse med Punkt 96 bortkastes,

$$x^3 = \frac{N^3}{M^3}\Delta^3,$$

hvilket indsat i ovenstaaende Ligning giver

$$x = \frac{N}{M}\Delta\left(1 + \frac{\Delta^2}{3}\left(1 - \frac{N^2}{M^2}\right)\right).$$

Afstanden fra C til de to Cirkler bliver nu

$$CA = N \sec \Delta - N \quad \text{og} \quad CB = M \sec x - M,$$

eller, naar sec udvikles i Række, idet vi dog, da det her kun drejer sig om en Overslagsregning, ikke medtager 4. Ordens Leddet,

$$CA = N\left(1 + \frac{\Delta^2}{2}\right) - N \quad \text{og} \quad CB = M\left(1 + \frac{N^2}{M^2}\frac{\Delta^2}{2}\right) - M$$
$$= N\frac{\Delta^2}{2}, \qquad = N\frac{N}{M}\frac{\Delta^2}{2},$$

hvoraf

$$CB - CA = N \frac{N-M}{M} \frac{\Delta^2}{2} .$$

Dette Udtryk viser, hvor ringe Afstanden mellem de to Kugleflader er; for Breden 56° bliver den, naar Δ udtrykkes i Minutter, omtrent

$$0.00057\ \Delta^2 ,$$

hvilket for $\Delta = 1^1/_2{}^\circ$ giver omtrent 4.6 Meter.

Da denne Størrelse er forsvindende i Forhold til Radien, ses det, at man for smaa Værdier af Δ efter Omstændighederne kan anvende en hvilkensomhelst af Kuglerne med Radierne N, r eller M.

98. Her skal angives de omtrentlige Værdier i Meter for N, M, $N-M$ og r for $\lambda = 54^\circ\ 34'$ (omtrent Gjedser Fyr), $\lambda = 56^\circ$, (Danmarks omtrentlige Middelbrede) og $\lambda = 57^\circ\ 44'$ (omtrent Skagens Fyr).

λ	N	M	$N-M$	r
$54^\circ\ 34'$	6391154	6376794	14360	6383969
56°	6391654	6378292	13362	6384971
$57^\circ\ 44'$	6392246	6380063	12183	6386152

Den sfæriske Eksces.

99. Den sfæriske Eksces, ɔ: det som Summen af Vinklerne i en sfærisk Trekant overskrider 180°, er som bekendt

$$\varepsilon = \frac{720^\circ}{F} T ,$$

hvor T er den sfæriske Trekants Areal og F Kuglens Overflade, eller, idet r er Kuglens Radius,

$$\varepsilon = \frac{720^\circ}{4\pi r^2} T = \omega \frac{T}{r^2} .$$

Ved Beregningen af den sfæriske Eksces benytter man det i Punkt 97 angivne Udtryk for r, og man kan derhos erstatte den sfæriske Trekants Areal med Arealet af en plan Trekant, hvis Sider har samme Længde som den sfæriske Trekants. Som Følge heraf kan Ekscessen udtrykkes i Sekunder ved

$$\varepsilon = \frac{\omega}{2r^2} ab \sin C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

hvor a, b og C er to Sider og en mellemliggende Vinkel i Trekanten, hvorhos man med en for vort Formaal tilstrækkelig Nøjagtighed for alle danske Bredegrader kan sætte

$$\log \frac{\omega}{2r^2} = 1.4031 - 10 \text{ for Metermaal.}$$

Eksempelvis skal anføres

Ligesidede Trekanter med Sidelængde	Den sfæriske Eksces
$7^1/_2$ Kilometer	0.12 Sekund
30 —	1.97 —
60 —	7.89 —

Ogsaa disse Tal antyder Jordkrumningens ringe Betydning, naar Arealerne ikke er store.

100. Legendres Sætning: Den sfæriske Trekants Sider kan beregnes af en plan Trekant, hvis Vinkler er lig de tilsvarende sfæriske Vinkler formindskede med en Trediedel af Ekscessen.

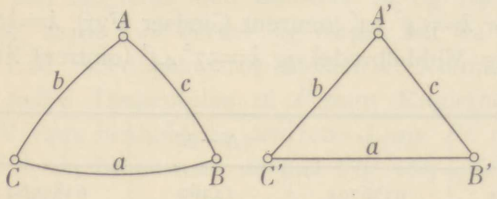


Fig. 110.

Lad ABC og $A'B'C'$ være to Trekanter, den første sfærisk (Kuglens Radius $= r$), den anden plan, i hvilke Siderne er lige store, ɔ: de rektificerede Sider i den sfæriske er lig de tilsvarende Sider i den plane, og lad Toplansvinklerne i den sfæriske være A, B og C, de tilsvarende Vinkler i den plane A', B' og C'.

I den sfæriske Trekant er da, idet Siderne udtrykkes i rene Tal, altsaa ved $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, og $\frac{c}{r}$

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A$$

eller

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Naar sin og cos udvikles i Rækker, faas

$$\cos A = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)},$$

hvor der ved Beregningen af cos A i Overensstemmelse med Punkt 96 kan bortkastes Led af højere end 3. Orden, hvorfor der i Tælleren, da denne skal divideres med en Størrelse af 2. Orden, kun kan bortkastes Led af højere end 5. Orden, hvorved faas

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}$$

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\left(\frac{bc}{r^2}\right)}\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^2bc} - \frac{bc}{4r^2} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b^2+c^2}{6r^2}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24r^2bc} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Det første Led er cos A', og som vist Side 87 er Tælleren i det andet Led $= -16\,T^2$, hvorved faas

$$\cos A = \cos A' - \frac{16\,T^2}{24r^2bc}$$

eller, naar man for det ene T i Tælleren indfører $\frac{1}{2}bc\sin A'$,

$$\cos A - \cos A' = -\frac{T\sin A'}{3r^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

hvor venstre Side kan omformes saaledes

$$\cos A - \cos A' = -2\sin\frac{A+A'}{2}\sin\frac{A-A'}{2},$$

eller, da A og A' er meget nær lige store, og $\frac{1}{2}(A-A')$ er meget lille, med stor Tilnærmelse

$$\cos A - \cos A' = -\sin A'\,\frac{A-A'}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Af (β) og (γ) faas nu

$$A - A' = \frac{1}{3}\frac{T}{r^2}\omega,$$

d: $\frac{1}{3}$ af den sfæriske Eksces.

§ 18. Retvinklede sfæroidiske Koordinater[1]).

101. I Fig. 111 er P_1 og P_2 Polerne, Q_1Q_2 Ækvator, P_1AP_2 A's og P_1BP_2 B's Meridian. Punktet A's sfæroidiske Brede er λ_0, B's λ. Punktet B_1 i A's Meridian har samme Brede som B; de to Punkters Længdeforskel er Θ. F er Fodpunktet for Perpendikulæren fra B paa A's Meridian.

[1]) Formlerne i denne §'s Punkt 101 og 102 samt Tabellen i Punkt 111 er med Forfatterens velvillige Tilladelse udarbejdede paa Grundlag af »Zachariae: De geodætiske Hovedpunkter og deres Koordinater, 1876«.

Azimuth[1]) for Retningen fra A til B paa Sfæroiden er den Vinkel, som A's Normalplan gennem B danner med Begyndelsespunktets, A's Meridian, idet der her erindres om, at denne Plan, B's Normalplan gennem A og den geodætiske Linje mellem A og B kan betragtes som sammenfaldende (se Punkt 93). Azimuth vil vi regne fra Begyndelsespunktets Meridians nordlige Retning voksende i positiv Omløbsretning.

Punktet B's retvinklede, sfæroidiske Koordinater i Forhold til Begyndelsespunktet, A, er

$x = AF$ (positiv mod Nord) og
$y = FB$ (positiv mod Øst).

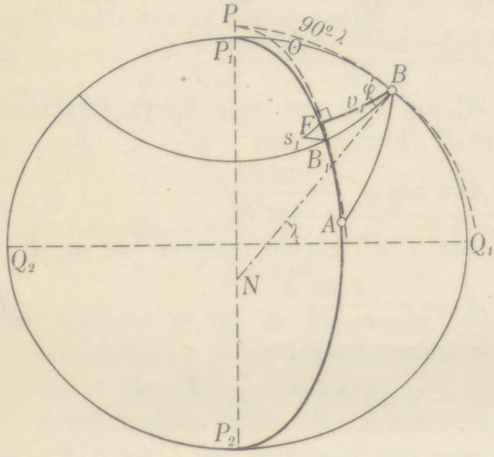


Fig. 111.

x kan altid findes som en Sum af AB_1 og B_1F, af hvilke den første har samme Fortegn som $\lambda - \lambda_0$, medens den sidste altid er positiv paa den nordlige Halvkugle.

Længden af Meridianbuen B_1F og Perpendikulærbuen FB kan i Henhold til Punkt 97 findes ved Hjælp af nogle sfæriske Trekanter paa den Kugle, hvis Centrum er Skæringspunktet mellem Jordaksen, P_1P_2 og Normalen, N, til Punkt B, hvis Radius er N, og som skærer Jordaksen i P.

I Trekant PFB er Toplansvinklen ved $F = 90°$, Toplansvinklen ved $P =$ Vinklen mellem A og B's Meridianplaner. Denne Vinkel, som vi har kaldt Θ, er, naar l_0 og l er henholdsvis A's og B's Længde, bestemt ved $\Theta = l_0 - l$; da vi regner Ordinaterne positive mod Øst, medens Længderne vokser mod Vest, faar Ordinaterne samme Fortegn som Θ. I den nævnte Trekant er endvidere Siden $BP = 90° - \lambda$, og kaldes Siden FB for v_1, haves

$$\sin \Theta = \frac{\sin v_1}{\sin (90° - \lambda)}, \quad \text{altsaa} \quad \sin v_1 = \sin \Theta \cos \lambda \quad (60)$$

Til Bestemmelse af B_1F, som vi vil kalde s_1, haves af den

[1]) Se Anm. i 1. Afsnit, S. 8.

ligebenede Trekant B_1PB (BB_1 er her en Storcirkelbue, som altsaa ikke falder sammen med Parallelbuen BB_1), idet en Storcirkelplan tænkes halverende Vinkel Θ, hvorved der fremkommer en retvinklet, sfærisk Trekant, og idet Toplansvinklen ved B kaldes φ,

$\cos(90^\circ - \lambda) = \sin\lambda = \cot\frac{\Theta}{2}\cot\varphi$, og af Trekant BB_1F $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg} v_1}{\sin s_1}$,

hvorved faas

$$\sin s_1 = \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\sin\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Udtrykkene (60) og (61) kan vel anvendes i den foreliggende Form; men Regningen bliver lettere, naar man udvikler de trigonometriske Funktioner af de smaa Vinkler i Række.

Herved omdannes (60) til

$$v_1 - \frac{{v_1}^3}{6} = \left(\Theta - \frac{\Theta^3}{6}\right)\cos\lambda,$$

hvoraf man som første Tilnærmelse har $v_1 = \Theta\cos\lambda$, og denne Tilnærmelse er tilstrækkelig til at danne Leddet $\frac{{v_1}^3}{6} = \frac{\Theta^3\cos^3\lambda}{6}$,

hvorved faas

$$v_1 = \Theta\cos\lambda\left(1 - \frac{\Theta^2}{6} + \frac{\Theta^2\cos^2\lambda}{6}\right) = \Theta\cos\lambda\left(1 - \frac{\Theta^2\sin^2\lambda}{6}\right),$$

som, idet vi for Kortheds Skyld indfører Betegnelserne

$$v = \Theta\cos\lambda \quad \text{og} \quad t = \Theta\sin\lambda, \quad \text{altsaa} \quad v^2 + t^2 = \Theta^2, \quad \ldots \quad (62)$$

giver

$$v_1 = v\left(1 - \frac{t^2}{6}\right),$$

eller naar v_1, v og t udtrykkes i Sekunder,

$$v_1 = v\left(1 - \frac{t^2}{6\omega^2}\right).$$

Tages Logaritmen, faas, idet det erindres, at $\log(1+x) = \mu x$, hvor $\mu = 0.43429$ er Modulus i det Briggiske Logaritmesystem (se Side 78),

$$\log v_1 = \log v - \frac{\mu t^2}{6\omega^2},$$

eller, idet vi sætter $\frac{\mu}{12\omega^2} = c$, altsaa $\log c = 7.9298 - 20$,

$$\log v_1 = \log v - 2ct^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Paa ganske lignende Maade omformes (61) til

$$s_1 - \frac{{s_1}^3}{6} = \left(v_1 + \frac{{v_1}^3}{3}\right)\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta^3}{24}\right)\sin\lambda,$$

hvor man som første Tilnærmelse har $s_1 = \frac{v_1\Theta}{2}\sin\lambda$, og deraf

$\frac{s_1^3}{6} = \frac{v_1^3 \Theta^3}{48} \sin^3\lambda$, altsaa

$$s_1 = \frac{v_1 \Theta}{2} \sin\lambda \left(1 + \frac{v_1^2}{3}\right)\left(1 + \frac{\Theta^2}{12}\right) + \frac{v_1^3 \Theta^3}{48} \sin^3\lambda;$$

indføres $t = \Theta \sin\lambda$, og bortkastes alle Led af højere end 4. Orden, faas

$$s_1 = \frac{v_1 t}{2}\left(1 + \frac{v_1^2}{3} + \frac{\Theta^2}{12}\right),$$

som atter ved Indførelse af $v_1 = v\left(1 - \frac{t^2}{6}\right)$ giver

$$s_1 = \frac{vt}{2}\left(1 - \frac{t^2}{6}\right)\left(1 + \frac{v^2}{3} + \frac{\Theta^2}{12}\right) = \frac{vt}{2}\left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{v^2}{3} + \frac{\Theta^2}{12}\right)$$
$$= \frac{vt}{2}\left\{1 + \frac{5v^2}{12} - \frac{t^2}{12}\right\},$$

Er imidlertid s den *sfæroidiske* Bredeforskel mellem F og B, haves, idet M er Meridianens Krumningsradius svarende til Breden λ,

$$Ms = Ns_1,$$

altsaa

$$s = s_1 \frac{N}{M} = \frac{N}{M} \frac{vt}{2}\left\{1 + \frac{5v^2}{12} - \frac{t^2}{12}\right\},$$

eller, naar s, v og t udtrykkes i Sekunder,

$$s = \frac{N}{2\omega M} vt \left\{1 + \frac{5v^2}{12\omega^2} - \frac{t^2}{12\omega^2}\right\}.$$

Tages Logaritmen, faas

$$\log s = \log\left(\frac{N}{2\omega M}\right) + \log v + \log t + 5cv^2 - ct^2 \ldots \quad (64)$$

Endelig findes

$$x = \frac{M_m}{\omega}(\lambda - \lambda_0 + s) \quad \text{og} \quad y = \frac{N}{\omega} v_1 \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

og

$$\left.\begin{aligned} \log x &= \log \frac{M_m}{\omega} + \log (\lambda - \lambda_0 + s) \\ \text{og} \quad \log y &= \log \frac{N}{\omega} + \log v - 2ct^2, \end{aligned}\right\} \ldots \quad (65a)$$

hvor M_m er Krumningsradien til Meridianen svarende til Breden $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda_0)$.

Til Brug ved Beregningen tjener den første af Tabellerne Side 160 over $\log \frac{M}{\omega}$ og $\log \frac{N}{\omega}$ for Metermaal samt over $\log\left(\frac{N}{2\omega M}\right)$ for hvert 20. Minut fra $\lambda = 54°$ til $\lambda = 58°$.

Beregningen af retvinklede, sfæroidiske Koordinater af Længder og Breder kan opstilles paa lignende Maade som i Eksempel 21, der viser en tilsvarende Beregning af konforme, retvinklede Koordinater. Naar der ved denne Beregning er anvendt 1 Decimal mere, end der er forlangt i Punkt 96, er dette alene af Hensyn til Regningskontrollen. Ved Anvendelse af Formlerne i Punkt 101 bortfalder alle de smaa Korrektionsled, som indeholder c, efterhaanden som Afstandene mellem Hovedpunkterne bliver mindre.

102. *Meridiankonvergensen* i et Punkt B er den Vinkel, som Punktets Meridian danner med en Plan parallel med Nulpunktets Meridian; den har samme Fortegn som Θ, altsaa positiv, naar B ligger Øst for Nulpunktets Meridian ($\Theta = l_0 - l$).

Meridiankonvergensen, t_1 kan under Henvisning til § 17, Punkt 95 findes af den i Punkt 101 omtalte sfæriske Trekant PBF, som ogsaa er fremstillet i hosstaaende Fig. 112, idet man har

$$\cos(90^\circ - \lambda) = \cot\Theta \cot(90^\circ - t_1),$$

som giver

$$\operatorname{tg} t_1 = \operatorname{tg}\Theta \sin\lambda,$$

eller ved Rækkeudvikling

$$t_1 + \frac{t_1^3}{3} = \left(\Theta + \frac{\Theta^3}{3}\right)\sin\lambda.$$

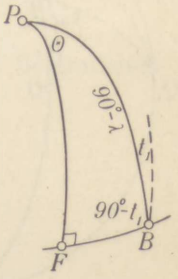


Fig. 112.

Sættes heri med sædvanlig Tilnærmelse $t_1^3 = \Theta^3 \sin^3\lambda$, faas

$$t_1 = \Theta\sin\lambda + \frac{\Theta^3}{3}\sin\lambda - \frac{\Theta^3}{3}\sin^3\lambda$$

og med Indsættelse af Værdierne for v og t, idet t_1 udtrykkes i Sekunder

$$t_1 = t\left(1 + \frac{v^2}{3\omega^2}\right)$$

og $$\log t_1 = \log t + 4cv^2.$$

Meridiankonvergensen er beregnet i Eksempel 21. I mange Tilfælde er den tilstrækkelig nøje bestemt ved

$$t = \Theta\sin\lambda.$$

§ 19. Retvinklede sfæriske Koordinater.

103. I Overensstemmelse med den Maade, paa hvilken Punkters Beliggenhed i Planen angives ved plane, retvinklede

Koordinater, kan Punkters Beliggenhed paa Kuglen angives ved retvinklede, sfæriske Koordinater, idet vi tænker os en Storcirkel $P_1 O P_2$ (Meridian) som Abscisseakse og et Punkt, O, i denne som Begyndelsespunkt. Lægger man da gennem et Punkt, A, en anden Storcirkel, QAQ_1 vinkelret paa den første, altsaa indeholdende dennes Poler Q og Q_1, vil A være bestemt ved Storcirkelbuerne, OF, Abscissen $= x_A$ og FA, Ordinaten $= y_A$, og vi vil regne Abscissen positiv mod Nord og Ordinaten positiv mod Øst. Punktet B bestemmes paa lignende Maade ved Storcirklen, QBQ_1, idet Kordinaterne er x_B og y_B.

Den Vinkel, φ_A^B, som Storcirklen AB danner med en Lillecirkel AP gennem A parallel med Udgangsmeridianen, vil vi kalde AB's Retningsvinkel i Modsætning til den i forrige § definerede Azimuth. Retningsvinklen svarer ganske til, hvad vi i Planen har kaldt Azimuth; men hvor der er Mulighed for Misforstaaelse, vil vi fastholde Betegnelsen Retningsvinkel, som vi ligesom i Planen regner fra Abscisseaksens positive Retning voksende i positiv Omløbsretning.

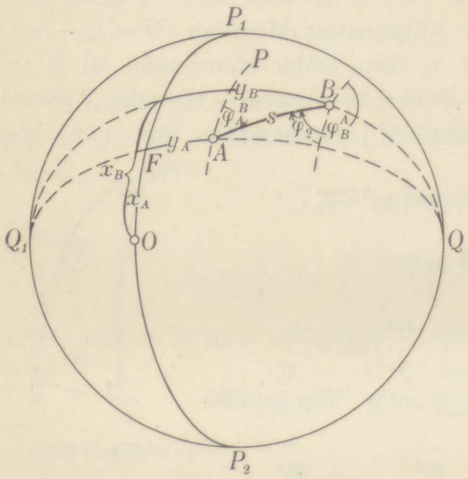


Fig. 113.

Det vil imidlertid ses, at for alle Retninger, der udgaar fra et Punkt i Abscisseaksen, falder Azimuth, z, og Retningsvinkel sammen, og (se Punkt 102) at for alle fra samme Punkt udgaaende Retninger har man

$$z - \varphi = t_1 ,$$

hvor t_1 er Meridiankonvergensen i A, som i de fleste Tilfælde er bestemt tilstrækkelig nøje ved $t = \Theta \sin \lambda$ og i alle Tilfælde ved

$$\log t_1 = \log t + 4\, cv^2.$$

Ved Opmaaling af Arealer, der ikke er større, end at Middelkuglen kan betragtes som sammenfaldende med Sfæroiden, benyttes med Fordel retvinklede, sfæriske Koordinater, idet man

da kan betragte de i § 18 fundne sfæroidiske Koordinater som sfæriske.

De retvinklede, sfæriske Koordinater benævnes efter *Soldner*, der anvendte dem første Gang i 1809 ved Bayerns Opmaaling, *soldnerske Koordinater*.

Idet vi da nu anvender de sfæroidiske Koordinater som sfæriske, foreligger her to Opgaver.

1) Naar man kender A's Koordinater samt φ_A^B og s_A^B at bestemme B's Koordinater og φ_B^A, hvilken sidste nemlig ikke er 180° forskellig fra φ_A^B, og

2) naar man kender A og B's Koordinater at bestemme φ_A^B, φ_B^A og s_A^B.

104. Bestemmelse af B's Koordinater og φ_B^A, naar man kender A's Koordinater samt s_A^B og φ_A^B.

Naar Middelkuglens Radius er r (svarende til Begyndelsespunktet), vil den sfæriske Trekant ABQ's Stykker være saaledes som paa Fig. 114 angivet, og man har da, (idet vi for Kortheds Skyld betegner s_A^B ved s, φ_A^B ved φ_A og φ_B^A ved φ_B)

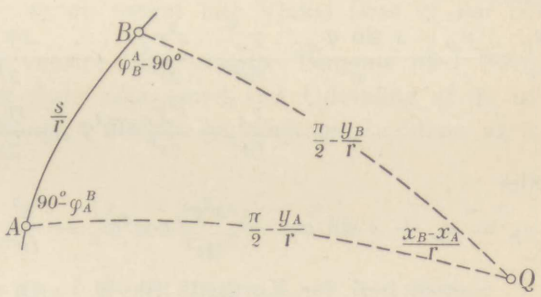


Fig. 114.

1) $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y_B}{r}\right)$$

$$= \cos\frac{s}{r}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y_A}{r}\right) + \sin\frac{s}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y_A}{r}\right)\cos(90° - \varphi_A). \quad (\alpha)$$

2) $$\frac{\sin\frac{x_B - x_A}{r}}{\sin\frac{s}{r}} = \frac{\sin(90° - \varphi_A)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y_B}{r}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

og 3) $$\operatorname{tg}\frac{\varphi_B - 90^\circ + 90^\circ - \varphi_A}{2}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y_A}{r} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y_B}{r}\right)\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y_A}{r} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y_B}{r}\right)\right)} \cot\frac{x_B - x_A}{2r} \quad \ldots (\gamma)$$

Af disse Ligninger kan y_B, x_B og φ_B findes; men Regningen lettes, naar de trigonometriske Funktioner af de smaa Vinkler udvikles i Række.

Ligning (α) giver da

$$\sin\frac{y_B}{r} = \cos\frac{s}{r}\sin\frac{y_A}{r} + \sin\frac{s}{r}\cos\frac{y_A}{r}\sin\varphi_A;$$

$$\frac{y_B}{r} - \frac{y_B^3}{6r^3}$$

$$= \left(1 - \frac{s^2}{2r^2}\right)\left(\frac{y_A}{r} - \frac{y_A^3}{6r^3}\right) + \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right)\left(1 - \frac{y_A^2}{2r^2}\right)\sin\varphi_A;$$

som første Tilnærmelse kan her sættes $y_B = y_A + s\sin\varphi_A$, der anvendt til Dannelse af det andet Led paa venstre Side giver

$$\frac{y_B}{r} = \frac{y_A}{r} + \frac{s\sin\varphi_A}{r} - \frac{y_A^3}{6r^3} - \frac{s^2 y_A}{2r^3} - \frac{s y_A^2}{2r^3}\sin\varphi_A - \frac{s^3}{6r^3}\sin\varphi_A$$
$$+ \frac{y_A^3}{6r^3} + \frac{s^2 y_A}{2r^3}\sin^2\varphi_A + \frac{s y_A^2}{2r^3}\sin\varphi_A + \frac{s^3}{6r^3}\sin^3\varphi_A$$

eller

$$y_B = y_A + s\sin\varphi_A - \frac{s^2 y_A}{2r^2}\cos^2\varphi_A - \frac{s^3}{6r^2}\sin\varphi_A\cos^2\varphi_A.$$

Sættes heri for Kortheds Skyld $s\sin\varphi_A = \beta$ (den plane Ordinattilvækst) og $s\cos\varphi_A = \alpha$ (den plane Abscissetilvækst), faas

$$\boldsymbol{y_B = y_A + \beta - \frac{\alpha^2 y_A}{2r^2} - \frac{\alpha^2\beta}{6r^2}} \quad \ldots\ldots (66)$$

Ligning (β) giver paa lignende Maade

$$\sin\frac{x_B - x_A}{r} = \sin\frac{s}{r}\sec\frac{y_B}{r}\cos\varphi_A,$$

$$\frac{x_B - x_A}{r} - \frac{(x_B - x_A)^3}{6r^3} = \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right)\left(1 + \frac{y_B^2}{2r^2}\right)\cos\varphi_A;$$

som første Tilnærmelse kan her sættes $x_B - x_A = s\cos\varphi_A$, der anvendt til Dannelse af det andet Led paa venstre Side giver

$$\frac{x_B - x_A}{r} = \frac{s}{r}\cos\varphi_A + \frac{s y_B^2}{2r^3}\cos\varphi_A - \frac{s^3}{6r^3}\cos\varphi_A \sin^2\varphi_A$$

eller

$$\boldsymbol{x_B = x_A + \alpha + \frac{\alpha y_B^2}{2r^2} - \frac{\alpha\beta^2}{6r^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (67)$$

Ligning (γ) giver

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_B - \varphi_A}{2} = \frac{\cos\dfrac{y_B - y_A}{2r}}{\sin\dfrac{y_B + y_A}{2r}}\cot\frac{x_B - x_A}{2r}.$$

Medens her $\varphi_B - \varphi_A$ ligger i Nærheden af 180°, vil vi ved at indføre en Hjælpevinkel $\varphi = \varphi_B - 180°$ opnaa at komme til at regne med den lille Vinkel $\varphi_A - \varphi$; man faar da

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_B - \varphi_A}{2} = \operatorname{tg}\left(90° - \frac{\varphi_A - \varphi}{2}\right) = \cot\frac{\varphi_A - \varphi}{2},$$

altsaa

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_A - \varphi}{2} = \sin\frac{y_B + y_A}{2r}\sec\frac{y_B - y_A}{2r}\operatorname{tg}\frac{x_B - x_A}{2r}.$$

Da Vinklen $\dfrac{\varphi_A - \varphi}{2}$ er en meget lille Vinkel (kun et Par Sekunder), kan vi paa venstre Side erstatte Tangens med Buen, medens vi paa højre Side nøjes med ved Udvikling af de trigonometriske Funktioner i Række at medtage Leddene af 1. Orden, hvorved faas

$$\frac{\varphi_A - \varphi}{2\omega} = \frac{(y_B + y_A)(x_B - x_A)}{4r^2},$$

som da $y_B + y_A = 2y_A + \beta$ og $x_B - x_A = \alpha$, giver

$$\frac{\varphi_A - \varphi}{2\omega} = \frac{\varphi_A - (\varphi_B - 180°)}{2\omega} = \frac{\alpha(2y_A + \beta)}{4r^2},$$

altsaa

$$\boldsymbol{\varphi_B = \varphi_A + 180° - \frac{\alpha y_A \omega}{r^2} - \frac{\alpha\beta\omega}{2r^2}} \quad \ldots\ldots (68)$$

105. Bestemmelse af φ_A^B og φ_B^A samt Længden af AB, naar AB's Koordinater er givne.

Ligningerne (66) og (67) giver

$$\beta = s\sin\varphi_A = y_B - y_A + \frac{\alpha^2 y_A}{2r^2} + \frac{\alpha^2\beta}{6r^2}$$

$$\text{og } \alpha = s \cos \varphi_A = x_B - x_A - \frac{\alpha y_B^2}{2r^2} + \frac{\alpha\beta^2}{6r^2},$$

hvor man som 1. Tilnærmelse har $\beta = y_B - y_A$ og $\alpha = x_B - x_A$, hvilke tilnærmede Værdier er tilstrækkelig nøjagtige til Indsættelse i 2. Ordens Leddene, hvorved faas

$$\left.\begin{aligned} \beta &= y_B - y_A + \frac{(x_B - x_A)^2}{6r^2}\,(3y_A + (y_B - y_A)) \\ \text{og } \alpha &= x_B - x_A - \frac{x_B - x_A}{6r^2}\,(3y_B^2 - (y_B - y_A)^2)\,. \end{aligned}\right\} \quad (69).$$

Endelig faas

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{og} \quad s_A^B = \frac{\beta}{\sin \varphi_A} = \frac{\alpha}{\cos \varphi_A} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,. \quad (70)$$

Medens vi hidtil i denne § kun har beskæftiget os med sfæriske Retningsvinkler og Afstande, vil vi i de følgende Formler ogsaa indføre plane Azimuther og Afstande, og vi vil derfor til Adskillelse sætte sf. foran de sfæriske og pl. foran de plane Retningsvinkler og Afstande.

Formlen sf. $s_A^B = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ kan reduceres, naar α og β's Værdier indføres, hvilket giver

$$\begin{aligned} (\text{sf. } s_A^B)^2 &= \left\{y_B - y_A + \frac{(x_B - x_A)^2}{6r^2}\left(3y_A + (y_B - y_A)\right)\right\}^2 \\ &\quad + \left\{x_B - x_A - \frac{(x_B - x_A)}{6r^2}\,(3y_B^2 - (y_B - y_A)^2)\right\}^2 \\ &= (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \\ &\quad + \frac{(x_B - x_A)^2}{3r^2}\left\{(y_B - y_A)(3y_A + (y_B - y_A))\right\} \\ &\quad - \frac{(x_B - x_A)^2}{3r^2}\left\{3y_B^2 - (y_B - y_A)^2\right\} \\ &= (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \\ &\quad - \frac{(x_B - x_A)^2}{3r^2}\left\{y_A^2 + y_A y_B + y_B^2\right\}; \end{aligned}$$

sættes her $(\text{pl. } s_A^B)^2 = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2$, hvor da pl. s_A^B er den Afstand, som svarer til de plane Koordinater y_A, x_A og y_B, x_B, faas, idet der for $x_B - x_A$ indføres $(\text{pl. } s_A^B \cos \varphi_A)$,

$$(\text{sf. } s_A^B)^2 = (\text{pl. } s_A^B)^2 \left\{1 - \frac{\cos^2(\text{pl. } \varphi_A)}{3r^2}\,(y_A^2 + y_A y_B + y_B^2)\right\},$$

hvoraf

$$\text{sf. } s_A^B = \text{pl. } s_A^B \left\{ 1 - \frac{\cos^2 (\text{pl. } \varphi_A^B)}{6r^2} (y_A^2 + y_A y_B + y_B^2) \right\}. \quad (71)$$

Retningsvinklen φ_B beregnes ved (68), efter at φ_A er bestemt, eller ved

$$\varphi_B = \varphi_A + 180^\circ - \frac{(x_B - x_A) y_A \omega}{r^2} - \frac{(x_B - x_A)(y_B - y_A)\omega}{2r^2}. \quad (72)$$

106. Dersom man i Udtrykkene (66), (67), (68), (69), (70), (71) og (72) lader r vokse i det uendelige, ɔ: lader Kuglen gaa over til Planen, gaar samtidig de nævnte Udtryk over til de tilsvarende plane, hvilket ogsaa sker, naar α og β eller efter Omstændighederne y_A og y_B bliver tilstrækkelig smaa i Forhold til r. Efterhaanden, som Afstandene i det paagældende Terrænafsnit bliver tilstrækkelig smaa, gaar de sfæriske Formler altsaa af sig selv over til de tilsvarende plane.

En Betragtning af Korrektionsleddene i de nævnte Formler viser, hvor ringe Betydning det har, hvilken Radius man tillægger Kuglen (saml. Slutningsbemærkningen i Punkt 97).

Beregning af Retningsvinkler og Afstande kan opstilles paa lignende Maade som i Eksempel 22, der gælder under andre Forudsætninger (se Side 161).

Hvorledes der faas Kontrol paa disse Regninger saavelsom paa Omsætningen af Længder og Breder til sfæroidiske Koordinater vil fremgaa af § 23.

Til Brug ved Beregningen af Korrektionsleddene vil følgende Tabel over $\log \frac{1}{r^2}$ og $\log \frac{\omega}{r^2}$ for Metermaal og for Korrektionsleddene til Retningsvinklerne udtrykte i Sekunder være tilstrækkelig for hele Danmark.

Brede λ	$\log \frac{1}{r^2}$	$\log \frac{\omega}{r^2}$
54°	6.3899 — 20	1.7043 — 10
56°	6.3897 — 20	1.7041 — 10
58°	6.3895 — 20	1.7039 — 10

5. Kapitel.

Cylindriske Projektioner.

§ 20. Fremstilling af de cylindriske Projektioner.

107. I. De platte, rektangulære Kort fremstilles, naar man — idet man betragter den matematiske Jordoverflade som en Kugle — lader Cylinderen tangere langs Ækvator. Ved Udfoldningen bliver Ækvator en ret Linje, Meridianerne fremstilles ved deres Spor paa Cylinderen, altsaa som rette Linjer vinkelrette paa den rektificerede Ækvator. De øvrige Paralleler fremstilles som rette Linjer parallele med Ækvator.

Gøres Afstandene mellem Parallelerne lig den rektificerede Meridianbue mellem disse, opstaar de saakaldte platte, kvadratiske Kort (se Fig. 115, hvor Parallelerne fremstilles ved punkterede Linjer), hvis Maalestoksforhold er konstant langs Meridianerne, medens det langs Parallelerne vokser fra 1 til ∞, naar man gaar fra Ækvator til Polen.

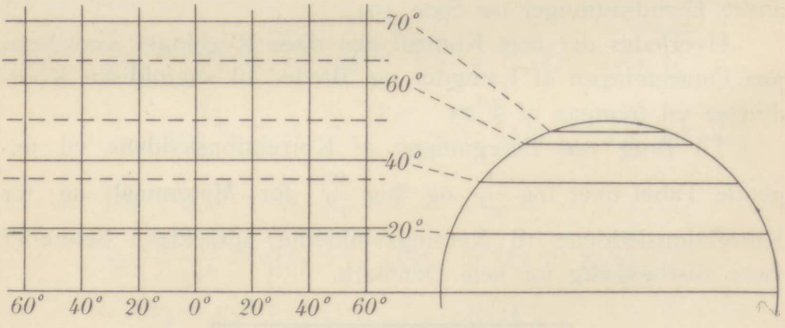


Fig. 115.

Lader man Afstandene mellem Parallelerne vokse mere og mere, jo længere man kommer fra Ækvator, saaledes at Maalestoksforholdet overalt bliver det samme langs Meridianen og langs Parallelen, opstaar en konform Projektion, som benævnes Merkators Projektion. Projektionen ses i Fig. 115, hvor Parallelerne er fremstillede ved fuldt optrukne Linjer. Nettet kommer til at bestaa af Rektangler, som alle har samme Brede, men hvis Højder bliver større og større, jo længere man fjerner sig fra Ækvator; heraf Navnet »Kort med voksende Bredder«. Da Maalestoksforholdet ogsaa her vokser fra 1 til ∞,

naar man gaar fra Ækvator til Polen, maa man have forskellige Maalestokke svarende til de forskellige Breder.

Denne Projektion finder særlig Anvendelse til Fremstilling af Søkort, da den loxodromiske Linje, ɔ: den Kurve paa Kloden, som overalt danner samme Vinkel med Meridianerne, her bliver en ret Linje, hvilket har Betydning, da det er den Kurve, der i Almindelighed angiver et Skibs Kurs. Det skal dog bemærkes, at naar to Punkter har betydelig Længdeforskel og ikke ligger i Nærheden af Ækvator bliver Storcirklen betydelig kortere end Loxodromen. To Punkter med 180° Længdeforskel, begge beliggende paa den 60. Bredegrad, vil f. Eks. (se Fig. 116) ad Storcirklen have Afstanden $\frac{1}{3}\pi r = 1.05r$, medens de ad Loxodromen (Parallelen) har Afstanden $\pi r \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\pi r = 1.57\,r$.

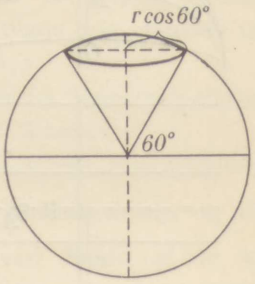


Fig. 116.

108. II. Den Flamstedske Projektion. Cylinderen tangerer langs Ækvator. Parallelerne bliver i Udfoldningen parallele rette Linjer, hvis indbyrdes Afstand er lig den virkelige paa Kloden (Fig. 117). Meridianerne fremstilles som brudte rette Linjer, idet man udad Parallelerne afsætter de virkelige

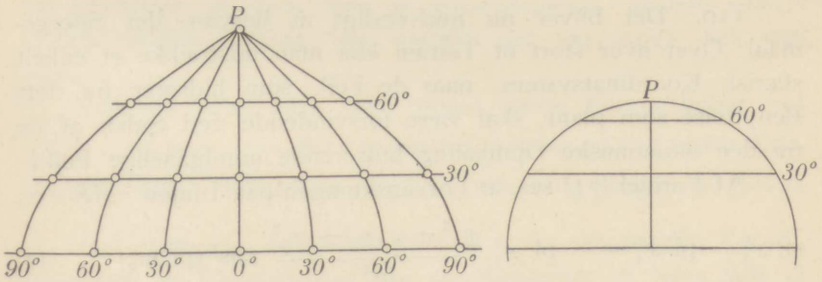


Fig. 117.

Længdedifferenser og forbinder de afsatte Punkter. Forvanskningen bliver meget stor, naar man fjerner sig betydeligt fra Midtemeridianen og Ækvator; men Arealerne bibeholdes.

109. III. Cassinis Projektion. Cylinderen tangerer langs Midtemeridianen, der saavelsom alle Storcirkler vinkelrette paa denne i Udfoldningen bliver rette Linjer (Fig. 118). Indkonstruktionen af et trigonometrisk Hovedpunkt, A, sker ved

Hjælp af de retvinklede Koordinater x og y (Storcirkelbuer), som altsaa i Udfoldningen afsættes henholdsvis udad Udfoldningsmeridianen og vinkelret paa denne.

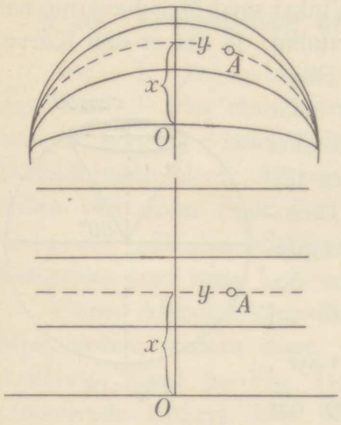


Fig. 118.

Denne Projektion, der i Slutningen af det 18. Aarhundrede er anvendt til Fremstillingen af et Frankrigs Kort, anvendes her i Danmark ved de senere matrikulære Nymaalinger; vi vil i det følgende benævne den: *Den konforme, cylindriske Projektion.* Man omsætter da i Henhold til § 18 alle de triangulerede Hovedpunkters Længder og Breder til retvinklede sfæroidiske Koordinater; og i Henhold til § 17 benyttes disse som sfæriske Koordinater, beliggende paa den Middelkugle som for vedkommende Areal erstatter Ellipsoiden. Ved Projektionen benyttes da disse sfæriske Koordinater som plane, saaledes som foran angivet.

§ 21. Koordinatsystemers Udstrækning.

110. Det bliver nu nødvendigt at besvare det Spørgsmaal: Over hvor stort et Terræn kan man udstrække et enkelt sfærisk Koordinatsystem, naar de Fejl, som hidrører fra dets Benyttelse som plant, skal være forsvindende ved Siden af de fra den økonomiske Opmaaling hidrørende uundgaaelige Fejl?

Af Formel (71) ses, at Forvanskningen paa Linjen AB er,

$$\text{sf. } s_A^B - \text{pl. } s_A^B = -\text{pl. } s_A^B \frac{y_A^2 + y_A y_B + y_B^2}{6r^2} \cos^2(\text{pl. } \varphi_A^B) \ldots (a)$$

Tænker vi os nu, at B rykker nærmere mod A, saa vil Forvanskningen, udtrykt i Brøkdele af Linjens Længde, nærme sig mod $-\frac{y_A^2}{2r^2}\cos^2\varphi$, ɔ: Forvanskningen omkring et Punkt, som har Ordinaten y, er $-\frac{y^2}{2r^2}\cos^2\varphi$. Forvanskningen forandrer sig altsaa med φ; for $\varphi = 90°$, ɔ: for Linjer, som gaar vinkelret paa Abscisseaksen, er den Nul, og for $\varphi = 0°$, ɔ: Linjer, som er parallele med Abscisseaksen, faar den sin

største Værdi $-\frac{y^2}{2r^2}$. Forvanskningen vokser altsaa med y's Kvadrat.

Er Afstanden sf. s mellem to trianguleredе Punkter A og B bestemt ved direkte Maaling, bliver den ifølge det anførte — naar Maalingen forudsætter fejlfri — *kortere* end den Afstand pl. s, som faas ved Beregning af AB af A og B's sfæriske Koordinater, naar disse betragtes som plane, og Formel (α) giver et almindeligt Udtryk for sf. s — pl. s.

Da x ikke forekommer i Udtrykkene for Forvanskningen, ses det, at denne er ganske uafhængig af Abscissen.

III. Som alt sagt, fremkommer den største Forvanskning $\frac{y^2}{2r^2}$ (numerisk) i Retningen parallel med Abscisseaksen, og da Forvanskningen bør være forsvindende ved Siden af de fra Maalingen hidrørende Fejl, selv naar Maalingen er udført under de gunstigste Omstændigheder og med den højeste Grad af Nøjagtighed, tør man neppe lade Forvanskningen overstige 1 : 20000 ($^1/_4$ af Middelværdien for den lovmæssige Fejl ved Længdemaaling); og den Afstand y fra Abscisseaksen, i hvilken denne Værdi vil naas, bestemmes altsaa ved

$$\frac{y^2}{2r^2} = \frac{1}{20000}, \text{ som giver } y = \frac{r}{100} = 64 \text{ Kilometer.}$$

Man vil altsaa kunne udstrække et enkelt Koordinatsystem 64 Kilometer til hver Side af Abscisseaksen, medens man i Abscisseaksens Retning kan strække det saa langt, det skal være.

Selv om man vilde taale noget større Forvanskning end $\frac{1}{20000}$, vil man, som det fremgaar af Oversigten paa næste Side, dog ikke kunne udstrække Systemet væsentlig længere til Siden.

Det lader sig imidlertid gøre at give det enkelte Koordinatsystem en Udstrækning paa 90 Kilometer til hver Side af Abscisseaksen, uden at Forvanskningen noget Sted kommer til væsentlig at overskride 1 : 20000, idet de paa sædvanlig Maade beregnede Koordinater formindskes med 1 : 20000, hvorved Forvanskningen langs Abscisseaksen bliver + 1 : 20000, medens den i Afstanden 64 Kilometer fra denne bliver Nul og i Afstanden 90 Kilometer bliver — 1 : 20000.

Dette er ensbetydende med enten at tænke sig Ellipsoidens Dimensioner formindskede med 1 : 20000 altsaa Ellipsoidens halve Storakse med ca. 320 Meter, en Størrelse som ingen Betyd-

ning har, naar Hensyn tages til den Usikkerhed, med hvilken den halve Storakse er bestemt[1]), eller ensbetydende med at tænke sig, at Udfoldningscylinderen skærer i Stedet for at røre Sfæroiden.

Forvanskningens Størrelse i forskellige Afstande fra Abscisseaksen vil ses af hosstaaende Oversigt, der tillige viser Forvanskningen, naar de beregnede Koordinater formindskes med 1 : 20000 .

Afstand fra Abscisseaksen	Forvanskning, $\frac{y^2}{2r^2}$	Forvanskning + 1 : 20000
0 Kilometer	— 0.0000000	+ 0.0000500
10 —	— 0.0000012	+ 0.0000488
20 —	— 0.0000049	+ 0.0000451
30 —	— 0.0000110	+ 0.0000390
40 —	— 0.0000196	+ 0.0000304
50 —	— 0.0000306	+ 0.0000194
60 —	— 0.0000442	+ 0.0000058
70 —	— 0.0000600	— 0.0000100
80 —	— 0.0000785	— 0.0000285
90 —	— 0.0000993	— 0.0000493

§ 22. Retvinklede Koordinater i den konforme, cylindriske Projektion.

112. Det i § 19 fremstillede Koordinatsystem betegner ikke nogen konform Projektion; det har imidlertid visse Fordele at anvende en saadan. Vi vil nu se, hvilke Forandringer, der skal foretages med de retvinklede, sfæriske Koordinater, for at der skal opnaas *Konformitet.*

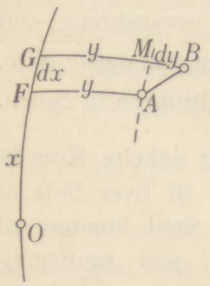
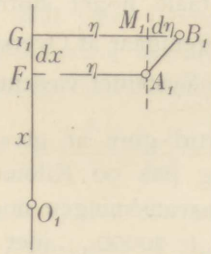


Fig. 119a



119b.

Fremstiller Fig. 119a to uendelig tæt ved hinanden paa Kuglen liggende Punkter A og B med de retvinklede, sfæriske Koordinater henholdsvis x, y og $x + dx$, $y + dy$, medens Fig. 119b viser de samme Punkter fremstillede i Planen i et retvinklet Koordinatsystem, idet Abscisserne uforandret er x og $x + dx$, medens Ordinaterne er

[1]) Se Anm. Side 130.

η og $\eta + d\eta$, da er: $FA = GM = y$; $F_1A_1 = G_1M_1 = \eta$; $MB = dy$ og $M_1B_1 = d\eta$.

For at Konformitet skal være til Stede, maa de to uendelig smaa Trekanter AMB og $A_1M_1B_1$ være ligedannede, altsaa er

$$\frac{B_1M_1}{BM} = \frac{A_1M_1}{AM}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

men det første af disse Forhold er lig $\frac{d\eta}{dy}$, medens det andet ifølge § 21 er lig $1 + \frac{y^2}{2r^2}$; altsaa er

$$d\eta = \left(1 + \frac{y^2}{2r^2}\right) dy,$$

som ved Integration giver

$$\eta = y + \frac{y^3}{6r^2} = y\left(1 + \frac{y^2}{6r^2}\right), \quad \ldots\ldots (73)$$

medens man omvendt med sædvanlig Tilnærmelse har

$$y = \eta\left(1 - \frac{\eta^2}{6r^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

At de to Forhold i Proportionen (α) er ligestore med $\frac{A_1B_1}{AB}$ viser, at Forvanskningen er den samme i alle Retninger for konforme Projektioner.

De retvinklede, sfæriske Koordinater kan altsaa omdannes til retvinklede, konforme, naar man i Stedet for y sætter $y\left(1 + \frac{y^2}{6r^2}\right)$, medens x bliver uforandret. Idet nu de sfæroidiske Koordinater (65), Side 142, anvendes som sfæriske, (saml. Bemærkningen Side 144 nederst), kan de omsættes til konforme, retvinklede Koordinater, uden at x forandres, medens Udtrykket (65) for Ordinaten

$$y = \frac{N}{\omega} v_1$$

omformes til

$$y = \frac{N}{\omega} v_1\left(1 + \frac{N^2}{\omega^2} {v_1}^2 \frac{1}{6N^2}\right) = \frac{N}{\omega} v_1\left(1 + \frac{{v_1}^2}{6\omega^2}\right)$$

$$= \frac{N}{\omega} v\left(1 - \frac{t^2}{6\omega^2}\right)\left(1 + \frac{v^2\left(1 - \frac{t^2}{6\omega^2}\right)^2}{6\omega^2}\right),$$

som, idet Leddene af højere end 4. Orden bortkastes, giver

$$y = \frac{N}{\omega} v\left(1 - \frac{t^2}{6\omega^2} + \frac{v^2}{6\omega^2}\right)$$

og altsaa

$$\log y = \log \frac{N}{\omega} + \log v - 2\,ct^2 + 2cv^2 \quad \ldots \quad (75).$$

113. De i § 19 udviklede Formler (66) til (72) kan nu paa lignende Maade anvendes for konforme, retvinklede Koordinater, naar man erstatter y'erne i disse med $y\left(1 - \frac{y^2}{6r^2}\right)$.

Formel (66) omdannes herved til

$$y_B - \frac{y_B^3}{6r^2} = y_A - \frac{y_A^3}{6r^2} + \beta - \frac{\alpha^2 y_A}{2r^2} - \frac{\alpha^2 \beta}{6r^2},$$

som, idet man for $\frac{y_B^3}{6r^2}$ paa sædvanlig Maade sætter

$$\frac{y_B^3}{6r^2} = \frac{(y_A + \beta)^3}{6r^2},$$

giver

$$y_B = y_A + \beta - \frac{(3y_A + \beta)\alpha^2}{6r^2} + \frac{(3y_A + \beta)\beta^2}{6r^2} + \frac{y_A^2 \beta}{2r^2} \quad (76)$$

Formlerne (67) og (68) bliver uforandrede, hvilket ogsaa gælder Udtrykket for α i Formel (69), medens Udtrykket for β omformes til

$$\left.\begin{aligned} &\beta = (y_B - y_A)\left\{1 - \frac{y_B^2 + y_B y_A + y_A^2}{6r^2}\right\} + \frac{(x_B - x_A)^2}{6r^2}(2y_A + y_B); \\ &\text{Udtrykket for } (\alpha) \text{ vil vi dog hellere skrive} \\ &\alpha = (x_B - x_A)\left\{1 - \frac{3y_B^2 - (y_B - y_A)^2}{6r^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Formlerne (70) bliver uforandrede, medens det til (71) svarende Udtryk lettest faas direkte af (70), som giver

$$\begin{aligned} (\text{sf. } s_A^B)^2 = \beta^2 + \alpha^2 &= (y_B - y_A)^2\left\{1 - \frac{1}{3r^2}(y_B^2 + y_A y_B + y_A^2)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{3r^2}(x_B - x_A)^2(y_B - y_A)(2y_A + y_B) \\ &\quad + (x_B - x_A)^2\left\{1 - \frac{1}{3r^2}\left(3y_B^2 - (y_B - y_A)^2\right)\right\} \\ = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 &- \frac{1}{3r^2}(y_B^2 + y_A y_B + y_A^2)(y_B - y_A)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3r^2}(x_B - x_A)^2(y_B^2 + y_A y_B + y_A^2) \\ = \left\{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2\right\}&\left(1 - \frac{y_B^2 + y_A y_B + y_A^2}{3r^2}\right) \end{aligned}$$

$$= (\text{pl. } s_A^B)^2 \left(1 - \frac{y_B^2 + y_A y_B + y_A^2}{3r^2}\right)$$

eller $$(\text{sf. } s_A^B) = (\text{pl. } s_A^B)\left(1 - \frac{y_B^2 + y_B y_A + y_A^2}{6r^2}\right), \quad \ldots \quad (78)$$

som af Hensyn til de efterfølgende Regninger hellere skrives

$$(\text{sf. } s_A^B) = (\text{pl. } s_A^B)\left(1 - \frac{1}{12r^2}\,(y_A^2 + y_B^2 + (y_A + y_B)^2)\right),$$

eller, naar log tages,

$$\log (\text{sf. } s_A^B) = \log (\text{pl. } s_A^B) - \frac{\mu}{12r^2}\,(y_A^2 + y_B^2 + (y_A + y_B)^2) \quad (79)$$

Udtrykket (78), som ikke indeholder φ, viser, at Forvanskningen ved Brugen af konforme, retvinklede Koordinater i alle Retninger er den samme, som den ved Brugen af Soldnerske Koordinater er i Retning parallel med Abscisseaksen. Forvanskningen omkring et Punkt, som har Ordinaten y, er altsaa i alle Retninger lig $-\frac{y^2}{2r^2}$.

Formel (72) forandres ikke ved Overgangen til konforme Koordinater.

Det vil endnu være praktisk at beregne Udtrykket $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$ ved Indsættelse af Værdierne for β og α fra (77), der giver $\operatorname{tg}(\text{sf. } \varphi_A^B) =$

$$\frac{\left[(y_B - y_A)\left\{1 - \frac{y_B^2 + y_B y_A + y_A^2}{6r^2}\right\} + \frac{(x_B - x_A)^2}{6r^2}(2y_A + y_B)\right]\left(1 + \frac{3y_B^2 - (y_B - y_A)^2}{6r^2}\right)}{x_B - x_A},$$

som med den sædvanlige Bortkastelse af Led af højere end 3. Orden giver

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\text{sf. } \varphi_A^B) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \frac{\{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\}(2y_A + y_B)}{6r^2(x_B - x_A)}, \\ \text{eller} \\ \operatorname{tg}(\text{sf. } \varphi_A^B) &= \operatorname{tg}.(\text{pl. } \varphi_A^B) + \frac{(\text{pl. } s_A^B)^2(2y_A + y_B)}{6r^2(x_B - x_A)}. \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

Vi vil ligeledes her af Hensyn til den efterfølgende Regning søge et Udtryk for $\text{sf. } \varphi_A^B - \text{pl. } \varphi_A^B$. Af (80) faas da, idet

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y},$$

$$\operatorname{tg}(\text{sf. } \varphi_A^B) - \operatorname{tg}(\text{pl. } \varphi_A^B) = \frac{\sin\left((\text{sf. } \varphi_A^B) - (\text{pl. } \varphi_A^B)\right)}{\cos(\text{sf. } \varphi_A^B)\cos(\text{pl. } \varphi_A^B)} = \frac{(\text{pl. } s_A^B)^2(2y_A + y_B)}{6r^2(x_B - x_A)},$$

hvoraf

$$\sin\left((\text{sf. } \varphi_A^B) - (\text{pl. } \varphi_A^B)\right) = \frac{(\text{pl. } s_A^B)^2 \cos(\text{sf. } \varphi_A^B) \cos(\text{pl. } \varphi_A^B)(2y_A + y_B)}{6r^2(x_B - x_A)},$$

og da Forskellen mellem $\cos(\text{pl. } \varphi_A^B)$ og $\cos(\text{sf. } \varphi_A^B)$ er en Størrelse af 2. Orden og altsaa bliver forsvindende ved Division med $6r^2(x_B - x_A)$, saa at man i Stedet for $\cos(\text{sf. } \varphi_A^B)$ kan sætte $\cos(\text{pl. } \varphi_A^B)$, faas

$$\sin(\text{sf. } \varphi_A^B - \text{pl. } \varphi_A^B) = \frac{(\text{pl. } s_A^B)^2 \cos^2(\text{pl. } \varphi_A^B)(2y_A + y_B)}{6r^2(x_B - x_A)}$$

$$= \frac{(x_B - x_A)(2y_A + y_B)}{6r^2},$$

og sluttelig med sædvanlig Tilnærmelse

$$\textbf{sf. } \varphi_A^B = \textbf{pl. } \varphi_A^B + \frac{\omega}{6r^2}(2y_A + y_B)(x_B - x_A), \quad \ldots \quad (81\,a)$$

og ved Ombytning af B og A

$$\textbf{sf. } \varphi_B^A = \textbf{pl. } \varphi_B^A - \frac{\omega}{6r^2}(y_A + 2y_B)(x_B - x_A) \quad \ldots \quad (81\,b)$$

§ 23. Samlet Fremstilling af Fremgangsmaaden ved et helt Lands (Danmarks) Opmaaling.

114. Vi vil nu se, hvorledes en samlet økonomisk Opmaaling af et helt Land kan udføres ved Hjælp af det i de foregaaende §§ udviklede paa Grundlag af et foreliggende System af Hovedpunkter, hvis Længder og Breder kendes.

Landet inddeles i Bælter, som i Retningen N—S kan være saa lange, det skal være, medens de i Retningen Ø—V ifølge § 21 højst maa vare 180 Kilometer brede; og hver af disse Landstrækninger maa da have sit særlige Koordinatsystem.

Idet vi nu specielt henvender Opmærksomheden paa Danmark, maa der bygges paa det foreliggende System af 1. Ordens Punkter (Gradmaalingspunkter) og 2., eventuelt ogsaa 3. Ordens Punkter, (bestemte af Generalstaben), og det vil da være naturligt at anvende to Koordinatsystemer, af hvilke det ene omfatter Sjælland, Laaland og Falster m. m. (tilsammen 130 Kilometer bredt), det andet Jylland og Fyn tilsammen 180 Kilometer bredt), henholdsvis med Nulpunkt i 2. Ordens Punkterne »*Stedstrupbjerg*« og »*Kannikebjerg*«, som begge paa det nærmeste ligger lige langt fra det af vedkommende Koordinatsystem omspændte Landomraades Øst- og Vestgrænse, og som begge er godt knyttede til Gradmaalingsnettet. Paa det jydsk-fynske Koordinat-

system maa da den i § 21 omtalte Formindskning med $^1/_{20000}$ bringes i Anvendelse. Ved disse to Koordinatsystemer vil man næppe nogensinde, naar man arbejder i ét Koordinatsystem, komme i det Tilfælde ved Triangulation at skulle benytte et

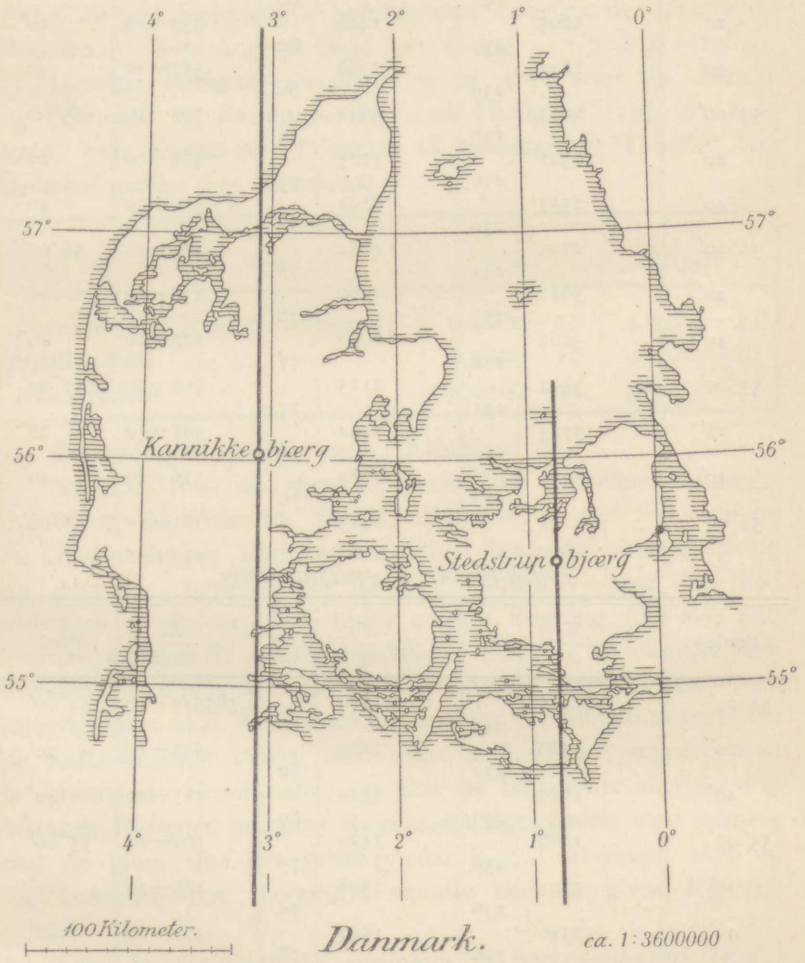


Fig. 120.

Hovedpunkt, som henhører til det andet Koordinatsystem, saa at man undgaar Omsætning fra det ene til det andet. Bornholm maa selvfølgelig have et særligt Koordinatsystem, som passende kan have »*Rytterknægten*« til Nulpunkt. Det sjællandske og det jydsk-fynske Koordinatsystem er angivne paa hosstaaende Danmarkskort (Fig. 120).

Sjællandske og Bornholmske Koordinatsystem.

Brede	$log \frac{M}{\omega}$	Diff.	$log \frac{N}{\omega}$	Diff.	$log \frac{N}{2\omega M}$	Brede
54°00′	1,4901364		1,4911406		4,3855549—10	54°00′
		241		80		
20′	1605		1486		533—10	20′
		239		80		
40′	1844		1566		517—10	40′
		239		80		
55°00′	2083		1646		501—10	55°00′
		238		79		
20′	2321		1725		485—10	20′
		236		79		
40′	2557		1804		470—10	40′
		236		78		
56°00′	2793		1882		454—10	56°00′
		234		78		
20′	3027		1960		438—10	20′
		233		78		
40′	3260		2038		423—10	40′
		232		77		
57°00′	3492		2115		407—10	57°00′
		231		77		
20′	3723		2192		392—10	20′
		230		77		
40′	3953		2269		376—10	40′
		228		76		
58°00′	4181		2345		361—10	58°00′

Jydsk-fynske Koordinatsystem.

Brede	$log \frac{M}{\omega}$	Diff.	$log \frac{N}{\omega}$	Diff.	$log \frac{N}{2\omega M}$	Brede
54°00′	1,4901147		1,4911189		4,3855549—10	54°00′
		241		80		
20′	1388		1269		533—10	20′
		239		80		
40′	1627		1349		517—10	40′
		239		80		
55°00′	1866		1429		501—10	55°00′
		238		79		
20′	2104		1508		485—10	20′
		236		79		
40′	2340		1587		470—10	40′
		236		78		
56°00′	2576		1665		454—10	56°00′
		234		78		
20′	2810		1743		438—10	20′
		233		78		
40′	3043		1821		423—10	40′
		232		77		
57°00′	3275		1898		407—10	57°00′
		231		77		
20′	3506		1975		392—10	20′
		230		77		
40′	3736		2052		376—10	40′
		228		76		
58°00′	3964		2128		361—10	58°00′

115. Benyttes den konforme, cylindriske Projektion, kan Koordinaterne beregnes ved Hjælp af (65a) for x's Vedkommende og ved Hjælp af (75) for y's Vedkommende, medens Meridiankonvergensen beregnes af $\log t_1 = \log t + 4cv^2$, og Beregningen kan opstilles som vist i Eksempel 21. Til denne Beregning benyttes de paa foregaaende Side opførte Tabeller, der gælder for Metermaal. Som angivet Side 141 er $\log c = 7.9298-20$.

Herefter beregnes de plane og af disse atter de sfæriske log Afstande og Retningsvinkler ved Hjælp af (79), (81a) og (81b), hvis Konstanter fremgaar af hosstaaende Tabeller, der ligeledes gælder for Metermaal.

	$\log \frac{\omega}{6r^2}$	$\log \frac{\mu}{12r^2}$
Bornholmske Koordinatsystem .	0,9260—10	4,9484—20
Sjællandske — .	0,9259—10	4,9483—20
Jydsk-fynske — .	0,9260—10	4,9483—20

Beregningen opstilles som i Eksempel 22.

Nu opskrives de sfæriske saavel som de plane Retningsvinkler og log Afstande som i Eksempel 23 ved Siden af de fra Gradmaalingen eller Generalstaben bekendte Azimuther og log Afstande, hvorved der faas en Kontrol — som ikke kan undværes — paa den hele hidtil udførte Regning, idet *dels* Differensen mellem de sammenhørende Azimuther og sfæriske Retningsvinkler udgaaende fra samme Punkt indenfor Regningsnøjagtigheden skal være konstant og lig Meridiankonvergensen for vedkommende Punkt, som foran er beregnet sammen med de retvinklede Koordinater, og *dels* de beregnede sfæriske log Afstande ligeledes indenfor Regningsnøjagtigheden skal stemme med de givne (for det jydsk-fynske Koordinatsystem skal de dog konstant være 0,0000217 mindre end de givne log Afstande).

Naar de retvinklede Koordinater er beregnede ved Hjælp af 7-cifrede Logaritmer, vil Forskellen mellem Størrelserne $z-\varphi$ i samme Punkt næppe overstige 0.2″, og Forskellen mellem de givne og beregnede log Afstande vil næppe overstige nogle faa Enheder i sidste Decimal.

Her skal bemærkes, at Gradmaalingen og Generalstaben regner Azimutherne fra Meridianens sydlige Retning, hvorved de bliver 180° større end de tilsvarende Retningsvinkler.

Mellem de omhandlede Hovedpunkter indskydes om for-

nødent flere Punkter, der mærkes solidt ved Granitsten, som angivet i Punkt 20. Disse Punkter bestemmes, idet man lader dem indgaa som Vinkelspidser i Trekantnet, der — ganske paa samme Maade som omtalt i Punkt 34 — indordnes mellem de givne Hovedpunkter.

Vinklerne maales med en til Afstandene svarende Nøjagtighed; paa store Afstande drives deres Middelfejl ned under 1″, dels ved Anvendelse af fine Instrumenter med fast Opstilling paa Granitsten (ikke Stativ), dels derved, at der tages mange Satser og kun arbejdes under gunstige Omstændigheder. Der maa anvendes store tydelige Træsignaler, hvis Sigtepunkt tilstræbes anbragt lodret over Stationspunktet, og opnaas dette ikke nøjagtigt, maa Signalets Ekscentricitet tages i Beregning.

Udjævningen og Koordinatberegningen kan nu udføres enten 1) i Planen eller 2) sfærisk; begge Fremgangsmaader skal angives.

1) Foregaar Udjævningen i Planen, maa de maalte Retninger, da de er sfæroidiske, tilføjes en Rettelse for Projektion, ɔ: de overføres til Planen, ved Formlerne (81a) og (81b); disse Rettelser falder imidlertid bort af sig selv, idet de bliver forsvindende, efterhaanden som Afstandene mellem de ny Punkter, som skal bestemmes, og de forud fastlagte bliver mindre. For at kunne beregne disse Rettelser maa man kende foreløbige Værdier for Koordinaterne til de Punkter, som skal bestemmes, hvorfor der maa udføres »Foreløbig Beregning af Retningsvinkler«, »Foreløbig Sideberegning« og »Foreløbig Koordinatberegning«, hvilket altsammen foregaar paa sædvanlig Maade, dog kun med 4 cifrede Logaritmer. Rettelserne til pl. φ_A^B, som kan skrives $\frac{\omega}{2r^2}\left(y_A + \frac{y_B - y_A}{3}\right)(x_B - x_A)$, kan iøvrigt findes af den af *Helmert* angivne i Fig. 121 viste grafiske Tabel.

I Tabellen er $\log(x_B - x_A)$ og $\log\left(y_A + \frac{y_B - y_A}{3}\right)$ afsatte som retvinklede Koordinater og udtrykte i km; hvilken der er Ordinat og hvilken Abscisse er ligegyldigt. Med de nævnte Argumenter gaar man ind i Tabellen og finder Rettelsen i Sekunder paa de skraa Linjer, som danner en Vinkel paa 45° med Akserne. Tabellen er af Hensyn til Pladsen ikke ført længere ned end til 5 km. Mindre Værdier kan fordobles, hvorefter den fundne Rettelse halveres. Til praktisk Brug vil en større Tabel være ønskelig.

Naar Rettelserne for Projektion er fundne og lagte til de maalte Retninger, udføres Udjævningen og senere Koordinatberegningen i Planen som vist i Eksemplerne 25 og 24.

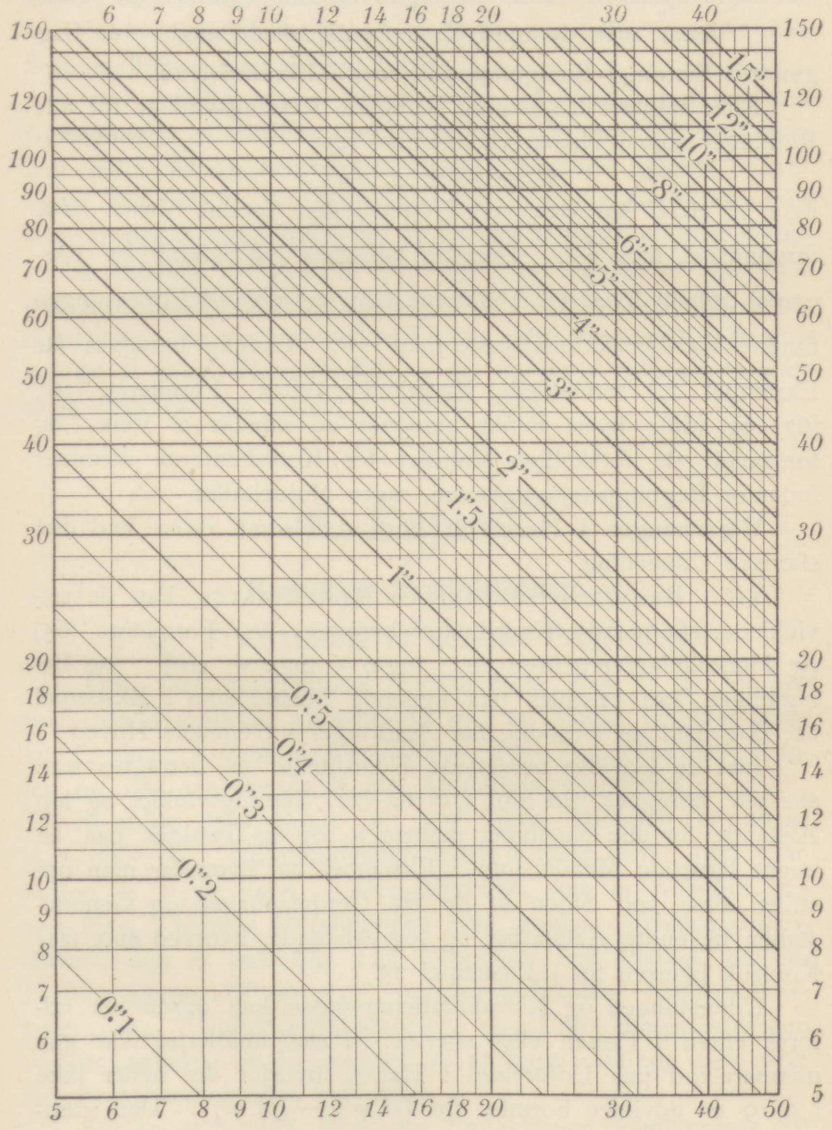


Fig. 121.

2) Foregaar Udjævningen sfærisk, dannes Betingelsesligningerne efter Reglerne i Punkterne 26—28, idet det dog maa iagttages:

a) at Summen af Vinklerne i en Trekant ikke skal være

180° men $180^\circ + \varepsilon$ (den sfæriske Eksces), som beregnes af Formel (59), og

b) at man ved Dannelsen af Side- og Basisligningerne ikke benytter de ved Maalingen fundne Værdier for Vinklerne, men derimod disse formindskede med $\frac{1}{3}\varepsilon$ (Legendres Sætning) Beregningen er vist i Eksempel 26.

Efter fuldført Udjævning beregnes Retningsvinkler for alle Retninger som i Planen ved Formel (2)

$$\varphi_B^C = \varphi_B^A + \angle ABC,$$

hvor $\angle ABC$ har den ved Udjævningen fundne Værdi (*ikke* formindsket med $\frac{\varepsilon}{3}$). Derefter beregnes log Siderne (se Eksempel 26), hvorved for Vinklerne benyttes de ved Udjævningen fundne Værdier formindskede med $\frac{\varepsilon}{3}$. Endelig beregnes (se Eksempel 27) retvinklede Koordinater efter Formlerne (76), (67) og (68); hvert Punkt beregnes ad mindst 2 Veje, og forsaavidt de forskellige Værdier for Koordinaterne stemmer indenfor Regningsnøjagtigheden, tages Middeltallet.

Udjævningen i Planen er dog utvivlsomt lettere end den sfæriske Udjævning.

116. Benyttes Soldnerske Koordinater, kan de retvinklede, sfæroidiske Koordinater beregnes ved Formlerne (65) og Meridiankonvergensen ved $\log t_1 = \log t + 4cv^2$, og Beregningen kan opstilles paa lignende Maade som i Eksempel 21, dog med de fornødne faa Ændringer i Skemaets Hoved.

Idet de saaledes beregnede Koordinater nu betragtes som sfæriske, beregnes ved (69), (70) og (72) Retningsvinkler og log Afstande for alle Retninger mellem to og to Punkter paa en noget lignende Maade som i Eksempel 22, hvorefter man opstiller disse ved Siden af de fra Gradmaalingen og Generalstaben bekendte Azimuther og log Afstande, hvorved man faar Kontrol, ligesom før i Eksempel 23.

Udjævningen og Koordinatberegningen kan ogsaa her udføres enten i Planen eller sfærisk; vi skal imidlertid ikke gaa nærmere ind paa Udførelsen i Planen, hvorfor der heller ikke i § 19 er udviklet Formler for $(\text{sf. } \varphi_A^B) - (\text{pl. } \varphi_A^B)$. Den sfæriske Udjævning foregaar som paa forrige Side under 2) angivet, og Koordinatberegningen udføres ved Formlerne (66), (67) og (68); Beregningerne kan opstilles paa lignende Maade som i Eksemplerne 26 og 27.

117. Paa de angivne Maader tilvejebringes et tilstrækkelig

tæt Net af Hovedpunkter, hvorefter Triangulationen fortsættes paa Planen efter Reglerne i § 5; Overgangen til Planen dannes som alt nævnt (se Punkt 106) af sig selv, idet den sfæriske Eksces og alle Korrektionsled til plane Retningsvinkler, Afstande og Koordinattilvækster taber al Betydning, efterhaanden som Sigterne bliver tilstrækkelig korte.

Ved enkelte lokale Maalinger — f. Eks. undertiden ved Bymaalinger — fordres der en større Nøjagtighed, end man kan opnaa ved den her angivne Fremgangsmaade, ligesom det vel ogsaa kan hænde, at det foreliggende fundamentale Trekantnet ikke er tilstrækkelig nøjagtigt til derpaa at støtte en eller anden særlig Maaling, medens det vel er fuldt anvendeligt til Støtte for den hele Landopmaaling; man maa da benytte et særligt Koordinatsystem for vedkommende Terræn, idet man støtter Maalingen til et enkelt Hovedpunkt og en fra dette udgaaende Retning, hvorhos man maaler en særlig Basis.

---

6. Kapitel.

Koniske Projektioner.

§ 24. Fremstilling af koniske Projektioner.

118. Den matematiske Jordoverflade, som vi for Simpelheds Skyld foreløbig vil betragte som en Kugle, tangerer langs en Parallel, *Udfoldningsparallelen.* Paa Fig. 122a ses Kuglen og den tangerende Kegle, Udfoldningsparallelen er FF_1. Vi vil kalde dens Brede λ_0, og dens Polhøjde er altsaa $p_0 = 90^\circ - \lambda_0$; Udfoldningsparallelens Radius bliver, idet Jordradien er r, $r \sin p_0$. Den Meridian, som er vinkelret paa den Plan, i hvilken Udfoldningen sker, kaldes *Udfoldningsmeridianen,* den er paa Fig. 122 fremstillet ved Planen gennem Frembringerne AT og A_1T, og den indeholder Kuglens Centrum, O. Udfoldningsparallelen og Udfoldningsmeridianen vælges saaledes, at de kommer til at ligge omtrent midt over det Areal, som ønskes fremstillet.

For nu at forstaa, hvorledes Projektionen fremkommer, vil vi tænke os Keglen skaaren op langs Frembringeren A_1T og udfoldet. Udfoldningen er vist i Fig. 122b, hvor Udfoldningsparallelen er fremstillet ved FF_1, hvis Radius er

$$z_0 = r \operatorname{tg} p_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Meridianerne fremstilles ved deres Spor paa Keglen, saaledes at Vinklen Θ mellem AT og BT, hvis Længdeforskel

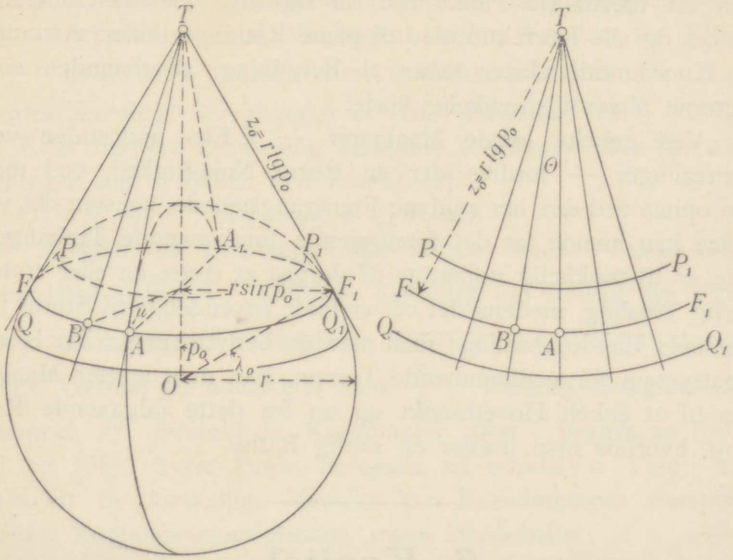


Fig. 122a. 122b.

er μ, i Udfoldningen bestemmes derved, at Buen AB skal være ligesaa stor i Udfoldningen som paa Kuglen, ɔ: at

$$r \sin p_0 \, \mu = r \operatorname{tg} p_0 \, \Theta ,$$

altsaa ved

$$\Theta = \mu \cos p_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

De øvrige Paralleler tegnes som Cirkler, der er koncentriske med Udfoldningsparallelen, og deres Radier, z, kan efter Projektionens Egenskaber bestemmes paa forskellig Maade.

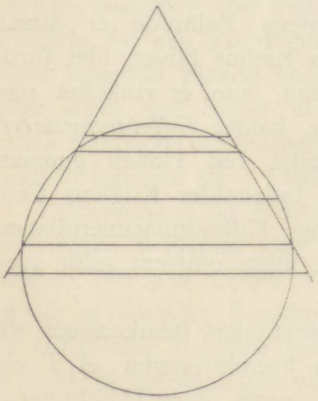


Fig. 123.

a. Parallelerne kan overføres ved deres Spor paa Keglen. Jo mere man fjerner sig fra Udfoldningsparallelen, desto mere vokser Maalestoksforholdet langs Parallelerne; ogsaa langs Meridianerne vokser det, naar man gaar mod Syd, men aftager, naar man gaar mod Nord.

b. Parallelerne kan overføres saaledes, at de mellemliggende Stykker af Keglens Frembringere bliver lig de tilsvarende rekti-

ficerede Meridianbuer. Langs Parallelerne vokser Maalestoksforholdet ogsaa her, jo mere man fjerner sig fra Udfoldningsparallelen. Derimod er Maalestoksforholdet konstant langs Meridianen.

Forvanskningen vil bedst ses ved Betragtning af Polpunktet, som i begge de nævnte Tilfælde fremstilles som en Cirkel.

119. For at opnaa mindre Forvanskning har man i Stedet for en tangerende benyttet en skærende Kegle (Fig. 123), hvorved opnaas, at Maalestoksforholdet bliver rigtigt langs to Paralleler (Keglens Skæringslinjer med Kuglen). Dette ses at være ganske tilsvarende til Fremgangsmaaden paa Side 30. Denne Projektion benævnes Mercators koniske Projektion.

§ 25. Den konforme, koniske Projektion.

120. Da denne Projektion er anvendt af den danske Generalstab ved Fremstillingen af »Det danske Atlas«, skal den behandles nærmere.

Parallelerne overføres saadan, at Konformitet opnaas, hvilket kan ske derved, at Radierne til de Cirkler, som fremstiller Parallelerne i Projektionen, afpasses saaledes, at man fra et hvilketsomhelst Punkt med Breden λ og Polhøjden $p = 90° - \lambda$ faar samme Maalestoksforhold langs Meridianen som langs Parallelen. Vi vil nu se, hvorledes Radierne, z, beregnes.

A. *Den matematiske Jordoverflade betragtet som en Kugle.*

a. Beregning af z.

Maalestoksforholdet langs Parallelen er (se Fig. 124)

$$\frac{ab}{AB} = \frac{z \cos p_0}{r \sin p}, \quad (\alpha)$$

medens Maalestoksforholdet langs Meridianen er

$$\frac{dz}{r\,dp} \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Man skal altsaa have

$$\frac{dz}{r\,dp} = \frac{z \cos p_0}{r \sin p}$$

eller

$$\frac{dz}{z} = \frac{\cos p_0}{\sin p}\,dp\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

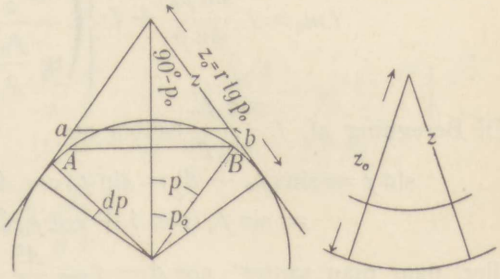


Fig. 124.

hvoraf ved Integration[1]) faas

$$\log z = \cos p_0 \log \operatorname{tg} \frac{p}{2} + \log c,$$

o:

$$z = c \left(\operatorname{tg} \frac{p}{2}\right)^{\cos p_0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

hvor Konstanten c bestemmes af

$$z_0 = r \operatorname{tg} p_0 = c \left(\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}\right)^{\cos p_0}, \quad \ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

Indsættes c's af (ε) fundne Værdi i (δ), faas

$$z = z_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}}\right)^{\cos p_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (84).$$

b. Maalestoksforholdet.

121. Vi vil herefter søge et Udtryk for Maalestoksforholdet, som vi kalder m; dette er udtrykt ved (α), og indsættes heri den fundne Værdi for z, faas

$$m_0 = \frac{z_0 \cos p_0}{r \sin p} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}}\right)^{\cos p_0}.$$

eller, idet z_0's Værdi, $r \operatorname{tg} p_0$, indføres,

$$m_0 = \frac{\sin p_0}{\sin p} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}}\right)^{\cos p_0},$$

hvoraf atter

$$l.m_0 = l. \frac{\sin p_0}{\sin p} + l. \left\{\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}}\right)^{\cos p_0}\right\} \quad \ldots\ldots (\varsigma)$$

Til Beregning af $l. \dfrac{\sin p_0}{\sin p}$ sættes nu

$$\sin p = \sin (p_0 + \Delta) = \sin p_0 \cos \Delta + \cos p_0 \sin \Delta$$
$$= \sin p_0 (\cos \Delta + \cot p_0 \sin \Delta),$$

eller, naar man sætter $\cos \Delta = 1 - \dfrac{\Delta^2}{2}$ og $\sin \Delta = \Delta$,

[1]) $$\int \frac{dp}{\sin p} = \int \frac{dp}{2 \sin \frac{p}{2} \cos \frac{p}{2}} = \int \frac{d \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cos^2 \frac{p}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p}{2}} = l. \operatorname{tg} \frac{p}{2} + l.c.$$

$$\sin p = \sin p_0 \left(1 - \frac{\Delta^2}{2} + \cot p_0 \Delta\right),$$

o:

$$\frac{\sin p_0}{\sin p} = \frac{1}{1 + \cot p_0 \Delta - \frac{\Delta^2}{2}},$$

hvoraf atter, idet man sætter $l.\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2}$, faas

$$l.\frac{\sin p_0}{\sin p} = -\cot p_0 \Delta + \frac{\Delta^2}{2} + \cot^2 p_0 \frac{\Delta^2}{2} \quad \ldots\ldots (\eta)$$

Endvidere beregnes $l.\left\{\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}}\right)^{\cos p_0}\right\}$, idet man har

$$\operatorname{tg}\frac{p}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{p_0}{2} + \frac{\Delta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2} + \operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}},$$

eller, idet man for $\operatorname{tg}\frac{\Delta}{2}$ sætter $\frac{\Delta}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{p}{2} = \operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\,\frac{1 + \cot\frac{p_0}{2}\frac{\Delta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\frac{\Delta}{2}},$$

o:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}} = \frac{1 + \cot\frac{p_0}{2}\frac{\Delta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\frac{\Delta}{2}}$$

eller $l.\left\{\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}}\right)^{\cos p_0}\right\}$

$$= \cos p_0 \left\{\cot\frac{p_0}{2}\frac{\Delta}{2} - \cot^2\frac{p_0}{2}\frac{\Delta^2}{8} - \left(-\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\frac{\Delta}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{p_0}{2}\frac{\Delta^2}{8}\right)\right\}$$

$$= \cos p_0 \left\{\frac{1 + \cos p_0}{\sin p_0}\frac{\Delta}{2} - \frac{(1 + \cos p_0)^2}{\sin^2 p_0}\frac{\Delta^2}{8} + \frac{1 - \cos p_0}{\sin p_0}\frac{\Delta}{2} + \frac{(1 - \cos p_0)^2}{\sin^2 p_0}\frac{\Delta^2}{8}\right\}$$

$$= \cos p_0 \left\{\frac{\Delta}{\sin p_0} - \frac{4\cos p_0}{\sin^2 p_0}\frac{\Delta^2}{8}\right\}$$

$$= \cot p_0 \Delta - \cot^2 p_0 \frac{\Delta^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Theta)$$

Indsættes nu de i (η) og (Θ) fundne Værdier i (ς), faas

$$l.m_0 = \frac{\Delta^2}{2},$$

altsaa $$m_0 = e^{\frac{\Delta^2}{2}} = 1 + \frac{\Delta^2}{2} + \ldots,$$

eller, naar Δ udtrykkes i Grader,

$$m_0 = 1 + \frac{\Delta^2}{2\omega^2} = 1 + \frac{152}{10^6}\Delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots (85)$$

Det ses, at Maalestoksforholdet bliver for stort, og at Forvanskningen er $-\frac{152}{10^6}\Delta^2$ . . . . . (86).

B. *Den matematiske Jordoverflade betragtet som en Ellipsoide.*

a. Beregning af z.

122. Ved at regne med Ellipsoiden — i Stedet for med Kuglen — var (α) bleven til $\frac{z \cos p_0}{N \sin p}$ og (β) til $\frac{dz}{M dp}$, hvor Værdierne af N og M er angivne ved Formlerne (55) og (56). I Stedet for (γ) havde man da faaet

$$\frac{dz}{z} = \frac{\cos p_0}{\sin p}\frac{M}{N}dp,$$

eller, naar N og M's Værdier indføres,

$$\frac{dz}{z} = \cos p_0 \frac{1 - e^2}{1 - e^2\cos^2 p}\frac{dp}{\sin p}.$$

Men

$$\frac{1 - e^2}{1 - e^2\cos^2 p} = 1 - \frac{e^2\sin^2 p}{1 - e^2\cos^2 p} = 1 - \frac{\frac{1}{2}e^2\sin^2 p}{1 + e\cos p} - \frac{\frac{1}{2}e^2\sin^2 p}{1 - e\cos p},$$

hvilket indsat i foranstaaende Udtryk giver

$$\frac{dz}{z} = \cos p_0 \left\{\frac{dp}{\sin p} + \frac{1}{2}e\frac{d(e\cos p)}{1 + e\cos p} - \frac{1}{2}e\frac{d(-e\cos p)}{1 - e\cos p}\right\},$$

som ved Integration giver

$$\log z = \cos p_0 \left\{\log \operatorname{tg}\frac{p}{2} + \frac{1}{2}e\left(\log(1 + e\cos p) - \log(1 - e\cos p)\right) + \log c\right\}$$

eller $$z = c\left\{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\left(\frac{1 + e\cos p}{1 - e\cos p}\right)^{\frac{e}{2}}\right\}^{\cos p_0},$$

hvor c er en Konstant, der bestemmes af

$$z_0 = c\left\{\operatorname{tg}\frac{p_0}{2}\left(\frac{1 + e\cos p_0}{1 - e\cos p_0}\right)^{\frac{e}{2}}\right\}^{\cos p_0},$$

hvorefter faas

$$z = z_0 \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}} \left(\frac{1 + e \cos p}{1 - e \cos p} \right)^{\frac{e}{2}} \left(\frac{1 - e \cos p_0}{1 + e \cos p_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right\}^{\cos p_0} \quad \ldots \ldots (87)$$

hvilket Udtryk, der iøvrigt kan udvikles i Række, benyttes til Beregning af Radierne z, naar den matematiske Jordoverflade betragtes som en Ellipsoide.

b. Maalestoksforholdet.

123. Maalestoksforholdet vil blive det samme, hvad enten den matematiske Jordoverflade betragtes som en Kugle eller som en Ellipsoide. I sidste Tilfælde ændres nemlig Udtrykket (a) for Maalestoksforholdet til

$$m_1 = \frac{z \cos p_0}{N \sin p} = \frac{z_0 \cos p_0}{N \sin p} \left\{ \quad \right\}^{\cos p_0},$$

hvor der i den krusede Parantes tænkes staaende samme Udtryk som i den krusede Parantes i (87). Da nu $z_0 = N_0 \operatorname{tg} p_0$, faas, idet Værdierne for N_0 og N indsættes,

$$m_1 = m_0 \cdot \varepsilon,$$

$$\text{hvor } m_0 = \frac{\sin p_0}{\sin p} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p_0}{2}} \right)^{\cos p_0}$$

$$\text{og } \varepsilon = \left(\frac{1 - e^2 \cos^2 p}{1 - e^2 \cos^2 p_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1 + e \cos p}{1 - e \cos p} \right)^{\frac{e}{2} \cos p_0} \left(\frac{1 + e \cos p_0}{1 - e \cos p_0} \right)^{-\frac{e}{2} \cos p_0};$$

m_0 er altsaa ligesom i Punkt 121 Maalestoksforholdet paa Kuglen, medens ε betegner den af Ekscentriciteten afhængige Del af Udtrykket for m_1. m_0's Værdi er beregnet i Punkt 121, og til Bestemmelse af ε faas

$$l.\varepsilon = \frac{1}{2} l.(1 - e^2 \cos^2 p) - \frac{1}{2} l.(1 - e^2 \cos^2 p_0)$$

$$+ l. \left(\frac{1 + e \cos p}{1 - e \cos p} \right)^{\frac{e}{2} \cos p_0} + l. \left(\frac{1 + e \cos p_0}{1 - e \cos p_0} \right)^{-\frac{e}{2} \cos p_0}.$$

Udvikles hvert af disse Led i Række $\left(l(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots \right)$, idet dog kun de Led, som indeholder e^2, medtages, faas

$$l.\varepsilon = -\frac{1}{2} e^2 \cos^2 p + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 p_0 + e^2 \cos p \cos p_0 - e^2 \cos^2 p_0$$

$$= -\frac{1}{2} e^2 (\cos p - \cos p_0)^2.$$

Sættes heri $p = p_0 + \Delta$, bliver $\cos p = \cos p_0 - \Delta \sin p_0$,

altsaa $l.\varepsilon = -\frac{1}{2} e^2 \Delta^2 \sin^2 p_0$,

eller $$\varepsilon = 1 - \frac{1}{2} e^2 \Delta^2 \sin^2 p_0 , \quad \ldots\ldots\ldots (88)$$

som svarende til Danmarks Middelbrede, 56°, altsaa $p_0 = 34°$ giver

$$\varepsilon = 1 - \frac{0{,}3}{10^6} \Delta^2 ,$$

en Størrelse, som ved Sammenligning med (85) viser sig at være uden praktisk Betydning som Faktor til m_0.

Generalstabens Koordinatsystem.

124. Ved Benyttelsen af den konforme, koniske Projektion til Fremstilling af hele Danmark (det danske Atlas) har General-

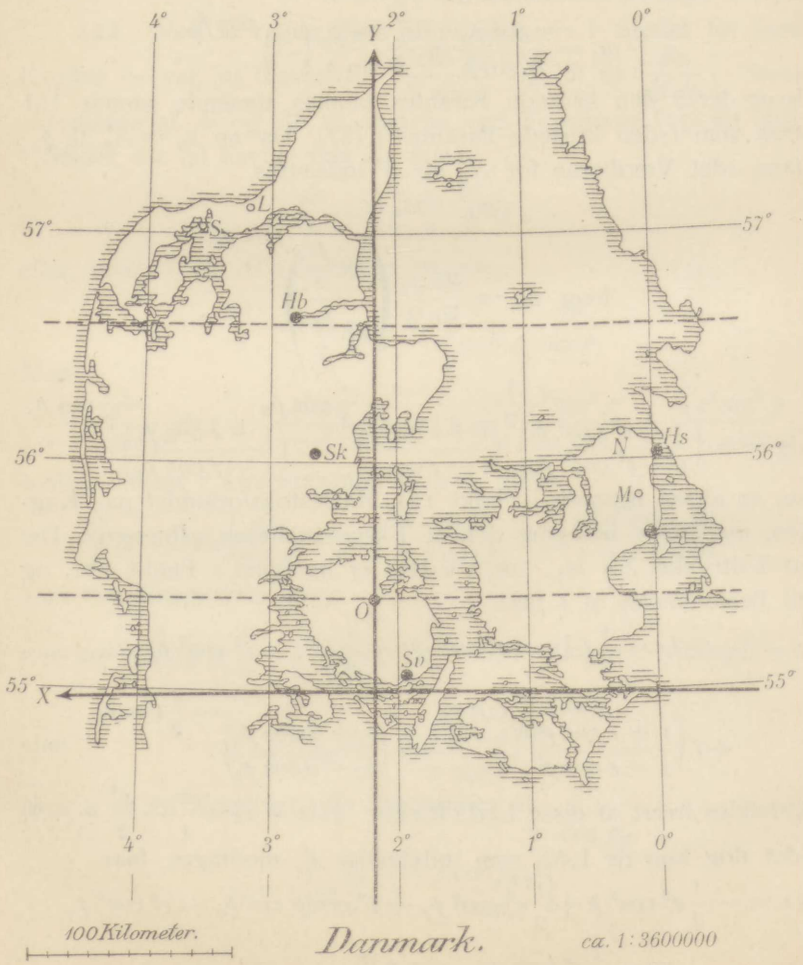


Fig. 125.

staben ladet Udfoldningsparallelen have Breden $\lambda_0 = 56°$, altsaa $p_0 = 34°$, saa at den gaar tæt Syd om Skanderborg og Helsingør. Midtemeridianen gaar 2° 12′ Vest for Københavns gamle Observatorium; den gaar gennem Odense. Koordinatsystemet er, som det er vist paa Fig. 125 lagt saaledes, at man til Be-

Tavle til Omsætning af Længder og Breder til retvinklede Koordinater i den konforme koniske Projektion.

λ	z (Fod)	$a = z_{55} - z$ (Fod)	$-\Delta z = \Delta a$	log Δa for 1″
54°28′	1428 0288.48	— 189177.61		
			+ 23648.47	1.9935918
32	1425 6640.01	— 165529.14		
			+ 23648.07	1.9935845
36	1423 2991.94	— 141881.07		
			+ 23647.66	1.9935770
40	1420 9344.28	— 118233.41		
			+ 23647.30	1.9935704
44	1418 5696.98	— 94586.11		
			+ 23646.96	1.9935642
48	1416 2050.02	— 70939.15		
			+ 23646.64	1.9935583
52	1413 8403.38	— 47292.51		
			+ 23646.37	1.9935533
56	1411 4757.01	— 23646.14		
			+ 23646.14	1.9935491
55°00′	1409 1110.87	0.00		
			+ 23645.91	1.9935448
04	1406 7464.96	+ 23645.91		
			+ 23645.73	1.9935415
08	1404 3819.23	+ 47291.64		
			+ 23645.58	1.9935388
12	1402 0173.65	+ 70937.22		
			+ 23645.46	1.9935366
16	1399 6528.19	+ 94582.68		
			+ 23645.37	1.9935349
20	1397 2882.82	+ 118228.05		
			+ 23645.31	1.9935338
24	1394 9237.51	+ 141873.36		
			+ 23645.29	1.9935334
28	1392 5592.22	+ 165518.65		
			+ 23645.29	1.9935334
32	1390 1946.93	+ 189163.94		
			+ 23645.32	1.9935340
36	1387 8301.61	+ 212809.26		
			+ 23645.39	1.9935353
40	1385 4656.22	+ 236454.65		
			+ 23645.49	1.9935371
44	1383 1010.73	+ 260100.14		
			+ 23645.61	1.9935393
48	1380 7365.12	+ 283745.75		
			+ 23645.78	1.9935425
52	1378 3719.34	+ 307391.53		
			+ 23645.97	1.9935459
56	1376 0073.37	+ 331037.50		
			+ 23646.19	1.9935500

λ	z (Fod)	$a = z_{55} - z$ (Fod)	$-\Delta z = \Delta a$	log Δa for $1''$
55°56′	1376 0073.37	+ 331037.50		
			+ 23646.19	1.9935500
56°00′	1373 6427.18	+ 354683.69		
			+ 23646.45	1.9935548
04	1371 2780.73	+ 378330.14		
			+ 23646.75	1.9935603
08	1368 9133.98	+ 401976.89		
			+ 23647.06	1.9935660
12	1366 5486.92	+ 425623.95		
			+ 23647.41	1.9935724
16	1364 1839.51	+ 449271.36		
			+ 23647.79	1.9935794
20	1361 8191.72	+ 472919.15		
			+ 23648.20	1.9935869
24	1359 4543.52	+ 496567.35		
			+ 23648.66	1.9935953
28	1357 0894.86	+ 520216.01		
			+ 23649.13	1.9936040
32	1354 7245.73	+ 543865.14		
			+ 23649.64	1.9936133
36	1352 3596.09	+ 567514.78		
			+ 23650.19	1.9936234
40	1349 9945.90	+ 591164.97		
			+ 23650.77	1.9936341
44	1347 6295.13	+ 614815.74		
			+ 23651.37	1.9936451
48	1345 2643.76	+ 638467.11		
			+ 23652.01	1.9936569
52	1342 8991.75	+ 662119.12		
			+ 23652.69	1.9936693
56	1340 5339.06	+ 685771.81		
			+ 23653.39	1.9936822
57°00′	1338 1685.67	+ 709425.20		
			+ 23654.13	1.9936958
04	1335 8031.54	+ 733079.33		
			+ 23654.90	1.9937100
08	1333 4376.64	+ 756734.23		
			+ 23655.70	1.9937246
12	1331 0720.94	+ 780389.93		
			+ 23656.54	1.9937400
16	1328 7064.40	+ 804046.47		
			+ 23657.41	1.9937560
20	1326 3406.99	+ 827703.88		
			+ 23658.32	1.9937727
24	1323 9748.67	+ 851362.20		
			+ 23659.24	1.9937896
28	1321 6089.43	+ 875021.44		
			+ 23660.22	1.9938076
32	1319 2429.21	+ 898681.66		
			+ 23661.21	1.9938258
36	1316 8768.00	+ 922342.87		
			+ 23662.24	1.9938447
40	1314 5105.76	+ 946005.11		
			+ 23663.31	1.9938643
44	1312 1442.45	+ 969668.42		

Da denne Tavle er udarbejdet af Generalstaben i Fod, gengives den her i denne Længdeenhed.

gyndelsespunkt har valgt Skæringspunktet mellem den 55. Bredegrad og Midtemeridianen (tæt Syd for Fyn og Vest for Taasinge). Abscisseaksen regnes positiv mod Vest, Ordinataksen positiv mod Nord, den positive Omløbsretning falder sammen med Urets.

For dette System angiver Tavlen Side 173—174, som er udarbejdet af Generalstaben, og som offentliggøres med dennes Tilladelse, de til forskellige Breder (λ) svarende Værdier for z (2. Kolonne); 3. Kolonne indeholder Differenserne ($a = z_{55} - z$) mellem den til den 55. Bredegrad svarende Værdi for z og de øvrige Værdier for z; 4. Kolonne angiver Differenserne mellem to og to paa hinanden følgende Værdier for z; og 5. Kolonne angiver log Δa for 1″, altsaa, da Δa svarer til 4 Minutter, log $\left(\frac{\Delta a}{240}\right)$.

Er nu et Punkt B givet ved Breden, λ, og Længden, l, beregnes de retvinklede Koordinater x og y i Projektionen let (Fig. 126). Lad Længdeforskellen mellem B og Midtemeridianen være μ og den tilsvarende Vinkel paa Kortet Θ, saa har man

$$\mu = l - 2^\circ 12',$$

og ifølge (83)

$$\Theta = \mu \cos 34^\circ.$$

For Punkt B faar man nu, idet $PB = z$ bestemmes ved Interpolation i Tavlen Side 173—174,

$$\left.\begin{aligned} x &= z \sin \Theta \quad \text{og} \\ y &= z_{55} - z + x \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (89)$$

Beregningen, som bør udføres med en 7cifret Logaritmetabel, volder ingen Vanskelighed og kan opstilles som i Eksempel 28.

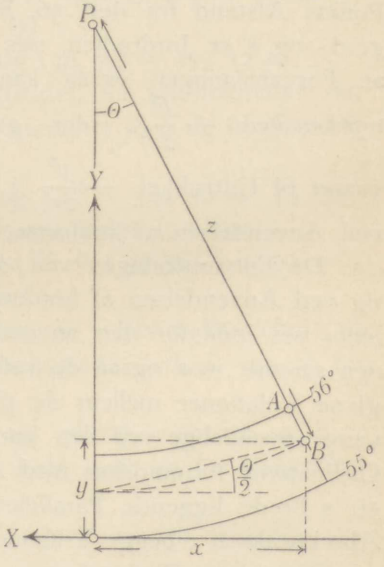


Fig. 126.

Generalstaben har hidtil angivet Koordinaterne i Fod. Af de givne plane Koordinater for to Punkter B og C (Fig. 127) kan man nu ved (6) beregne Retningsvinklen, φ_B^C, som altsaa er den Vinkel, som Abscisseaksens positive Retning skal drejes i positiv Omløbsretning for at komme til at dække BC og ved (7) Længden af BC. Linjen BC's Azimuth, ɔ: den

Vinkel, som B's Meridian, der falder sammen med Frembringeren gennem B, skal drejes i positiv Omløbsretning for at komme til at dække BC, er, som det fremgaar af Fig. 127, bestemt ved

$$z = \varphi - \Theta - 90^\circ, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

eller, naar Azimuth, som ved Generalstabens Beregninger, regnes fra Sydretningen

$$z = \varphi - \Theta + 90^\circ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

Forvanskningen.

125. Af Udviklingerne i Punkterne 121 og 123 fremgaar det, at Forvanskningen ved den konforme, koniske Projektion er $-\frac{152}{10^6}\Delta^2$, naar Δ er udtrykt i Grader, eller $-\frac{\Delta^2}{2}$, naar Δ er udtrykt i rene Tal. Da Δ er lig $\frac{b}{r}$, naar b er vedkommende Punkts Afstand fra den 56. Bredegrad, og r er Jordradien, ses det, at Forvanskningen ogsaa kan udtrykkes ved $-\frac{b^2}{2r^2}$, der ganske svarer til Udtrykket $-\frac{y^2}{2r^2}$ i Punkt 110 for Forvanskningen ved Anvendelsen af konforme, retvinklede Koordinater.

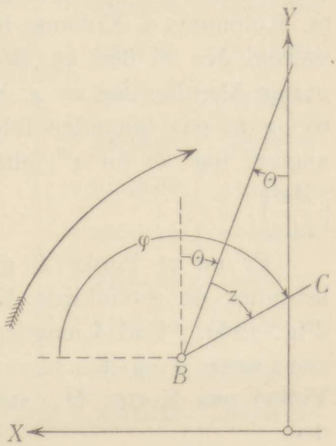


Fig. 127.

Da Forvanskningen ved den konforme, koniske Projektion og ved Anvendelsen af konforme, retvinklede Koordinater saaledes ses indenfor den anvendte Regningsnøjagtighed at være den samme, maa ogsaa de ved (81a) og (81b), Side 158, angivne Relationer mellem de plane og sfæriske Retningsvinkler være anvendelige ved den konforme, koniske Projektion, naar Ordinaterne formindskes med Afstanden mellem de paa 55° og 56°'s Brede liggende Paralleler, 354684 Fod, hvorved nemlig Abscisseaksen i begge Tilfælde falder langs Udfoldningsfladens og Sfæroidens Røringskurve. Tavlen Side 163 gælder altsaa ogsaa her.

Ved Beregningen af ny Punkters Koordinater, kan man arbejde i Planen, naar kun hver maalt Retning paa lignende Maade som angivet Side 162, tillægges en Rettelse for Projektion. Den største Forvanskning vil for Danmarks Vedkommende fremkomme ved Skagen med Breden 57°44′; Forvansk-

ningen bliver her ca. 9:20000, hvilket viser, at Projektionen ikke kan finde Anvendelse ved en økonomisk Opmaaling, hvor Forvanskningen i Henhold til Punkt 111 ikke bør overstige 1:20000. Skulde denne Projektion anvendes ved økonomiske Opmaalinger, maatte man derfor have tre Røringskegler, eller ogsaa maatte man have to skærende Kegler. Dette vilde ikke være heldigt, da de to Koordinatsystemer vilde faa en Sammenstødslinje, som gik tværs over Jylland; i Modsætning hertil faar man ved Anvendelse af konforme, retvinklede Koordinater en meget gunstig Sammenstødslinje mellem de to Koordinatsystemer, idet Sjælland, Laaland og Falster alene kommer til at høre til det ene System, Jylland og Fyn til det andet. Generalstabens plane Koordinater kan som Grundlag for økonomiske Opmaalinger kun benyttes for et Bælte, der strækker sig c. 64 km. Nord og Syd for den 56. Bredegrad, ɔ: ikke sydligere end Odense og ikke nordligere end Hobro. Til nærmere Forstaaelse heraf hidsættes følgende:

Af de retvinklede Koordinater til »Nakkehoved« og »Maglebjerg« (paa Fig. 125 betegnede ved N og M), som er beregnede i Eksempel 28, findes ved (6) og (7)

$\log(\text{pl. } s_N^M)\,(\text{Fod}) = 4.9978204$ og $\text{pl. } \varphi_N^M = 253^\circ 12' 24.''6$,

hvilket — som det skal være Tilfældet, da Middelbreden omtrent er 56° — paa det nærmeste stemmer med de fra Generalstaben opgivne Værdier,

$\log(\text{sf. } s_N^M)\,(\text{Fod}) = 4.9978200$ og $z_N^M = 344^\circ 50' 01.''1$,

idet man for Azimuth's Vedkommende ifølge (91) har

$$z = \varphi - \Theta + 90^\circ = 253^\circ 12' 24.''6 + 1^\circ 37' 36.''5 + 90^\circ$$
$$= 344^\circ 50' 01.''1.$$

Af de retvinklede Koordinater til »Lerup Bavnehøj« og »Skaarup Høje« (paa Fig. 125 betegnede ved L og S) findes ligeledes

$\log(\text{pl. } s_S^L)\,(\text{Fod}) = 4.9194920$ og $\text{pl. } \varphi_S^L = 161^\circ 36' 44.''9$,

hvilket *ikke* stemmer tilstrækkelig nøje med de fra Generalstaben opgivne Værdier,

$\log(\text{sf. } s_S^L)\,(\text{Fod}) = 4.9194140$ og $z_S^L = 250^\circ 28' 41.''6$,

idet man faar

pl. s_S^L =	83079.1 Fod	φ =	$161^\circ 36' 44.''9$
sf. s_S^L =	83064.2 »	Θ =	$1^\circ 07' 55.''9$
Diff. =	14.9 Fod.	$\varphi - \Theta + 90^\circ$ =	$250^\circ 28' 49.''0$
		z =	$250^\circ 28' 41.''6$
		Diff. =	$7.''4$

Disse Uoverensstemmelser hidrører fra Forvanskningen. Af Udtrykket (86) ses, at Forvanskningen for et Punkt, som ligger midt imellem »Skaarup Høje« og »Lerup Bavnehøj« og altsaa har Breden 57°04′52″, bliver $\frac{152}{10^6} \times 1.081^2$, og idet man regner med denne Forvanskning, bliver Rettelsen til pl. s_S^L

$$-83079.1 \times \frac{152}{10^6} \times 1.081^2 = -14.8 \text{ Fod},$$

hvilket ses at stemme med ovenstaaende. Beregnes dernæst af (81a) Korrektionen til pl. φ_S^L, faas $-7.''5$, hvilket ligeledes ses at stemme med ovenstaaende.

Medens det saaledes ikke vil være muligt at benytte Generalstabens Projektion som Grundlag for en *samlet* økonomisk Opmaaling af Danmark, vil det dog være muligt ved *lokale* Opmaalinger at benytte Generalstabens plane Koordinater til Hovedpunkter, som findes paa eller i Nærheden af vedkommende Terræn, og som altsaa kan tjene som Grundlag for Opmaalingen, idet man reducerer dem for Kortprojektionens Forvanskning, saaledes som det er vist i Eksempel 29.

For de givne Punkter beregnes Tyngdepunktet, hvis Koordinater er Middeltallet henholdsvis af samtlige Punkters Ordinater og Abscisser, dernæst ændres Koordinaterne ved Parallelforskydning af Koordinatsystemet til Tyngdepunktet som Begyndelsespunkt. De fundne Koordinater, som er for store, reduceres til den rigtige Størrelse ved Multiplikation med $\left(1 - \frac{152}{10^6} A^2\right)$ eller $\left(1 - \frac{b^2}{2r^2}\right)$, hvor A og b er henholdsvis »Tyngdepunktets Brede — 56°« og »Tyngdepunktets Afstand fra den 56. Bredegrad«, der med tilstrækkelig Nøjagtighed kan bestemmes som »Ordinaten — 354700′«; denne Regning udføres derved, at man beregner den til Tyngdepunktets Beliggenhed svarende Værdi for $\frac{152}{10^6} A^2$ eller $\frac{b^2}{2r^2}$ i pro Mille og de Rettelser, som derefter skal tillægges de enkelte Koordinater. De nu fundne Koordinater kan da atter omsættes til vort almindelige Koordinatsystem derved, at Ordinaterne blive til Abscisser og Abscisserne med modsat Fortegn til Ordinater; samtidig kan de omsættes fra Fod til Meter.

Skulde det have særlig Betydning, at Abscisseaksen vender nøjagtig mod Nord, kan Koordinatsystemet let drejes Vinklen Θ.

7. Kapitel.

Andre Projektioner.

Disse Projektioner omfatter de perspektiviske og de vilkaarlige Projektioner; de finder ikke Anvendelse ved økonomiske Maalinger eller ved Fremstilling af topografiske Kort, hvorfor vi her ikke vil behandle dem nærmere men kun af Hensyn til Forstaaelsen af geografiske Kort angive de vigtigste Projektioners Hovedegenskaber og vise deres Udseende.

§ 26. Perspektiviske Projektioner.

126. Jorden betragtes som en Kugle, og Jordoverfladen fremstilles saaledes, som den ses af et Øje i Rummet. Projektionsplanen er vinkelret paa Diameteren til Kortets Midtpunkt, og Øjepunktet ligger i denne Diameter; efter dets Beliggenhed skelnes imellem:

1. Den stereografiske Projektion med Øjet i det Kortets Midtpunkt diametralt modsatte Punkt,
2. den ortografiske Projektion med Øjet uendelig fjernt og
3. den centrale Projektion med Øjet i Jordens Centrum.

Efter Projektionsplanens Beliggenhed findes der atter af hver af disse

a) en Ækvatorial- eller Polarprojektion,
b) en Meridian- og
c) en Horisontprojektion.

1. *Den stereografiske Projektion.*

127. Ved den stereografiske Projektion fremstilles baade Paralleler og Meridianer som Cirkler (rette Linjer), og Projektionen er konform. Fremstillingen af Projektionen bestaar i Anvendelsen af Perspektivtegningens Principper.

a. Den stereografiske Ækvatorial- eller Polarprojektion.

Projektionsplanen er Ækvator, Øjet i en af Polerne, P, og Kortets Midtpunkt i den modsatte. Meridianerne bliver rette Linjer gennem P (Fig. 128), deres mellemliggende Vinkler er lig

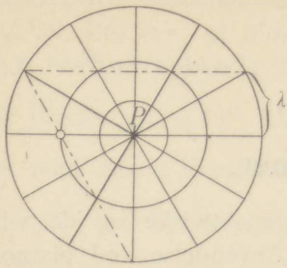


Fig. 128.

Længdedifferenserne. Parallelerne er Cirkler med Centrum i P; deres Diametre bestemmes ved Nedlægning af en Meridian (de stiplede Linjer). Fig. 129 viser, at Maalestoksforholdet ved Randen af Halvkuglen er dobbelt saa stort som i Midten af Kortet.

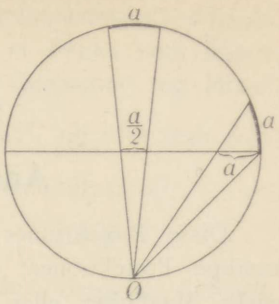


Fig. 129.

b. Den stereografiske Meridianprojektion.

Projektionsplanen er en Meridian, Øjet i Skæringspunktet mellem Ækvator og den Meridian, som er vinkelret paa den første Meridian. Ækvator og Øjets Meridian fremstilles som rette Linjer. De øvrige Meridianer er Cirkelbuer gennem Polerne, P og P_1 (Fig. 130); deres Midtpunkt faas ved Nedlægning af Ækvator (de punkterede Linjer). De øvrige Paralleler bliver ogsaa Cirkelbuer; man faar tre Punkter i dem ved Nedlægning af den paa Papirets Plan vinkelrette Meridianplan (de stiplede Linjer). Om Maalestoksforholdet gælder, hvad der er anført under a. Projektionen anvendes navnlig til Fremstilling af den østlige og vestlige Halvkugle.

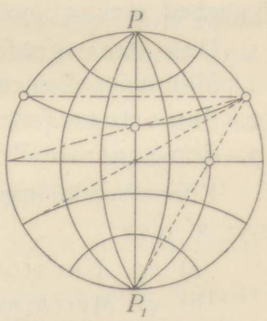
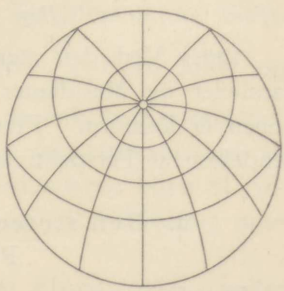


Fig. 130.

c. Den stereografiske Horisontprojektion.

Projektionsplanen gaar igennem Jordens Centrum parallel med Horisonten til Kortets Midtpunkt, Øjet er i det Kortets Midtpunkt diametralt modsatte Punkt af Jordens Overflade.

Projektionen, der ses i Fig. 131, anvendes mest til Fremstilling af Polarregionerne.


Fig. 131.

2. *Den ortografiske Projektion.*

128. Da Øjet er uendelig langt borte, bliver alle Projek-

tionsstraaler parallele og vinkelrette paa Projektionsplanen. Meridianer og Paralleler projiceres som Ellipser, der kan gaa over til Cirkler eller rette Linjer. Fremstillingen af Projektionen bestaar i Anvendelsen af Projektiontegningens Principper.

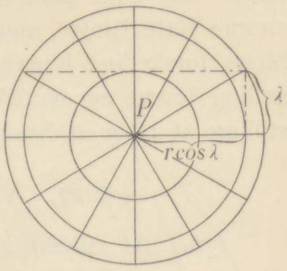


Fig. 132.

a. Den ortografiske Ækvatorial- eller Polarprojektion.

Projektionsplanen er Ækvator, Kortets Midtpunkt i den ene Pol, P, (Fig. 132). Meridianerne bliver rette Linjer gennem Polen, deres mellemliggende Vinkler er lig Længdedifferenserne. Parallelerne bliver koncentriske Cirkler om P med Radius $r \cos \lambda$ (de stiplede Linjer).

b. Den ortografiske Meridianprojektion.

Projektionsplanen er en vilkaarlig Meridian. Parallelerne projiceres som rette Linjer (Fig. 133), Meridianerne som Ellipser gennem Polerne og med den halve lille Akse, $r \cos \Theta$, hvor Θ er Meridianens Vinkel med Udgangsmeridianen (de punkterede Linjer).

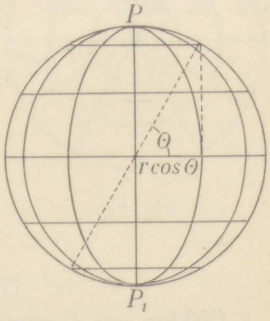
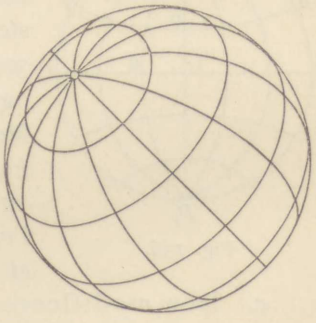


Fig. 133.

c. Den ortografiske Horisontprojektion.

Projektionsplanen gaar gennem Jordens Centrum parallel med Horisonten til Kortets Midtpunkt. Projektionen ses i Fig. 134.


Fig. 134.

Den ortografiske Projektion vedligholder hverken Arealer eller Vinkler og er altsaa ikke konform. Maalestoksforholdet varierer fra 1 i Midten til 0 ved Halvkuglens Rand, saa at Forvanskningen bliver meget stor. Projektionen egner sig som Følge af det fremsatte egentlig kun til Fremstilling af Maanekort, idet den paa Grund af Maanens store Afstand giver et korrekt Billede af denne, saaledes som den ses fra Jorden.

3. *Den centrale Projektion.*

129. Projektionsplanen er Tangentplan til Jordens Overflade. Da Øjet befinder sig i Jordens Centrum, bliver Meridianerne rette Linjer, medens Parallelerne efter Omstændighederne bliver forskellige Kurver af 2. Grad. Halvkuglen vilde til Fremstilling kræve en uendelig Plan. Projektionen anvendes til Fremstilling af Dele af Stjernehimlen.

§ 27. Vilkaarlige Projektioner.

130. Af vilkaarlige Projektioner skal her nævnes tre.

a. Den ækvidistante Polarprojektion.

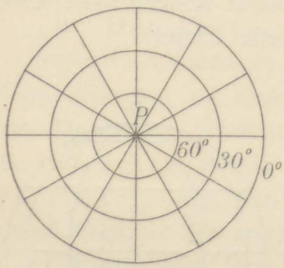


Fig. 135.

Kortets Midtpunkt, P, er i en af Polerne (Fig. 135). Meridianerne bliver rette Linjer, som skærer hinanden i P under Vinkler lig Længdedifferenserne.

Parallelerne bliver koncentriske Cirkler om P som Centrum, med Radierne $\frac{90^\circ - \lambda}{90^\circ} r$, naar r er Ækvators Radius.

Projektionen anvendes til Fremstilling af den nordlige og sydlige Halvkugle.

b. Globularprojektionen.

Cirklen om C som Centrum (Fig. 136) er en Meridian, PP_1 er den paa denne vinkelrette Meridian, $ÆQ$ er Ækvator. De øvrige Meridianer og Paralleler er Cirkelbuer og bestemmes saaledes, at f. Eks. Parallelen 30° afskærer $^1/_3$ af Buerne $PÆ$, PQ og af den rette Linje PC, medens den Meridian, som har Længdeforskellen 30° fra Midtemeridianen, gaar gennem P og P_1 og afskærer $^1/_3$ af Linjen CQ. Projektionen anvendes til Fremstilling af den østlige og vestlige Halvkugle.

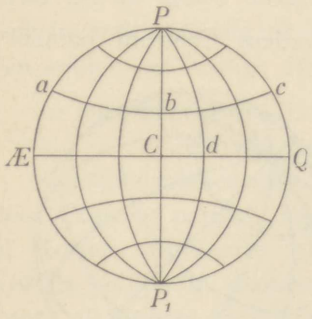


Fig. 136.

c. Den modificerede Flamstedske Projektion

nævnes her, skøndt den egentlig er en Kegleprojektion. Keglen tangerer langs Udfoldningsparallelen, som fremstilles ved sit Spor paa Keglen (Fig. 137), medens de øvrige Paralleler overføres saaledes paa Keglen, at de mellemliggende Stykker af

dennes Frembringere bliver lig de tilsvarende rektificerede Meridianbuer. Paa Figuren er FF_1 Udfoldningsparallelen, mm_1 og nn_1 Grænseparallelerne.

Meridianerne fremstilles paa lignende Maade som ved Flamsteds Projektion ved paa hver Parallel at afsætte de virkelige Længdeudstrækninger og forene de sammenhørende Punkter med Kurver.

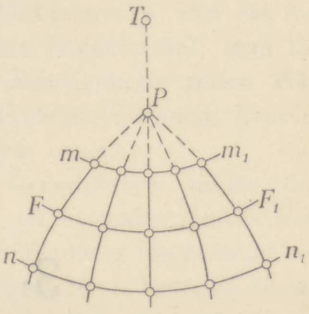


Fig. 137.

Arealerne bliver altsaa ligestore med de virkelige, men jo mere man fjerner sig fra Midtemeridianen, desto mere fortrækkes de krumlinede Firkanter. Denne Projektion er med fornøden Hensyntagen til Jordens sfæroidiske Form tidligere anvendt til Fremstilling af Atlasbladene i $^1/_{80000}$ over de danske Øer.

3. Afsnit.

Højdemaaling eller Nivellement.

131. Som allerede i Indledningen angivet gaar Højdemaaling eller Nivellement ud paa en Bestemmelse af de enkelte Terrænpunkters Højde over den matematiske Jordoverflade (Havets Middelniveau). Man skelner efter den Maade, paa hvilken denne Bestemmelse udføres, mellem:

1. Nivellement (geometrisk Nivellement), ved hvilket man ved Hjælp af et Nivellerinstrument i Reglen med vandrette Sigter bestemmer Højdeforskellen mellem to og to højst et Par Hundrede Meter fra hinanden liggende Punkter,
2. Trigonometrisk Højdemaaling, ved hvilken man ved Hjælp af en Vertikalvinkelmaaler bestemmer Højdeforskellen mellem to og to langt fra hinanden liggende Punkter, hvis Afstand er bekendt, og
3. Højdemaaling med Barometer, som mest finder Anvendelse paa geografiske Rejser, og med hvilken vi derfor ikke vil beskæftige os.

8. Kapitel.

Nivellering.

§ 28. Nivelleringens Formaal.

132. Foreløbig vil vi antage, at den Del af Jordoverfladen, med hvilken vi beskæftiger os, er saa lille, at den matematiske Jordoverflade (Havets Middelniveau) kan betragtes som en Plan.

Nivelleringens Formaal bliver da at bestemme de enkelte Terrænpunkters Højde over denne Plan. Ved mange tekniske Arbejder har det imidlertid ingen Interesse at kende Terrænpunkternes absolutte Højde over Havets Middelniveau, idet det kun kommer an paa at kende deres relative Højdeforskel; man kan da angive deres Højde over en hvilkensomhelst anden Plan, *Grundplanen*, som er parallel med Middelniveaufladen, hvorved man navnlig opnaar, at Højderne bliver smaa.

Et Terrænpunkts Højde over Grundplanen kaldes dets *Kote*. Kender man et Punkts Kote, vil et andet Punkts Kote være bestemt, naar man maaler de to Punkters Højdeforskel, et tredje Punkts Kote vil atter være bestemt i Forhold til det andets, o. s. v.

Den ved Nivelleringen foreliggende Opgave indskrænker sig altsaa til Bestemmelse af to Punkters Højdeforskel; og er de to Punkter saaledes beliggende, at denne ikke direkte kan bestemmes, maa der indskydes et tilstrækkeligt Antal Mellempunkter.

133. Bestemmelse af to Punkters Højdeforskel ved direkte Maaling. Allerede flere Hundrede Aar før Christi Fødsel benyttede man følgende primitive Fremgangsmaade til Bestemmelse af Højdeforskellen mellem to nær ved hinanden liggende ved Pæle betegnede Punkter, A og B (Fig. 138a).

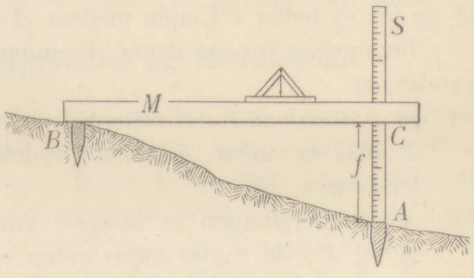


Fig. 138a.

I det laveste Punkt, A, stiller man en inddelt Stang, S, lodret paa Pælen; den ene Ende af et paa Højkant stillet Brædt, M, lægges paa Pælen i B, og den anden Ende løftes saa højt, at Brædtet kommer til at ligge vandret, hvilket man sikrer sig ved et Lod-Vaterpas. Dette laves af Træ, og dets Indretning vil forstaas af Fig. 138b, naar det blot bemærkes, at en ret Linje o-p gennem Ophængningspunktet, o, for Snoren, s, der bærer et lille Lod, L, og Spidsen, p, skal staa vinkelret paa ab.

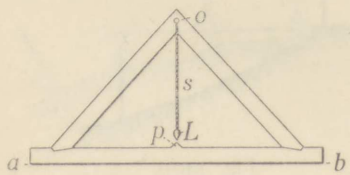


Fig. 138b.

Det Stykke, $AC = f$ (Fig. 138a), som man aflæser paa den

i A lodret staaende Stang, er da A og B's Højdeforskel, Stigningen fra A til B eller Faldet fra B til A. Højdeforskellen mellem to længere fra hinanden liggende Punkter kan bestemmes ved en gentagen Anvendelse af den angivne Fremgangsmaade; men da Brædtet ikke godt kan gøres mere end 5 m langt, vil Fremgangsmaaden, naar det gælder Bestemmelsen af Højdeforskellen mellem fjerne Punkter, blive meget besværlig.

134. Bestemmelse af to Punkters Højdeforskel ved Nivellerinstrument.

Opstilles Nivellerinstrumentet saaledes, at man fra dets Standplads kan sigte til Nivellerstangen, baade naar den er opstillet i A (Fig. 139), og naar den er opstillet i B, og træffer det vandrette Sigte Stangen i A i Højden a og Stangen i B i Højden b, vil Højdeforskellen mellem A og B være

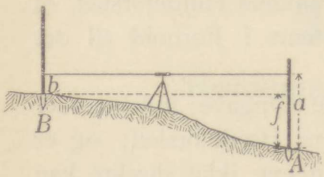


Fig. 139.

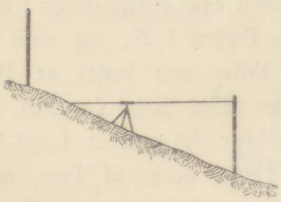
$$f = a - b.$$

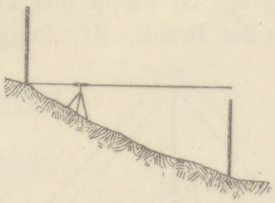
Er $a > b$, er der Stigning fra A til B,
er $b > a$, er der Fald fra A til B.

Det er ikke nødvendigt, at Instrumentet staar lige langt fra A og B, ej heller i Linjen mellem A og B.

Betingelser for, at denne Fremgangsmaade skal kunne anvendes, er

1. at Afstandene fra Nivellerinstrumentets Standplads til A og B ikke er større, end man tydelig kan *aflæse* paa Nivellerstangen, og
2. at Nivellerstangen er længere end Højdeforskellen mellem A og B, da Sigtet ellers enten vil »gaa i Jorden« (under det højeste Punkt) (Fig. 140a) eller over Nivellerstangen, naar denne staar i det laveste Punkt (Fig. 140b).


Fig. 140a.


Fig. 140b.

Højdeforskellen mellem to fjernt fra hinanden liggende Punkter, A og B (Fig. 141), bestemmes ved en gentagen Anvendelse af den angivne Fremgangsmaade, idet man indskyder

mellemliggende Punkter f. Eks. M_1, M_2 og M_3. Sigterne henimod Udgangspunktet kaldes *Tilbagesigter*, og de ved disse tagne

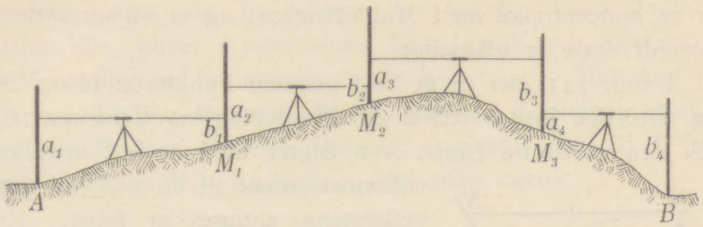


Fig. 141.

Aflæsninger er paa Figuren betegnede ved a_1, a_2, a_3 og a_4; Sigterne i Retning af Endepunktet kaldes *Fremsigter* og er betegnede ved b_1, b_2, b_3 og b_4.

Den hele Stigning fra A til B er udtrykt ved Summen af de enkelte Stigninger regnede med Fortegn, altsaa, naar der er n Stationer, ved

$$s = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots \quad \ldots + (a_n - b_n)$$
$$= [a] - [b],$$

o: Stigningen fra A til B faas ved at trække Summen af Fremsigterne fra Summen af Tilbagesigterne. Et negativt Resultat betyder, at der ikke er Stigning men Fald.

§ 29. Jordkrumning og Refraktion.

135. Man tør nu ikke gaa ud fra den gjorte Forudsætning, at den matematiske Jordoverflade kan betragtes som en Plan; men man tør derimod (saml. § 17, Side 134) tænke sig den erstattet af den Middelkugleflade, KK, hvis Centrum ligger i Normalen gennem et af vedkommende Terræns Punkter, og hvis Radius er lig $\sqrt{MN}$, som for hele Danmarks Vedkommende kan sættes til 6385000 m med Logaritmen 6.8052. Fig. 142,

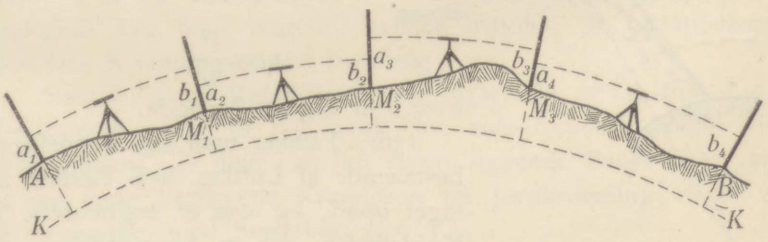


Fig. 142.

som forestiller et Snit gennem A og B og Middelkuglens Centrum, medens M_1, M_2 og M_3 er mellemliggende Punkter i Linjen AB,

viser da, at Nivellementet vilde være rigtigt, forsaavidt man kunde betragte de enkelte Sigter som sammenfaldende med Cirkelbuer, der er koncentriske med Middelkuglen; og vi vil nu undersøge, hvorvidt dette er tilladeligt.

I Fig. 143, der er et Snit gennem Punkterne A og B paa den naturlige Jordoverflade og Middelkuglens Centrum, C, er MN den vandrette Linje, som Sigtet med et i A opstillet Nivellerinstrument til en i B oprejst Nivellerstang antages at følge. Er nu MM_1 en med Middelkuglen, KK, koncentrisk Cirkelbue, vil den Fejl, som fremkommer ved at betragte Sigtet som sammenfaldende med denne Cirkelbue, bestaa deri, at man aflæser Stykket $M_1N = x$ formeget paa Nivellerstangen.

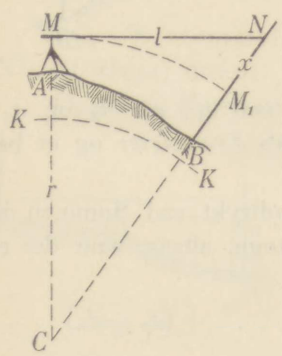


Fig. 143.

Sættes $CM = r$ og $MN = l$, faas af den retvinklede Trekant CMN

$$r + x = \sqrt{r^2 + l^2},$$

eller, naar man udvikler Størrelsen paa højre Side af Lighedstegnet efter Binomialformlen,

$$r + x = r + \frac{l^2}{2r} - \frac{l^4}{8r^3} + \ldots\ldots,$$

altsaa

$$x = \frac{l^2}{2r} - \frac{l^4}{8r^3} + \ldots\ldots,$$

hvor andet og efterfølgende Led er forsvindende, medens r — da M's Højde over Middelkuglen er forsvindende i Forhold til dennes Radius — bliver lig denne.

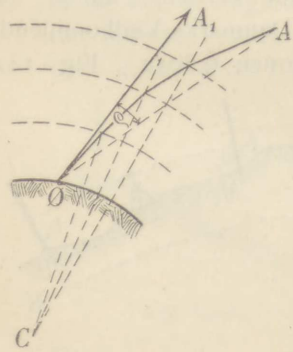


Fig. 144.

Korrektionen for Jordskrumning, som udtrykker, hvormeget Aflæsningen paa Stangen skal formindskes, bliver altsaa

$$x = \frac{l^2}{2r},$$

hvor l er Sigtets Længde.

136. Tænker man sig Atmosfæren bestaaende af Luftlag, hvis Tæthed aftager opad, og som er begrænsede af Kugleflader, der er koncentriske med Middelkuglen for vedkommende Terræn (se Fig. 144), saa vil en fra et lysgivende Punkt, A, kommende Lysstraale, hver Gang den pas-

serer ind i et tættere Luftlag, brydes mod Indfaldsloddet, saa at dens Bane bliver en brudt Linje beliggende i en vertikal Plan; og tænker man sig da videre det enkelte Lags Tykkelse uendelig lille, bliver Lysstraalens Bane en Kurve med meget svag Krumning og Krumningscentret under sig. Man kan paa et kortere Stykke betragte Banen som en Cirkelbue med en meget stor Radius, R, hvis Størrelse angives i Forhold til Jordradien (Middelkuglens Radius), r, idet man sætter

$$R = \frac{r}{k},$$

hvor k kaldes Refraktionskoefficienten.

Et Øje i $Ø$ vil se det lysende Punkt, A, i Retningen $ØA_1$, som tangerer Lysstraalen i $Ø$, og Vinklen $A_1ØA = \varrho$ kaldes Refraktionsvinklen eller Refraktionen.

Var Lysstraalen vinkelret paa Luftlagenes koncentriske Overflader, vilde Refraktionen være Nul, og jo mere Lysstraalens Retning nærmer sig til at være vandret, desto større bliver Refraktionen. Eftersom det lysgivende Punkt ligger udenfor eller indenfor Atmosfæren, betegner ϱ den astronomiske eller den terrestriske Refraktion.

Refraktionen er ingenlunde konstant, tværtimod, den varierer ikke alene med Sigtets Højde, men den varierer ogsaa fra Dag til Dag, ja, fra Time til Time efter Lufttrykket, Temperaturen og Fugtighedsgraden m. m.; ved de korte, vandrette Sigter, som forekommer ved Nivellement, kan man imidlertid under normale Forhold med tilstrækkelig Nøjagtighed som Middelværdi (efter *Gauss*) sætte

$$k = 0.1306.$$

Hvor stærkt Refraktionen imidlertid varierer fremgaar deraf, at Middelfejlen paa denne Bestemmelse af k beløber sig til omtrent $^1/_4$ af k's Værdi, og at k — om end meget sjældent — endogsaa kan blive negativ, hvilket betyder, at Lysstraalens Bue faar Krumningscentret over sig.

Som Følge af Refraktionen vil Sigtet fra M (se Fig. 145, der ganske svarer til Fig. 144) ikke, som forudsat, træffe Nivellerstangen i N men i et lidt lavere liggende Punkt N_1, saa at den foran beregnede Korrektion for Jordkrumning vil blive at formindske med Størrelsen $y = NN_1$.

Ligesom vi før af Trekant NMC fandt

$$x = \frac{l^2}{2r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

faar vi da, idet C_1 er Krumningscentret for Lysstraalen, af Trekant PMC_1 med meget stor Tilnærmelse, idet PN_1, og NN_1 praktisk set er ligestore,

$$y = \frac{l^2}{2R},$$

eller, idet man indsætter $R = \frac{r}{k}$,

$$y = \frac{l^2 k^1)}{2r} \quad \ldots \quad (\beta)$$

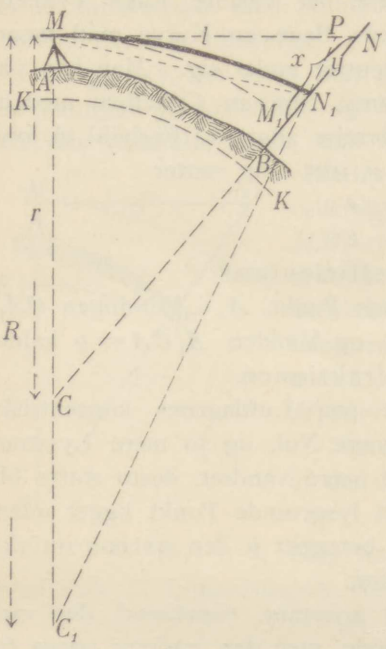


Fig. 145.

Herefter bliver da Korrektionen for Jordkrumning og Refraktion

$$x - y = \frac{l^2}{2r}(1 - k), \quad . \quad (92)$$

eller, naar k's Middelværdi indføres,

$$x - y = 0.435 \frac{l^2}{r} \quad \ldots \quad (93)$$

Naar der regnes med k's Middelværdi, kan for hele Danmark sættes

$$\log \frac{1 - k}{2r} = 2.8331 - 10$$

for Metermaal.

Herefter bliver da for Sigtelængden:

50 m	Korrektion for	Jordkrumning	og	Refraktion		0.17 mm,
100 m	—	-	—	-	—	0.68 mm,
150 m	—	-	—	-	—	1.53 mm,
500 m	—	-	—	-	—	17.01 mm,

hvilket viser, at denne Korrektion er saa lille, at den i de aller fleste Tilfælde vil være forsvindende ved Siden af den uundgaaelige fra tilfældige Fejlkilder hidrørende Totalfejl, særlig da der ved de fine Nivellementer, hvor der kunde være Tale om at tage den i Beregning, altid benyttes korte Sigter.

Har Tilbagesigtet og Fremsigtet henholdsvis Længderne l_1 og l_2, og giver de Aflæsningerne a_1 og b_1, bliver Stigningen i Henhold til (92)

---

[1]) Refraktionsvinklen, $\varrho = PMN_1$, ses nu at være bestemt ved

$$\varrho = \frac{y}{l} = \frac{lk}{2r}.$$

$$s = a_1 - \frac{l_1^2}{2r}(1-k) - \left(b_1 - \frac{l_2^2}{2r}(1-k)\right)$$

$$= a_1 - b_1 - \frac{1-k}{2r}(l_1^2 - l_2^2).$$

Den ved Jordkrumning og Refraktion foranledigede Fejl paa Stigningen i Stationen bliver altsaa

$$-\frac{1-k}{2r}(l_1^2 - l_2^2)$$

og paa Stigningen paa hele Linjen

$$-\frac{1-k}{2r}([l_1^2] - [l_2^2]),$$

hvor $[l_1^2]$ og $[l_2^2]$ betyder Summen af henholdsvis Tilbagesigterne og Fremsigternes Kvadrater.

Da denne Fejl alligevel paa lange Nivellementer kan løbe op til en kendelig Størrelse, bør man, hvor det gælder den højeste Nøjagtighed, eliminere Fejlen derved, at man i hver enkelt Station gør Tilbage- og Fremsigtet lige lange. Præcisionsnivellementer udføres derfor altid som »Nivellementer fra den nøjagtige Midte«; men ved almindelige økonomiske Nivellementer lader dette sig af praktiske Grunde ikke gøre.

137. Det er imidlertid ikke altid, at Refraktionsforholdene er saa normale, som de er fremstillede foran. Naar Solstraalerne opvarmer Jordens Overflade, vil de lavere Luftlag modtage Varme fra denne og stige til Vejrs. Lysstraalerne vil da komme til at passere Lag af meget forskellig Tæthed, Brydningsfladerne vil ikke være koncentriske, og Refraktionen vil som Følge heraf blive meget uregelmæssig, saa at Billedet af Nivellerstangen ingenlunde vil vise sig klart og skarpt i Kikkerten; tværtimod, det vil ofte være meget uroligt og »sitrende«, saa at det endogsaa kan være ganske umuligt at læse skarpt af paa Nivellerstangen. Erfaringen lærer, at Luftsitringerne er mindst om Morgenen i de første Timer efter Solopgang og om Eftermiddagen i de sidste Timer før Solnedgang. Paa varme Solskinsdage kan de derimod blive meget betydelige i Middagstimerne, og man staar sig under saadanne Forhold absolut ved at nivellere i Morgen- og Eftermiddagstimerne. Paa Dage, hvor Himlen er bedækket af lette Skyer, og hvor Temperaturen ikke er for høj, kan man derimod uden mindste Ulempe nivellere hele Dagen.

§ 30. Nivellering af en Linje.

138. Forud for mange tekniske Arbejder, saasom Vej-, Jernbane- og Vandledningsanlæg, Vandstandsreguleringer o. s. v. eller som Grundlag for Udførelsen af saadanne Arbejder kræves der et Nivellement af en Linje, ved hvilket man bestemmer dennes Højdeforhold. I enkelte særlige Tilfælde, f. Eks. ved Fastsættelse af Flodemaal, kræves der kun Kendskab til Højdeforskellen mellem Linjens Endepunkter; men som Regel maa man bestemme Højden af saa mange Punkter, at man ved det Arbejde, som skal udføres paa Grundlag af Nivellementet, kan betragte Skæringslinjen mellem Terrænets Overflade og en lodret Plan gennem to Nabopunkter som en ret Linje, hvorved man bliver i Stand til at tegne en nøjagtig Profil af hele Linjen. Skøndt vi selvfølgelig ikke her har at gøre med de Omstændigheder, som er bestemmende ved Valget af Linjens Beliggenhed i Terrænet, skal det dog bemærkes, at forsaavidt Endepunkterne er givne, kræves der oftest taget Hensyn dels til, at Linjen ikke forlænges for meget, og dels til, at den bliver saa jævn som mulig.

Den i Marken udstukne Linje vil i Reglen være en brudt Linje, i hvis Vinkelpunkter der dog ofte indføres Kurver, som tangerer de rette Linjer.

Naar Linjens Beliggenhed er fastslaaet, maaler man den igennem, saaledes at alle Afstande i den regnes fortløbende fra dens ene Endepunkt uden Hensyn til Knæk og gennem Kurverne. Endvidere indmaaler man fra Linjen (i Reglen ved Perpendikulærer) alle de Terrængenstande paa begge Sider af denne, hvis Beliggenhed det med det forestaaende Arbejde for Øje kan have Betydning at kende, saa at man senere kan tegne et fuldstændigt Kort over det Terræn, gennem hvilket Linjen gaar, en Situationsplan.

Af Hensyn til det Jordarbejde, som skal udføres paa Grundlag af Nivellementet, kræves der i Linjen — foruden en Del andre nedenfor angivne — bestemt Punkter med konstante Mellemrum, som er afhængige af Terrænets Form, Jordarbejdets Beskaffenhed m. m., f. Eks. et Punkt for hver 50 m eller for hver 20 m. Idet vi her gaar ud fra det første Tal, bliver det følgende Punkter, hvis Højder skal bestemmes:

1) Et Punkt, Stationeringspunkt, ved Enden af hver løbende 50 Meter af Linjens Længde uden Hensyn til, om Linjen forandrer Retning i Terrænet. I Kurverne

anbringes Punkterne i Reglen tættere, f. Eks. med 25 Meters Afstand.

2) Et Punkt, Vinkelpunkt, hvor Linjens Horisontalprojektion brat forandrer Retning. Ved Kurver mærkes endvidere Tangentpunkterne og i Reglen Kurvens Midtpunkt.

3) Et Punkt, Knækpunkt, overalt hvor Linjens Fald forandrer sig paa en kendelig og væsentlig Maade, altsaa navnlig paa alle Bakkekamme og i alle Dalbunde. (Saml. 1. Stykke i denne §).

4) Et Punkt, Forbindelsespunkt, hvor Faldet mellem to paa hinanden følgende Punkter ellers vilde overstige eller dog nærme sig til Nivellerstangens Længde.

5) Et Punkt, hvor Linjen skærer en Terrængenstand saa som en Vej (Jærnvej), Grøft eller Jordvold. Ved Veje nivelleres i Reglen de paa Fig. 146 viste Punkter, ved Grøfter et Punkt paa hver Side og et i Bunden, ved Jordvolde ligeledes et paa hver Side og et paa Kronen.

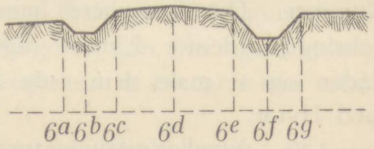


Fig. 146.

Endelig inddrager man ofte faste Terrænpunkter saasom Bygningssokler, Vejsten o. l. i Nivellementet, naar de ligger i Nærheden af Linjen, for at de senere kan benyttes til Kontrol, dersom selve Linjens Punkter skulde blive forrykkede eller dækkede under Jordarbejdets Udførelse. — I Mangel af hertil egnede Terrænpunkter kan man anbringe enkelte solide Pæle udenfor Linjen.

Punkternes Nummerering bør foregaa saaledes, at de Punkter, som ligger i 100, 200, 300 . . . Meters Afstand fra Udgangspunktet har Numrene 1, 2, 3 . . . Iøvrigt kan ved Nummereringen følges forskellige Regler, saaledes:

I. Punkt 0 er Udgangspunktet,
— 0 + - 50 Meter fra Udgangspunktet,
— 1 - 100 — - —
— 1 + - 150 — - —
— 2 - 200 — - —
o. s. v.,

hvorhos de øvrige Punkter benævnes saaledes, at f. Eks. de mellem 2 og 3 beliggende bliver 2a, 2b, 2c o. s. v., uden Hensyn til om de kommer før eller efter 2 +.

II. Hvert Punkt benævnes ved sin Afstand i Linjen; det vil

da være praktisk at kalde det Punkt, hvis Afstand i Linjen er 736 m for 7^{36}. Forsaavidt Punktets Afstand er angiven med Decimaler af Meter, bør disse dog ikke medtages men kun anføres i Afstandsrubrikken.

Punkterne mærkes i Marken ved Pæle. Hvor store og solide disse bør være, beror paa, hvorlænge de skal blive staaende, og hvor udsatte de er. Pælenes Overflade bør være plan og vandret, og det er fordelagtigt i denne at indslaa et Spiger med et halvkugleformet Hoved af ca. 2 cm Diameter. Pælene maa rammes saa dybt ned, at deres øverste Flade kommer i Højde med Terrænets Overflade, eller ogsaa maa man lade dem alle rage et bestemt lille Stykke, f. Eks. 1 cm op over denne.

Ved Siden af Pælene sættes en lille Pløk med paaskrevet Nummer. Det kan være hensigtsmæssigt at lade Pæle, som anbringes udenfor Linjen, rage et Par dm op over Jordoverfladen og at male dem røde, medens deres Nummer paamales med Hvidt.

139. Nivellerinstrumentet stilles nu op i 1. Station, som — naar Forholdene tillader det — vælges saaledes, at man omtrent faar ligelange Sigter til de to yderste Punkter. Som almindelig Regel for Valget af Stationer gælder, at jo færre Stationer man kan nøjes med, uden at Sigterne bliver for lange, desto bedre; Sigterne bør som Regel ikke være over 60 m og aldrig, selv under de gunstigste Refraktionsforhold, over 90—100 m. Der er selvfølgelig ingen Anledning til at opstille Instrumentet i selve Linjen.

Medhjælperen sendes nu til det første Punkt, hvor han holder Nivellerstangen lodret ovenpaa Pælen (Spigerets Hoved), og Aflæsning tages; Aflæsningen noteres i Maalebogen i Meter med 3 Decimaler. Er Instrumentet af en saadan Art, at Instrumentfejlen kan elimineres ved to Aflæsninger, opskrives begge. Naar man har overtydet sig om, at Aflæsningen er rigtig, og at Boblen spiller ind, giver man et Tegn til Medhjælperen, som da gaar til den næste Pæl; her gentages det samme, og saaledes bliver man ved, saalænge der er Pæle, som kan naas fra denne Station. Den anden Station vælges med samme Hensyn som den første; Arbejdet begynder her, naar Instrumentet er opstillet, med Sigte til det sidste Punkt, Overgangspuntet, der blev bestemt fra den foregaaende Station, og det fortsættes derpaa ganske som

i denne, paa denne Maade gennemgaar man hele Linjen. For ikke at trætte Medhjælperen, bør man ikke lade ham rejse Nivellerstangen, før man er klar til at tage Sigtet, og ikke lade ham blive staaende længere end nødvendigt.

Opskrift og Koteberegning.

140. Nivellementet kan opskrives i Maalebogen paa mange Maader, af hvilke nogle skal vises ved Eksempler.

Eksempel 30 og 31 viser Frem- og Tilbagenivellementet af samme Linje.

De tre første Kolonner udfyldes under Arbejdet i Marken, hvorefter Middeltallene af Aflæsningerne dannes og opføres i den af de tre næste Kolonner, hvortil de hører. Dernæst beregnes Stigning eller Fald mellem to og to paa hinanden følgende Punkter, og endelig dannes Koterne af Udgangskoten ved efterhaanden at tillægge Stigningerne eller fradrage Faldene. Man er sikret mod enhver Regnefejl ved at beregne den totale Stigning paa 3 Maader, nemlig:

1) som Forskellen mellem Summen af Tilbagesigterne og Summen af Fremsigterne,
2) som Forskellen mellem Summen af Stigningerne og Summen af Faldene og
3) som Forskellen mellem sidste og første Kote.

Eksempel 32. De tre første Kolonner udfyldes under Arbejdet i Marken, hvorefter Tallene i 4. Kolonne dannes. De enkelte Punkters Koter beregnes ved Hjælp af vedkommende Stations *Sigteplanshøjde*, d: den Højde, som den vandrette Sigteplan i Stationen har over Grundplanen. Som det fremgaar af Fig. 147, er for hver enkelt af Stationens Punkter

$$s = a + k \,, \quad . \quad (94)$$

idet s er Sigteplanshøjden, a Aflæsningen og k Koten. Kendes

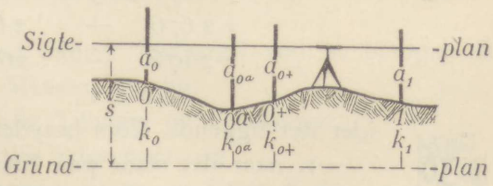


Fig. 147.

eller vælges nu Udgangspunktet, Punkt o's Kote, k_0, og er den vandrette Aflæsning til dette Punkt a_0, bestemmes Sigteplanshøjden i 1. Station ved

$$s = a_0 + k_0 \,,$$

hvorefter et hvilketsomhelst andet Punkt, p's Kote, k_p, bestemmes ved

$$k_p = s - a_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Har Overgangspunktet Koten k_n, og er Aflæsningerne til dette Punkt henholdsvis i 1. og 2. Station a_n og a'_n, faas

$$k_n = s - a_n = s' - a'_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

hvoraf

$$s' = s - (a_n - a'_n), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

der tjener til Beregningen af Sigteplanshøjden i 2. Station. Paa samme Maade beregnes enhver af de efterfølgende Stationers Sigteplanshøjde af den foregaaendes, hvorefter alle Punkters Koter beregnes.

Den rigtige Beregning af Sigteplanshøjderne og Overgangspunkternes Koter kan man kontrollere dels ved at undersøge, om Summen af Tilbagesigterne minus Summen af Fremsigterne er lig Forskellen mellem Slutnings- og Udgangspunktets Koter, og dels derved, at et Overgangspunkts Kote i Følge (β) skal faas af begge tilstødende Sigteplanshøjder ved Fradragning af de tilsvarende Aflæsninger.

141. Ved Nivellementsberegninger anvender man med Fordel det dekadiske Komplement. Ligesom man i Logaritmeregningen skriver log 0.734 som 9,8657—10 i Stedet for — 0.1343, saaledes kan man skrive ethvert negativt Tal paa lignende Maade, f. Eks.

$$-0.7324 = 0.2676-1$$
$$-7.324 = 2.676-10$$
$$-73.24 = 26.76-100$$

o. s. v.

For imidlertid at spare at skrive —1, —10, —100 o. s. v., har man vedtaget at lade

$$\times .2676 \text{ betyde } 0.2676-1$$
$$\times 2.676 \text{ — } 2.676-10$$
$$\times 26.76 \text{ — } 26.76-100$$

o. s. v.,

idet det liggende Kors betyder

—1, naar det staar paa Enernes Plads,
—10, » » » » Tiernes » og
—100, » » » » Hundredernes Plads

o. s. v.,

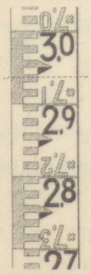


Fig. 148.

Er nu Nivellerstangen becifret saaledes som vist paa Fig. 148, hvor der under hver Decimeterstreg findes anført det Tal (opretstaaende), som angiver dens Afstand i Meter fra Fodenden af Stadiet, medens det nævnte Tals dekadiske Komplement er anført

over Stregen (omvendt) og betegnet med $\times$, vil det være en Fordel ved Fremsigtet at aflæse det dekadiske Komplement. Er Aflæsningerne til Punkterne A og B f. Eks. henholdsvis $a = 3.275$ m og $b = 2.937$ m, bliver Stigningen fra A til B bestemt ved

$$\begin{aligned} s &= a - b = 3.275 - 2.937 \\ &= 3.275 + (-2.937) = 3.275 + (7.063 - 10) \\ &= 3.275 + (\times 7.063) \\ &= 0.338. \end{aligned}$$

Stigningen fra et Punkt til et andet er altsaa lig Summen af Tilbagesigtet og Fremsigtet, naar det sidste skrives med dekadisk Komplement, og under samme Forudsætning er Totalstigningen lig Summen af alle Tilbage- og Fremsigter.

Eksempel 33. Et Nivellement uden Mellempunkter kan da bekvemt opskrives som i Eksempel 33. Skemaet adskiller sig tillige fra de tidligere derved, at Tilbage- og Fremsigtet til samme Punkt noteres i samme vandrette Linje, hvorved man opnaar at kunne indføre Punkterne i Bogen, inden man paabegynder Nivellementet. Endvidere er der kun noteret en Aflæsning for hvert Sigte, saa at man, dersom man har taget to Aflæsninger til Stangen (f. Eks. med vendt Libelle og drejet Kikkert), maa beregne Middeltallet i Hovedet; iøvrigt kan man selvfølgelig indføre en Aflæsningsrubrik mellem 1. og 2. Kolonne. 2. og 3. Kolonne udfyldes i Marken; derefter beregnes Stigningen fra et Punkt til det næstfølgende Punkt ved Addition af Tilbagesigtet til det første Punkt til Fremsigtet (dekadisk Komplement) til det andet Punkt, og endelig beregnes Koterne ved sukcessiv Addition af Stigningerne til den foregaaende Kote.

Man er sikret mod enhver Regnefejl ved at beregne den totale Stigning paa 3 Maader, nemlig:

1) som Summen af alle Tilbage- og Fremsigter,
2) som Summen af alle Stigninger, og
3) som Forskellen mellem sidste og første Kote.

Er der Mellempunkter i Linjen, opskrives Nivellementet som i

Eksempel 34, idet man noterer alle Fremsigter og Sigter til Mellempunkter som dekadisk Komplement; man maa da tillige ud for Sigterne til Mellempunkterne opføre positive Tal, som er indklamrede, da de ikke er virkelig aflæste. Skemaet er ganske som i Eksempel 33.

Eksempel 35 viser en Nivellementsopskrift, som kun tager meget lidt Plads. I 2. Kolonne føres ud for hvert Punkt øverst Fremsigtet og nederst Tilbagesigtet til dette; til Mellempunkterne noteres Sigtet ved dekadisk Komplement, medens det tilsvarende positive Tal føres i Parantes nedenunder. I 3. Kolonne føres ud for hvert Punkt dettes Kote (understreget) og mellem disse Stigningerne, som faas ved Addition af vedkommende Tilbage- og Fremsigte. Der er fuldstændig Regnekontrol, idet Summen af alle Sigter skal være lig sidste Kote minus første Kote.

142. Sikkerhed mod Aflæsningsfejl. Medens man, som i det foregaaende vist, kan opstille Nivellementsberegningen paa en saadan Maade, at man sikrer sig mod enhver Regnefejl, er man altid udsat for at begaa Aflæsningsfejl. En Aflæsningsfejl paa Sigtet til et Mellempunkt faar kun Indflydelse paa dettes Kote, medens en Aflæsningsfejl paa Sigtet til et Overgangspunkt faar Indflydelse paa Koterne til alle de efterfølgende Punkter; derfor maa man anvende særlig Omhu paa Sigterne til Overgangspunkterne. Af særlige Midler til Sikring mod Aflæsningsfejl skal her nævnes:

a. Man kan foretage Aflæsning saavel umiddelbart som i dekadisk Komplement. Kontrollen formindskes noget derved, at man let ganske uvilkaarligt kommer til at regne sig til den anden Aflæsning, naar man har den første. Nivellementet kan opskrives som i

Eksempel 36, der ganske svarer til Eksempel 35, kun er der to Kolonner til Sigterne; i 1. Kolonne skrives Tilbagesigterne direkte, Fremsigterne og Sigterne til Mellempunkterne med dekadisk Komplement, i 2. Kolonne omvendt, hvorfor ogsaa de af denne Kolonnes Tal udregnede Stigninger faar urigtigt Fortegn. I 3. Kolonne dannes Stigningerne (Faldene) ved Addition af vedkommende Tilbage- og Fremsigter henholdsvis i 1. og 2. Kolonne, hvorefter der i sidste Kolonne regnes med Middeltallene af de to Værdier for Stigningerne. Regnekontrol faas, idet Summen i 1. + Summen i 2. Kolonne skal give Summen i 3. Kolonne, og Middeltallet af Summerne i 1. og 2. Kolonne, den sidste dog med modsat Fortegn, skal give Totalstigningen (sidste Kote — første Kote).

Er Instrumentet af en saadan Art, at Instrumentfejlene kan elimineres ved to Aflæsninger, bør den ene tages direkte, den anden ved dekadisk Komplement.

b. En bedre Kontrol faar man, naar Nivellerstangen er inddelt paa begge Sider, og de to Skalaer, som maa være saa forskellige, at de ikke kan forveksles, er forskudte i Forhold til hinanden. Man læser da først af paa den ene Side af Stangen, derpaa vendes denne om, og man læser af paa den anden. De to Nivellementer føres hver paa sin Side i Bogen eller samlede som i

Eksempel 37. Kontrollen taber dog noget i Værd derved, at Forskellen mellem Aflæsningerne til samme Punkt paa de to Skalaer er konstant.

c. Har man derimod paa den ene Side af Nivellerstangen en Meter- og paa den anden Side en Fodskala, vil man faa to fuldstændig uafhængige Nivellementer; men man har da ganske vist ogsaa den Ulempe, at Kontrollen først viser sig efter Hjemkomsten, naar begge Sæt Koter er beregnede og omsatte til samme Længdeenhed. De to Nivellementer bør føres hver paa sin Side i Bogen.

d. Man har brugt Aflæsning paa 3 vandrette Traade, nemlig foruden paa Midtetraaden endnu paa en Traad over og en anden Traad ligesaa langt under denne. Middeltallet af Aflæsningerne paa de to ekscentriske Traade skal da svare til Aflæsningen paa den midterste Traad.

e. Overgangen mellem Stationerne kan man sikre sig ved dobbelte Overgangspunkter, idet man i Nærheden af det normale Overgangspunkt vælger et Kontrol-Overgangspunkt. Benyttes et af de angivne Skemaer, maa man have en særlig Rubrik til Kontrollen, saaledes som vist i

Eksempel 38, der næppe behøver nærmere Forklaring.

Det bedste af de her nævnte Sikringsmidler er Aflæsning paa to Skalaer; men det maa vel erindres, at man herved saavel som ved de andre Sikringsmidler kun opnaar Sikkerhed mod Aflæsningsfejl. Fejl hidrørende fra en ufuldstændig Verifikation opdages ikke.

f. Ved et Dobbeltnivellement opnaar man derimod ogsaa Kontrol mod saadanne, dersom man har forskellige Overgangspunkter og Stationer ved de to Nivellementer.

Efter at det første Nivellement, *Fremnivellementet*, er udført, udføres derfor endnu et Nivellement, *Tilbagenivellementet*, ved hvilket man begynder fra Linjens modsatte Ende-

punkt og saavidt muligt vælger andre Stationer og Overgangspunkter.

Under Udførelsen af Tilbagenivellementet bør man undersøge, om de ved dette fundne Fald (Stigninger) fra Punkt til Punkt stemmer med de ved Fremnivellementet fundne Stigninger (Fald); i modsat Tilfælde undersøges straks — medens man har Instrumentet opstillet — om Fejlen ligger i den Station, i hvilken man befinder sig, og findes den ikke her, tages for Sikkerheds Skyld vedkommende Station i Fremnivellementet om.

Naar begge Nivellementer er fuldendte, beregnes Koterne først af Fremnivellementet og derpaa, idet man gaar ud fra den fundne Kote til det sidste Punkt, af Tilbagenivellementet. De to Rækker Koter opskrives som i

Eksempel 39 ved Siden af hinanden, og man danner deres Forskel og Middeltal; se iøvrigt Punkt 146 sidste Stykke.

Af de Skemaer, ved hvilke der ikke er benyttet dekadisk Komplement, giver det i Eksempel 30 og 31 mere Regning end det i Eksempel 32, nemlig akkurat saa meget mere, som er nødvendig til Kontrollering af hele Koteberegningen; det første byder altsaa i Virkeligheden en væsentlig Fordel ved Beregningen, og ved Markarbejdets Udførelse frembyder det derhos den Fordel, at man har Fald og Stigninger staaende i Fremnivellementet til Sammenligning med de tilsvarende Stigninger og Fald ved Tilbagenivellementet.

Tværprofiler.

143. Ved mange tekniske Arbejder kræves der ikke alene en Bestemmelse af Højdeforholdene i den udstukne Linje men ogsaa i Retning vinkelret paa denne; man bestemmer da Tværprofiler i alle de nivellerede Punkter. Samtidig med at man maaler Linjen, udstikker man i alle dens Punkter Perpendikulærer paa den og afsætter i disse til begge Sider de til Angivelse af Tværprofilens Form nødvendige Punkter, hvis Afstande fra Linjen maales med Staalbaand eller Baandmaal; disse Punkter mærker man efter Omstændighederne med Pæle eller kun med Pløkke, (det sidste vil i Reglen være tilstrækkeligt). I Kurver er Tværprofilerne radielle. Hvor langt man bør gaa ud til Siden, afhænger af det forestaaende Arbejdes Art.

Enten nivellerer man Tværprofilens Punkter samtidig med, at man udfører det ene Nivellement af Linjen, eller ogsaa ni-

vellerer man dem særskilt, maaske ved Hjælp af et simplere Nivellerinstrument; Stationerne vælges da saaledes, at man — om muligt — fra samme Station kan nivellere flere Tværprofiler, og man bør for Kontrollens Skyld gaa Punkterne to Gange igennem.

Maalebogsføringen udføres bedst ved paa fri Haand at tegne en Række Tværprofiler og paa disse indskrive baade Afstande og Aflæsninger, saaledes som vist paa Fig. 149. Den ved to Kryds betegnede Linje angiver Profilens Akse, o: Vertikalen gennem vedkommende Punkt i Linjen. Profilerne tegnes saaledes i Bogen, at man tænker sig staaende i Linjen med Front i den Retning, i hvilken Punkternes Numre stiger. Det er selvfølgelig under vore Forhold en Sjældenhed, at man, som paa Figuren, ikke kan tage alle Tværprofilens Punkter fra én Station.

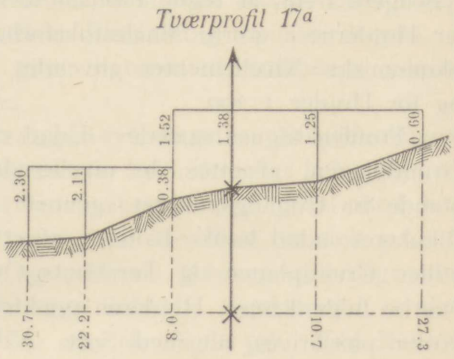


Fig. 149.

Hvor Terrænet kun har ringe Sidehældning, kan man i Reglen indskrænke sig til at bestemme et Punkt til hver Side, f. Eks. i 20 m's Afstand fra Linjen, og man kan da nivellere dem samtidig med Linjen, idet man mærker dem med Hovedpunktets Nummer med Indeks h eller v, eftersom de ligger til højre eller venstre for Linjen, naar man tænker sig staaende som foran angivet (f. Eks. $17a^h$ og $17a^v$).

Resultatet af Nivellementet.

144. Til en fuldstændig Fremstilling af Nivellementets Resultat hører 1) Kotefortegnelse og 2) Nivellementstegning, hvilken sidste omfatter a) Nivellementsprofil, b) Situationsplan og c) Tværprofiler.

Kotefortegnelsen, som udarbejdes paa Papir i Folioformat, indeholder Rubrikker til Punkternes 1) Numre, 2) Koter og 3) Afstande i Linjen, hvorhos der i en Anmærkningsrubrik kan anføres: Bakketop, Dalbund, Grøftebund, Vejkant o. l., ligesom der i denne Rubrik kan gives en Beskrivelse af særlige

Punkter (navnlig Fikspunkter). Paa Omslaget bør nøjagtig angives, hvad Nivellementet omfatter, naar det er udført samt Nivellørens Navn og Stilling.

Nivellementsprofilen. Resultatet af en Linjes Nivellement kan fremstilles grafisk ved Linjens Profil, som er en Udfoldning af det lodrette Snit, der indeholder Linjen. Man foretrækker dog, for at Højdeforholdene i Linjen skal træde tydeligere frem, at tegne Profilen forvansket, idet man fremstiller Højderne i større Maalestoksforhold end Længderne. Ved økonomiske Nivellementer anvendes ofte for Længder 1:2000 og for Højder 1:200.

Profilen tegnes saaledes: Udad en ret Linje, der forestiller Grundplanen, afsættes de nivellerede Punkter ved deres Afstande fra Udgangspunktet; gennem Punkterne tegnes Perpendikulærer, udad hvilke Koterne afsættes. De Linjer, som fremstiller Grundplanen og Terrænets Overflade, trækkes op med stærke fulde Linjer, Højderne punkteres, Punkternes Numre og Koter paaskrives, alt med Sort. Vil man i Profilen fremstille den Linje, som angiver en projekteret Vejlinje, Kanalbund eller lignende, tegnes den med en særlig Farve, med hvilken ogsaa Koterne til Linjen, dennes Fald og Afgravnings- eller Paafyldningsdybderne paaskrives.

Situationsplanen er et Kort over Linjens Omgivelser i Terrænet, f. Eks. 30—40 m til hver Side af Linjen; dette Kort bør udstyres som Kort i Almindelighed, særlig nødvendigt er det, at det indeholder Angivelse af samtlige nivellerede Punkter og deres Numre, af de overskaarne Ejendommes Skel og Matrikulsnumre, af, hvorhen de overskaarne Veje fører, Nordlinjens Retning, Krumningsradierne for de indførte Kurver m. m.

Hvor der er optaget Tværprofiler, rentegnes disse enten i Nivellementstegningen eller i et særligt Hæfte; Tværprofilerne kan passende tegnes i Maalestoksforholdet 1:100.

Maalestokke for Længder, Højder og Tværprofiler bør ikke savnes, og endelig bør Tegningen indeholde en passende Overskrift og en Angivelse af, naar og af hvem den er udført.

§ 31. Nivellementets Fejlteori.

145. *Grove Fejl* kan man sikre sig imod, idet man kan eliminere de instrumentale Fejl ved en Dobbeltmaaling med dertil indrettede Nivellerinstrumenter, medens man kan sikre sig mod egentlige Aflæsningsfejl paa en af de i Punkt

142 a—e angivne Maader og mod Regnefejl som vist i 140—141. Og mod alle Fejl sikrer man sig paa én Gang gennem Tilbagenivellementet, som aldrig bør undlades.

Lovmæssige Fejl. De vigtigste af disse er:

1) Verifikationsfejlen. Denne bør bringes ned til at være saa lille, at den kan betragtes som forsvindende ved Siden af de tilfældige Fejl, hvilket dog særligt gælder ved Brugen af saadanne Instrumenter, som ikke tillader dens Eliminering. Iøvrigt kan en delvis Eliminering opnaas derved, at man bestræber sig for at gøre Sigterne til Stationens yderste Punkter omtrent lige lange.

2) Fejl i Nivellerstangens Længde. Nivellerstangens Længde bør bestemmes meget nøje, hvilket ret let lader sig gøre ved Hjælp af en justeret Normalmeter[1]) af Staal med kvadratisk Gennemsnit, som langs den ene Kant er delt i Centimeter, hvorhos der ved 0 og 1 Meters Mærket er indlagt smaa Sølvplader, i hvilke der til begge Sider fra Meterstregen er afsat 3 mm, delte i Dele paa 0.2 mm (se Fig. 150). Ved Normal-

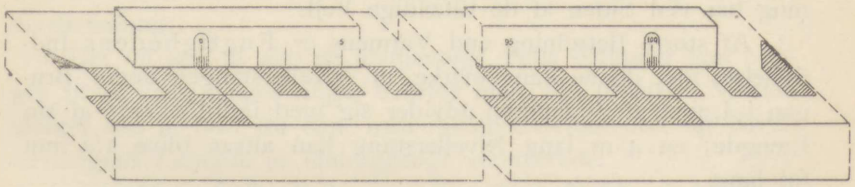


Fig. 150.

meterens Justering angives for alle Delstreger Inddelingsfejlen, som i Reglen ikke overstiger 0.01 mm, og desuden angives Stangens Længde, f. Eks.

$$1\text{ m} + 0.02\text{ mm} + 0.017\text{ mm}\ (t - 18^\circ),$$

hvor t er den Temperatur, som angives i Centigrader paa et i Stangen indlagt Termometer.

Ved Hjælp af dette Apparat kan Afstanden mellem to 1 m fra hinanden liggende Delstreger bestemmes, idet Normalmeterne lægges paa Nivellerstangen, saaledes at de to Sølvplader kommer over hver sit af vedkommende Mærker. Gennem en stærk Loupe kan man nu tydelig se Delstregen paa Nivellerstangen spejle sig i Sølvpladen, og naar Øjet og Loupen holdes saa-

[1]) Indtil vi faar en Justeringsanstalt her i Landet, maa justerede Normalmaalestokke forskrives fra Berlin eller Paris.

ledes, at Spejlbilledet af Delstregen er parallel med Stregerne paa Sølvpladen, kan Aflæsning foretages paa denne, og da mindste Inddeling her er 0.2 mm, kan man skønne 0.02 mm. Naar den af disse to Aflæsninger fundne Afstand mellem de to Metermærker korrigeres for Temperatur efter Stangens foranstaaende Ligning, faas Afstanden mellem Meterstregerne ved den forhaandenværende Temperatur. Paa finere Nivellerstænger er der indlagt to smaa Sølvplader med fine Streger, mellem hvilke man maaler Afstanden; ved Nivellerstænger til økonomisk Brug nøjes man derimod i Reglen med at maale Afstanden mellem to Meterstreger et Par Steder paa Nivellerstangen, og man maa da kræve saa ringe Fejl paa disse Afstande, at man kan lade Korrektionen for Fejl paa Nivellerstangens Længde bortfalde.

Nivellerstangen laves sædvanlig af tørt Grantræ. Dettes Udvidelseskoefficient er omtrent $^1/_4$ af Jærnets eller 0.0000035 for 1° C. Paa en 4 m lang Nivellerstang vil en Temperaturforandring paa 15° C. altsaa give en Forandring paa 0.21 mm, en Størrelse som ved tekniske Nivellementer ingen Betydning har ved Siden af de tilfældige Fejl.

Af større Betydning end Varmens er Fugtighedens Indflydelse, idet denne kan bevirke, at Nivellerstangen under Brugen i Løbet af Sommeren udvider sig med indtil 0.0003 af sin Længde; en 4 m lang Nivellerstang kan altsaa blive 1.2 mm for lang.

Ved fine Nivellementer bør man derfor daglig prøve Nivellerstangens Længde og tage Fejlen paa denne i Beregning.

3) Holdes Nivellerstangen ikke lodret, bliver Aflæsningen for stor. Aflæses der l, og er Stangens Vinkelafvigelse fra den lodrette Stilling v, bliver Fejlen

$$x = l\cos v - l = l(\cos v - 1) = -2\,l\sin^2\frac{v}{2}.$$

Er $l = 4$ m, faas efterfølgende sammenhørende Værdier for v og x,

v	x
$^1/_2°$	− 0.13 mm
1°	− 0.62 —
$1^1/_2°$	− 1.38 —
2°	− 2.44 —.

Nivellerstangen maa altsaa holdes omhyggelig lodret, der skal ikke meget til, at den faar en Hældning paa 2°; derfor er det af største Betydning, at man har en omhyggelig og paalidelig Stadieholder, og at der paa Nivellerstangen er anbragt en Daaselibelle, som giver et tydeligt Udslag for en Hældning paa 1°. Derhos bør man ikke nivellere i saa stærk Blæst, at Stadiet ikke kan holdes stille.

4) Jordkrumningens og Refraktionens Indflydelse er omtalt i § 29.

5) Nivellerinstrumentets og Nivellerstangens Synken under Udførelsen af Nivellementet vil foraarsage en ensidig Fejl, idet den vil gøre Stigningen, regnet med Fortegn, for stor. Skøndt denne Fejl selvfølgelig er meget ringe, kan den muligvis forklare eller dog medvirke til at forklare det ret mærkelige Forhold, at man i det hele taget faar større Afvigelse mellem to Nivellementer af en Linje, naar disse er udførte i modsatte Retninger, end naar de er udførte i samme Retning. Dersom denne Fejl gør sig gældende paa en jævn Maade, vil den altsaa elimineres i Middeltallet mellem Frem- og Tilbagenivellementet.

Det vil ses, at alle de lovmæssige Fejls Virkning kan bringes til at være meget ringe, hvorfor man ved tekniske Nivellementer kan se bort fra den, naar Nivellerinstrumentet og Nivellerstangens Længde er omhyggeligt verificerede.

Tilfældige Fejl. Fejlen paa en aflæst Højde skyldes væsentlig

1) Fejlen i Libelleindstillingen og
2) Fejlen i Aflæsningen,

om end andre Fejl faar Indflydelse, saaledes den, der hidrører fra, at Traadenes Skæringspunkt ikke glider paa en af Objektivets optiske Akser, naar Traadkorsrøret bevæges, eller den, som hidrører fra manglende Stabilitet i Instrumentet. Idet det forudsættes, at Kikkertens Godhed (Forstørring) og Libellens Finhed svarer til hinanden, bliver de to førstnævnte Fejlkilder omtrent lige betydelige. Den første Fejls Indflydelse paa Aflæsningen er proportional med Sigtevidden; for den andens Vedkommende lader dette sig vel ikke bestemt paavise, saameget mere som Luftsitringer o. l. her spiller en Rolle, men for denne saavel som for de to sidstnævnte gælder dog, at de vokser med Sigtevidden, og det er almindelig antaget, at

den hele Middelfejl, m_l, paa et aflæst Sigte er proportional med Sigtevidden, l, altsaa

$$m_l = l\,a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

Konstanten a er Middelværdien for den Vinkel, som Sigteplanen danner med den vandrette Plan, den angives altsaa i rene Tal, men kan selvfølgelig omsættes til Sekunder; dens Størrelse er afhængig af Observators Duelighed og Instrumentets Godhed. Ved økonomiske Nivellementer (Libellens Vinkelværdi 15—20″, Forstørring 25—30 Gange) kan den sættes til 3—4 Sekunder (se Anm. Side 209).

Vi vil nu tænke os, at Højdeforskellen mellem to Punkter, hvis Afstand er L, er bestemt ved et Nivellement med n Stationer og en konstant Sigtevidde,

$$l = \frac{L}{2n};$$

Middelfejlen paa en Aflæsning er da ifølge (95)

$$m_l = l\,a.$$

Betegnes Aflæsningerne paa Tilbagesigterne ved a og Aflæsningerne paa Fremsigterne ved b, er

$$h = a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \ldots + a_n - b_n,$$

og Middelfejlen paa h er da (ifølge Fejlteorien Eksempel 22) bestemt ved

$$m_h = m_l \sqrt{2n}$$

eller, naar man indfører $m_l = l\,a$ og $2n = \frac{L}{l}$,

$$m_h = a\sqrt{l}\sqrt{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

Det ses heraf, at for et bestemt Instrument (en bestemt Observator) er

1) Middelfejlen paa Højdeforskellen mellem to Punkter for en konstant Sigtevidde proportional med Kvadratroden af den nivellerede Linjes Længde (saml. Fejlteorien Eksempel 29),

2) medens den for en bestemt Linje er proportionel med Kvadratroden af Sigtevidden.

Af 1) udledes — da Vægten er omvendt proportional med Middelfejlens Kvadrat — at den Vægt, som skal tillægges den ved et Nivellement bestemte Højdeforskel mellem to Punkter, er omvendt proportional med Linjens Længde. Denne Sætning anvendes almindeligvis — som tilnærmelsesvis rigtig — selv om Sigtevidden ikke er konstant.

Af 2) ses det, at Middelfejlen paa en ved Nivellement be-

stemt Højdeforskel bliver mindre, jo kortere Sigter man arbejder med. Medens man tidligere har været tilbøjelig til at arbejde med lange Sigter, gaar Tendensen i de senere Aar i Overensstemmelse med det fremsatte i Retning af korte Sigter. Det er imidlertid indlysende, at jo længere Sigterne er, desto hurtigere gaar Arbejdet fra Haanden, og Sigterne bør derfor gøres saa lange som muligt under Hensyn til den forlangte Nøjagtighed.

Nøjagtigheden.

146. Sættes i (96) $a\sqrt{l} = m$, faas

$$m_h = m\sqrt{L}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

m kaldes Middelfejlen paa Længdeenheden, og sættes endvidere $L = 1$ Kilometer, faas Middelfejlen pr. Kilometer, eller, som den ofte kaldes, Kilometermiddelfejlen.

Middelfejlen paa Længdeenheden kan bestemmes, naar man har et større Antal omtrent under samme Forhold udførte Dobbeltnivellementer til Raadighed. Er Højdeforskellen mellem to Punkter efter det ene Nivellement h efter det andet h', kaldes $d = h - h'$ Slutfejlen, og Middelfejlen paa det enkelte Nivellement bliver da

$$m_h = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Er Linjens Længde L, og foreligger der n saadanne Dobbeltnivellementer, faas ved Anvendelsen af (97), som giver $m^2 = \frac{m_h^2}{L}$, n Bestemmelser af m, nemlig

$$m^2 = \frac{d_1^2}{2L_1}$$

$$m^2 = \frac{d_2^2}{2L_2}$$

$$\ldots\ldots$$

$$m^2 = \frac{d_n^2}{2L_n},$$

saa at Middelværdien for m^2 bliver

$$m^2 = \frac{\left[\frac{d^2}{2L}\right]}{n} = \frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{L}\right],$$

altsaa

$$m = \pm\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{L}\right]}.$$

Udtrykkes L i Kilometer, bliver m et Udtryk for Kilometermiddelfejlen.

I det følgende skal vi se, hvorledes denne kan bestemmes ad en anden Vej, nemlig gennem Udjævningen.

For nu at antyde, hvilken Nøjagtighed der kan opnaas ved Nivellering, skal her angives, at »Den internationale Gradmaaling« af et Præcisionsnivellement fordrer, at »den sandsynlige Fejl paa Højdeforskellen mellem to Punkter med 1 Kilometers indbyrdes Afstand i Almindelighed ikke maa overstige 3 og i intet Tilfælde 5 mm«. En sandsynlig Fejl paa 3 mm svarer til en Middelfejl paa godt 4 mm; men i Sletteland kan Middelfejlen blive betydelig mindre. Den danske Gradmaalings sandsynlige Kilometerfejl kan anslaas til 1 mm. Ved Generalstabens Nivellement til Bestemmelse af Højdemærker paa Frederiksberg og Valby Grund (udført af Premierløjtnant *Lomholt)* kan Kilometerfejlen paa Enkeltnivellementet anslaas til 3.6 mm[1]). Dette Nivellement er udført med et til almindelige økonomiske Nivellementer passende Instrument. Ved et af Kaptajn *Sand* for Kjøbenhavns Kommune i $19^{00}/_{01}$ udført Præcisionsnivellement i Kjøbenhavns nye Distrikter kan Kilometerfejlen paa Enkeltnivellementet anslaas til 1.6 mm[2]). Dette Nivellement er udført med finere Instrumenter.

Ved tekniske Nivellementer vil man i Reglen kun opnaa en ringere Nøjagtighed, eftersom Forholdene i Almindelighed ikke tillader Anvendelsen af den fornødne Tid og Omhu; og som Regel maa Arbejdet fortsættes under mindre gunstige Vejrforhold, hvorved Resultatet vil forringes. Blæsten vil saaledes bevirke, at Nivellerstangen ikke kan holdes fuldstændig rolig og lodret, og at Instrumentet dirrer, saa at Libelleboblen ikke kan bringes til at spille nøjagtig ind; ogsaa Solskin vil bevirke, at Libelleboblen bliver mere urolig, (hvilket tildels kan afhjælpes ved Brugen af Solskærm over Instrumentet), hvorhos de tidligere omtalte Luftsitringer vil opstaa. Afpælingen af Linjen maa derhos være meget omhyggelig udført, om den ikke skal bevirke kendelige Fejl derved, at Nivellerstangen staar i forskellig Højde paa Pælen, naar der tages Frem- og Tilbagesigte til samme Punkt; denne Fejl afhjælpes, naar der indslaas et Spiger med halvkugleformet Hoved.

Ved tekniske Nivellementer kræves da heller ikke saa stor en Nøjagtighed; men man vil i Reglen uden særlig Anstrængelse opnaa en Kilometermiddeifejl, som ikke overstiger 5

[1]) Se Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulsvæsen 2. Bind Side 163.
[2]) - — - — - — 3. — — 94.

mm[1]). Gaar vi ud fra dette Tal, bliver ifølge (97) Middelfejlen paa Faldet paa en nivelleret Linje af Længden L,

$$m_h = 5 \sqrt{L} \text{ mm}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98a)$$

naar L er angivet i Kilometer, eller

$$m_h = 0.16 \sqrt{L} \text{ mm}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98b)$$

naar L er angivet i Meter,
og Slutfejlen paa et Dobbeltnivellement af Længden L maa da ikke overstige $3\, m_h \sqrt{2}$ eller

$$d = 15 \sqrt{2L} \text{ mm}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99a)$$

naar L er angivet i Kilometer, eller

$$d = 0.5 \sqrt{2L} \text{ mm}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99b)$$

naar L er angivet i Meter.

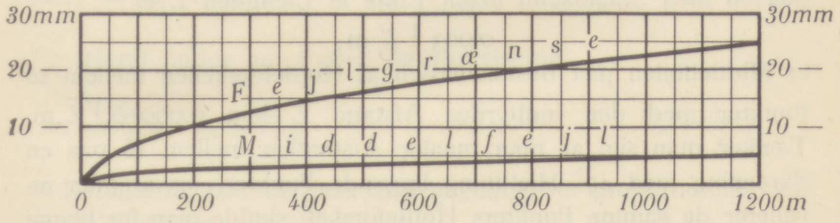


Fig. 151.

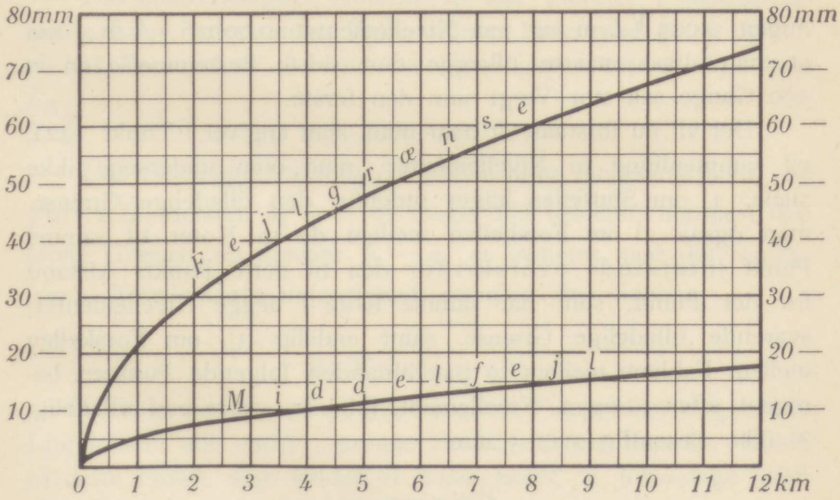


Fig. 152.

[1]) Den hertil svarende Middelværdi for α (Side 206) bliver f. Eks. for Sigtevidden $l = 80$ m i Henhold til (96) bestemt ved

$$0.005 = \alpha \sqrt{80} \quad \sqrt{1000},$$

som giver $\alpha = 0.000018 = 3.6$ Sekund, hvilket atter svarer til en Middelfejl paa Aflæsningen paa 1.4 mm for nævnte Sigtevidde (Saml. Side 206).

I Figurerne 151 og 152 viser Ordinaterne til de med »Fejlgrænse« og med »Middelfejl« betegnede Kurver henholdsvis de højst tilladelige Slutfejl og Middelfejlene paa de som Abscisser afsatte Længder af den nivellerede Linje, som i Fig. 151 er afsatte i Meter og i Fig. 152 i Kilometer.

Erfaringen lærer iøvrigt, at Slutfejlen bliver større i kuperet end i fladt Terræn. Dette kan ifølge det i Punkt 145 fremsatte ikke skyldes den Omstændighed, at der bliver flere Stationer, eftersom Sigterne bliver kortere; men antagelig hidrører det fra lovmæssige Fejl. Holdes Nivellerstangen ikke nøjagtig lodret vil den derved foranledigede Fejl saaledes blive størst, naar der læses af højt paa Stangen.

Det er værd at lægge Mærke til, at medens Middelfejlen paa en med Staalbaand maalt Linje af Længden L er

$$0.003 \sqrt{L} \text{ m},$$

er Middelfejlen paa Bestemmelsen af Højdeforskellen mellem to Punkter med den indbyrdes Afstand L kun $0.00016 \sqrt{L}$ m. Tænker man sig, at man maaler Afstanden mellem to paa en Skraaning med 45° Hældning liggende Punkter, og at man nivellerer de samme Punkters Højdeforskel, skulde man for begge faa samme Værdi; er denne L, bliver Middelfejlen paa Maalingen $0.003 \sqrt{L}$ m og paa Nivellementet $0.00016 \sqrt{L}$ m, saa at man altsaa maatte tillægge den sidste Bestemmelse en c. 350 Gange saa stor Vægt som den første.

Det vil nu forstaas, at naar man, som angivet i Punkt 142 f, vil sammenligne to Nivellementer, maa man undersøge ikke alene, 1) om Slutfejlen ligger indenfor den tilladelige Grænse, men ogsaa 2) om Forskellen mellem de to Koter til samme Punkt intetsteds overskrider den til dette Punkts Afstand fra det Punkt, som har samme Kote i begge Nivellementer, svarende tilladelige Grænse, samt endelig 3), om Forskellen mellem Faldene mellem to paa hinanden følgende Punkter, beregnet efter 1. og 2. Nivellement, ikke er større end tilladelig, d: ikke væsentlig over 5 mm.

Udjævningen.

Forbindelseslinjen mellem to Fikspunkter.

147. Har man nivelleret en Forbindelseslinje af Længde L mellem to givne Fikspunkter med Koterne k_1 og k_2 i n Stykker af Længderne L_1, L_2, $L_3 \ldots L_n$, og er disse Stykkers

Stigninger o_1, o_2, $o_3 \ldots o_n$, fremkommer der kun én Fundamentalligning:

$$o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n = k_2 - k_1,$$

og én Betingelsesligning, som opskreven i det fra Fejlteorien (Side 70) bekendte Skema bliver

	v_1	v_2	v_3	. .	. . .	v_n	q
k	1	1	1	. .	. . .	1	$k_2 - k_1 - [o]$
$\frac{1}{p}$	L_1	L_2	L_3	. .	. . .	L_n	

Normalligningen bliver

$$(L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n)\ k = q,$$

eller, da $L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L$, $\qquad Lk = q,$

Heraf findes nu $k = \frac{q}{L}$ og Rettelserne

$$v_1 = \frac{L_1}{L} q,\ v_2 = \frac{L_2}{L} q \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ v_n = \frac{L_n}{L} q,$$

o: Rettelserne paa de enkelte Strækninger er proportionale med disses Længder.

Har man beregnet Koterne til alle Punkter i den nivellerede Linje, rettes altsaa Endepunktets Kote med q, og Koten til det Punkt, hvis Afstand fra Udgangspunktet er L_p, med $\frac{L_p}{L} q$.

Den tilladelige Størrelse af q maa ligge mellem $3\ \mathrm{m}\sqrt{L}$ og $3\ \mathrm{m}\sqrt{2\,L}$, dersom $k_2 - k_1$ er meget fint bestemt, nærmest den første Grænse, og dersom $k_2 - k_1$ er bestemt med det foreliggende Nivellements Nøjagtighed, nærmest den sidste.

Et Knudepunkt.

Har man nivelleret flere (n), fra givne Fikspunkter udgaaende Linjer, som alle ender i samme Punkt, da faar man for Koten til dette Punkt, som kaldes et *Knudepunkt*, n forskellige Værdier k_1, k_2, ... k_n; disse har ifølge Punkt 145 Vægtene

$$p_1 = \frac{1}{L_1},\ p_2 = \frac{1}{L_2},\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ p_n = \frac{1}{L_n},$$

og den sandsynligste Værdi for Knudepunktets Kote er da ifølge Fejlteoriens Formel (34) bestemt ved

$$k = \frac{p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_n k_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

En saadan Beregning er vist i Fejlteoriens Eksempel 29.

Udjævning af et Nivellementsnet.

148. Har man til Bestemmelse af en Del Nivellementsfikspunkters indbyrdes Højdeforskel nivelleret et større Antal Forbindelseslinjer, end den foreliggende Opgave kræver, opnaar man en Overbestemmelse, der enten kan benyttes alene til Kontrol eller til en Udjævning. Som Regel staar man sig ved at benytte Korrelatudjævning. En saadan Udjævning er vist i Fejlteoriens Eksempel 34 (se ogsaa Ekspl. 39).

Fundamentalligningernes Antal er lig Antallet af lukkede Polygoner, altsaa i Henhold til, hvad der er fremsat Side 30 om Antallet af Vinkelsumsligninger ved en Triangulation, bestemt ved

$$l_1 - p_1 + 1,$$

hvor l_1 og p_1 betyder henholdsvis Antallet af Nivellementslinjer og de ved disse forbundne Punkter. I det nævnte Eksempel er $l_1 = 9$ og $p_1 = 6$, altsaa er der $9 - 6 + 1 = 4$ Fundamentalligninger.

Det ses, at Kilometermiddelfejlen er $\pm$ 4.15 mm, og det skal oplyses, at Linjerne i dette Eksempel kun er nivellerede én Gang igennem med et Instrument, hvis Kikkert forstørrer c. 30 Gange, og paa hvilket Vinkelværdien af en Libelledel er c. 12″, medens Sigterne er indtil 100 m lange.

Knyttes Nivellementsnettet til forud bestemte Fikspunkter, maa man ved Bestemmelsen af Fundamentalligningernes Antal sammen med de nivellerede Linjer medtage saamange af de givne Højdeforskelle, som behøves til de givne Punkters relative Bestemmelse. Ved Udjævningen, som iøvrigt foregaar paa samme Maade, maa der da selvfølgelig ikke tillægges disse Højdeforskelle Rettelser. Havde saaledes i det foran nævnte Eksempel 34 i Fejlteorien A, C og F's Koter, k_A, k_C og k_F, været givne, vilde l_1 være bleven 11 og Fundamentalligningernes Antal 6, nemlig foruden de 4 nævnte f. Eks.

$$+ O_1 - O_7 = k_C - k_A$$

$$\text{og} \quad + O_6 + O_8 = k_F - k_A.$$

Nivellementsnettet kan ogsaa udjævnes ved Elementudjævning,

idet man til Elementer vælger Stigningerne af saamange af de nivellerende Forbindelseslinjer, som er nødvendige til Nettes Bestemmelse. Eksempel 37 i Fejlteorien viser, hvilke Fundamentalligninger, der fremkommer ved Elementudjævning af det foran behandlede Nivellementsnet.

Nivellementsnet af større Udstrækning bør udjævnes gruppevis paa lignende Maade som Triangulationsnet.

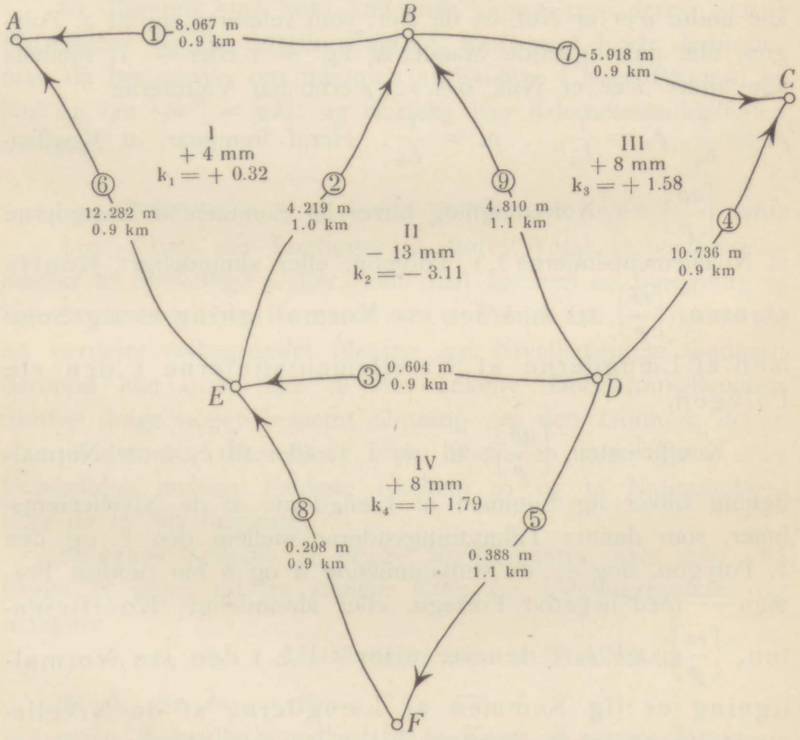


Fig. 153.

Et Nivellementsnets Udjævning direkte af Figuren.

149. Ved Korrelatudjævning af et Nivellementsnet kan man helt undgaa Dannelsen og Opskrivningen af Fundamental- og Betingelsesligninger og direkte opskrive Normalligningerne efter en Figur, paa hvilken man, som vist i Fig. 153, der er den samme som i Fejlteoriens Eksempel 34, kun i større Maalestoksforhold, paa hver enkelt nivelleret Linje opskriver Linjens Nr., den numeriske Værdi af det ved Nivellementet fundne Fald (eller Stigning) i m og Linjens Længde i km, medens Faldets Retning angives ved en Pil; desuden gives hver Polygon et Num-

mer (betegnet med Romertal), og under dette skrives Polygonens Slutfejl i mm.

Normalligningernes Antal bliver da lig Polygonernes Antal.

Ved Betragtning af den 1. Betingelsesligning

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = q_1 ,$$

ses det, at de a'er, som refererer sig til den 1. Polygon, alle er lig + 1 eller — 1, eftersom man ved at gaa rundt i Polygonen i positiv Omløbsretning, gaar med eller mod Pilen, medens alle andre a'er er Nul, at de b'er, som refererer sig til 2. Polygon, alle paa lignende Maade er lig + 1 eller — 1, medens alle andre b'er er Nul, o. s. v., p'erne har Værdierne $p_1 = \frac{1}{L_1}$, $p_2 = \frac{1}{L_2}$, $\ldots p_n = \frac{1}{L_n}$. Heraf fremgaar, at Koefficienten $\left[\frac{aa}{p}\right]$ i 1. Normalligning bliver lig Summen af Længderne af Nivellementslinjerne i 1. Polygon, eller almindeligt: Koefficienten, $\left[\frac{rr}{p}\right]$, til k_r i den $r$te Normalligning er lig Summen af Længderne af Nivellementslinjerne i den $r$te Polygon.

Koefficienten, $\left[\frac{ab}{p}\right]$, til k_2 i 1. eller til k_1 i 2. Normalligning bliver lig Summen af Længderne af de Nivellementslinjer, som danner Tilknytningssiderne mellem den 1. og den 2. Polygon, dog — da vedkommende a og b har modsat Fortegn — med negativt Fortegn, eller almindeligt: Koefficienten, $\left[\frac{rs}{p}\right]$, til k_r i den $s$te eller til k_s i den $r$te Normalligning er lig Summen af Længderne af de Nivellementslinjer, som danner Tilknytningssiderne mellem den $r$te og den $s$te Polygon, dog med negativt Fortegn.

Det vil f. Eks. ses, at man ved Hjælp af disse Regler af Fig. 153 kan danne de i Fejlteorien, Side 72 nederst, angivne Normalligninger.

Af Udtrykkene

$$v_1 = \frac{a_1}{p_1} k_1 = L_1 a_1 k_1 = - L_1 k_1 \quad \text{og}$$

$$v_2 = \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 = L_2 (a_2 k_1 + b_2 k_2) = L_2 (- k_1 + k_2)$$

vil det forstaas, at v_r faas ved at multiplicere L_r med den Korrelat eller med Summen af de to Korrelater, som har samme Indeks som de til Linjen r grænsende Polygoner, idet Korrelatens Fortegn bibeholdes eller forandres, eftersom man ved at gaa rundt i vedkommende Polygon i pos. Omløbsretning, gaar med eller mod Pilen. Det er praktisk at opskrive Korrelaterne under vedkommende Polygons Slutfejl.

Er Figuren stor nok, kan man ogsaa paa denne skrive Rettelserne og de rettede Fald, f. Eks. med Rødt, hvorefter man da bør prøve, om Summen af Faldene i hver Polygon er Nul og om $[pv^2] = [qk]$; og sluttelig kan Kilometermiddelfejlen beregnes.

Bedømmelse af et Dobbeltnivellements Godhed.

150. Hvor der foreligger et større Antal Dobbeltnivellementer af forskellige Linjer, kan man gennem en Beregning af Kilometermiddelfejlen — som vist i Punkt 146 — danne sig en særdeles velbegrundet Mening om Nivellementets Godhed; derimod kan man ikke af det enkelte Dobbeltnivellements Slutfejl drage nogen bestemt Slutning om dets Godhed; denne maa bedømmes ikke alene efter Slutfejlen men ogsaa efter Forskellene mellem Faldene (mellem to og to Nabopunkter) efter de to Nivellementer.

Beregnes Koterne af begge Nivellementer, idet man ved begge er gaaet ud fra samme Kote for Udgangspunktet, og betegner

$k_1, k_2, k_3 \ldots . k_n$ Koterne efter 1. Nivellement

og $h_1, h_2, h_3 \ldots . h_n$ — — 2. —

saa bliver Forskellene mellem de to Koter til samme Punkt

$$\Delta_1 = k_1 - h_1, \; \Delta_2 = k_2 - h_2, \ldots \Delta_n = k_n - h_n,$$

og Størrelsen

$$\Delta\Delta_p = k_p - k_{p+1} - (h_p - h_{p+1}) = k_p - h_p - (k_{p+1} - h_{p+1})$$
$$= \Delta_p - \Delta_{p+1}$$

betegner da Forskellen mellem Faldene fra Punkt p til Punkt $p + 1$ efter første og efter andet Nivellement.

Middelværdien for Forskellen mellem Faldene bliver da ifølge Formel (9)[1]) i Fejlteorien

[1]) Anvendelsen af Formlen er dog ikke fuldt berettiget, da de enkelte Fald ikke er direkte observerede Størrelser, og da alle Punkter ikke har samme Afstand.

$$m = \pm \sqrt{\frac{[(\Delta\Delta)^2]}{n}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

naar der er n Fald og altsaa $n + 1$ Punkter.

Er begge Nivellementer udførte med samme Nøjagtighed, bliver

$$\mu = \pm \frac{m}{\sqrt{2}}$$

et Udtryk for Middelfejlen paa Faldene efter det enkelte Nivellement.

Ved almindelige tekniske Nivellementer vil man uden Vanskelighed kunne holde Middelfejlen paa Faldene (μ) under 2 mm; forekommer der enkelte større Afvigelser mellem Faldene efter de to Nivellementer, bør det Punkt, som foranlediger Fejlen, udskydes forud for Middelfejlsberegningen, hvilket da særlig maa tages i Betragtning ved Bedømmelsen af Nivellementet. Eksempel 40 viser en saadan Beregning af Middelfejlen paa Faldene.

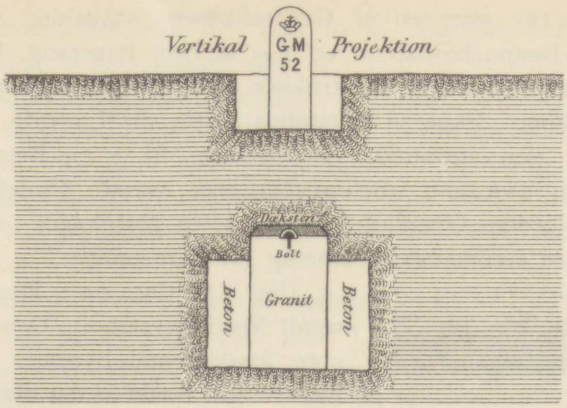
§ 32. Nivellements-Fikspunkter.

151. En Opgave, som i vor Tid ofte foreligger, er at forsyne et vist Terræn med Nivellements-Fikspunkter, som skal bevares i Fremtiden for at kunne benyttes som Udgangspunkter for tekniske Arbejder. Særlig Betydning faar Opgaven i Byerne, hvor saadanne Fikspunkter er uvurderlige for de forskellige Administrationsgrene, saasom Brolægnings-, Vand-, Belysnings-, Brand- og Kloakvæsen m. fl.; men efterhaanden vil Fordringen om saadanne Fikspunkter sikkert strække sig til tættere bebyggede Landsbyer og Landstrækninger. Til et Fikspunkt maa stilles Fordring om, 1) at det er konstrueret saaledes, at det Punkt, hvis Kote angives, er bestemt defineret, og 2) at Punktet er sikret paa en saadan Maade, at det ikke kan forrykkes.

Fikspunkterne kan være Jordpunkter, og da enten over- eller underjordiske, eller de kan betegnes ved Bolte, som indmures i fundamentale Bygninger. Som Typer skal her beskrives tre.

Fig. 154 viser et af den danske Gradmaalings Fikspunkter, som er anbragt langs en Del Landeveje[1]). »Punktet bestaar af en vertikal Broncebolt med halvkugleformet Hoved, hvis øver-

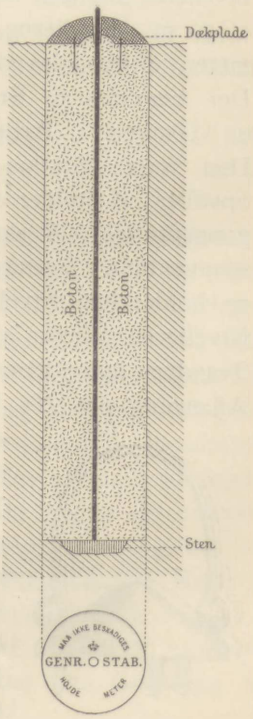
[1]) Zachariaes Beskrivelse.



c. 1:33 s. St.

Fig. 154.

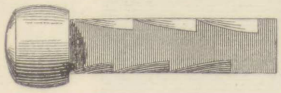
ste Punkt betegner Mærket. Boltens Stilk er indstøbt i en stor Granitsten, hvis Bundflade ligger omtrent 1.5 m under Jordoverfladen. Stenen er faststøbt i Beton, dens øverste Flade dækkes af en løs Flisesten, i hvis Underflade, der er dannet en Udhuling, som omslutter Boltehovedet, og hvis øverste Flade ligger 0.5 til 1 m under Jordoverfladen. Det hele overdækkes med Jord. For at Stedet kan genfindes, anbringes en Mærkesten nøjagtig to Alen (1.255 m) fra Punktet og med Forfladen vendende mod dette. Mærkestenen er faststøbt i Beton, og dens øverste Flade, der rager 0.2 til 0.3 m op over Jorden, er halvkugleformet afrundet. Dens Underflade ligger kun 0.2 til 0.3 m under Jorden, og Stenen er derfor underkastet smaa Forandringer ved Hævning og Sænkning under Paavirkning af Frost og Tø. Disse Forandringer er imidlertid ikke større, end at Stenens øverste Flade afgiver et for alle praktiske Formaal tilstrækkelig nøjagtigt Nivellementspunkt, der kan benyttes af enhver, der skal udføre et lokalt Nivellement«.



c. 1:18 s. St.

Fig. 155.

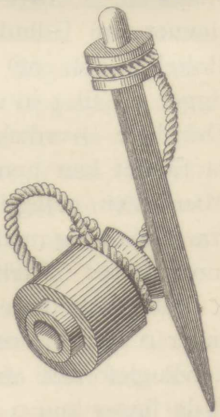
Fig. 155 viser en af Generalstabens saakaldte »Nummerbolte«. Denne bestaar af en 1.25 m lang Jernstang, hvis øverste afrundede Ende er overtrukken med 1 mm tykt Lag Messing eller Kobber. Stangen faststøbes i hele sin Længde, dog saaledes, at den afrundede Endeflade er fri, i en Betoncylinder af 21 cm Tværsnit. Betoncylinderens øverste Endeflade, der ligger i Jordens Overflade, dækkes af en Metalplade, der i Midten har en Gennemgangsaabning for Jærnstangen.



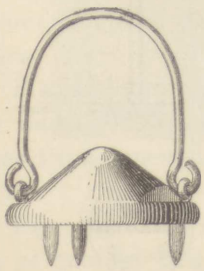
c. 1:4 s. St.
Fig. 156.

Fig. 156 viser en i Hamborg anvendt Nivellementsbolt. Den indmures i en fundamental Bygning i Cement. Det øverste Punkt af det runde Hoved betegner Punktet.

152. Nivellementet udføres som *Præcisions Nivellement.* Der anvendes fine Instrumenter, f. Eks. med Vinkelværdien af en Libelledel 6—10″, Forstørring 40—30 Gange, Objektivdiameter 50—40 mm og Brændvidde c. 40 cm, og der nivelleres fra den nøjagtige Midte med Sigter paa ikke over c. 50 m. Stadierne, der er fint inddelte, f. Eks. i halve Centimeter, eftermaales daglig, og Længdefejlen tages i Beregning. Der benyttes to Stadieholdere, *A* og *B*, og Gangen i Arbejdet er da saaledes: Den første Station vælges, Instrumentet opstilles, *A* holder sin Nivellerstang i Udgangspunktet, *B* skridter fra dette til Instrumentet og ligesaa mange Skridt videre; nu holder han Nivellerstangen paa Jorden. Nivelløren aflæser paa *A*'s Stang mellem Traadene og undersøger, om han faar samme Aflæsning paa *B*'s Stang, som om fornødent flyttes frem eller tilbage, til dette bliver Tilfældet. *B* rammer nu en Jærnpæl med halvrundt Hoved (Fig. 157) i Jorden og holder Stadiet paa denne, eller han sætter det paa en i Jorden nedtrykket Fodplade (Fig. 158), hvilken sidste dog kun bør benyttes, hvor Pæle ikke kan nedrammes. Nu foretager Nivelløren de sædvanlige Aflæsninger paa begge Stadier, og i Reglen be-



c. 1:5 s. St.
Fig. 157.



1:4 s. St.
Fig. 158.

nyttes Vendestadier, saa der faas to af hinanden uafhængige Nivellementer, begge i Meter eller et i Fod og et i Meter. Paa denne Maade fortsættes Arbejdet; kun maa Nivelløren i den sidste Station tage Opstilling lige langt fra de to Stadier.

Det vil ofte være umuligt at anbringe et Stadie ovenpaa en i en Mur indsat Nivellementsbolt, f. Eks. fordi Fremspring, Gesimser e. l. forhindrer det; man anvender da et kort Stadie af Træ, Glas eller Metal.

Der arbejdes kun under de bedste Vejrforhold, altsaa ikke i Blæst eller uklart Vejr, eller naar Luften sitrer. Derfor arbejdes der ved Midsommertid i Reglen kun i de første Timer efter Solopgang og i de sidste Timer før Solnedgang. I Byerne vil Trafikken oftest yderligere indskrænke Arbejdstiden til de første Morgentimer.

Eksempel 41 viser det af Gradmaalingen anvendte Nivellementsskema; da der imidlertid ved dette Nivellement er benyttet Libelleaflæsninger, hvis Anvendelse vil blive omtalt i § 33, vil dette Eksempel blive nærmere forklaret i denne §.

Hver enkelt Forbindelseslinje mellem to Fikspunkter nivelleres frem og tilbage, hvorefter de 4 Nivellementers Middeltal beregnes.

Herefter foretages en Udjævning (i Reglen gruppevis) af det opstaaede Nivellementsnet i Overensstemmelse med det i Punkterne 148 og 149 fremsatte.

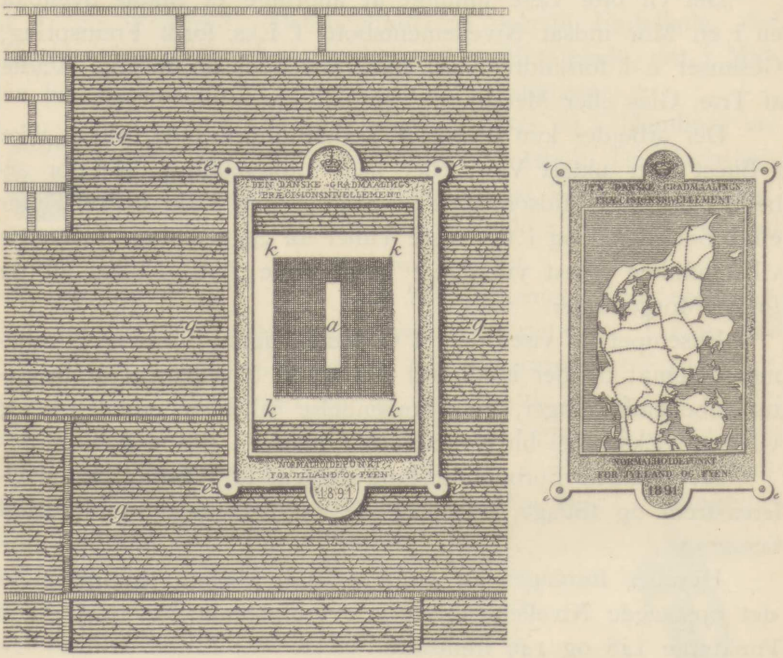
153. Koterne til alle Landets Fikspunkter bør angives i Forhold til samme Udgangspunkt, Normal Nul, der saa nær som muligt bør falde sammen med Middelvandstanden ved hele Landets Kyst; men denne er ikke nogen absolut Størrelse, idet den kan variere gennem Aarene. I 1902 beregnede imidlertid Generalstaben et Normal Nul paa Grundlag af Meterorologisk Instituts 10 selvregistrerende Vandstandsmaaleres[1]) Resultater indtil 1900. Dette »*Normal Nul, 1900*« blev tiltraadt af Gradmaalingen og vil fremtidig blive anvendt af begge de nævnte Institutioner uanset senere Vandstandsbestemmelser, og det er da ganske naturligt at angive alle andre Fikspunkters Koter i Forhold til dette Normal Nul.

I den østlige Gavl af Aarhus Domkirke er indlagt et Normal Højdepunkt, som i 1874 blev fastsat paa Grundlag af

[1]) Vandstandsmaalere findes i Frederikshavn, Hirshals, Aarhus, Fredericia, Esbjerg, Slipshavn, Korsør, Gjedser, Hornbæk og Kjøbenhavn.

Vandstandsobservationerne i Aarhus Havn som gældende for Fyn og Jylland.

Dette Normalhøjdepunkts Kote over »Normal Nul, 1900« er 5.6150 m. Punktet, der er vist paa Fig. 159, er af en fast



1 : 10 s. St.

Fig. 159.

og urokkelig Beskaffenhed, og dets Bevarelse er yderligere sikret ved en Kreds af Kontrolpunkter, der dels er indlagte i andre Dele af Kirkens Granitfundament, dels er anbragte i umiddelbar Nærhed af Kirken som underjordiske Hovedpunkter i særlige Granitsten. I den polerede Granitsten, *kk*, er indlagt en Sølvplade, *a*, i hvilken der er indridset en Maalestok, hvis Nulpunkt svarer til Normalhøjdepunktets Kote. Stenen og Sølvpladen dækkes af flere Lag Filt m. m., og det hele dækkes atter af den til højre viste Kobberflade.

§ 33. Nivellement med hældende Sigter.

154. Nivellement med Libelleaflæsning. Ved Præcisionsnivellementer med Instrumenter med fine Libeller tager det lang Tid, inden Libelleboblen kommer i Ro, efter at man

har skruet paa Finskruen; dels som Følge heraf, og dels fordi man kan aflæse Stillingen af Libelleboblen nok saa nøjagtigt, som man kan indstille denne, benytter man Nivellement med Libelleaflæsning, ved hvilket Libelleboblen kun bringes til at spille omtrentlig ind.

Kaldes Aflæsningen paa Libellens mod Okularet vendende Ende α, paa den mod Objektivet vendende Ende β, bliver Udslaget

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \text{ Libelledele};$$

og, naar p er Vinkelværdien af en Libelledel udtrykt i Sekunder, bliver Libelleaksens Hældning

$$v = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\, p \text{ Sekunder.}$$

Til Aflæsningen maa altsaa, naar Sigtevidden er l, adderes en Korrektion, som med Fortegn er udtrykt ved

$$k = l\frac{v}{\omega} = \tfrac{1}{2} l \frac{\alpha - \beta}{\omega} p\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

thi naar $\alpha > \beta$, gaar Sigtet for lavt, ɔ: Korrektionen er positiv, og naar $\alpha < \beta$, — — - højt, ɔ: — - negativ.

Er u den Sigtevidde, som svarer til Korrektionen 1 mm, naar $\alpha - \beta = 1$, bliver Korrektionen

$$k = \frac{l}{u}(\alpha - \beta) \text{ mm} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

u findes af (101); er f. Eks. $p = 8''$, faas

$$1 \text{ mm} = \tfrac{1}{2} u \frac{8}{\omega},$$

hvoraf

$$u = 51.6 \text{ m}.$$

Man maa altsaa paa hver enkelt Aflæsning anbringe en Korrektion efter (102), idet Sigtevidden, l, bestemmes ved Distancemaaling.

Forsaavidt man nivellerer fra den nøjagtige Midte med Sigtevidden l, vil, naar Aflæsningerne paa Libellen ved Tibagesigtet er α_1 og β_1 og ved Fremsigtet α_2 og β_2, medens Aflæsningerne paa Stangen er henholdsvis a og b, Stigningen i Stationen være

$$h = a + \frac{l}{u}(\alpha_1 - \beta_1) - (b + \frac{l}{u}(\alpha_2 - \beta_2)).$$

$$= a - b + \frac{l}{u}(\alpha_1 - \alpha_2 - (\beta_1 - \beta_2)) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

I Eksempel 41, der allerede er omtalt Side 119, er anvendt en Libelle med $p = 8''$; til Korrektionen $^1/_2$ mm for $a - \beta = 1$ svarer da $u = 25.8$ m, hvorved Korrektionen i Halvmillimeter for hver enkelt Opstilling kan beregnes; den bliver f. Eks. for Opstilling 3

$$\frac{44.6}{25.8}((10.6 - 10.7) - (10.9 - 10.7)) = -0.5 = \times 9.5 \text{ Halvmillimeter.}$$

Lægtekorrektionen er beregnet saaledes: Ved Udmaaling af Lægtemeteren (ɔ: Afstanden mellem to Metermærker) har Lægte Nr. 1 som Middeltal af to Maalinger givet 1001.03 mm; men da Normalmeterens Længde er

$$1 \text{ m} + 0.011\ (t - 18^\circ) \text{ mm},$$

hvor t er den forhaandenværende Temperatur i Centigrader, som her er 6.1, maa den udmaalte Afstand formindskes med 0.13 mm, hvorved den bliver 1000.90 mm. Lægte Nr. 2 giver paa lignende Maade 1000.88, og Middeltallet bliver 1000.89.

Den totale Stigning 3.7065 m er altsaa for lille, den maa forøges med 0.89 mm pr. Meter, eller ialt 3.3 mm, hvorved den bliver 3.7098 m, altsaa Faldet $\times$ 6.2902 m.

I Forbindelse med Libelleaflæsning har man, f. Eks. i Holland, benyttet Indstilling af Sigtet paa Midten af et Felt paa Stadiet, fordi en saadan Indstilling er nøjagtigere end en vilkaarlig Aflæsning i Feltet. Man indstiller da ved Hjælp af Finskruen den vandrette Traad nøjagtig paa Midten af det Felt, i hvilket det vandrette Sigte vilde træffe, og foretager derefter Libelleaflæsning til Bestemmelse af Korrektionen.

155. Nivellement med Stampfers Nivellerinstrument og hældende Sigter staar paa Grænsen mellem geometrisk og trigonometrisk Nivellement. Det kan med Fordel anvendes til foreløbige Nivellementer, som ikke kræver nogen særlig stor Nøjagtighed. Fordelen ved denne Nivellementsmetode er navnlig, at man kan arbejde med ligesaa lange Sigter i bakket som i fladt Terræn, og at man saaledes kan nøjes med faa Opstillinger, og det saa meget mere, som man kan tage længere Sigter end sædvanlig, da Indstillingen paa Sigteskiven kan udføres noget nøjagtigere end Aflæsningen paa Stadiet.

Nivellementet kan opskrives som vist i Eksempel 42, hvor h, o og u betegner Aflæsningen paa Mikrometret svarende henholdsvis til vandret Sigte, Sigtet rettet mod øverste og Sigtet

rettet mod nederste Sigteskive. *O* og *U* betyder henholdsvis øverste og nederste Sigteskives Stilling paa Nivellerstangen.

§ 34. Fladenivellement.

156. Forud for Jordarbejder, Dræningsarbejder, Engvandingsanlæg, Planeringsarbejder o. l. maa der altid gaa et Fladenivellement. Ligesom man ved Linjenivellementet maa bestemme Højden af saa mange Punkter i Linjen, at dennes Form tydelig kan gengives, saaledes maa man ved Fladenivellementet bestemme saa mange Punkter af vedkommende Terræns Overflade, at dettes Form kan tydelig gengives. Grafisk fremstilles Højdeforholdene — som allerede i Indledningen angivet — ved *ækvidistante Horisontalkurver*, som er Projektioner af Skæringslinjerne mellem den naturlige Jordoverflade og Kugleflader, som er koncentriske med den den vedkommende Del af Ellipsoidefladen erstattende Kugleflade, og hvis Radier vokser med en konstant Størrelse, *Ækvidistancen,* der efter Terrænets Form og Nivellementets Formaal kan være forskellig, f. Eks. $^1/_2$, 1, $^5/_2$ eller 5 Meter. Ved Fladenivellementer af større Arealer bør Kurvernes Højde angives over Normal Nul; men ved smaa, lokale Fladenivellementer kan man selvfølgelig særdeles vel regne dem ud fra et vilkaarligt Grundplan f. Eks. Vandstanden i en til Terrænet grænsende Sø.

Fladenivellementet kan udføres indirekte eller direkte.

Den indirekte Metode.

157. For at kunne fremstille Højdekurverne bestemmer man ved Nivellement Højderne af et passende Antal Punkter, som er jævnt fordelte og saaledes beliggende, at de let kan afsættes saavel paa Kortet som i Marken. Punkterne vælges bedst paa rette Linjer, som — naar man har tegnet dem forud paa et Kort over vedkommende Terræn — let kan afsættes i Marken derved, at man indmaaler deres Skæringspunkter enten med faste Linjer i Marken (Skel e. l.) eller med Polygonsider eller Maalelinjer. Linjerne bør helst lægges nogenlunde i de Retninger, i hvilke de stærkeste Fald forekommer.

Eksempel 1. I Fig. 160 tænkes de punkterede Linjer fastbundne ved deres Skæringspunkter med de ved den foregaaende Opmaaling bestemte Polygonsider og Maalelinjer (paa

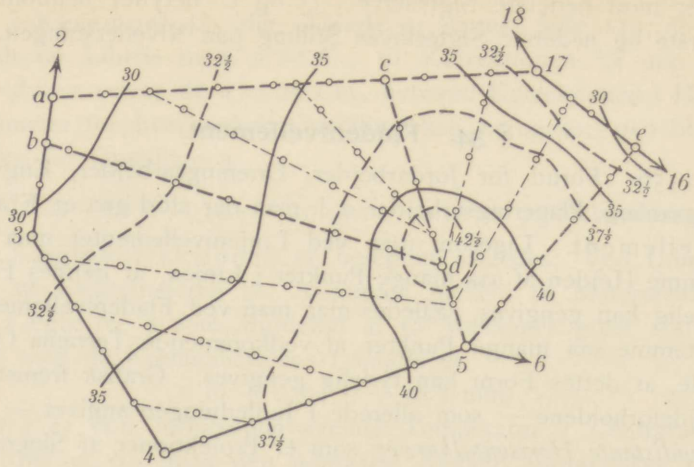


Fig. 160. Ækvidistancen = 2½ m.

Fig. sværere optrukne). I disse Linjer og i de tynde punkterede Linjer indmaales eller efter Omstændighederne indskridtes de omkredsede Punkter, som nivelleres.

Eksempel 2. I Fig. 161 tænkes de parallele punkterede Linjer fastbundne ved deres Skæringspunkter med Arealets Grænser, idet man udad Skellene maaler Skæringspunkternes Afstande fra Skelhjørnerne. I de punkterede Linjer nivelleres de omkredsede Punkter. Undertiden kan det være nødvendigt paa enkelte Steder, hvor Stigningerne er særlig stærke, at indskyde flere Linjer som f. Eks. den anden Linje fra neden paa Figuren.

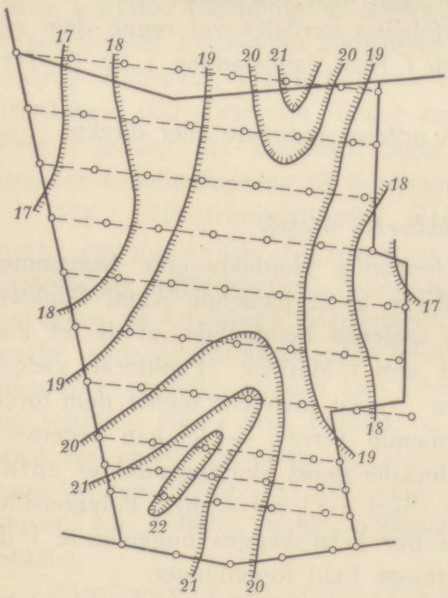


Fig. 161.

Eksempel 3. Naar Forholdene tillader det — og navnlig naar der paa Basis af Fladenivellementet skal foretages en Jordmasseberegning — er det praktisk at

lade de Punkter, hvis Højder skal bestemmes, være Hjørner i et Kvadratnet, som lægges over hele Arealet. Drejer det sig om Kurvelægning af et større Areal, maa dette deles i flere Afsnit, som behandles hvert for sig.

Drejer det sig derimod kun om et mindre Areal, udstikker man en Linje midt igennem Terrænet i dettes længste Udstræk-

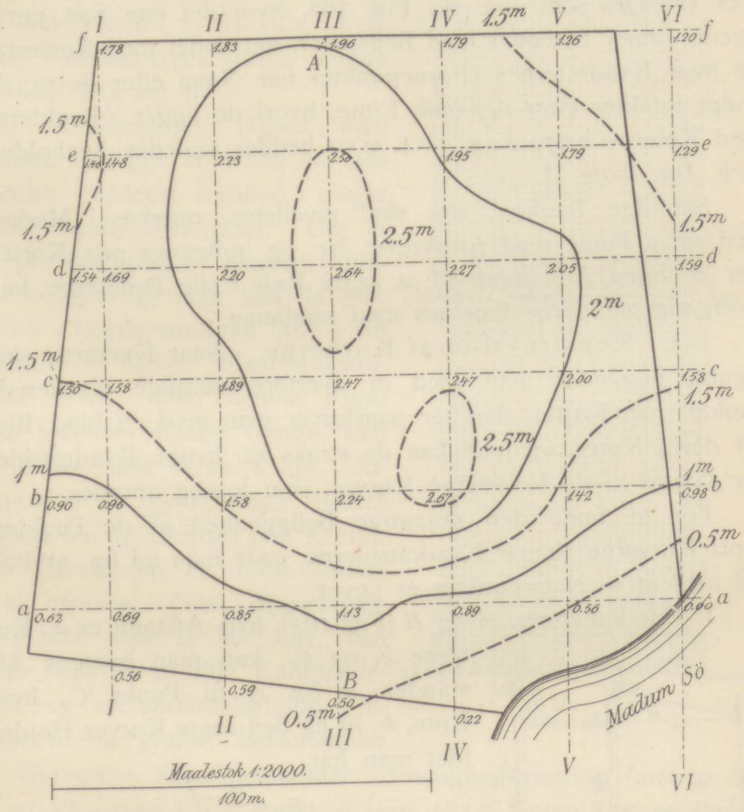


Fig. 162.

ning. Derpaa maaler man henad Linjen og afsætter i denne Punkter med indbyrdes ligestore Afstande (lig Kvadratsiden); samtidig knytter man Linjen ved nogle Perpendikulærer eller paa anden Maade til sikre Terrænpunkter. I de afsatte Punkter oprejser man til begge Sider Perpendikulærer, ud ad hvilke man afsætter de samme Afstande som ovenfor. Perpendikulærerne kan her være flere hundrede Meter. Herved er da Arealet inddelt i Kvadrater og langs Grænserne tillige nogle Paralleltrapezer. Fig. 162 viser et Kort over en Mark paa

henved $2^1/_2$ Hektarer med indlagte Højdekurver. Det her ved de stiplede Linjer viste Kvadratnet tænkes afsat i Marken paa Linjen AB, hvis Beliggenhed er bestemt derved, at man langs Grænserne har maalt Afstandene fra A til det nordvestligste og fra B til det sydvestligste Hjørne af Arealet. Samtlige Punkter (Kvadraternes Hjørner) betegnes paa en tydelig Maade, f. Eks. saaledes som vist paa Fig. 162, hvor det ene Sæt punkterede Linjer betegnes med Bogstaver, det andet med Romertal, og hvor Kvadraternes Hjørnepunkter har Navn efter de to, de andre Punkter efter den ene Linje, hvori de ligger. Punkterne med Koterne 2.67, 2.23, 1.54, 0.59 hedder saaledes henholdvis IVb, IIe, d og II.

Samtlige Punkter, der skal nivelleres, mærkes i Marken med smaa Pinde med paaskrevet Nr. og indtegnes paa Kortet. Der er ingen Anledning til at sætte Pæle i alle Punkterne, kun Overgangspunkterne forsynes med saadanne.

158. Konstruktion af Kurverne. Naar Kurverne skal tegnes, begynder man med at overføre samtlige nivellerede Punkter paa Kortet, derefter paaskriver man med en blød Blyant deres Koter, og man kan da straks se, hvilke Kvadratsider der skæres af de forskellige Kurver, som løselig antydes.

For at finde den nøjagtige Beliggenhed af de Punkter, hvori Kurverne skærer Kvadratsiderne, gaar man ud fra, at Faldet mellem to Nabopunkter er jævnt.

I. Har Punkterne A og B (Fig. 163), hvis Afstand er a, Koterne k_1 og k_2, kan man beregne Afstanden x fra A til Punkt C, hvis Kote, k, er lig den søgte Kurves Højde, idet man har

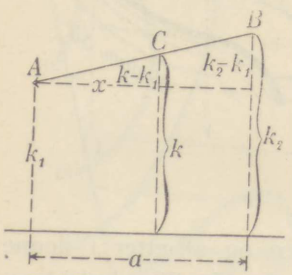


Fig. 163.

$$\frac{x}{a} = \frac{k - k_1}{k_2 - k_1},$$

altsaa

$$x = a \frac{k - k_1}{k_2 - k_1},$$

hvorved det søgte Punkt i Kurven kan afsættes paa Kortet.

Stundom skærer to eller flere Kurver mellem de samme to Nabopunkter. Imellem Punkterne IIIa og IIIb i Fig. 162 ligger saaledes en $1^1/_2$ Meters og en 2 Meters Kurve; disses Afstande fra IIIa beregnes af

$$x_1 = 30 \text{ m} \frac{1.50 - 1.13}{2.24 - 1.13} = 30 \text{ m} \frac{0.37}{1.11} = 10.0 \text{ m}$$

og $$x_2 = 30\text{ m}\,\frac{2.00-1.13}{2.24-1.13} = 30\text{ m}\,\frac{0.87}{1.11} = 23.5\text{ m}$$

II. Langt hurtigere og tilstrækkelig nøjagtigt er det at bestemme det søgte Punkt ved en Konstruktion, som let vil forstaas af Fig. 164, der viser Bestemmelsen af de ovenfor beregnede Størrelser x_1 og x_2 samt af den Afstand x_3 fra III a, i hvilken 1 Meterkurven skærer Linjen mellem III a og III.

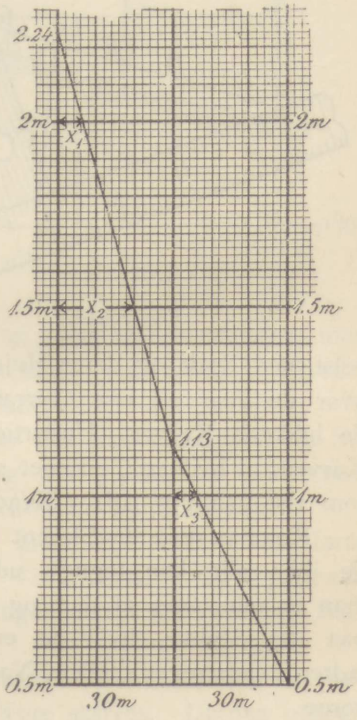


Fig. 164.

Kvadratsiden tegnes med samme Længde, som den har paa Kortet, Højderne derimod i meget stort Maalestoksforhold. Det er meget bekvemt at benytte Millimeterpapir, og man kan da passende i Højderetningen lade 5 cm betyde 1 Meter (Maalestoksforhold 1:20). Den samme Figur kan benyttes mange Gange, kun forandres den skraa Linje. Afstandene x_1 og x_2 tages direkte i Passeren og afsættes paa Kortet.

III. Endnu en tredje Maade skal nævnes. Naar Maalestoksforholdet ikke er for lille, kan man benytte en lille Kantmaalestok og en almindelig lille Trekant til en grafisk Bestemmelse af Kurvernes Skæringspunkter. Fremgangsmaaden forstaas let af et Eksempel. Har Punkt A (Fig. 165 a) Koten 8.00 og Punkt B Koten 10.75, skæres Forbindelseslinjen af 9 og 10 Meters Kurverne. Kantmaalestokken lægges da saaledes, at Punkt 10.75 paa denne ligger i B samtidig med, at Trekanten ligger til Kantmaalestokken med den ene Katete, naar den anden gaar gennem Punkt 8.00 paa denne samt Punkt A, derefter forskydes Trekanten langs Maale-

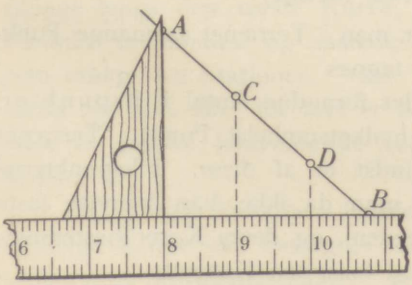


Fig. 165 a.

stokken, de to punkterede Linjer gennem 9 og 10 trækkes langs Kateten, og de to Kurvers Skæringspunkter *C* og *D* med Linjen *AB* er bestemte.

Er *AB* mindre end Afstanden mellem de to Punkter paa Kantmaalestokken, udføres Konstruktionen som vist i Fig. 165b, idet de punkterede Linjer trækkes langs Hypotenusen.

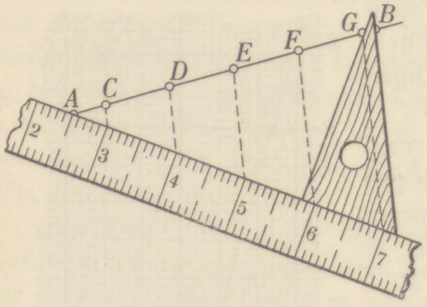


Fig. 165b.

Naar man har afsat alle Forbindelseslinjernes Skæringspunkter med Kurverne, tegnes disse med Blyant, idet man giver dem saa jævne Former som muligt. Naar de staar skarpt, trækkes de op, helst med Rødt og deres Højder skrives med samme Farve, der hvor de gaar ud over Terrænets Grænser eller ved Siden af de lukkede Kurver. Undertiden tegner man paa den Side af Kurven, til hvilken Terrænet stiger, en lille Skravering, saaledes som vist paa Fig. 161. Kvadratnettet slettes ud.

Kommer paa en Skrænt Kurverne til at ligge saa tæt, at de ikke alle kan tegnes, udelader man en eller flere af dem og tegner paa det Stykke, hvor de er udeladte, Tværstreger mellem Nabokurverne.

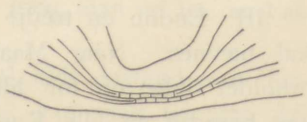


Fig. 166.

Et Eksempel herpaa ses i Fig. 166.

Den direkte Metode.

159. Ved denne opsøger man i Terrænet saamange Punkter af Kurverne, at disse kan tegnes.

Man bestemmer da først det fornødne Antal Fikspunkter, o: saamange, at man fra et hvilketsomhelst Punkt i Terrænet kan tage vandret Sigte til mindst et af disse. Fikspunkterne forsynes med Pæle, dersom man da ikke kan benytte faste Terrænpunkter (Hussokler, Vejsten), og deres Koter bestemmes ved et særligt Nivellement med fornøden Kontrol.

Opsøgningen af Punkterne i Kurverne begynder fra en Ende af Terrænet; man opstiller Nivellerinstrumentet saa

højt som muligt, naar man skal kunne faa vandret Sigte til Nivellerstangen staaende i det laveste Fikspunkt, og saaledes at man kan overse saa stor en Del af Terrænet som muligt. Sigteplanshøjden vil da i Henhold til (94), naar Fikspunktets Kote er k (Fig. 167), og den tilsvarende Aflæsning er a, være bestemt ved

$$s = k + a.$$

Er endvidere Koten til Punkterne i den Kurve, som skal bestemmes, k_1, bliver den dertil svarende Aflæsning

$$a_1 = s - k_1.$$

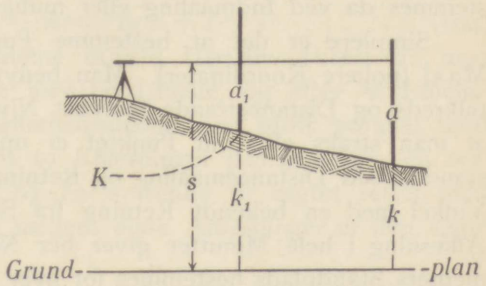


Fig. 167.

Det Punkt, som ligger i Højden a_1, paa Nivellerstangen, mærkes med en lille Sigteskive, som sættes paa Siden af Nivellerstangen, saaledes at dennes Forflade er fri.

Man klarer sig, hvilke Kurver der kan indlægges fra Stationen; er f. Eks. $k = 20.2$ m og $a = 3{,}7$ m, vil man kunne indlægge 21, 22 og 23 Meters Kurverne fra Stationen.

Medhjælperen søger nu at finde et Punkt i den første Kurve, idet han efter Maalerens Vink bevæger sig opad eller nedad i Terrænet med Nivellerstangen, indtil det vandrette Sigte træffer dennes Sigteskive.

Forsaavidt Punktet ikke indmaales straks, mærkes det med en lille Pind, paa hvilken dets Kote skrives. Derpaa opsøges det næste Punkt i Kurven og saa fremdeles, indtil man har bestemt Kurvens Beliggenhed paa saa lang en Strækning, som Terrænforholdene eller Afstanden tillader. Medhjælperen gaar tilbage langs den næste Kurve, i hvilken ligeledes en Række Punkter bestemmes, og saaledes fortsættes Arbejdet saa langt som muligt fra Stationen. Om Stangen opstilles nogle Centimeter for højt eller for lavt er uden Betydning, da denne Størrelse er ganske forsvindende ved Siden af Terrænets Ujævnheder.

De opsøgte Punkter i Kurverne maa ligge saa tæt, at den virkelige Kurve kan betragtes som sammenfaldende med Punkternes rette Forbindelseslinjer; de kan altsaa ligge desto længere fra hinanden, jo fladere Kurven er.

Af Hensyn til Punkternes Indmaaling kan det være

bekvemt at opsøge disse paa nogle i Forvejen udstukne Linjer, som da bestemmes som fremsat i Punkt 157; men det er her af særlig Betydning, at de lægges i de Retninger, som har de stærkeste Fald. Punkternes Beliggenhed i Linjerne bestemmes da ved Indmaaling eller muligvis ved Skridtning.

Simplere er det at bestemme Punkterne ved Sigte og Maal (polære Koordinater). Man benytter da et med Horisontalkreds og Distancetraade forsynet Nivellerinstrument, saaledes at man straks efter, at Punktet er opsøgt, kan bestemme Afstanden ved Distancemaaling og Retningen ved Maaling af dens Vinkel med en bekendt Retning fra Standpladsen. En enkelt Aflæsning i hele Minutter giver her Nøjagtighed nok. Instrumentets Standplads bestemmes for hver Station f. Eks. ved Side- eller Tilbageskæring eller maaske lettere derved, at man tager Opstilling i Polygonsider eller Maalelinjer. Naar Markarbejdet er færdigt, indkonstrueres Stationerne paa Kortet (uden Beregning af Koordinater), og derpaa indkonstrueres Kurvernes Punkter ved Transportør og Kantmaalestok.

Kurvelægningen udføres særdeles bekvemt ved Maalebord, naar Kikkertlinealen er indrettet til Nivellering og Distancemaaling, idet man da straks afsætter Retningen og Afstanden og derved selve Punktet (Saml. 1. Afsnit, Punkt 83, Side 121). Denne Fremgangsmaade er navnlig fortrinlig ved topografiske Arbejder, og den benyttes da ogsaa altid af Generalstaben.

---

9. Kapitel.

Trigonometrisk Højdemaaling.

§ 35. Trigonometrisk Højdemaaling paa korte Afstande.

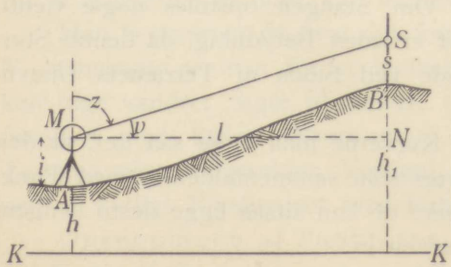


Fig. 168.

160. Til Bestemmelse af Højdeforskellen mellem to Punkter A og B med Afstanden l (Fig. 168) kan man benytte en med Højdekreds forsynet Theodolit, som opstilles i A, og en med Sigteskive, S, forsynet Stang, som op-

stilles i B. Man maaler da den Vinkel v, som Sigtet MS danner med den vandrette Plan. Er h og h_1 henholdsvis A og B's Højde over den matematiske Jordoverflade, KK, i Instrumentets Højde over A og s Sigteskivens Højde over B, bliver

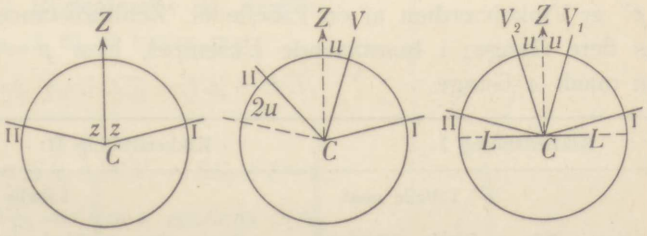
$$h_1 - h = l \operatorname{tg} v + i - s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

For at man skal kunne maale Højdevinklen v, maa Kikkerten være forsynet med en Libelle, og efter at Libelleaksen ligesom ved Nivellerinstrumenter er gjort parallel med Sigtelinjen, tager man da to Aflæsninger paa Kredsen, én svarende til vandret Sigte og én svarende til Sigtet rettet mod Sigteskiven; Differensen mellem disse Aflæsninger er den søgte Højdevinkel.

I Almindelighed maaler man dog ikke Vinkel v men dens Komplement, Zenithdistancen, z, og (104) ændres da til

$$h_1 - h = l \cot z + i - s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

161. Til Maaling af Zenithdistancer benyttes en med Højdekreds forsynet Theodolit. Forestiller paa Fig. 169 CZ



a, b, c.

Fig. 169.

Retningen mod Zenith (Vertikalen), CV Vertikalaksen og Linjerne CI og CII Projektionen saavel af Sigtelinjen som af Viserlinjen paa Kredsen, vil det forstaas, at Zenithdistancen Z kan bestemmes saaledes: Sigtet rettes mod Sigteskiven, og Aflæsning foretages paa Højdekredsen, Kikkerten slaas igennem, Instrumentet drejes om Vertikalaksen, Sigtet indstilles paany, og der aflæses. Betegnes den Kikkertstilling, i hvilken Aflæsningen vokser, naar Sigtet sænkes, ved I, og betegner vi ogsaa den tilsvarende Aflæsning ved I, den anden ved II, faas

$$z = \frac{I - II}{2}.$$

Fig. 169b viser, at naar Vertikalaksens Hældning mod Lodlinjen er u, fremkommer der ogsaa en Fejl u paa Zenithdistancen, som bliver for lille, naar Vertikalaksen hælder mod Sigtepunktet. Det er derfor ganske nødvendigt, at Vertikal-

aksen staar nøjagtig lodret i Sigtelinjens Retning, hvorfor Theodoliten maa være forsynet med en Libelle, hvis Akse viser i Kikkertens Retning, og denne Libelle maa bringes til nøjagtig Indspillen, hver Gang Sigtet indstilles; thi som vist paa Fig. 169c, hvor LL er den vandret stillede Libelleakse, medens CV_1 og CV_2 er Vertikalaksen i de to Stillinger, vil da $I—II$ angive den dobbelte Zenithdistance, selv om Libelleaksen ikke er vinkelret paa Vertikalaksen men danner en Vinkel u med denne.

Endnu nøjagtigere Resultat opnaas ved Aflæsning paa Libellen; er Libelleaflæsningerne svarende til I a_I og β_I (henholdsvis mod Okular og mod Objektiv) og til II a_{II} og β_{II}, bliver Zenithdistancen

$$z = \frac{1}{2}\left\{I + \frac{a_I - \beta_I}{2} p'' - \left(II - \frac{a_{II} - \beta_{II}}{2} p''\right)\right\}$$

eller

$$z = \frac{I - II}{2} + \frac{a_I + a_{II} - (\beta_I + \beta_{II})}{4} p'',$$

hvor p'' er Vinkelværdien af en Libelledel. Zenithdistancen bør maales flere Gange; i hosstaaende Eksempel, hvor $p = 16.3''$, er den maalt 4 Gange.

Kikkertstilling I.					Kikkertstilling II.				
			Libelle mod					Libelle mod	
	Non. 1.	Non. 2.	Okular	Objektiv		Non. 1.	Non. 2.	Okular	Objektiv
o	′ ″	′ ″	a_I	β_I	o	′ ″	′ ″	a_{II}	β_{II}
21	14.50	14.50	6.4	1.0	198	20.10	20.10	4.8	2.4
58	15.50	16.10	4.9	2.4	235	22.00	21.50	5.6	1.8
352	28.00	29.30	6.8	0.6	169	35.30	35.40	5.9	1.5
57	45.30	46.00	7.4	0.0	234	53.00	52.50	6.9	1.4

Herefter er de 4 Værdier for Zenithdistancen.

$$z_1 = \frac{381^\circ 14' 50'' - 198^\circ 20' 10''}{2} + \frac{11.2 - 3.4}{4} 16.''3.$$

$z_1 = 91^\circ 27' 51.''8$
$z_2 = 91^\circ 27' 28.''2$
$z_3 = 91^\circ 27' 18.''2$
$z_4 = 91^\circ 27' 17.''6$

Middelfejl paa den enkelte Maaling $m = \pm 16''$.

Middeltal, $z = 91^\circ 27' 29.''0 \pm 8''$.

§ 36. Trigonometrisk Højdemaaling paa længere Afstande.

162. Ved trigonometrisk Højdemaaling paa længere Afstande kan man ikke anvende Formlerne (104) og (105), da man

ikke kan se bort fra Jordkrumningens og Refraktionens Indflydelse, som vi derfor nærmere vil undersøge.

Fig. 170, der ganske svarer til Fig. 168, er et Snit gennem Punkterne A og B paa den naturlige Jordoverflade og Jordens Centrum C. Theodoliten er opstillet i A og en lodret Stang med Sigteskiven S i B. MN_1 er en med den matematiske Jordoverflade, KK, koncentrisk Cirkelbue, medens MN er den vandrette Tangent til denne i M; Sigtet følger Buen MS, og fra M ser man altsaa S i Retning af Tangenten MS_1 til denne Bue, saa at man maaler Zenithdistancen, $ZMS_1 = z$. CM er, idet M's Højde over den matematiske Jordoverflade er forsvindende i Forhold til Jordradien, r, lig denne.

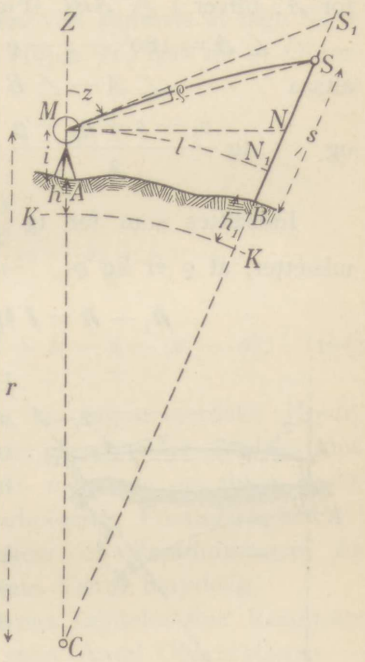


Fig. 170.

Til Bestemmelse af Stigningen fra A til B haves nu:

$$h + i = h_1 + s + SS_1 - NS_1 - NN_1,$$

altsaa

$$h_1 - h = NS_1 + NN_1 - SS_1 + i - s,$$

hvor $NS_1 = l \cot z$, medens NN_1 og SS_1 er de Størrelser, som i Punkt 136 (Side 190) er betegnede henholdsvis ved x og y, saa at man ved Anvendelse af (92) faar

$$h_1 - h = l \cot z + \frac{l^2}{2r}(1 - k) + i - s \quad \ldots \quad (106)$$

Denne Formel vilde være let nok at anvende, dersom man kendte k; men dette er, som nævnt Side 189, langt fra Tilfældet, idet denne varierer med Zenithdistancen samt med Temperatur, Lufttryk og Fugtighed m. m. Ved astronomiske Maalinger, maa derfor den astronomiske Refraktionskoefficient beregnes af disse Omstændigheder; ved trigonometriske Højdemaalinger, hvor Afstandene er forholdsvis korte, og hvor Zenithdistancen ligger nær ved 90°, bør man derimod benytte den af *Gauss*, Side 189, angivne Middelværdi,

$$k = 0.1306.$$

Ved trigonometriske Højdemaalinger paa store Afstande f. Eks. mellem de enkelte Punkter i et Trekantnet kender man Afstandene, l; men paa Grund af det mangelfulde Kendskab til k maa man da helst indrette Højdemaalingen saaledes, at k elimineres, hvilket kan ske paa en af følgende Maader:

163. Gensidige Zenithdistancer. Maaler man samtidig i A Zenithdistancen, z for B og i B Zenithdistancen, z_1 for A, bliver i $\triangle ABC$ (Fig. 171)

$$\angle A = 180^\circ - z - \varrho \text{ og } \angle B = 180^\circ - z_1 - \varrho_1,$$

altsaa

$$\angle A - \angle B = z_1 - z + \varrho_1 - \varrho$$

og

$$\operatorname{tg} \frac{z_1 - z + \varrho_1 - \varrho}{2} = \frac{h_1 + i_1 - h + i}{2r} \cot \frac{C}{2}.$$

Indsættes som før $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{C}{2} = \frac{l}{2r}$; faas, idet man forudsætter, at ϱ er lig ϱ_1,

$$h_1 - h = l \operatorname{tg} \frac{z_1 - z}{2} + i - i_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

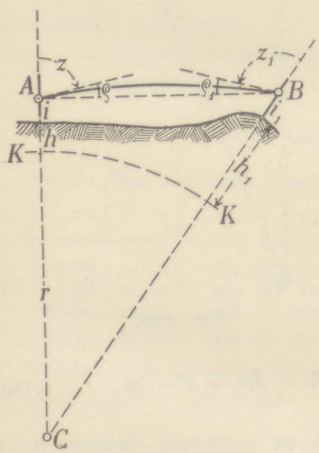


Fig. 171.

Denne Formel giver Højdebestemmelsen ved gensidige Zenithdistancer, og den viser, at Refraktionen her elimineres.

Ved denne Fremgangsmaade kræves der altsaa to Instrumenter, som *samtidig* betjenes, det ene i A det andet i B.

Højdemaaling ved gensidige Zenithdistancer giver et Middel til Bestemmelse af k.

Trekant ABC giver nemlig

$$z_1 + \varrho_1 = 180^\circ - (z + \varrho) + C,$$

altsaa

$$\varrho + \varrho_1 = 180^\circ - (z + z_1) + C,$$

eller i det

$$\varrho = \varrho_1 = \frac{k\,l}{2r} \text{ (se Anm. Side 190) og } C = \frac{l}{r},$$

$$\frac{k\,l}{r} = 180^\circ - (z + z_1) + \frac{l}{r},$$

o:

$$k = 1 - \frac{r}{l\,\omega}(z + z_1 - 180^\circ).$$

Her er forudsat, at begge Sigteskiverne er anbragte i Instrumenthøjde [1]).

164. Maaling af Zenithdistancer fra Midten. Kan man faa en Opstilling nøjagtig midt imellem A og B, vil man ogsaa kunne eliminere Refraktionen, man maa nemlig ved *samtidige* Observationer af Zenithdistancer fra Midten — navnlig naar Stationen og begge Sigtepunkter ligger omtrent lige højt — forudsætte, at Refraktionsforholdene er de samme ved Sigte til A og til B. Samtidighed opnaas ved skiftevis at tage Sigte til A og til B. Er Standpladsens Højde H, faas da af Observationen til A

$$h - H = l \cot z + \frac{l^2}{2r}(1 - k) + i - s$$

og af Observationen til B

$$h_1 - H = l \cot z_1 + \frac{l^2}{2r}(1 - k) + i_1 - s_1,$$

altsaa

$$\boldsymbol{h_1 - h = l\,(\cot z_1 - \cot z) + i_1 - i - (s_1 - s)}. \quad . \quad (108)$$

165. Nøjagtigheden. For at trigonometriske Højdemaalinger skal give gode Resultater, kræves der særdeles fine Instrumenter og gode Observatorer; men selv om disse Betingelser er tilstede, vil Refraktionsforholdenes Foranderlighed — endog ved gensidige Zenithdistancer og Zenithdistancer fra Midten — kunne forringe Resultatets Værdi betydelig.

For at vise, at man dog kan naa særdeles fine Resultater — om end ved et overordentlig stort Antal Observationer — skal det meddeles, at Gradmaalingen i Sommeren 1897 har foretaget en Bestemmelse af Højdeforskellen mellem to Punkter, det ene paa Knudshoved paa Fyn, det andet paa Højeklint ved Halskov paa Sjælland (denne Bestemmelse foregik dog ikke ganske paa de ovenfor angivne Maader).

---

[1]) Iøvrigt ses det, at en direkte Anvendelse af (106) giver

$$h_1 - h = l \cot z + \frac{l^2}{2r}(1 - k) + i - s$$

og

$$h - h_1 = l \cot z_1 + \frac{l^2}{2r}(1 - k) + i_1 - s_1;$$

subtraheres disse Ligninger, elimineres $\frac{l^2}{2r}(1 - k)$, og man faar et Udtryk for $h_1 - h$, adderes de, elimineres $h - h_1$, og man faar et Udtryk for k.

Højdeforskellen var

ved den reciprokke Metode. . . 775.2 mm ± 5.5 mm

ved Midtemetoden . . . . . 765.4 mm ± 7.3 mm,

efter deres Vægt 1.8 og 1, blev det endelige Resultat

771.7 mm ± 4.4 mm.

General Zachariae siger herom: »Da Afstanden mellem Knudshoved og Højeklint er 17 Kilometer, svarer Middelfejlen 4.4 mm eller den sandsynlige Fejl 3 mm til en sandsynlig Kilometerfejl ved geometrisk Nivellement af højst 0.8 mm, og det vil deraf ses, at det er lykkedes at føre Præcisionsnivellementet over Store Belt med en Nøjagtighed, der ikke staar tilbage for de Resultater som — forudsat at Fyn havde været landfast med Sjælland — kunde opnaas ved et særlig omhyggeligt geometrisk Nivellement.«

Hertil hører en Eksempelsamling. 3. Hefte.

Opmaalingslære

til Brug ved

Landinspektørelevernes Undervisning i Landmaaling

af

H. V. Nyholm,
Professor
ved den Kgl. Vetr. og Landbohøjskole.

Her er to Ord: Det ene hedder Teori og det andet
Praksis, og det er godt at have dem begge to.
Bj. Bjørnson: En glad Gut.

Udgivet paa den Kgl. Vetr. og Landbohøjskoles Foranstaltning.

Kjøbenhavn.
I Kommission hos Boghandler H. Christensen.
Fr. G. Knudtzons Bogtrykkeri (Fr. G. Knudtzon & Oskar Enevoldsen).
1909.

Forord til 3. Hefte.

I det jeg udsender 3. og sidste Hefte af min Opmaalingslære, skal jeg bemærke, at de i 10. Kapitel omtalte »Særlige Opmaalingsmetoder« kun er ganske kort behandlede, idet jeg er gaaet ud fra, at de ikke vil faa nogen væsentlig Betydning ved vore Matrikulsmaalinger. Jeg maa atter takke min Assistent, Landinspektør *K. Hendriksen* for hans gode Hjælp ved Udarbejdelsen af Tegningerne og ved Korrekturlæsningen.

September 1909.

Forf.

Indholdsfortegnelse til 3. Hefte.

Side

4. Afsnit. Særlige Opmaalingsmetoder, Afsætning af Punkter og Linjer (Tracering), Tilvejebringelse af Kort, Arealberegning og Prøve af en Opmaaling.

10. Kapitel: Særlige Opmaalingsmetoder, ved hvilke der mere tilstræbes Hurtighed end stor Nøjagtighed, og som i sig forener Terræn- og Højdemaaling.

§ 37. Boussolemaaling 237
§ 38. Tachymetri 240
§ 39. Fotografiske Opmaalingsmetoder 245

11. Kapitel: Afsætning af Punkter og Linjer i Marken, (Tracering).

§ 40. Afsætning af Punkter og rette Linjer 251
§ 41. Udstikning af Kurver 255

12. Kapitel: Tilvejebringelse af Kort.

§ 42. Korttegning 273
§ 43. Kopiering og Mangfoldiggørelse af Kort 281

13. Kapitel: Arealberegning.

§ 44. Grundlaget for Arealberegning 286
§ 45. Arealberegningens Udførelse 293
§ 46. Afsætning af Arealer 306

14. Kapitel: Prøve af en Opmaaling.

§ 47. Forskellige Kortprøvemetoder 313
§ 48. Den Oppermannske Kortprøve 315

5. Afsnit. De vigtigste danske Opmaalingsarbejder.

15. Kapitel: Ældre Opmaalinger.

§ 49. De ældre, før 1761 udførte Opmaalinger 323
§ 50. Videnskabernes Selskabs Opmaalinger 324

16. Kapitel: Geodætiske og topografiske Opmaalinger.

§ 51. Gradmaalingens Arbejder 330
§ 52. Generalstabens Opmaalinger 337

17. Kapitel: Økonomiske og Matrikulsmaalinger.

§ 53. Ældre økonomiske og Matrikulsmaalinger 347
§ 54. Nyere Matrikulsmaalinger 352
§ 55. Kjøbenhavns Opmaaling 354

4. Afsnit.

Særlige Opmaalingsmetoder, Afsætning af Punkter og Linjer (Tracering), Tilvejebringelse af Kort, Arealberegning og Prøve af en Opmaaling.

---

10. Kapitel.

Særlige Opmaalingsmetoder, ved hvilke der mere tilstræbes Hurtighed end stor Nøjagtighed, og som i sig forener Terræn- og Højdemaaling.

§ 37. Boussolemaaling.

166. I Punkt 61 er omtalt, at man, hvor der ikke kræves nogen stor Nøjagtighed, kan bestemme Azimutherne for en brudt Linjes Sider ved direkte Maaling ved Hjælp af en Boussole. Medens man ellers ved Polygonmaaling beregner en Azimuth gennem en Række maalte Vinkler, bestemmes altsaa ved Boussolemaalingen hver enkelt Azimuth for sig, og der vil som Følge heraf ingen Fejlophobning kunne finde Sted, en Omstændighed, som vilde bevirke, at man ubetinget maatte foretrække Boussolemaaling for almindelig Vinkelmaaling, dersom den kunde udføres med en til denne svarende Nøjagtighed, hvilket imidlertid særlig paa Grund af Magnetnaalens uregelmæssige Svingninger ikke lader sig gøre.

I en brudt Linje af strakt Form skyldes, som Side 68 omtalt, Længdefejlen næsten udelukkende Fejlene i de maalte Sidelængder, medens Tværfejlen væsentlig skyldes Fejlene i de maalte Vinkler. Ved Boussolemaaling skyldes Tværfejlen altsaa nærmest Fejlene paa de maalte Azimuther.

Bestaar en strakt brudt Linje, hvis Længde er L, af n ligelange Polygonsider (altsaa af Længden $s = \frac{L}{n}$), og er Fejlene paa Bestemmelserne af Azimutherne v_1, v_2, v_3, ... v_n (udtrykte i rene Tal), saa bliver Tværfejlen bestemt ved

$$t = sv_1 + sv_2 + sv_3 + \ldots\ldots + sv_n,$$

og er Middelfejlen paa en Azimuthbestemmelse m, bliver Middelværdien for t bestemt ved

$$m_t = m\sqrt{ns^2},$$

eller, idet $ns = L$,

$$m_t = m\sqrt{s}\sqrt{L},$$

hvoraf ses, at Middelværdien for Tværfejlen paa en brudt Linje af en vis Længde ved Boussolemaaling er proportional med Kvadratroden af Sidelængden. Man bør altsaa ved Boussolemaaling anvende saa korte Sider som muligt.

Udtrykket for m_t ses at være ganske tilsvarende til Udtrykket for Nivellementsmiddelfejlen m_h i (96) Side 206.

167. Ved Boussolemaaling er det ikke nødvendigt at opstille Boussolen i mere end hvert andet Polygonpunkt, idet man i hvert Punkt kan maale de to tilstødende Siders Hældninger mod magnetisk Nord. Ved at tage Opstilling i alle Polygonpunkterne og maale begge sammenstødende Siders Hældninger faar man imidlertid en Kontrol, idet man faar to Bestemmelser for hver Sides Hældning; man benytter da Middeltallet.

Man kunde ogsaa stille Boussolen i et hvilketsomhelst Punkt i en Side og faa Dobbeltbestemmelsen ved at sigte i begge Siders Retninger.

Skal den brudte Linje knyttes til et overordnet Linjesystem, kan dette ske ved at lade den udgaa enten fra et Polygonpunkt eller fra et hvilketsomhelst i en Polygonside beliggende Punkt, hvis Afstand fra det ene Endepunkt maales. I Fig. 172 ses et Eksempel paa begge Maader.

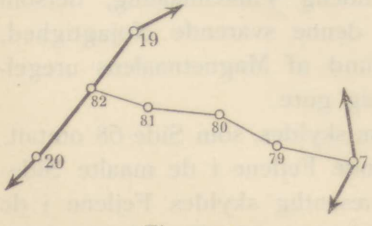


Fig. 172.

Ved en saadan Tilknytning maa man tillige maale nogle Hovedlinjers Hældning mod magnetisk Nord, af disse og af Linjernes bekendte Azimuther beregnes Magnetnaalens Misvisning mod Abscisseaksens positive Retning. De fundne Værdier for

Misvisningen vil i Almindelighed afvige noget, og man tager da Middeltallet. Ved at subtrahere Misvisningen fra eller addere den til de maalte Retninger, faas de tilsvarende Azimuther.

Kan Boussolens inddelte Kreds drejes i Forhold til Sigtelinjens Bevægelsesplan, vil det være muligt at indstille den saaledes, at Magnetnaalen viser paa Nul, naar Sigtet er indstillet $\neq$ Abscisseaksens positive Retning, saa at man direkte kan maale alle andre Linjers Azimuther. Indstillingen sker saaledes: Boussolen opstilles i en Polygonside, Sigtet indstilles i denne, og Kredsen drejes, indtil Magnetnaalen angiver Sidens bekendte Azimuth.

Polygonsidernes Længde maales paa sædvanlig Maade; men der er selvfølgelig ingen Anledning til at anvende særlig Omhu paa Maalingen. Er Boussolen forsynet med en dertil indrettet Kikkert, kan man ogsaa efter Omstændighederne maale Siderne ved Distancemaaling; man bør da for Kontrollens Skyld maale Siderne fra begge Endepunkter.

168. Beregningen af den brudte Linje kan udføres paa sædvanlig Maade, kun maa det bemærkes, at alle Azimuther bør tillægges samme Rettelse. Beregningen udføres med 4-cifrede Logaritmer. I Reglen beregner man dog ikke den brudte Linje; men man konstruerer den umiddelbart, idet hver enkelt Sides Retning ved Hjælp af en Transportør afsættes ved sin Hældning mod den magnetiske Meridian eller lettere ved sin Azimuth — naar denne er angiven.

Fremkommer der ved denne Konstruktion et lille Gab, vil det være vanskeligt at lukke dette; men er Gabet saa stort, at det kan lade sig gøre, fordeles Fejlen paa de enkelte Polygonpunkter ved en Konstruktion, som vil forstaas af Fig. 173, naar det bemærkes, at den stiplede Linje viser den brudte Linje fra A, hvis andet Endepunkt skulde falde i B, men som falder i B_1. De enkelte Polygonpunkter forskydes paa rette Linjer $\neq B_1B$ saa langt til Siden, som angivet ved de Stykker, der afskæres af disse Linjer mellem de rette Linjer AB_1 og AB. Jo mere strakt den brudte Linje er, desto korrektere er denne Fremgangsmaade.

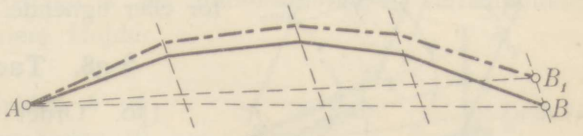


Fig. 173.

Foreligger der en lukket Polygon, maa man gaa ud fra et

Punkt i denne til et omtrent diamentralt modsat Punkt og fordele det halve Gab paa hver af Polygonens Grene.

169. Terrænpunkters Bestemmelse gennem polære Koordinater kan udføres ved Boussolen i Forbindelse med Distancemaaling, idet man med Boussolen opstillet i Stationspunkterne (Polygonpunkterne) tager Sigte til vedkommende Punkter og maaler Sigtets Hældning mod magnetisk Nord (eller dets Azimuth), hvorhos Afstanden bestemmes ved Distancemaaling med Boussolens dertil indrettede Kikkert.

Er Boussolens Kikkert yderligere forsynet med en Libelle, vil man kunne udføre en direkte Kurvelægning paa den i Punkt 159 (Side 228) angivne Maade, idet de enkelte Punkter i Kurverne bestemmes paa samme Maade som nys angivet for Terrænpunkterne.

Fig. 174 viser en saadan Opmaaling. Mellem de trianguler ede eller paa anden Maade bestemte Hovedpunkter A og B er ført en brudt Linje med to Polygonpunkter I og II. Sigternes Azimuther er direkte maalte. Maalebogen kan føres som i Eksempel 43, der omfatter Stationerne A og I, refererende sig til den i Fig. 174 viste Skitse, paa hvilken X og MN angiver henholdsvis Abscisseaksen og magnetisk Nordretning. Terræn- og Kurvepunkterne indkonstrueres direkte med Transportør eller lignende.

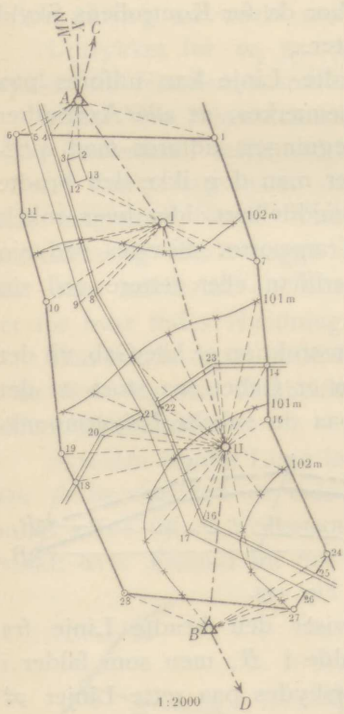


Fig. 174.

§ 38. Tachymetri.

170. Ordet »Tachymetri« er af græsk Oprindelse og betyder egentlig Hurtigmaaling; men Betegnelsen anvendes særlig om en Maalemetode, ved hvilken de enkelte Terrænpunkter bestemmes ved polære Koordinater i Forhold til Stationspunktet, og ved hvilken Punkternes Højde i Forhold til Standpladsen bestemmes ved en Art trigonometrisk Højdemaaling.

Tachymetre forekommer i to Typer[1]), hvis Grundprincip skal angives her, om end deres nærmere Beskrivelse henhører under Instrumentlæren.

1ste Type bestaar af en Theodolit, som er forsynet med Horisontal- og Vertikalkreds, og hvis Kikkert tillige er indrettet til Distancemaaling. Hyppig bærer Instrumentet desuden en Boussole.

Horisontalkredsen bør være drejelig og forsynet med Finskrue (ɔ: indrettet til Repetition), for at man kan stille den saaledes, at Aflæsningen, naar Sigtet er indstillet i en bestemt Retning, bliver lig dennes Azimuth.

Vertikalkredsen bør ligeledes kunne stilles saaledes, at den giver Aflæsningen Nul for vandret Sigte, og den bør derhos være becifret saaledes, at man direkte aflæser Højdevinklen positiv eller negativ, eftersom Sigtet gaar skraat opad eller nedad. Endvidere maa Aflæsningen paa Kredsene kunne foregaa særdeles hurtig og bekvemt. (Aflæsningerne bør ikke være mindre end hele Minutter).

Til Instrumentet hører en til Distancemaaling inddelt Stang, som er forsynet med en Sigteskive, der for hver Station anbringes i Instrumenthøjden (Fig. 175).

Rettes Sigtet mod Sigteskiven, aflæser man da direkte Højdevinklen for Sigtet fra Stationspunktet til Terrænpunktet, og foretager man tillige med denne Stilling af Kikkerten Aflæsning mellem Distancetraadene, kan man beregne saavel den vandrette Afstand x fra Stationspunktet til Terrænpunktet som disse Punkters Højdeforskel y.

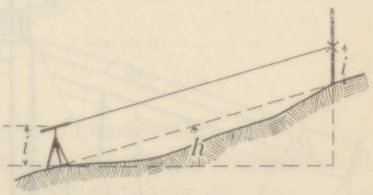


Fig. 175.

Er Højdevinklen h og den af Distancetabellen til Aflæsningen mellem Traadene svarende Afstand a, bliver (Fig. 176)

$$x = a \cos^2 h,$$

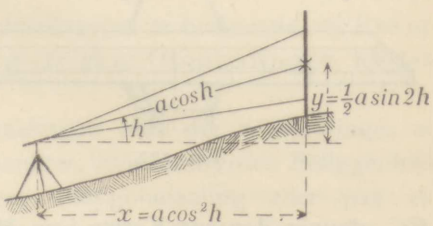


Fig. 176.

hvilket Udtryk udvikles i Instrumentlæren under Distancemaaling,

[1]) Blandt de forskellige andre eksisterende Tachymetertyper skal nævnes det Hammer-Fennelske Tachymeter, som er beskrevet i Artiklen: »Lidt om Tachymetre« i Tidskrift for Opmaalings- og Matrikulsvæsen, 3. Bind, Side 66.

og $$y = a \cos^2 h \operatorname{tg} h$$
$$= a \sin h \cos h$$
$$y = \frac{1}{2} a \sin 2h.$$

Til Hjælp ved Beregningen af x og y har man mange mere eller mindre praktiske Hjælpemidler, som ikke er vanskelige at forstaa, naar man træffer paa dem; men det simpleste er at anvende en tachymetrisk Tabel, f. Eks.: »Hilfstafeln für Tachymetrie von Jordan, Stuttgart, 1880«. Af disse Tavler kan man for a og h som Argumenter direkte udtage Værdierne for x og y.

2den Type bestaar ogsaa af en Theodolit, som er forsynet med en lignende Horisontalkreds og en til Distancemaaling indrettet Kikkert. Derimod findes her ingen Højdekreds; men denne erstattes af en Projektor, ved hvilken man direkte paa Instrumentet aflæser den vandrette Afstand x og Terrænpunktets Kote.

Projektoren bestaar (Fig. 177) af en Lineal AA, som under Maalingen ligger vandret, en Lineal BB, hvis Kant er parallel med Sigtelinjen og følger dennes Bevægelse, og en Lineal CC, som stedse staar lodret. Disse Linealer er forsynede med Millimeterdeling. Paa Linealen BB, glider en Skyder s, som bærer to Nonier, af hvilke den ene tjener til Aflæsning paa BB, den anden paa CC. CC danner den ene Katete i en Messingtrekant T, som kan forskydes paa Ruller henad Linealen AA, og som bærer en Nonius til Aflæsning paa denne.

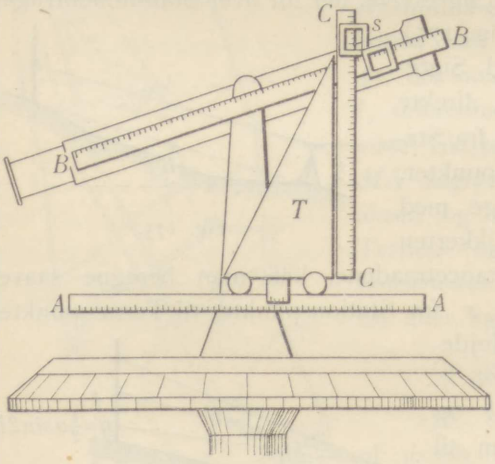


Fig. 177.

Til Instrumentet hører et til Distancemaaling indrettet Stadie med Sigteskive, der for hver Station anbringes i Instrumenthøjde; Stadiet holdes staaende i Terrænpunktet ikke lodret, men

vinkelret paa Instrumentets Sigtelinje, hvilket opnaas ved en lille i Instrumenthøjde anbragt Diopter, hvorigennem Stadieholderen sigter mod Kikkerten.

Projektoren anvendes saaledes: Man retter Sigtet mod Stadiet, indstiller den midterste Traad paa Sigteskiven, aflæser mellem Distancetraadene og tager den tilsvarende Afstand a ud af Distancetabellen. Tallet a indstilles ved Hjælp af Skyderens Nonius paa BB, Trekanten med Linealen CC rulles hen til den anden Skydernonius, og man kan da paa AA aflæse den vandrette Afstand x og paa CC Terrænpunktets Kote — alt under Forudsætning af, at man har indstillet Linealerne AA og CC saaledes, at man med vandret Sigte faar samme Aflæsning paa AA som paa BB, samtidig med at man paa CC aflæser Stationspunktets bekendte Højde.

Dette beror paa, at naar man aflæser paa et Stadie, som staar vinkelret paa Sigtelinjen, saa er med de ovenfor benyttede Betegnelser

$$x = a \cos h$$

og $$y = a \sin h$$ (Fig. 178).

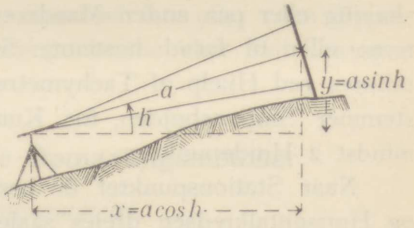


Fig. 178.

Ved begge Tachymetertyper er det en Fordel, naar Distancekonstanten er 100, saa at man undgaar at benytte Distancetabel.

Fordelene og Manglerne ved disse to Typer træder umiddelbart frem: Den sidste giver i Modsætning til den første Afstande og Højder direkte, men kræver til Gengæld længere Arbejdstid i Marken, hvorhos den har den væsentlige Ulempe, at Stadiet skal holdes skævt.

171. Efter at de to Tachymetertyper er beskrevne, vil Fremgangsmaaden ved tachymetriske Opmaalinger næsten følge af sig selv.

Som Grundlag for Opmaalingen maa der tilvejebringes et passende System af Hovedpunkter, hvis indbyrdes Beliggenhed bestemmes ved Triangulation, Polygonmaaling eller paa en hvilkensomhelst anden Maade alt efter den til Formaalet svarende Nøjagtighed.

Strækker Opmaalingen sig over store Arealer, maa de første Punktsystemer her — som altid — bestemmes med større Nøjagtighed, medens man kan slaa noget af paa Fordringerne, efterhaanden som man kommer trappevis nedad.

I Almindelighed vil det første Grundlag være en Triangulation. Benytter man senere Polygonmaaling, maales Vinklerne med Tachymetret og Siderne med Staalbaand. I enkelte særlige Tilfælde er Nøjagtighedsfordringen maaske ikke større, end at man tør benytte Distancemaaling udført med Tachymetret til Bestemmelse af Sidernes Længde.

Endnu maa der i det paagældende Terræn bestemmes et System af Højdefikspunkter, hvilket efter Omstændighederne kan ske ved Nivellement eller trigonometrisk Højdemaaling; i sidste Tilfælde bestemmer man Triangulations- eller Polygonpunkternes Koter.

Paa Basis af det angivne Grundlag paabegyndes den egentlige Terrænmaaling (Detailmaaling). Som Stationspunkter kan muligvis de forud bestemte Hovedpunkter benyttes; men foruden dem maa der bestemmes ny ved Sideskæring, Tilbageskæring eller paa anden Maade enten i Forhold til Hovedpunkterne eller til forud bestemte Stationspunkter. Bestemmelsen udføres ved Hjælp af Tachymetret, ved hvilket man ogsaa bestemmer Stationshøjden, for Kontrollens Skyld i Forhold til mindst 2 Højdepunkter.

Naar Stationspunktet er bestemt, stilles Instrumentet op, og Horisontalkredsen drejes saaledes, at man, naar Sigtet indstilles i en bekendt Retning, aflæser dennes Azimuth.

Stadieholderen gaar nu til det første Terrænpunkt, som skal bestemmes. Benyttes den første Instrumenttype, holder han Stadiet lodret i Punktet, hvorefter Brugeren af Instrumentet aflæser Afstand (efter Distancetabellen), Højdevinkel og Azimuth. Benyttes den 2den Instrumenttype holdes Stadiet vinkelret paa Sigtet; Brugeren af Instrumentet aflæser Afstanden (efter Distancetabellen) og Azimuth, hvorefter Linealerne forskydes som ovenfor angivet, saa at den vandrette Afstand og Terrænpunktets Kote kan aflæses.

Naar det første Terrænpunkt er bestemt, gives der Tegn til Stadieholderen, som gaar til det næste o. s. v. Man maa meget omhyggeligt passe paa, at man ikke tror, at Medhjælperen staar i et Punkt, medens han i Virkeligheden staar i et andet. Man bør derfor gøre et aldeles bestemt Tegn til ham, naar man har bestemt Punktet, og han bør besvare det, inden han fjerner Stadiet. Desuden er det heldigt, at Medhjælperen paa en særlig Maade betegner hvert 10de Punkt.

For hver Station tegnes i Maalebogen en lille Skitse, som

altid bør vende i Nord—Syd, og paa denne angives alle de bestemte Punkter ved fortløbende Numre. Med Hensyn til Valget af Terrænpunkter skal her kun bemærkes, at foruden de Punkter, som er nødvendige til Kortets Konstruktion, maa man ogsaa sørge for at faa saa mange Punkter, som er nødvendige, for at man kan indtegne Højdekurverne paa Kortet (se § 34, Side 223). Her er der selvfølgelig ingen Anledning til at lade disse Punkter ligge paa rette Linjer.

Den vanskeligste Del af Tachymetermaalingen er Valget af de Punkter, som skal bestemmes, hvilket derfor maa udføres med stor Skønsomhed. Betjeningen af Instrumentet vil derimod snart foregaa ganske mekanisk.

Vil man benytte en paa Instrumentet anbragt Boussole, bliver Fremgangsmaaden ganske den samme (se § 37).

Maalebogen kan føres som vist i Eksempel 44 eller 45, eftersom man benytter et Instrument af 1ste eller 2den Type.

Indkonstruktionen af Terrænpunkterne sker ved Transportør, Kordetavle eller lignende.

§ 39. Fotografiske Opmaalingsmetoder.

I. Fotogrammetri.

172. Fotogrammetri er en Opmaalingsmetode, ved hvilken man konstruerer Kort paa Grundlag af Fotografier af vedkommende Terræn. Metoden gør ikke Fordring paa stor Nøjagtighed, men den er anvendelig ved topografiske Arbejder og finder navnlig Anvendelse i utilgængelige Bjærgegne. Da den næppe vil finde Anvendelse hos os, skal den kun omtales ganske kort.

Fotogrammetriens Grundtanke er af Jordan, der i 1874 har anvendt Metoden til Opmaaling af en Oase i den libiske Ørken, udtrykt saaledes:

»Det maa være muligt af to perspektiviske Billeder af en Genstand at fremstille selve denne Genstand geometrisk i Rummet. Vi tænker os to plane perspektiviske Billeder i orienteret Stilling, d. v. s. saaledes, at alle Lysstraaler fra begge Øjepunkter til Objektpunkterne i Rummet træffer Billedplanerne i de rigtige Punkter; da vil ikke alene Konstruktionen i sig selv være mulig; men der vil ved Konstruktionen af hvert enkelt Punkt som to Synslinjers Skæringspunkt opstaa en Prøve derved, at disse rette Linjer maa skære hinanden i Rummet«.

Til Brug ved en fotogrammetrisk Opmaaling benyttes en Fototheodolit, hvis Grundprincip vil forstaas ved Hjælp af den skematiske Fig. 179.

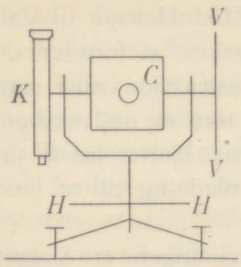


Fig. 179.

Fototheodoliten bestaar af en Theodolit, i hvilken der paa Kikkertens Plads er indsat et camera obscura C, hvis Linses Hovedakse er nøje parallel med en ekscentrisk Kikkert Ks Bevægelsesplan og vinkelret paa den præparerede Plade. Theodoliten er derhos forsynet med en Horisontalkreds HH og en Vertikalkreds VV.

Camera obscura er altid indstillet paa Afstanden ∞, saa at Afstanden fra Objektivets optiske Midtpunkt til den præparerede Plade er lig Linsens Brændvidde.

Under Brugen maa den præparerede Plade stilles nøjagtig lodret ved Hjælp af en Libelle. I den Ramme, som optager den præparerede Plade, er anbragt tynde Blikspidser (Fig. 180), af hvilke det ene Par HH angiver Horisonten, medens det andet Par VV angiver en Vinkelret paa denne gennem Hovedpunktet, ɔ: det Punkt, i hvilket Linsens Hovedakse træffer den præparerede Plade. VV kaldes Hovedvertikalen.

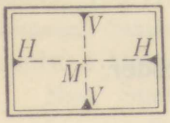


Fig. 180.

Naar Instrumentet er verificeret, skal HH være vandret og VV lodret, og deres Skæringspunkt M, skal dække det Punkt paa Billedet, som svarer til det Punkt i Terrænet, der dækkes af Midtpunktet af Kikkertens Traadkors, naar Sigtet er vandret.

173. Fremgangsmaaden ved den fotogrammetriske Opmaaling vil forstaas ved et ganske simpelt Eksempel. Fra Standpladserne A og A_1 (Fig. 181), hvis relative Beliggenhed (ɔ: deres Afstand) er bekendt, fotograferes en tresidet Pyramide 1, 2, 3, 4, og i begge Punkter maales de Vinkler v og v_1, som camera obscuras Linses Hovedakse, der er parallel med Kikkertens Sigteplan, danner med AA_1; herved opstaar to Billeder, B og B_1, paa de lodretstillede præparerede Plader, som paa Figuren tænkes nedlagte i Papirets Plan.

Konstruktionen foregaar nu saaledes (Fig. 182): Punkterne A og A_1 indkonstrueres paa Kortet i det forlangte Maalestoksforhold, Vinklerne v og v_1 afsættes, og Linjerne

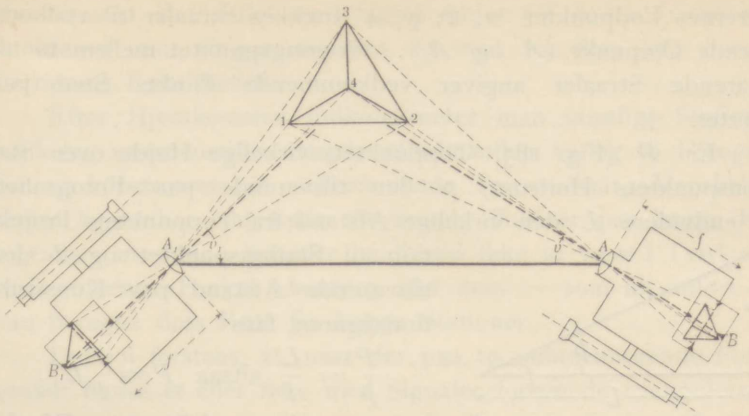


Fig. 181.

AM og A_1M_1 trækkes, hvorefter Afstanden $AM = A_1M_1$ afsættes i sand Størrelse lig Billedvidden f (ɔ: Linsens Brænd-

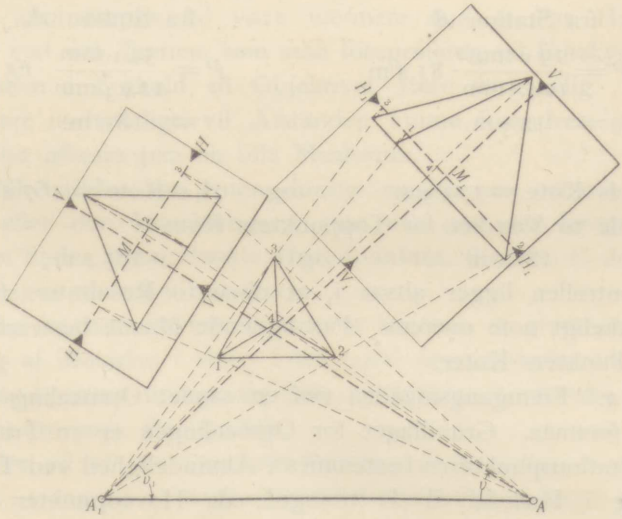


Fig. 182.

vidde). Linjerne HH og H_1H_1 tegnes gennem M og M_1 vinkelrette paa henholdsvis AM og A_1M_1, og Fotografierne fastklæbes saaledes paa Papiret, at Horisonterne og Hovedvertikalerne falder udad henholdsvis $HH(H_1H_1)$ og $VV(V_1V_1)$. Paa begge Billeder fældes fra Pyramidens Hjørner Perpendikulærer paa Horisonterne HH og H_1H_1, og fra Perpendiku-

lærernes Fodpunkter 1, 2, 3, 4 trækkes Straaler til vedkommende Øjepunkt (A og A_1). Skæringspunktet mellem to tilsvarende Straaler angiver vedkommende Punkts Sted paa Kortet.

Er P (Fig. 183) Toppunktets virkelige Højde over Stationspunktets Horisont, p den tilsvarende paa Fotografiet, er endvidere L den virkelige Afstand fra Toppunktets Projektion til Stationspunktet og l den tilsvarende Afstand paa Konstruktionsfiguren, faas

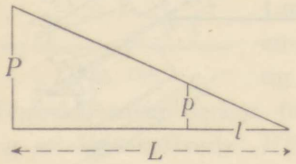


Fig. 183.

$$\frac{P}{p} = \frac{L}{l} \text{ altsaa } P = \frac{p}{l} L;$$

p kan maales med Passer og Maalestok paa Fotografiet, og l er konstant ($= f$), medens L kan maales paa Kortet i dettes Maalestoksforhold.

Toppunktets Højde kan bestemmes fra begge Stationer, hvorved opnaas fuldstændig Kontrol. I Eksemplet, hvor Kortet tænkes konstrueret i 1 : 2000, faas saaledes

fra Station A

$$P = \frac{19.0 \text{ mm}}{124.3 \text{ mm}} \cdot 81.8 \text{ m}$$
$$= 12.5 \text{ m}$$

fra Station A_1

$$P = \frac{34.1 \text{ mm}}{124.3 \text{ mm}} \cdot 65.3 \text{ m}$$
$$= 18.0 \text{ m}.$$

Er nu

As Kote $= 173.5$ m og A_1s Kote $= 167.8$ m,

bliver de to Værdier for Toppunktets Kote

186.0 m og 185.8 m,

og Kontrollen ligger altsaa i, at disse to Resultater stemmer tilstrækkeligt nøje overens. Paa lignende Maade bestemmes de andre Punkters Koter.

174. Fremgangsmaaden ved en samlet Opmaaling vil nu kunne forstaas. Grundlaget for Opmaalingen er en Triangulation. Stationspunkterne bestemmes i Almindelighed ved Tilbageskæring i Forhold til de trianguleredе Hovedpunkter eller i Mangel af saadanne til forud bestemte med Signal forsynede Stationspunkter. Stationspunktets Kote bestemmes, idet man maaler Højdevinklen ved Sigte til de trianguleredе Hovedpunkter.

I Stationspunkterne tages Fotografier hele Horisonten rundt, og da man meget vel kan lade hvert Fotografi overspænde lidt over 36°, behøves der i Reglen kun 10 Fotografier. Man tager da det første Fotografi med Sigtet rettet mod et trianguleret

Hovedpunkt, det andet med Sigtet drejet 36° o. s. v. Stationspunkterne maa vælges saaledes, at man fra dem kan overse Terrænets Enkeltheder.

Efter Hjemkomsten indkonstruerer man samtlige Stationspunkter, sammenstiller derpaa efterhaanden to og to Fotografier og konstruerer det vedkommende Terrænafsnit. Vanskeligheden ligger her i at finde tilsvarende Punkter paa begge Fotografier; men man behøver imidlertid ikke at være i Tvivl om vedkommende Punkts Identitet, idet man — som alt anført — kan beregne dets Kote fra begge Stationer.

Det vil forstaas, at, naar der paa to sammenhørende Fotografier findes et eller flere med Signaler forsynede triangulerede Hovedpunkter, vil man faa en ypperlig Kontrol; thi disse Punkter kan konstrueres ind paa Kortet ved deres Koordinater, og deres saaledes bestemte Sted skal altsaa falde sammen med det ved Fotografierne bestemte.

Det Spørgsmaal ligger nær, hvorledes man altid kan arbejde med den præparerede Plade indstillet paa ∞. Svaret er, at da man næppe vil være nærmere end et Par Hundrede Meter ved det Terræn, som man fotograferer, vil Forskydningen af Pladen i Forhold til Objektivet være umærkelig. Skulde det være nødvendigt, vil Afstanden kunne forandres, og dens Størrelse aflæses paa en lille Maalestok.

Billedvidden kan enten direkte maales paa nævnte Maalestok, eller den kan beregnes, naar der paa det fotograferede Terræn findes triangulerede Hovedpunkter, (hvilket vi dog ikke her vil gaa nærmere ind paa).

Det ligger i Sagens Natur, at her kun er givet en Fremstilling af Metoden i store Træk; skal den anvendes, vil mange Detailspørgsmaal trænge sig frem og deriblandt tekniske Spørgsmaal vedrørende Fotografien.

Det vil af det fremsatte forstaas, at Metoden — som alt nævnt — snarest vil finde Anvendelse ved Opmaalinger i Bjærgegne, hvorimod den ikke egner sig i Lavlande. Den er i de senere Aar anvendt en Del til topografiske Maalinger, saaledes af den italienske Generalstab[1]), i Sverrig og i Rusland, og det synes, som man har opnaaet gode Resultater.

[1]) Beretning herom findes i en Afhandling i »Revista di Topografia e Catasto, 1889« af Paganini. Beretningen er gengivet i »Zeitschrift für Vermessungswesen 1891 og 92.«

II. Stereofotogrammetri.

175. Ved at fotografere en Genstand fra to forskellige Standpunkter faar man to forskellige Billeder, som, naar de anbringes i et Stereoskop, vil smelte sammen for Iagttageren til et enkelt plastisk Billede. Dette benyttes i Stereofotogrammetrien, idet man tager to stereoskopiske Fotografier af det Terræn, som ønskes opmaalt; men medens almindelige, stereoskopiske Billeder tilvejebringes ved Hjælp af to Linser, hvis optiske Akser er parallele og har en indbyrdes Afstand, som kun er lidt større end Øjenafstanden, tages i Stereofotogrammetrien to Billeder, et ved hver Ende af en lille Basis (f. Eks. paa 100 m) men saaledes, at de to Fotografiapparaters Linser befinder sig i samme Højde, at Linsernes optiske Akser er parallele og, at de to præparerede Plader er lodrette. Ses de herved tilvejebragte Billeder i et Stereoskop, vil man faa et Billede af Terrænet, som bliver formindsket i samme Forhold, som Øjenafstanden er mindre end Basis; men atter i samme Forhold bliver det plastiske Billede tydeligere, og det gør Indtryk af, at Terrænet ses paa meget nær Afstand.

Fotograferingen sker ved Hjælp af en særlig til dette Brug indrettet Fototheodolit, som er konstrueret af Pulfrich i 1901. Har man to stereoskopiske Fotografier af Terrænet, kan man hjemme i sin Stue foretage en fuldstændig Opmaaling af dette ved Hjælp af en Stereokomparator, om hvilken her kun skal bemærkes, at den er en Art Stereoskop, i hvilket Billederne, som maa overføres paa Glas for at blive gennemsigtige, indlægges og ses gennem to Mikroskoper. I hver af Billedplanerne er der et Mærke, det ene er fast, det andet er forskydeligt ved Hjælp af Mikrometerskruer. Er det forskydelige Mærke nu indstillet saaledes, at Billedet af begge Mærker falder sammen med et bestemt Punkt paa det plastiske Billede, da kan man paa Mikrometerskruerne aflæse dette Punkts Rumkoordinater i et bestemt Koordinatsystem.

Det er ikke her — saaledes som ved Fotogrammetrien — nødvendigt at identificere Punkter paa de to Fotografier, da de falder sammen paa det plastiske Billede, hvilket er en af de store Fordele, som denne Metode frembyder fremfor Fotogrammetrien.

Man tager altsaa saa at sige Terrænet med hjem i sin Stue, hvor man ved Hjælp af Stereokomparatoren kan maale Rumkoordinater til saa mange Punkter, som man vil, saa at

man atter ved Hjælp af disse kan konstruere Kort over vedkommende Terræn og forsyne dette med Horisontalkurver.

Denne Maalemetode, som er udviklet i de allersidste Aar, hviler paa et særdeles tiltalende Princip, og det tør vel antages, at den i Fremtiden vil kunne faa stor Betydning ved topografiske, maaske ogsaa geografiske Opmaalinger, om man end aldrig ved den vil kunne opnaa nogen stor Nøjagtighed. Det vil iøvrigt ses, at man ogsaa paa denne Maade kan bestemme et bevægeligt Punkts f. Eks. et Luftskibs Afstand.

Det har kun været muligt her at antyde Princippet for Stereofotogrammetrien, en mere indgaaende Fremstilling af dette findes i Zeitschrift für Vermessungswesen 1908 Side 425; men rimeligvis vil der i de nærmeste Aar fremkomme en betydelig Litteratur vedrørende Metoden.

II. Kapitel.

Afsætning af Punkter og Linjer i Marken, (Tracering).

§ 40. Afsætning af Punkter og rette Linjer.

176. Den Opgave at afsætte Punkter eller rette Linjer (bestemte ved Punkter) i Marken er den omvendte af den, som foreligger ved Opmaalingen, og dens Løsning frembyder sig derfor i Almindelighed af sig selv, naar man kender de forskellige Opmaalingsmetoder. I Reglen vil et Punkt blive afsat fra et forud bekendt Punkt ved en Retning og en Afstand (polære Koordinater).

Skal et Skelhjørne afsættes, da vil dets Sted saaledes hyppig være bestemt derved, at det skal ligge i en forud afsat ret Linje (et bestaaende Skel) og have en vis Afstand fra et bestemt Punkt i denne.

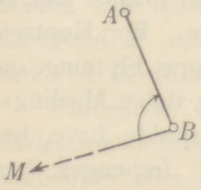


Fig. 184.

Skal et forsvundet Punkt A, hvis Beliggenhed er givet ved retvinklede Koordinater, genfremstilles, da bestemmer man i Reglen et andet Punkt B i Nærheden (Fig. 184), beregner B's Koordinater og derefter ved Formlerne (6) og (7) i 1ste Afsnit (Side 10) Azimuth φ_B^A for og Længden s_B^A

af BA. Da man altid kender Azimuth for en fra B udgaaende Retning, f. Eks. BM, kan man beregne

$$\angle MBA = \varphi_B^A - \varphi_B^M.$$

Man opstiller da Vinkelinstrumentet i B og afsætter $\angle MBA$, udstikker Linjen BA og udmaaler ud ad denne Afstanden BA.

Denne Metode finder f. Eks. Anvendelse, naar man skal opsøge eller genfremstille et forsvundet Polygonpunkt eller trianguleret Hovedpunkt. Det foreløbige Punkt B maa da vælges saa tæt som muligt ved A og bestemmes ved Polygonmaaling eller Triangulation med en til Formaalet svarende Nøjagtighed.

Man kan naturligvis ogsaa afsætte Punktet A (Fig. 185) ved i to bekendte Punkter B og C paa den nys angivne Maade at afsætte Vinklerne CBA og BCA og udstikke Linjerne BA og CA; disses Skæringspunkt er da det søgte Punkt. Vil man have Kontrol paa Afsætningen, maa Punktet bestemmes ved mindst to Retninger og én Afstand, to Afstande og én Retning eller tre Retninger.

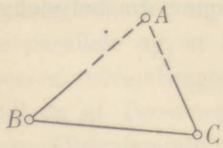


Fig. 185.

Afsætningen af Vinkel $o = BAC$ (Fig. 186) udføres saaledes: Efter at have opstillet Vinkelinstrumentet over A retter man Sigtet mod B, og der foretages Aflæsning paa en af Instrumentets Nonier, derefter drejes Instrumentets Overdel saa meget, at samme Nonius giver en Aflæsning, som er o større end før, og en Stok sættes i den ved Kikkertens Sigtelinje angivne Retning (ɔ: Stokken indvinkes i en saadan Stilling, at Vertikaltraaden dækker Stokkens Midte). Vinklen BAC maales nu paa sædvanlig Maade, og eftersom den ved Maalingen fundne Værdi er henholdsvis Δ for stor eller for lille, flyttes Stokken et Stykke $d = \frac{a\,\Delta}{\omega}$ til venstre eller højre, hvor $a = AC$ ikke behøver at kendes særlig nøje; den kan f. Eks. maales paa et topografisk Kort eller bestemmes ved Skridtning. For Kontrollens Skyld bør Vinklen atter maales efter Stokkens Flytning, og afviger den fundne Værdi ikke mere, end man ifølge Maalingsnøjagtigheden kan vente, fra den Værdi, den skulde have, betragtes Vinklen som endelig afsat. Skal AC forlænges, bør man sætte C saa langt bort, som Terrænforholdene tillader, og derefter indvinke flere Stokke i Linjen AC.

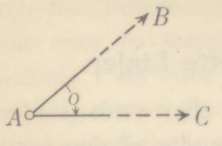


Fig. 186.

177. En ret Linje afsættes i Marken derved, at man bestemmer to eller for Kontrollens Skyld mindst tre af dens Punkter, hvorefter Linjen udstikkes gennem disse, hvilket, naar Linjen ikke er for lang, let udføres paa de i Instrumentlæren angivne Maader.

Drejer det sig derimod om Udstikning af en ret Linje gennem to langt fra hinanden liggende Punkter, saa frembyder der sig betydelige Vanskeligheder.

Forsaavidt man kan se fra Linjens ene Endepunkt til det andet, kunde man vel opstille et Instrument over det ene Endepunkt, rette Sigtet mod det andet og fra Instrumentet vinke Stokke ind i Linjen; men allerede paa Afstande paa 1000 Meter eller maaske endnu mindre er det overordentlig vanskeligt at give tydelige Signaler.

Man kan da med Fordel anvende følgende Fremgangsmaade, som iøvrigt ogsaa kan benyttes, selv om man ikke kan se fra Linjens ene Endepunkt til det andet, naar man blot kan finde et Punkt i Linjen, fra hvilket man kan se begge Endepunkter. Paa en eller anden Maade (f. Eks. ved Hjælp af Prismekorset) opsøger man et Punkt P (Fig. 187), som ligger i Nærheden af Linjen; over dette Punkt opstiller man Instrumentet og maaler

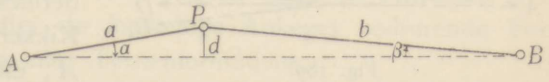


Fig. 187.

med megen Omhu Vinkel $v = BPA$ mellem Sigterne til Linjens Endepunkter B og A. Med Figurens Betegnelser haves da med tilstrækkelig Tilnærmelse

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a+b}{\sin v} \quad \text{altsaa} \quad \sin \alpha = \frac{b}{a+b} \sin v$$

og

$$d = a \sin \alpha = \frac{ab}{a+b} \sin v .$$

Fra P afsættes nu Stykket d til den Side, til hvilken den Vinkel mellem Sigterne til A og B, der er $< 180^\circ$, ligger, og man har et Punkt i den søgte rette Linje. Paa samme Maade kan man indskyde et Punkt mellem P og B o. s. v. Længden af a og b bestemmes med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Skridtning eller Maaling paa et topografisk Kort.

Findes der endelig ikke i Linjen et Punkt, hvorfra begge Endepunkter kan ses, maa man foretage en Opmaaling (Triangulation eller Polygonmaaling) — forsaavidt en saadan ikke foreligger — til Bestemmelse af Endepunkternes relative Belig-

genhed (deres Koordinater). Man beregner da, som i Punkt 176 angivet $\angle MAB$ (Fig. 188) mellem Linjen AB og en fra dennes ene Endepunkt A udgaaende ved Opmaalingen bestemt Retning AM, hvorefter man opstiller Theodoliten over A, afsætter $\angle MAB$ saaledes, at den Stok C, der anbringes, staar saa langt fremme i Linjen, som Terrænforholdene tillader. Man kunde nu forlænge Linjen AC henimod B ved Anbringelse af flere Stokke; men Udstikningen vilde da navnlig i kouperet Terræn let blive for usikker. Man gør derfor bedre i at opstille Instrumentet i C, rette Sigtet mod A og fra denne Retning afsætte en Vinkel paa 180°, hvilket kan ske enten 1) som foran angivet eller 2) ved at slaa Kikkerten igennem (en tilstedeværende Kollimationsfejl og andre instrumentale Fejl kan elimineres ved at udføre Operationen to Gange, saaledes at man i C (Fig. 189) først begynder med Sigtet i 1. Kikkertstilling rettet mod A og dernæst med Sigtet i 2. Kikkertstilling rettet mod A, efter i begge Tilfælde at have slaaet Kikkerten igennem faas to forskellige Punkter D_1 og D_2, hvis Midtpunkt D er det rette) eller 3) dersom Kikkerten hviler paa afdrejede Ringe, ved at lægge den om i sine Lejer. Den ny Stok D anbringes atter saa langt fremme i Linjen som muligt, og saaledes fortsættes. I Virkeligheden maaler man en brudt Linje, hvis Vinkler alle er lig 180°, mellem A og B, hvorfor man ogsaa i Udtalelserne i 1. Afsnit, Punkt 49 har Midler til at bedømme, dels hvor tæt man tør vente, at den udstukne Linje vil ramme ved B, og dels hvilken Afvigelse man kan vente mellem den ved Beregning af Endepunkternes Koordinater og den ved direkte Maaling bestemte Længde af AB.

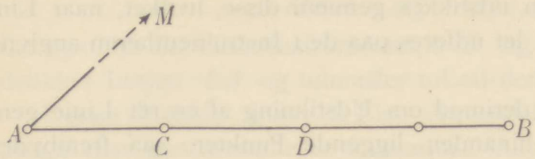


Fig. 188.

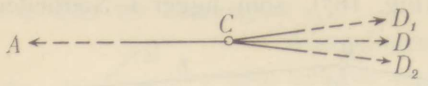


Fig. 189.

Den Sideafvigelse, som fremkommer, rettes derved, at de enkelte afsatte Punkter forskydes til Siden i Forhold til deres Afstande fra Udgangspunktet.

Skal man, som f. Eks. naar det gælder Udstikningen af en Nivellementslinje, afsætte Punkter i Linjen med bestemte Afstande fra Udgangspunktet, maa hvert enkelt Punkt, dersom

der er fremkommen en Længdeafvigelse paa hele Linjen, forskydes i Længderetningen i Forhold til dets Afstand fra Udgangspunktet. Iøvrigt maa man, dersom man paa Skraaninger maaler langs Jordens Overflade, desuden forskyde hvert Punkt et saa langt Stykke frem i Linjen, som svarer til den for Faldet beregnede Reduktion.

Tillader Terrænforholdene, f. Eks. i en Skov, ikke Udstikning af Linjen AB (Fig. 190), kan man udstikke en Linje fra A til et tæt ved B liggende Punkt C. Idet nu Afstanden fra B til Linjen AC og fra A til C maales, kan det Stykke, som Punkterne P_1, P_2, P_3 . . . i AC skal flyttes til Siden for at komme til at ligge i AB, beregnes. Efter Omstændighederne kan man ogsaa benytte en Linje, som hverken indeholder A eller B.

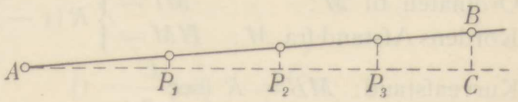


Fig. 190.

§ 41. Udstikning af Kurver.

178. Ved Jærnbaneanlæg er det nødvendigt og ved Vejanlæg hyppig ønskeligt at indføre Kurver, hvor Bane- eller Vejlinjen knækker. Kurven vil i Reglen være en Cirkelbue, hvis Radius afpasses efter de forskellige Anlæget vedrørende Forhold og da navnlig efter Terrænforholdene.

Er Banelinjen udstukken som en brudt Linje, saa at det bliver muligt at maale Vinklen i Vinkelpunktet, og har man valgt Radius R for den tangerende Cirkelbue, kan dennes Beliggenhed beregnes.

Beregning og Afsætning af Kurvens Konstanter.

I Fig. 191 er indlagt en Cirkelbue, der tangerer Linjerne BA og BD. B er Vinkelpunktet, A og D Tangentpunkterne. M er Buens Midtpunkt og $MI \perp AB$. Den til Buen AMD svarende Centervinkel er

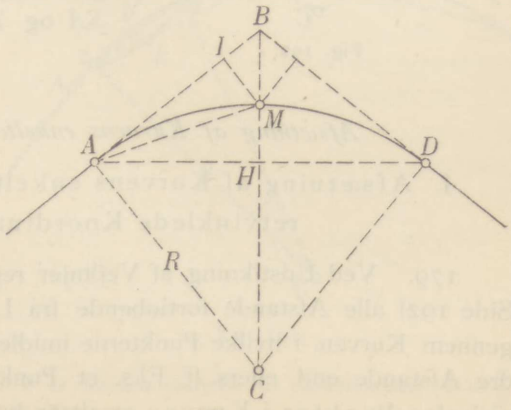


Fig. 191.

$$C = 180^\circ - B.$$

Man har da

Tangenten: $AB = BD = R \operatorname{tg} \frac{C}{2}$,

Kurven: $AMD = \pi \frac{R}{180} C = \frac{RC}{\omega}$,

Halve Korde: $AH = HD =$ }
Abscissen til M (regnet paa Tangenten fra A): $AI =$ } $R \sin \frac{C}{2}$,

Ordinaten til M: $MI =$ }
Kordens Afstand fra M: $HM =$ } $R(1 - \cos \frac{C}{2})$,

Kurveafstand: $MB = R (\sec \frac{C}{2} - 1)$.

Naar disse Stykker er beregnede, afsættes Røringspunkterne A og D ved Maaling udad Tangenterne fra B, og Afsætningen saavel som Vinkelmaalingen kontroleres ved Udstikning og Maaling af Korden. Har man samtidig med at maale Vinkel B afsat dens Halveringslinje, kan M afsættes paa tredobbelt Maade ved Maaling af BM, ved Afsætning af IM og ved Afsætning af HM, hvorved faas en yderligere Kontrol.

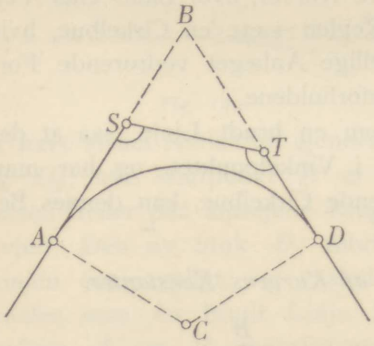


Fig. 192.

Forsaavidt Terrænforholdene ikke tillader, at Tangenterne forlænges til Skæring, kan man paa passende Sted maale Linjen ST (Fig. 192) samt Vinklerne TSA og DTS, hvorefter man let beregner $\angle B$ og Længden af BS og BT, og naar man har beregnet Tangentlængden, kan man afsætte SA og TD.

Afsætning af Kurvens enkelte Punkter.

I. Afsætning af Kurvens enkelte Punkter ved retvinklede Koordinater.

179. Ved Udstikning af Vejlinjer regnes (saml. Punkt 138, Side 192) alle Afstande fortløbende fra Linjens ene Endepunkt gennem Kurven, i hvilke Punkterne imidlertid afsættes med mindre Afstande end ellers (f. Eks. et Punkt for hver 25 m); de enkelte Punkter i Kurven er altsaa bestemte ved deres Bue-

længde b (Fig. 193) fra Tangentpunktet, og de afsættes, forsaavidt Terrænforholdene eller andre Forhold ikke forhindrer det, ved deres Abscisser og Ordinater i Forhold til Tangenterne AB og DB med henholdsvis A og D som Begyndelsespunkt.

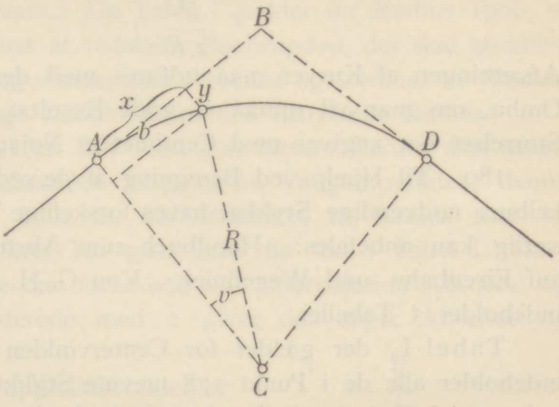


Fig. 193.

Idet den til Buelængden b svarende Centervinkel er

$$v = \frac{b}{R}\omega,$$

bliver de søgte Koordinater

$$x = R \sin v \qquad \text{og} \qquad y = R - R \cos v = 2\,R \sin^2 \frac{v}{2}.$$

Beregningen af de forskellige v'er er ikke besværlig; thi naar undtages det første Buestykke, som er nærmest Tangentpunktet, har de andre Buestykker mellem to og to paa hinanden følgende Punkter samme Størrelse.

Kurvens Punkter afsættes nu let ved at maale udad Tangenterne og afsætte Perpendikulærerne med Vinkelspejl eller Glasprisme. Afsætningen kontroleres dels ved Maaling af Afstandene mellem to og to Punkter i Kurven, hvilke Afstande skal være ligestore og lig

$$b - \frac{b^3}{24\,R^2},$$

hvor b er Buelængden, og R er Kurvens Radius[1]), og dels ved Udstikning af Korder mellem 1′ og 3′, 2′ og 4′ o. s. v. af Kurvens ligelangt fra hinanden liggende Punkter og Maaling af Kordernes Afstande

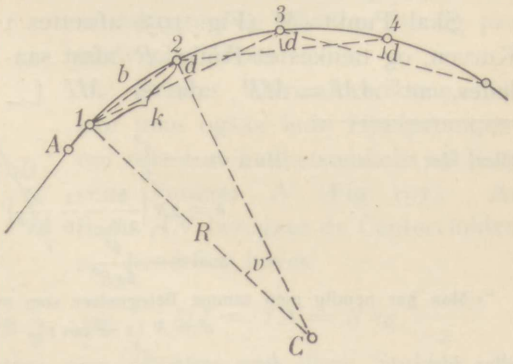


Fig. 194.

[1]) Man har nemlig, naar k er Korden svarende til Centervinklen $v = \frac{b}{R}$,

$$k = 2R \sin \frac{v}{2},$$

d (Fig. 194) fra de mellemliggende Punkter, hvilke Afstande skal være ligestore og lig

$$\frac{b^2}{2R}.$$ [1])

Afsætningen af Kurver maa udføres med den højeste Grad af Omhu, om man vil opnaa et godt Resultat, og de beregnede Størrelser bør angives med Centimeters Nøjagtighed.

180. Til Hjælp ved Beregning af de ved Afsætning af Cirkelbuer nødvendige Stykker haves forskellige Tabeller, af hvilke særlig kan anbefales: »Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Von G. H. A. Kröhnke«, der indeholder 3 Tabeller.

Tabel I, der gælder for Centervinklen og Radius 1000, indeholder alle de i Punkt 178 nævnte Stykker, som altsaa maa reduceres i Forhold til den benyttede Radius.

Tabel II angiver for Radier mellem 20 og 10000 Abscisser og Ordinater (i Forhold til Tangenterne med Tangentpunktet som Begyndelsespunkt) for Punkter i Kurven med Buelængden som Argument. Findes Buelængden ikke i Tavlen, interpolerer man, hvorved der dog naturligvis indkommer en iøvrigt ikke betydelig Fejl, idet mindre Stykker af Buen betragtes som rette Linjer.

Tabel III indeholder Værdier af Centervinklen for Buelængder 1—9 ved alle i Tabel II forekommende Radier.

Tabel I kan iøvrigt ogsaa benyttes til Afsætning af Kurvens enkelte Punkter.

Skal Punkt M (Fig. 195) afsættes i Kurven, og tænkes et Punkt P afsat saaledes, at $AM = MP$, da er MI (⊥

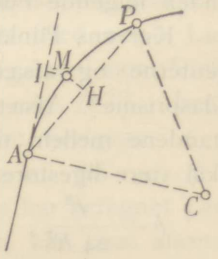


Fig. 195.

---

eller, idet $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$,

$$k = 2R\left(\frac{b}{2R} - \frac{1}{6}\frac{b^3}{8R^3}\right)$$

$$k = b - \frac{b^3}{24R^2}.$$

[1]) Man har nemlig med samme Betegnelser som ovenfor

$$d = R\,(1 - \cos v),$$

eller, idet $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$,

$$a = R\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{R}\right)^2\right)\right]$$

$$d = \frac{b^2}{2R}.$$

Tangenten) = MH ($\perp$ Korden) og $AI = AH$; men Størrelserne MH og AH findes i Tabel I under henholdsvis »Halve Korde« og »Ordinat«. Da Tabel I gælder for Radius 1000, er det nødvendigt først at reducere Buelængden, der skal afsættes, til denne Radius, og senere, naar Abscisse og Ordinat er fundne, da atter at foretage Reduktion til den benyttede Radius.

Eksempel. I en Bue med 500 Meters Radius skal afsættes et Punkt i Afstanden 41.40 m fra Tangentpunktet; denne Bue fordoblet er 82.80 m, der reduceret til Radius 1000 er 165.60 m; med dette Tal gaar man da ind i Tabel I: Rub. »Kurve« og finder om fornødent ved Interpolation Abscisse og Ordinat, der dividerede med 2 giver den søgte Abscisse og Ordinat.

181. Naar Toppunktsvinklen er lille, saa at Kurveafstanden bliver meget stor, eller naar Terrænforholdene er ugunstige for Afsætningen af Kurvepunkterne fra Hovedtangenterne, staar man sig ved at indføre en Hjælpetangent ST. Det er da naturligt (Fig. 196) at lade den tangere Kurven i Midtpunktet M. Denne Hjælpetangent afsættes med god Kontrol ved Hjælp af Stykkerne

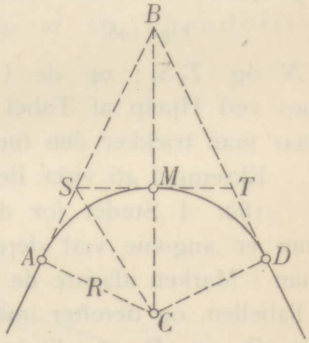


Fig. 196.

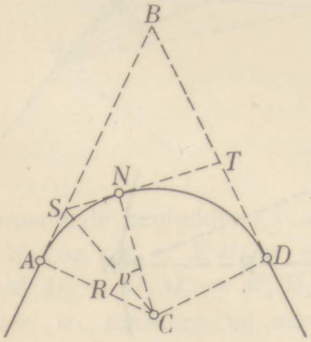


Fig. 197.

$$AS = DT = SM = MT = R \operatorname{tg} \frac{C}{4}.$$

Hver enkelt af Kurvens Halvdele kan nu beregnes og afsættes for sig paa sædvanlig Maade.

Kræver Terrænforholdene det, kan man ogsaa lade Hjælpetangenten røre i et hvilketsomhelst af Kurvens Punkter N (Fig. 197). Af Buen AN beregnes da Centervinklen v, hvorefter haves

$$AS = SN = R \operatorname{tg} \frac{v}{2} \quad \text{og} \quad DT = TN = R \operatorname{tg} \frac{C - v}{2}.$$

Hjælpetangenten afsættes som ovenfor ved disse Stykker, og hver enkelt af Kurvens Stykker beregnes og afsættes for sig.

Er Terrænforholdene særlig vanskelige, kan det blive nødvendigt i Stedet for en Tangent at benytte en Sekant. En

saadan $S_1 T_1$ (Fig. 198) antages udstukken paa det for Maalingen bekvemmeste Sted. Vinkel $BS_1 T_1 = v$ maales og som Prøve helst tillige Vinkel $S_1 T_1 B$; ligeledes maales AS_1 og DT_1.

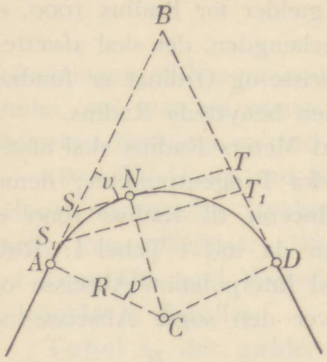


Fig. 198.

Tænker man sig Tangenten ST lagt $\neq S_1 T_1$, vil man af Vinkel v, der er lig Centervinklen svarende til Buen AN, kunne bestemme AS og derefter $SS_1 = AS - AS_1$. De Abscisser, der beregnes eller bestemmes ved Hjælp af Tabel II i Forhold til Tangenten NS, kan afsættes ud ad Linjen $T_1 S_1$ fra Skæringspunktet mellem CN og $T_1 S_1$; og de Ordinater, der beregnes eller bestemmes ved Hjælp af Tabel II, kan ligeledes afsættes fra $T_1 S_1$, naar man trækker den fundne Ordinat fra $SS_1 \sin v$.

Eksempel 46 viser Beregningen af en Cirkelbue-

182. I Stedet for direkte at afsætte de Punkter i Buen, som er angivne ved deres Afstand fra Tangentpunktet, kan man i Marken afsætte de Punkter, hvis Koordinater er angivne i Tabellen, og derefter imellem dem indskyde de søgte Punkter. Er P_1 og P_2 to direkte afsatte Punkter, og skal P indskydes mellem dem, da har man med stor Tilnærmelse (Fig. 199), idet $\triangle PMP_1 \sim \triangle P_2 MN$,

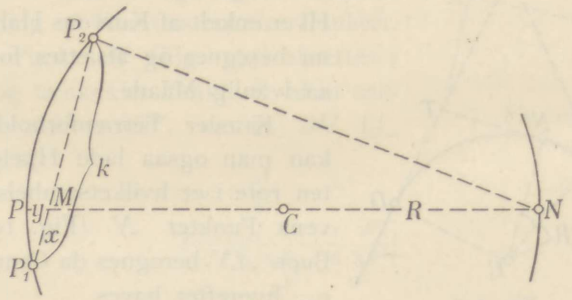


Fig. 199.

$$\frac{y}{x} = \frac{k - x}{2R} \quad \text{altsaa} \quad y = \frac{x(k - x)}{2R},$$

hvor k kan regnes lig Buen $P_1 P_2$ og x lig Buen PP_1, og P kan da afsættes i Forhold til $P_1 P_2$ ved de retvinklede Koordinater x og y.

Denne Fremgangsmaade giver dog Anledning til mere Fejlophobning end den direkte Afsætning af Punkterne.

Hvor Kurven skærer en Terrængenstand (saml. Side 193, 5)), maa Skæringspunktets Beliggenhed i Kurven bestemmes; man kan da, efter at have maalt dets Afstand fra nærmeste Stationeringspunkt, benytte den her angivne Fremgangsmaade eller ved Hjælp af Afstanden fra Tangentpunktet direkte beregne Punktets Koordinater.

II. Afsætning af Kurvens enkelte Punkter ved Vinkelmaaling.

183. Har man valgt Cirkelbuens Radius og bestemt Røringspunkterne A og D (Fig. 200), kan man bestemme Kurvens enkelte Punkter ved Hjælp af to Theodoliter

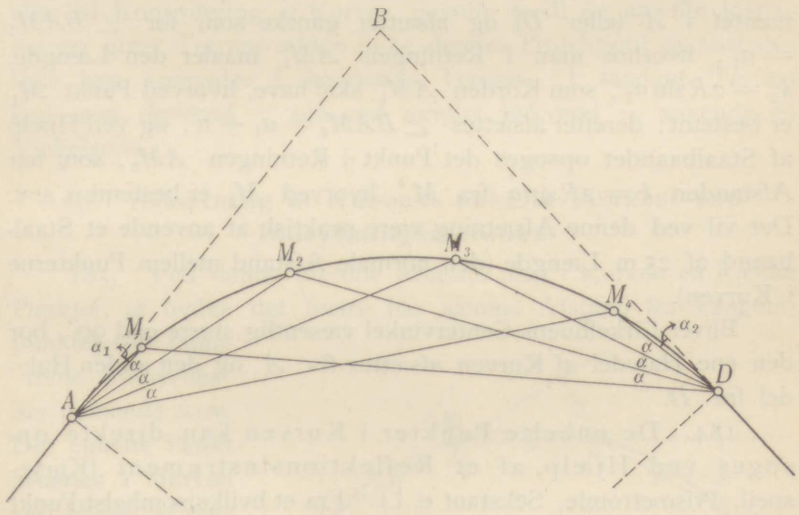


Fig. 200.

opstillede henholdsvis i A og D. Har Punkterne M_1, M_2, M_3 og M_4 i Kurven samme indbyrdes Afstand (ɔ: Buerne $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = b$), da er de tilsvarende Pereferivinkler, α, ligestore, og man har

$$\alpha = \frac{b}{2R}\omega .$$

Forsaavidt AM_1 og M_4D ikke netop er lig de andre Korder, maa de til disse svarende Pereferivinkler, α_1 og α_2, særlig beregnes (af samme Formel).

Afsættes nu med Instrumentet i A $\angle BAM_1 = \alpha_1$ og samtidig med Instrumentet i D $\angle M_1DB = \alpha_2 + 3\alpha$, vil Punkt

M_1 være bestemt, og afsættes derefter i A $\angle BAM_2 = a_1 + a$ og i D $\angle M_2DB = a_2 + 2a$, vil M_2 være bestemt o. s. v.

Naar Sigterne AM og DM, som det i Reglen er Tilfældet, skærer hinanden under temmelig stumpe Vinkler, gør Metoden ikke Fordring paa stor Nøjagtighed; den anvendes derfor mest ved den foreløbige Afsætning, som er nødvendig forud for Jordarbejdet, og da navnlig, naar Maaling er umulig, fordi Punkterne falder i Vand, eller er usikker p. G. af vanskelige Terrænforhold. Er Jordarbejdet fuldendt og Banen jævnet, kan andre Metoder anvendes.

I »Jordan: Geodätische Hülfstafeln« findes en lille bekvem Tabel til Beregning af Værdierne for Periferivinklerne a svarende til Buelængden 20 Meter for Radier fra 100 til 2500 Meter.

Cirkelbuen kan ogsaa afsættes ved Hjælp af en Theodolit og Maaling af Korderne. Man opstiller da Instrumentet i A (eller D) og afsætter ganske som før $\angle BAM_1 = a_1$, hvorhos man i Retningen AM_1 maaler den Længde, $k_1 = 2R \sin a_1$, som Korden AM_1 skal have, hvorved Punkt M_1 er bestemt; derefter afsættes $\angle BAM_2 = a_1 + a$, og ved Hjælp af Staalbaandet opsøges det Punkt i Retningen AM_2, som har Afstanden $k = 2R \sin a$ fra M_1, hvorved M_2 er bestemt o. s. v. Det vil ved denne Afsætning være praktisk at anvende et Staalbaand af 25 m Længde (den normale Afstand mellem Punkterne i Kurven).

Bliver Cirkelbuens Centervinkel væsentlig større end 90°, bør den ene Halvdel af Kurven afsættes fra A og den anden Halvdel fra D.

184. De enkelte Punkter i Kurven kan direkte opsøges ved Hjælp af et Reflektionsinstrument (Kurvespejl, Prismetromle, Sekstant e. l.). Fra et hvilketsomhelst Punkt P i Cirkelbuerne ses nemlig Korden AD (Fig. 201) under samme Vinkel $v = DAT$. Man vil altsaa med Opstilling i A (eller D) kunne »tage denne Vinkel i Instrumentet«, ɔ: indstille dette saaledes, at Spejlbillederne af Stokken i D i det ene og af Stokken i T i det andet Spejl falder i hinandens Forlængelse, og derefter kan man da opsøge

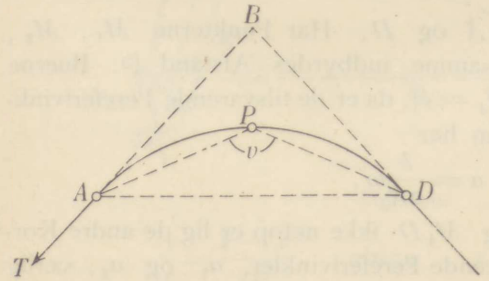


Fig. 201.

Kurvens Punkter, fra hvilke Spejlbillederne af Stokkene i A og D, som bør forsynes med Flag, ligeledes falder i hinandens Forlængelse. Naar $\angle B$ kendes, kan man straks, dersom Instrumentet er indrettet dertil, indstille det paa Vinkel $v = 90^\circ + \frac{B}{2}$. For at Punkterne i Kurven kan faa den rigtige indbyrdes Afstand, maa man ved Maaling med Staalbaandet bestemme hvert enkelt Punkts Afstand fra det foregaaende.

Betingelsen for Reflektionsinstrumenternes Anvendelse paa den angivne Maade er selvfølgelig, at man fra A kan se Stokken i D eller i hvert Fald en Stok stillet i Linjen AD, og at man fra de forskellige Punkter i Kurven kan se baade A og D.

Denne Metode egner sig bedst til foreløbige Afsætninger eller til Kontrolering af Kurver, navnlig fordi de nævnte Instrumenter giver Terrænvinklen (ikke dennes Projektion) og saaledes ikke kan anvendes i hældende Terræn. I saadant Terræn kan man derimod — om end mindre bekvemt — anvende en Vinkelsøjle.

III. Afsætning af Kurvens enkelte Punkter ved Indrykningsmetoden.

185. Ved denne Metode afsætter man i Kurven en Række Punkter, af hvilke det første har samme Afstand fra Tangentpunktet, som Punkterne indbyrdes har, passende 20 m. Det enkelte Punkt afsættes i Marken ved Hjælp af dets Afstand fra det foregaaende og dets Afstand fra Sekanten gennem de to foregaaende Punkter.

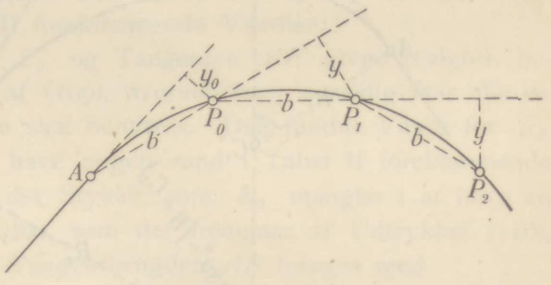


Fig. 202.

Idet Korderne regnes lig Buerne b, har man med Betegnelserne paa Fig. 202, $y_0 = \frac{b^2}{2R}$ og $y = \frac{b^2}{R}$ (saml. Anm. 1, Side 258). Naar Kurvens Konstanter er beregnede og Tangentpunktet afsat i Marken, kan Punkterne i Kurven nu afsættes saaledes: En Stikke sættes i A, med Staalbaandet opsøges P_0 saaledes, at det faar Afstanden b fra A og Afstanden y_0 fra Tangenten,

derefter sættes en Stikke i P_0, og P_1 opsøges saaledes, at det faar Afstanden b fra P_0 og y fra Sekanten gennem A og P_0 o. s. v.

Det ligger i Sagens Natur, at Fejlophobningen bliver betydelig, hvorfor Metoden ikke kan give nogen stor Nøjagtighed; men den er meget hurtig og særdeles anvendelig, hvor Terrænforholdene vanskeliggør Anvendelsen af de andre Metoder.

Vil man have Punkter, med bestemte Afstande fra Linjens Begyndelsespunkt, kan man gaa frem som angivet i Punkt 182.

To hinanden tangerende Cirkelbuer.

186. Undertiden kan Terrænforholdene gøre det nødvendigt at indføre en Kurve, som rører de to Tangenter i forskellig Afstand fra Vinkelpunktet. Kurven kan da sammensættes af to Cirkelbuer, som har fælles Tangent i Sammenstødspunktet.

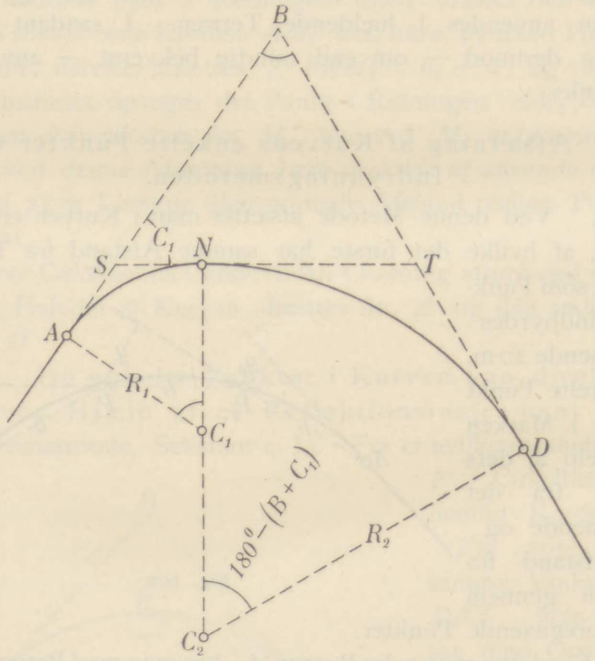


Fig. 203.

Er for en vis Værdi af Vinkel B Tangentlængden BA, R_1 og Vinkel C_1 (Fig. 203) givne (valgte), kan R_2 beregnes. Man har nemlig:

$$AS = NS = R_1 \operatorname{tg} \frac{C_1}{2} \qquad \text{og} \qquad BS = BA - AS$$

$$BT = BS\frac{\sin C_1}{\sin(B+C_1)} \qquad \text{og} \qquad ST = BS\frac{\sin B}{\sin(B+C_1)}$$

$$NT = TD = ST - SN$$

samt

$$R_2 = NT \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Ved Indsættelse af de foregaaende Udtryk i Udtrykket for R_2 faas

$$R_2 = \left(BS\frac{\sin B}{\sin(B+C_1)} - R_1 \operatorname{tg}\frac{C_1}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C_1)$$

$$R_2 = \left(BA - R_1 \operatorname{tg}\frac{C_1}{2}\right)\frac{\sin B}{2\cos^2\dfrac{B+C_1}{2}} - R_1 \operatorname{tg}\frac{C_1}{2}\operatorname{tg}\frac{B+C_1}{2}$$

$$R_2 = BA\frac{\sin B}{2\cos^2\dfrac{B+C_1}{2}} - R_1 \operatorname{tg}\frac{C_1}{2}\left(\frac{\sin B}{2\cos^2\dfrac{B+C_1}{2}} + \operatorname{tg}\frac{B+C_1}{2}\right),$$

$$R_2 = BA\frac{\sin B}{2\cos^2\dfrac{B+C_1}{2}} - R_1 \sin\frac{C_1}{2}\,\frac{\sin\left(B+\dfrac{C_1}{2}\right)}{\cos^2\dfrac{B+C_1}{2}} \quad . \quad . \quad (110)$$

Dette sidste Udtryk (110) angiver den almindelige Relation mellem R_1, R_2, $\angle C_1$ og Tangentlængden AB; disse Størrelser er vel alle afhængige af Terrænets Form, men de lader sig dog i Reglen ændre lidt, saa at R_1 og R_2 kan faa runde i Krøhnkes Tabel II forekommende Værdier.

Er da R_1, $\angle C_1$ og Tangenten AB givne (valgte), beregnes R_2 lettest af (109), hvorved man samtidig faar alle de øvrige Stykker, som skal benyttes. Den fundne Værdi for R_2 vil imidlertid ikke have nogen rund i Tabel II forekommende Værdi, men er x det Stykke, som R_2 mangler i at have en saadan Værdi, vil den, som det fremgaar af Udtrykket (110), opnaa denne, naar Tangentlængden AB forøges med

$$2\,\frac{\cos^2\dfrac{B+C_1}{2}}{\sin B}\,x.$$

Naar Radierne og den ene Tangentlængde saaledes er fastslaaede, foretages Beregningen paa ny, og hver af Kurvens to Dele kan nu afsættes for sig paa sædvanlig Maade.

At forandre paa Vinkel C_1 istedenfor paa Tangentlængden var vel muligt men meget besværligt, hvorimod den angivne Fremgangsmaade næppe vil volde Vanskeligheder, naar man ved

en forud for Beregningen gaaende Konstruktion har fundet passende Værdier for AB, R_1 og C_1.

Overgangskurver.

187. Naar en Banelinje krummer, lægger man som bekendt den ydre Skinne højere end den indre, hvorved man tilstræber at lade Togets Vægt modarbejde Centrifugalkraften. Hvormeget den ydre Skinne skal hæves over den indre er foruden af Kørehastigheden, hvis Maksimumsværdi benyttes, afhængigt af Banens Krumningsradius paa vedkommende Sted, og det er derfor nødvendigt, at Overgangen fra en Krumningsradius til en anden foregaar ganske jævnt; men denne Fordring er ikke tilfredsstillet ved Banelinjer, der er sammensatte af rette Linjer og Cirkelbuer, som tangerer disse; thi Krumningsradierne springer tværtimod i Tangentpunktet over fra ∞ til en forholdsvis lille Størrelse; man indfører derfor ved Jernvejsanlæg mellem den rette Linje og den denne tangerende Cirkelbue en saakaldt Overgangskurve, som altsaa maa tilfredsstille følgende Betingelser:

1. Krumningsradien maa variere saaledes, at Ligevægtsbetingelsen er tilfredsstillet paa ethvert Punkt i Kurven, naar der forudsættes, at den ydre Skinnes Stigning er jævn, (ɔ: at det Stykke, som den er hævet over den indre, vokser proportionalt med Kurvens Længde fra o i Røringspunktet med den rette Linje).
2. Den maa tangere den rette Linje, og i Røringspunktet maa dens Krumningsradius være ∞.
3. Den maa tangere Cirkelbuen, og i Røringspunktet maa dens Krumningsradius være lig Cirklens.

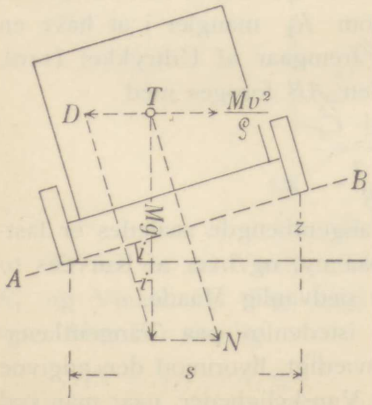


Fig. 204.

For at søge Ligevægtsbetingelsen vil vi tænke os, at den i Fig. 204 i Tværsnit viste Vogn, hvis Masse er M, ruller med Hastigheden v paa en Kurve, som har Krumningsradius ϱ og Sporvidden s, og hvis ydre Skinne er hævet Stykket z over den indre, saa at ABs Hældning mod den vandrette Plan bliver i.

I Tyngdepunktet T virker da Tyngden Mg lodret nedad (g er Akcelerationen) og Cen-

trifugalkraften $\frac{Mv^2}{\varrho}$ i vandret Retning. Tyngden kan opløses i Vognens Tryk TN paa Skinnerne og den vandrette Komposant $TD = Mg \operatorname{tg} i$, hvilken sidste skal ophæve Centrifugalkraften, saa at Ligevægtsbetingelsen bliver

$$\frac{Mv^2}{\varrho} = Mg \operatorname{tg} i$$

eller, da $\operatorname{tg} i = \frac{z}{s}$,

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{gz}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Henføres nu Banekurven (Overgangskurven) til et retvinklet Koordinatsystem med x-Akse udad Tangenten og Begyndelsespunkt i Kurvens Røringspunkt med denne (Fig. 205), saa er, naar l betegner Kurvens Længde fra Begyndelsespunktet og $\frac{1}{n}$ den ydre Skinnes Stigningsforhold,

$$z = \frac{1}{n} l,$$

eller, da l for denne flade Kurve kan erstattes med den tilsvarende Abssisse x,

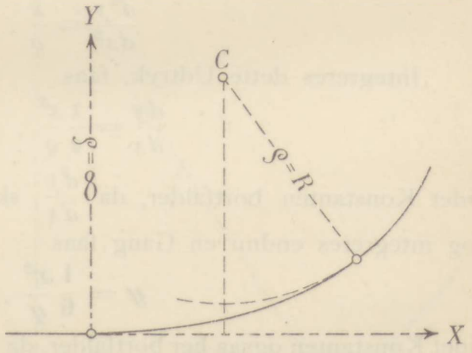


Fig. 205.

$$z = \frac{1}{n} x,$$

hvilket indsat i (α) giver

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{g}{snv^2} x$$

eller, naar man for Kortheds Skyld sætter

$$q = \frac{snv^2}{g},$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{x}{q}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

der altsaa er Ligevægtsbetingelsen.

Vi vil nu søge Ligningen for en Kurve, som tilfredsstiller de tre foran angivne Betingelser.

ad. 1. Det almindelige Udtryk for en Kurves Krumningsradius

$$\varrho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

kan, naar Kurven saaledes som her er flad — hvorved $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ bliver forsvindende i Forhold til 1 — erstattes af

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Ligevægtsbetingelsen vil altsaa ifølge (β) være tilfredsstillet for en Kurve, naar

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

Integreres dette Udtryk, faas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{q} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

idet Konstanten bortfalder, da $\frac{dy}{dx}$ skal være 0 for $x = 0$; og integreres endnu en Gang faas

$$y = \frac{1}{6}\frac{x^3}{q} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

idet Konstanten ogsaa her bortfalder, da y skal være 0 for $x = 0$.

Konstanten $q = \frac{s\,n\,v^2}{g}$ er navnlig afhængig af Kørehastigheden v; for Meter er $q = 12000$ en almindelig benyttet Værdi.

Det vil heraf ses, at de Tilnærmelser, som er eller vil blive gjorte p. G. af Kurvens Fladhed er berettigede.

(113) er Ligningen for den kubiske Parabel, der benyttes som Overgangskurve.

ad. 2. Den fundne Ligning (113) tilfredsstiller Betingelsen 2, da, som alt paavist,

y bliver 0 for $x = 0$,

$\frac{dy}{dx}$ bliver 0 for $x = 0$,

og da

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} = \frac{q}{x} \text{ bliver } \infty \text{ for } x = 0.$$

ad. 3. Kaldes Koordinaterne til Røringspunktet B (Fig.

206) mellem Kurven og Cirklen l og b, saa vil Fordringen om, at Kurvens Krumningsradius i dette Punkt skal være lig Cirklens Radius R, være udtrykt ved

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} = \frac{q}{l} = R,$$

eller

$$\boldsymbol{l = \frac{q}{R}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (114)$$

hvortil ifølge Kurvens Ligning svarer

$$\boldsymbol{b = \frac{l^3}{6q}}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (115)$$

l betegner tillige p. G. af Kurvens Fladhed Kurvelængden.

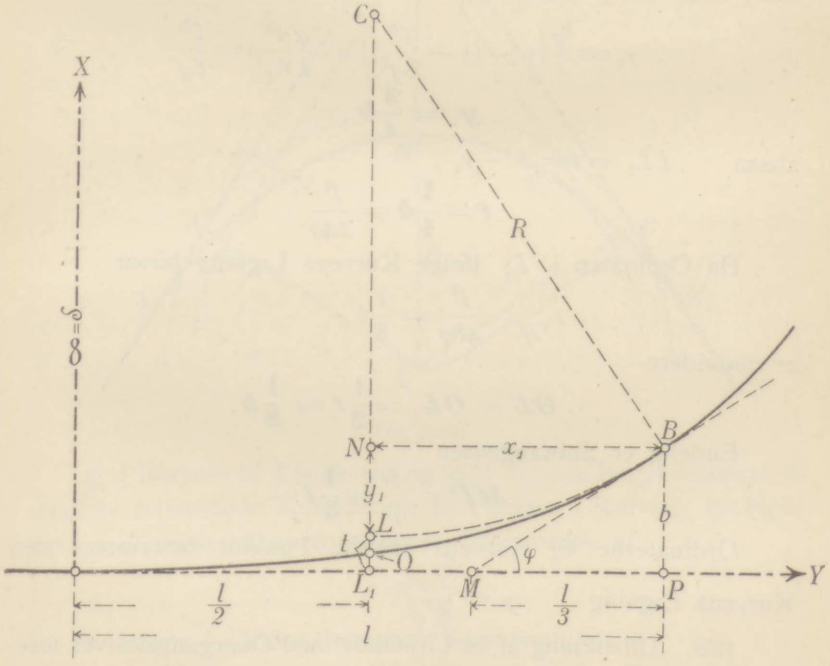


Fig. 206.

At Cirklen og Kurven skal have fælles Tangent i Punkt B, kan udtrykkes ved, at Radius BC skal staa vinkelret paa Kurvens Tangent BM, hvis Vinkel φ med Abscisseaksen er bestemt ved $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{l^2}{2q}$, eller, naar Buen sættes i Stedet for Tangens,

$$\varphi = \frac{l^2}{2q}.$$

Man skal altsaa have $\angle BCN = \varphi$, hvorved faas

$$BN = x_1 = R\varphi = \frac{q}{l}\frac{l^2}{2q}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{l}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

Herved er da Kurvens Stilling i Forhold til Cirklen bestemt.

Det vil imidlertid være let at finde endnu nogle Stykker til nærmere Bestemmelse af Kurven. Man har nemlig (Fig. 206)

$$y_1 = R(1 - \cos\varphi)$$

eller, naar $\cos\varphi$ sættes lig $1 - \frac{\varphi^2}{2}$,

$$y_1 = \frac{q}{l}\left(1 - \left(1 - \frac{l^4}{8q^2}\right)\right) = \frac{q}{l}\frac{l^4}{8q^2} = \frac{l^3}{8q}$$

$$\boldsymbol{y_1 = \frac{3}{4}b},$$

altsaa $LL_1 = t = b - y_1$,

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{4}b = \frac{l^3}{24q}}.$$

Da Ordinaten i L_1 ifølge Kurvens Ligning bliver

$$\frac{l^3}{48q} = \frac{1}{8}b,$$

er endvidere

$$\boldsymbol{OL = OL_1 = \frac{1}{2}t = \frac{1}{8}b}.$$

Endelig er Subtangenten

$$\boldsymbol{MP = \frac{b}{\varphi} = \frac{1}{3}l}.$$

Ordinaterne til Kurvens enkelte Punkter bestemmes ved Kurvens Ligning $y = \frac{1}{6}\frac{x^3}{q}$.

188. Udstikning af en Cirkelbue med Overgangskurver foregaar da saaledes:

1) $\angle B$ (Fig. 207) maales som sædvanlig, en Værdi fastslaas for q, og en Værdi vælges for Cirklens Radius R.

2) Man beregner i Henhold til foranstaaende

$$l = \frac{q}{R} \qquad \text{og} \qquad t = \frac{l^3}{24q}.$$

Tangentlængden $BA = (R + t)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$

Kurveafstanden $BM = (R + t)\sec\frac{C}{2} - R$

} altsaa for Radius $R + t$

Kurven $AN_1MN_2D = \frac{RC}{\omega}$

eller Kurven $NN_1MN_2N_3 = \frac{RC}{\omega} + l$.

3) Man afsætter Tangentpunkterne A og D. Fra A afsættes $AN = AF = \frac{l}{2}$, i F Ordinaten b og i A Ordinaten $\frac{t}{2}$, hvorved Overgangskurvens Begyndelses-, Ende- og Midtpunkt er bestemte.

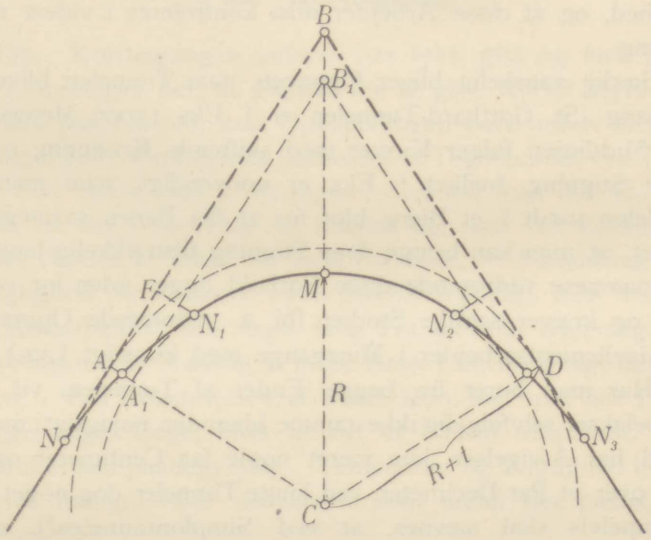


Fig. 207.

4) I Forhold til Tangenten og med N som Begyndelsespunkt afsættes retvinklede Koordinater til Punkter i Kurven; for Punkterne i Overgangskurven beregnes Ordinaterne af

$$y = \frac{x^3}{6l};$$

for Punkterne i Cirklen beregnes Koordinaterne af

$$x = R \sin v \qquad \text{og} \qquad y = 2R \sin^2 \frac{v}{2},$$

hvor

$$v = \frac{b}{R}\omega,$$

eller ved Hjælp af Kröhnkes Tabeller; men de saaledes beregnede Koordinater er angivne i Forhold til Tangenten A_1B_1 med Begyndelsespunkt i A_1; Abscisserne maa altsaa forøges med $\frac{l}{2}$ og Ordinaterne med t. (Man kan naturligvis ogsaa afsætte de fundne Abscisser fra A).

Eksempel 47 viser den fuldstændige Beregning af en saadan Kurve.

Anmærkning. En særlig Anvendelse finder det i denne § fremsatte ved Udstikning af Tunneler. Naar man betænker, hvilke umaadelige Arbejder og Bekostninger, der er forbundne med Tunnelanlæg, vil det forstaas, at de forud for disse gaaende Opmaalings- og Nivellementsarbejder saavel som ogsaa Udstikningen af Tunnelens Midtlinje kræver den højeste Grad af Nøjagtighed, og at disse Arbejder maa kontroleres i videst mulige Omfang.

Særlig vanskelig bliver Opgaven, naar Tunnelen bliver meget lang (St. Gotthard-Tunnelen er f. Eks 15000 Meter), eller naar Midtlinjen følger Kurver med skiftende Krumning og skiftende Stigning, hvilket f. Eks. er nødvendigt, naar man fører Tunnelen rundt i et Bjerg blot for at faa Banen saameget forlænget, at man kan bringe dens Stigning tilstrækkelig langt ned. Det nærmere vedrørende disse Forhold ligger uden for vor Opgave og kræver særlige Studier (bl. a. vedrørende Opmaalings- og Nivellementsarbejder i Minegange med kunstigt Lys.)

Har man boret fra begge Ender af Tunnelen, vil de to Tunnelakser selvfølgelig ikke ramme hinanden nøjagtigt; men som Regel har Afvigelsen kun været nogle faa Centimeter og sjældent over et Par Decimeter, ved lange Tunneler dog noget mere; eksempelvis skal nævnes, at ved Simplontunnelen[1]), der er 19803 m lang, var Sideafvigelsen 0,202 m, Højdeafvigelsen 0,087 m, medens den direkte maalte Længde af Tunnelen var 0,79 m kortere end beregnet af Triangulationen. Ved Gotthardtunnelen[2]) var de tilsvarende Tal 0,49 eller 0,33 m (efter to forsk. Maalinger), 0,05 m og 7,6 m. Det sidste enestaaende store Tal synes at hidrøre fra en mindre nøjagtig Basismaaling.

[1]) Zeitschrift für Vermessungswesen 1905, Side 578.
[2]) Zeitschrift für Vermessungswesen 1902, Side 189.

12. Kapitel.

Tilvejebringelse af Kort.

§ 42. Korttegning.

189. Korttegningen udføres paa tykt, glat og fast Tegnepapir[1]); forlanges det, at Papiret for at give Kortet Styrke skal opklæbes paa Lærred, maa Opklæbningen være udført forud for Korttegningen. Papiret maa fastholdes til Tegnebordet ved Tegnestifter eller bedre ved Korttvingere, derimod maa det ikke fastklæbes, da det i saa Fald vil trække sig, naar det skæres af.

Da Papiret er udsat for *Indkrympning*, o: Forandring p. G. af Fugtighed (se nærmere under Arealberegning), maa man ved store Kortarbejder, som tager lang Tid, jævnlig undersøge Indkrympningen (ved Maaling af nogle lange Linjer) og tage den i Beregning. Ved Konstruktion af større Kort bør man lade Papiret henligge nogle Dage, efter at det er bleven udspændt, inden Konstruktionen paabegyndes. Temperatur og Fugtighed bør da, saa vidt muligt, være de samme som under det paafølgende Tegnearbejde.

190. Korttegningen begynder med Inkonstruktion af Hovedpunkter og Hovedlinjer.

Er Opmaalingen udført som en selvstændig Linjetriangulation, maa man altsaa begynde med Trekantnettet.

Først indtegnes Grundlinjen, idet man sørger for at lægge den saaledes paa Papiret, at der bliver rigelig Plads paa dette til Kortet, og helst saaledes, at Nord vender opad paa Papiret.

Dernæst konstrueres de Trekanter, som hviler paa Grundlinjen. I Reglen vil Siderne i disse Trekanter være saa store,

---

[*]) I Henhold til Landbrugsministeriets Cirkulære af 6. Juli 1906 Punkt 11 skal Landinspektører til alle Udstykningskort benytte det af Statens kontrolerede Tegnepapir af Stofklasse I, Styrkeklasse II. Dette kan købes tykt eller tyndt i Ruller à 50 Alen henholdsvis til Pris 27 Kr. 50 Øre og 20 Kr. pr. Rulle
i — à 10 — — — — 6 » 00 » — 4 — 50 Ø. » —
Desuden kan det tynde Tegnepapir faas i Ark paa
8 × 13 Tom. til Pris 3 Kr. 30 Ø. for 100 Ark eller 7 Kr. 50 Ø. for 250 Ark
og 13 × 16 — — — 6 » 60 » — 100 — — 15 » 00 » — 250 —.

at man ikke kan tage dem i Passeren; man benytter da følgende Fremgangsmaade:

De Punkter A og B (Fig. 208) i Grundlinjen, fra hvilke de to andre Trekantsider AM og BM udgaar, afsættes, og man tegner da ved den ene Ende af den til AB svarende Linje ab paa Papiret en lille med ABM ligedannet Trekant ab_1c_1 (Siderne kan f. Eks. være en Tiendedel af den stores), fra a udad ac_1 og dens Forlængelse afsættes am_1 med den til AM svarende Længde, bm_1 trækkes, og fra b afsættes bm_2 med den til BM svarende Længde. Som Regel vil m_1 og m_2 ikke falde sammen, og man oprejser da i m_1 en Perpendikulær paa am_1 og i m_2 en Perpendikulær paa bm_2; Skæringspunktet mellem disse, som træder i Stedet for Buerne med Radierne am_1 og bm_2, vil da være det forlangte Punkt c.

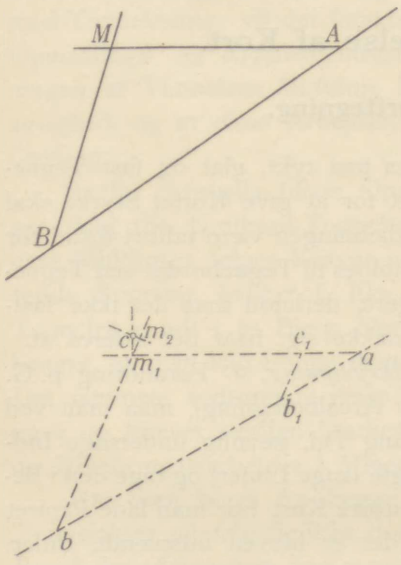


Fig. 208.

Paa denne Maade konstrueres efterhaanden de Trekanter, som dannes af Hovedlinjerne. Derefter afsættes Skæringspunkterne mellem Hoved- og Prøvelinjerne, og man undersøger, om disses Længder stemmer overens med de i Marken tagne Maal, samt, hvor Prøvelinjerne skærer flere end to Hovedlinjer, om alle Skæringspunkterne ligger i en ret Linje. Der bør ved denne Undersøgelse ikke vise sig kendelige Fejl. Grove Fejl kan rettes; men viser der sig Smaafejl f. Eks. paa $^1/_2$—1 Meter i $^1/_{4000}$, er der intet andet at gøre end at tegne Linjenettet om.

Ved større Opmaalinger har man beregnet Koordinaterne til alle Hovedpunkterne, og man maa da for at kunne indkonstruere disse, begynde med at *tegne et Kvadratnet.* Blandt de mange Maader, paa hvilke dette kan udføres, skal her nævnes et Par.

1) Fra et af det nogenlunde rektangulært afskaarne Papirs Hjørner C (Fig. 209) afsættes ud ad de to Sider CA og CB henholdsvis den Længde Cp og den Bredde Cp_1, som man ønsker, at Kvadratnettet skal have; gennem Papirets Midtpunkt

o trækkes en Linje $ab \neq pp_1$. Diagonalen i Kvadratnettet beregnes, og dens halve Længde afsættes fra o ud mod a. Denne Del af Konstruktionen, ved hvilken man bestemmer Diago-

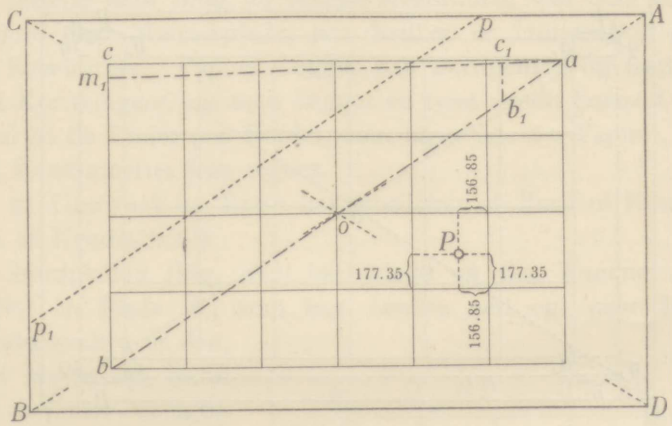


Fig. 209.

nalens Beliggenhed og dens ene Endepunkt, kræver selvfølgelig ikke stor Nøjagtighed; derimod maa ved den følgende Konstruktion af selve Kvadratnettet anvendes den største Omhu. Diagonalens Længde afsættes nu nøjagtig fra a, hvorefter man, paa samme Maade som foran angivet for den almindelige Trekant, konstruerer den retvinklede Trekant, hvilket i Reglen gaar meget let, netop fordi Trekanten er retvinklet, saa at bcs Beliggenhed er bestemt ved m_1 (idet $am_1 = ac$).

Naar begge de retvinklede Trekanter er konstruerede, haves en Prøve deri, at de to Diagonaler skal være nøjagtig lige lange. Er denne Prøve tilfredsstillet, afsættes ud ad Kateterne passende Stykker (f. Eks. paa 1 dm.), og endelig trækkes rette Linjer mellem de tilsvarende ligeoverfor hinanden liggende Punkter. Sluttelig maa alle Kvadratnettets Hjørner betegnes med en lille Punkternaal, og alle Kvadratsider og Diagonaler maa prøves. Viser der sig ved denne Prøve kendelige Fejl, bør Kvadratnettet kasseres.

2) Paa Papiret trækkes to Diagonaler AC og BD (Fig. 210), deres Skæringspunkt o markeres meget omhyggeligt med en Punkternaal; derefter afsættes fra o udad Diagonalerne 4 lige store Stykker oa, ob, oc og od, og de 4 afsatte Punkter forbindes. Ønsker man, at Kvadratnettet skal have bestemte Dimensioner a_1b_1 og a_1d_1, maa ab og ad maales paa Papiret,

hvorefter man afsætter $p = \frac{1}{2}(ab - a_1b_1)$ og $q = \frac{1}{2}(ad - a_1d_1)$, saaledes som vist paa Figuren. Herved er Kvadratnettets be-

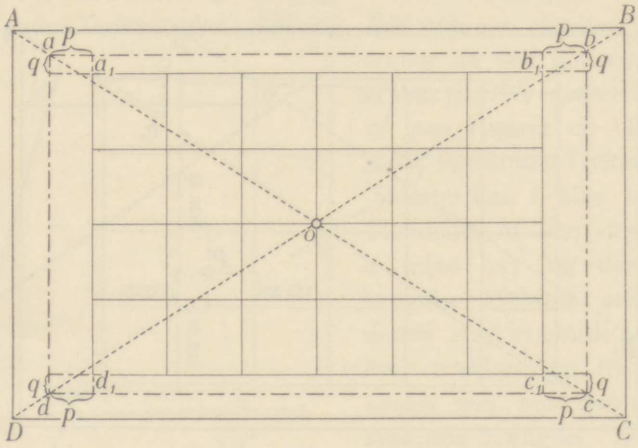


Fig. 210.

grænsende Rektangel $a_1b_1c_1d_1$ bestemt. Metoden er ganske nem; men den giver neppe saa gode Resultater som den første.

3) Følgende Metode er set anvendt: Paa en tværs over Papiret tegnet ret Linje AB (Fig. 211) oprejses ved flere med Stangpasser afsatte Buer en Vinkelret DC. Derefter afsættes udad AB fra Midten ud til begge Sider Stykker lig Kvadratsiden. Med Trekant oprejses nu Perpendikulærerne EF, GH o. s. v. (de stiplede Linjer) dog ikke i Inddelingspunkterne, ud ad disse Linjer afsættes Punkterne m, n, o, p o. s. v. fra AB med en indbyrdes Afstand lig Kvadratsi-

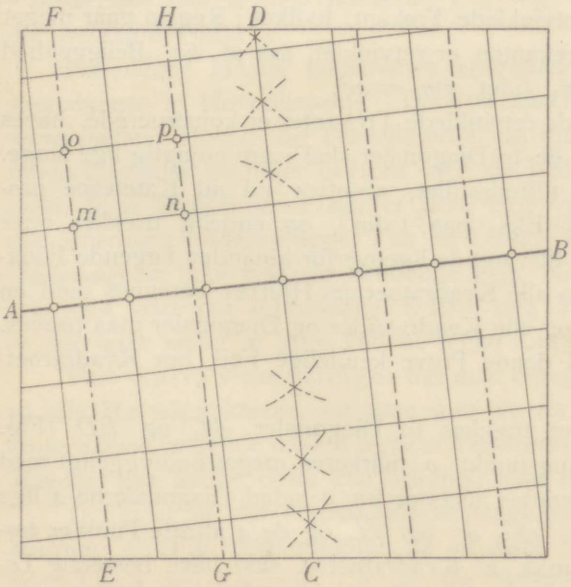


Fig. 211.

den; herved kan man konstruere Linjerne $\neq AB$, og nu endelig bestemmes Kvadratnettets Hjørner ved Maal fra CD.

Paa Figuren er Kvadratnettets Linjer ikke $\neq$ Papirets Rande.

4) Har man Brug for mange Kvadratnet, kan man benytte et Bord med Marmorplade, paa hvilket er indridset et meget fint Kvadratnet. Papiret lægges paa Bordpladen og fastholdes med Korttvingere, og man lægger en tynd stærkt belastet Staallineal til de Linjer paa Bordet, som rager udenfor Papiret, hvorved Kvadratnettet kan tegnes.

5) Dennert og Pape har fabrikeret et Bord til Konstruktion af Kvadratnet.[1])

Bordpladen (Fig. 212) har yderst en fast Ramme R og inderst en Plade B, som kan sænkes ned og, naar Papiret er udspændt over den, atter hæves op, indtil den kommer nøjagtig i Rammens Plan. Paa Rammen er anbragt saadanne Anlæg, at man ved efterhaanden at lægge Linealen L til to og to tilsvarende kan tegne alle Kvadratnettets Sider.

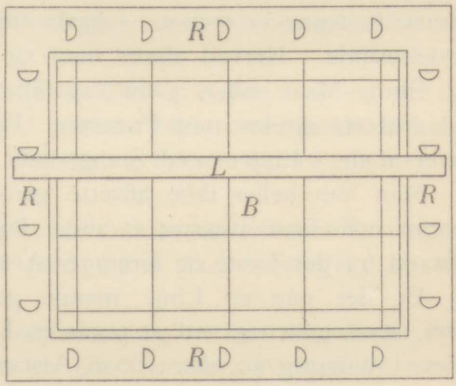


Fig. 212.

Naar Kvadratnettet er færdigt, indkonstrueres Hovedpunkterne ved deres Koordinater. Punkt P (Fig. 209) med Koordinaterne $y = 1843.15$ m og $y = 577.35$ m indkonstrueres i Kvadratdratnettet, hvis Sider antages at være 400 m saaledes: man afsætter de to med 177.35 betegnede Stykker og trækker den vandrette punkterede Linje og de to med 156.85 betegnede Stykker og trækker den lodrette punkterede Linje, hvorved P er bestemt. Hver Gang et Hovedpunkt er konstrueret, bør man prøve dets Afstand (kendt fra den foreliggende Beregning) fra mindst et tidligere konstrueret Hovedpunkt.

Efter de brudte Linjer indkonstrueres Maalelinjerne.

Først naar alle Prøver er tilfredsstillede, og Linjenettet altsaa maa antages frit for grove Fejl, paabegyndes Konstruktionen af Terrænpunkterne.

---

[1]) Coradis Koordinatograf (se Instrumentlæren).

Ved straks at indkonstruere alle Hovedpunkter opnaas, at denne Del af Arbejdet bliver fuldendt saa hurtigt, at Papiret næppe i den forløbne Tid vil være undergaaet Forandring p. G. af Indkrympning. Ved den paafølgende Konstruktion af Terrænpunkterne, hvor man kun afsætter korte Maal, vil Indkrympningens Indflydelse i Reglen være ganske forsvindende.

191. Ved Indkonstruktion af Terrænpunkterne tager man en Hovedlinje for ad Gangen, afsætter nogle faa Fodpunkter, derefter de tilsvarende Perpendikulærer, og umiddelbart herefter forbindes vedkommende Terrænpunkter; ligeledes indkonstrueres efterhaanden de Terrænpunkter, som er bestemte paa anden Maade.

Det maa endvidere iagttages, at man, hver Gang der i Maalebogen forekommer en Henvisning til en anden Linje — forsaavidt denne er tegnet — straks trækker vedkommende Forbindelseslinje. Herved sikrer man sig mod at glemme noget.

Større Maal end c. 1 dm kan ikke med tilstrækkelig Sikkerhed afsættes direkte med Passeren. Punktet afsættes da tilbage fra et af de i Linjen med Stangpasser forud afsatte Punkter.

Man kan heller ikke afsætte ganske korte Maal nøjagtigt, hvorfor man først afsætter et andet Punkt i et Par Centimeters Afstand fra det første og foretager Afsætningen fra dette Punkt.

Er der paa en Linje mange ganske korte Perpendikulærer, staar man sig ved at tegne en Linje parallel med Hovedlinjen i nøjagtig 50 eller 100 m Afstand fra denne og afsætte Punkterne i Perpendikulærerne fra disses Skæringspunkter med Parallelen. Medens Afstandene her til Lands afsættes ved Hjælp af Passer og Transversalmaalestok, anvendes andetsteds hyppig en Kantmaalestok, og det paastaas, at man med Øvelse ved Hjælp af en god Kantmaalestok kan opnaa ligesaa stor Nøjagtighed som med Passer og Transversalmaalestok.

Terrænpunkterne kan ogsaa indkonstrueres ved Hjælp af en Koordinatograf (se Instrumentlæren).

Af andre Korttegningsapparater skal her kun nævnes en Transportør, hvis bevægelige Ben er forsynet med en Kantmaalestok. Dette Instrument egner sig til Konstruktion af Kort efter tachymetrisk Opmaaling.

192. Naar Konstruktionen er færdig, trækkes Kortet op med Tusk. For at de enkelte Punkter kan staa klart, trækkes Forbindelseslinjerne ganske tæt til men aldrig helt igennem disse. Omkring de vigtigste Punkter — navnlig Skelpunkterne — sættes en lille Tuskkreds med en Jomfrupasser.

Der findes ingen absolute Regler for Matrikulskortenes Optrækning og Udstyrelse. Da det imidlertid er en stor Fordel, at økonomiske Kort udføres saa ensartede som muligt, skal her til Vejledning meddeles nogle af de almindeligst fulgte Regler:

1. Alle Skel, Jordvolde, Vejkanter, Grøftekanter, Bygninger, Indhegninger, Strandgrænser, Vandhuller m. m. optrækkes med fulde Linjer, Skellene stærkere end de øvrige Linjer.
2. Grøfter af mindre Bredde (indtil 2 m i $^1/_{4000}$) betegnes med en enkelt Linje (Midtlinjen); Vejgrøfter, der altid hører til Vejens Areal, kan ved de smaa Maalestoksforhold ikke særlig betegnes men indbefattes i Vejarealet (se nedenfor Punkt 13). Bredere Grøfter angives derimod ved begge Grøftekanter.
3. Markveje og Vejspor tegnes med to, Gangstier med én punkteret Linje.
4. Bevoksningsgrænser (Eng-, Skovgrænser o. s. v.), der ikke er skarpt betegnede i Marken, tegnes med prikkede Linjer.
5. Taksationsgrænser, Takster og Taksationslitra paaføres med Karmin.
6. Punkterne i Kvadratnettet omkredses, hvorhos Retningerne af Siderne angives med 2 mm lange Streger; alt med blaa Farve.
7. Polygonpunkterne omkredses, og om de trianguleredе Punkter tegnes desuden en lille Trekant, hvorhos de nævnte Punkters Betegnelse paaføres. Endvidere optrækkes alle Polygonsider og Maalelinjer i en Længde af 2 mm ved hver Ende, alt med Blaat.
8. Langs Skellene mellem forskellige Matr.Nr. lægges en graa Skygge (svag sort Tusk), og Skyggerne maa lægges saaledes, at de angiver, hvorvidt Veje, som fører langs Skellet mellem to Matr.Nr., skal henregnes til det ene eller det andet af disse. Regnes Vejen ikke til noget af disse Matr.Nr., maa den have Skygge paa begge Sider. Skyggen lægges saavidt muligt paa den sydlige og østlige Side af Skellet, langs Veje dog altid paa Skellenes ydre Side. Paa Matrikulskortene skal de Skel, der er konstaterede i Henhold til § 6 i Lovene af $^{11}/_5$ 97 og $^6/_4$ 1906 om Jords Udstykning og Sammenlægning m. m. betegnes med en gul Skygge. Paa de i Maalestoksforholdet $^1/_{800}$ optagne nyere Matrikulskort er de Skel, som ikke findes i Marken, og som der-

for er indlagte paa Kortene efter de ældre Kort i $^1/_{4000}$, betegnede med en grøn Skygge.

9. By-, Sogne-, Herreds- og Amtsskel betegnes med Skygge af særlig Farve.

10. En tydelig Beskrivning fordres, ɔ: alle Navne og Matr. Nr. paaføres, og det angives, hvorfra eller hvortil de Veje, som gaar ud over Kortets Grænser, fører.

Naar et Kort kun omfatter en Del af en Bys Jorder, paaskrives Matr.Nr. paa de tilgrænsende Ejendomme af samme By, og Skeludvisere mellem disse maa findes paa Kortet. Er Kortets Begrænsning derimod Byskel, anbringes kun Skeludvisere mellem de forskellige tilgrænsende Byer (Ejerlav), og disses Navne men ikke de enkelte Matr.Nr. paaskrives. Skriften anbringes saaledes, at den staar i sin rette Stilling, naar man har Kortets sydlige Side imod sig.

11. I Kortets øverste venstre Hjørne angives i en Vignet Byens, Sognets, Herredets og Amtets Navn og, forsaavidt Kortet kun omfatter en enkelt eller nogle faa Ejendomme, tillige disses Matr.Nr., endvidere til hvilken Tid og om muligt tillige i hvilken Anledning Kortet er maalt samt Maalerens Navn og Stilling. Under Vignetten maa findes en Maalestok og i Nærheden af denne en Nordnaal.

12. Kortet forsynes med Signaturer i Overensstemmelse med den bag i Bogen anbragte Signaturplan.

13. Kortet farvelægges saaledes:

Vand med Berlinerblaat (langs Grøfter, som er betegnede ved en enkelt Linje, lægges en smal blaa Skygge, og langs den indre Side af Vejgrænser, lægges ligeledes en blaa Skygge, naar der findes Vejgrøfter, som ikke er angivne paa Kortet),

Veje, Vejspor og Gangstier (en smal Skygge langs Linjen) med Terre de Siena; private Veje (hvorved her forstaas Veje, der kun er til Brug for den Mand, over hvis Jord de fører, f. Eks. Veje, der fører fra offentlig Vej ind til Gaardens Bygninger eller fra Bygningerne ud i Marken) farvelægges ikke.

Jærnbaner med Graat (svagt sort Tusk).

Stenhuse med Karmin,

Træhuse med en Blanding af Gummigut og Terre de Siena,

Sand- og Lergrave med sidstnævnte Blanding.

Ved Skovkort benyttes en særlig Signatur (koncentriske

Cirkelbuer) for Tjenestejord; Afdelingsgrænserne betegnes med særlig Maade. Bevoksningens Art angives undertiden ved Farvelægning saaledes: Bøg med Grønt, Eg: Karmin, Ask: Blanding af Karmin og Berlinerblaat, El: Koboltblaat, Birk: Kromgult, Naaletræer (Skyggetræer) Lamp black, Naaletræer (Lystræer): Neutral, Blandet Løvtræ: Terre de Siena.

14. Indeholder Kortet Højdekurver, maa disse helst tegnes med Rødt eller Brunt efter Omstændighederne punkterede eller fuldt optrukne (se herom 3. Afsnit, Side 228).

193. Naar en Opmaaling omfatter saa store Arealer, at disse ikke kan fremstilles paa ét Kort[1]), lader man enten de enkelte Kort have en naturlig Begrænsning, som da helst maa være et Sogne-, By-, eller Ejendomsskel (Matrikulskortene) eller man lader de enkelte Kort være begrænsede af rette Linjer, som danner ligestore Rektangler (Generalstabens Kort). I sidste Tilfælde giver man hvert Kortblad et Nummer eller Navn og lader al Grænsebeskrivelse bortfalde eller anfører i hvert Fald kun Betegnelsen paa de tilgrænsende Kortblade.

Med Hensyn til Udførelsen af Nivellementstegninger henvises til 3. Afsnit, Side 202.

For særlige Arter af Kort saasom Bykort, Jærnbanekort, Havekort, tildels ogsaa Skovkort, o. s. v. maa ved Udfærdigelsen følges særlige Regler og anvendes særlige Signaturer.

§ 43. Kopiering og Mangfoldiggørelse af Kort.

194. *Kopiering* af Kort kan udføres paa forskellige Maader.

I. Ved Gennemprikning tilvejebringes let og hurtigt en Kopi; men Kortet ødelægges ved gentagne Gennemprikninger, og selv om man anvender en meget fin Punkternaal, og Kortet ligger fast og jævnt udspændt, bliver Nøjagtigheden dog ikke særlig stor. Metoden er imidlertid i mangfoldige Aar anvendt ved Kopiering af Matrikulskortene.

II. Kalkering med Kalkerpapir eller Kalkerlærred foregaar hurtigt; men der kræves overordentlig megen Øvelse og Omhu, for at Resultatet kan blive godt; Metoden er meget anvendelig ved Tilvejebringelsen af Krokier eller Skitser, navnlig dersom man kan benytte den paa Kalkerpapiret (Lærredet)

[1]) Matrikulskortene i $^1/_{800}$ maa ikke være større end $50 \times 25\frac{1}{2}$ Decimaltommer.

staaende Kopi, saa at det altsaa ikke bliver nødvendigt atter at føre denne over paa Tegnepapir.

III. Ved Pantografering faas gode Kopier, uden at det foreliggende Kort beskadiges, og man kan derhos faa Kopien i et hvilketsomhelst Maalestoksforhold. Det er saaledes ogsaa muligt, naar Originalkortet har Indkrympning, at tilvejebringe en Kopi i det sande Maalestoksforhold. Vil man bruge Pantografering til at forstørre det foreliggende Kort, maa man ikke gøre Regning paa stor Nøjagtighed; vil man derimod formindske, *minorere* det, bliver Nøjagtigheden fuldt tilfredsstillende.

IV. Ved en ny Konstruktion efter Maalebogen faas de bedste (uegentlige) Kopier; men denne Metode er naturligvis ogsaa den besværligste.

Eksisterer Maalebogen ikke, kan en ny Konstruktion udføres efter en Opmaaling paa Originalkortet, paa hvilket da maa indtegnes de fornødne Linjer, som knyttes sammen. Lettest bliver det — dersom et saadant ikke findes — at tegne et Kvadratnet paa Originalkortet og et andet paa Papiret; de enkelte Terrænpunkter kan da indkonstrueres ved deres Afstande fra to af Kvadratnettets Hjørner. Ved en saadan Konstruktion yder en trebenet Passer, hvis to Ben indstilles fast i en Afstand lig Kvadratsiden, en udmærket Hjælp. Vil man benytte et paa Originalkortet eksisterende Kvadratnet, maa der ved Konstruktionen af det ny Kvadratnet tages Hensyn til Originalkortets Indkrympning.

Skal Kopien have et andet Maalestoksforhold end Originalen, kan man anvende en Reduktionspasser; men Arbejdet bliver besværligt.

Indeholder Kortet kun meget faa Punkter, kan man udføre Kopieringen derved, at man gennem et vilkaarlig valgt Lighedspunkt trækker Linjer til alle Kortets Punkter, hvorefter man deler alle disse Linjer efter det forlangte Forhold enten ved Maaling eller ved Konstruktion (Paralleler).

195. *Kortets Mangfoldiggørelse* kan nu til Dags, efter at Reproduktionskunsten i de senere Aar har gjort store Fremskridt, udføres paa mange Maader. Her skal kun fremsættes Hovedprincipperne for nogle af de vigtigste Metoder.

I. Kobberstik kan udføres som Linjestik eller Radering.

Ved Linjestik overføres Tegningen paa en blankt poleret Kobberplade enten ved Kalkering eller langt bedre ved en »Kalkograf« (en modificeret Pantograf, der i Stedet for Punkter-

naalen har en Diamantspids, som ridser Tegningen ganske let paa Kobberpladen). Tegningen (Spejlbilledet af denne) udføres nu af Kobberstikkeren paa Kobberpladen ved Hjælp af »Gravstik« (et skraat afskaaret firkantet Staal) og »kold Naal«, idet Linjerne graveres i Pladen.

Ved Radering dækkes Kobberpladen af en Ætsgrund, ɔ: en Masse, som modstaar Ætsvandets (svag Salpetersyres) Indvirkning. Tegningen kalkeres nu over paa Ætsgrunden og udføres i denne ved Hjælp af en Radernaal. Derefter omgives Pladen af en Voksrand, saaledes at der dannes en Skaal, hvori Ætsvandet kan hældes. Naar dette har virket i nogen Tid paa Pladen, afhældes det atter. Pladen maa nu eftergaas, og paa de tilstrækkelig ætsede Steder paastryges en Dækfernis, hvorefter Ætsningen fortsættes, til Billedet staar klart overalt.

Radering alene anvendes imidlertid ved Reproduktion af Kort kun til stærke Bjergpartier (fremstillede ved Skravering).

Naar Tegningen paa en af disse Maader er bragt til at staa fordybet i Kobberpladen, anbringes denne paa en varm Jærnplade og indgnides fuldstændig med Kobbertryksværte; derefter aftørres denne atter, saa at Pladen bliver fuldstændig blank paa Overfladen, medens alle Fordybningerne bliver fyldte med Sværte.

Det fugtede Papir lægges nu paa Pladen, som anbringes paa et Brædt med et Ulddække over sig, hvorefter det hele føres gennem en Valsepresse, og Trykket er færdigt. Da Kobberpladen er for blød til at kunne taale mange Aftryk, overtrækker man den undertiden med et Staallag (galvanisk udfældet Jærn).

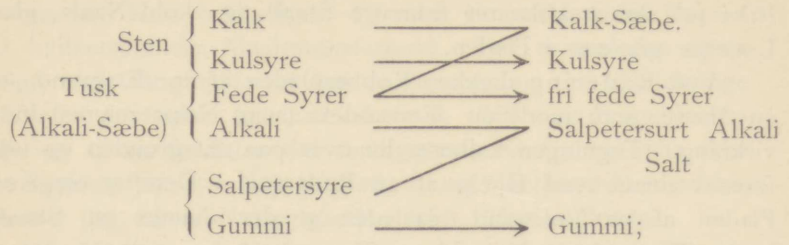
Kobberstikket benyttes nu ikke saa meget som tidligere til Reproduktion af Kort, dels fordi det er dyrt, og dels fordi det er meget vanskeligt at foretage de fornødne Forandringer paa Pladerne, naar Kortene revideres.

Kobberstikket er benyttet ved Fremstillingen af Generalstabens Atlasblade.

II. Litografien beror derpaa, at en porøs Kalksten, »Solenhofer Skifer« ad kemisk Vej kan præpareres saaledes, at den paa nogle Steder bliver uimodtagelig for Trykfarve. I Litografien arbejdes efter den forhøjede eller efter den fordybede Maner.

Ved den forhøjede Maner tegnes Kortet paa den slebne litografiske Sten med »litografisk Tusk«, hvis virksomme Bestanddel er Alkali-Sæbe, men som bl. a. indeholder sort Farve.

Stenen overgydes nu med en Blanding af Gummi og svag Salpetersyre; paa de Steder, hvor Stenen er dækket af litografisk Tusk, foregaar da følgende kemiske Proces:



paa de Steder af Stenen, som ikke er dækkede af Tusk, omdannes den kulsure Kalk til salpetersur Kalk. Stenen er nu dækket af et Gummilag undtagen i Tegningens Linjer, hvor den er dækket af fede Syrer og derfor modtagelig for Tryksværte.

Naar Stenen er saaledes præpareret, lader man en Valse med sort Sværte gaa hen over den fugtige Sten; Sværten afsættes da kun paa de Steder, som var dækkede med litografisk Tusk, og man kan nu tage saamange Aftryk, man ønsker, naar man kun mellem hvert Aftryk lader Valsen gaa hen over Stenen.

Ved den fordybede Maner præpareres Stenen først med Gummiopløsningen, hvorefter den afvaskes. Tegningen indridses nu med skarpe Instrumenter, hvorved Stenens oprindelige Evne til at modtage Trykfarve atter kommer til sin Ret paa disse Steder, naar Stenen er overgydt med Fedtstof (Olje).

Fotolitografi er en forhøjet Maner, hvor Tegningen frembringes ved Fotografiens Hjælp. Af et Glasnegativ tages en Kontaktkopi paa Papir, der er overtrukken med en Gelatinehinde, som man gør lysømfindtlig ved at bade den i en Kromsaltopløsning. Efter Kopieringen har Gelatinen mistet sin Evne til at optage Vand overalt, hvor Lyset har truffet den (ɔ: i Tegningens Linjer), og paa disse Steder vil den derfor kunne optage fed Farve, som den ellers overalt vil sky, naar man fører Farven over Papiret, efter at dette er vel gennemtrukket med Vand. Naar Tegningen paa denne Maade er »udviklet«, lader den sig »overtrykke«, idet man lægger Papiret med Tegningen nedad ovenpaa Stenen, og derefter lader denne gaa gennem Pressen.

Den videre Behandling er som ved »den forhøjede Maner« omtalt.

Ved Farvetryk maa der præpareres en Sten for hver enkelt af Kortets Farver. Farverne paatrykkes da efterhaanden hver for sig. Man vil imidlertid aldrig behøve flere end tre Sten til Farverne, da alle Farver kan kombineres af tre.

De fleste af Generalstabens Maalebordsblade er udførte ad fotolitografisk Vej med eller uden Farvetrykning, i sidste Tilfælde med to Farver; Kortene i $^1/_{100000}$ er ligeledes udførte som »fotolitografiske Farvetryk« med 4 Farver.

Ved Fotozinkografi benyttes en Zinkplade i Stedet for den litografiske Sten, idet denne ligesom hin ved passende Behandling kan bringes til at modtage eller sky Trykfarve.

III. Autografering er en Art Litografi, ved hvilken Tegningen ikke udføres paa Stenen, men overføres paa denne ad mekanisk Vej. Tegningen udføres paa Papir, helst »autografisk Papir«, med »autografisk Blæk«, som omtrent har samme Bestanddele som litografisk Tusk. Papiret gøres vaadt og lægges med Tegningen nedad paa Stenen og et blødt Lag over, hvorefter det hele gaar gennem en Presse, og Tegningen staar nu paa Stenen. Aftryk kan tages som ved Litografering. Tegningen kommer til at staa mindre klart og rent end ved Litografering.

IV. Lyskopiering. Tegningen udføres paa Kalkerpapir, som lægges over et Stykke præpareret, lysfølsomt Papir i en Ramme, og presses op mod en Glasplade; det hele udsættes nu for Lysets Paavirkning i et passende Tidsrum (afhængig af Lysets Intensitet), hvorefter det præparerede Papir afskylles i Vand, og Tegningen træder nu frem paa Papiret ved den negative Kopi med hvide Linjer paa blaa Bund og ved den positive Kopi med sorte Linjer paa hvid Bund.

Ved den negative Kopi er Papiret overstrøget med en Opløsning, som indeholder Ferricyankalium (Rødt Blodludsalt) og grønt Ammonium-Ferricitrat (citronsurt Jerntveilte-Ammoniak). Ved Lysets Indvirkning omdannes det citronsure Jerntveilte-Ammoniak til Jernforiltesalt, og Papiret vil da, naar det bagefter neddyppes i Vand, blive blaat paa de belyste Steder, fordi det røde Blodludsalt med Jernforiltesaltet danner uopløseligt Berlinerblaat, medens der paa de ikke belyste Steder stadig kun er Jerntveiltesalt, som opløses i Vandet.

De fremstillede Blaatryk antager først i Løbet af nogle

Dage den smukkeste Farve; men denne kan hurtig fremkaldes, naar der sættes et Par Draaber Saltsyre til Vandet, eller bedre ved Badning i en Brintoverilteopløsning.

Til den positive Kopi kan anvendes Papir præpareret paa forskellige Maader, som det vil blive for vidtløftigt at omtale her.

V. Hektografering. Tegningen udføres med hektografisk Blæk, som bestaar af en koncentreret Opløsning af Anilinfarve; Tegningen aftrykkes paa en i en Bakke støbt Gelemasse, hvis væsentligste Bestanddele er Lim og Glycerin. Ved at lægge et Papir over og trykke det ned mod Massen overføres Tegningen fra denne paa Papiret. Paa denne Maade kan der tages indtil 80 Aftryk.

VI. Tør Kopi. Da de anførte Reproduktionsmetoder kræver, at Papiret gøres vaadt, vil det næsten altid forandre sine Dimensioner, og da det i de fleste Tilfælde skal passere en Valsepresse, vil det tillige forandre sig uregelmæssigt i de forskellige Retninger. Denne Ulempe har man søgt afhjulpen ved den tørre Kopi, som ogsaa synes at have løst Opgaven smukt. Fremgangsmaaden ved den tørre Kopi er hemmelig.

---

13. Kapitel.

Arealberegning.

§ 44. Grundlaget for Arealberegning.

196. Et Stykke Lands Fladeindhold kan beregnes enten direkte af de ved Opmaalingen tagne Maal eller ved Hjælp af et af Opmaalingen konstrueret Kort. I sidste Tilfælde kan man atter enten beregne Arealet af Maal tagne paa Kortet, eller man kan bestemme det ved et Planimeter eller andet mekanisk Hjælpemiddel.

Det er umiddelbart indlysende, at den første af disse Maader er den bedste, eftersom Maalene kan tages langt nøjagtigere i Marken end paa Kortet.

Ved Fladeindholdsberegning efter Maal maa vedkommende Stykke Land altid inddeles i geometriske Figurer, hvis Areal let kan beregnes.

De Sætninger, som navnlig finder Anvendelse ved Arealberegningen er følgende:

1. Trekantens Areal er det halve Produkt af Grundlinje og Højde.
2. Trekantens Areal er udtrykt ved

$$\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\,,$$

hvor a, b og c er Trekantens Sider, og hvor

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)\,.$$

3. Firkantens Areal er det halve Produkt af en Diagonal og Summen af Højderne paa denne. (Firkanten betragtes som bestaaende af to Trekanter med Diagonalen som fælles Grundlinje).
4. Paralleltrapezets Areal er det halve Produkt af de parallele Siders Sum og deres indbyrdes Afstand.

197. En Polygons Areal kan beregnes af Vinkelspidsernes Koordinater. Tegnes saaledes som paa den i Fig. 213 viste Polygon alle Ordinaterne, fremkommer der en Række Paralleltrapezer, hvert begrænset af en Polygonside, Ordinaterne gennem dennes Endepunkter og dens Projektion paa Abscisseaksen; Polygonens Areal F vil da være bestemt ved Addition eller Subtraktion af de enkelte Paralleltrapezer, idet man har

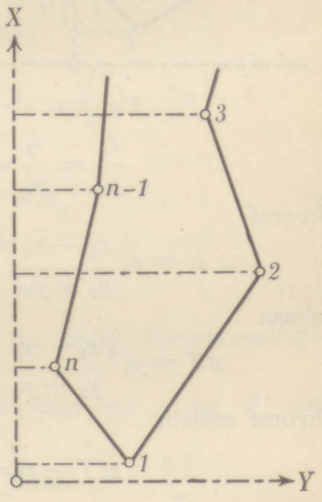


Fig. 213.

$$\begin{aligned}2F &= (x_2-x_1)(y_2+y_1)+(x_3-x_2)(y_3+y_2)+\ldots\ldots\\ &\quad -(x_{n-1}-x_n)(y_n+y_{n-1})-(x_n-x_1)(y_1+y_n)\\ &= (x_2-x_1)(y_2+y_1)+(x_3-x_2)(y_3+y_2)+\ldots\ldots\\ &\quad +(x_n-x_{n-1})(y_n+y_{n-1})+(x_1-x_n)(y_1+y_n),\ \ldots\ (\alpha)\end{aligned}$$

altsaa $$2F=\Sigma(x_p-x_{p-1})(y_p+y_{p-1})\,,$$

hvor Σ betyder Summen af alle Led af den angivne Form, idet p efterhaanden tillægges alle Værdier fra 1 til n, naar n er Polygonens Sideantal.

Skærer en Polygonside (f. Eks. 1—2 paa Fig. 214) Abscisse-

aksen (Ordinataksen), fremkommer der ikke noget egentligt Paralleltrapez mellem Ordinaterne til 1 og 2; men der bliver en Trekant T at addere og en anden Trekant t at subtrahere. Arealet $T - t$ er imidlertid, naar y'erne regnes med Fortegn, udtrykt ligesom Paralleltrapezernes Arealer, saa at (idet y_1 her er neg.),

$$2(T-t) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

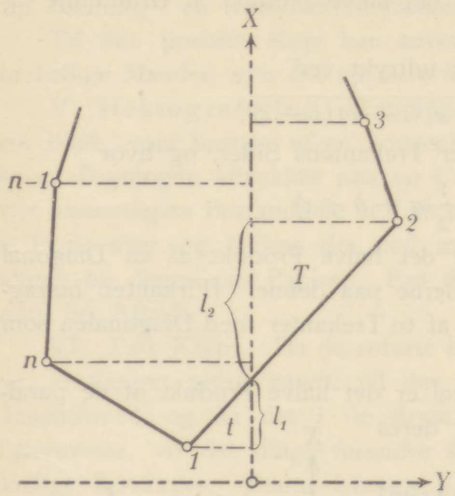


Fig. 214.

Man har nemlig med Figurens Betegnelser $2T = y_2 l_2$ og $2t = y_1 l_1$, endvidere, idet

$$l_1 + l_2 = x_2 - x_1,$$

$$\frac{l_1}{y_1} = \frac{l_2}{y_2} = \frac{l_1 + l_2}{y_2 + y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1},$$

hvoraf

$$l_1 = y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1} \quad \text{og} \quad l_2 = y_2 \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1},$$

altsaa

$$2T = {y_2}^2 \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1} \quad \text{og} \quad 2t = {y_2}^2 \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1},$$

hvoraf endelig

$$2(T-t) = \frac{{y_2}^2 - {y_1}^2}{y_2 + y_1}(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

De foran angivne Udtryk for Polygonens dobbelte Fladeindhold ses heraf at være almengyldige. Disse Udtryk lader sig imidlertid trække sammen; af Udtrykket (α) faas ved at sætte x'erne udenfor Parenteser

$$2F = \Sigma x_p (y_{p-1} - y_{p+1}), \quad \ldots \quad (117)$$

Ved i Stedet for x'erne at sætte y'erne udenfor Parenteserne, vilde man have faaet

$$2F = \Sigma y_p (x_{p+1} - x_{p-1}) \ldots \quad (118)$$

For $p = n$ er $x_{p+1} = x_1$, og for $p = 1$ er $x_{p-1} = x_n$.

Formlerne (117) og (118) er selvfølgelig identiske; men

benytter man dem begge, kommer man til at regne med forskellige Tal og faar derved en ypperlig Kontrol mod Regnefejl. Dersom Polygonpunkternes Koordinater er store, lettes Regningen, naar man reducerer dem ved Subtraktion af passende Tal.

Formlerne (117) og (118) giver positivt Resultat, naar Polygonens Nummerering gaar i negativ Omløbsretning.

De beregnede Arealers Middelfejl.

198. Kender man Middelfejlen paa de maalte Stykker, af hvilke man har beregnet en Figurs Fladeindhold, kan man bestemme dettes Middelfejl.

Er en *Trekants* Fladeindhold T beregnet af Grundlinjen g og Højden h med Middelfejlene henholdsvis m_g og m_h, bliver Trekantens Middelfejl (se Fejlteorien Formel (22)) bestemt ved $m_T = \sqrt{A_1^2 m_h^2 + A_2^2 m_g^2}$.

Da $T = \frac{1}{2} hg$, bliver

$$A_1 = \frac{dT}{dh} = \frac{1}{2} g \qquad \text{og} \qquad A_2 = \frac{dT}{dg} = \frac{1}{2} h,$$

altsaa

$$m_T = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 m_h^2 + h^2 m_g^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

eller, naar $m_g = m_h = m$,

$$m_T = \frac{m}{2} \sqrt{g^2 + h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Hvilken Form for Trekanten er da under Forudsætningen $m_h = m_g$ den fordelagtigste?

Er $h = ng$, kan g og h udtrykkes ved n og T, idet man har

$$T = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} ng^2, \qquad \text{altsaa} \quad g^2 = \frac{2T}{n}$$

og derefter $h^2 = n^2 g^2 = 2nT$;

indsættes disse Værdier i (119), faas

$$m_T = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{2T}{n} + 2nT} = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{T} \sqrt{n + \frac{1}{n}}, \quad . \quad . \quad (\beta)$$

som faar sin mindste Værdi $m\sqrt{T}$ for $n = 1$.

Den fordelagtigste Form for Trekanten faas altsaa, naar Højden er lig Grundlinjen.

Udtrykket (α) viser, at det ved Bestemmelsen af Højdens og Grundlinjens Længder særlig gælder om at bestemme den korteste af disse nøjagtigt, hvilket dog ses endnu tydeligere deraf, at Fejlen ΔT paa Trekantens Areal er

$$\Delta T = \frac{1}{2}(g\,\Delta h + h\,\Delta g),$$

naar Δg og Δh er Fejlene paa g og h.

Er Højde og Grundlinje i en Trekant maalte med samme Nøjagtighed, bliver Trekantens Areal nøjagtigst bestemt, naar man vælger den mindste Side i Trekanten til Grundlinje. Er (Fig. 215) $g_1 > g$ og altsaa $h > h_1$, bliver tillige $g_1 > h$ (g_1 er Skraalinje), ɔ:

$$g_1 > \frac{g}{h} > h_1,$$

hvoraf numerisk

$$g_1 - h_1 > g - h.$$

Ved Kvadrering faas, idet $g_1 h_1 = gh$,

$$g_1^2 + h_1^2 > g^2 + h^2,$$

hvorved Sætningen under Henvisning til (119) er bevist.

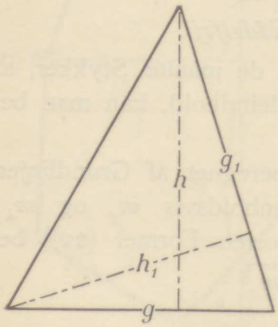


Fig. 215.

Er *Firkantens* Areal bestemt af Diagonalen d og Højderne h_1 og h_2, altsaa ved

$$F = \frac{1}{2}d(h_1 + h_2),$$

faas paa lignende Maade Arealets Middelfejl

$$m_F = \sqrt{A_1^2 m_d^2 + A_2^2 m_{h_1}^2 + A_3^2 m_{h_2}^2},$$

hvor $A_1 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ og $A_2 = A_3 = \frac{1}{2}d$, altsaa idet

$$m_d = m_{h_1} = m_{h_2} = m,$$

$$m_F = \frac{m}{2}\sqrt{2d^2 + (h_1 + h_2)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

Er $h_1 = h_2 = h$, faas

$$m_F = \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 + 2h^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Hvilken Form for Firkanten er da under Forudsætningen $m_d = m_h$ den fordelagtigste?

Er $h = nd$, haves

$$F = dh = nd^2, \qquad \text{altsaa} \qquad d^2 = \frac{F}{n}$$

og derefter $h^2 = n^2 d^2 = nF$;

indsættes disse Værdier i (γ), faas

$$m_F = \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{2nF + \frac{F}{n}} = \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{F}\sqrt{2n + \frac{1}{n}}, \quad . \quad . \quad (\vartheta)$$

som faar sin mindste Værdi $1.2\,m\sqrt{F}$ for $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Den fordelagtigste Form for Firkanten faas altsaa, naar begge Højderne er ligestore og lig c. 0.7 Gange Grundlinjen.[1])

Er Højder og Grundlinjer i en Firkant maalte med samme Nøjagtighed, bliver Firkantens Areal nøjagtigst bestemt, naar man vælger den mindste Diagonal til Grundlinje.

Sættes $h_1 + h_2 = H_1$ og $h_3 + h_4 = H_2$ (Fig. 216) og er $d_1 > d_2$ og altsaa $H_2 > H_1$, bliver tillige $d_1 > H_2$, o:

$$d_1 > \frac{d_2}{H_2} > H_1,$$

hvoraf ligesom foran faas

$$d_1^2 + H_1^2 > d_2^2 + H_2^2$$

og $2d_1^2 + H_1^2 > 2d_2^2 + H_2^2$,

hvorved Sætningen under Henvisning til (120) er bevist.

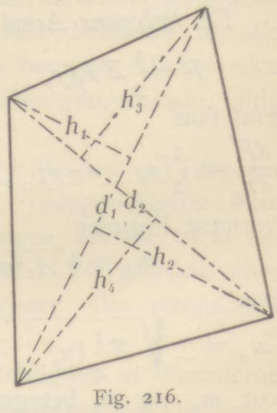


Fig. 216.

Udtrykket (120) gælder ogsaa for Middelfejlen paa Arealet af et *Paralleltrapez*, hvis parallele Sider har den indbyrdes Afstand d og Længderne h_1 og h_2.

Trekantens Areal udtrykt ved de tre Sider

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

hvor $s = \frac{a+b+c}{2}$, $s-a = \frac{b+c-a}{2}$, $s-b = \frac{a+c-b}{2}$

og $s-c = \frac{a+b-c}{2}$,

kan skrives (saml. Side 87 og 139)

$$T = \sqrt{\frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{16}}.$$

Heraf faas

$$\frac{dT}{da} = \frac{1}{2T}\frac{1}{16}(-4a^3 + 4ab^2 + 4ac^2) = \frac{a}{8T}(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= \frac{abc}{4T}\cos A$$

---

[1]) Det er altsaa gunstigere at maale hver Trekant for sig, end at maale to og to sammen i en Firkant. Nøjagtigheden vilde blive den samme, naar man i Firkanten maalte Diagonalen to Gange og tog Middeltallet. Var de andre Linjers Middelfejl m, blev Diagonalens $\frac{m}{\sqrt{2}}$, og Middelfejlen paa Firkanten vilde blive lig Middelfejlen paa Summen af Trekanterne

$$= \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 + h^2}.$$

og analogt (ved Ombytning)

$$\frac{dT}{db} = \frac{abc}{4T}\cos B \qquad \text{og} \qquad \frac{dT}{dc} = \frac{abc}{4T}\cos C,$$

hvoraf, naar $m_a = m_b = m_c = m$,

$$m_T = m\frac{abc}{4T}\sqrt{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}\ ^{1}), \quad . \quad (121)$$

hvilket Udtryk er let at anvende, da Vinklerne A, B og C med tilstrækkelig Nøjagtighed kan maales med en Transportør.

En *Polygons* Areal er ifølge (117) og (118)

$$F = \frac{1}{2}\Sigma x_p(y_{p-1} - y_{p+1}) = \frac{1}{2}\Sigma y_p(x_{p+1} - x_{p-1});$$

heraf faas

$$\frac{dF}{dx_p} = \frac{1}{2}(y_{p-1} - y_{p+1}) \qquad \text{og} \qquad \frac{dF}{dy_p} = \frac{1}{2}(x_{p+1} - x_{p-1}),$$

hvornæst Formlen

$$m_F = \sqrt{A_1^2 m_1^2 + A_2^2 m_2^2 + \ldots + A_n^2 m_n^2}$$

giver

$$m_F = \pm\sqrt{\Sigma\frac{1}{4}(y_{p-1} - y_{p+1})^2 m_p^2 + \Sigma\frac{1}{4}(x_{p+1} - x_{p-1})^2 \mu_p^2},$$

hvor m_p og μ_p betegner Middelfejlene henholdsvis paa x_p og paa y_p. Sættes alle Middelfejlene ligestore lig m og

$(y_{p-1} - y_{p+1})^2 + (x_{p+1} - x_{p-1})^2 = d_p^2$, faas

$$m_F = \frac{m}{2}\sqrt{\Sigma d_p^2} \quad . \quad (122)$$

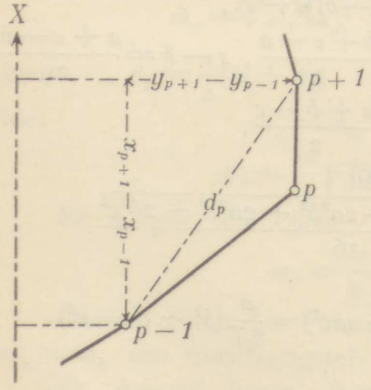


Fig. 217.

hvor d_p altsaa er Diagonalen mellem Punkterne $p-1$ og $p+1$ (Fig. 217). d'erne kan maales tilstrækkelig nøjagtigt paa Kortet.

Det bemærkes, at Udviklingen af Formel (122) kun er eksakt, naar Polygonens Koordinater er direkte maalte Størrelser (Fejlteorien Side 40).

---

[1]) Kan ogsaa skrives

$$m_T = Rm\sqrt{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C},$$

hvor R er Diameteren til den omskrevne Cirkel; dette Udtryk er dog uden praktisk Betydning.

§ 45. Arealberegningens Udførelse.

A. Arealberegningen udført efter Maal tagne i Marken.

199. Overalt hvor der kræves stor Nøjagtighed, bør man bestemme et Areal af de i Marken tagne Maal. Dette lader sig vel altid — naar Opmaalingen da ikke er udført ad grafisk Vej — gøre, idet man kan beregne Koordinaterne til alle Punkter i Grænserne og deraf atter kan beregne Arealet efter Formlerne (117) og (118); en saadan Fremgangsmaade vilde imidlertid blive besværlig.

Naar Terrænpunkterne — som det i Reglen er Tilfældet — bestemmes ved Perpendikulærer fra Polygonsiderne eller Maalelinjerne, vil den Figur, hvis Areal søges, komme til at bestaa af en Kærnefigur, som er begrænset af Polygonsider eller Maalelinier, samt en Række Paralleltrapezer eller retvinklede Trekanter.

Kærnefigurens Areal vil da kunne beregnes af Formlerne (117) og (118), og til Bestemmelse af Trapezernes og Trekanternes Arealer foreligger de fleste Maal, men naar man ikke ved Opmaalingen har taget særligt Hensyn til den forestaaende Arealberegning, vil der dog i Reglen mangle nogle. Havde man saaledes ved Maalingen af Polygonsiderne *3—4* og *4—5* bestemt Terrænpunkterne *a* og *b* ved Perpendikulærer (Fig. 218), vilde der til en nogenlunde let Bestemmelse af Arealet *abc4d* ikke foreligge tilstrækkelige direkte tagne Maal, hvilket derimod vilde være Tilfældet, naar man f. Eks. havde maalt Perpendikulæren til Skæringspunktet *e* mellem *ab* og *5—4*'s Forlængelse samt Længden af *4—f*. Har man ikke maalt disse Størrelser i Marken, kan man konstruere Figuren *abc4d* i stort Maalestoksforhold og maale dem paa denne.

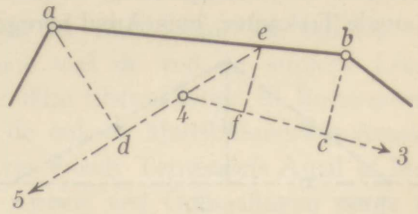


Fig. 218.

Man maa derfor enten ved Opmaalingen eller paa en Konstruktionsfigur tage de Maal, som er nødvendige ved den efterfølgende Arealberegning, ved hvilken man altsaa først bestemmer Kærnefigurens Areal efter (117) og (118), og derefter paa

hver enkelt Polygonside det Areal, som bliver at addere til eller subtrahere fra Kærnefigurens Areal, enten ved en ny Anvendelse af Formlerne (117) og (118) eller derved, at man beregner hvert Paralleltrapez og hver Trekant for sig.

Er Kærnefigurens Areal stort, kan det være fordelagtigere paa Kvadratnettet at optælle Antallet af hele Kvadrater, som den indeholder, og til disse at addere de Arealer, som ligger i de af Kærnefigurens Grænser gennemskaarne Kvadrater. Et saadant Areal (paa Fig. 219 det skraverede) beregnes da af Formlerne (117) og (118), efter at man har beregnet Koordinaterne til Kvadratsidernes Skæringspunkter a og b med Polygonsiderne.

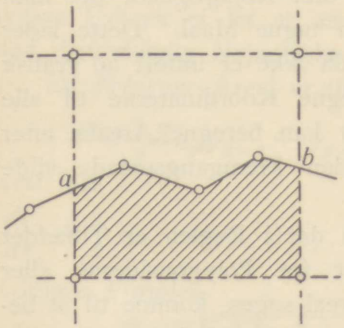


Fig. 219.

Benyttes Formlerne (117) og (118), maa man — som foran nævnt — erindre, at man for at faa en positiv Værdi for det Areal, som skal tillægges, maa gaa rundt langs Omkredsen i negativ Omløbsretning (ɔ: saaledes at man altid vender tilbage langs Polygonsiden).

Forsaavidt Opmaalingen ikke er baseret paa Polygonmaaling men paa Linjetriangulation, kommer Kærnefiguren til at bestaa af nogle Trekanter, hvis Areal beregnes af de maalte Sidelængder. Fremgangsmaaden bliver iøvrigt den samme.

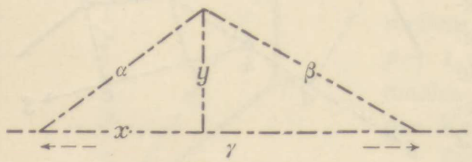


Fig. 220.

Forekommer der enkelte Terrænpunkter, som er bestemte ved 2 Skraamaal fra Punkter i en Hovedlinje, beregnes Perpendikulærens Længde og Fodpunktets Beliggenhed, idet man (se Udvikl. Side 92) med Fig. 220's Betegnelser har

$$x = \frac{\gamma}{2} + \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{2\gamma}$$

og $$y = \sqrt{(\alpha + x)(\alpha - x)}.$$

Eksempel 48 viser en fuldstændig Arealberegning efter Maal tagne i Marken. De enkelte Arealers Angivelse med to Decimaler staar selvfølgelig ikke i Forhold til Maalingsnøjagtigheden;

men de to Decimaler er bibeholdte for Regningskontrollens Skyld.

200. Medens man saaledes i Reglen nogenlunde let kan beregne Arealet af hele det Terræn, som Opmaalingen omfatter, bliver det ofte ulige besværligere at tilvejebringe de fornødne direkte Maal til Bestemmelse af de enkelte Terrændeles Arealer. Saasnart nemlig ikke hver Terrændel er omspændt af nogle brudte Linjer eller Maalelinjer, fra hvilke alle Punkter i dens Omkreds er bestemte, og som tilsammen udgør en Kærnefigur, lader den i Punkt 199 angivne Fremgangsmaade sig ikke anvende.

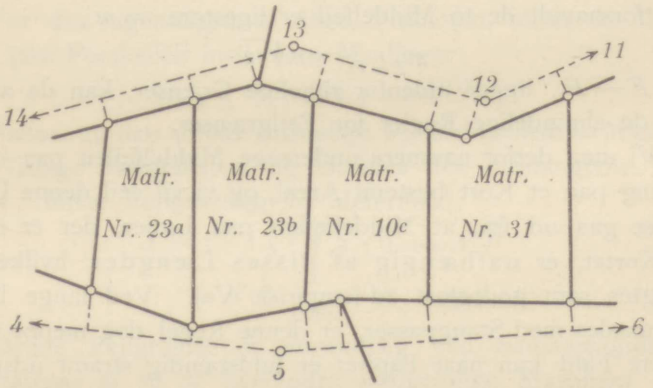


Fig. 221.

I Fig. 221 lader f. Eks. alle Skelhjørner sig ved Opmaalingen særdeles let bestemme ved de ved de stiplede Linjer angivne Maal; men disse er ikke tilstrækkelige til Bestemmelse paa den angivne Maade af de enkelte Matrikulsnumres Arealer. Vil man altsaa bestemme hver enkelt Terrændels Areal af Maal tagne i Marken, maa man enten ved Opmaalingen sørge for at omspænde hver Terrændel med brudte Linjer eller Maalelinjer, som kan danne en Kærnefigur, eller man maa beregne Koordinaterne til samtlige Punkter i Skelhjørnerne og derefter anvende Formlerne (117) og (118).

B. Arealberegningen udført efter et Kort.

201. Benyttes som foran omtalt de i Marken tagne Maal til Bestemmelse af et Areals Størrelse, faas dette kun paa én Maade, og Beregneren maa udføre Arealberegningen paa en saadan Maade, at han faar fornøden Sikkerhed mod Regnefejl.

En Middelfejlsberegning kan udføres efter de i Punkt 198 an-

givne Formler, naar man for m indfører Middelfejlen paa de maalte Linjer (forskellig efter Maalingens Art), og en saadan Middelfejlsberegning kan have Interesse, da man gennem den kan bedømme Arealberegningens Nøjagtighed.

Anderledes stiller Sagen sig, naar Arealberegningen udføres efter Maal tagne paa et Kort. Man bør da altid for Kontrollens Skyld beregne hver enkelt Figur paa dobbelt Maade og ved forskellige Maal. Er Arealet efter den første Beregning F, efter den anden F_1 henholdsvis med Middelfejlen m_F og m_{F_1}, saa vil Middelfejlen paa Forskellen $F - F_1$ være

$$m_{F-F_1} = \sqrt{m_F^2 + m_{F_1}^2},$$

eller, forsaavidt de to Middelfejl er ligestore $= m$,

$$m_{F-F_1} = m\sqrt{2}.$$

Om $F - F_1$ ligger indenfor rimelige Grænser, kan da afgøres efter de almindelige Regler for Fejlgrænser.

Vi maa derfor nærmere undersøge Middelfejlen paa et ved Maaling paa et Kort bestemt Areal, og vi vil ved denne Undersøgelse gaa ud fra, at Middelfejlen paa Linjer, der er maalte paa Kortet, er uafhængig af disses Længder, hvilket kan betragtes som godtgjort ad empirisk Vej. Ved lange Linjer, som maales med Stangpasser, er denne Regel dog næppe rigtig, i hvert Fald kun naar Papiret er fuldstændig stramt udspændt paa et plant Bord.

Middelfejlen m paa Linjer, der er maalte paa Kortet, bliver lidt mindre eller større, eftersom Kortet er konstrueret bedre eller daarligere; vi vil her som Gennemsnitsværdi sætte den til 0.05 Millimeter (0.1 Meter i 1 : 2000).

Ved Arealberegning efter et Kort deles hele Arealet i [1]) Trekanter, som bestemmes ved Højde og Grundlinje, [2]) Firkanter, som bestemmes ved en Diagonal og Højderne paa denne, eller [3]) Paralleltrapezer, som bestemmes ved de parallele Sider og deres Afstand. De i Punkt 198 angivne Udtryk (β) og (ϑ) for Middelfejlene paa disse Figurer kan skrives

$$m_T = m\sqrt{T}\sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{2n}} \quad \text{og}$$

$$m_F = m\sqrt{F}\sqrt{n + \frac{1}{2n}},$$

hvoraf ses, [a]) at Middelfejlen paa det maalte Areal er proportional med Kvadratroden af dettes Størrelse og [b]) at den tillige er afhængig af Arealets Form.

Vilde man opstille almindelige Fejlgrænser, da maatte disse altsaa være afhængige saavel af Figurernes Størrelse som af deres Form; men Beregningen og endnu mere Benyttelsen af saadanne Fejlgrænser vilde blive meget besværlig. Man foretrækker derfor ved Ansættelsen af Fejlgrænser at tage passende Hensyn til, at man ikke ved Arealets Inddeling kan opnaa Figurer af gunstigst mulig Form, hvilket for Trekanten svarer til $n = 1$ og for Firkanten til $n = 0.7$, og vil vi da sætte n til den tredobbelte af den gunstigste Værdi, bliver

$$\text{for Trekanten} \quad m_T = 1.3\, m\sqrt{T} \quad (n = 3) \text{ og}$$
$$\text{for Firkanten} \quad m_F = 1.5\, m\sqrt{F} \quad (n = 2).$$

For den ugunstigste af disse, Firkanten, bliver da Middelfejlen paa Forskellen mellem to Maalinger

$$m_{F-F_1} = 1.5 \times \sqrt{2} \times m\sqrt{F}.$$

Sættes nu den største tilladelige Forskel mellem to Maalinger til 3 Gange Middelfejlen, og indføres den ovenangivne Værdi for m, bliver Fejlgrænsen for Metermaal

$$d = 3 \times 1.5 \times \sqrt{2} \times 0.00005\sqrt{F}$$

$$d = \frac{1}{3000}\sqrt{F} \quad \text{(afrundet)}. \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Denne Fejlgrænse er anvendelig ved Sammenligning af Resultaterne af to af hverandre uafhængige Maalinger af et hvilketsomhelst Areal; dette vil nemlig bestaa af en Sum af Trekanter, Firkanter og Paralleltrapezer og altsaa have Formen

$$A = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n$$

og Middelfejlen
$$m_A = \pm 1.5\, m\sqrt{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n}$$
$$= \pm 1.5\, m\sqrt{A}.$$

Er to Figurer A og A_1 ligedannede i det lineære Forhold M, har man

$$\frac{A}{A_1} = \frac{1}{M^2},$$

og under de foran angivne Forudsætninger er tillige

$$m_A = 1.5\, m\sqrt{A} \qquad \text{og} \qquad m_{A_1} = 1.5\, m\sqrt{A_1},$$

altsaa
$$\frac{m_A}{m_{A_1}} = \sqrt{\frac{A}{A_1}} = \frac{1}{M}$$

og
$$\frac{m_A : A}{m_{A_1} : A_1} = M,$$

ɔ: Middelfejlen paa et Areal (udtrykt i Forhold til dette) er omvendt proportional med Maalestoksforholdet.

Foreligger Kortet i Maalestoksforholdet M, ændres Udtrykket (a) for Fejlgrænsen altsaa til

$$d = \frac{1}{3000\,M}\sqrt{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Da dette Udtryk, som er dannet ad ren teoretisk Vej, bør være anvendeligt ved Arealberegninger, ikke alene paa de fineste men ogsaa paa noget brugte (forstukne) Kort, er den i Udtrykket indgaaende Konstant m, som foran anført, sat til 0.05 Millimeter, skønt den, særlig naar der henses til nogle af Landinspektør P. Bentzon anstillede Forsøg[1]), vistnok maa kunne sættes noget mindre, hvilket ogsaa er i Overensstemmelse med, at man ved Opmaalingerne i Berlin har benyttet Fejlgrænsen

$$d = \frac{1}{4000\,M}\sqrt{F}.$$

Da Formel (123) imidlertid synes at passe godt for vore almindelige Forhold, turde det være rigtigst at benytte denne, saalænge vi ikke af eget mere omfattende Forsøgsmateriale kan uddrage et bedre Udtryk.

Andre Steder har man for Fejlgrænser opstillet lignende Udtryk, som vistnok er fremkomne dels ad empirisk og dels ad syntetisk Vej. Ofte har de Formen

$$d = \frac{k_1}{M}\sqrt{F + k_2 F^2},$$

hvor F er Fladeindholdet og k_1 og k_2 Konstanter (k_2 dog meget lille).

Efter Formel (123) bliver for Metermaal

for Maalestoksforholdet	1 : 1000	$d = \frac{1}{3}\sqrt{F}$,
— —	1 : 2000	$d = \frac{2}{3}\sqrt{F}$,
— —	1 : 4000	$d = \frac{4}{3}\sqrt{F}$.

I Figurerne 222 og 223 viser Ordinaterne til de tre Kurver de højst tilladelige Afvigelser i Kvadratmeter mellem to Maa-

[1]) se f. Eks. P. Bentzon: Regler for den tilladelige Differens mellem tvende Arealberegninger, Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulsvæsen 1. Bind Side 24.

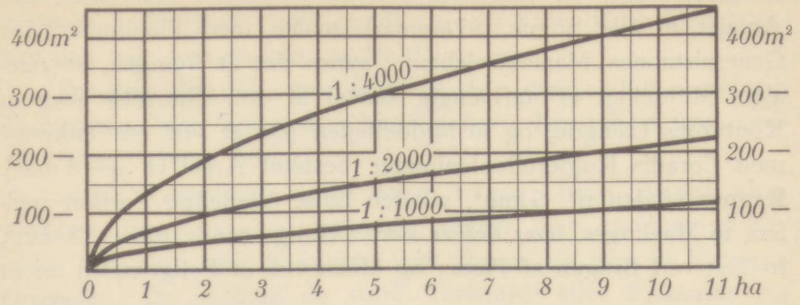


Fig. 222.

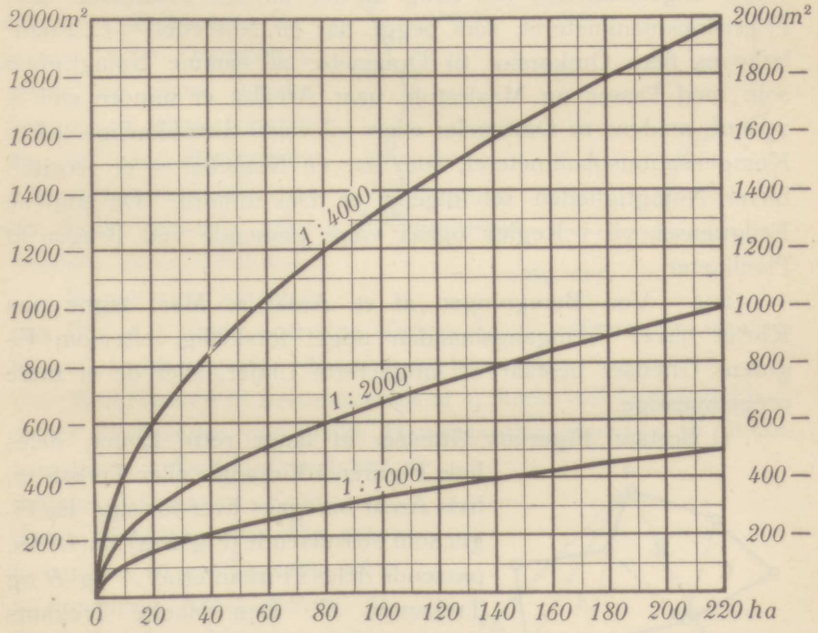


Fig. 223.

linger af de ved Abscisserne angivne Arealer i Hektarer for i Maalestoksforholdene 1 : 4000, 1 : 2000 og 1 : 1000.

Der foreligger ikke mange Undersøgelser af den med Planimeter opnaaede Nøjagtighed, og det er meget vanskeligt at fastslaa noget bestemt om denne, da den er afhængig af det enkelte Planimeters Art og Godhed saavelsom af Brugerens Dygtighed og Øvelse. Af et meget betydeligt Materiale, som

er tilvejebragt, da Statistisk Bureau for nogle Aar siden lod Arealet af alle Sogne i Danmark maale med Planimeter paa Generalstabens Maalebordsblade, synes det at fremgaa, at Arealets Middelfejl er uafhængig saavel af dets Størrelse som af Konturens Længde, og at Middelfejlen paa et ved en Omkørsel med Coradis Kuglerulleplanimeter bestemt Areal er 4—8 mm^2. Regner vi den til 6 mm^2, vil den højst tilladelige Forskel mellem to Maalinger, naar der er kørt 2 Gange rundt, blive 18 mm^2, hvilket ved Brugen af Passer og Maalestok er Fejlgrænsen for et Areal paa c. 29 cm^2 eller c. 4.5 *ha* i 1 : 4000 $\left(\frac{1}{3000}\sqrt{F} = \frac{18}{1000^2}\right)$. Heraf følger, at der ved Brug af det nævnte Planimeter eller Præcisionsplanimeteret, som begge har én Noniedel = c. 2 mm^2 behøves flere Omkørsler til Opnaaelse af samme Nøjagtighed som med Passer og Maalestok, naar Arealet er mindre end c. 29 cm^2, medens to Omkørsler ellers vil være tilstrækkelige. For Kompensationsplanimeteret, som har én Noniedel = c. 10 mm^2, bliver Nøjagtigheden selvfølgelig en Del mindre. De angivne Fejlgrænser vil i Reglen ogsaa være passende ved Brugen af Planimeter.

202. Ved Beregningen af et Areal af Maal tagne paa Kortet bliver Fremgangsmaaden noget forskellig, eftersom Figurens Grænser bestaar af lange rette Linjer, eller de er mere uregelmæssige.

1) Bestaar Figurens Grænser af lange rette Linjer, deles hele Figuren i Firkanter eller Trekanter, hvis Areal beregnes hver for sig. En Figur som hosstaaende (Fig. 224) kan f. Eks. passende deles i Firkanterne *A* og *B* og Trekanten *C*. Den enkelte Trekants Højde og Grundlinje maales ved Hjælp af Passer og Transversalmaalestok. Højden tegnes dog ikke; men man tager den i Passeren, idet den ene Passerspids sættes i vedkommende Vinkelspids, medens den anden bringes til netop at tangere vedkommende Side. I Firkanten trækkes Diagonalen, medens Højderne bestemmes paa lignende Maade som i Trekanten. Ved Arealberegningen kan man iøvrigt ligesom ved Kortkonstruktionen i Stedet for Passer og Transversalmaalestok anvende en god Kantmaalestok (saml. Punkt 191).

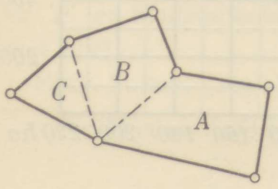


Fig. 224.

Alle Trekanter og Firkanter bør som alt nævnt maales paa

dobbelt Maade, idet man i Trekanterne først benytter én dernæst en anden Side som Grundlinje og i Firkanterne først trækker den ene dernæst den anden Diagonal.

Da man dog ikke kan svare for de sidste ved Beregningen fremkomne Cifre, bør man i Middeltallet i hvert Fald ikke medtage Decimaler af Meter.

2) Er Grænserne for den Figur, hvis Areal skal maales, mere uregelmæssige, tegner man en eller et Par store Trekanter eller Firkanter, som slutter sig nær til Figurens Grænser. De imellem de store Trekanter eller Firkanter og Grænserne liggende Stykker deles paa passende Maade i Firkanter, Trekanter eller Paralleltrapezer, og deres Arealer lægges til eller trækkes fra de store Trekanters eller Firkanters, eftersom de falder udenfor eller indenfor disses Omkreds.

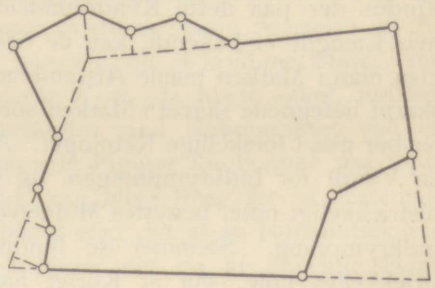


Fig. 225.

Beregningen af den paa Fig. 225 fuldt optrukne Figurs Areal udføres eksempelvis let ved Inddeling efter de stiplede Linjer.

Med Hensyn til Bestemmelsen af et Areal ved Hjælp af Planimeter eller andre mekaniske Hjælpemidler, henvises til Instrumentlæren. Derimod skal her omtales Figurers Forvandling. Firkanten *abcd* (Fig. 226) forvandles til en Trekant *abe* med samme Areal derved, at man $\neq bd$ trækker en Linje *ce*, dennes Skæringspunkt *e* med *ad*'s Forlængelse bliver da Trekantens tredje Vinkelspids.

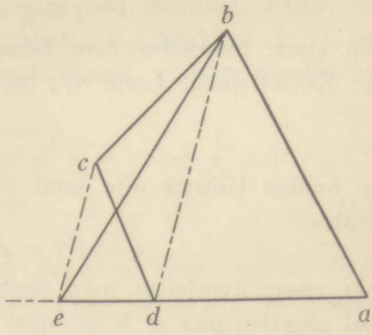


Fig. 226.

Ved en sukcessiv Anvendelse af denne Fremgangsmaade kan en flersidet Figur forvandles til en Trekant, hvis Areal da bestemmes paa sædvanlig Maade.

203. Paa Grund af Papirets hygroskopiske Egenskaber vil et Kort ikke kunne henligge i længere Tid uden at forandre

sine Dimensioner. Som Regel vil Papiret trække sig sammen; men det kan hænde, at det udvider sig; Kortet siges i første Tilfælde at have Indkrympning, i sidste Tilfælde Udvidelse.

Er en Linjes sande Længde l og dens Længde paa Kortet l_1, saa er Indkrympningen

$$p = \frac{l - l_1}{l_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (124)$$

En negativ Værdi for p betegner altsaa Udvidelse. Vil man bestemme et Korts Indkrympning, maa man kende den sande Længde af forskellige Linjer, som findes paa Kortet. Findes der paa dette Kvadratnetsider eller andre lange Linjer, hvis Længde er bekendt, kan de benyttes; findes saadanne ikke, maa man i Marken maale Afstandene mellem Punkter, som findes skarpt betegnede saavel i Marken som paa Kortet. De maalte Linjer bør gaa i forskellige Retninger. Af hver enkelt Linje beregnes en Værdi for Indkrympningen, og stemmer de fundne Værdier tilstrækkeligt nøje, benyttes Middelværdien som Maal paa Kortets Indkrympning. Stemmer de fundne Værdier derimod ikke tilstrækkeligt nøje, saa at Kortet har forskellig Indkrympning i de forskellige Retninger, er det ubrugeligt.

Det viser sig hyppigt, at Kortene har trukket sig mere i den ene end i den anden Retning, og navnlig er dette — som tidligere omtalt — i Reglen Tilfældet med litograferede eller paa anden Maade mangfoldiggjorte Kort.

Af (124) faas

$$l = l_1 + p l_1 , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (125)$$

som viser, hvorledes man beregner den sande Længde af en paa Kortet maalt Linje l_1, medens omvendt

$$l_1 = \frac{l}{1 + p} ,$$

for hvilket Udtryk ofte med tilstrækkelig Nøjagtighed kan anvendes

$$l_1 = l(1 - p) = l - lp , \quad \ldots \ldots \quad (126)$$

som viser, hvorledes man beregner Længden af en Linje, der skal afsættes paa et Kort, naar Linjens sande Længde er l.

Er F det sande Fladeindhold af en Figur og F_1 den samme Figurs Fladeindhold efter et Kort med Middelindkrympningen p, saa haves

$$\frac{F}{F_1} = (1 + p)^2 = 1 + 2p + p^2 ,$$

hvor sidste Led kan bortkastes som forsvindende. Indkrymp-

ningen i Flademaal er altsaa i Procent dobbelt saa stor som Indkrympningen i Længdemaal.

Herved faas

$$F = F_1 + 2pF_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

som viser, hvorledes man beregner den sande Størrelse af et paa Kortet maalt Areal F_1, medens omvendt

$$F_1 = \frac{F}{1 + 2p},$$

for hvilket Udtryk ofte med tilstrækkelig Nøjagtighed kan anvendes

$$F_1 = F(1 - 2p) = F - 2pF, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

som viser, hvorledes man beregner Størrelsen af et Areal, der skal afsættes paa et Kort, naar Arealets sande Størrelse er F.

Anm. Figurer, som er begrænsede af krumme Linjer, kan ikke forekomme paa økonomiske Kort, da hvert enkelt indkonstrueret Terrænpunkt her forbindes med Nabopunktet ved en ret Linje, derimod kan krumlinede Figurer forekomme paa topografiske Kort, idet der f. Eks. kan blive Brug for at bestemme Arealet af en Sø, et vist Opland eller det af en Horisontalkurve begrænsede Areal. Simplest bliver det da at anvende Planimeter. Vil man beregne Arealet med Passer og Maalestok, bør man tæt indenfor eller udenfor dettes Kontur tegne en Polygon, hvis Areal beregnes paa sædvanlig Maade, hvorefter de paa de enkelte Polygonsider beliggende Arealer, som skal tillægges eller fradrages, beregnes enten ved (117) og (118), idet man tegner et passende Antal Perdendikulærer, hvis Længder og Fodpunkters Beliggenhed bestemmes ved Maaling, eller, idet Polygonsiden deles i et lige Antal, n, Stykker h, i hvis Endepunkter der oprejses Perpendikulærer y, som maales, ved Simpsons Formel

$$F = \frac{1}{3}h[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})] \, . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

C. Samlet Beregning af et helt Areal og dettes enkelte Dele.

204. Ved den til et større Opmaalingsarbejde hørende Arealberegning kræves i Almindelighed angivet Fladeindholdet dels af det hele samlede Areal, som Opmaalingen omfatter (hvis der er flere Kortblade da af hvert enkelt for sig), og dels af hver af Arealets enkelte Dele (f. Eks. en hel By og dennes enkelte Matr.-Nr., en hel Ejendom og dennes enkelte Takststykker eller en Skov og dennes enkelte Afdelinger.)

Arealberegningen udføres i 4 Dele:

I. Beregningen af det hele samlede Areal (Den store Masseberegning).
II. Beregningen af de enkelte Dele.
III. Middeltalsberegning og Udjævning.
IV. Kontrolberegning (Den lille Masseberegning).

Beregningen af det hele samlede Areal (Den store Masseberegning) udføres saa vidt muligt efter Maal tagne i Marken, altsaa ganske i Overensstemmelse med hvad derom er fremsat i Punkt 199.

Beregningen af de enkelte Deles Areal kan, naar man paa Grund af Kravet om en særlig stor Nøjagtighed allerede ved Opmaalingen har taget de i saa Henseende fornødne Hensyn, udføres [a]) *efter Maal tagne i Marken.* I Reglen bliver dog denne Fremgangsmaade for besværlig, og Beregningen udføres da [b]) *efter Kortet*, enten ved Maal tagne paa dette eller ved Planimeter, og det kan være fordelagtigt at udføre den ene af Enkeltberegningerne efter Maaltagning den anden ved Planimeter, da der paa Grund af disse Maaders forskellige Karakter herved opnaas en god Kontrol mod grove Fejl. Kontrollen skærpes yderligere, naar man lader de to Enkeltberegninger udføre af forskellige Personer og helt uafhængigt af hinanden.

Naar Omstændighederne taler derfor, udføres Beregningen [c]) *dels efter Maal tagne i Marken og dels efter Maal tagne paa Kortet.* I Udlandet forekommer der saaledes (f. Eks. paa Vinbjerge) hyppigt lange smalle Parceller; disses Areal bestemmes da af Bredden, maalt i Marken, og Længden, maalt paa Kortet, (saml. Punkt 198). Paa lignende Maade bør en Vejs, et Vandløbs eller andre smalle Stykkers Areal altid bestemmes ved Maaling af Bredden i Marken, medens Længden godt kan maales paa Kortet.

Middeltalsberegning og Udjævning af Forskellen mellem de forskellige Arealer. Dersom begge Enkeltberegningers Resultat stemmer indenfor de fastslaaede Fejlgrænser, tages Middeltallet. I Tilfælde af Uoverensstemmelse maa Fejlen opsøges og rettes helst af Tredjemand.

Herefter opsummeres alle de enkelte Deles Arealer (Middeltallene af de to Enkeltberegninger) eventuelt korrigerede for Indkrympning, og Summen skal nu stemme med den for hele Arealet beregnede Størrelse, ɔ: Forskellen skal ligge indenfor de fastslaaede Fejlgrænser. I Almindelighed benyttes her de

samme Fejlgrænser som ellers, skøndt de egentlig burde være noget snævrere, da Totalarealets Middelfejl er mindre end Middelfejlen paa Summen af dets enkelte Dele. Totalarealet betragtes nu som fejlfrit, og Fejlen paa Summen fordeles paa de enkelte Dele proportionalt med disses Størrelse. De enkelte Deles Arealer angives sædvanlig i Kvadratmeter eller i Hektar med 3 à 4 Decimaler.

Kontrolberegningen (Den lille Masseberegning). Bestaar Arealet af mange smaa Dele, vil der — selv om der er Overensstemmelse mellem Summen af disse og det hele Areal — kunne have indsneget sig Fejl f. Eks. derved, at man ved en Lods Beregning har glemt en lille Trekant, eller at man har glemt en Division med 2.

For at sikre sig mod saadanne Fejl, bør man efter Kortet og vel i Reglen med Planimeter udføre en samlet Beregning af en Del Lodder (Parceller), som danner et afsluttet mindre Hele, og dets Størrelse skal da indenfor Fejlgrænsen stemme overens med Summen af vedkommende enkelte Dele. Om en saadan Overensstemmelse finder Sted bør undersøges, saasnart Middeltallene i Skema III er dannede, altsaa forud for Udjævningen, som ellers maatte gøres om, dersom der virkelig blev konstateret en Fejl i en af Enkeltberegningerne. Man plejer dog ikke her at foretage nogen Fejlfordeling. Forsaavidt det hele Areal kun er lille, kan man efter Omstændighederne lade den lille Masseberegning falde bort.

Endnu skal bemærkes, at den Nøjagtighed, med hvilken Arealberegningen udføres, bør være afhængig dels af den Anvendelse, som skal gøres af de fundne Arealer og dels af Maalingsnøjagtigheden. Ved en Udstykning bør f. Eks. hele Ejendommens og Parcellernes Arealer bestemmes nøjagtigere end Takststykkernes (Takstgrænserne er jo i Reglen ikke synderlig nøjagtig bestemte). Man vil derfor særdeles vel kunne benytte Planimeter til Beregning af de enkelte Takststykkers Arealer, naar Summen af disse afstemmes mod det for hele Ejendommen eller Parcellen f. Eks. af Maal tagne i Marken beregnede Areal.

205. Af største Betydning er det, at Arealberegningen opstilles paa en tydelig og overskuelig Maade; finder dette ikke Sted er det næsten umuligt at undgaa grove Fejl,

saa at en omhyggelig Maaling med Passer og Maalestok eller Planimeter vil blive temmelig betydningsløs.

Eksempel 49 viser de til en fuldstændig Arealberegning fornødne Skemaer.[1])

De forskellige Skemaer I—IV (eventuelt trykte) maa sammensys i Hefter af passende Størrelse, og paa hver Side bør foretages Opsummering og Overførsel.

Skema I kræver ikke nærmere Forklaring, da det allerede er benyttet i Ekspl. 48.

Skema II. 2. og 3. Rubrik under »Faktorer« udfyldes med de paa Kortet eller i Marken tagne Maal, af hvilke vedkommende Del af Arealet beregnes; for Trekanter bliver der altsaa ét Tal i hver Rubrik, for Firkanter og Paralleltrapezer ét i den ene og to i den anden. Skal Produktet af disse Faktorer divideres med 2, skrives $\frac{1}{2}$ i 1. Rubrik udfor vedkommende Faktorer.

Benyttes Planimeter, føres i den 2. Rubrik under »Noniedele« alle Aflæsninger (en Streg mellem disse betyder, at Rækken er afbrudt), og i 3. Rubrik føres Differenserne og disses Middeltal. Konstanten noteres en Gang for alle.

Forsaavidt Kortet har Indkrympning, maa denne lægges til hver enkelt Dels maalte Areal. Indkrympningen bør jævnlig prøves under Arbejdet og under alle Omstændigheder umiddelbart, før dette begyndes, og efter at det er afsluttet. Udføres — hvilket som alt nævnt er ønskeligt — de to Enkeltberegninger af forskellige Personer, bør de opføres hver i sit Hefte.

Skema III vil forstaas uden nærmere Forklaring.

Skema IV vil ligeledes forstaas uden nærmere Forklaring.

§ 46. Afsætning af Arealer.

206. Skal et bestemt Areal afsættes i Marken, bliver Fremgangsmaaden noget forskellig, eftersom Afsætningen kræves udført [1]) med en Nøjagtighed, som svarer til Arealberegning efter Maal tagne i Marken, eller [2]) med en Nøjagtighed, som svarer til Arealberegning efter Kortet.

Det første Tilfælde vil kun forekomme sjældnere. Ved Handler om Arealer, som betales dyrt, vil Grænselinjen nemlig i Reglen

[1]) Disse er dannede med Henblik paa dem, der er angivne i »Anweisung VIII von $^{25}/_{10}$ 1881 für das Verfahren bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters«, fra hvilke de dog afviger en Del.

være bestemt i Marken, saa at der kun bliver Tale om en Arealberegning ikke om en Arealafsætning.

Skulde Opgaven komme til at foreligge, vil den i Reglen kun omfatte smaa Arealer, og det vil da næppe være vanskeligt paa Grundlag af den forud for Grænseafsætningen foretagne Opmaaling at beregne Grænsens nøjagtige Beliggenhed.

I andet Tilfælde, som jævnlig forekommer, afsættes vedkommende Areal paa Kortet, og Grænselinjen overføres derpaa i Marken, idet man paa Kortet tager de Maal, som er fornødne til Afsætning af to eller for Kontrollens Skyld helst af tre af dens Punkter. De paa Kortet tagne Maal maa om fornødent rettes for Indkrympning.

Vi skal nu se, hvorledes man fra et Kort afsætter et bestemt Areal eller deler et Jordstykke. Opgaven falder i Reglen ind under en af følgende to.

1. Af en Figur at afskære et vist Areal ved en Linje parallel med en given Linje.

Er Figuren den paa Fig. 227 viste, og skal et vist Areal afskæres i den østlige Ende ved en Linje parallel med MN, trækker man en foreløbig Delingslinje $PQ \neq MN$ saaledes, at den skønnes nogenlunde at afskære det forlangte Areal; derpaa beregnes det ved PQ afskaarne Areal nøjagtigt. Forskellen mellem dette og det forlangte Areal vil vi kalde A.

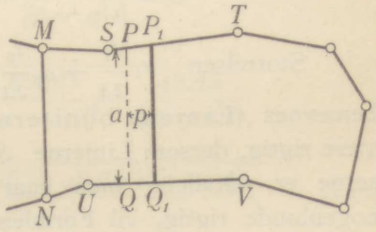


Fig. 227.

PQ skal nu flyttes til højre eller venstre, eftersom det afsatte Areal er for stort eller for lille, og det Stykke p, som den skal flyttes, er da, idet PP_1Q_1Q betragtes som et Rektangel med Siderne p og $PQ = a$, bestemt derved, at man skal have

$$ap = A,$$

hvilket giver

$$p = \frac{A}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

Dette vilde være fuldstændig rigtigt, dersom Linjerne ST og UV var parallele; men selv om dette ikke er Tilfældet, vil den opstaaede Fejl være forsvindende, naar den foreløbige Delingslinje er nogenlunde rigtig.

Efter at have trukket den endelige Delingslinje P_1Q_1, bør man prøve, om det afskaarne Areal er rigtigt.

I mange Tilfælde kan Opgaven løses ved simple geometriske Konstruktioner.

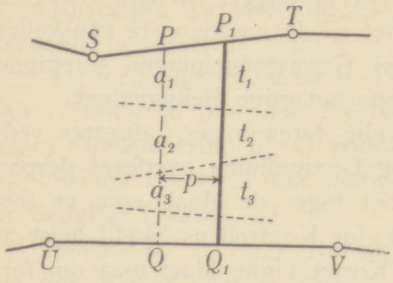


Fig. 228.

Er det et boniteret Areal, som skal afsættes, trækkes ligesom før en foreløbig Delingslinje PQ (Fig. 228). Er nu de prikkede Linjer Grænser for Takststykker med Taksterne t_1, t_2, $t_3 \ldots t_n$, og skærer Takstgrænserne Stykkerne a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ af PQ, saa haves

$$\left(a_1 \frac{t_1}{24} + a_2 \frac{t_2}{24} + \ldots . + a_n \frac{t_n}{24}\right) p = A,$$

hvor A betyder Forskellen mellem det boniterede Areal, som er afsat, og det, som skulde afsættes.

Herved faas

$$p = \frac{A}{\frac{1}{24}[at]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Størrelsen $a_1 \frac{t_1}{24} + a_2 \frac{t_2}{24} + \ldots . + a_n \frac{t_n}{24} = \frac{1}{24}[at]$ benævnes »Linjens boniterede Længde«. Formlen vil kun være rigtig, dersom Linjerne ST og UV samt alle Takstgrænserne er parallele; men naar den foreløbige Delingslinje er nogenlunde rigtig, vil Formlen give en god Tilnærmelse. Det afsatte Areal maa derfor prøves, og om fornødent maa der foretages endnu en Flytning.

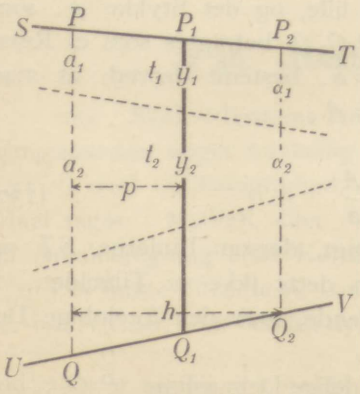


Fig. 229.

Der kan imidlertid angives en nøjagtig Formel til Beregning af det Stykke p, som den foreløbige Delingslinje PQ skal flyttes. Trækkes (Fig. 229) parallel med PQ i Afstanden h fra denne en Linje $P_2 Q_2$, som af Takstgrænserne deles i Stykkerne $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$, medens $P_1 Q_1$ paa lignende Maade deles i $y_1, y_2, y_3 \ldots . y_n$, saa haves, idet Bogstavernes Betydning iøvrigt er som ovenfor

$$\frac{1}{2}p\left\{(a_1+y_1)\frac{t_1}{24}+(a_2+y_2)\frac{t_2}{24}+\ldots.+(a_n+y_n)\frac{t_n}{24}\right\}=A\,; \quad (\alpha)$$

men

$$\frac{a_1-a_1}{y_1-a_1}=\frac{a_2-a_2}{y_2-a_2}=\ldots\ldots=\frac{a_n-a_n}{y_n-a_n}=\frac{h}{p},$$

hvoraf

$$y_1=a_1+\frac{p}{h}(a_1-a_1)\ ,\ y_2=a_2+\frac{p}{h}(a_2-a_2)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ y_n=a_n+\frac{p}{h}(a_n-a_n), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

hvilke Udtryk indsatte i (α) giver

$$p(2a_1t_1+2a_2t_2+2a_3t_3+\ldots..+2a_nt_n)$$

$$+\frac{p^2}{h}\left\{(a_1-a_1)t_1+(a_2-a_2)t_2+\ldots..+(a_n-a_n)t_n\right\}=48A$$

eller skrevet paa sædvanlig forkortet Maade

$$2ph\,[at]+p^2[(a-a)t]=48Ah\,,$$

hvoraf

$$p^2+2\frac{h\,[at]}{[(a-a)t]}p-\frac{48Ah}{[(a-a)t]}=0$$

og

$$p=-\frac{h\,[at]}{[(a-a)t]}\overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{h^2[at]^2}{[(a-a)t]^2}+\frac{48Ah}{[(a-a)t]}}$$

eller

$$p=\frac{-h\,[at]+\sqrt{h^2[at]^2+48Ah[(a-a)t]}}{[(a-a)t]} \quad . \quad . \quad (132)$$

Denne Formel, der ikke er saa besværlig at anvende, som det maaske kunde synes, vil vistnok med Fordel kunne anvendes ved en eller anden Lejlighed. Formlen kræver imidlertid, at Takstgrænserne gaa retlinet over Stykket mellem PQ og P_2Q_2.

2. Af en Figur at afskære et vist Areal ved en Linje gennem et givet Punkt.

Er Figuren den paa Fig. 230 viste, og skal i dens østlige Ende ved en Linje gennem P afskæres et vist Areal, trækkes ligesom før en foreløbig Delingslinje PQ gennem P, saaledes at den skønnes nogenlunde at afskære det forlangte Areal. Den endelige Delingslinje PQ_1 vil da være

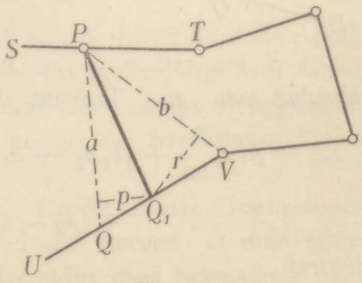


Fig. 230.

bestemt derved, at man skal have Trekant $PQQ_1 = A$, altsaa med samme Betegnelser som ovenfor (se Figuren)

$$\frac{1}{2} ap = A,$$

hvilket giver

$$p = 2\frac{A}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (133)$$

Man opsøger da i UV det Punkt Q_1, som har Afstanden p fra PQ, trækker den endelige Delingslinje PQ_1 og prøver det afsatte Areal.

Hyppigt kan man undgaa den foreløbige Delingslinje; havde man f. Eks. beregnet Arealet øst for $PV = b$, og var Forskellen mellem det forlangte Areal og dette B, findes Q_1 derved, at man skal have Trekant $PVQ_1 = B$, altsaa

$$\frac{1}{2} br = B,$$

hvilket giver

$$r = 2\frac{B}{b}.$$

Q_1 er altsaa det Punkt i UV, som har Afstanden r fra PV.

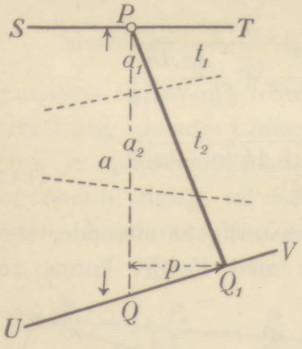


Fig. 231.

Er det et *boniteret* Areal, som skal afsættes, trækkes ligesom før en foreløbig Delingslinje PQ (Fig. 231). Er nu de prikkede Linjer Grænser for Takststykkerne med Taksterne t_1, t_2, t_3 .... t_n, og afskærer Takstgrænserne Stykkerne a_1, a_2, a_3, ... a_{n-1} regnede fra P paa $PQ = a$, saa haves, naar Højderne i de paagældende Trekanter betegnes med h_1, h_2, ... h_{n-1}, medens Højden paa a i Trekant PQQ_1 betegnes ved p,

$$2A = h_1 a_1 \frac{t_1}{24} + (h_2 a_2 - h_1 a_1)\frac{t_2}{24} + (h_3 a_3 - h_2 a_2)\frac{t_3}{24} + \ldots.$$

$$+ (pa - h_{n-1} . a_{n-1})\frac{t_n}{24},$$

hvoraf

$$48A = h_1 a_1 (t_1 - t_2) + h_2 a_2 (t_2 - t_3) + h_3 a_3 (t_3 - t_4) + \ldots$$

$$+ apt_n.$$

Gaar man nu ud fra den Forudsætning, at Trekanterne er ligedannede, saa vil man have

$$\frac{h_r}{p} = \frac{a_r}{a} \quad \text{altsaa} \quad h_r = a_r \frac{p}{a},$$

hvorved faas

$$48A = \frac{p}{a}\left\{a_1^2(t_1 - t_2) + a_2^2(t_2 - t_3) + a_3^2(t_3 - t_4) + \ldots + a^2 t_n\right\},$$

hvilket giver

$$p = \frac{48aA}{a_1^2(t_1 - t_2) + a_2^2(t_2 - t_3) + a_3^2(t_3 - t_4) + \ldots + a^2 t_n} \quad (134)$$

Denne Formel vilde kun være rigtig, dersom alle Takstgrænserne og Linjen UV var indbyrdes parallele. Det afsatte Areal maa derfor prøves, og om fornødent maa der foretages endnu en Flytning.

Skal der foretages en mere omfattende Deling af en Ejendom, maa der efter de foreliggende Omstændigheder udarbejdes en foreløbig Delingsplan, som antydes paa Kortet ved foreløbige Delingslinjer. Disses endelige Beliggenhed bestemmes derpaa en efter en, idet man foretager en nøjagtig Bestemmelse af Størrelsen af de afsatte Dele, hvorved man faar Oplysning om, hvormeget de foreløbige Delingslinjer skal flyttes.

Man gaar ved denne Lejlighed altid saaledes frem, at man udfører en fortsat Tvedeling, idet man, naar den hele samlede Figur skal deles i flere Dele, begynder med at trække den Delingslinje, som nærmest halverer Figuren, hvorefter man atter udfører en Tvedeling af hver af Delene for sig og saa fremdeles, saa at alle Linjer fastlægges ved sukcessiv Anvendelse af de ovenfor løste Opgaver.

Det er af største Vigtighed, at alle de hertil hørende Arealberegninger udføres og opskrives omhyggeligt, og hver Gang man har fastlagt en Delingslinje, bør dens rigtige Beliggenhed kontroleres ved en Beregning af begge de fremkomne Deles Arealer.

Sluttelig overføres alle de paa Kortet afsatte Grænselinjer til Marken, hvilket vel i Reglen vil ske derved, at man efterhaanden indmaaler deres Skæringspunkter med bestaaende Skel eller andre faste Linjer, som findes saavel i Marken som paa Kortet. Bedst er det, naar Polygonpunkterne er bevarede, at afsætte alle Skelhjørner i Forhold til Polygonsiderne.

207. I nær Forbindelse med Afsætning af Arealer staar

Grænsereguleringer, som gaar ud paa at erstatte en uregelmæssig Grænse med en regelmæssig, uden at de tilstødende Ejendommes geometriske eller efter Omstændighederne boniterede Arealer forandres.

Skal Grænsen $MNORSP$ reguleres ved en ret Linje gennem P (Fig. 232), og skal de *geometriske* Arealer bibeholdes, trækkes en foreløbig Reguleringslinje $PQ = a$, hvorefter de paa begge Sider af denne afskaarne Arealer beregnes; PQ skal da flyttes til højre eller venstre, eftersom Summen af de til højre eller Summen af de til venstre for den liggende Arealer er størst. Er Forskellen mellem disse Summer A, hvilket betyder, at den ene Ejendom ved den foreløbige Reguleringslinje har faaet A mere end den anden, maa den ene ved Reguleringslinjens Flytning afgive Stykket A til den anden. Den endelige Reguleringslinje PQ_1 er da bestemt derved, at Trekant PQQ_1 skal være lig A, altsaa

$$\frac{1}{2}ap = A,$$

hvilket giver

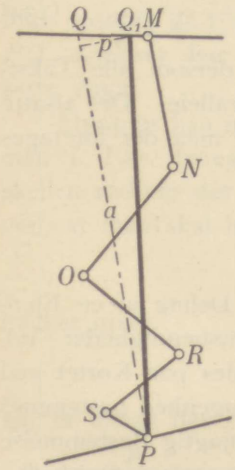


Fig. 232.

$$p = 2\frac{A}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Skal den ny Grænselinje ikke gaa gennem et bestemt Punkt, men være parallel med en given Linje, trækkes den foreløbige Reguleringslinje i Overensstemmelse hermed, og Flytningen er da bestemt ved

$$p = \frac{A}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

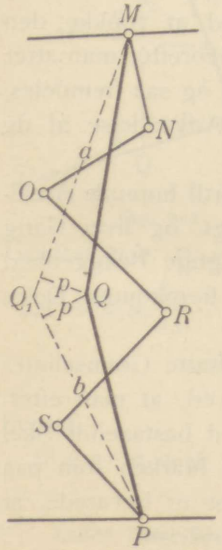


Fig. 233.

Skal begge Grænselinjens Endepunkter forblive uforandrede, tegner man gennem disse en foreløbig Reguleringslinje, den brudte Linje PQ_1M (Fig. 233), hvorefter man, som ovenfor angivet, beregner det Areal A, som skal afskæres mellem denne og den endelige Reguleringslinje PQM, der da er bestemt derved, at Trekant PQ_1Q + Trekant MQ_1Q skal være lig A, altsaa, idet $MQ_1 = a$ og $PQ_1 = b$, medens p er Afstanden fra Q

saavel til a som til b, ved

$$\frac{1}{2}pa + \frac{1}{2}pb = A ,$$

hvilket giver

$$p = 2\frac{A}{a+b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

Skal Grænsen reguleres med Bibeholdelse af de boniterede Arealer, saa vil man, eftersom Reguleringen skal foregaa ved en Parallelforskydning eller en Drejning, kunne anvende henholdsvis Formel (131) eller (134).

---

14. Kapitel.

Prøve af en Opmaaling.

§ 47. Forskellige Kortprøvemetoder.

208. Naar Resultatet af en Opmaaling, hvad enten denne foreligger som et Kort eller ej, skal prøves, kan dette kun ske ved Sammenligning med en anden Opmaaling af det samme Terræn. Prøven kan være mere eller mindre fuldstændig, eftersom man ved Prøven medtager flere eller færre af Terrænets Punkter eller Linjer, og den kan være mere eller mindre rationel, eftersom den støtter sig mere eller mindre til Fejlteorien. Hvilken Prøvemetode, man i det enkelte Tilfælde bør anvende, beror dels paa den Skarphed, som fordres i Dommen over den prøvede Opmaaling, og dels paa det ved Prøven tilsigtede Formaal, som enten kan være at angive Opmaalingens Nøjagtighed eller at skaffe Sikkerhed for, at Opmaalingen i sin Helhed er rigtig, saa at der f. Eks. ingen grove Fejl findes, eller at intet mangler paa Kortet.

209. Ved den i ældre Tider f. Eks. ved Prøven af Matrikulskortene her i Landet mest anvendte Prøvemetode, Disproportionsmetoden kaldet, udstak man lange Linjer tværs igennem Terrænet og ud over dettes Grænser; disse Linjer blev bundne ved deres Endepunkter eller dog nær ved disse til faste, saavel i Terrænet som paa Kortet skarpt betegnede

Punkter, ved Maal, som maatte være saa korte, at Kortets mulige Indkrympning ingen Indflydelse kunde have paa deres Længde. Senere blev det almindeligt at knytte Linjerne sammen, saa at der kom til at foreligge en selvstændig Maaling. Linjerne gennemmaaltes i hele deres Længde fra den ene Ydergrænse til den anden, og samtidig toges Maal til deres Skæringspunkter med de Skel, som de passerede. Naar man havde udstukket og maalt et vist Antal saadanne Linjer i forskellige Retninger, blev de alle indkonstruerede paa Kortet, og man tog nu paa dette de Maal, som svarede til de i Marken tagne. Den Forskel, der da viste sig mellem Længden maalt i Marken og den tilsvarende Længde maalt paa Kortet, kunde betragtes som hidrørende fra Kortets Indkrympning eller fra en urigtig Kædelængde. Forskellen blev beregnet procentvis, og i Reglen blev Kortet kasseret, naar Disproportionen, o: Differensen mellem den største og den mindste Indkrympning oversteg $^1/_2$ pCt.

Som Eksempel paa en saadan Prøve anføres:

Linje	Længde i Marken Alen	Længde paa Kortet Alen	Differens Alen	Uoverensstemmelse i pCt. af Linjens Længde
AB	2700	2714	+ 14	+ 0.52
CD	4816	4794	— 22	— 0.46
EF	4453	4403	— 50	— 1.12
GH	3122	3118	— 4	— 0.13

Den største Disproportion er mellem Linjerne *AB* og *EF*, nemlig $+ 0.52 - (- 1.12) = 1.62$ pCt., altsaa over 0.5 pCt., saa at Kortet kasseres.

Det vil let forstaas, at denne Prøve ikke kunde give nogen paalidelig Oplysning om Kortets Godhed. Navnlig er Disproportionen et meget daarligt Maal paa Kortets Godhed, da en begaaet Fejl vil virke højst ulige, eftersom den opdages paa en lang eller en kort Linje. I 5. Afsnit vil de instruksmæssige Forskrifter for Prøverne af Matrikulskortene blive nærmere omtalte; det skal dog endnu her bemærkes, at der ogsaa var foreskrevet, at Maalerne skulde sammenligne Kortene over tilgrænsende Byer for at forvisse sig om, at Grænserne var rigtigt maalte.

210. En langt mere rationel Metode til Sammenligning af to Opmaalinger af samme Terræn blev første Gang fremstillet af Professor *Oppermann*[1]) i »Tidsskrift for Krigsvæsen, 1857«; efter at den af Professor *Freuchen* blev noget ændret, er Metoden i henved 50 Aar benyttet ved Bedømmelsen af Eksamensmaalingerne ved Landbohøjskolen samt ved Prøverne af Kortene over Købstædernes Bygrunde og de senere nymaalte Matrikulskort.

»Den oppermannske Kortprøve« gaar ud paa at sammenligne Koordinaterne til et forholdsvis mindre Antal Punkter efter de to Opmaalinger og derpaa at beregne Middelfejlen i disse Punkters Koordinater. Herved faas et udmærket Maal for Opmaalingens Nøjagtighed i sin Helhed; men det er klart, at man ikke sikrer sig mod Maalefejl i alle de enkelte Punkter.

Ved Prøve af Matrikulskort, hvor man foruden Oplysning om Kortets Nøjagtighed tillige skal have den størst mulige Sikkerhed for, at Kortet overhovedet ikke indeholder større Fejl, navnlig i Beliggenheden af Ejendomsskel, kan denne Prøvemetode næppe anvendes alene. Her maa denne Sikkerhed skaffes tilveje paa anden Maade, saaledes som det ogsaa har været foreskrevet i Instrukserne for Opmaaling til Fornyelsen af Matrikulskortene, hvilket dels — og navnlig ved Kort i stor Maalestoksforhold — kan ske ved at konferere det færdige Kort med Marken og dels ved i forskellige Retninger gennem Terrænet at maale Linjer, der overskærer saa mange Skel og Terrænlinjer som muligt. Saadanne Linjer bør da kun knyttes til absolut sikre Punkter saasom Triangulations- eller Polygonpunkter — ikke til Terrænpunkter.

Den allerbedste Sikkerhed faas naturligvis, naar alle vigtige Punkter og da navnlig alle Skelhjørner bestemmes dobbelt ved to uafhængige Maalinger udførte af forskellige Personer; men en saadan Fremgangsmaade bliver selvfølgelig meget kostbar, selv om det samme Linjenet — der jo er kontroleret paa anden Maade — kan benyttes ved begge Maalinger.

§ 48. Den Oppermannske Kortprøve.

211. Vi vil først betragte to kongruente Punktsystemer indeholdende n Punkter, som er bestemte i Forhold

[1]) L. H. F. Oppermann (1817—1883) var Professor i Tysk ved Kjøbenhavns Universitet; han var en dygtig Matematiker og interesserede sig meget for Landmaaling.

til retvinklede Koordinatsystemer, der kan være stillede paa en hvilkensomhelst Maade i de to Systemer, naar de kun begge har deres Begyndelsespunkter kongruent beliggende. Koordinaterne til Punkterne i det ene System vil vi kalde a og b, i det andet System A og B.

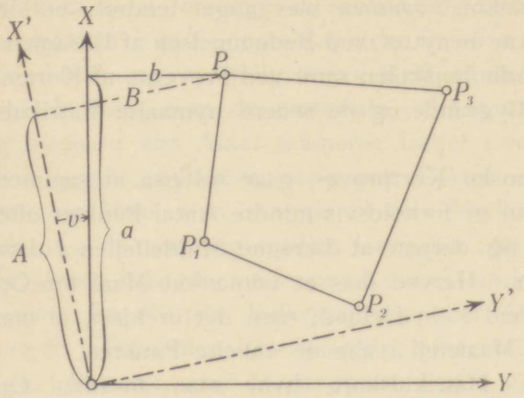


Fig. 234.

Bringes de to Systemer til Dækning, vil deres Begyndelsespunkter ogsaa dække hinanden, og er v den Vinkel, som A-Systemets Akser skal drejes i positiv Omløbsretning for at komme til at dække a-Systemets Akser, vil man (Fig. 234) have følgende $2n$ Ligninger

$$\left.\begin{aligned} A_1\cos v + B_1\sin v &= a_1 \\ B_1\cos v - A_1\sin v &= b_1 \\ A_2\cos v + B_2\sin v &= a_2 \\ B_2\cos v - A_2\sin v &= b_2 \\ \cdots\cdots & \\ A_n\cos v + B_n\sin v &= a_n \\ B_n\cos v - A_n\sin v &= b_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (138)$$

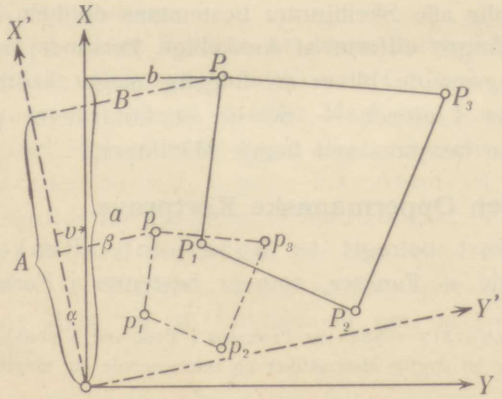


Fig. 235.

Vi vil dernæst gaa over til at betragte to ligedannede Punktsystemer indeholdende n Punkter, som ligeledes er bestemte i Forhold til retvinklede Koordinatsystemer, der kan være stillede paa en hvilkensomhelst Maade i

de to Systemer, naar de kun begge har deres Begyndelsespunkt ligedan beliggende. Koordinaterne til Punkterne i det ene System vil vi kalde a og b, i det andet α og β.

For at komme til Ligninger mellem disse Koordinater, tænker vi os et tredje System med Koordinaterne A og B, som er kongruent med det første og ligedannet med det andet i Forholdet m (Fig. 235). Man har da foruden Ligningerne (138) tillige Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= m\,\alpha_1 \\ B_1 &= m\,\beta_1 \\ A_2 &= m\,\alpha_2 \\ B_2 &= m\,\beta_2 \\ &\cdots\cdots \\ A_n &= m\,\alpha_n \\ B_n &= m\,\beta_n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

og man faar altsaa ved Indsætning af disse i (138) følgende $2n$ Ligninger

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 m\cos v + \beta_1 m\sin v &= a_1 \\ \beta_1 m\cos v - \alpha_1 m\sin v &= b_1 \\ \alpha_2 m\cos v + \beta_2 m\sin v &= a_2 \\ \beta_2 m\cos v - \alpha_2 m\sin v &= b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n m\cos v + \beta_n m\sin v &= a_n \\ \beta_n m\cos v - \alpha_n m\sin v &= b_n. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (140)$$

Sættes nu $m\cos v = z$ og $m\sin v = y$,

altsaa $tg\,v = \dfrac{y}{z}$ og $m = \sqrt{z^2 + y^2}$,

faar man

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 z + \beta_1 y &= a_1 \\ \beta_1 z - \alpha_1 y &= b_1 \\ \alpha_2 z + \beta_2 y &= a_2 \\ \beta_2 z - \alpha_2 y &= b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n z + \beta_n y &= a_n \\ \beta_n z - \alpha_n y &= b_n. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (141)$$

Dersom de to Punktsystemer er fuldstændig ligedannede, kan man af hvilkesomhelst 2 af de $2n$ Ligninger finde z og y og altsaa m og v, og de fundne Værdier maa da tilfredsstille ogsaa de øvrige Ligninger. Men er Punktsystemerne ikke ganske ligedannede, saaledes som det vil være Tilfældet, naar der er Tale om at sammenligne to Maalinger af det samme Punktsystem, der hver for sig om end i forskellig Grad er be-

hæftede med Fejl, og hvoraf det ene, forsaavidt det foreligger som et Kort, har forandret Dimensioner ved Papirets Indkrympning, saa vil det ikke være muligt at finde Værdier for z og y, der paa én Gang tilfredsstiller alle Ligningerne.

212. Vil vi nu for at bedømme en Maalings Godhed sammenligne Koordinaterne a og b til nogle af de ved denne Maaling bestemte Punkter med Koordinaterne α og β hidrørende fra en fejlfri Prøvemaaling (ɔ: en Maaling, som er saa nøjagtig, at den kan betragtes som fejlfri i Forhold til den første), saa foreligger her en simpel Elementudjævning, idet der maa tillægges Koordinaterne a og b (Observationsstørrelserne) saadanne Rettelser d og δ, at Ligningerne (141), Fundamentligningerne, bliver tilfredsstillede.

Som det skal ses i det følgende, kan v let bringes til at være meget lille, og da vi tillige kan forudsætte, at Maalestoksforholdet m ligger i Nærheden af 1, bliver $z = m\cos v$ meget tæt ved 1 og $y = m\sin v$ meget lille. Vi vil derfor som Tilnærmelsesværdi for z sætte 1, ɔ: sætte $z = 1 + x$, medens y paa Grund af sin Lidenhed ikke behøver nogen Tilnærmelsesværdi. Herved omdannes Fundamentalligningerne til Betingelsesligningerne

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 x + \beta_1 y - (a_1 - \alpha_1) &= d_1 \\
\beta_1 x - \alpha_1 y - (b_1 - \beta_1) &= \delta_1 \\
\alpha_2 x + \beta_2 y - (a_2 - \alpha_2) &= d_2 \\
\beta_2 x - \alpha_2 y - (b_2 - \beta_2) &= \delta_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_n x + \beta_n y - (a_n - \alpha_n) &= d_n \\
\beta_n x - \alpha_n y - (b_n - \beta_n) &= \delta_n .
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (142)$$

Normalligningerne bliver

$$\left.\begin{aligned}
-[\alpha(a-\alpha) + \beta(b-\beta)] + [\alpha^2 + \beta^2]x &= 0 \\
-[\beta(a-\alpha) - \alpha(b-\beta)] + [\alpha^2 + \beta^2]y &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (143)$$

og disse giver da umiddelbart

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{[\alpha(a-\alpha) + \beta(b-\beta)]}{[\alpha^2 + \beta^2]} \\
\text{og} \qquad y &= \frac{[\beta(a-\alpha) - \alpha(b-\beta)]}{[\alpha^2 + \beta^2]} .
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (144)$$

Middelfejlen i a-Systemets Koordinater er da (se Fejlteorien (59)) bestemt ved

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[d^2 + \delta^2]}{2n - 2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

Da Prøvemaalingen imidlertid ikke — som forudsat — er fejlfri, om den end ved passende Valg af Maalemetoder kan bringes til kun at have en meget lille Middelfejl, saa vil den Middelfejl μ, som findes ved (145), være bestemt ved

$$\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2,$$

hvor μ_1 er det prøvede Korts virkelige Middelfejl og μ_2 Prøvemaalingens Middelfejl (Fejlteorien (22)). Det ses imidlertid, at naar Prøvemaalingens Middelfejl kun er lille, bliver μ og μ_1 paa det nærmeste ligestore.

Eks.: $\mu_1 = 0.60$ m og $\mu_2 = 0.20$ m giver $\mu = 0.63$ m.

Da Maalestoksforholdet mellem den prøvede Maaling og Prøvemaalingen (se Side 317) er bestemt ved $m = \frac{z}{\cos v} = \frac{1+x}{\cos v}$ eller med stor Tilnærmelse ved $1 + x$, ses det, at x meget nær angiver den prøvede Maalings Udvidelse, ɔ: for x positiv har den prøvede Maaling Udvidelse, for x negativ Indkrympning.

Vinklen v, Drejningen kaldet, mellem Akserne i de to Systemer er bestemt ved $\operatorname{tg} v = \frac{y}{z}$ eller med stor Tilnærmelse ved $v = y$, ɔ: y angiver meget nær Drejningen udtrykt i rene Tal, og eftersom y er positiv eller negativ, skal Prøvemaalingens Akser drejes i positiv eller negativ Omløbsretning for at komme til at dække den prøvede Maalings Akser.

213. Skal man nu anvende den i det foregaaende angivne Metode til at prøve et Kort, udfører man først en Prøvemaaling over det samme Terræn, ved hvilken man bestemmer Beliggenheden af et større eller mindre Antal Punkter saa nøjagtigt som muligt, og saaledes at man saa direkte som muligt kan beregne Punkternes Koordinater af de i Marken tagne Maal. Koordinatsystemet kan vælges vilkaarligt, men af Hensyn til Maaltagningen paa Kortet (se det efterfølgende) bør det vælges saaledes, at en Linje $\neq$ en af Koordinatakserne kommer til at ligge nær ved saa mange som muligt af de prøvede Punkter. (Saml. 1. Afsnit Side 8).

I Almindelighed bestemmes Terrænpunkterne ved Sigte og Maal eller ved Fremskæring fra Hovedpunkterne (trianguleredе Punkter, Polygonpunkter eller Punkter bestemte ved Tilbageskæring); og hvert enkelt Terrænpunkt bør være bestemt med Kontrol, enten ved et overskydende Maal eller — naar man

har benyttet Sigte og Maal — derved, at Afstanden kontroleres ved Distancemaalig.

Naar de retvinklede Koordinater (α og β) til de saaledes bestemte Punkter er beregnede, skal man paa Kortet maale Koordinaterne (a og b) til de samme Punkter i Forhold til Akser, som vel ogsaa kunde vælges vilkaarligt, men som i Henhold til, hvad foran er sagt, bør danne den mindst mulige Vinkel (v) med Prøvemaalingens Akser; dette opnaas derved, at man paa Kortet indkonstruerer en Linje, der saa nær som muligt falder sammen med en af Prøvemaalingens Akser (f. Eks. Ordinataksen), idet man med nogle Punkter paa Kortet som Centrer og med de paagældende Punkters Abscisser (saaledes som de er fundne ved Prøvemaalingen) som Radier tegner Cirkelbuer og derefter en Linje, der saa nær som muligt tangerer alle Cirkelbuerne.

For at faa Prøvemaalingens Begyndelsespunkt afsat i denne Akse, nedfælder man fra et af de prøvede Punkter, som ligger nær ved Aksen, en Perpendikulær paa denne og afsætter fra Perpendikulærens Fodpunkt det vedkommende Punkts Ordinat henad Aksen; samtidig afsætter man hen ad denne fra det fundne Begyndelsespunkt med konstante Afstande, f. Eks. 200 eller 400 Meter efter Maalestoksforholdet, en Række Punkter.

For de Punkter, som ligger nogenlunde nær ved den indtegnede Akse (Ordinataksen) paa Kortet, kan Abscissen maales maales direkte, og som oftest uden at man behøver at nedfælde Perpendikulæren. Til Bestemmelse af Ordinaten maaler man derefter langs Kanten af en Lineal Afstanden fra Punktet M til et af de faste Punkter i Aksen; er denne Afstand z, den direkte maalte Abscisse x, saa har man (Fig. 236)

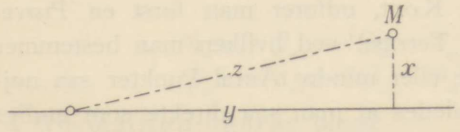


Fig. 236.

$$y = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{(z - x)(z + x)} .$$

Middelfejlen paa y er ifølge Fejlteorien (22) bestemt ved

$$m_y = \pm\sqrt{A_1^2 m_x^2 + A_2^2 m_z^2} ,$$

hvor A_1 og A_2 er bestemte ved

$$A_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{z^2 - x^2}} \quad \text{og} \quad A_2 = \frac{dy}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2}} ,$$

hvilket, idet vi forudsætter, at alle Maal paa Kortet tages med samme Nøjagtighed, altsaa $m_x = m_z = m$, giver

$$m_y = \pm m \sqrt{\frac{z^2 + x^2}{z^2 - x^2}} = \pm m \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{z}\right)^2}} .$$

Heraf ses, at z skal være saa stor som muligt i Forhold til x; z bør ikke være mindre end 2 Gange x.

Ligger Punktet M undtagelsesvis saa langt fra den paa Kortet indtegnede Akse, at dets Afstand fra denne ikke kan maales direkte, maaler man Afstandene a og b fra to faste Punkter i Aksen, og man har da (Fig. 237), idet Afstanden mellem disse er l (saml. Side 87 og 92),

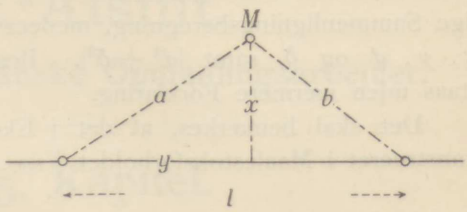


Fig. 237.

$$y = \frac{l}{2} + \frac{(a+b)(a-b)}{2l}$$

og $$x = \sqrt{(a+y)(a-y)} = \sqrt{(b+(l-y))(b-(l-y))} .$$

Efter at man saaledes paa Kortet har maalt Koordinaterne til alle de Punkter, der er bestemte ved Prøvemaalingen, henføres saavel disse som Prøvemaalingens Koordinater til Akser, der i hvert Punktsystem har Tyngdepunktet til Begyndelsespunkt, idet dette Punkt er det, som med størst Sandsynlighed er ens beliggende i de to Punktsystemer. Dette opnaas, ved at man fra Abscissen til hvert Punkt, saaledes som denne er funden paa Kortet og ved Prøven, trækker Middeltallet af henholdsvis Kortets og Prøvens Abscisser, og ligeledes for Ordinaterne. Som Prøve paa denne Beregning tjener, at Summen af de reducerede Abscisser bliver Nul dog med den lille Differens, som hidrører fra, at Tyngdepunktets Koordinater kun beregnes med én Decimal, ligeledes for Ordinaterne.

Viser der sig enten straks ved Sammenligningen af de to Sæt Koordinater, eller efter at disse er reducerede, større Fejl (ɔ: Fejl større end 3 Gange Middelfejlen), da maa de Punkter, i hvilke de forekommer, skydes ud. Punkternes Fejl maa da senere særskilt beregnes, idet man benytter de for de andre Punkter fundne Værdier for x og y.

Skal Prøvemaalingen anvendes til Bedømmelse af en Maaling, hvis Resultat ikke foreligger i Form af et Kort, maa man paa Basis af Maalebogen beregne Koordinater til de Punkter, som man ønsker at prøve. De to Punktsystemers Akser vil da rimeligvis danne en betydelig Vinkel med hinanden, og man maa derfor forud for Sammenligningen foretage en passende Drejning af det ene Koordinatsystem.

214. Sammenligningsberegningen m. m. kan opstilles saaledes som vist i Eksemplerne 50 og 51. I 50 ses den egentlige Sammenligningsberegning, medens 51 viser Beregningen af x, y, d og δ samt $[d^2 + \delta^2]$. Begge Beregninger vil forstaas uden nærmere Forklaring.

Det skal bemærkes, at det i Eksemplet prøvede Kort er konstrueret i Maalestoksforholdet $^1/_{2000}$.

5. Afsnit.

De vigtigste danske Opmaalingsarbejder.

---

15. Kapitel.

Ældre Opmaalinger.

§ 49. De ældre, før 1761 udførte Opmaalinger.

215. De første samlede Kort, som vides at være tegnede over Dele af vort Land, er udførte i det 17. Aarhundrede.

Kgl. Matematikus Johannes Meier har paa Befaling af Christian den IV og Frederik den III opmaalt og aftegnet Hertugdømmerne Schleswig og Holsteen, hvorefter der forundtes ham Tilladelse til at udgive disse Kort med fornøden Beskrivelse.

Peter Hansen Resen paabegyndte 1677 Udgivelsen af »Atlas Danicus«, der skulde omfatte et Skrift, en Kortrække og en Række Tegninger af Byer og vigtige Bygninger, men kun Tegningerne og Brudstykker af Skriftet udkom. I Traps: »Beskrivelse af Danmark« findes Gengivelser af en Del af Tegningerne.

I Anledning af Matrikulen 1688 udførtes i Aarene 1681—92 en Opmaaling af Landet; denne Opmaaling, som nærmere vil blive omtalt under »Ældre økonomiske og Matrikulsmaalinger« (Side 347), var meget primitiv og ufuldstændig, og Kort blev aldeles ikke udførte.

Omtrent paa samme Tid under Chr. V og Frederik IV har Kgl. Karte-Direktør Jens Søfrensen[1]) udarbejdet en Del Sø- og Landkort.

---

[1]) Findes flere Gange omtalt i »Garde: Efterretninger om den danske og norske Søemagt«. 1. og 2. Bind.

216. De første Forsøg paa en sammenhængende Opmaaling af Landet blev udført af Peter Kofod[1]), som herom gjorde Forslag til Videnskabernes Selskab, efter hvis Indstilling det af Frederik V i 1757 blev ham paalagt aarlig at maale et Amt, og der blev bevilget ham 300 Rbdl. om Aaret til Dækning af Udgifterne, hvorimod han intet Honorar fik; som Belønning blev han nemlig udnævnt til »Designeret Professor i Matematik ved Odense Gymnasium«, dog skulde han ingen Løn have, før han ved indtrædende Vakance kunde tiltræde Embedet. Peter Kofod døde imidlertid allerede i 1761 efterladende sig et rentegnet Kort over Kjøbenhavns Amt foruden Konceptkort over Roskilde samt en Del af Kronborg og Frederiksborg Amter; om disse Konceptkort siger Bugge, at »de for ham selv, om han havde levet, havde været tydelige nok; men andre og fremmede for hans Opmaaling kunde ikke derudi finde Rede«.

§ 50. Videnskabernes Selskabs Opmaalinger.

217. Man havde nu indset, at disse Opmaalinger langt oversteg Enkeltmands Kræfter, hvorfor Videnskabernes Selskab nedsatte en Kommission, som udarbejdede en ordentlig Plan til Danmarks geografiske Opmaaling. Denne Plan blev approberet ved Kgl. Rescr. af 26. Juni 1761. Hvad man har tilsigtet — og ogsaa gennemført — vil forstaas deraf, at det i Planen hedder:

»at her er ei Spørgsmaal om den geometriske eller specielle Opmaaling, men aleene om den geographiske og generelle, hvorved bliver fastsat, hvor meget Land og Vand haves udi et Rige, hvorledes begge ere beliggende mod hverandre til almindelig Brug og Nytte, og som viser alle Kjøbstæders, Kirkers, Slottes, publiqve Bygningers, Fabriqvers og Herregaardes indbyrdes Situation og Distancer, Søernes Tal og Størrelse, tilligemed deres Odder og Bugter, Skovenes ungefærlige Omkreds og Størrelse, Landeveienes, saavelsom Aaers og Bekkers Gang med deres betydelige Bugter, men især Landets Strandbredder og Søekyster, med derhos beliggende Skjær og Klipper, hvilken sidste Landmaaling har en stor Influence udi et Lands Forsvar, enten til at bedække Kysterne, eller i Tilfælde at reglere Krigs-Operationerne, men i Besynder-

[1]) Se »Molbech: Videnskabernes Selskabs Historie«.

lighed i Handelen og Navigationen, i det Kysterne anlægges paa deres rette Længde og Bredde, de Søefarende til Efterretning; ligesom den og bliver til en Rettesnor for hvad specielle Operationer, der kunde foretages i et Land, som skaffer habile Landmaalere og Nationen Smag for de mathematiske Videnskaber til Opkomst for Kunster og ny Opdagelse.«

Arbejdet paabegyndtes 1762 med 2 Landmaalere, men efterhaanden blev der antaget flere. Hver Landmaaler kunde med sine Medhjælpere optage 5—10 Kvadratmil om Aaret. Opmaalingen fuldførtes 1820. Kortene blev tegnede i $^1/_{20000}$ og senere udgivne i kobberstukne Blade, nemlig:

Kjøbenhavns Amt . . .	i 1	Blad	i $^1/_{80000}$	tegnet i	1766,
Sjælland	i 4	Blade	i $^1/_{120000}$	—	1768—72,
Møen, Laaland og Falster	i 1	—	i $^1/_{120000}$	—	1776,
Generalkort over Sjælland og Møen	i 1	—	i $^1/_{240000}$	—	1777,
Fyn	i 2	—	i $^1/_{120000}$	—	1780—83,
Jylland	i 9	—	i $^1/_{120000}$	—	1787—1805,
Anholt	i 1	—	i $^1/_{40000}$	—	1792,
Bornholm	i 1	—	i $^1/_{60000}$	—	1805,
Den sydlige Del af Hertugdømmet Schleswig samt Øen Femern . .	i 1	—	i $^1/_{120000}$	—	1825,
Sønderjylland eller Hertugdømmet Schlesvig	i 1	—	i $^1/_{240000}$	—	1836,
Generalkort over Jylland	i 1	—	i $^1/_{370000}$	—	1820,
Generalkort over Danmark og Slesvig . . .	i 2	—	i $^1/_{480000}$	—	1841.

218. Fremgangsmaaden ved disse Opmaalinger findes angivet i Bugges[1]) »Beskrivelse over den Opmaalings Maade, som er brugt ved de Danske geographiske Karter 1779«. Nogle Citater af dette Værk vil i det væsentlige oplyse Metoden:

---

[1]) Thomas Bugge (f. 1740, † 1815) tog theologisk Embedseksamen 1759, senere studerede han Matematik og Landmaaling. 1765 blev han Chef for Landmaalingskontoret under Rentekammeret, 1777 Professor i Astronomi og Matematik ved Kjøbenhavns Universitet. Han gjorde flere Rejser til Udlandet, bl. a. 1798 til Paris som Medlem af den der nedsatte Maal- og Vægt-Kommission. Han var Medlem af Videnskabernes Selskab og har skrevet en hel Del Afhandlinger.

»Man tager sine Hoved-Grundlinier midt paa Maalebordet, og giør dem lige saa lange som Bordet er. Grundlinien faaer da den beqvemste Beliggenhed, at man fra den, deels ved Sigter, deels ved Sidelinier kan optage alle de Objekter, som falde paa Kartebladet. Det har desuden den Fordeel, at, om nogen Feil enten i en Vinkel eller Liniernes Maal indløber, bliver alene det Sted, hvor Feilen er begaaet urigtig, men den har ingen Indflydelse paa de efterfølgende Opmaalinger, hvilke saa at sige bestandigen grundes paa nye Grundlinier«.

»Landet indeeles ved parallele Linier, som afstikkes og opmaales med Kieden heel igiennem. Disse tages saa langt fra hinanden, som Bordets Bredde bliver efter den antagne Maalestok for Kartene. For Ordenens Skyld kan de tages efter Sønder og Nord. Deraf følger: at Parallelerne blive de forommeldte Grundlinier midt paa Bordet, da paa hver Side falder paa Kartebladet Parallelernes halve Afstand.

Fra disse Parallele Hovedlinier affattes den heele Egn, som er at opmaale. Ingen Object kan forbigaaes. Det samlede Kart vil bestaae af rigtige sammenhængende og vel sammenpassende Karteblade, alle af lige Størrelse.

Da Maalestokken for de Danske Geographiske Opmaalings-Karte er 1000 Alen til en 1 Dansk Decimal-Tome, Maalebordets Breede er 10 Decimal-Tomer, eller 5000 Alen paa hver sin Side af den mellemste Hoved-Linie, saa bliver Hoved-Parallelernes Afstand 10000 Alen. Øen Siæland er i Øster og Vester fra Kiøbenhavn til Callundborg 49953 Favne eller 149859 Alen; hvoraf følger at Landet er deelt ved femten Hovedlinier, fra hvilke alt det øvrige er bestemt. Med andre Ord: Siæland er 15 gange efter afstukne Linier med Kieden maalt igiennem efter Sønder og Nord: og endnu mange fleere gange maalt paa tvers efter Øster og Vester for at finde Parallelernes rette Afstand; i hvilke Opmaalinger ingen merkelig Feil kan være muelig, da Maalet idelig og paa forskiellige Maader er prøvet.

Hvem seer da ikke, at den beskrevne Methode med parallele afstukne og maalte Hoved-Linier er meget nøiagtigere, ordentligere og beqvemmere end Triangel-Methoden, Diagonal-Methoden og fleere, som af forskiellige ere bragte i Forslag.

Ved denne Parallelernes Methode skulde man kunne forfærdige saa rigtige geographiske Karter, at de ingen videre

Correction behøvede, dersom ikke Papiir var Papiir, og underkastet mange Forandringer. Naar Papiiret, som paa Maalebordene har været udspendt, derfra afskiæres; krymper det sammen og Distancerne blive for korte; Denne Indkrympning er ikke ganske regelmæssig; den forandres efter Spendingen, Papiirets Tykkelse; Væirliget m. v. Den største Indkrympning paa 5 Decimal-Tome er $\frac{1}{2}$ Decimal-Linie, ved et Middeltal bliver den $\frac{1}{4}$ eller 0.25. Decimal-Linie, og vil paa Siælands Brede i Sønder og Nord fra Wordingborg til Gilleleye udgiøre 2064 Alen; Men i Henseende til Længden fra Kiøbenhavn til Callundborg ville disse tvende Stæder komme hinanden nærmere end de burde 1486 Alen; saa at, om man efter Landmaalings Kartene alene havde beregnet Siælands Indhold, var den fundet 4 a 5 Qvadrat Miile mindre end den burde.

Denne Feil, som ikke er ubetydelig, og tillige har Indflydelse paa alle mellemliggende Distancer, maa rettes ved trigonometriske Operationer. Man maaler en Grundlinie af omtrent en Miils Længde med Stænger; fra denne danner man igiennem heele Landet Rader af Triangler, hvis Sider kan voxe til 2 a 3 Miile, og som prøves ved Verifications Grundlinier. Saaledes bestemmes ved Beregning den sande Afstand imellem adskillige Hoved-Punkter, som enten allerede ere eller skal anlægges paa Landmaalings-Kartene; det er da klart, at Papiirets Sammenkrympning paa ingen Maade har forandret disse Distancer. Efter disse trigonometriske Karte rettes og forbedres Landmaalings-Karte, og hiine blive Grundvolden for disse.

Foruden disse trigonometriske Verificationer paa Jordens Overflade, er endnu en nye Bekræftelse taget fra Astronomiske Observationer, nemlig paa de trigonometriske Karter er Kiøbenhavns Meridian opdragen og Stationernes Afstand fra Meridianen og Perpendikularen paa samme ere beregnede. Deraf veed man Longituden og Latituden for et hvert Sted paa de trigonometriske Karte, og disse ere bekræftede ved astronomiske Observationer«.

Ved Opmaalingen har man da orienteret Maalebordet i de parallele »Hoved-Grundlinier« eller i andre fra disse udstukne Linjer. Alle de enkelte Terrængenstande saasom Landsbyer, Herregaarde o. s. v. blev bestemte ved Fremskæring fra to Stationer dog altid med Kontrol ved Sigte fra en tredje Station.

Sigterne blev åflagte ved Diopterlineal, og som Sigtepunkt benyttedes Kirketaarne, Møller eller andre fremtrædende Punkter; fandtes i en Landsby intet saadant, rejste man et Signal.

219. Den trigonometriske Triangulation udførtes efter ganske de samme Principper som nu til Dags. Vinkelmaalingen udførtes ved Hjælp af »Det geografiske Instrument«[1]), som findes nøjagtig beskrevet i Bugge's foran nævnte Bog; dette Instrument bestaar af en svær inddelt Kreds (1 Fod i Radius), som kan stilles vandret eller lodret. I fast Forbindelse med Kredsen er anbragt en Kikkert, Vaterpaskikkerten, hvis Sigtelinje ved en Libelle kan stilles nøjagtig vandret. En anden Kikkert, Alhidadkikkerten, drejes samtidig med Alhidaden og verificeres saaledes, at Nonien viser paa Kredsens Nulpunkt, naar begge Kikkerters Sigtelinjer er parallele. Med dette Instrument maaler man direkte Terrænvinklen, idet Kredsen indstilles i Vinkelbenenes Plan; man maa da bagefter maale Vinkelbenenes Højde over Horisonten og reducere den maalte Vinkel.

Mindste direkte Aflæsning paa Nonien er 1′; og Bugge angiver, at naar Instrumentet benyttes saaledes, at Fejlen i videst mulig Omfang elimineres, vil »den endelige Uvished i en Vinkel ikkun een Gang observeret endog ved den klareste Luft og under de fordelagtigste Omstændigheder blive mellem $^1/_2$ og $^3/_4$′«.

Ved Triangulationen var Trekantsidernes Længde i Reglen 2—3 Mil, Signalerne bestod af 4—5 Lægter, som blev gravede ned i Jorden, hvorhos der paa den øverste Ende blev bundet Grene og Buske af 4—5 Fods Bredde. Benene blev overstrøgne med Kalkvand.

En Basis blev maalt med Stænger mellem Brøndbyhøj og Thinghøj (nordvest for Kjøbenhavn); dens Længde var 14515 Alen. Efterhaanden, som Trekantnettet blev beregnet, blev af og til maalt Verifikations-Grundlinjer; efter den 70. Trekant var Forskellen mellem den direkte maalte og den beregnede Værdi for en saadan, som var 9404 Alen, 1 Alen og 2 Tommer. Foruden de trigonometriske Hovedpunkter bestemtes Kirketaarne og andre fremtrædende Punkter ved Sigter fra mindst tre Hovedpunkter.

---

[1]) 2 Eksemplarer af det geografiske Instrument henhører nu til Landbohøjskolens Samling af Landmaalingsinstrumenter.

For nu at forstaa, hvorledes Triangulationen anvendtes til Verifikationen af Kortene, skal Bugge atter anføres:

»Naar af de trigonometriske og Landmaalings Operationerne endeligen skal uddrages og forfærdiges de Karter, som fremtræde for Publikum; saa udkastes allerførst de trigonometriske Karte over dette Stykke. Nøiagtig at construere dette Karte efter Triangel-Raden alene er ikke mueligt; i saadanne Afsætninger vil alle foregaaende smaa Feil have en mærkelig Indflydelse paa de efterfølgende Punkter. Constructionerne bør derfor fornemmelig skee efter Afstanden fra Kiøbenhavns Meridian og Perpendikularen til samme, efter den Maalestok, i hvilken Kartet skal udgives.

Man antager de ved trigonometriske Beregninger bestemte og rigtig anlagte Kirker og andre Objekter som Hoved-Punkter; og Distancerne imellem dem som Hoved-Grundlinier. Naar disse da sammenlignes med samme Objekters Distancer paa Landmaalings-Kartene, udfinder man let, hvor meget paa disse Distancer ved den simple Landmaaling er feilet; og kan deraf beregne Feilene ved alle andre inden i de trigonometriske Triangler liggende Distancer og Objekter. Efter disse saaledes fundne Feil og rettede Distancer anlægges alle de andre Objekter, Kirker, Gaarde og Huuse.

Den øvrige opmaalte Beliggenhed af Veie, Aaer, Søer, Moser, Skove og Strandbredde m. v., vedtegnes da i Kartet efter foregaaende Korrektion, hvilken dog sielden behøves; da allerede Hoved-Korrektionen er skeet ved Objekterne; og Feilene i smaa Distancer af een eller en halv Miil ei kan blive merkelig ved en liden Maalestok«.

Endelig har man i en Del af de trigonometriske Hovedpunkter foretaget astronomiske Bestemmelser af Længder og Breder for saaledes som af Bugge anført (Side 327) at sammenligne disse med de beregnede.

Videnskabernes Selskabs Opmaalinger maa siges at være et efter deres Tid i enhver Henseende fortrinligt Arbejde, hvilket særlig gælder Triangulationen.

16. Kapitel.

Geodætiske og topografiske Opmaalinger.

§ 51. Gradmaalingens Arbejder.

220. Det var en ret nærliggende Tanke at benytte Videnskabernes Selskabs Triangulation til Udførelsen af en selvstændig Gradmaaling; en Plan til en saadan blev ogsaa virkelig lagt af Bugge i 1787, men den blev senere igen opgivet formentlig i Erkendelse af, at Triangulationen ikke var nøjagtig nok hertil.

Efter Bugges Død (1815) blev Spørgsmaalet taget op igen, og 1817 blev det overdraget hans Eftermand som Professor i Astronomi ved Kjøbenhavns Universitet, H. C. Schumacher (1780—1850) at lede Udførelsen af en Gradmaaling, som skulde omfatte Parallelen fra Kjøbenhavn til Vestkysten og Meridianen fra Lauenborg til Skagen. I Altona blev der grundlagt et Observatorium og samlet en Mængde fortrinlige Instrumenter, hvorved man tiltrak sig Udlandets Opmærksomhed.

Vinkelmaalingen paabegyndtes i Lauenborg og Holsten og fortsattes i nogle Aar med Energi, ligesom Schumacher i 1820 udmaalte en Basis ved Braack i Nærheden af Hamborg; denne Basis skulde være fælles for den hannoveranske og den danske Gradmaaling. Senere gik Arbejdet tildels i Staa; men da de holstenske og østpreussiske Gradmaalinger var førte frem til Grænsen, og da vi ved en ældre Aftale havde paataget os at forbinde dem med det svenske Trekantnet, blev Sagen atter taget op i 1837, hvorefter man paabegyndte Udmaalingen af nogle Trekanter i Nærheden af Kjøbenhavn, ligesom Basis paa Amager (se senere) blev udmaalt i 1838. Arbejdet blev imidlertid paa ny standset af Begivenhederne i 1848, og i 1850 døde Schumacher.

221. I 1853 blev det overdraget C. C. G. Andræ[1]) at forestaa den danske Gradmaaling, hvilket han udførte med megen

[1]) C. C. G. Andræ (f. 1812, † 1893) blev Premierløjtnant 1834, Kaptajn i Generalstaben 1842, desuden Lærer i Topografi og Geodæsi ved den militære Højskole, senere tillige i forskellige matematiske Fag. I 1848 var han Medlem af den grundlovgivende Rigsdag, senere Medlem dels af Folke- og dels af Landstinget. I 1851 blev Andræ Oberstløjtnant. I 1854 blev han afskediget sammen med Hall og Monrad; men endnu samme Aar blev han Finansminister,

Dygtighed. En fuldstændig Beretning om Arbejdet findes i »Den danske Gradmaaling«, som han har udgivet i 4 store Bind. Fra nu af fortsattes Arbejdet med megen Kraft og Energi kun afbrudt i Andræs Ministerperiode (54—58) og under den anden slesvigske Krig. Den oprindelige Schumacherske Plan blev ændret noget, idet man navnlig opgav Maalingen af Parallelen og holdt sig til Meridianen alene. Man begyndte med en Trekantrække til Forening af det tyske med det svenske Trekantnet; senere fortsattes Trekantrækken helt op igennem Jylland. En udmærket Hjælp blev ydet af Professor Peters i Altona, idet han overtog Bestemmelsen af Længdeforskellen mellem Kjøbenhavn og Altona. En væsentlig Del af Beregningerne er udførte af Kaptajnløjtnant N. F. Ravn, indtil han 1873 blev Marineminister. Kaptajn Meldahl har udført en Del Vinkelmaalinger i Jylland.

222. Basis er, som alt nævnt, udmaalt paa Amager i 1838 ved Hjælp af det Besselske Basisapparat, som dog ikke nærmere skal beskrives her. Grundlinjens Endepunkter er aflagte paa store Granitblokke, der i en Dybde af henved 5 Fod under Jordoverfladen er fastmurede i Fundamenter af Sten. Disse Blokke bærer i Midten af deres Overflader smaa Cylindre af Messing, hvis Centrer angiver selve Endepunkterne.

Længden af Basis er:

$$1385{,}83211 \text{ Toise} = 2701{,}037 \text{ Meter},$$

med en Middelfejl $\frac{1}{599500}$ af Længden = c. 4 Millimeter. Basis er ved en Række mindre Trekanter ført op til det egentlige Trekantnet.

Paa Kortet Side 332 er Sigterne i Gradmaalingsnettet angivne ved stærkt optrukne Linjer; de omkring Kjøbenhavn beliggende Punkter, gennem hvilke Basis er ført op til Trekantnettet, er dog ikke angivne paa Kortet.

Hvor Gradmaalingspunkterne ligger paa selve Terrænets Overflade (i Reglen paa høje Bakketoppe), er Stationspunktet betegnet med en svær, firkantet tilhugget, prismatisk Granitblok, hvis nederste Del er fastmuret i Grunden, medens den øvre rager omtrent 3 Fod op over Jorden og i Midten af den kvadratiske Overflade har et udboret cylindrisk Hul. Stenen er mærket »GM«. Ved Vinkelmaalingen har man benyttet Tømmer-

---

hvilken Post han beklædte til 1858; 1856—57 var han tillige Konseilspræsident. Fra 1853 til 1884 var Andræ Direktør for Gradmaalingen, og ved sin Afgang herfra udnævntes han til Geheimekonferensraad.

signaler eller Heliotrop. Vinkelmaalingen er udført med forskellige Instrumenter; Middelfejlen paa en ved en enkelt Sats

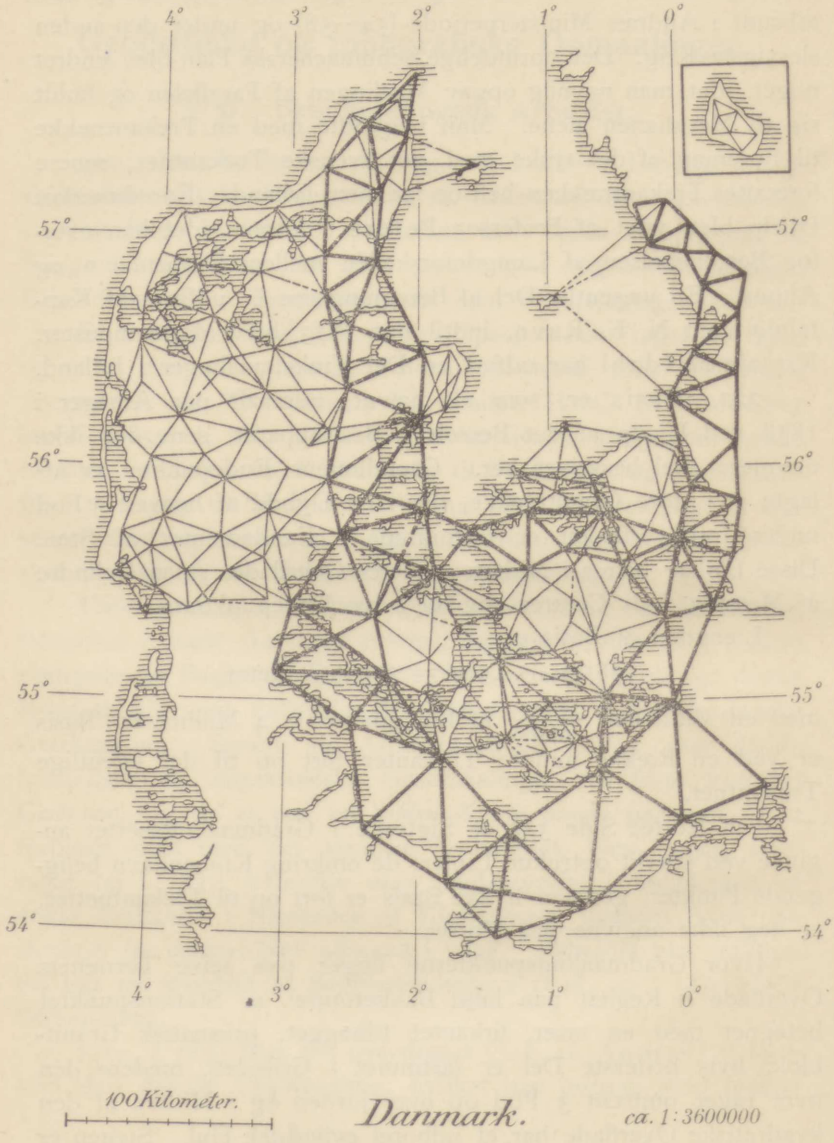


Fig. 238.

bestemt Retning vil næppe overstige 2 Sekunder, og man har tilstræbt at maale 36 Satser i alle Punkterne. Et bedre Begreb om Nøjagtigheden faas dog gennem Middelfejlen paa de bereg-

nede Sider. Det er indlysende, at denne bliver størst for de Sider, der er bestemte gennem det største Antal Trekanter. Paa den sidste Side, Flade- Skagen, i Trekantnettet er Middelfejlen $\frac{1}{113800}$, hvilket, da Siden er c. 35000 Meter, udgør 3 Decimeter; og dette skal da forstaas saaledes, at Siden er fremstillet som en Funktion af Grundlinjen og alle Vinklerne i de mellemliggende Trekanter, saa at der ved Beregningen af Middelfejlen er taget Hensyn saavel til Grundlinjens som til alle disse Vinklers Middelfejl.

Paa de forskellige Gradmaalingsstationer har man ikke alene maalt Hovedvinklerne, men man har tillige bestræbt sig for at fastlægge Retningerne til alle de mærkeligste, fra Stationen synlige Objekter, blandt hvilke den store Mængde af Kirketaarne indtager den mest fremtrædende Plads. Ligeledes er den største Del af de københavnske Kirketaarne tilligemed enkelte andre Punkter i København og dens umiddelbare Nærhed aflagte ved Sigter saavel fra »Nikolaj« som fra »Petri« (Hovedpunkter i Kjøbenhavn). Paa lignende Maade er Retningerne aflagte til en Del af Generalstabens Signaler (12—18 Satser).

I 3. Bind af »Den danske Gradmaaling« findes en Oversigt over samtlige Hovedpunkters Længder og Breder samt alle Azimuther og log Afstande; desuden findes Punkternes Polarkoordinater i Forhold til »Nikolaj«.

Det vil af det fremsatte ses, at samtidig med, at Gradmaalingen har løst sin egentlige Opgave, nemlig at give Danmarks Bidrag til Bestemmelsen af Meridiangradens Længde, har den tillige leveret et System af Hovedpunkter bestemte med den højeste Grad af Nøjagtighed.

Da denne Del af Gradmaalingens Virksomhed var afsluttet med Udgivelsen af 4. Bind af »Den danske Gradmaaling«, fratraadte Andræ 1884 Posten som Direktør for Gradmaalingen, som blev overdraget til Oberstløjtnant G. Zachariae.

223. Det Arbejde, som nu skulde tages op, var Udførelsen af Præcisionsnivellementer. Ligesaavel som Triangulationen har Præcisionsnivellementet oprindelig et rent videnskabeligt Formaal, idet alle paa den fysiske Jordoverflade udførte Observationer maa henføres til Sfæroiden ved en Reduktion, der er afhængig af Højden. Til en saadan Reduktion vilde vel et trigonometrisk Nivellement kunne give fornøden Nøjagtighed; men man har foretrukket at anvende et geometrisk Nivellement, hvilket ogsaa var nødvendigt af Hensyn til Besvarelsen af Spørgs-

maalet om den Nøjagtighed, med hvilken de forskellige Verdenshaves Middelniveauer ligger paa samme Niveauflade.

Gradmaalingen har her i Landet udført en Række Præcisionsnivellementer, som er angivne paa hosstaaende Kort ved

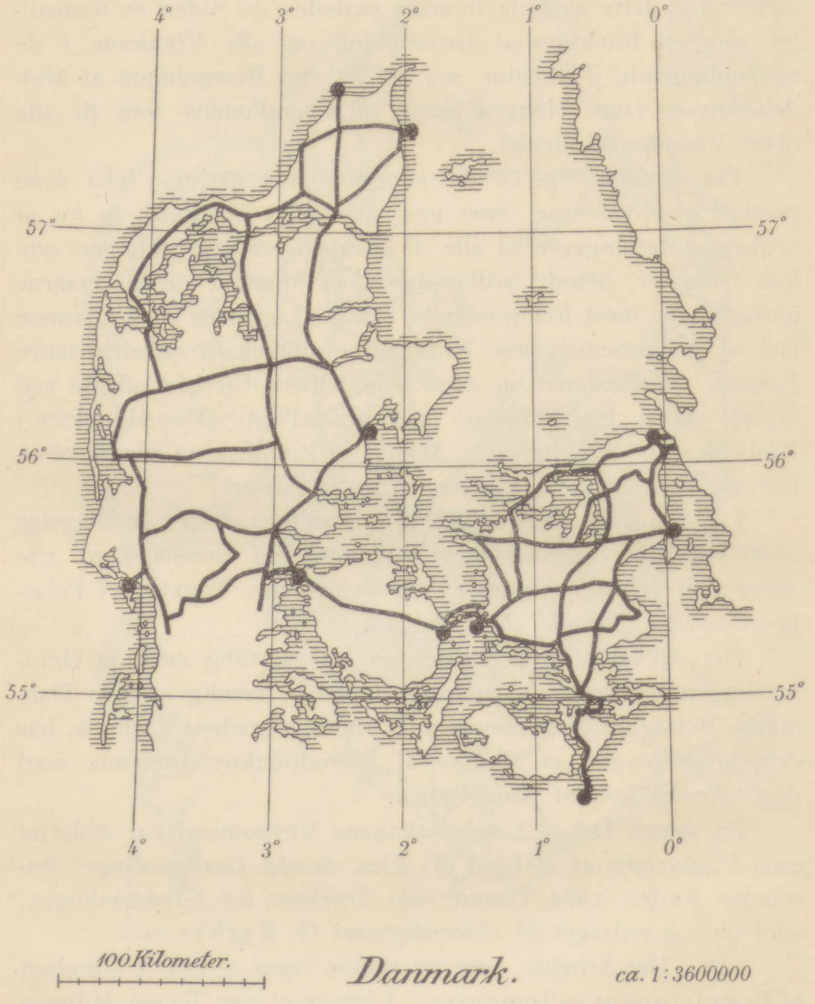


Fig. 239.

tykke fulde Linjer. I de med sorte Prikker betegnede Punkter er der anbragt Vandstandsmaalere. Nivellementet, der mod Syd staar i Forbindelse med det tyske, føres op gennem Jylland i tre Linjer. Overgangene over Limfjorden er ved Oddesund, Aggersund og Aalborg; de to første Steder er anvendt trigonometrisk Nivellement, medens man ved Aalborg er gaaet over den faste Bro.

Overgangen fra Jylland til Fyn er udført ved et tredobbelt trigonometrisk Nivellement ved Middelfart. Overgangen fra Fyn til Sjælland, der er omtalt Side 235, er ligeledes udført som et trigonometrisk Nivellement dels ved Maaling af gensidige Zenithdistancer og dels ved Maaling af Zenithdistancer fra Midten med Sprogø som Mellempunkt; Forbindelsen med Sverrig er udført ved et tredobbelt trigonometrisk Nivellement ved Helsingør, og endelig er Forbindelsen med Falster tilvejebragt over Masnedø.

Ved Præcisionsnivellementet, som afsluttedes 1903, har Gradmaalingen leveret en fortrinlig Højdebestemmelse af et stort Antal Punkter i de nivellerede Linjer, og det kan derfor siges, at Præcisionsnivellementet ligesom Triangulationen ved Siden af den videnskabelige har en meget stor praktisk Betydning. Det er en Selvfølge, at Fastlæggelsen af Nivellementspunkterne er af overordentlig stor Vigtighed. For hver løbende Mil findes der mindst et underjordisk Hovedpunkt, og foruden disse er der med c. 1/4 Mils (1.5 à 2 km) indbyrdes Afstand anbragt Mellempunkter, der kan være underjordiske, og af lignende Konstruktion som Hovedpunkterne, eller Bolte af noget forskellig Konstruktion, som er indstøbte i fundamentale Bygninger eller særlige i dette Øjemed etablerede Granitpiller. Nivellementslinjerne er i Reglen førte langs Hovedlandevejene.

De 10 Side 219 nævnte Vandstandsmaalere er knyttede til Nivellementsnettet, og Forbindelsen revideres hvert andet Aar. I 1906 var som Gennemsnit af stadige Iagttagelser paabegyndte i de i Parentes anførte Aar Vandstandshøjden i Forhold til »Normal Nul« i

Esbjerg	÷ 0.1918 m (1889)	Slipshavn . . .	÷ 0.2438 m (1896)
Hirtshals . . .	÷ 0.2856 m (1892)	Korsør	÷ 0.2158 m (1897)
Frederikshavn	÷ 0.2765 m (1893)	Hornbæk . . .	÷ 0.2262 m (1898)
Aarhus	÷ 0.2653 m (1889)	Kjøbenhavn. .	÷ 0.2124 m (1889)
Fredericia. . .	÷ 0.2543 m (1889)	Gjedser	÷ 0.2327 m (1898).

Disse Tal viser, at Vandstandshøjderne ved de forskellige Vandstandsmaalere afviger mere, end der kan skyldes Nivellementsforbindelserne; den særlig høje Vandstand i Esbjerg forklarer Zachariae ved de hyppigt forekommende stærke vestlige Vinde, hvis betydelige Overvægt over Vindene med østlig Retning under de lokale Forhold, som Havnen i Esbjerg frembyder, maa bevirke en Opstemning af Vandet, altsaa en noget højere Middelvandstand i denne Havn end i selve den aabne Del af Nordsøen.

224. I den allerførste Arbejdstid benyttede Gradmaalingen Instrumenter med løs Kikkert og løs Libelle; men man er meget hurtig gaaet over til Instrumenter med fast Kikkert og fast Libelle, idet man gaar ud fra, at disse er stabilere end hine, og at resterende Verifikationsfejl bliver uden Betydning (mellem Frem- og Tilbagesigte maa der ikke stilles paa Traadkorsrørets Drev), da man nivellerer fra den nøjagtige Midte.

Instrumentets Forstørring er c. 40 og Vinkelværdien af en Libelledel c. 7 Sekunder. Der benyttes Nivellerlægter med trekantet Tværsnit forsynede baade med Meter- og Fodskala (mindste Inddeling er 0.01 Halvmeter og 0.01 Fod) eller to mod hinanden forskudte Meterskalaer. Lægtens Længde kontroleres daglig. Under Nivelleringen anbringes Lægten paa det halvkugleformede Hoved af en Jærnpløk. Sigtelængden maa ikke overstige 50 Meter, og dersom man ikke har faaet Sigtet stillet nøjagtig vandret, foretages der Libelleaflæsninger.

Hver Strækning (c. 2000 Meter) nivelleres to Gange, en Gang frem og en Gang tilbage, og der foretages Aflæsning paa begge Skalaer saavel direkte som i dekadisk Komplement.

I Blæst og Solskin nivelleres ikke; som Følge heraf falder Observationerne i Reglen om Morgenen lige efter Solens Opgang og om Aftenen lige før Solens Nedgang.

Nivellementspolygonernes Fejl udjævnes efter m. K. M. Nøjagtigheden af Præcisionsnivellementet kan angives ved, at den sandsynlige Kilometerfejl er 1 Millimeter.

Gradmaalingen har i 1909 paabegyndt Publikationen af Nivellementet[1]); i Publikationen gøres der fyldigt Rede for Arbejdsmetode, Instrumenter og Nøjagtighed; endvidere indeholder den Oversigter over Linjerne ledsagede af Kort med Fikspunkterne indtegnede, Udjævning af Nettet samt Tabeller med Koterne for samtlige Fikspunkter.

225. Gradmaalingen har endvidere i de senere Aar foretaget astronomiske Bredebestemmelser i 2 Punkter paa Island, to paa Bornholm samt i alle Gradmaalingens Triangulationspunkter i det øvrige Danmark, og paa Grundlag heraf er der

[1]) Udkommet er: »Den danske Gradmaaling, Ny Række, Hefte 3. Præcisionsnivellement, Jylland, 1909« og »Hefte 4, Nivellement over bredere Vandarealer, 1909«, der giver Oplysning om alt angaaende det trigonometriske Nivellement over Limfjorden, Lillebelt, Storebelt, Øresund, Isefjorden samt Overgangen fra Sjælland til Falster. Senere vil udkomme Nivellementet paa Fyn og Sjælland.

beregnet et System af Lodafvigelser. Bredebestemmelserne kan snart ventes publicerede.

Ligeledes har Gradmaalingen foretaget en Række Tyngdemaalinger[1]) (Pendulmaalinger) i Kjøbenhavn og paa Bornholm i 1894—96 og paa Fyn i 1903—06. Disse Arbejder har vel megen videnskabelig Interesse; men de har ingen Betydning for de økonomiske Opmaalingsarbejder.

Endelig skal omtales, at Gradmaalingen i de sidste Aar har udført en Tilslutning til det danske Trekantnet af de Tychoniske Punkter paa Hveen samt en ny Forbindelse mellem det danske og det svenske Net paa begge Sider af Sundet.[2])

§ 52. Generalstabens Opmaalinger.[3])

226. Generalstaben oprettedes ved Kgl. Resolution af 20. Januar 1808 og bestod af Generaladjutantstaben og Generalkvartermesterstaben, under hvilken sidste Afdelings Chef tillige »Guidekorpset« (oprettet 1789 under Navn af »Feltjægerkorpset«) henhørte. Generalkvartermesterstaben paabegyndte 1809 en selvstændig Opmaaling paa Grundlag af Videnskabernes Selskabs Kort. »Maalingen skete ved Mensel og Skridtning, og alle forekommende Genstande lige til Grøfter og Gærder, som kan anses nogenlunde permanente, er udtrykte.« Det eneste Resultat af disse Maalinger blev imidlertid et litograferet Kort over Kjøbenhavns Omegn i 1830 i 1 : 60000.

Man opgav nu den lagte Plan; efter Forslag af Generalkvartermesterstaben blev Staben ved kgl. Resol. af 24. November 1830 »bemyndiget til at udgive i Tryk offentlig og sukcessivt en fortløbende Række af topografiske Kort over Kongeriget Dan-

[1]) Publicerede i: »Den danske Gradmaaling, Ny Række, Hefte 2, Relative Tyngdebestemmelser, Bornholm samt Fyn med omliggende Øer, 1909.«

[2]) Publiceret i »Den danske Gradmaaling, Ny Række, Hefte 1, Tilknytning af de Tychoniske Ruiner til det europæiske Gradmaalingsnet samt en ny Forbindelse mellem Danmark og Sverrig, 1909.«

[3]) Om Generalstabens Maalinger faas de bedste Oplysninger i en af Kaptajn le Maire (Chef for Generalstabens topografiske Afdeling 1882—1901) skreven Afhandling »Generalstabens Kortlægning af Danmark« (se Militært Tidsskrift $18^{80}/_{81}$), til hvilken nærværende § støtter sig, og som jævnlig citeres.

Desuden har Oberstløjtnant E. Prytz i »Vort Lands Opmaaling« givet et populært men værdifuldt Bidrag til Kendskabet til Generalstabens Maalinger.

mark og Hertugdømmet Slesvig, reduceret og tegnet efter Stabens egen Opmaaling, saaledes at disse Kort i Tiden skulde danne et sammenhængende hele.« Opmaalingen skulde foretages i 1 : 20000 og støtte sig paa Videnskabernes Selskabs Triangulation. Atlasset skulde udgives i 1 : 80000, og Højdeforholdene skulde gengives ved Lehmannske Bakkestreger.

Arbejdet blev straks paabegyndt og udførtes dels af Generalstabens egne, dels af tilkommanderede Officerer. Maalingen udførtes som Bordmaaling paa Grundlag af Bugges Trekantmaaling, idet man ved »geometrisk Triangulation« bestemte saa mange Punkter med c. 2000 Meters indbyrdes Afstand, at man overalt kunde indskære sig.

Man indsaa imidlertid snart, at Arbejdsmaaden trængte til yderligere Forbedring, og at Grundlaget ikke var godt nok. Efter en af en Kommission af Generalstabsofficerer i 1842 afgiven Betænkning blev den 8. April 1842 Generalstaben delt i en taktisk og en topografisk Afdeling, under hvilken sidste alle Generalstabens Opmaalingsarbejder blev henlagte, og ved Kgl. Resol. af 4. Februar 1843 blev det bestemt »at al Landmaaling og Kortudgivelse, som hidtil havde fundet Sted under Videnskabernes Selskab, for Fremtiden skulde ophøre og overtages af Generalstaben«.

Den samlede Opmaaling af Danmark.

227. I 1842 paabegyndte da Generalstabens topografiske Afdeling Opmaalingen af hele Landet efter en Plan, som ikke senere er undergaaet væsentlige Ændringer, og som har givet fortrinlige Resultater.

A. Grundlaget for Opmaalingen.

Hovedpunkternes Bestemmelse. Støttet paa Gradmaalingens Trekantnet af *1. Orden* har Generalstaben siden 1842 udført en Triangulation af 2. og 3. Orden, som strækker sig over hele Landet. 2. Ordens Punkterne er som Regel bestemte ved 18, 3. Ordens Punkterne ved 4 Satser. Stationerne af *2. Orden* er ligesom Gradmaalingens betegnede ved fastmurede Granitpiller, medens *3. Ordens* Punkterne i Reglen er utilgængelige saasom Kirketaarne, Møller, Dampskorstene, Spir o. l. Trekantnettet af 2. Orden er angivet paa Kortet Side 332 ved de fine Linier, dog er der foruden de paa Kortet angivne endnu fastlagt en

Del Punkter, som Pladsen ikke har tilladt at medtage. Det bornholmske Trekantnet er knyttet til det svenske. Efter at en Udjævning er foretagen efter m. K. M., beregnes Længder og Breder for samtlige Hovedpunkter. Senere beregnes retvinklede plane Koordinater i den konforme, koniske Projektion[1]) (se Side 167), og Punkterne kan nu indkonstrueres paa Maalebordene.

Da 1. og 2. Ordens Fikspunkterne har saa store indbyrdes Afstande, at der paa hvert Maalebord langtfra findes et af dem, og da 3. Ordens Punkternes Natur ikke tillader Opstilling i dem, udfører man en triangulatorisk Placering, ved hvilken hvert Maalebord forsynes med 1—2 Stationer af *4. Orden*, i hvilken Opstilling kan tages, for Sjælland med omliggende Øer 3 à 4 Stationer pr. Maalebord; men disse Stationer er desværre ikke bevarede. Disse Placeringsstationer bestemmes nu oftest ved Side- eller Fremskæring, tidligere næsten udelukkende ved Tilbageskæring i Forhold til 2. Ordens Punkterne; de forsynes med Signaler af samme Form som dem, der anvendes i 2. Ordens Punkterne, men noget mindre. For Placeringsstationerne udføres ingen Udjævning, men de maalte sfæriske Vinkler reduceres til plane Vinkler, hvorefter der beregnes (saml. Side 176 sidste Stykke) retvinklede Koordinater, saa at Punkterne kan indkonstrueres paa Maalebordene.

Endelig udføres en grafisk Placering, ved hvilken man ved Hjælp af Maalebordet fastlægger en Række Bipunkter paa Kortet, disse *5. Ordens* Punkter, som kaldes Placeringspunkter og betegnes med en Pæl, udlægges med en gennemsnitlig Afstand af 1200 Meter (20—25 pr. Kvadratmil). Denne Placering udføres 1—2 Aar før Detailmaalingen.

228. Højdemaalingen. Som Grundlag for denne brugtes oprindelig et trigonometrisk Nivellement, ved hvilket man bestemte 2. og 3. Ordens Punkternes Højde over Havets Niveau; fra 1847 gik man imidlertid over til ved Stampferske Nivellerinstrumenter at udføre »Hovednivellementer« mellem de forskellige Havnes Vandstandsmaalere. Over alle ved Hovednivellementerne paa Kirker og andre monumentale Bygninger fastlagte Punkter findes detaillerede Tegninger i Generalstabens Arkiv. Da det senere viste sig, at Vandstandsmaalerne ikke var til-

[1]) For Øernes Vedkommende benyttede man oprindelig den modificerede Flamstedske Projektion, og for Fyns Vedkommende er Kortene endnu tegnede i denne Projektion.

strækkelig nøjagtig bevarede, paabegyndte man i 1874 med Vandstandsmaaleren i Aarhus som Udgangspunkt et Præcisionsnivellement, ved hvilket man afsatte faste Punkter paa Milepæle, Grundsten af Kirker o. l. Præcisionsnivellementet førtes fra Aarhus over Randers, Hobro, Aalborg, Thisted, Oddesund, Skive og Viborg tilbage til Aarhus, ialt 50 Mil. Slutfejlen siges at have været $^1/_2$ Tomme. Dette Arbejde standsedes senere, da Gradmaalingen paabegyndte sit Præcisionsnivellement (se foran).

Dette *1. Ordens* Præcisionsnivellement er dog altsaa først kommen Generalstaben til Gode paa et senere Tidspunkt. Nu til Dags udføres hele Nivellementet paa Grundlag af *2. Ordens* Hovednivellementerne; disse følger langs Amts- og Sogneveje, og anvender Vejsten, Bygningssokler o. s. v. som faste Punkter.

Til Hovednivellementet støtter sig *3. Ordens* Brigadenivellementer, ved hvilke hvert Maalebordsblad forsynes med et passende Antal Højdepunkter, som mærkes med Pløkke, og som benyttes af Detailmaaleren ved Indlægningen af Højdekurver. Brigadenivellementet føres i Reglen langs de mindre Veje, og der bestemmes 150—200 Punkter pr. Kvadratmil.

B. Detailmaalingen.

229. Detailmaalingen udførtes tidligere paa Grundlag af Matrikulskortene, som blev pantograferede over i 1 : 20000. I den første Periode var Detailmaalingen nærmest en Korrektion og Sammensætning af de enkelte Byers Matrikulskort (Maaleblade), idet hvert enkelt af disse blev tegnet færdig paa et saakaldt »Operationsmaalebord«, som under Arbejdet blev orienteret efter saadanne Linjer (Grøfter og Hegn), som kunde genfindes i Marken. Bagefter blev alle Maalebladene placerede paa »Rentegningsmaalebordet« af Maaleren selv saaledes: De Maaleblade, hvorpaa der var indlagt et Fikspunkt af 1. eller 2. Orden, eller hvorpaa der forefandtes mindst én Terrængenstand (Kirke eller Mølle), som svarede til et 3. Ordens Fikspunkt, blev først placerede, idet de nævnte Punkter ved Hjælp af Naale bragtes ovenover de paa Rentegningsmaalebordet værende tilsvarende Fikspunkter, hvorefter Bladene drejedes, indtil Grænserne nogenlunde passede sammen, og tilsidst indplacerede man de — i

Reglen mindre — Blade, som var helt blottede for Punkter, der svarede til Fikspunkter, paa Rentegningsmaalebordet.

Fra 1851 begyndte man imidlertid paa den foran omtalte »Placering«, og Detailmaalingen blev nu efterhaanden mere fuldstændig, saa at man fra 1867 kan siges at have udført en »original Opmaaling med Matrikulskortene som orienterende Grundlag«.

Detailmaalingens Gang er nu i Korthed følgende: Forud for Maalingen er paa Maalebordet indkonstrueret alle Fikspunkter samt tegnet en Ramme. Under almindelige Forhold faar hver Maaler $^1/_4$ eller $^1/_8$ Maalebord ad Gangen at maale. Maaleren vælger nu sine Stationspunkter med c. 600 Meters indbyrdes Afstand og mærker dem med Stokke med Flag; derpaa orienterer han efterhaanden Bordet i alle disse Punkter og oversaar Terrænet med Kotepunkter (7—14000 pr. □ Mil), som samtidig indkonstrueres paa Maalebordet, og hvis Højde aflæses og føres i en Kotebog, for efter Hjemkomsten til Kvarteret at paaskrives Maalebordet med Tusk. Kotepunkterne mærkes i Marken med et Skrabejærn og lægges fortrinsvis saaledes, at Indtegningen af alle lineære Genstande kan blive saa nøjagtig som mulig.

Hermed er første Overgang, Koteringen, over Terrænet færdig. Det benyttede Maalebord er af sædvanlig Konstruktion; Kikkertlinealen, som benævnes Universaldiopter, har Libelle til Brug ved vandrette Sigter samt en Bue, som er forsynet baade med en Vinkel- og en Sinusskala; ved Hjælp af en af disse bestemmes det Stykke, som skal lægges til eller subtraheres fra Aflæsningen paa Stadiet, naar Sigtet hælder.

Ved anden Overgang eller, som den ogsaa kaldes, Indtegningen benyttes ingen Instrumenter, men Maaleren gaar fra Punkt til Punkt og bestemmer ved Skridtning alle Terrængenstandes Beliggenhed i Forhold til de paa Bordbladet aflagte Punkter. Endvidere bestemmes Højdekurvernes Beliggenhed ved Hjælp af et Haandniveau og Stadie. Det maalte Stykke skal daglig efter Hjemkomsten rentegnes med Tusk og anlægges med Farver. Det angives, at en øvet Maaler kan optage henved 60 Hektar om Dagen.

Detailmaalingen udføres af »Guider« (Generalstabens Underofficerer) under Tilsyn af Officerer, som ogsaa prøver det maalte. Prøven foretages i de senere Aar med Maalerens eget Instrument, som anbringes paa Maalebordet over et eller andet Kotepunkt, og Stadiebæreren bevæger sig i en ret Linie gennem

Terrænet fra eller hen imod Maaleren, han standses nu og da i Terrænpunkter, til hvilke Maaleren da selv aflæser Afstand og Højde til Punktet, eller han sendes ud til Terrænpunkter, som let kunne findes paa Bladet. Den reviderende Officer jævnfører Tegningen paa Maalebladet med Maalerens Aflæsninger. Til Revision af det maalte Stykke medgaar 1 à 2 Dage. Den største tilladelige Fejl paa de af Detailmaaleren bestemte Højdepunkter er 5 Tommer (0,15 m), paa Højdekurverne 1 Fod (0,3 m). Terrænpunkternes Fejl maa ikke overskride 5 Alen (3 m). Overskrides Tolerancen, kasseres Kortet helt eller delvis.

C. Kortenes Udførelse og Mangfoldiggørelse.

230. Efter Sommerarbejdets Afslutning sammensættes de mindre, maalte Stykker til Maaleborde, og ad fotografisk Vej faas Kopier i 1 : 10000, hvor alt det indtegnede staar med en svag blaa Farve, hvorover Rentegningen nu foregaar. Ad fotografisk Vej formindskes disse Rentegninger atter til 1 : 20000, og den videre Reproduktion følger da her efter. Denne er til forskellige Tider udført paa forskellige Maader, nu anvendes mest Fotolitografi og Kobberstik.

Generalstaben har lagt megen Vægt paa Stednavnenes Skrivemaade; det nu gældende Princip er, at Navnene skal staves saaledes, som de udtales paa Egnen, og henføres til deres Oprindelse.

Naar Maalebordet er rentegnet, bliver en fotografisk Kopi sendt til Sognepræsterne, for at disse kan gøre deres sproglige Bemærkninger, inden Kortet mangfoldiggøres.

Generalstabens Kort udkommer i Boghandelen; de vigtigste er:

I. *Maalebordsblade* i 1 : 20000. Hvert Blad er $^5/_6$ □ Mil, 1 Mil i N—S og 10000 Alen i Ø—V. De angiver Sognegrænser og indeholder 5 Fods Højdekurver; Bladene over Sjælland med tilliggende Øer dog 5 (undertiden $2^1/_2$) Halvmeters Kurver. Alle de Kurver, hvis Højdetal ender paa 5, er punkterede. Maalebordsbladene faas:

1. I Sort (Jylland og Bornholm):
   a. uden Farvelægning; pr. Blad 65 Øre.
   b. med Farvelægning: Kurver sorte, Skove og Veje brune, Vand blaat, Eng grøn, Lyng rød; pr. Blad 1 Kr. 50 Øre (enkelte billigere).

2. I Farvetryk (Øerne og en Del af Jylland): Kurverne rødbrune, Vand blaat; pr. Blad 75 Øre[1]).
3. Efter en Revision i Marken udkommer nu Maalebordsbladene i en ny Udgave i Farvetryk og i samme Format som Atlasbladene. Udkommet er (1909) Lolland-Falster, Møen, sydlige Sjælland og sydøstlige Del af Jylland. Pris pr. Blad 1 Krone.

II. *Atlasblade*, fremstillede i Kobberstik, indeholder i Hovedsagen det samme som Maalebordsbladene, dog er af Hensyn til Pladsen en Del Navne udeladte; ogsaa disse angiver Sognegrænser, og de indeholder 10 Fods Kurver. Maalestoksforholdet er for Kortene over:

Sjælland, Fyn og tilliggende Øgruppe 1 : 80000[2]); disse er sammensatte af 24 Maalebordsblade, 20 □ Mil, 4 Mil i N—S, 5 Mil i Ø—V.

Jylland og Bornholm 1 . 40000; disse Kort er sammensatte af 6 Maalebordsblade, 5 □ Mil, 2 Mil i N—S, $2^1/_2$ Mil i Ø—V.

Atlasbladene faas:

a. sorte; pr. Blad 1 Kr. 65 Øre (enkelte billigere).
b. med Farvelægning af Vand, Landeveje og Sognegrænser; pr. Blad 2 Kr. (enkelte billigere).
c. med fysisk-geografisk Farvelægning: Landeveje brune, Vand blaat, Eng grøn, Lyng rød; pr. Blad 3 Kr. 35 Øre (enkelte billigere).

III. *Kort i Farvetryk i 1 : 100000.* Hvert Blad er 20 □ Mil, 5 Mil i N—S, 4 Mil i Ø—V. De indeholder ikke Højdekurver, men Højdetal (i Meter). Farverne er: Skov brun, Vand blaat, Eng grøn, Lyng rød. Pr. Blad 50 Øre (enkelte billigere).

IV. *Generalkort i 1 : 160000* med 30 Fods Kurver nemlig:

1. Generalkort over Sjælland i Kobberstik i 3 Blade.
   a. sorte; pr. Blad 1 Kr. 50 Øre.
   b. med Farvelægning af Amts- og Herredsgrænser samt Vand; pr. Blad 2 Kr.
2. Generalkort over Fyn i Kobberstik i 1 Blad.
   a. sort 3 Kr.
   b. med Farvelægning 4 Kr.

---

[1]) De færøiske Maalebordsblade indeholder 10 Meters Kurver og foreligger kun i Farvetryk.

[2]) Efterhaanden vil disse blive erstattede med Atlasblade i 1 : 40000, hvoraf 13 Blade er udkomne.

V. *Kort over Kongeriget Danmark* og Hertugdømmet Slesvig i 1 : 480000 er udgivet i 1846 i Kobberstik paa Grundlag af Videnskabernes Selskabs Opmaalinger, men senere gjort tidssvarende af Generalstaben. Indhold: Landets Sognenavne, Amts- og Herredsskel, større Landeveje, Jærnbaner og Skovpartier, men ingen Højdeangivelser. Kortet er udkommet i to Blade.

a. sort; 2 Kr. 65 Øre for begge Blade tilsammen.

b. med Farvelægning (Amts- og Herredsgrænser); 3 Kr. 65 Øre; opklæbet paa Lærred med Stokke, lakeret 12 Kr.

VI. Over *enkelte Landsdele* findes følgende Kort:

a. Specialkort over Kjøbenhavns Omegn i 6 Blade i 1 : 25000 udførte i Farvetryk. Udstyret som Maalebordsbladene. Kurverne brune, Vand blaat; pr. Blad 1 Kr.

β. Kort over Bornholm i 4 Blade i 1 : 50000 udførte i Farvetryk: Skov brun, Vand blaat, Eng grøn, Lyng rød; pr. Blad 40 Øre; opklæbet samlet paa Lærred i Lommeformat 3 Kr. 50 Øre.

γ. Kort over Islands Sydkyst i Farvetryk, nemlig:

2 Byplaner i 1 : 5000. 25 Øre og 1 Kr.

2 Specialkort: Reykjavik og Hafnarfjorður i 1 : 25000; Vestmanøerne i 1 : 50000 (med Byen i 1 : 20000); pr. Blad 1 Kr.

20 Kortblade i 1 : 50000; pr. Blad 1 Kr.

1 Oversigtskort. 50 Øre.

Endelig foreligger der en

VII. *Folkeudgave af Generalstabens Kort over Danmark*, pr. Blad 25 Øre.

De enkelte Blade er gengivne efter Atlasbladene og foreligger i samme Maalestok som disse, dog enkelte sjællandske i 1 : 40000; de øvrige Dele af Sjælland og Fyn vil efterhaanden udkomme i dette Maalestoksforhold.

Til Folkeudgaven hører endvidere »Sjælland med omliggende Øer« i 6 Blade i 1 : 160000 og »Fyn med omliggende Øer« i 2 Blade i 1 : 160000. Pris pr. Blad 25 Øre.

VIII. *Bykort i 1 : 5000* i fotolitografisk Farvetryk med 0,5 Meters Kurver. Pris 3 Kr. Kortene over Odense og Svendborg er udkomne, og Kortene over Aalborg og Randers udkommer i en nær Fremtid.

Generalstabens nyere Arbejder.

231. Efter at Generalstaben omkring Aar 1890 har fuldendt Landets Opmaaling, har den udført en ny Maaling først af Laaland og Falster og derpaa af Sjælland, hvis oprindelige Maaling var den først udførte og derfor den mindst gode.

Desuden afsluttede Staben i 1899 en fuldstændig Opmaaling af Færøerne; denne Maaling udgør et smukt afsluttet Hele; den er udført paa samme Maade, som ellers er anvendt, idet den er støttet til en Triangulation, som strækker sig over alle Øerne. En Grundlinje (paa c. 300 m) er udmaalt i Nærheden af Thorshavn, og i et Stationspunkt ved denne By er bestemt Brede og Længde samt Azimuth for en fra Punktet udgaaende Retning. Længdebestemmelsen maatte udføres ved medbragte Kronometre, da der endnu ikke var Telegraf til Færøerne. Opmaalingsarbejdet er meget besværliggjort ved de store Klippeformationer.

I 1902 paabegyndte Generalstaben ogsaa Opmaalingsarbejder paa Island, hvor et Trekantnet er ført fra Hornefjord i et bredt Bælte langs Syd- og Vestkysten til Landets Nordvestspids. Detailmaalingen er fulgt efter og er nu naaet til lidt nord for Hvalfjorden.

232. I Tilknytning til Gradmaalingens Præcisionsnivellement udfører Generalstaben et 2. Ordens Nivellement, hvis Linjer føres ad Vejene, og som danner et Net med smaa Masker, der udfylder de større Gradmaalingspolygoner. Som Fikspunkter benyttes Bolte og Plader med halvkugleformede Hoveder eller Fremspring, hvis højeste Punkter angiver de egentlige Højdepunkter; de indlægges i Kirker, murede Broer og andre solide Bygninger. Hvor Fikspunkter af denne Art ikke kan tilvejebringes i tilstrækkeligt Antal, anbringes jordfaste Punkter, »Nummerbolte«, der er beskrevne Side 218. Fikspunkterne anbringes med en indbyrdes gennemsnitlig Afstand paa 1 Kilometer (paa Fyn dog henad 2 km). Samtlige Linjer nivelleres dobbelt, og Nettene udjævnes. Kilometerfejlen paa en enkelt dobbelt nivelleret Strækning er 2—3 mm. Der anvendes lignende Instrumenter som Gradmaalingens, kun lidt mindre; i det sidste Aar er dog tillige anvendt et Instrument med løs Kikkert og Vendelibelle. Stadiets mindste Inddeling er 1 cm. Nivellementet er

fuldført paa Fyn samt i Nordøstsjælland fra Nordkysten til Linjen Hørsholm—Frederikssund.

Af særlige Opmaalingsarbejder er i de senere Aar udført Bymaalinger i 1 : 4000 (udgivne i 1 : 5000) af Svendborg, Odense, Aalborg—Nørresundby og Randers samt (endnu ikke afsluttet) Horsens og Esbjerg. Fikspunkterne tilvejebringes ved, at der paa Grundlag af omliggende 2. Ordens Punkter indtrianguleres og udjævnes et 3. Ordens Net, der lægges over Byen og dens nærmeste Omegn; herpaa bygges atter et System af 4. og 5. Ordens Punkter, og endelig fastlægges et Antal Punkter i Gaderne ved Polygonmaaling. Selve Detailmaalingen sker ved Maalebord.

Anmærkning. Paa Basis af Generalstabens Maalebordsblade har Statistisk Bureau under Ledelse af Oberstløjtnant Lund-Larssen ladet udføre en Beregning af Danmarks Areal. Beregningen er udført sognevis ved Hjælp af to Kuglerulleplanimetre, og for hvert Maalebordsblad er der foretaget en Afstemning af de paa dette liggende Sognes (eller Dele af Sognes) Arealer mod Maalebordsbladets forud nøjagtig kendte Areal, idet Sognegrænserne først er konfererede (rettede) efter Matrikulskortene. Det hele Arbejde er smukt gennemført, og der foreligger[1]) Angivelser i Tønder Land for hvert enkelt Sogn af dettes »Landareal« og »Vandareal«, det sidste omfattende Arealet af »Søer og Damme« og af »Vandløb«, og endelig af »Sognets samlede Areal«. Endvidere findes der en Del særlige Angivelser af de enkelte Landsdeles og Kjøbstæders Arealer m. v. Den ved Planimetermaalingen opnaaede Nøjagtighed er omtalt Side 300.

---

[1]) Danmarks Statistik, Statistiske Meddelelser, fjerde Række, tyvende Bind, 3. Hefte, 1906.

17. Kapitel.

Økonomiske og Matrikulsmaalinger.

§ 53. Ældre økonomiske og Matrikulsmaalinger.

233. De i Anledning af *Matrikulen af 1688 udførte Opmaalinger* er allerede nævnte foran (Side 323). Til at forestaa Opmaalingerne blev der for Sjælland og Fyn nedsat 7 »Commissioner«, som hver bestod af én Ingeniør, 26 Konduktører, 26 Takseringsmænd, 26 Skrivere og 3 Commissarier. De nærmere Regler for Arbejdets Udførelse findes i »Instruktion for Comissarierne for Landmaalingen af 16. April 1681« og »Instruktion for Landmaalerne af 16. April 1681«[1]). Inden Arbejdet paabegyndtes, paalagdes det Sognepræsterne at indsende en Fortegnelse over de til hver By eller »Enest Gaard« hørende Vange m. m., samt angive, hvormange Agre hver Bonde havde i hver Vang o. s. v., »for at intet skulde dølges eller overspringes ved Maalingen«.

Af de nævnte Instruktioner fremgaar det, at der skulde udføres saavel en speciel som en almindelig Maaling; ved den første skulde maales »enhver Bondes Ager og Jord i Særdeleshed, hvad heller de ligger i Boel eller ikke«, medens den sidste formentlig skulde omfatte de til samme Boel henhørende Jorder. I Instruktionen for Landmaalere hedder det »I skulle i Eders Protokol opføre 1 Byes, derefter Bondens og Gaardens og siden hver Jords eller Agers Navn, som hver Bonde skal være forpligtet at give til kende, dernæst af hvad Slags Jord den bestaar, og hvormange sjællandske[2]) Kvadratalen hver Ager eller Jord efter deres Maaling indeholder, tagende siden for den specielle og den almindelige Maaling, som tilforn er udført, til at efterse om noget derudi differerer; findes da enten mere eller mindre i den ene end i den anden, I saadan Difference at udforske og imidlertid intet andet, førend den er udfunden og alting rigtig til Bog ført, som før meldet, at foretage.«

---

[1]) Begge disse Instruktioner findes utrykte i Rigsarkivet.

[2]) Den anordnede »sjællandske Alen« var lidt længere end den senere indførte rhinlandske.

Ved Rescript af 15. Februar 1682[1]) Punkt 1 blev imidlertid befalet »at den almindelige Maaling paa de Steder, hvor den speciale endelig efter Instruktionen behøves, maa ophøre, og aleneste ved den ene Special-Maaling forblive, undtagendes de store Stykker Jord, som ligger til Sædegaarde, Købstæder eller Bøndergaarde, og en Mand kan tilhøre, hvilke aleneste skulde maales i Almindelighed, og det enten af Ingeniørerne selv eller de Konduktører, som tilforn have været eller nu ere virkelig i vores Tjeneste og dermed færdigen vide at omgaas«.

Ved samme Rescripts Punkt 2 blev endvidere Engenes Opmaaling ophævet, idet man indskrænkede sig til deres Taksation (efter Høafgrøde).

I 1683 paabegyndtes Opmaalingerne i Jylland, for hvilken Landsdel, der ogsaa blev nedsat 7 Commissioner. Instruktionerne for Landmaalere blev udfærdigede for hvert Amt for sig; i de senere Instruktioner er derfor taget Hensyn til nævnte Rescript af 15. Februar 1682.[2])

Har man altsaa end oprindelig tænkt sig, at der skulde udføres en Opmaaling, saa kunde dog de Arbejder, som virkelig er blevne udførte, kun uegentlig betegnes som Opmaalinger, idet de har indskrænket sig til Maaling af de enkelte Agres Længde og sædvanlig to Breder, navnlig hvor Agrene ikke var lige brede i begge Ender; Rothe siger saaledes i sin »Beretning om den i Aaret 1844 for Kongeriget indførte nye Jordskyldsætnings Historie og Væsen« Side 5:

»Den gamle Matrikuls Fortreffelighed er saa længe og saa idelig omtalt, at man nu blindt hen troer derpaa som noget, der er ophøiet over al Tvivl, saa at Kundskab og Underretning om, hvori dens Fortreffelighed bestaaer, ansees for overflødig; og man troer den at være et Værk, saaledes grundlagt i Viisdom og Ufejlbarhed, at det maatte staae til evig Tid urokket og urokkeligt.

Man læser Dinesens Dedication til Kong Chr. 5te.

»En fuldkommen Landmaaling
»hvor Retfærdigheds Øie
»med skiftende Kjæde
»og skjærende Vinkel

[1]) Findes i Rothes Rescriptsamling Side 371.

[2]) Eksempelvis skal nævnes, at Instruktionen for »Schiv-Huus samt Dueholm, Ørum og Vestervig Amter« findes trykt i »Thestrup: Danmark og Norges Krigsarmatur. 1756«, Side 385.

»uden mindste at give
»eller mindste at tage
»har maalt, afsnoret, synet, afsigtet
— — — — — —
— — — — — —
»og alting indskreven i Evighedens Protocol.
— — — — — —

og nu derpaa følgende:

»en vel lignet Matrikul
»hvor Retfærdigheds Haand
»med Ziffer og Nummer
»efter hver Mands Eiendom
»beregner hver Mand til Skat,
»som alle ere Kongen skyldige« [1])

og man antager dette lige efter Ordene for reen Sandhed, uden at erindre, at den skiftende Kjæde havde intet at skifte, men kun at maale Agrenes Længde og Brede, at den skjærende Vinkel ikke brugtes, fordi man ikke brød sig om Agerfaldets Figur og ikke gjorde noget Kort, at der slet ikke maaltes, uden hvad Maalerne fandt for godt at kalde Ager, ikke Eng- eller Græsningsjord, eller Skovgrund«.

I Thestrups »Krigsarmatur« Side 419—20 findes endvidere en interessant men alt andet end rosende Omtale af de omhandlede Matrikulsmaalinger.

234. I Henhold til Kgl. Resol. af 26. April 1768 paabegyndtes en Opmaaling, som dog allerede blev indstillet ved Kgl. Resol. af 3. Juni 1772, og som kun kom til at omfatte Dele af de antvordskovske og vordingborgske Rytterdistrikter. Eksemplarer af de optagne Kort findes i Matrikulskontoret.

I Anledning af *Udskiftningerne* i Slutningen af det 18. og Begyndelsen af det 19. Aarhundrede blev der foretaget Opmaalinger af de enkelte Landsbyer. I Henhold til Forordningen af 23. April 1781 skulde hele Byens Jorder opmaales og derover forfattes Kort. De fleste af Udskiftningskortene var for Ydergrænsernes Vedkommende tilvejebragte ved en Opmaaling med Maalebord, medens alle Lodskelslinjerne først var fremkomne ved en Deling paa Kortet og derefter overførte fra Kortet til Marken, et Arbejde der med Datidens Instrumenter

[1]) Fortalen til Dinesens Tabeller findes vistnok kun i to Eksemplarer, det ene i det Kgl. Bibliothek, det andet i Matrikulskontoret. Fortalen er haandskreven.

ikke var ganske let. Ved Arealberegningen har man formentlig enten ligefrem maalt Længder og Bredder af de enkelte Stykker, eller man har forsøgt en Inddeling i Trekanter, om disse end har haft daarlige Former.

235. I Anledning af *Matrikulen af 1844* blev der i Begyndelsen af det nittende Aarhundrede tilvejebragt en Samling økonomiske Kort over alle Landets Jorder (i Almindelighed i 1 : 4000). Der blev dog ikke foretaget en fuldstændig Original-Maaling; men man benyttede det forhaandenværende Kortmateriale. De foran omtalte Udskiftningskort samt Kortene over Rytterdistrikterne blev benyttede som Matrikulskort. Endvidere blev alle Godsejere, Lodsejere og Brugere opfordrede til at indsende til Rentekammeret de Kort, de muligvis maatte være i Besiddelse af, og disse blev da forinden Brugen afkopierede.

I Henhold til Matrikulsinstruktionen af 6. Juni 1806 § 13 maatte dog intet Kort benyttes, før det var prøvet; og i Bestemmelserne for Prøven af Kortene skælnes der mellem Prøven af Opmaalingens Rigtighed og Udskiftningslinjernes rette Afsætning paa Kortet. Instruktionen siger: »Prøven af Opmaalingens Rigtighed skal skee ved at afstikke og nøjagtigen opmaale flere Linier igjennem det hele Terrain, over hvilket Kartet er optaget, og ved Opmaalingen antegne Længderne fra et Overskjæringspunkt til et andet, derefter afsætte Linierne paa Kartet i de samme Directioner som paa Marken og eftermaale dem, og endelig ved at sammenligne Kartets Grændser med andre Karter over de paastødende Byer eller Eiendomme«. Dersom Disproportionen oversteg $^1/_2$ % blev Kortet kasseret (§ 14).

Prøven af Delings- og Lodskelslinjerne skulde ske (§ 13) dels ved at eftermaale deres Længder dels ved umiddelbart eller ved Forlængelse at knytte dem til de ved Opmaalingen brugte Hovedlinjer. Frembød denne Metode Vanskelighed, da var det tilladt at udføre en ny Grænseopmaaling, som skulde ske ved Maalebordet.

Alle Prøvelinjer med deres Maal saavel som alle Berigtigelserne skulde nøjagtig anføres paa Kortene (§ 15) med særegne Farver, medens urigtige Længder skulde overstreges. Endelig skulde Kortene, forinden de sendtes tilbage til Rentekamret, forsynes med Landinspektørens Paategning og Attest om Prøvens Udfald, Maalestoksforholdets Rigtighed, Farvernes Betydning m. m.

I Journalen skulde der gives fuldstændig Forklaring om Kortets Prøve og Berigtigelse.

Hvor man savnede Kort, eller de tilvejebragte blev kasserede, maatte der foretages Nymaalinger; efter Omstændighederne:

a, En fuldstændig Nymaaling.

b, En Skeletmaaling, hvor det gamle Kort var ubrugeligt, men hvor Situationen kunde bruges; om saadanne Skeletmaalinger hedder det i § 21: »Til de i det foregaaende ommeldte Grændse- eller Skelet-Karters Forfattelse bliver kun den udvendige Grændse af alle Jordlodder, samt Byplanen med alle i den værende Delingslinier at opmaale og bestemme nøiagtigen, samt at anmærke bestemt paa Kartet, hvor alle udenbyes Lodseiere paastøde det opmaalte Terrains Grændser, men den indvendige Situation at paalægge efter det gamle Kart, ved Afprikningen for hver Jordlod for sig, og ikke paa eengang for hele Kartet.

Denne Opmaaling skal altid skee ved Maalebordet, med mindre Terrainet maatte være ubetydeligt i Størrelse, eller at Opmaalingen af anden Aarsag maatte kunne skee ligesaa hastigt og fuldkomment sikkert med Kjæde.«

c, Supplerende Maalinger, ved hvilke de urigtige Kort blev rettede eller supplerede. Saadanne Suppleringer fandt f. Eks. Sted, naar der ikke paa Udskiftningskortet var afsat den »nuværende Deling af Bygrunden«. Herom siger § 18: »Denne Opmaaling af Bygrundene maae Landinspecteurerne foretage paa hvilken Maade, de finde bedst, men da den nye Inddeling i Almindelighed ikke med tilbørlig Tydelighed vil kunne anbringes paa det gamle Kart, saa er det i saa Tilfælde rettest, at den optegnes paa et særskilt Blad, og at dette limes paa Kartet som en Klap paa sit bestemte Sted, og under rigtig Combination med de tilstødende Jorder«.

De nymaalte Kort skulde prøves paa samme Maade som de øvrige Kort; kunde de ikke antages, blev de ommaalte paa Maalerens Bekostning (§ 21).

Nærmere Regler for Matrikuleringsarbejderne er angivne i nævnte Matrikulsinstruktion samt dennes Tillæg (Rentekammerets Resol. af 31. Marts 1807) og Rentekammerets almindelige Ordre om Matrikuleringsarbejdet i Jylland af 9. April 1811.

Det vil af det fremsatte ses, at man ikke efter den Maade, paa hvilken Matrikulskortene er fremkomne, kan vente, at de

skal være meget nøjagtige, og det skal da oplyses, at ved en af Professor Freuchen i $18^{62}/_{63}$ foretagen Prøve af nogle Matrikulskort, befandtes disses Middelfejl at være mellem 3,5 og 6,7 Alen (Tidsskrift for Opmaalingsvæsen 1. Bind Side 271). Efter hvad der senere er oplyst, synes disse Middelfejl dog at være noget for store.

§ 54. Nyere Matrikulsmaalinger.

236. Ved Lov af 11. Februar 1863 § 5—7 om den kommunale Beskatning i Kjøbstæderne udenfor Kjøbenhavn bestemtes, at der skulde optages *Matrikulskort over samtlige Landets Kjøbsteder* i Maalestoksforholdet 1 : 800. Ved Indenrigsministeriets Instruks af 17. April 1863 blev der givet nærmere og temmelig detaillerede Regler for Udførelsen af disse Arbejder, dog indeholder Instruksen intet om, paa hvilken Maade Opmaalingerne skulde udføres. Paa en ganske enkelt nær er disse Maalinger imidlertid udførte som Polygonmaalinger, og de blev i det væsentlige gennemførte i Løbet af en halv Snes Aar.

Derimod er der dels i selve Instruktionen og dels i Indenrigsministeriets Instruks af 4. Juli 1863 givet detaillerede Regler for Prøven af de nævnte Kort. Denne skulde udføres efter den »Oppermannske Kortprøve«, og Middelfejlen maatte ikke overskride 0.75 Alen.

I Henhold til nævnte Lovs § 10 blev endvidere foretagen en *Berigtigelse af Matrikulskortene over Kjøbstædernes Markjorder;* denne Berigtigelse gik fornemmelig ud paa at optage alle de Forandringer, der var foretagne i Henseende til disse Jorders Inddeling efter den Tid, da Kortet til den ny Matrikul blev optaget, forsaavidt de ikke senere var optagne paa nævnte Kort og i Matrikulen. For Markjordernes Vedkommende bestod Prøven i, at man maalte Længden af mindst 10 % af de af Maaleren afsatte ny Skel. Fejlen maatte da ikke overstige 2 Alen eller for Linjer paa over 400 Alen $^1/_2$ % af Linjens Længde.

237. Indenrigsministeriets Instruks af 12. Juni 1865 for *Udførelsen af Matrikulsarbejderne i de ved Danmark forblevne Distrikter af Hertugdømmet Slesvig* giver temmelig detaillerede Regler. I Reglen blev der foretaget Nymaalinger; men i de Byer, hvor den største Del af Jorderne som hørende under Kongeriget allerede tidligere var blevne matrikulerede, blev de

foreliggende Matrikulskort som Regel kun fuldstændiggjorte derved, at de forhen slesvigske Ejendomme blev indlagte paa dem. Kortene blev tegnede i 1 : 4000. Heller ikke her var der foreskrevet bestemte Regler for, hvorledes Maalingen skulde udføres, men dette var overladt Maaleren; dog var der antydet, at han kunde benytte Maalebord. Maalingerne blev imidlertid hyppigt udførte paa Grundlag af Polygonmaaling, dog vides det, at der er anvendt Linjetriangulation og Bordmaaling.

Med Hensyn til Prøven foreskrev Instruktionens § 10, at Kortene skulde prøves paa den Maade, som Bestyreren af Arbejdet ansaa for den rigtigste. Kortene blev vistnok alle prøvede ved at maale Linjer, der i forskellige Retninger gennemskar Terrænet; derefter overførtes disse Linjer paa Kortet, og de i Marken fundne Længder sammenlignedes med de tilsvarende paa Kortet dog uden Beregning af »Disproportion«, og Instruktionen giver ogsaa nærmest Anvisning paa denne Prøvemetode, idet dens § 10 siger: »Overstiger de Uoverensstemmelser, der maatte være mellem Kortet og de i Marken tagne Maal, efter at Indkrympningen er tagen i Betragtning, intet Sted, altsaa heller ikke mellem Prøvelinjerne indbyrdes, $^1/_2$ % eller paa Maal, der er under 200 Alen, ikke 1 Alen, antages Kortet; men findes større Uoverenstemmelser, bliver Kortet i Reglen at kassere, dog først efter at det ved yderligere Undersøgelse er godtgjort, at den eller de fundne Fejl ikke indskrænke sig til enkelte Punkter, som kunne berigtiges.«

238. I de sidste 40 Aar er der aarlig bevilget en mindre Sum paa Finansloven og fra 1897 aarlig 20000 Kroner til *Opmaalinger til Fornyelse af Matrikulskortene*. For nævnte Beløb er efterhaanden de tættest bebyggede Landsbyer paa Indenrigsministeriets (Landbrugsministeriets) Foranstaltning opmaalte, og Kort konstruerede i 1 : 800. Instruksen for disse Opmaalinger siger i Punkt 5: »Grundlaget for Opmaalingen bestemmes ved Polygonmaaling, eller, hvor Terrænforholdene maatte egne sig derfor, ved Vinkeltriangulation«. Endvidere skal der i Henhold til Punkt 6 paa passende Steder i Terrænet anbringes nogle større, solide, i Jorden nedgravede Mærker af Træ eller Sten.

Kortene prøves efter den »Oppermannske Kortprøve«, og Middelfejlen maa ikke overstige 0,6 Alen; endvidere bliver Kortene konfererede med Marken.

Disse Kort er vistnok gennemgaaende udmærket maalte; men det maa beklages, dels at de danner løsrevne Stykker,

som det til Trods for de anbragte Sten vil være meget vanskeligt — for ikke at sige umuligt — senere at knytte sammen ved en eventuel fuldstændig Maaling af Landet, og dels at der ikke har fundet en Skelkonstatering Sted.

I 1903 nedsatte Landbrugsministeriet imidlertid en Kommission, som skulde udtale sig om, hvad der kunde gøres til Forbedring af Matrikulskortene og for at gøre dem til Ejendomskort. Kommissionen afgav Aaret efter en Betænkning, som udtalte sig for, at man til fremtidige Matrikulsmaalinger skulde stille Krav, der omtrent falder sammen med de heri Bogen Side 100—101 angivne. Der blev foreslaaet Anvendelse af den konforme, cylindriske Projektion, saaledes som i § 23 angivet. Dette gav Anledning til, at man lidt efter lidt ophørte med Opmaalinger til Fornyelse af Matrikulskortene i den hidtil anvendte Form; derimod er der paabegyndt Opmaalinger af et Par Sogne efter de af nævnte Kommission opstillede Krav, og det tør vel haabes, at dette vil føre til, at fremtidige Maalinger kommer ind i det rette Spor.

Anmærkning: I Forbindelse med Matrikulsmaalingerne skal nævnes, at Skovreguleringen i Aarene 1857—77 har udført en Originalmaaling af Statsskovene. Kortene er konstruerede i 1 : 4000; men Maalebøgerne er ikke opbevarede. Originalkortene forbliver i Skovreguleringen med Undtagelse af et enkelt farvelagt, som leveres Distriktet (Skovrideren). Originalmaalingerne suppleres, naar nyt Areal indlægges under Statsskovene. Originalkortene formindskes til 1 : 8000 og litograferes i 100 Eksemplarer; de benævnes da Skeletkort. Disse farvelægges ikke. De indeholder Udgrænser, Afdelingsgrænser og Numre, faste Veje, store Grøfter og Signaturer for Tjenestejord.

Ved Revisionen af Skovplanen, som foregaar hvert 10. Aar, fremstilles 4 farvelagte Eksemplarer, Haandkort, af disse beror 1 i Ministeriet (Skovreguleringen), 1 hos Overførsteren og 1 hos Skovfogden.

§ 55. Københavns Opmaaling.[1])

Opmaalingen.

239. De ældste Opmaalinger i København havde til Hensigt at bestemme en afhændet Grunds Dimensioner, derfor inde-

[1]) Denne § er et Uddrag af Artiklerne »Kjøbenhavns Opmaaling« af Land-

holdt Skøderne — ialtfald fra Midten af det 15de Aarhundrede — en Del Maalangivelser.

Disse Opmaalinger har dog vistnok været mangelfulde, hvilket kan ses deraf, at Byens Kæmnere i 1683 blev beordrede til at foretage en Eftermaaling af de solgte Grunde »med det da brugelige Alenmaal« for at bringe de i Skøderne anførte Maal paa de forskellige Grunde i Overensstemmelse.

Nogle Aar senere blev i Anledning af Udarbejdelsen af Grundtaksten af 1689 samtlige Grunde opmaalte, og Længder, Dybder og Vinkler anførte samt Kvadratindhold udregnet.

I 1690 fik Byen en Stadskonduktør (E. J. Mangor), og i hans Bestalling paalægges det ham at opmaale Grundene i Staden, og det bemærkes tillige, at intet Skøde paa nogen Grund eller Ejendom »maa til Tinge passere«, uden at Stadskonduktøren har anført Maal og Areal.

Efter den store Ildebrand 1728 blev det nødvendigt at optage Kort over de afbrændte Kvarterer og bestemme Retningslinjerne for de ny Gader, hvorfor det paalagdes den daværende Stadskonduktør at bistaa den i Anledning af Stadens delvise Genopbyggelse nedsatte Reguleringskommission. Et lignende Opmaalings- og Kortlægningsarbejde udførtes efter Branden 1795.

Men selv om en delvis Genopbyggelse af Byen medførte store Kortlægningsarbejder, var det dog særlig Udfærdigelsen af Grundtakst-Matrikuler, der nødvendiggjorde større Opmaalinger. Den vigtigste af disse er den, som udfærdigedes under Ledelse af en af Chr. VI d. 19. Februar 1742 nedsat Kommission, der først i 1756 fik tilendebragt sine Arbejder; den lange Tid var nødvendig for at faa udført Grundenes med derpaa værende Bygningers Opmaaling, Aftegning, Beregning, Taksering m. m. Der blev udfærdiget en Generalplan over hele Staden indenfor Voldene samt Planer over hvert af dens 12 Kvarterer og Plan i stor Maalestok over hver enkelt Ejendom med paastaaende Bygninger. Opmaalingsarbejdet udførtes af 5 Ingeniørofficerer, assisterede af 8 Soldater, hvorefter Stadskonduktøren foretog alle Beregninger og udfærdigede de herhen hørende Kort. Samtlige Planer, der er særdeles smukt tegnede, forefindes endnu i 2 Eksemplarer. København er saaledes ret godt stillet med Hensyn til Kortmateriale over de enkelte Grunde;

---

inspektør, Afdelings-Konduktør C. F. V. Boock i Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulsvæsen, 5. Bind Side 69 og Side 243.

det skorter derimod paa brugbare Planer over større Strækninger, og i den Henseende er der et stort Arbejde at udføre.

Der blev i Aaret 1771 af *Gerke* og *Ehlers* optaget Kort over Københavns udenbys Ejendomme; disse Kort eksisterer vistnok ikke mere, ligesaalidt som de i Aarene 1796 og 97 af Stadskonduktøren, Professor *Rawert*, optagne Kort over det samme Terræn, hvilke Kort forøvrigt ikke var gode, hvorfor man besluttede i Aaret 1817 at lade foretage en ny Opmaaling med Udfærdigelse af Kort, der skulde vise Matr. Nr., Bygninger, Haver, Sædeland eller Græsgange m. m. Da den for Arbejdet af Stadskonduktøren forlangte Betaling ansaas for at være for høj, blev Sagen foreløbig stillet i Bero, men to Aar senere fik Magistraten Løjtnant *Schlegel* af Ingeniørkorpset til for en forholdsvis billig Betaling at udføre Arbejdet, der trods Datidens tarvelige Maalemetoder blev særdeles godt udført. Af Kortene — 15 i Antal — findes 2 Eksemplarer, et paa Stadskonduktørens Kontor og et i Raadstue Arkivet, og da Skellinjer og disses Længder er anførte for hver Ejendom, tjener de endnu til Vejledning i Grænsespørgsmaal. Maalestoksforholdet er 3 : 4000.

Disse Kort var indtil 1893 de eneste nogenlunde brugbare Planer over de saakaldte udenbys Kvarterer.

240. Hidtil er særlig nævnt Kortlægning af Grundene udenfor de gamle Volde; over den indre By eksisterede der ingen i Sammenhæng maalte Planer i større Maalestok, før Landinspektør *Berggreen* i Aarene 1886—88 udarbejdede Kort, de saakaldte *Karréplaner*, over Størstedelen af den gamle By. Grundlaget for denne Opmaaling var en stor Polygon udenom hele Terrænet; fra denne førtes 4 brudte Linjer til et Punkt omtrent midt i Polygonen, og mellem det saaledes foreliggende Polygonnets Punkter førtes atter igennem Gaderne en Mængde brudte Linjer, hvorfra der maaltes til Skel, Bygninger, Bolværker o. s. v. Kortene over Gaderne blev tegnede i Maalestoksforholdet 1 : 500 (undtagelsesvis 1 : 800), og de indenfor Gadekaréerne værende Skel og Bygninger indtegnedes efter Stadskonduktørens Kort og Planer, hvorefter samtlige Gaarde blev gennemsete og vedkommende Karréplan om fornødent suppleret eller rettet. De Berggreenske Karréplaner har været meget brugte og har gjort god Nytte; men der er nu sket store Forandringer i Terrænet, hvorfor mange af Planerne er uden Betydning.

I 1893—98 blev der udført Opmaalinger af store Strækninger af Byens ydre Dele, over hvilke der blev trykt Kort i

Maalestoksforholdet 1 : 2000 med indtegnede Højdekurver. Grundlaget for disse Opmaalinger var lokale Triangulationer og brudte Linjer uden Tilknytning til de foreliggende af Generalstaben bestemte Punkter.

Da i Aarene 1901 og 1902 Byerne Emdrup, Utterslev, Brøndshøj, Husum, Vanløse, Valby, Vigerslev, Sundbyerne m. fl. indlemmedes under København, blev disse store Terræner kort forinden opmaalte og kortlagte, og som Grundlag for disse Arbejder blev afmærket og beregnet en Del Jordpunkter i de indlemmede Distrikter i Forhold til de af Generalstaben bestemte Punkter.

241. I de senere Aar er der paabegyndt en fuldstændig og moderne Opmaaling af Kjøbenhavn, som hviler paa en ny Triangulation, der omfatter de tidligere af Gradmaalingen eller Generalstaben benyttede Punkter: »Nikolaj«, »Buddinge«, »Middelgrunds Fort«, »Mellemfort«, »Kastrupfort«, Basis' Sydpunkt og »Valhøj«, idet disse Punkter danner en Stjerne med Nikolaj som Centrum. Som Basis er benyttet Siden »Nikolaj-Basis Sydpunkt«. Fra denne Stjernes Punkter er bestemt endnu en Del faste Jordpunkter og en stor Mængde utilgængelige Hovedpunkter som Spir, Taarne, Skorstene o. s. v., fra hvilke sidste atter en Del Jordpunkter er bestemte ved Tilbageskæring, hvor imod de utilgængelige Punkter ikke er direkte nedførte. De vigtigste Hovedpunkter er afmarkerede underjordisk, som omtalt Side 105 og vist i Fig. 92, eller, hvor Forholdene har tilladt det, ved c. $1^1/_4$ m lange Jernrør, der er anbragte i Betonblokke eller i solide Egetræs Pæle. Polygonmaalingen udføres meget omhyggeligt; Siderne maales med Staalbaand, hvis Længde stadig under Hensyntagen til Temperaturen kontroleres ved Maaling af en bestemt Afstand. Desuden benyttes, hvor Omstændighederne taler derfor, 5 m Maalestænger. Perpendikulærerne bestemmes ved Glasprisme, og de vigtigste Terrænpunkter kontroleres ved Skraamaal. Blinde Linjer, som føres ind i Gaardene, afmærkes ved Gasrør og Mærker paa Husene, saa at de kan etableres igen.

Maalebøgerne autograferes, naar alt er konstrueret og alle Fejl berigtigede, i 6 Eksemplarer, ét til Stadens Arkiv og 5 til Administrationen. Punktkort lyskopieres. Kortene, der er meget detaillerede, tegnes i 1 : 250; Planerne er 70 × 90 cm, og 64 saadanne danner en Hovedplan. De konstruerede Planer panto-

graferes til 1 : 500, og 4 Originalplaner danner da 1 Plan i dette Maalestoksforhold.

Nivellementet.

242. Paa Foranledning af Direktøren for Vej- og Kloakvæsenet udførtes 1887—88[1]) og paa Foranledning af Stadsingeniøren i 1900—01[2]) to Hovednivellementer af faste Hovedpunkter i Kjøbenhavn omfattende henholdsvis 360 og 313 Mærker. Da en Del af disse var beskadigede eller tilintetgjorte, paabegyndtes 1907 paa Stadens Grund et Præcisionsnivellement[3]), der omfatter 671 faste Punkter. De anvendte Nivellementsmærker er noget forskellige, de fleste er indmurede i solide Bygninger. Nivellementet er udført ved Hjælp af to Nivellerinstrumenter med Vendelibelle og Fremgangsmaaden var omtrent den samme, som er anvendt af Gradmaalingen. Kilometermiddelfejlen paa et Dobbeltnivellement er c. 1 mm. Resultatet af Nivellementet er offentliggjort i: »Beliggenheden og Højden af 671 faste Nivellementspunkter i Kjøbenhavn med indlemmede Distrikter, udarbejdet 1907—08 ved Stadskonduktøren under Ledelse af Afdelingskonduktør C. F. V. Boock«. Denne Bog indeholder en Række Kortblade over Kjøbenhavn, paa hvilke samtlige Nivellements-Fikspunkters Beliggenhed er angivet, samt en Fortegnelse, ordnet alfabetisk efter Gadernes og Pladsernes Navne, over Fikspunkternes Koter, saavel de ældre, som er bestemte ved tidligere Nivellementer, som de ny.

---

[1]) *P. Bentzon:* Nivellement til Bestemmelse af Højdemærker i Kjøbenhavn og paa dens Grund. Den tekniske Forenings Tidsskrift 1889—90 Side 92.

[2]) *M. J. Sand:* Præcisionsnivellementet i Kjøbenhavns nye Distrikter. Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulsvæsen 3. Bind Side 94.

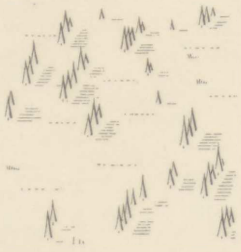
[3]) *C. F. V. Boock:* Kjøbenhavns Hovednivellement 1907—08. Tidsskrift for Opmaalings- og Matrikulsvæsen 5. Bind Side 97.

Kortsignaturer.

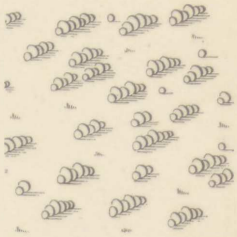
Løvtræer.



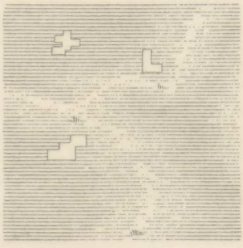
Naaletræer.



Krat.



Mose.



Eng.



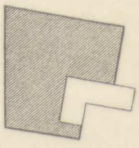
Lyng.



Sand.



Hus med Have.



Siv.



Stengærde.

Mur.

Jordvold.

Stakit.

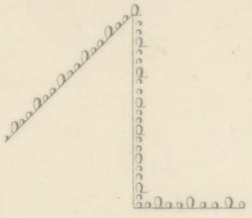
Plankeværk.

Risgærde.

Pigtraadshegn.

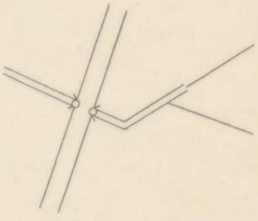
Enggrænse.

Levende Hegn



Markvej.

Grøfter med Stenkiste.



Fodsti.

Landevej med Paafyldning, Bro og Afgravning

