

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

8,620

STUDIER OVER
METALLERNES ELEKTRONTHEORI

AFHANDLING FOR DEN FILOSOFISKE
DOKTORGRAD

AF

NIELS BOHR

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS V. THANING & APPEL

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & Co. (M. A. HANNOVER)

1911

~~#5371~~

~~Industri Biblioteket~~

5371

Grp: Forfatter: Niels Bohr

Titel: Metallernes Elektron teori.

Bind: Udgave: Tryk: 1911

~~Industri Biblioteket~~

5371

STUDIER OVER
METALLERNES ELEKTRONTHEORI

TB Gl.

537 Bohr

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

G

T

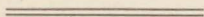
B

STUDIER OVER
METALLERNE ELEKTRONTHEORI

AFHANDLING FOR DEN FILOSOFISKE
DOKTORGRAD

AF

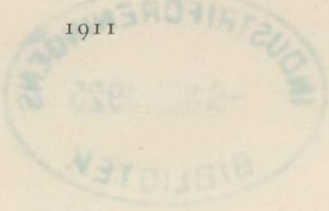
NIELS BOHR



KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS V. THANING & APPEL

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (M. A. HANNOVER)

1911



Denne Afhandling er af det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet antagen til at forsvares for den filosofiske Doktorgrad.

København, den 12. April 1911.

Elis Strömgren,
d. A. Dekanus.



1593

I DEN DYBESTE TAKNEMMELIGHED TILEGNET

MINDET OM MIN FADER

G

T

B

INDHOLDSFORTEGNELSE.

	Side
Indledning	I

KAPITEL I.

Opstilling af Betingelsesligninger for Elektronernes Bevægelse.

1. Elektrontheoriens Forudsætninger	7
2. Undersøgelse af Tilfælde, hvor man antager adskilte Sammenstød	15
3. Eksempler paa Tilfælde med adskilte Sammenstød	27
4. Undersøgelse af Tilfælde, hvor Metalmolekylernes Dimensioner ikke antages at være forsvindende i Forhold til deres indbyrdes Afstande	37

KAPITEL II.

Behandling af stationære Tilstande.

1. Uddledning af Udtryk for Elektricitets- og Energistrømningen	46
2. Elektricitets- og Varmeledning	51
3. Thermoelektriske Fænomener	63

KAPITEL III.

Behandling af ikke-stationære Tilstande.

1. Absorption af Varmestraaler	78
2. Emission af Varmestraaler	89

KAPITEL IV.

Indflydelsen af et magnetisk Felt.

1. Tilstande, hvor der er statistisk Ligevægt	105
2. Galvano- og thermomagnetiske Fænomener	108
Theses.	119

INDLEDNING.

Blandt de Legemer, der leder Elektriciteten, indtager Metallerne en særlig Plads, ikke blot paa Grund af deres store Ledningsevne, men ogsaa fordi Elektricitetens Gennemgang igennem dem, i Modsætning til de fleste andre gode Ledere, ikke er forbunden med paavise- lige kemiske Omsætninger. Dette Forhold forklares i Overensstem- melse med den almindelig antagne Opfattelse derved, at visse smaa Partikler — Elektroner —, ladede med Elektricitet, i Metallerne Indre kan bevæge sig fra det ene kemiske Atom til det andet.

Den første nærmere Udarbejdelse af en saadan Forestilling om Metallerne skyldes *W. Weber*¹⁾. Efter *Weber's* Theori bestaar hvert enkelt Metalmolekyle af et System af elektrisk ladede Partikler, der bevæger sig i krumlinede Baner omkring hverandre; disse Systemer antages imidlertid ikke at være stabile, men med korte Mellemrum vil nogle af Partiklerne forlade Systemet for derefter i tilnærmelsesvis ret- linede Baner at bevæge sig igennem Metallet, indtil de atter indfanges af andre Metalmolekyler; i disse vil de saa for en Tid deltage i de intra-molekylære Bevægelser, for derefter atter at sendes ud o. s. v. Idet *Weber* endvidere antager, at de omhandlede Partiklers Bevægelses- energi er identisk med en væsentlig Del af Metallets Varmeenergi, gives der ved *Weber's* Theori en Mulighed for en Forklaring af den nære Forbindelse, der er mellem Metallerne Ledningsevne for Varme og for Elektricitet, samt for en mekanisk Forstaaelse af den af *F. Kohl- rausch*²⁾ opstillede Medførings-theori for de thermoelektriske Fænomener, hvilken sidste Theori forklarer disse Fænomener ved at antage, at der

¹⁾ Se f. Eks. *W. Weber*: Pogg. Ann., Bd. 156, p. 1, 1875.

²⁾ *F. Kohlrausch*: Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1874, p. 65.

til enhver elektrisk Strøm er knyttet en bestemt Varmestrøm, der er proportional med den elektriske Strøm og afhængig af Metallets Natur og Temperatur, og at der omvendt til enhver Varmestrøm svarer en bestemt elektrisk Strøm.

Ud fra et Grundlag, der svarer til de her omtalte, af *Weber* benyttede Forestillinger om Forholdene i Metallernes Indre, har *E. Riecke*¹⁾ senere udarbejdet en udførlig Theori for Metallerne, i hvilken der udledes bestemte Udtryk saavel for Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet som for de thermoelektriske Fænomener, samt for de galvano- og thermomagnetiske Fænomener. I disse Udtryk indgaar Værdierne for Antallet af Partikler, der udsendes i Tidsenheden af Metalmolekylerne i en Volumenenhed, for Partiklernes elektriske Ladninger, deres Masser og de Hastigheder, hvormed de udsendes, samt endelig for de Vejlængder, som de i Middel tilbagelægger, før de atter indfanges af et andet Metalmolekyle; idet der imidlertid ikke paa Forhaand gøres bestemte Antagelser om de absolute Værdier af nogen af de omtalte Størrelser, tillader *Riecke's* Theori kun forholdsvis ringe Sammenligning med Erfaringerne.

Et meget væsentligt Fremskridt i Metallernes Elektrontheori skyldes *P. Drude*²⁾, der bragte de i den kinetiske Lufttheori udledte Hovedresultater til Anvendelse paa de ovenfor omtalte fri Partiklers Bevægelse i Metallernes Indre. I den kinetiske Lufttheori bevises f. Eks., at en Samling Partikler, der befinder sig i mekanisk Varmeligevægt med deres Omgivelser, maa have saadanne Hastigheder, at deres kinetiske Energi, hidrørende fra deres fremadskridende Bevægelse, i Middel er lig den kinetiske Energi, hidrørende fra den fremadskridende Bevægelse af et Molekyle af en hvilken som helst Luftart, der befinder sig ved samme Temperatur. Ved Hjælp af denne Sætning om Partiklernes Middelenergi og ved at antage, at Partiklernes elektriske Ladninger har samme Størrelse som Ladningen af en engyldig Ion i en Elektrolyt, har *Drude* beregnet Forholdet mellem Metallernes Varme- og Elektricitetsledningsevne i meget nær Overensstemmelse med de eksperimentelt fundne Værdier³⁾.

Drude's Beregninger er imidlertid ikke fuldkommen nøjagtig gennemførte; han antager blandt andet for Simpelt Skyld, at alle Partiklerne har den samme absolute Hastighed, medens man efter Ud-

¹⁾ *E. Riecke*: Wied. Ann., Bd. 66, pp. 353, 545 og 1199, 1898.

²⁾ *P. Drude*: Ann. d. Phys., Bd. 1, p. 566 og Bd. 3, p. 369, 1900.

³⁾ Se *M. Reinganum*: Ann. d. Phys., Bd. 2, p. 398, 1900.

viklingerne i den kinetiske Lufttheori nødvendigvis maa antage, at Partiklerne, dersom de befinder sig i en mekanisk Varmeligevægt som den af *Drude* betragtede, maa have forskellige absolute Hastigheder, fordelte efter den saakaldte *Maxwell'ske* Hastighedsfordelingslov. En fuldkommen strængt gennemført Theori udfra bestemt angivne Forudsætninger er først givet af *H. A. Lorentz*¹⁾.

Medens *Riecke* og *Drude* antager den samtidige Tilstedeværelse i Metallerne af flere forskellige Slags, baade positive og negative, frit bevægelige Partikler, antager *Lorentz* kun Tilstedeværelsen af én enkelt Slags fri Partikler, ens i alle Metaller. En saadan Antagelse er først indført i Metallernes Elektrontheori af *J. J. Thomson*²⁾. Denne Forfatter, der i saa høj Grad har bidraget til det eksperimentelle Grundlag for Elektrontheorien, begrundet sin Antagelse paa den Omstændighed, at medens man paa mange, vidt forskellige Maader har konstateret Tilstedeværelsen af en ganske bestemt Slags negativt ladede Partikler, de saakaldte Elektroner, hvis Masser er overordentlig mange Gange mindre end de kemiske Atomers Masser, er det aldrig lykkedes at iagttage positiv Elektricitet uden i Forbindelse med Masser af samme Størrelsesorden som de kemiske Atomers. *Lorentz*³⁾ har ydermere paavist, at der indtræder Vanskeligheder af principiel Art ved at tænke sig flere Slags frit bevægelige Partikler i stationær Fordeling i et Metalstykke, hvis Tilstand — Temperatur og kemiske Sammensætning — ikke overalt er den samme.

Til Grund for *Lorentz's* Theori lægges følgende mekaniske Billede. I Metallernes Indre tænkes at befinde sig baade Metalmolekyler og fri Elektroner. Molekylernes og Elektronernes Dimensioner — de Omraader, indenfor hvilke de paavirker hinanden kendeligt — antages at være forsvindende smaa i Forhold til Middelværdien af deres indbyrdes Afstande; de tænkes derfor kun at paavirke hinanden ved adskilte Sammenstød, under hvilke sidste de antages at virke paa hinanden som absolut haarde elastiske Kugler. Saavel Elektronernes Dimensioner som deres Masser tænkes endvidere at være saa smaa i Forhold til Metalmolekylernes, at man dels kan se bort fra Sammenstødene mellem de fri Elektroner indbyrdes i Forhold til Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne, dels kan betragte Metalmolekylerne som ubevægelige i Forhold til Elektronerne.

¹⁾ *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, pp. 438, 585 og 684, 1905.

²⁾ *J. J. Thomson*: Rapp. d. Congrès d. Physique, Paris 1900, Tom. 3, p. 138.

³⁾ *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 684, 1905. Jahrb. d. Rad. u. Elek., Bd. 4, p. 125, 1907.

Udfrå disse Antagelser har *Lorentz* ikke alene beregnet Udtryk for et Metals Elektricitets- og Varmeledningsevne og for de thermoelektriske Fænomener, men ogsaa for et Metals Udstraalingsevne og Absorptionsevne for Varmestraaler med store Svingningstider. Som nogle af de interessanteste Resultater af *Lorentz's* Theori kan, foruden den ovenfor omtalte, af *Drude* først paaviste, tilnærmelsesvis Overensstemmelse mellem den beregnede Værdi og de eksperimentelt fundne Værdier for Forholdet mellem Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet, nævnes den fuldkomne Overensstemmelse mellem de udfrå *Lorentz's* Theori beregnede Resultater for saavel de thermoelektriske Fænomener som de med Varmestraalingen forbundne Fænomener og de ad thermodynamisk Vej, af henholdsvis Lord *Kelvin* og *Planck* opstillede Theorier for disse Fænomener. Denne sidste Overensstemmelse — der kun fremkommer ved en fuldkommen stræng Gennemførelse af Beregningerne, saaledes først naar der tages Hensyn til den *Maxwell'ske* Hastighedsfordelingslov — er saameget mere interessant, som den, paa Grund af særlige Forhold ved Opstillingen af de to sidstnævnte Theorier, ikke bestemt paa Forhaand kunde ventes.

Medens *Lorentz's* Theori er meget fuldkommen i matematisk Henseende, er de fysiske Antagelser, hvorpaa Theorien bygger, imidlertid af en saadan Art, at de næppe engang tilnærmelsesvis kan tænkes opfyldt ved de virkelige Metaller. Det er derfor af Interesse udfrå 'andre og mere almindelige Forudsætninger at undersøge, hvorledes Metallernes Elektrontheori vil forme sig, og da navnlig at se, hvorledes det vil gaa med den omtalte Overensstemmelse med de thermodynamiske Theorier.

Et Forsøg paa at gennemføre en saadan Theori er for Varmestraalingsproblemets Vedkommende gjort af *J. H. Jeans*¹⁾. *Jeans's* Beregninger er imidlertid i deres Almindelighed ikke rigtige²⁾, idet der, som vi skal se, benyttes Antagelser, der kun vil være opfyldt i ganske specielle Tilfælde, saaledes ikke engang ved det ovenfor omtalte, af *Lorentz* behandlede Tilfælde.

Det Maal, jeg har sat mig ved denne Afhandling, er at forsøge at gennemføre Beregningerne for de forskellige Fænomener, der forklares ved Tilstedeværelsen af fri Elektroner i Metallerne, i saa stor

¹⁾ *J. H. Jeans*: Phil. Mag., vol. 17, p. 773 og vol. 18, p. 209, 1909.

²⁾ *H. A. Wilson* (Phil. Mag., vol. 20, p. 835, 1910) har i en nylig offentliggjort Afhandling gjort opmærksom paa Urigtigheden af *Jeans's* Beregninger og forsøgt at gennemføre en rigtigere Beregning for et enkelt specielt Tilfældes Vedkommende. (Som vi i det følgende skal se, er *Wilson's* Beregning imidlertid heller ikke rigtig.)

Almindelighed som muligt, med Bevarelsen af de Hovedsynspunkter, der er lagt til Grund i *Lorentz's* Theori.

Vi skal da i det følgende antage, at der i ethvert Metalstykke findes et vist, af Metallets Natur og Temperatur afhængigt, Antal fri Elektroner, hvilke Elektroner skal antages at være ens i alle Metaller.

Vi skal dernæst endvidere antage, at der i et homogent Metalstykke, der overalt har samme Temperatur, og som ikke paavirkes af ydre Kræfter, vil være fuldkommen mekanisk Varme-Ligevægt mellem de fri Elektroner og Metalmolekylerne, — ved mekanisk Varme-Ligevægt skal her forstaas en saadan statistisk Ligevægt som den, der vil fremkomme, dersom Metalmolekylerne og Elektronerne paavirker hinanden med Kræfter af samme Art som de i den sædvanlige Mekanik betragtede Kræfter, d. v. s. dersom Bevægelserne tilfredsstiller de *Hamilton'ske* Ligninger. — Den omtalte Antagelse er ikke paa Forhaand selvfølgelig, idet man maa antage, at der i Naturen ogsaa findes Kræfter af ganske anden Art end de almindelige mekaniske Kræfter; medens man nemlig paa den ene Side har opnaaet overordentlig store Resultater i den kinetiske Lufttheori ved at antage, at Kræfterne mellem de enkelte Molekyler er af almindelig mekanisk Art, er der paa den anden Side mange af Legemernes Egenskaber, det ikke er muligt at forklare, dersom man antager, at de Kræfter, der virker indenfor de enkelte Molekyler (der efter den almindelig antagne Opfattelse bestaar af Systemer, i hvilke indgaar et stort Antal »bundne« Elektroner), er af en saadan Art. Foruden forskellige almindelig kendte Eksempler herpaa, f. Eks. Beregningen af Legemernes Varmefylde og Beregningen af Varmestraalingsloven for korte Svingningstider, skal vi i det følgende ogsaa se et yderligere Eksempel herpaa, nemlig ved Omtalen af Legemernes magnetiske Forhold.

Foruden de ovenfor omtalte almindelige Antagelser, skal vi i det følgende yderligere antage, at Metalmolekylernes Egenskaber i Middel er ens i alle Retninger, og at denne Isotropi vil bestaa uafhængig af de ydre Kræfters Tilstedeværelse, saaledes at de ydre Kræfters Virkning forklares ved deres direkte Indvirkning paa de fri Elektroners Bevægelser. Dette, der danner en Hovedantagelse i *Drude's* og *Lorentz's* Theorier, skiller den her givne Behandling meget væsentligt fra saadanne Theorier for Metallerne som dem, der er opstillede af *W. Sutherland*¹⁾ og *J. J. Thomson*²⁾. Efter disse sidste Theorier, i hvilke man ikke antager en saadan stadig Tilstedeværelse

¹⁾ *W. Sutherland*: Phil. Mag., vol. 7, p. 423, 1904.

²⁾ *J. J. Thomson*: The Corpuscular Theory of Matter, London 1907, p. 86.

i Metallet af fri Elektroner som i *Lorentz's* Theori, forklares nemlig de ydre Kræfters Virkning gennem deres Indvirkning paa de enkelte Metalmolekyler med deres tilhørende Elektroner, betragtet som Helheder, og Elektronernes Bevægelse gennem Metallet fremkommer ved, at de, paa Grund af hele Molekylets Bevægelse, udsendes som fri Elektroner i Retninger, der i Middel er afhængige af de ydre Kræfters Retninger.

Undersøgelsen i det følgende falder i to adskilte Tilfælde, alt efter som vi antager, at der, ligesom ved det af *Lorentz* behandlede specielle Tilfælde, finder adskilte Sammenstød Sted mellem Elektronerne og Metalmolekylerne, eller vi antager, at Molekylerne befinder sig saa tæt inde paa hverandre, at Elektronerne under en stor Del af deres Bevægelse er underkastet stærke Kræfter fra Molekylernes Side. I det første af disse Tilfælde har det været muligt for visse Problemers Vedkommende at gennemføre Undersøgelsen i fuldkommen Almindelighed udfra de ovenfor omtalte Hovedantagelser. I det andet Tilfælde derimod, hvor Behandlingen er langt vanskeligere, har det ikke været muligt at gennemføre Undersøgelsen i saa stor Almindelighed; det er dog lykkedes at gennemføre Behandlingen under saadanne Antagelser, der synes tilnærmelsesvis at kunne svare til Forholdene i de virkelige Metaller.

Det har ved denne Lejlighed været Hovedhensigten at drage de videst mulige Konsekvenser af en Theori for Metallerne, grundet paa de ovenfor omtalte almindelige Antagelser. Henvisninger til eksperimentelt fundne Resultater er derfor i denne Afhandling kun medtaget i saadanne Tilfælde, hvor de er af særlig Betydning for de omhandlede theoretiske Synspunkter.

Ved Afslutningen af dette Arbejde vil jeg bede min Lærer ved Universitetet, Hr. Professor *Christiansen*, modtage min bedste Tak for hans værdifulde Vejledning under mine Studier og for den velvillige Interesse, han stedse har vist mig.

København, April 1911.

Niels Bohr.

KAPITEL I.

OPSTILLINGEN AF BETINGELSESLIGNINGERNE FOR ELEKTRONERNES SAMLEDE BEVÆGELSE GENNEM METALLET.

§ 1.

Elektrontheoriens almindelige Forudsætninger om Tilstanden i Metallernes Indre.

I det Indre af et Metalstykke tænkes en stor Mængde fri Elektroner at bevæge sig afsted med store Hastigheder i alle mulige Retninger. Disse Elektroner tænkes uafbrudt at forandre deres Bevægelsesretning og Hastighed paa Grund af de Kræfter, hvormed de paavirkes fra hverandre og fra Metalmolekylernes Side. I et homogent Metalstykke, der overalt har samme Temperatur, og som er upaavirket af ydre Kræfter, vil Elektronernes Hastighed i Middel være den samme i alle Retninger. Virker der derimod en ydre elektrisk Kraft, vil Elektronernes Bevægelse forandres, idet alle de enkelte Elektroners Baner vil paavirkes i Kraftens Retning. Idet imidlertid de ydre Kræfter, der her vil være Tale om, vil være meget smaa i Sammenligning med de store Kræfter, hvormed Elektronerne paavirkes fra Metalmolekylernes Side, vil de ydre Kræfter kun have meget ringe Indflydelse paa Karakteren af de enkelte Elektroners Baner, og Elektronernes Hastighedsfordeling vil kun afvige meget lidt fra den normale, d. v. s. den, der vil være til Stede, naar der ingen ydre Kræfter virker. Som Følge af den ydre Krafts Indvirkning vil der dog i Middel være flere Elektroner, der bevæger sig i Kraftens Retning, end i den modsatte, og idet Elektronerne medfører elektriske Ladninger, vil der derfor fremkomme en Strømning af Elektricitet i Kraftens Retning. Idet Elektronerne er i Besiddelse af kinetisk Energi hidrørende fra deres Bevægelse, vil den ydre Kraft, idet den frem-

bringer en Strømning af Elektronerne, ogsaa give Anledning til en Energistrømning (Varmestrømning) gennem Metallet.

Man kunde tænke sig, at der under Indvirkningen af en elektrisk Kraft vilde kunne indtræde en Ligevægt — svarende til den Ligevægt, der opstaar i en Beholder med en Luftart, der er underkastet Tyngdekraftens Paavirkning —, idet Elektronernes Koncentration under Kraftens Indflydelse blev større paa Steder med lavere Potential, indtil den Strømning af Elektroner, der skyldes den elektriske Kraft, vilde holdes i Ligevægt af den Strømning, der skyldtes Elektronernes Diffusion i modsat Retning. En saadan Ligevægt kan imidlertid ikke opstaa i det Indre af et homogent, ensartet opvarmet Metalstykke, idet Koncentrationsforskelle som de omtalte, paa Grund af Elektronernes overordentlig store Antal, vilde give Anledning til Dannelsen af meget store fri elektriske Ladninger, og disse igen til ydre elektriske Kræfter modsat rettede de oprindelige Kræfter og overordentlig mange Gange større end disse. I det Indre af et Metalstykke vil der derfor ikke kunne være elektrisk Ligevægt samtidig med, at der virker ydre elektriske Kræfter, og Elektronernes Koncentration vil kun kunne afvige overordentlig lidt fra den normale; kun i den allernærmeste Nærhed af Overfladen vil der indtræde særlige Forhold paa Grund af de her virkende store Kræfter, der forhindrer Elektronerne i at forlade Metallet.

Dersom Temperaturen i et Metalstykke ikke overalt er den samme, vil Middelværdien af Elektronernes absolute Hastigheder de forskellige Steder være forskellig, idet Hastighederne vil være større, hvor Temperaturen er højere, og der vil derfor finde en Vandring Sted af hurtige Elektroner i en Retning fra højere Temperatur til lavere, og af langsommere den modsatte Vej. En Temperaturforskel vil derfor ogsaa i saadanne Tilfælde, hvor der ingen elektrisk Strøm gaar gennem Metallet, fremkalde en Strømning af Energi fra Steder med højere Temperatur til Steder med lavere, idet de hurtigere Elektroner vil medføre mere kinetisk Energi end de langsommere. Endvidere vil en Temperaturforskel kunne give Anledning til en elektrisk Strøm, selv om der ikke virker ydre elektriske Kræfter, idet blandt andet Elektronerne med de forskellige absolute Hastigheder vil bevæge sig ulige hurtigt igennem Metallet. Paa lignende Maade som i det Tilfælde, hvor der virker en ydre Kraft paa Elektronerne, vil ogsaa her Elektronernes Bevægelser paa de enkelte Steder afvige meget lidt fra deres normale Bevægelser, idet de Afstande, indenfor hvilke Elektronernes Middel-Hastigheder vil variere kendeligt paa Grund af Temperaturens Variation, vil være meget store i Sammenligning med saadanne Afstande, indenfor hvilke de enkelte Elektroners Hastigheder under deres Bevægelse vil have forandret sig meget stærkt paa Grund af de Kræfter, hvormed de paavirkes fra Metalmolekylernes og de andre Elektroners Side.

I det Tilfælde endelig, hvor det betragtede Metalstykke ikke er homogent, d. v. s. hvor dets kemiske Sammensætning ikke er den samme overalt, skal det vel antages, at Middelværdien af Elektronernes absolute Hastigheder paa de forskellige Steder er den samme, dersom Temperaturen er den samme; men i dette Tilfælde vil Antallet af fri Elektroner paa Volumenenheden i Almindelighed ikke være det samme paa de forskellige Steder. Der vil derfor ogsaa i dette Tilfælde finde en Vandring af Elektroner Sted og en deraf resulterende Elektricitets- og Energistrømning. — Et lignende Forhold som det sidst betragtede vil i Virkeligheden ogsaa finde Sted i et homogent Metalstykke, i hvilket Temperaturen ikke overalt er den samme, idet det skal antages, at ikke alene Elektronernes absolute Hastigheder, men ogsaa deres Antal i Volumenenheden vil variere med Temperaturen. — Ligesom i det forrige Tilfælde skal vi ogsaa her antage, at Metallets Tilstand varierer saaledes, at Metallets Egenskaber (her f. Eks. Antallet af fri Elektroner i Volumenenheden) kun forandrer sig meget lidt indenfor de meget smaa Afstande, indenfor hvilke de enkelte Elektroners Hastigheder under deres Bevægelse allerede har forandret sig meget stærkt.

Vi skal nu i dette Kapitel søge Ligninger til Bestemmelse af saavel den Elektricitets- som den Energimængde, der ved Elektronernes Bevægelser føres gennem et Fladeelement i det Indre af Metallet, dersom der hersker en given ydre elektrisk Kraft, og dersom Metallets Temperatur og kemiske Sammensætning i dets enkelte Punkter er given. I de næste Kapitler skal vi derefter ved Hjælp af disse Ligninger behandle Spørgsmaalene om Metallernes Elektricitets- og Varmeledning, de thermoelektriske Fænomener o. s. v.

Ved Opstillingen af de omtalte Ligninger skal vi anvende den i den kinetiske Lufttheori almindelig benyttede, saakaldte statistiske Methode. Denne Methode er først blevet anvendt paa Elektrontheoriens Problemer af *H. A. Lorentz*¹⁾, der har vist, hvorledes man ved Hjælp af den paa forholdsvis simpel Maade kan undersøge Virkningerne af Elektronernes indviklede Bevægelse i Metallet.

Til at holde Regnskab med Elektronernes Bevægelser skal vi benytte to retvinklede 3-dimensionale Koordinatsystemer. I det ene Koordinatsystem angives en Elektrons Plads i det betragtede Øjeblik paa sædvanlig Maade med Koordinater (x, y, z) . I det andet Koordinatsystem angives enhver Elektrons Hastighed ved et Punkt, hvis Koordinater, der betegnes med (ξ, η, ζ) , sættes lig med Komposanterne

¹⁾ *Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 440, 1905.

efter Akserne i det første System af Elektronens Hastighed i det betragtede Øjeblik. Det Antal Elektroner, der til Tiden t befinder sig i Volumenelementet dv , samtidig med at deres Hastighedspunkter befinder sig i Volumenelementet (Hastighedsselementet) $d\sigma$, skal nu betegnes ved

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) d\sigma dv$$

(eller paa Steder, hvor det ikke kan misforstaaes, simpelthen ved $f d\sigma dv$), hvor (x, y, z) betegner et Punkt i Elementet dv og (ξ, η, ζ) et Punkt i Elementet $d\sigma$. — Elementerne dv og $d\sigma$ skal i Almindelighed antages saa store, at det omhandlede Antal Elektroner er meget stort; dersom man imidlertid, som det vil være Tilfældet ved nogle af de betragtede Problemer, ikke kan gøre Elementerne saa store, at denne Betingelse er opfyldt, skal man blot ved det omtalte Antal forstaa Middelværdien af Antallet af Elektroner i de betragtede Elementer, taget over en vis Tid. —

Vi skal nu først betragte Fordelingen af de fri Elektroner i et homogent Metalstykke, der er upaavirket af ydre Kræfter, og i hvilket Temperaturen overalt er den samme.

At de omhandlede Elektroner er »fri« af Metalmolekylerne, skal ikke betyde, at de under deres Bevægelse ikke paavirkes af Kræfter fra Molekylerne Side, men blot at de under Vekselvirkningen med Metalmolekylerne optræder som selvstændige mekaniske Systemer, paa hvilke man kan anvende den statistiske Mekaniks Love.

Det maa her bemærkes, at det ikke vil være tilladt at gøre en saadan Antagelse om alle de Elektroner, der befinder sig i Metallet, nemlig ikke om dem, der tænkes »bundne« i stort Antal indenfor hvert enkelt Metalmolekyle; thi Konsekvenserne heraf vilde være, at Metallernes Varmefylde maatte være langt større end den, der findes ved Forsøgene. Det er derfor nødvendigt i mekanisk Henseende bestemt at skelne mellem de fri Elektroner og de i Molekylerne bundne Elektroner, hvilke sidste synes at være afskaarne fra Paavirkning fra andre Molekyler eller Elektroner paa en Maade, der ikke svarer til noget, man kender fra de almindelige mekaniske Systemer.

Det følger nu af Udviklingerne i den statistiske Mekanik, at de fri Elektroner i et Stykke Metal i den ovenfor beskrevne Tilstand vil indtage en Fordeling, der udtrykkes ved¹⁾

$$f = A \cdot \int e^{-\frac{U}{kT}} \cdot dx_2 dy_2 dz_2 d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2 dx_3 dy_3 \dots \left. \begin{array}{l} \\ dx_N dy_N dz_N d\xi_N d\eta_N d\zeta_N dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n, \end{array} \right\} \quad (1)$$

¹⁾ Se *P. Debye: Ann. d. Phys., Bd. 33, p. 455, 1910.*

hvor N er Antallet af fri Elektroner i en Volumenenhed af Metallet, og hvor $q_1, q_2 \dots q_n$ er et Antal generaliserede Stedskoordinater og $p_1, p_2 \dots p_n$ de dertil svarende generaliserede Bevægelsesmængdekompasanter ($p_r = \frac{\delta E_p}{\delta \dot{q}_r}$, hvor $\dot{q}_r = \frac{dq_r}{dt}$ og E_p er Molekylernes samlede kinetiske Energi), tjenende til Bestemmelse af Metalmolekylernes øjeblikkelige Bevægelsestilstand, samt U den samlede Energi (kinetisk og potentiel) af hele Systemet, bestaaende af alle Elektronerne og Metalmolekylerne i en Volumenenhed af Metallet, svarende til bestemte Værdier $x, x_2, x_3, \dots, x_N, y, y_2, \dots, y_N, \eta, \eta_2, \dots, \eta_N, \zeta, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ for de N Elektroners Steds- og Hastigheds-Koordinater og bestemte Værdier for Størrelserne $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$. Endvidere er T den absolute Temperatur, k den i en Luftarts Tilstandsligning

$$pv = k \cdot NT$$

(hvor p er Trykket, v Volumenet og N Antallet af Molekyler) indgaaende universelle Konstant, og A en Konstant afhængig af Metallens Natur og Temperatur. Integrationen i Ligningen (1) tænkes udført over alle Værdier for Hastighedskoordinaterne og over alle Stedskoordinater indenfor en Volumenenhed af Metallet.

Dersom Elektronerne, saaledes som ved de Anvendelser, vi i det følgende skal gøre af Ligningen (1), tænkes at bevæge sig uafhængig af hverandre — d. v. s. dersom den potentielle Energi, der hidrører fra deres indbyrdes Paavirkning, kun under en forsvindende ringe Del af Elektronernes Bevægelser har en kendelig Værdi — i stationære Kraftfelter, faar man af (1), idet i dette Tilfælde

$$U = \left[\frac{1}{2} mr^2 + P(x, y, z) \right] + \left[\frac{1}{2} mr_2^2 + P(x_2, y_2, z_2) \right] + \dots \\ + \left[\frac{1}{2} mr_N^2 + P(x_N, y_N, z_N) \right] + Q(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n),$$

hvor m er en Elektrons Masse, og $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ dens absolute Hastighed¹⁾, samt $P(x, y, z)$ en Elektrons potentielle Energi i Punktet (x, y, z) ,

¹⁾ Vi forudsætter her, ligesom overalt i det følgende, at Elektronernes Hastigheder vil være meget ringe i Sammenligning med Lysets Hastighed (Elektronernes Middel-hastighed vil ved almindelig Temperatur være c. $\frac{1}{3000}$ af Lysets Hastighed (se f. Eks. J. J. Thomson: The Corpuscular Theory of Matter, p. 52)), og at derfor den Energi, der stammer fra en Elektrons Bevægelse, vil kunne skrives $\frac{1}{2} mr^2$, hvor m er en Konstant, uafhængig af Elektronens Hastighed.

$$f = K \cdot e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{m}{2} v^2 + P \right)}, \quad (2)$$

hvor K er en Konstant, der er afhængig af Metallets Natur og Temperatur.

Ligningen (1) — og den deri indeholdte Ligning (2) — giver blandt andet Udtryk for, at Elektronerne i ethvert nok saa lille Volumenelement af det betragtede Metalstykke i Middel bevæger sig i lige stort Antal i alle Retninger, samt at Middelværdien af de enkelte Elektroners kinetiske Energi — hvilken Middelværdi vil have samme Værdi indenfor hvert nok saa lille Volumenelement af Metallet — er lig Middelværdien af den kinetiske Energi, svarende til den fremadskridende Bevægelse af et Molekyle af en Luftart ved samme Temperatur.

Ved Beviserne for Udtryk som Ligning (1) for den statistiske Fordeling af en Samling Partikler forudsættes det i Almindelighed, at Partiklerne kun paavirkes af Kræfter, der er uafhængige af Partiklernes Hastighedskoordinater og kun afhængige af deres Stedskoordinater; man kan imidlertid meget simpelt bevise, at Ligningen (1) ogsaa vil gælde for Elektronernes Fordeling under Antagelsen af Tilstedeværelsen af saadanne Kræfter som de, der paavirker Elektronerne under deres Bevægelse i et magnetisk Felt¹⁾. Idet nu disse Kræfter staar vinkelret

¹⁾ Ligningen (1) udledes nemlig ved Hjælp af almindelige statistiske Betragtninger (se *Debye*: loc. cit., p. 445—455) udfra den Sætning (se f. Eks. *Gibbs*: *Elementary Principles in statistical Mechanics*, New York 1902, p. 3—11), at en Samling af ensartede mekaniske Systemer, af hvilke hvert enkelt System bestemmes ved de n generaliserede Stedskoordinater $q_1, q_2, \dots, q_n$ og de dertil svarende n generaliserede Bevægelsesmængdekomponenter $p_1, p_2, \dots, p_n$, vil forandre sig saaledes med Tiden: at, dersom man tænker sig de enkelte Systemers Bevægelsestilstand angivet ved Punkter i et $2n$ -dimensionalt »retvinklet« Koordinatsystem ved Hjælp af Koordinaterne $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ og betragter det Antal Systemer, hvis tilsvarende Punkter til Tiden t (Systemernes samlede Antal skal tænkes at være saa stort, at de til ethvert Tidspunkt kan betragtes som værende kontinuert fordelt over alle mulige Værdier af de $2n$ Koordinater) befinder sig indenfor et lille »Volumenelement« dv ($dv = dq_1 dq_2 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$), vil disse Systemers Punkter til et vilkaarligt senere Tidspunkt t_1 befinde sig indenfor et Volumenelement dv_1 af samme Størrelse som dv .

Denne Sætning vil være rigtig, dersom der for de omhandlede Systemer gælder følgende Betingelsesligning (se *Gibbs*: loc. cit., p. 11, Note):

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2} + \dots + \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_n} + \frac{\partial \dot{p}_n}{\partial p_n} = 0 \quad (1')$$

(hvor ligesom ovenfor $\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$ o. s. v.).

paa Elektronernes Bevægelsesretning, vil de intet Arbejde udføre, og Elektronerne vil derfor ingen potentiel Energi besidde i Forhold til de magnetiske Felter. Man ser derfor, at magnetiske Kræfter ikke vil have nogen Indflydelse paa Elektronernes statistiske Fordeling, dersom der er statistisk Ligevægt til Stede. (Se nærmere Kap. IV.)

Vi har i det foregaaende i mekanisk Henseende opfattet Elektronerne som Punkter, hvis hele Bevægelse fuldstændigt bestemmes ved de 6 Koordinater x, y, z, ξ, η og ζ ; opfattes Elektronerne derimod som mekaniske Systemer med en vis Udstrækning, maa man for fuldstændig at bestemme Bevægelsen ogsaa tage Hensyn til Drejninger af Systemerne omkring deres Tyngdepunkter, og indføre tilsvarende Koordinater til Bestemmelse af denne sidste Art af Bevægelse. — Det maa dog her bemærkes, at Ligning (2) stadig vil gælde, dersom man blot betragter den fremadskridende Bevægelse, idet den statistiske Fordeling af denne Be-

Ligningen (1') følger, dersom de Kræfter, hvormed Systemets Partikler paavirkes, er uafhængige af Partiklernes Hastigheder, umiddelbart udfra de *Hamilton'ske* Ligninger (*Gibbs*: loc. cit., p. 4)

$$\dot{q}_r = \frac{\partial E_p}{\partial p_r} \quad \text{og} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial E_p}{\partial q_r} + F_r, \quad (2')$$

hvor E_p er Systemets kinetiske Energi og $F_1, \dots, F_n$ er de generaliserede Kraftkomposanter (i det omhandlede Tilfælde Funktioner af $q_1, q_2, \dots, q_n$).

Dersom nu Partiklerne ogsaa paavirkes med saadanne Kræfter, som Elektroner, der bevæger sig i et magnetisk Felt, er underkastede, vil $F_1, \dots, F_n$ ikke mere være uafhængige af de generaliserede Hastighedskomposanter $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, men vil være lineære Funktioner af disse Størrelser. Idet de Kræfter, der hidrører fra det magnetiske Felt, staar vinkelret paa de enkelte Partiklers øjeblikkelige Bevægelsesretning, vil de imidlertid ikke kunne udføre noget Arbejde, og de vil derfor forsvinde ud af Udtrykket

$$dA = F_1 dq_1 + F_2 dq_2 + \dots + F_n dq_n = (F_1 \dot{q}_1 + F_2 \dot{q}_2 + \dots + F_n \dot{q}_n) dt = B dt$$

for det i Tiden dt af de Systemet paavirkende Kræfter udførte Arbejde. B vil derfor ogsaa i dette Tilfælde være en linenær Funktion af de generaliserede Hastighedskomposanter $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, og man vil derfor have

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} = 0 \quad \left(\begin{matrix} r = 1, 2, \dots, n \\ s = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right).$$

Dette giver

$$\frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_r} = 0. \quad (3')$$

Vi har nu ved Hjælp af (2') og (3')

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial F_r}{\partial p_r} = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_r} = \sum_{r=1}^{r=n} \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial^2 E_p}{\partial p_r \partial p_s} = 0. \quad (4')$$

Af (2') og (4') følger nu (1').

q. e. d.

vægelse og af den drejende Bevægelse er uafhængige af hinanden. — Efter den statistiske Mekanik vil nu den kinetiske Energi, der svarer til en saadan Drejning, dersom der skal være statistisk Ligevægt, i Middel være ligesaa stor som den, der svarer til den fremadskridende Bevægelse. Man kan imidlertid næppe tilskrive Elektronerne en saadan Bevægelsesenergi, hidrørende fra Drejninger omkring deres Tyngdepunkter. Det er nemlig, som bekendt, ved Forsøg over Forholdet mellem Luftarternes Varmefylde ved konstant Tryk og ved konstant Rumfang vist, at Molekylerne af saadanne Luftarter, hvis Molekyler antages at bestaa af et enkelt Atom — hvilke Molekyler dog sikkert maa antages at danne langt mere udstrakte Systemer end de enkelte fri Elektroner —, ikke besidder en saadan Energi.

Dersom der virker ydre Kræfter, og Metallets Temperatur og kemiske Sammensætning ikke er ens i alle Punkter, vil Hastighedsfordelingen ikke mere udtrykkes ved Ligning (1), men ved Ligningen

$$f = f_0 + \psi, \quad (3)$$

hvor f_0 betegner den samme, af Metallets Natur og Temperatur i det betragtede Punkt afhængige, Funktion af x, y, z, ξ, η og ζ , som udtrykkes ved højre Side af Ligningen (1), medens ψ efter de i det foregaaende omtalte Forudsætninger vil være en Størrelse, der kun er meget lille i Sammenligning med det første Led.

Ved alle de følgende Beregninger skal vi nu se bort fra saadanne Led, der forholder sig til de betydende Led som ψ til f ; derved faar hele Theorien en meget simpel Karakter, og de søgte Udtryk for Elektricitets- og Energistrømningen bliver lineært afhængige af Størrelsen af de ydre Kræfter, Temperaturvariationerne o. s. v. Disse Resultater, der saaledes direkte udledes udfra Karakteren af det hele Billede, som Elektrontheorien lægger til Grund, svarer fuldstændig til, hvad man finder ved Forsøgene. Man finder f Eks. saaledes den elektriske Strøm, saa nøje som man kan maale, fuldkommen proportional med den elektriske Kraft indenfor de meget vide Grænser, indenfor hvilke Forsøgene er blevne anstillede¹⁾.

Idet vi nu gaar over til de nærmere Beregninger, skal vi betragte to forskellige Tilfælde, nemlig først det simplere Tilfælde, ved hvilket de fri Elektroner under langt den største Del af deres Bevægelse ikke paavirkes af Kræfter fra Metalmolekylernes og de andre Elektroners Side, og ved hvilket hele Vekselvirkningen mellem Elektronerne ind-

¹⁾ Se f. Eks. *E. Lecher*: Sitzungsber. d. Wiener. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl., Bd. 116 Abt. II a, p. 49, 1907.

byrdes og mellem disse og Metalmolekylerne saaledes sker ved adskilte Sammenstød, samt derefter det mere komplicerede Tilfælde, ved hvilket Elektronerne under en stor Del af deres Bevægelse antages at være paavirket af stærke Kræfter fra Metalmolekylernes Side.

§ 2.

Opstilling af Betingelsesligningerne for Elektronernes samlede Bevægelse i det Tilfælde, hvor man antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted.

Det skal her antages, at de lineære Dimensioner af de Omraader, indenfor hvilke Elektronerne og Metalmolekylerne paavirker hinanden med en kendelig Kraft, — Omraader, indenfor hvilke der skal siges at finde Sammenstød Sted, — er meget smaa i Forhold til de Veje, som Elektronerne i Middel gennemløber mellem to Sammenstød.

Foruden den nævnte Antagelse skal vi foreløbig kun forudsætte, at Metalmolekylernes Egenskaber er ens i alle Retninger, og at denne Symmetri skal bestaa paa hvert enkelt Sted, uafhængig af, om der virker ydre Kræfter, eller om Temperaturen ikke overalt i Metallet er den samme. Denne Antagelse er efter det i Indledningen omtalte karakteristisk for den Art af Elektrontheori, vi her beskæftiger os med, i hvilken Theori Metallernes Egenskaber forklares ved de ydre Kræfters Indflydelse paa de fri Elektroner selv og ikke paa Metalmolekylerne.

Bortset fra de omtalte Antagelser skal Metalmolekylerne og Elektronerne kunne tænkes at paavirke hinanden paa ganske vilkaarlig Maade. Metalmolekylerne behøver saaledes ikke alle at være ens eller symmetrisk byggede o. s. v.

Paa Grund af den ovenfor omtalte Antagelse om Forholdet mellem Elektronernes fri Vejlængder og Metalmolekylernes og Elektronernes Dimensioner behøver vi her ved Beregningen af Virkningen af Elektronernes Bevægelse (Elektricitets- og Energistrømningen) kun at betragte Elektronerne, naar de ikke befinder sig i Sammenstød. Af Ligningen (2) Side 12 faar vi i det her omhandlede Tilfælde — idet P er 0 (konstant) overalt, undtagen i Omraader, der er forsvindende

smaa i Forhold til hele Metallets Volumen — for Elektronernes Fordeling i et homogent, af ydre Kræfter upaavirket Metalstykke, der overalt har samme Temperatur,

$$f = K \cdot e^{-\frac{m}{2kT} r^2}. \quad (4)$$

Kaldes Antallet af fri Elektroner i Volumenenheden for N , faar vi følgende Relation imellem N og K (idet man integrerer over alle Hastighedsselementer):

$$N = \int K \cdot e^{-\frac{m}{2kT} r^2} \cdot d\sigma = K \int_0^\infty e^{-\frac{m}{2kT} r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = K \cdot \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (5)$$

Dersom der ikke er Ligevægt — d. v. s. dersom vi ikke længer antager, at der ingen ydre Kræfter virker, samt at Metallets Temperatur og kemiske Sammensætning er ens i alle Punkter — vil Fordelingen efter Ligningen (3) Side 14 være

$$f = K \cdot e^{-\frac{m}{2kT} r^2} + \psi, \quad (6)$$

hvor ψ som omtalt vil være meget lille i Forhold til det første Led.

De Størrelser, det gælder om at bestemme, er den Elektricitetsmængde og den Energimængde, der ved Elektronernes Bevægelse i Tidsenheden føres gennem et Fladeelement i det Indre af Metallet, hvilket Fladeelement vi her for Simpelheds Skyld skal vælge vinkelret paa X -aksen. Disse Størrelser vil kunne bestemmes, dersom man for enhver Værdi af den absolute Hastighed kender den samlede Bevægelsesmængde efter X -aksen, som indehaves af de Elektroner, der har denne absolute Hastighed.

Den Bevægelsesmængde efter X -aksen, der indehaves af de Elektroner, der befinder sig i Volumenelementet dV — der her skal tænkes saa stort, at det indeholder et stort Antal Metalmolekyler —, og hvis Hastighedspunkter befinder sig indenfor en Kugleskal omkring Be gyndelsespunktet med Radier r og $r + dr$, vil vi betegne ved $G_x(r) dr dV$. For at søge en Ligning til Bestemmelse af $G_x(r)$ skal vi nu betragte denne Størrelses Forandring med Hensyn til Tiden.

Den Tilvækst, som $G_x(r) dr dV$ faar i Tiden dt , vil dels skyldes Elektronernes Bevægelse, ved hvilken der vil gaa Elektroner og dermed Bevægelsesmængde ind og ud af det betragtede Volumenelement dV , samt de ydre Kræfters accelererende Virksomhed, ved hvilken der vil gaa Elektroner ind og ud af det betragtede Hastighedsomraade,

dels skyldes de Sammenstød mellem Metalmolekylerne og Elektronerne og mellem disse sidste indbyrdes, der finder Sted indenfor det betragtede Volumenelement.

Ved Beregningen af den Tilvækst i den betragtede Bevægelsesmængde, der skyldes de to førstnævnte Aarsager, vil det — idet vi som tidligere omtalt (Side 14) overalt bortkaster Led, der forholder sig til de betydende Led som ψ til f — være tilladt kun at tage Hensyn til Virkningen paa de Elektroner, der til det givne Tidspunkt hører til en Fordeling, der udtrykkes ved det første Led paa højre Side af Lighedstegnet i Ligning (6), idet der nemlig i Udtrykket for den søgte Tilvækst vil indgaa Størrelser, der afhænger af det omhandlede Led. — (Dersom de ydre Kræfter, der virker paa Elektronerne, stammer fra et magnetisk Felt, vil den Tilvækst i Bevægelsesmængden, som disse Kræfter frembringer paa en Fordeling, der udtrykkes ved det første Led i Formlen (6), dog være 0, og man maa derfor ved Undersøgelsen over Indflydelsen af et magnetisk Felt (*Hall-Effekt*) tage Hensyn til Led, der stammer fra ψ . Vi skal imidlertid i det følgende foreløbig kun beskæftige os med ydre elektriske Kræfter (hvilke Kræfter i Omegnen af det betragtede Punkt skal antages at have et Potential) og skal senere i Kapitel IV omtale Indflydelsen af magnetiske Kræfter.) — Den Tilvækst i Bevægelsesmængden, der skyldes Sammenstødene, vil til Gengæld kun afhænge af ψ , det vil sige af Afgivelserne fra den normale Fordeling; at denne Tilvækst kan blive af samme Størrelsesorden som den først omtalte Tilvækst, skyldes den store Virkning af Kræfterne mellem Elektronerne og Metalmolekylerne (de overordentlig hyppige Sammenstød) i Forhold til Virkningen af de ydre Kræfter.

Ved Beregningen af den Tilvækst i Bevægelsesmængden, der skyldes de forskellige Aarsagers Indvirkning paa de Elektroner, der paa det betragtede Tidspunkt hører til en Fordeling, der udtrykkes ved

$$f_0 = K \cdot e^{-\frac{m}{2kT}v^2},$$

skal vi nu tænke os denne Fordeling delt i to, $f_0 = f_1 + f_2$, af hvilke vi skal sætte

$$f_1 = K_0 \cdot e^{-\frac{1}{kT_0} \left(\frac{m}{2} v^2 + e\varphi \right)}, \quad (7)$$

hvor K_0 og T_0 betegner Værdierne af K og T i et Punkt (x_0, y_0, z_0) , der tænkes beliggende indenfor det betragtede Volumenelement dV , og hvor e betegner en Elektrons Ladning, samt φ de ydre Kræfters

Potential. Idet nu φ tænkes valgt saaledes, at det er 0 i Punktet (x_0, y_0, z_0) , vil Fordelingen f_2 i et Punkt $(x, y, z) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1)$, der ligger meget nær ved Punktet (x_0, y_0, z_0) , med Bortkastning af smaa Størrelser af samme Orden som Produkter af x_1, y_1 og z_1 , kunne skrives

$$f_2 = K \cdot e^{-\frac{m}{2kT} r^2} \cdot \left[x_1 \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{mr^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + y_1 \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots \right) + z_1 (\dots) \right] \quad (8)$$

Man beviser nu i den statistiske Mekanik, at en Fordeling, der udtrykkes ved f_1 (sammenlign Ligning (2) Side 12), vil være stationær, dersom φ er uafhængig af Tiden. Dette vil her betyde, at den Forandring i Tiden dt i Elektronernes Fordeling — og dermed ogsaa i Bevægelsesmængdens —, der skyldes Elektronernes Bevægelse, for de Elektroners Vedkommende, der i det betragtede Øjeblik hører til Fordelingen f_1 , akkurat vil ophæves af de ydre Kræfters Virksomhed; og vi skal derfor kun undersøge den Tilvækst i Bevægelsesmængden i det betragtede Volumenelement og Hastighedsomraade, der skyldes Fordelingen f_2 ¹⁾. Ved Beregningen heraf kan vi imidlertid se bort fra de ydre Kræfters Virksomhed, da saavel f_2 som dens Variationer efter Hastighedskoordinaterne ξ, η og ζ vil være uendelig smaa indenfor det betragtede Volumenelement dV ; den Tilvækst i Bevægelsesmængden, der skyldes Elektronernes Bevægelse, vil derimod være af endelig Størrelse, idet f_2 's Variationer efter Koordinaterne x, y og z er endelige. Da Fordelingen f_2 i ethvert enkelt Punkt (x, y, z) er uafhængig af Elektronernes Bevægelsesretning (kun afhængig af r), vil den Be-

¹⁾ *P. Debye* (loc. cit., p. 476), der har forsøgt at beregne Metallernes Elektricitets- og Varmeledningsevne ud fra de samme fysiske Forudsætninger som *Lorentz*, men ved Hjælp af en noget ændret Behandlingsmaade, gaar ved sine Beregninger (loc. cit., p. 477) ud fra, at Elektronernes Fordeling, dersom der virker ydre Kræfter, kun vil afvige meget lidt fra den stationære Fordeling (7) i Modstrid med, at Elektrontheorien, saaledes som vi har set, jo netop maa gaa ud fra, at Fordelingen kun afviger meget lidt fra den Fordeling (4), der vil være til Stede i et af ydre Kræfter upaavirket Metalstykke. Ved Beregningen af Elektronernes Bevægelse mellem Metal-molekylerne (loc. cit., p. 478--480) tager *Debye* endvidere ikke Hensyn til de ydre Kræfters Virkning — dersom der toges Hensyn dertil, vilde den af ham antagne Fordeling, som ovenfor omtalt, ikke give Anledning til nogen samlet Bevægelse af Elektronerne —. Af disse Grunde finder *Debye* (se loc. cit., p. 481, Lign. (75)), hvad han ikke selv har bemærket, en Værdi for Elektricitetsledningsevnen, der vel i Størrelse er lig den af *Lorentz* fundne, men som har modsat (urigtigt) Fortegn, d. v. s. at Elektriciteten efter *Debye's* Beregninger vil bevæge sig i modsat Retning af den elektriske Kraft.

vægelsesmængde, der ved Elektronernes Bevægelse føres gennem et Fladeelement, have en Retning vinkelret paa Elementet. Den Bevægelsesmængde efter X -aksen, der med Elektronerne i det betragtede Hastighedsomraade føres gennem et Fladeelement $dS = dydz$ vinkelret paa X -aksen i Tiden dt , vil nu være

$$dydzdt \int m \xi \xi f_2 d\sigma = \frac{4\pi}{3} mr^4 f_2 dr dy dz dt,$$

hvor Integrationen er udført over et Hastighedsomraade, der begrænses af to Kugleflader omkring Begyndelsespunktet med Radierne r og $r + dr$. Den søgte Tilvækst i Bevægelsesmængden i Volumelementet $dV = dx dy dz$ bliver derfor

$$- dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4\pi}{3} mr^4 f_2 dr dy dz dt \right) = - \frac{4\pi}{3} mr^4 \frac{\partial f_2}{\partial x} dr dV dt.$$

Idet vi nu benytter Ligningen (8) og bortkaster uendelig smaa Størrelser af højere Orden med Hensyn til x_1 , y_1 og z_1 , faar vi derfor for den Tilvækst i Bevægelsesmængden $G_x(r) dr dV$, der skyldes Elektronernes Bevægelse og de ydre Kræfters Virksomhed i Tiden dt ¹⁾,

$$- \frac{4\pi}{3} mK \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{mr^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr dV dt. \quad (9)$$

Vi skal nu undersøge den Tilvækst i den betragtede Bevægelsesmængde, der skyldes Sammenstødene mellem Elektronerne og Metal-molekylerne og mellem Elektronerne indbyrdes. Paa Grund af den Antagelse, vi har gjort Side 15 om Forholdet mellem de af Elektro-

¹⁾ *H. A. Wilson* (loc. cit., p. 836) gaar ved sine i det foregaaende (Side 4, Note 2) omtalte Beregninger ud fra, at den Tilvækst i Bevægelsesmængden $G_x(r) dr dV$, der skyldes de ydre Kræfter, vil være lig $-e \frac{\partial \varphi}{\partial x} dN dt$, hvor dN er Antallet af Elektroner, der befinder sig i Volumelementet dV , og hvis absolute Hastigheder ligger mellem r og $r + dr$. Idet $dN = 4\pi r^2 K e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr dV$, bliver det af *Wilson* benyttede Udtryk for Tilvæksten i Bevægelsesmængden $G_x(r) dr dV$ lig $-4\pi K e \frac{\partial \varphi}{\partial x} r^2 e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr dV dt$. Dette Udtryk er imidlertid, som man ser ved Sammenligning med det ovenstaaende Udtryk (9) ikke rigtigt. Fejlen hidrører fra, at den søgte Tilvækst sættes lig Tilvæksten i Bevægelsesmængde i Tiden dt af de Elektroner, der i det betragtede Øjeblik hører til den omhandlede Gruppe, uden at der tages Hensyn til, at der ved de ydre Kræfters Virksomhed i Tiden dt vil gaa Elektroner ud og ind af denne Gruppe.

nerne mellem to Sammenstød i Middel gennemløbne fri Vej længder og Elektronernes og Metalmolekylernes Dimensioner, vil i det her betragtede Tilfælde Sandsynligheden for, at en Elektron indenfor en vis lille Tid dt — der skal antages at være stor i Forhold til saadanne Tider, der medgaar til de enkelte Sammenstød, men lille i Forhold til de Tider, som Elektronerne i Middel bruger om at tilbagelægge deres fri Vej længder mellem to Sammenstød — paa en eller anden bestemt Maade vil støde sammen med et Metalmolekyle eller en anden Elektron, kun være afhængig af Elektronens Hastighed, d. v. s. uafhængig af den Bane, Elektronen har beskrevet siden forrige Sammenstød.

Vi skal her først betragte Virkningen af Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne. Da Molekylernes Egenskaber i Middel er ens i alle Retninger, vil Fordelingen af Hastighedspunkterne for Elektroner, der før Sammenstødet har en bestemt Hastighed og Retning, efter et Sammenstød i Middel være symmetrisk med Hensyn til Elektronernes Retning før Stødet. Den Bevægelsesmængde, der i Tiden dt ved Sammenstød i Volumenelementet dV af Elektroner, hvis Hastighedspunkter før Stødet befinder sig i et lille Element $d\sigma'$ omkring Punktet (ξ', η', ζ') , bringes ind i et Hastighedsomraade, der begrænses af to Kugleflader omkring Begyndelsespunktet med Radierne r og $r + dr$, vil derfor have samme Retning som Radiusvektor til Punktet (ξ', η', ζ') , og i Størrelse (idet man sætter $\sqrt{(\xi')^2 + (\eta')^2 + (\zeta')^2} = \rho$, og ved $Q(\rho, r)$ betegner en Funktion af ρ og r) kunne udtrykkes ved

$$m\rho \cdot f(\xi', \eta', \zeta') d\sigma' \cdot Q(\rho, r) dr dV dt.$$

Komposanten efter X -aksen af denne Bevægelsesmængde vil derfor være

$$m\xi' \cdot f(\xi', \eta', \zeta') d\sigma' \cdot Q(\rho, r) dr dV dt,$$

og den hele Bevægelsesmængde efter X -aksen, der bringes ind i det betragtede Hastighedsomraade ved Sammenstød af Elektroner, der før Stødet har Hastighedspunkter i et Omraade, der begrænses af to Kugleflader med Radier ρ og $\rho + d\rho$, vil derfor være

$$G_x(\rho) d\rho \cdot Q(\rho, r) dr dV dt.$$

Den samlede Bevægelsesmængde efter X -aksen, der ved Sammenstødene bringes ind i Hastighedsomraadet mellem Kuglefladerne med Radier r og $r + dr$, er derfor

$$dr dV dt \cdot \int_0^\infty G_x(\rho) Q(\rho, r) d\rho.$$

Paa ganske tilsvarende Maade slutter man, at den Bevægelsesmængde efter X -aksen, der ved Sammenstødene i Volumenelementet dV føres ud af Hastighedsområdet mellem Kuglefladerne med Radier r og $r + dr$, vil kunne udtrykkes ved

$$dr dV dt \cdot G_x(r) F(r),$$

hvor $F(r)$ betegner en Funktion af r alene. Den Tilvækst i Bevægelsesmængden $G_x(r) dr dV$, der skyldes Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne i Tiden dt , bliver altsaa ¹⁾

$$-\left[(G_x(r) F(r) - \int_0^\infty G_x(\rho) Q(\rho, r) d\rho) \right] dr dV dt. \quad (10)$$

Uden nærmere Antagelser om Elektronernes og Metalmolekylernes Art kan man ikke fuldstændig bestemme Funktionerne $F(r)$ og $Q(\rho, r)$. Vi kan imidlertid vise, at $Q(\rho, r)$ altid maa opfylde en vis Betingelse, dersom Vekselvirkningen mellem Metalmolekylerne og de fri Elektroner, som her antaget, foregaar efter de almindelige mekaniske Love.

Det Antal Elektroner, der i Middel i Tiden dt ved Sammenstød i Volumenelementet dV mellem saadanne Elektroner, hvis Hastigheds-

¹⁾ *J. H. Jeans* (Phil. Mag., vol. 17, p. 775, 1909) gaar i sit, i det foregaaende (Side 4) omtalte, Forsøg paa at give en almindelig Theori for de med Metallernes Absorption og Emission af Varmestraaler forbundne Fænomener ved Opstillingen af den Betingelsesligning, der lægges til Grund for Beregningerne, ud fra den Antagelse, at det samlede Tab af Bevægelsesmængde i en bestemt Retning, som Elektronerne lider i Tidsenheden ved Sammenstødene med Metalmolekylerne, kan sættes lig Elektronernes samlede Bevægelsesmængde i den omhandlede Retning, multipliceret med en Konstant, der kun er afhængig af Metallets Natur og Temperatur. Denne Antagelse er imidlertid i Almindelighed ikke rigtig, (smlg. *H. A. Wilson*: loc. cit., p. 836). Det omhandlede Tab af Bevægelsesmængde efter X -aksen udtrykkes nemlig med vore Betegnelser efter Udtrykket (10) ved

$$\int_0^\infty \left[G_x(r) F(r) - \int_0^\infty G(q) Q(q, r) dq \right] dr,$$

hvilket Udtryk — idet Elektronernes Bevægelsesmængde ved de forskellige Problemer ikke fordeler sig paa samme Maade mellem Elektronerne med de forskellige absolute Hastigheder — i Almindelighed ikke vil være proportional med den samlede Bevægelsesmængde efter X -aksen

$$\int_0^\infty G_x(r) dr.$$

Jeans's Beregningsmaade giver derfor kun rigtige Resultater i enkelte specielle Tilfælde, saaledes f. Eks. naar $F(r) = \text{Konstant}$, og $Q(q, r) = 0$ (se Side 33).

punkter før Sammenstødet befinder sig i et lille Volumenelement $d\sigma'$ omkring Punktet (ξ', η', ζ') , og Metalmolekylerne bringes ind i et lille Hastighedsomraade $d\sigma$ omkring Punktet (ξ, η, ζ) , vil vi betegne ved

$$\lambda(\xi', \eta', \zeta', \xi, \eta, \zeta) \cdot f(\xi', \eta', \zeta') d\sigma d\sigma' dV dt. \quad (11)$$

Funktionen λ , der er uafhængig af Elektronernes Fordeling f , vil, da Metalmolekylernes Egenskaber antages i Middel at være ens i alle Retninger, kun afhænge af den relative Stilling af Punkterne (ξ', η', ζ') , (ξ, η, ζ) og Begyndelsespunktet. $\lambda(\xi', \eta', \zeta', \xi, \eta, \zeta)$ kan derfor skrives $\chi(\rho, r, \vartheta)$, hvor ρ og r er Radivektorerne henholdsvis til Punktet (ξ', η', ζ') og til Punktet (ξ, η, ζ) , og hvor ϑ er Vinklen imellem disse Radivektorer. Vi skal nu vise, at Funktionen $\chi(\rho, r, \vartheta)$ maa opfylde en vis Betingelse, hvilket kan indses ved at betragte det Tilfælde, hvor der ingen ydre Kræfter virker, og Temperaturen overalt er den samme, og hvor derfor Elektronernes stationære Fordeling vil svare til Formlen (4) Side 16.

Tænker vi os en bestemt Fordeling af de enkelte Elektroner og Metalmolekyler Steds- og Hastighedskoordinater — (idet de enkelte Metalmolekyler ikke antages at være simple Partikler, hvis Egenskaber er ens i alle Retninger, vil der i Almindelighed behøves mere end 6 Koordinater til fuldstændig at karakterisere et Molekyles Tilstand) —, og betragter vi dernæst en Fordeling med de samme Stedskoordinater og med Hastighedskoordinaterne lige store med modsat Tegn, vil, idet de enkelte Sammenstød, da de antages at foregaa efter de almindelige mekaniske Love, vil kunne gaa for sig i modsat Retning, hele Bevægelsen i Metallet ved den sidste Fordeling være akkurat modsat den ved den første Fordeling (d. v. s. akkurat de samme Tilstande vil følge efter hinanden med samme Mellemrum, blot i omvendt Rækkefølge). Idet nu saadanne to »modsatte« Fordelinger af de enkelte Elektroner og Metalmolekyler Steds- og Hastighedskoordinater i et homogent Metalstykke, der er upaavirket af ydre Kræfter, og hvis Temperatur overalt er den samme, vil være lige sandsynlige¹⁾, vil i det betragtede Tilfælde det Antal Elektroner, der angives ved Udtrykket (11), i Middel være lig det Antal Elektroner, hvis Hastighedspunkter i samme Tid

¹⁾ Dette følger umiddelbart ud fra den Maade, hvorpaa en Fordelings Sandsynlighed defineres i den statistiske Mekanik (jvnfr. f. Eks. *Jeans*: Dynamical Theory of Gases, Cambridge 1904, Kap. 3—5). (Uden en saadan gennemført rationel Behandling af Begrebet en Fordelings Sandsynlighed, som den, der findes paa det citerede Sted, kunde en Betragtning, som den i Texten staaende, paa Forhaand forekomme usikker; se f. Eks. *Boltzmann*: Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig 1896, I, p. 42—45).

ved Sammenstødene bringes fra et Element $d\sigma_1$, symmetrisk med $d\sigma$ med Hensyn til Begyndelsespunktet, til et Element $d\sigma'_1$, symmetrisk med $d\sigma'$. Dette Antal er med Benyttelse af de ovenfor indførte Betegnelser lig

$$\chi(r, \rho, \vartheta) \cdot f(-\xi, -\eta, -\zeta) d\sigma'_1 d\sigma_1 dV dt,$$

og man faar derfor ved Hjælp af Ligningen (3)

$$\chi(\rho, r, \vartheta) \cdot e^{-\frac{m}{2kT}\rho^2} = \chi(r, \rho, \vartheta) \cdot e^{-\frac{m}{2kT}r^2},$$

hvoraf følger

$$\chi(\rho, r, \vartheta) = e^{-\frac{m}{2kT}r^2} \cdot s(\rho, r, \vartheta), \quad (12)$$

hvor $s(\rho, r, \vartheta)$ er en symmetrisk Funktion af ρ og r .

Den Bevægelsesmængde, der i Tiden dt , ved Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne i Volumenelementet dV , af Elektroner, hvis Hastighedspunkter før Stødet befinder sig i et lille Element $d\sigma'$ omkring Punktet (ξ', η', ζ') , bringes ind i et Hastighedsomraade, der begrænses af to Kugleflader omkring Begyndelsespunktet med Radierne r og $r + dr$, — (og hvis Retning, efter hvad der tidligere er sagt, falder sammen med Retningen af Radiusvektoren til (ξ', η', ζ') , medens dens Størrelse, med de i det foregaaende (Side 20) indførte Betegnelser, udtrykkes ved $m\rho \cdot f(\xi', \eta', \zeta') d\sigma' \cdot Q(\rho, r) dr dV dt$ — vil nu være

$$dV dt \cdot f(\xi', \eta', \zeta') d\sigma' \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} m r \cos \vartheta \cdot \chi(\rho, r, \vartheta) \cdot r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi =$$

$$dV dt \cdot f(\xi', \eta', \zeta') d\sigma' \cdot 2\pi m r^3 e^{-\frac{m}{2kT}r^2} dr \cdot \int_0^\pi s(\rho, r, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

Man faar altsaa

$$Q(\rho, r) = r^4 e^{-\frac{m}{2kT}r^2} \cdot S(\rho, r), \quad (13)$$

hvor

$$S(\rho, r) = \frac{2\pi}{r\rho} \int_0^\pi s(\rho, r, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

er en symmetrisk Funktion af ρ og r .

Vi skal nu gaa over til at betragte Virkningen af Sammenstødene mellem Elektronerne indbyrdes. Idet Hastighederne af de Elektroner, som den enkelte Elektron støder sammen med, ikke er ens fordelt i alle Retninger, vil her, i Modsætning til hvad der fandt Sted i det ovenfor betragtede Tilfælde, Elektronens Hastighed efter Stødet i Middel ikke være fordelt symmetrisk med Hensyn til Hastigheden før Stødet. Er imidlertid Afvigelserne fra den normale Fordeling, saaledes som det her antages at være Tilfældet, meget ringe, kan man dog, som vi skal se, beregne Virkningen af Sammenstødene paa ganske tilsvarende Maade som ovenfor.

Vi skal tænke os Elektronerne til ethvert Tidspunkt paa en eller anden Maade delt i to Grupper, hvoraf den ene A skal svare til den normale Fordeling $f = K \cdot e^{-\frac{m}{2kT} v^2}$, medens den anden B , der vil være meget lille i Forhold til A , svarer til en Fordeling $f = \psi$ (se Ligningen (6) Side 16). Ved Beregningen af Virkningerne af Sammenstødene skal vi nu betragte dels Sammenstød imellem Elektroner af samme Gruppe dels Sammenstød mellem Elektroner af de to forskellige Grupper. Vi har nu:

1) Virkningen af de indbyrdes Sammenstød mellem Elektronerne i Gruppen A vil, da Hastighedsfordelingen er den normale, ikke have nogen Indflydelse paa denne Fordeling til Følge.

2) Virkningen af Sammenstødene af Elektronerne i Gruppen B med Elektronerne i Gruppen A vil paa Grund af Gruppen A 's Symmetri kunne beregnes paa ganske tilsvarende Maade som den, vi benyttede ved Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne. Opfattes nemlig Elektronerne i Gruppen B ved Sammenstødene som de stødende Elektroner, vil Hastighedspunkterne efter Stødet, af saavel den stødte som den stødende Elektron, i Middel være symmetrisk fordelt med Hensyn til den stødende Elektrons Hastighedsretning før Stødet. De betragtede Sammenstød giver derfor en Tilvækst til Bevægelsesmængden $G_x(r) dr dV$, der kan skrives paa ganske samme Form som Udtrykket (10) Side 21.

3) Virkningen af de indbyrdes Sammenstød mellem Elektronerne i Gruppen B vil være forsvindende paa Grund af disse Sammenstøds forholdsvis overordentlig ringe Antal.

Vi kan nu endvidere vise, hvorledes Funktionen $Q(\rho, r)$ ogsaa i det her omhandlede Tilfælde vil opfylde den Betingelse, som angives ved Ligning (13). Af det ovenstaaende fremgaar det, at Virkningen af de indbyrdes Sammenstød mellem de fri Elektroner vil være den samme som Virk-

ningen af Sammenstødene mellem disse Elektroner — (som vi her skal opfatte som stødende Partikler) — og en Samling Elektroner, hvis Fordeling udtrykkes ved $f_0 = K \cdot e^{-\frac{m}{2kT} v^2}$.

Det samlede Antal Elektroner, der i Tiden dt i Volumenelementet dV ved saadanne Sammenstød, ved hvilke den stødende Elektron før Stødet befinder sig i et lille Hastighedsomraade $d\sigma'$, bringes ind i et lille Hastighedsomraade $d\sigma$, skal vi her i Lighed med i det forrige Tilfælde betegne ved

$$\chi_1(\rho, r, \vartheta) \cdot f(\xi', \eta', \zeta') d\sigma' d\sigma dV dt.$$

Ved Beregningen af $\chi_1(\rho, r, \vartheta)$, der kun er afhængig af Fordelingen f_0 , maa vi her, foruden til saadanne Sammenstød, ved hvilke den stødende Elektron bringes fra Hastighedsomraadet $d\sigma'$ til Hastighedsomraadet $d\sigma$, ogsaa tage Hensyn til saadanne Sammenstød, ved hvilke den stødte Elektron bringes ind i Hastighedsomraadet $d\sigma$, samt endelig til saadanne, ved hvilke den stødte Elektron før Sammenstødet befinder sig i dette lille Hastighedsomraade og derfor ved Stødet bringes ud deraf. Den første Art af Sammenstød svarer ganske til den, der blev betragtet ovenfor ved Beregningen af Virkningen af Sammenstødene mellem de fri Elektroner og Metalmolekylerne; disse Sammenstød vil derfor give et Bidrag til $\chi_1(\rho, r, \vartheta)$ af samme Form som Udtrykket paa højre Side af Ligningen (12) Side 23. Samme Resultat vil man ogsaa faa ved den anden Art af Sammenstød; ogsaa ved saadanne Sammenstød vil nemlig de »modsatte« Sammenstød give tilsvarende Bidrag til $\chi_1(r, \rho, \vartheta)$, som de »direkte« Sammenstød til $\chi_1(\rho, r, \vartheta)$. Dette sidste vil vel ikke være opfyldt ved den tredje Art af Sammenstød; i dette Tilfælde indser man imidlertid umiddelbart, at det Bidrag, som de omhandlede Sammenstød vil give til Størrelsen $\chi_1(\rho, r, \vartheta)$, vil forholde sig til det Bidrag, som den samme Art af Sammenstød vil give til $\chi_1(r, \rho, \vartheta)$, som

$$f_0(\xi, \eta, \zeta) : f_0(\xi', \eta', \zeta') = e^{-\frac{m}{2kT} r^2} : e^{-\frac{m}{2kT} \rho^2}.$$

Vi faar derfor, at Størrelsen $\chi_1(\rho, r, \vartheta)$ kan skrives paa samme Form som den, der udtrykkes ved højre Side af Ligningen (12) Side 23, og at derfor ogsaa i Tilfælde af Sammenstød mellem de fri Elektroner indbyrdes $Q(\rho, r)$ vil have den Form, der udtrykkes ved Ligning (13).

Betegner vi nu den Tilvækst, som $G_x(r)$ modtager i Tiden dt , med $\frac{dG_x(r)}{dt} dt$, faar vi ved Hjælp af Udtrykkene (9) og (10)

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{dG_x(r)}{dt} \right] = & -\frac{4\pi}{3} mK \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{mr^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) r^4 e^{-\frac{m}{2kT} r^2} \\ & - G_x(r) F(r) + \int_0^\infty G_x(\rho) Q(\rho, r) d\rho, \end{aligned} \right\} (14)$$

hvor Parenthesen om Leddet paa venstre Side af Lighedstegnet skal betyde, at Differentialkvotienten her er at opfatte som en Middelværdi for denne Størrelse under de forhaandenværende Omstændigheder — d. v. s. for givne Værdier for de ydre Kræfter, Temperatures Variation o. s. v., samt for Størrelserne $G_x(\rho)$ —.

Vi skal her straks omtale Betydningen af Leddet paa venstre Side af Ligning (14) ved de forskellige Anvendelser, vi i det følgende skal gøre af denne Ligning.

Ved de fleste Anvendelser søger man blot en Middelværdi af $G_x(r)$ under givne ydre Omstændigheder, d. v. s. for givne Værdier af de ydre Kræfter, Temperatures Variation o. s. v. Ved saadanne Anvendelser vil, idet Størrelserne $F(r)$ og $Q(\rho, r)$ er meget store (dette er en Følge af den i det foregaaende omtalte Antagelse om, at de enkelte Elektroners oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning meget hurtigt vil mistes ved Sammenstødene), Leddet paa venstre Side være meget ringe i Sammenligning med de sidste Led paa højre Side, undtagen i saadanne særlige Tilfælde, hvor $G_x(r)$ forandrer sig overordentlig hurtigt med Tiden, d. v. s. saa hurtigt, at den har forandret sig mærkeligt indenfor de meget korte Tidsrum, i hvilke Elektronerne mister Størstedelen af deres oprindelige Bevægelsesmængde. Dette sidste vil finde Sted, dersom det første Led paa højre Side forandrer sig meget hurtigt med Tiden; af de i dette Led indgaaende Størrelser vil kun de ydre Kræfter kunne forandre sig meget hurtigt, hvilket f. Eks. skal antages at være Tilfældet ved Beregningen af Metallernes Absorption for Varmestraaler. — (Paa Grund af den Maade, hvorpaa Ligning (13) er udledet, vil den dog, som vi senere (Kap. III) nærmere skal omtale, kun kunne benyttes til Beregning af Absorptionen for Varmestraaler med saa store Svingningstider, at de ydre Kræfter kun vil forandre sig meget lidt indenfor Tider af samme Størrelsesorden som de Tider, der medgaar til de enkelte Sammenstød; Tider, der her er antagne at være meget smaa i Forhold til de Tider, indenfor hvilke de enkelte Elektroner i Middel mister en betydelig Del af deres oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning.) — I alle andre Tilfælde af den her omhandlede

Art vil man derimod kunne se bort fra Leddet paa venstre Side af Ligning (14) og altsaa sætte denne Side af Ligningen lig 0. Saadanne Problemer som de sidst omtalte, ved hvilke Tilstanden vel antages at variere med Tiden, men dog saa langsomt, at de enkelte Tilstande kan behandles som Ligevægtstilstande, vil vi, med en almindelig anvendt Betegnelse, i det følgende kalde »quasi-stationære«.

Foruden til saadanne Anvendelser, hvor man søger en Middelværdi af $G_x(r)$ for givne ydre Omstændigheder, skal Ligningen (14) ogsaa benyttes til Undersøgelse af de smaa, meget hurtige Variationer i $G_x(r)$, der skyldes de enkelte Elektroners uregelmæssige Bevægelse i Metallet, og som f. Eks. antages at give Anledning til Metallernes Udsendelse af Varmestraaler. Ved saadanne Anvendelser vil Leddet paa venstre Side spille en Hovedrolle, idet det angiver Middelværdien for $\frac{dG_x(r)}{dt}$ for en given Fordeling af Elektronernes samlede Bevægelsesmængde blandt Elektronerne med de forskellige absolute Hastigheder.

§ 3.

Specielle Eksempler paa Beregningernes Gennemførelse i Tilfælde, hvor man antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted.

Ligningen (14) er den fuldt almindelige Ligning til Bestemmelse af Elektronernes samlede Bevægelsesmængde i det Tilfælde, at der finder adskilte Sammenstød Sted. Den tillader, sammenholdt med Ligningen (13), som vi skal se, allerede udfra sin Form at undersøge Sammenhængen mellem visse af Metallernes Egenskaber. For nærmere at bestemme Størrelserne $F(r)$ og $Q(\rho, r)$, hvad der er nødvendigt for at naa kvantitative Resultater, maa man imidlertid gøre specielle Antagelser om Virkningen af Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne og mellem Elektronerne indbyrdes. Før vi gaar videre, skal vi derfor her omtale nogle Eksempler paa Indførelsen af saadanne Antagelser.

Efter *H. A. Lorentz's Theori*¹⁾ beregnes, som omtalt i det foregaaende (Side 3), Virkningen af Sammenstødene udfra den Antagelse,

¹⁾ *Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 439, 1905.

at Elektronerne og Metalmolekylerne paavirker hinanden som absolut haarde elastiske Kugler. Saavel Elektronernes Dimensioner som deres Masser tænkes endvidere at være saa smaa i Forhold til Metalmolekylerne, at man dels kan se bort fra Sammenstødene mellem de fri Elektroner indbyrdes i Forhold til Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne dels kan betragte Metalmolekylerne som ubevægelige i Forhold til Elektronerne. Som man let kan overbevise sig om, vil Virkningen af et Sammenstød under de omtalte Omstændigheder være den, at Elektronen forlader Metalmolekylet med uforandret absolut Hastighed, medens dens Bevægelsesretning efter Stødet vil være fuldkommen uafhængig af Retningen før Stødet, d. v. s. jævnt fordelt i alle Rumvinkler¹⁾; Elektronen vil derfor ved et Sammenstød i Middel miste hele sin oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning.

Idet Elektronernes absolute Hastighed ikke forandres ved Sammenstødene, vil $Q(r, \rho)$ i det omhandlede Tilfælde være lig 0, medens $F(r)$ kan beregnes paa følgende Maade. Da Metalmolekylerne er antagne at være ubevægelige, vil de fri Vejlængder, som Elektronerne gennemløber mellem to paa hinanden følgende Sammenstød, være uafhængige af Elektronernes Hastighed. Kaldes Middelvejlængden nu l , bliver det Antal Sammenstød, som de Elektroner, hvis absolute Hastighed ligger mellem r og $r + dr$, lider i Tiden dt i Volumen-elementet dV , — (idet Antallet af de betragtede Elektroner i Volumen-elementet dV betegnes ved $N(r)drdV$) — lig

$$\frac{r dt}{l} \cdot N(r) dr dV.$$

Den Bevægelsesmængde efter X -aksen, som en Elektron med absolut Hastighed r i Middel besidder — og efter det i det foregaaende (Side 20) omtalte altsaa ogsaa umiddelbart før et Sammenstød —, er nu $\frac{G_x(r)}{N(r)}$, og den samlede Bevægelsesmængde efter X -aksen, der mistes ved de omtalte Sammenstød, er derfor

$$\frac{r}{l} \cdot G_x(r) dr dV dt.$$

Efter Udtrykket (10) Side 21 faar man altsaa

$$F(r) = \frac{r}{l}. \quad (15)$$

*P. Gruner*²⁾ har gjort Forsøg paa at udvide *Lorentz's* Theori ved i Beregningerne at indføre, hvad han kalder Metalmolekylerne »Ioni-

¹⁾ Se *Maxwell*: Scientific Papers, vol. I, p. 379.

²⁾ *Gruner*: Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., Bd. 10, p. 509, 1908.

sation« og »Elektronbinding«. *Gruner* antager saaledes, at de fri Elektroner under særlige Omstændigheder kan bindes midlertidigt af Metalmolekylerne og først igen frigøres ved Stød af andre fri Elektroner. I den omhandlede Theori skelnes derfor mellem 2 Slags Metalmolekyler: de, der ikke har bundet Elektroner (positive Molekyler), og de, der har bundet saadanne (neutrale Molekyler). I Tilknytning hertil gøres forskellige Antagelser om Virkningerne af Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne; det antages saaledes, at Elektroner, der støder sammen med positive Molekyler, bindes af disse, dersom deres absolute Hastighed før Stødet er mindre end en vis bestemt Hastighed G , medens det omvendt antages, at der ved Sammenstød mellem Elektroner med Hastighed større end G og neutrale Molekyler frigøres en Elektron. Endvidere gøres forskellige yderligere Antagelser om Hastigheden efter Stødet saavel af de stødende som af de frigjorte Elektroner. Disse sidste specielle Antagelser er imidlertid af en saadan Art, at de giver Anledning til alvorlige Indvendinger. I Erkendelsen heraf og for dog at bevare det væsentlige i Theorien har *Gruner*¹⁾ senere forandret denne saaledes, at der ikke længer benyttes særlige Antagelser om, hvorledes Ionisationen og Elektronbindingen foregaar, men saaledes, at det eneste Hensyn, der i Beregningerne tages til, at en saadan finder Sted, sker derigennem, at man antager den samtidige Tilstedeværelse af saavel positive som neutrale Molekyler. *Gruner* antager nu, at alle Elektronerne ved Sammenstød med positive Molekyler bliver kastede tilbage som fra elastiske Kugler, medens han ved Sammenstød mellem Elektronerne og neutrale Molekyler — hvilke sidste ikke tænkes at virke saa stærkt paa Elektronerne som de positive — antager, at kun de Elektroner, hvis Hastighed er mindre end G , kastes tilbage som fra elastiske Kugler, medens derimod de Elektroner, hvis Hastighed er større, slet ikke paavirkes.

Som man umiddelbart indser, bliver Forskellen mellem *Lorentz's* og *Gruner's* Theorier kun den, at Middelvelglængden i den sidstnævnte Theori ikke er den samme for alle Elektroner, men har en Værdi, l_1 , for Elektroner, hvis Hastighed er mindre end G , en anden, l_2 , for Elektroner, hvis Hastighed er større end G ; ($l_2 > l_1$). Vi faar derfor i dette Tilfælde

$$F(r) = \frac{r}{l_1} \text{ for } r < G \text{ og } F(r) = \frac{r}{l_2} \text{ for } r > G. \quad (16)$$

Det maa dog bemærkes, at *Gruner's* Antagelse kun vil medføre nogen væsentlig Forandring i *Lorentz's* Beregninger, dersom man yder-

¹⁾ *Gruner*: Phys. Zeitschr., Bd. 10, p. 48, 1909.

ligere antager, at Størrelsen G ikke er meget forskellig fra Elektronernes Middelhastighed ved den paagældende Temperatur.

Gruner's Theori synes, navnlig i den sidste Fremstilling, at maatte betragtes som et Forsøg paa, ved Hjælp af en første grov Tilnærmelse, at undersøge, hvilken Indflydelse det vil have paa Theoriens Resultater, dersom Sammenstødernes Karakter antages for afhængig af Elektronernes Hastighed. For nærmere at kunne undersøge dette Spørgsmaal, skal vi nu gaa over til at betragte Molekylerne som Kraftcentrer, der udøver tiltrækkende eller frastødende Kræfter paa Elektronerne.

Vi skal her tænke os Molekylerne som faste Kraftcentrer, der frastøder eller tiltrækker Elektronerne med Kræfter, der forholder sig omvendt som n^{te} Potens af Afstanden. De Omraader, indenfor hvilke Molekylerne udøver kendelige Virkninger paa Elektronernes Bevægelser, skal vedblivende antages for smaa i Sammenligning med Molekylernes indbyrdes Afstande. Idet imidlertid de omtalte Omraader i dette Tilfælde ikke er skarpt begrænsede, kan man ikke her paa samme Maade som i de forrige Tilfælde tale om en Middelvejrlængde. Vi maa her anvende en Behandlingsmaade, der svarer til den af *Maxwell*¹⁾ benyttede, og som af ham er blevet fuldstændig gennemført overfor Problemerne i den kinetiske Lufttheori i det Tilfælde, hvor Kræfterne forholder sig omvendt som den 5^{te} Potens af Afstanden, hvilket Tilfælde som bekendt frembyder særlig simple Forhold. Ved det Problem, vi her skal behandle, hvor vi betragter Metalmolekylerne som ubevægelige og ser bort fra Virkningerne af Sammenstødene mellem Elektronerne indbyrdes, vil hele Behandlingen imidlertid være langt simplere end ved det af *Maxwell* behandlede Problem, og det vil her være ligesaa let at beregne Resultaterne for en vilkaarlig Potens (der dog maa antages at være større end 2) af Afstanden som for den 5^{te} .

Idet Elektronernes absolute Hastighed ikke forandres ved et »Sammenstød« af den her omhandlede Art, hvor de fra Metalmolekylerne udgaaende Kræfter har et fast Potential, vil den Størrelse, som det i dette Tilfælde udelukkende kommer an paa at bestemme, være den Vinkel, som Elektronernes Bevægelsesretning før Sammenstødet danner med Retningen efter Stødet. Idet vi tænker os en Plan lagt gennem Molekylet, vinkelret paa Elektronens Retning før Sammenstødet, kan den omtalte Vinkel, som man umiddelbart indser, kun

¹⁾ *Maxwell*: Phil. Mag. (4), vol. 35, pp. 129 og 185, 1868.

afhænge af Afstanden a fra Molekylet til Projektionen af Elektronen før Sammenstødet paa denne Plan, samt Elektronens absolute Hastighed r . Det kan nu vises, at dersom Kraften paa Enhed af en Elektrons Masse skrives $\mu \cdot \rho^{-n}$, hvor ρ er Afstanden fra Elektronen til Molekylet, vil den søgte Vinkel ϑ være en Funktion af $a \cdot r^{\frac{2}{n-1}} \cdot \mu^{-\frac{1}{n-1}}$, og altsaa $\vartheta = \varphi\left(a \cdot r^{\frac{2}{n-1}}\right)$.

Dersom den Kraft, hvormed Molekylerne paavirker Elektronerne, er en Tiltrækning, frembyder der sig dog en særlig Vanskelighed, idet (for $n > 3$)

alle de Elektroner, for hvilke $a \cdot r^{\frac{2}{n-1}}$ er mindre end en bestemt endelig Størrelse, vil bøjes saaledes ud af deres Baner, at de træffer selve Kraftcentret og her ankommer med uendelig stor Hastighed. Boltzmann²⁾ har imidlertid vist, hvorledes man kan omgaa denne Vanskelighed ved at antage, at den Lov, hvorefter Kraftcentret tiltrækker Elektronerne i Centrets umiddelbare Nærhed (d. v. s. i en Afstand, der er forsvindende i Forhold til de allerede smaa Afstande, hvor Stødet kan opfattes som begyndt), ikke udtrykkes ved Formlen $\mu \cdot \rho^{-n}$, men ved en saadan, at Hastigheden forbliver endelig. En saadan Antagelse vil nemlig ikke medføre nogen Forandring i den Omstændighed, at ϑ kan udtrykkes som en Funktion af $a \cdot r^{\frac{2}{n-1}}$.

Vi skal nu beregne den samlede Bevægelsesmængde efter en bestemt Retning, som Elektronerne mister ved Sammenstød med et af de omhandlede Molekyler. Det Antal Elektroner med Hastighedspunkter indenfor et lille Element $d\sigma$ omkring Punktet (ξ, η, ζ) , der i Tiden dt

¹⁾ Maxwell: loc. cit., p. 143. Det nøjagtige Udtryk for ϑ er

$$\vartheta = \pi - 2 \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{2}{n-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}},$$

hvor $a = a \cdot r^{\frac{2}{n-1}} \cdot \mu^{-\frac{1}{n-1}}$, og hvor x_0 betegner den mindste positive Rod i Ligningen

$$1 - x^2 - \frac{2}{n-1} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} = 0.$$

Det i Teksten anførte Resultat kan iøvrigt umiddelbart indses ved en Dimensionsbetragtning. Man har nemlig (idet L betegner en »Længde« og T en »Tid«) $\mu \cdot \rho^{-n} \sim L \cdot T^{-2}$ og derfor $\mu \sim L^{1+n} \cdot T^{-2}$, endvidere er $r \sim L \cdot T^{-1}$ og $a \sim L$; idet nu ϑ skal være et dimensionsløst Tal, maa ϑ derfor nødvendigvis være en Funktion af $\mu \cdot r^{-2} \cdot a^{-(n-1)}$, eller, hvad der udsiger det samme, af

$a \cdot r^{\frac{2}{n-1}} \cdot \mu^{-\frac{1}{n-1}}$ (jvnfr. Jeans: Dynamical Theory of Gases, p. 275, hvor der findes en lignende Dimensionsberegning for et tilsvarende Problem).

²⁾ Boltzmann: Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl., Bd. 89, Abt. II, p. 720, 1884. Se ogsaa P. Czermak: ibid., p. 723.

»rammer« det betragtede Molekyle saaledes, at Afstanden a ligger mellem a og $a + da$, er lig

$$f(\xi, \eta, \zeta) d\sigma \cdot r dt \cdot 2\pi a da.$$

Ved disse Elektroners Sammenstød mistes en Bevægelsesmængde, hvis Retning falder sammen med Retningen af Radiusvektoren til Punktet (ξ, η, ζ) , og hvis Størrelse er

$$mr(1 - \cos \vartheta) \cdot 2\pi ar f(\xi, \eta, \zeta) da d\sigma dt.$$

Idet vi nu integrerer over alle a fra 0 til ∞ — dette vil i Virkeligheden være det samme som kun at integrere over meget smaa a , idet $(1 - \cos \vartheta)$ kun afviger overmaade lidt fra 0, dersom a ikke er meget lille (Integrationen vil dog, som en nærmere Betragtning viser, kun være tilladelig, dersom $n > 2$) —, faar vi, idet

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - \cos \vartheta) \cdot 2\pi a da &= \int_0^\infty \left(1 - \cos \left(\varphi \left(ar^{\frac{2}{n-1}}\right)\right)\right) 2\pi a da \\ &= r^{-\frac{4}{n-1}} \int_0^\infty (1 - \cos(\varphi(x))) 2\pi x dx = r^{-\frac{4}{n-1}} \cdot c, \end{aligned}$$

den samlede Bevægelsesmængde, som de Elektroner, hvis Hastigheds-punkter før Stødet befinder sig indenfor Elementet $d\sigma$, mister i Tiden dt ved Sammenstød med det betragtede Molekyle, lig

$$mcr^{\frac{2n-6}{n-1}} f(\xi, \eta, \zeta) d\sigma dt.$$

Projektionen paa X -aksen af denne Bevægelsesmængde er lig

$$cr^{\frac{n-5}{n-1}} \cdot m\xi f(\xi, \eta, \zeta) d\sigma dt.$$

Integreres dernæst over alle Hastighedspunkter mellem to Kugleflader med Radierne r og $r + dr$, findes den Bevægelsesmængde efter X -aksen, som Elektroner med absolute Hastigheder mellem r og $r + dr$ mister ved Sammenstød med det betragtede Metalmolekyle, lig

$$cr^{\frac{n-5}{n-1}} \cdot G_x(r) dr dt.$$

Summeres nu over alle Metalmolekylerne i Volumenelementet dV , og antages det, at de alle paavirker Elektronerne med Kræfter, der aftager som samme Potens af Afstanden, men ellers ikke behøver at være lige store, faar vi den samlede Bevægelsesmængde efter X -aksen, som de betragtede Elektroner mister i Tiden dt , lig

$$C \cdot r^{\frac{n-5}{n-1}} G_x(r) dr dV dt,$$

og efter Udtrykket (9) altsaa

$$F(r) = C \cdot r^{\frac{n-5}{n-1}}. \quad (17)$$

Dersom man vilde antage, at der fandtes Molekyler, der paavirkede Elektronerne med Kræfter, der forholdt sig som forskellige Potenser af Afstanden, vilde man faa

$$F(r) = \sum C_n \cdot r^{\frac{n-5}{n-1}}.$$

(Baade i dette og i det foregaaende Tilfælde maa Metalmolekylerne antages at være saa godt »blandede«, at Antallet af de forskellige Slags Molekyler kan regnes for at være lige stort indenfor hvert Volumenelement, hvis Dimensioner kan sammenlignes med Elektronernes fri Vejlængder.)

Dersom vi i Lign. (17) sætter $n = \infty$, faar vi $F(r) = C \cdot r$, hvilket, dersom vi sætter $C = \frac{1}{l}$, er den samme Værdi, som vi ovenfor (Side 28 Lign. (15)) fandt ved Omtalen af *Lorentz's* Theori. Dette er ogsaa, hvad vi kunde vente, thi dersom vi skriver Udtrykket for Kraften pr. Enhed af Masse, hvormed Molekylerne paavirker Elektronerne, paa Formen $\mu \cdot \rho^{-n} = d \cdot \left(\frac{b}{\rho}\right)^n$, ser vi, at Kraften, dersom n er meget stor, vil være overordentlig lille, dersom $\rho > b$, og overordentlig stor, dersom $\rho < b$, og dette er netop det Forløb, som Kraften vil have, dersom Molekylerne og Elektronerne er haarde elastiske Kugler, hvis Radiers Sum er lig b (jvnfr. *Jeans: Dynamical Theory of Gases*, p. 276). — Ved Sammenligning mellem Ligningerne (15) og (17) ser vi, at Forskellen mellem de to omhandlede Tilfælde kan udtrykkes ved at sige, at den »effektive fri Middelvejlængde« ($r : F(r)$) i det sidste Tilfælde vokser med voksende r , medens den i det første Tilfælde er konstant. (Den effektive fri Middelvejlængde vil aldrig aftage med voksende r , hvilke Kræfter der end antages at virke mellem Molekylerne og Elektronerne.) —

Dersom vi sætter $n = 5$, faar vi $F(r) = C$. I dette Tilfælde vil derfor det samlede Tab af Bevægelsesmængde i en bestemt Retning, som Elektronerne lider i Tidsenheden ved Sammenstødene, være proportionalt med Elektronernes samlede Bevægelsesmængde i den omhandlede Retning (se Noten Side 21), og Beregningernes Udførelse vil for mange Problems Vedkommende derfor være betydelig simplere end i de fleste andre Tilfælde.

Paa ganske tilsvarende Maade som ved de Tilfælde, vi her har betragtet, kan vi beregne Funktionen $F(r)$ i det Tilfælde, hvor Metalmolekylerne antages at være Systemer sammensatte af to elektrisk ladede Partikler, hvis Ladninger har samme absolute Størrelse men modsat Fortegn¹⁾, samt i det Tilfælde, Metalmolekylerne antages at være smaa Magneter²⁾. — Dimensionerne af disse Systemer og Magneter, d. v. s. Afstanden henholdsvis mellem de ladede Partikler og mellem Magnetpolerne, skal antages at være forsvindende smaa i Forhold til de Afstande, indenfor hvilke Metalmolekylerne allerede udøver en kendelig Virkning paa Elektronernes Bevægelse, hvilke sidste Afstande her, ligesom i det forrige Tilfælde, skal antages at være smaa i Forhold til Molekylernes indbyrdes Afstande. —

I de her omhandlede Tilfælde vil, ligesom i det forrige Tilfælde, Elektronernes absolute Hastighed ikke forandres ved »Sammenstødet«. Vinklen ϑ vil derimod, foruden af Elektronens absolute Hastighed v og af Afstanden a (se Side 31), ogsaa afhænge af Vinklen τ mellem Molekylets Akse og en Plan vinkelret paa Elektronens Bevægelsesretning før Sammenstødet, samt af Vinklen ν mellem Projektionen af denne Akse paa en saadan Plan og Forbindelseslinien mellem Projektionerne af Metalmolekylet og af Elektronen før Stødet paa den samme Plan. Den Kraft paa Enhed af Masse, hvormed et Metalmolekyle paavirker en Elektron, dersom Molekylet antages at være et elektrisk System som det ovenfor omtalte, vil i Størrelse være $\mu \cdot \frac{1}{\rho^3} \cdot \psi(\vartheta')$, hvor ρ er Radiusvektoren fra Molekylet til Elektronen og ϑ' Vinklen mellem denne Radiusvektor og Molekylets Akse. I det Tilfælde, Metalmolekylet antages at være en Magnet, vil Kraften være $\mu \cdot \frac{r}{\rho^3} \cdot \psi(\vartheta', \tau', \nu')$, hvor r som sædvanlig betegner Elektronens absolute Hastighed (r er i det omhandlede Tilfælde konstant under Sammenstødet), og hvor ρ og ϑ' har samme Betydning som i det forrige Tilfælde, medens τ' betegner Vinklen mellem Elek-

¹⁾ Antagelsen af Tilstedeværelsen af saadanne Systemer (»electric-doublers«) i Legemernes Indre er benyttet af *J. J. Thomson* (Phil. Mag., vol. 20, p. 238, 1910) til at forklare forskellige af Legemernes optiske Forhold. Det kan iøvrigt bemærkes, at det er lykkedes *J. H. Jeans* (Phil. Mag., vol. 20, p. 380, 1910) fuldstændig at gennemføre den matematiske Beregning af en Elektrons Bane i en saadan »doublet«s Felt.

²⁾ Udførlige Beregninger over en Elektrons Bevægelse i en Elementarmagnets Felt er foretagne af *C. Störmer* (Arch. d. Sciences phys. e. natur. (4), Tom. 24, pp. 5, 113, 221 og 317, 1907) gennem numerisk Integration af de til dette Problem hørende Differentialligninger. Jvnfr. ogsaa *P. Gruner* (Jahrb. d. Rad. u. Elek., Bd. 6, p. 149, 1909).

tronens øjeblikkelige Hastighed og Radiusvektoren fra Molekylet til Elektronen, og ν' Vinklen mellem Elektronens Hastighed og en Plan gennem Molekylets Akse og Elektronens øjeblikkelige Plads. Ved en Dimensionsbetragtning, der ganske svarer til den ovenfor (i Noten Side 31) udførte, finder man nu i de to Tilfælde for Vinklen ϑ henholdsvis

$$\vartheta = \varphi_1((a \cdot r), \tau, \nu) \quad \text{og} \quad \vartheta = \varphi_2((a \cdot r^{\frac{1}{2}}), \tau, \nu).$$

Ved nu at gaa frem paa ganske samme Maade som ovenfor og tage Middeltal over Vinklerne τ og ν udfra den Antagelse, at Molekylernes Akser er ligelig fordelte i alle mulige Retninger, vil man finde i de to Tilfælde henholdsvis

$$F(r) = C \cdot r^{-1} \quad \text{og} \quad F(r) = C.$$

I det Tilfælde, Metalmolekylerne antages at være »elektriske Dobbeltsystemer«, faar man altsaa ganske samme Form for $F(r)$, som i det Tilfælde Molekylerne antages at være Kraftcentre, der paavirker Elektronerne med Kræfter, der forholder sig omvendt som 3^{de} Potens af Afstanden; medens man i det Tilfælde, Molekylerne antages at være smaa Magneter, faar samme Form for $F(r)$ som ved Betragtning af Kraftcentre, der paavirker Elektronerne omvendt som 5^{te} Potens af Afstanden.

Alle de her behandlede Tilfælde har været saadanne, ved hvilke det antages, at Elektronernes absolute Hastigheder ikke forandres ved Sammenstødene, og ved hvilke derfor $Q(\rho, r) = 0$; man kunde ogsaa udtrykke dette ved at sige, at der i de behandlede Tilfælde ved Sammenstødene omsættes Bevægelsesmængde og ikke Energi. Dersom imidlertid denne Antagelse var strængt opfyldt, vilde Sammenstødene ikke saaledes, som det i det foregaaende er antaget, kunne bevirke, at Elektronernes Fordeling, naar der virker ydre Kræfter, og Temperaturen ikke er konstant, kun afviger meget lidt fra den normale For-

deling $f = K \cdot e^{-\frac{m}{2kT} r^2}$, men kun, at Fordelingen indenfor de enkelte Grupper med samme absolute Hastighed paa meget lidt nær vil være symmetrisk med Hensyn til Hastighedskoordinaternes Begyndelsespunkt. Vi maa derfor, for at gøre det mekaniske Billede fuldstændigt, antage, at en Elektron ved Sammenstødene ogsaa under Omstændigheder kan forandre sin absolute Hastighed, saa at den enkelte Elektron under sin Bevægelse vil have forandret sin kinetiske Energi meget stærkt indenfor saadanne smaa Afstande, indenfor hvilke Temperaturen og Elektronernes potentielle Energi, hidrørende fra de ydre Kræfter,

kun varierer overordentlig lidt; vi skal blot i de ovenfor behandlede Tilfælde antage, at de Tider, indenfor hvilke den enkelte Elektrons Bevægelsesmængde under Elektronens Bevægelse i Middel forandrer sig meget stærkt, vil være smaa i Forhold til saadanne Tider, indenfor hvilke dens kinetiske Energi i Middel har forandret sig mærkeligt.

I de Tilfælde, ved hvilke Elektronernes absolute Hastigheder forandres ved Sammenstødene — Tilfælde, ved hvilke Omsætningen af kinetisk Energi ikke er forsvindende i Forhold til Omsætningen af Bevægelsesmængde — er Beregningen af Funktionerne $F(r)$ og $Q(r, \rho)$ i Almindelighed langt vanskeligere end i de forrige Tilfælde. Jeg har gennemført Beregningen af $Q(\rho, r)$ i et af de allersimpleste Eksempler, nemlig for Sammenstød mellem de fri Elektroner indbyrdes i det Tilfælde, at disse antages at paavirke hinanden som absolut haarde elastiske Kugler; i dette Tilfælde kan endvidere Funktionen $F(r)$ findes ved Hjælp af *Maxwell's* Beregninger af Middelvejtlængden mellem to paa hinanden følgende Sammenstød i en Luftart, hvis Molekyler antages at være elastiske Kugler (se f. Eks. *Jeans: Dynamical Theory of Gases*, p. 231). Da Beregningerne er temmelig langvarige, og vi ikke skal gøre nogen Brug af dem i det følgende, skal jeg her blot meddele Resultatet.

$$\left. \begin{aligned} F(r) &= \frac{1}{l} \left(\frac{kT}{m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{-\frac{m}{2kT}r^2} + \left(\frac{mr}{kT} + \frac{1}{r} \right) \int_0^r e^{-\frac{m}{2kT}z^2} dz \right\}, \\ Q(\rho, r) &= \frac{1}{l} \left(\frac{kT}{m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{\rho^3} e^{-\frac{m}{2kT}r^2} \left\{ 8x + \left(\frac{m}{kT} \right)^2 \left(\frac{1}{3} x^3 y^2 - \frac{1}{15} x^5 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{4m}{kT} x^2 - 8 \right) e^{\frac{m}{2kT}x^2} \int_0^x e^{-\frac{m}{2kT}z^2} dz \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

hvor $x = r$, $y = \rho$, for $\rho > r$, medens $x = \rho$, $y = r$, for $\rho < r$.

I disse Udtryk betegner l Middelvejtlængden mellem to paa hinanden følgende Sammenstød, beregnet paa *Maxwell's* Maade (se *Jeans: loc. cit.*, p. 234).

Man ser, hvorledes $Q(\rho, r)$ tilfredsstiller den gennem Ligningen (13) Side 23 udtrykte Betingelse, som vi har vist, at enhver Funktion $Q(r, \rho)$ maa tilfredsstille.

§ 4.

Opstilling af Betingelsesligningerne for Elektronernes samlede Bevægelse i det Tilfælde, hvor Metalmolekylernes Dimensioner ikke antages at være forsvindende i Forhold til deres indbyrdes Afstande.

Vi skal nu betragte det Tilfælde, hvor Metalmolekylerne tænkes at være saa nær paa hinanden, at Elektronerne under en stor Del af deres Bevægelse er underkastede Virkningerne af de fra Molekylerne udgaaende Kræfter. Behandlingen af dette Tilfælde vil i Almindelighed være langt vanskeligere end af det Tilfælde, hvor vi betragtede adskilte Sammenstød. At Forholdene i det forrige Tilfælde var simplere, hidrører fra, at Sandsynligheden for Sammenstød, og derfor ogsaa for at modtage og afgive Bevægelsesmængde til Metalmolekylerne, kun var afhængig af Elektronernes øjeblikkelige Hastighed og ikke af deres Baner; man kunde derfor uden større Vanskelighed opstille en Relation mellem den i Tidsenheden til Metalmolekylerne afgivne Bevægelsesmængde og den Bevægelsesmængde, som Elektronerne besad i det betragtede Øjeblik. I det her omhandlede Tilfælde, hvor Vekselvirkningen mellem Metalmolekylerne og Elektronerne antages at foregaa paa en saa langt mere indviklet Maade, synes det derimod ikke muligt at opstille en almindelig (blot formel) Relation imellem Elektronernes Bevægelsesmængde og den i Tidsenheden til Metalmolekylerne afgivne Bevægelsesmængde. Vi skal derfor her kun gennemføre Behandlingen i et særlig simpelt Tilfælde, der imidlertid, dersom man gaar ud fra Rigtigheden af de i Indledningen omtalte Hovedantagelser, synes at maatte frembyde betydelige Lighedspunkter med Forholdene i de virkelige Metaller.

Vi skal antage, at der ikke finder nogen Vekselvirkning Sted mellem de fri Elektroner indbyrdes, samt at de Kræfter, hvormed Metalmolekylerne paavirker Elektronerne, danner et stationært elektromagnetisk Felt; endvidere skal vi ved Beregningerne antage, at de ydre Kræfter ligeledes er stationære.

Vi skal dog ikke antage, at disse Betingelser er strængt opfyldte; i et saadant stationært Felt vil der nemlig ikke finde nogen udjævnende Omsætning af Energi Sted (d. v. s. den enkelte Elektrons kinetiske Energi vil til ethvert Tidspunkt være bestemt ud fra Begyndelsesenergien og Elektronsens øjeblikkelige Plads (x, y, z)), og dersom man derfor ikke antager, at Elektronerne har Lejlighed til paa anden Maade at omsætte Energi

enten med hverandre indbyrdes eller med Metalmolekylerne, vil der ikke være tilstrækkelig Aarsag til at bevirke, at Elektronernes Hastighedsfordeling, dersom der virker ydre Kræfter eller Temperaturen ikke er konstant, kun vil afvige meget lidt fra den normale Fordeling (smgl. det analoge Tilfælde Side 35). En saadan udjævnende Energiomsætning kan dels tænkes at foregaa ved Vekselvirkning (Sammenstød) mellem de fri Elektroner, der befinder sig i det stationære Felt, dels ved Variationer i Feltet; vi skal imidlertid herom blot antage, at Virkningen af Sammenstødene mellem Elektronerne indbyrdes i Middel vil være meget ringe i Sammenligning med Vekselvirkningen mellem Metalmolekylerne og Elektronerne, samt at Molekylernes Kraftfelter — og ligeledes de ydre Kræfter — kun vil forandre sig meget lidt indenfor saadanne smaa Tidsrum, indenfor hvilke de enkelte Elektroner under deres Bevægelse i Middel vil have mistet næsten hele deres oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning.

Disse Antagelser synes nu, som ovenfor berørt, med Tilnærmelse at maatte være opfyldte ved de virkelige Metaller. For det første maa man nemlig antage, at Vekselvirkningen mellem Elektronerne og Metalmolekylerne vil være langt større end Vekselvirkningen mellem de fri Elektroner indbyrdes paa Grund af disse sidstes ringe »Størrelse« i Forhold til Molekylerne (de enkelte Molekyler antages jo nemlig at indeholde et meget stort Antal bundne Elektroner og synes saaledes at maatte opfattes som store Systemer i Forhold til de enkelte Elektroner), og idet Antallet af fri Elektroner i det højeste kan være af samme Størrelsesorden som Molekylernes Antal (Antagelsen af et væsentlig større Antal fri Elektroner vilde nemlig ikke være forenelig med de eksperimentelt fundne Værdier for Metallernes Varmefylde ¹⁾). For det andet maa Bevægelserne af et Molekyle, betragtet som en Helhed, i Middel være mange Gange langsommere end de enkelte Elektroners Bevægelse paa Grund af Elektronernes ringe Masse i Forhold til Molekylernes (et Metalmolekyles Masse er c. 10^5 Gange saa stor som en Elektrons); og idet der endvidere kun synes at kunne være en yderst ringe direkte Vekselvirkning mellem de fri Elektroner og de enkelte i Molekylerne bundne Elektroner (man maatte ellers vente en Fordeling af Energien imellem dem, der svarede til den statistiske Mekaniks Love (se Side 10)), maa Molekylernes Kraftfelter antages at kunne betragtes som stationære overfor Elektronernes Bevægelser.

Vi skal nu betragte de fri Elektroners af hverandre uafhængige Bevægelse i et saadant stationært Kraftfelt. Idet det elektriske Potential i et Punkt (x, y, z) i det Indre af Metallet, hidrørende fra Metalmolekylernes Kraftfelter, betegnes ved λ , vil Elektronernes Fordeling i

¹⁾ Se f. Eks. *J. H. Jeans*: *Phil. Mag.*, vol. 17, p. 793, 1909.

et af ydre Kræfter upaavirket homogent Metalstykke, der overalt har samme Temperatur, efter Ligning (2) Side 12 i dette Tilfælde udtrykkes ved

$$f = K \cdot e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{m}{2} r^2 + \epsilon \lambda \right)}. \quad (19)$$

Kaldes Antallet af fri Elektroner i Volumenenheden for N , har man

$$\begin{aligned} N = \iint K \cdot e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{m}{2} r^2 + \epsilon \lambda \right)} d\sigma dv &= K \cdot \int e^{-\frac{m}{2kT} r^2} d\sigma \cdot \int e^{-\frac{\epsilon \lambda}{kT}} dv \\ &= K \cdot \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \int e^{-\frac{\epsilon \lambda}{kT}} dv, \end{aligned} \quad (20)$$

hvor Integrationen med Hensyn til $d\sigma$ er udført over alle Hastigheds-elementer, medens Integralet med Hensyn til dv tænkes udført over en Volumenenhed.

Dersom der virker ydre Kræfter, eller Metallet ikke er homogent, eller ikke overalt har samme Temperatur, vil Ligevægten blive forstyrret, og Elektronernes statistiske Fordeling blive en anden. Efter det i Begyndelsen af dette Kapitel omtalte vil man dog altid kunne sætte

$$f = K \cdot e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{m}{2} r^2 + \epsilon \lambda \right)} + \psi, \quad (21)$$

hvor K er en Funktion af Metallens Tilstand — Natur og Temperatur — i det betragtede Punkt, medens ψ er en Størrelse, der er meget lille i Forhold til det første Led.

Ved Undersøgelsen af Elektronernes samlede Bevægelse skal vi ikke her, som i det Tilfælde, hvor vi betragtede adskilte Sammenstød, betragte de Elektroner under et, der har samme absolute Hastighed, men derimod de, der har samme Sum $\frac{m}{2} r^2 + \epsilon \lambda = a$ af kinetisk Energi og potentiel Energi i Forhold til Metalmolekylerne.

Komposanten efter X -aksen af den Bevægelsesmængde, der indehaves af de Elektroner, hvis Energi ligger mellem a og $a + da$, og som befinder sig i Volumelementet dV — der skal tænkes saa stort, at det indeholder et meget stort Antal Metalmolekyler — skal vi betegne ved $G_x(a) da dV$.

Ved Beregningen af $G_x(a)$ skal vi nu paa tilsvarende Maade som i det forrige Tilfælde (se Side 17) tænke os den Fordeling, der svarer til det første Led i Ligningen (21), delt i to, f_1 og f_2 , af hvilke vi skal sætte

$$f_1 = K_0 \cdot e^{-\frac{1}{kT_0} \left(\frac{m}{2} r^2 + \varepsilon \lambda + \varepsilon \varphi \right)}, \quad (22)$$

hvor K_0 og T_0 betegner Værdierne for K og T i et Punkt (x_0, y_0, z_0) , beliggende indenfor det betragtede Volumenelement dV , og hvor φ betegner de ydre Kræfters Potential. Idet φ tænkes valgt saaledes, at det er 0 i Punktet (x_0, y_0, z_0) , vil Fordelingen f_2 i et Punkt $(x, y, z) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1)$, der ligger meget nær ved Punktet (x_0, y_0, z_0) , med Bortkastning af smaa Størrelser af samme Orden som Produkter af x_1, y_1 og z_1 , kunne skrives

$$f_2 = K \cdot e^{-\frac{1}{kT} \left(\frac{m}{2} r^2 + \varepsilon \lambda \right)} \left[x_1 \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{1}{kT^2} \left(\frac{m}{2} r^2 + \varepsilon \lambda \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + y_1 \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \dots \right) + z_1 \left(\dots \right) \right] \quad (23)$$

Idet nu saavel λ som φ her antages at være konstante Funktioner af x, y og z , vil Fordelingen f_1 være stationær (smlg. Side 18); og de Elektroner, der til et vist Tidspunkt hører til denne Fordeling, vil derfor vedblive at svare til en Fordeling, der udtrykkes ved (22). De Elektroner, der til et vist Tidspunkt hører til Restfordelingen $f_R = f_2 + \psi$, vil derfor ogsaa vedblivende høre til denne sidste Fordeling. Idet nu endvidere Fordelingen f_1 , der i ethvert Punkt (x, y, z) er symmetrisk med Hensyn til Hastighedskoordinaternes Begyndelsespunkt, ikke vil give Anledning til nogensomhelst samlet Bevægelse af Elektronerne, behøver vi ved Beregningen af Elektronernes samlede Bevægelse derfor kun at betragte Restfordelingen. Vi skal nu her enkeltvis betragte de forskellige Aarsager, der bevirker Elektronernes samlede Bevægelse.

Vi skal først betragte det Tilfælde, hvor der ikke virker ydre Kræfter, og hvor Elektronernes samlede Bevægelse derfor kan betragtes som hidrørende fra en Art »fri Diffusion« fra saadanne Steder i Metallet, hvor deres Koncentration er større, til saadanne, hvor den er lavere. I dette Tilfælde vil for hver enkelt Elektron Summen a af dens kinetiske Energi og dens potentielle Energi med Hensyn til Metalmolekylerne være konstant.

Antallet af Elektroner i Volumenelementet dV , hvis Energi ligger mellem a og $a + da$, skal vi betegne ved $N(a) da dV$. Det Antal Elektroner med Energi mellem a og $a + da$, der i Tidsenheden gaar igennem et Fladeelement dS vinkelret paa X -aksen, hvis Dimensioner skal antages store i Forhold til de enkelte Metalmolekyler, og som tænkes at befinde sig i Nærheden af Punktet (x_0, y_1, z_0) , — hvilket

Antal efter de indførte Betegnelser vil være lig $\frac{1}{m} G_x(a) dadS$ — vil nu i dette Tilfælde kunne skrives

$$\frac{1}{m} G_x(a) dadS = - D(a) \cdot \frac{dN(a)}{dx} da \cdot dS, \quad (24)$$

hvor »Diffusionskvotienten« $D(a)$ vil være en Funktion af a , kun afhængig af Metallets Natur og Temperatur i det betragtede Punkt. Idet nu Antallet af de Elektroner i Volumenelementet dV , der hører til Restfordelingen f_R , og hvis Energi ligger imellem a og $a + da$, betegnes ved $N_R(a) da dV$, vil vi i det her betragtede Tilfælde, hvor Antallet af Elektroner i Volumenenheden, hørende til Fordelingen f_1 , er konstant paa de forskellige Steder af Metallet, i Stedet for Ligningen (24) kunne skrive

$$\frac{1}{m} G_x(a) dadS = - D(a) \frac{dN_R(a)}{dx} dadS. \quad (25)$$

I det Tilfælde, hvor der virker ydre Kræfter — og vi skal hertil medregne saadanne Tilfælde, i hvilke de fra Metalmolekylerne udgaaende Kræfter, paa Grund af Inhomogenitet i Metallet, i Middel giver Anledning til en Kraft i en bestemt Retning —, fremkommer Elektronernes samlede Bevægelse derved, at alle de enkelte Elektroners Baner paavirkes i Kraftens Retning. Da de ydre Kræfter antages at være overordentlig smaa i Sammenligning med de fra Metalmolekylerne udgaaende Kræfter, vil de enkelte Elektroners Bevægelse i dette Tilfælde kun afvige meget lidt fra Bevægelsen i det ovenfor betragtede Tilfælde, og en mærkelig samlet Bevægelse af Elektronerne i en bestemt Retning fremkommer kun paa Grund af Elektronernes overordentlig store Antal. For de Elektroners Vedkommende, der hører til Fordelingen f_1 , og hvis Antal i Volumenenheden her i Modsætning til i det forrige Tilfælde ikke er konstant paa de forskellige Steder i Metallet, vil nu, som ovenfor omtalt, Elektronernes samlede Bevægelse, hidrørende fra de ydre Kræfters Indvirkning og fra Koncentrationsforskelle, ophæve hinanden. For de Elektroners Vedkommende, der hører til Restfordelingen, kan man imidlertid paa Grund af det ringe Antal Elektroner indenfor det betragtede Volumenelement dV , der hører til denne Fordeling, se bort fra de ydre Kræfters Indvirkning paa Elektronernes Bevægelse, og vi vil derfor i dette Tilfælde — hvor $a + \varepsilon\varphi$ vil være konstant under de enkelte Elektroners Bevægelser —, paa tilsvarende Maade som i det ovenfor betragtede Tilfælde, kunne skrive

$$\frac{1}{m} G_x(a) dadS = - D(a) \frac{dN_R(a + \varepsilon\varphi)}{dx} dadS. \quad (26)$$

Ved Hjælp af Ligningen (23) faar vi nu, idet vi bortkaster uendelig smaa Størrelser af højere Orden med Hensyn til x_1, y_1 og z_1 og tager i Betragtning, at det Antal Elektroner i Volumenelementet dV , der svarer til Fordelingen ψ , vil være meget ringe i Sammenligning med det hele Antal Elektroner (dette gælder ogsaa om Variationerne af de omhandlede Antal med Hensyn til Koordinaterne x, y og z):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_R(a+\varepsilon\varphi)}{dx} da dV &= \frac{dN_R(a)}{dx} da dV \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{a}{kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) N(a) da dV. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Ved Hjælp af Ligningerne (25) resp. (26) og (27) faar vi derfor i alle Tilfælde følgende Ligning til Bestemmelse af $G_x(a)$:

$$G_x(a) = -m \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{a}{kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) D(a) N(a). \quad (28)$$

For nærmere at belyse de her anførte Beregninger skal vi kort omtale, hvorledes Beregningerne vilde have formet sig, dersom vi, i Stedet for at anvende den ovenfor givne Behandlingsmaade, ogsaa i det her omhandlede Tilfælde havde forsøgt at benytte samme Fremgangsmaade som i det Tilfælde, hvor vi betragtede adskilte Sammenstød, d. v. s. dersom vi havde søgt en Ligning til Bestemmelse af $G_x(a)$ ved at undersøge de Tilvækster, som Bevægelsesmængden $G_x(a) da dV$ modtager i Tiden dt , dels paa Grund af Elektronernes øjeblikkelige Bevægelse og de ydre Kræfters Indvirkning, dels paa Grund af Vekselvirkningen mellem Metalmolekylerne og Elektronerne (smlg. Side 16).

Beregningen af den Tilvækst, der skyldes de førstnævnte Aarsager, — ved hvilken Beregning man kun behøver at tage Hensyn til de Elektroner, der i det betragtede Øjeblik hører til en Fordeling, der udtrykkes ved det første Led i Ligningen (21) (smlg. Side 17), — vil her kunne udføres paa tilsvarende Maade som i det Tilfælde, hvor vi betragtede adskilte Sammenstød, idet vi her blot udfører Beregningen over et lille Volumenelement dV , hvis Dimensioner er forsvindende i Forhold til Metalmolekylernes Dimensioner (d. v. s. saa smaa, at man kan betragte λ som konstant indenfor det betragtede Volumenelement), og dernæst integrerer over Volumenelementet dV . Man vil paa denne Maade finde et Udtryk for den søgte Tilvækst i Bevægelsesmængden $G_x(a) da dV$ lig Udtrykket paa højre Side af Ligningen (28) multipliceret med $R(a) da dV dt$, hvor $R(a)$ betegner en Funktion af a , afhængig af Metallets Natur og Temperatur. (Et saadant Udtryk vil, som man kan vise ved Benyttelse af Ligningen (1) Side 10, gælde i Almindelighed — d. v. s. ogsaa dersom man ikke ser bort fra Vekselvirkningen mellem de fri Elektroner indbyrdes og ikke betragter Metalmolekylernes Kraftfelter som stationære —, idet da a blot

skal betegne Summen af en Elektrons kinetiske Energi og dens øjeblikkelige potentielle Energi i Forhold til Metalmolekylerne og de andre Elektroner, d. v. s. den Energi, som Systemet af Elektroner og Molekyler vilde miste, dersom man, efter pludselig at have standset alle Partiklernes Bevægelser uden at forandre deres indbyrdes Stillinger, førte den paa-gældende Elektron ud af Systemet og uendelig langt bort.)

Den Tilvækst i den omhandlede Bevægelsesmængde, der skyldes Vekselvirkningen mellem Metalmolekylerne og Elektronerne, — hvilken Tilvækst kun vil hidhøre fra de Elektroner, der i det betragtede Øjeblik hører til Fordelingen ψ (smlg. Side 17) — eller, som man ogsaa kan udtrykke det, den Tilvækst, der skyldes Metalmolekylernes »Modstand« imod Elektronernes samlede Bevægelse i X -aksens Retning, vil imidlertid være langt vanskeligere at bestemme. Den omhandlede Modstand hidrører nemlig fra, at Elektronerne under deres Bevægelse vil være til Stede i større Antal paa saadanne Steder, hvor de fra Molekylerne hidrørende Kræfter er rettede imod Bevægelsen, end paa saadanne Steder, hvor Kræfterne har samme Retning som denne — eller anderledes udtrykt »Elektronerne hober sig paa Grund af Bevægelsen op foran Metalmolekylerne« —; og denne Elektronernes »Ophobning« (der udtrykkes gennem Fordelingen ψ) vil her, i Modsætning til i det Tilfælde, hvor vi betragtede adskilte Sammenstød, i Almindelighed være forskellig alt efter den Maade, hvorpaa Elektronernes samlede Bevægelse er frembragt.

Ved de Betragtninger, vi ovenfor (Side 40—41) har benyttet, har vi imidlertid indirekte bevist, at i det Tilfælde, man antager, at Elektronerne bevæger sig uafhængigt af hverandre, og at Metalmolekylernes Kraftfelter er stationære, vil den omhandlede Ophobning i alle de betragtede Tilfælde, for hver enkelt Gruppe af Elektroner med samme samlede Energi, kun afhænge af den samlede Bevægelsesmængde efter X -aksen, som den omhandlede Gruppe besidder, idet vi har vist, at Bevægelsen af de Elektroner, der hører til Fordelingen $f_2 + \psi$, hvad enten Elektronernes samlede Bevægelse skyldes Temperaturforskelle, eller den skyldes stationære ydre Kræfter, kan betragtes som en »fri Diffusion« (Fordelingen f_2 medfører, lige saa lidt som Fordelingen f_1 , nogen Ophobning »foran« Molekylerne).

Den sidst søgte Tilvækst i Bevægelsesmængden $G_x(a) da dV$ vil derfor i det omhandlede Tilfælde kunne udtrykkes ved $F(a) \cdot G_x(a) da dV$, hvor $F(a)$ er en Funktion af a , afhængig af Metallets Natur og Temperatur; og sættes nu Summen af de fundne Tilvækster i den betragtede Bevægelsesmængde lig 0, faar vi derfor, som man maatte vente, en Ligning til Bestemmelse af $G_x(a)$ af samme Form som Ligning (28). I de mere almindelige Tilfælde synes det imidlertid meget vanskeligt nærmere at undersøge Elektronernes omtalte Ophobning, og derfor meget vanskeligt ad denne Vej at opstille Ligninger til Bestemmelse af Elektronernes samlede Bevægelse.

Angaaende Anvendelserne af Ligning (28) maa vi bemærke, at det ved Udledningen af Ligningen er forudsat, at de ydre Kræfter er stationære. Ligningen kan derfor kun benyttes overfor stationære (eller quasi-stationære) Problemer (smlg. Side 27).

Som et enkelt Eksempel paa de i denne Paragraf omtalte Beregninger skal vi her betragte det Tilfælde, hvor Metalmolekylerne og Elektronerne antages at paavirke hinanden som absolut haarde elastiske Legemer. Metalmolekylerne skal antages at kunne være af ganske vilkaarlig Form og at kunne have ganske vilkaarlige indbyrdes Afstande. — (Denne Antagelse skiller dette Eksempel fra de Eksempler, som vi betragtede i § 3 af dette Kapitel, og ved hvilke vi antog, at Metalmolekylernes Dimensioner var forsvindende i Forhold til Molekylernes indbyrdes Afstande.) — Vi skal her kun antage, at Metalmolekylernes Dimensioner og Masser er meget store i Forhold til Elektronernes, saa at man dels kan se bort fra Virkningen af Sammenstødene mellem Elektronerne indbyrdes i Forhold til Virkningen af Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne, dels kan regne Metalmolekylerne for at være ubevægelige indenfor saadanne smaa Tidsrum, i hvilke de enkelte Elektroner i Middel mister næsten hele deres oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning.

I det her betragtede Tilfælde vil Grupperne af Elektroner med samme Energi svare til Grupper af Elektroner med samme absolute Hastighed. Tænker vi os nu en Elektron, der upaavirket af ydre Kræfter bevæger sig mellem Metalmolekylerne, vil dens Bane efter de Antagelser, vi har gjort om Molekylerne, være ganske uafhængig af Elektronens absolute Hastighed. Idet endvidere den Vejstrækning, som en Elektron vil gennemløbe i et bestemt Tidsrum, vil være proportional med dens absolute Hastighed, vil Diffusionskoefficienten $D(a)$ i dette Tilfælde være ligefrem proportional med Elektronernes absolute Hastighed. Indfører vi nu dette i Ligningen (28) Side 42 og sætter $a = \frac{1}{2}mr^2$, samt benytter, at λ i det her omhandlede Tilfælde er 0 i visse Omraader (nemlig udenfor Metalmolekylerne) og uendelig stor i de øvrige Omraader (indenfor Metalmolekylerne), finder vi en Ligning til Bestemmelse af Bevægelsesmængden, der ganske svarer til den Ligning, vi fandt ved Omtalen af *H. A. Lorentz's* Theori (d. v. s. den Ligning, som man faar ved at indføre den ved Ligningen (15) Side 28 angivne Værdi for $F(r)$ i Ligningen (14) Side 26 og sætte $Q(\rho, r) = 0$), blot med den Forskel, at der i Stedet for Middelvejlængden l indgaar en Konstant med en anden fysisk Betydning.

Heraf vil f. Eks. følge, at Forholdet mellem Elektricitets- og Varmeledningsevnen vil blive det samme i alle Tilfælde, hvor man antager, at Metalmolekylerne paavirker Elektronerne som haarde Legemer (eller med Kræfter der varierer overordentlig hurtigt med Afstanden

(smlg. Side 33)), uanset Molekylernes Form og indbyrdes Afstande, og lig den Værdi, som *Lorentz* har beregnet udfra den Antagelse, at Molekylerne er haarde elastiske Kugler, hvis Radier er meget smaa i Forhold til Molekylernes indbyrdes Afstande (se nærmere i næste Kapitel).

Vi skal her til Slut bemærke, at i alle andre Tilfælde vil $D(a)$ vokse stærkere med a end i det ovenfor betragtede Tilfælde, hidrørende fra, at de hurtige Elektroner ikke alene kommer hurtigere frem ad de samme Baner, men ogsaa lettere bryder sig Vej end de langsommere (undtagen netop i det Tilfælde, at Metalmolekylerne er absolut haarde Legemer). Betydningen heraf vil blive omtalt i det næste Kapitel.

KAPITEL II.

BEHANDLINGEN AF STATIONÆRE PROBLEMER.

§ 1.

Udledning af Udtryk for Elektricitets- og Energibevægelsen gennem Metallet.

Vi skal nu ved Hjælp af de i forrige Kapitel udledte Ligninger beregne saavel den Elektricitetsmængde som den Energi-mængde, der ved Elektronernes Bevægelse i Tidsenheden føres gennem en Fladeenhed i det Indre af et Metalstykke. Vi skal ved alle Beregninger i dette Kapitel antage, at de ydre Forhold — d. v. s. de ydre Kræfter og Temperaturen i Metallets forskellige Dele — er stationære eller i det mindste quasi-stationære (se Side 27).

Vi skal her først betragte det Tilfælde, hvor der antages at finde adskilte Sammenstød Sted. Betegner vi den Elektricitetsmængde, der med Elektronerne i Tiden dt føres gennem et Fladeelement dS vinkelret paa X -aksen, med $i_x dS dt$, og paa tilsvarende Maade den kinetiske Energi, der i samme Tid føres igennem det samme Fladeelement med $W_x dS dt$, har vi, med Benyttelse af de samme Betegnelser som i forrige Kapitel,

$$i_x = \frac{\varepsilon}{m} \int_0^{\infty} G_x(r) dr \quad (1 a)$$

$$W_x = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^2 G_x(r) dr. \quad (2 a)$$

Til Bestemmelse af $G_x(r)$ har vi, idet vi under de her omhandlede Omstændigheder kan sætte den højre Side af Ligning (14) Side 26 lig 0,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{4\pi}{3} mK \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{mr^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) r^4 e^{-\frac{m}{2kT} r^2} \\ - G_x(r) F(r) + \int_0^\infty G_x(\rho) Q(\rho, r) d\rho = 0. \end{aligned} \right\} (3 a)$$

Denne Ligning er en Integralligning af den *Fredholm'ske* Type¹⁾,

$$\Psi(r) = \psi(r) + \int_a^b \Psi(\rho) \cdot \tau(r, \rho) d\rho,$$

hvis Løsning kan skrives paa Formen

$$\Psi(r) = \psi(r) + \int_a^b \psi(\rho) \cdot \pi(r, \rho) d\rho,$$

hvor Funktionen $\pi(r, \rho)$ kun er afhængig af $\tau(r, \rho)$ (d. v. s. uafhængig af $\psi(r)$). Af det *Fredholm'ske* Udtryk for $\pi(r, \rho)$ fremgaar det endvidere umiddelbart, at $\pi(r, \rho)$ vil være en symmetrisk Funktion af r og ρ , dersom $\tau(r, \rho)$ er en symmetrisk Funktion af disse Variable.

Sætter vi nu $G_x(r) = \Psi(r) \cdot g(r)$, hvor $g(r) = (F(r))^{-\frac{1}{2}} \cdot r^2 e^{-\frac{mr^2}{4kT}}$, faar vi af Ligningen (3 a), med Benyttelse af Ligningen (13) Side 23 for $Q(\rho, r)$,

$$\begin{aligned} \Psi(r) = -\frac{4\pi}{3} mK \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{mr^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) g(r) \\ + \int_0^\infty \Psi(\rho) \cdot g(\rho) g(r) S(\rho, r) d\rho. \end{aligned}$$

Idet nu den Funktion $g(\rho) g(r) S(\rho, r)$, der svarer til Funktionen $\tau(r, \rho)$ i den *Fredholm'ske* Ligning, her er symmetrisk med Hensyn til r og ρ , faar vi efter det ovenfor omtalte

¹⁾ Se f. Eks. *M. Bôcher*: Introduction to the Study of Integral Equations, Cambridge 1909, p. 29—38. (I den ovenstaaende Ligning (3 a) er Integralet taget mellem uendelige Grænser, medens det ved Beviset for den *Fredholm'ske* Løsning forudsættes, at Integralet er taget mellem endelige Grænser. Dette medfører dog her ingen Vanskelighed, idet det allerede af den fysiske Betydning af Ligningen (3 a) fremgaar, at det ikke vil gøre nogen væsentlig Forandring hverken for Ligningens Løsning eller for de Anvendelser, vi skal gøre af denne, om Integralet tages mellem Grænserne 0 og ∞ eller mellem 2 Grænser, af hvilke den ene er meget lille og den anden meget stor i Forhold til Elektronernes Middelhastighed ved den paa-gældende Temperatur.)

$$\Psi(r) = -\frac{4\pi}{3} mK \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{mr^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) g(r) \\ - \int_0^\infty \frac{4\pi}{3} mK \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{m\rho^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) g(\rho) \cdot S(\rho, r) d\rho,$$

hvor $S(\rho, r)$ betegner en symmetrisk Funktion af ρ og r , kun afhængig af $g(r)$ og $S(\rho, r)$. Af Ligningerne (1 a) og (2 a) faar vi nu

$$i_x = -A_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{kT}{\varepsilon K} \frac{\partial K}{\partial x} \right) - A_2 \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4 a)$$

og

$$W_x = -A_2 T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{kT}{\varepsilon K} \frac{\partial K}{\partial x} \right) - A_3 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5 a)$$

hvor

$$A_1 = \frac{4\pi\varepsilon^2 K}{3kT} \left\{ \int_0^\infty r^4 (F(r))^{-1} e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr + \int_0^\infty g(r) \left[\int_0^\infty g(\rho) S(\rho, r) d\rho \right] dr \right\},$$

$$A_2 = \frac{2\pi\varepsilon mK}{3kT^2} \left\{ \int_0^\infty r^6 (F(r))^{-1} e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr + \int_0^\infty g(r) \left[\int_0^\infty \rho^2 g(\rho) S(\rho, r) d\rho \right] dr \right\} = \\ \frac{2\pi\varepsilon mK}{3kT^2} \left\{ \int_0^\infty r^6 (F(r))^{-1} e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr + \int_0^\infty r^2 g(r) \left[\int_0^\infty g(\rho) S(\rho, r) d\rho \right] dr \right\}$$

og

$$A_3 = \frac{\pi m^2 K}{3kT^2} \left\{ \int_0^\infty r^8 (F(r))^{-1} e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr + \int_0^\infty r^2 g(r) \left[\int_0^\infty \rho^2 g(\rho) S(\rho, r) d\rho \right] dr \right\}.$$

Ligningerne (4 a) og (5 a) vil gælde i alle Tilfælde, i hvilke det antages, at der finder adskilte Sammenstød Sted; de indeholder derfor som specielle Tilfælde de af Lorentz¹⁾ og Gruner²⁾ givne Ligninger. Den Omstændighed, at den samme »Konstant« (d. v. s. Funktion af Metallets Natur og Temperatur i det betragtede Punkt) A_2 indgaar i Udtrykkene for i_x og W_x , viser, at der i alle de omhandlede Tilfælde bestaar en særegen ensartet Forbindelse mellem Elektricitetens og Varmens Bevægelse gennem Metallet. Den fysiske Betydning heraf vil nærmere blive omtalt ved Behandlingen af de thermoelektriske Fænomener.

¹⁾ H. A. Lorentz: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 447, 1905.

²⁾ P. Gruner: Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., Bd. 10, p. 524, 1908.

Som et enkelt Eksempel paa en Bestemmelse af Størrelserne A_1 , A_2 og A_3 skal vi her betragte det simple Tilfælde, hvor Metalmolekylerne antages at være faste Kraftcentre, der paavirker Elektronerne med Kræfter, der forholder sig omvendt som den n^{te} Potens af Afstanden, og hvor man ser bort fra Vekselvirkningen mellem Elektronerne indbyrdes. I dette Tilfælde har vi (se Side 33) $F(r) = C \cdot r^{\frac{n-5}{n-1}}$ og $Q(\rho, r) = 0$ (og altsaa $S(\rho, r) = 0$). Vi faar derfor

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{4\pi\epsilon^2 K}{3kT} \frac{1}{C} \int_0^\infty r^{\frac{3n+1}{n-1}} e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr = \frac{4\pi\epsilon^2 K}{3mC} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} \Gamma\left(\frac{2n}{n-1}\right) \\ A_2 &= \frac{2\pi\epsilon m K}{3kT^2} \frac{1}{C} \int_0^\infty r^{\frac{5n-1}{n-1}} e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr = \frac{2\pi\epsilon K}{3TC} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \Gamma\left(\frac{3n-1}{n-1}\right) \\ &= A_1 \cdot \frac{2n}{n-1} \frac{k}{\epsilon} \\ A_3 &= \frac{\pi m^2 K}{3kT^2} \frac{1}{C} \int_0^\infty r^{\frac{7n-3}{n-1}} e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr = \frac{\pi m K}{3TC} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{3n-1}{n-1}} \Gamma\left(\frac{4n-2}{n-1}\right) \\ &= A_1 \cdot \frac{2n(3n-1)}{(n-1)^2} \frac{k^2}{\epsilon^2} T. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Vi skal nu betragte det Tilfælde, hvor Metalmolekylerne antages at være saa nær inde paa hverandre, at Elektronerne under en stor Del af deres Bevægelse er underkastede Virkningerne af de fra Molekylerne udgaaende Kræfter. I Modsætning til, hvad der fandt Sted ved det ovenfor behandlede simplere Tilfælde — adskilte Sammenstød —, kan vi her, som omtalt i forrige Kapitel, ikke angive en almindelig Ligning til Bestemmelse af Elektronernes Bevægelsesmængde, og vi kan derfor ikke her angive den fuldt almindelige Form for Udtrykkene for Elektricitets- og Energistrømmingen. Vi har kun udledt Betingelsesligninger for Bevægelsesmængden under visse indskrænkende Antagelser, nemlig at Metalmolekylernes Kraftfelter kan betragtes som stationære, og at Vekselvirkningen mellem de fri Elektroner indbyrdes kan regnes for forsvindende i Sammenligning med Virkningen mellem Metalmolekylerne og Elektronerne. De følgende Beregninger omhandler derfor kun dette sidste Tilfælde.



Vi skal nu her søge den Elektricitetsmængde og den Sum af kinetisk Energi og potentiel Energi i Forhold til Metalmolekylerne, der ved Elektronernes Bevægelse i Tiden dt føres gennem et Fladelement dS vinkelret paa X -aksen. Idet disse Størrelser paa tilsvarende Maade som i det forrige Tilfælde betegnes henholdsvis ved $i_x dS dt$ og $W_x dS dt$, faar man med de Betegnelser, vi har benyttet i forrige Kapitel,

$$i_x = \frac{\varepsilon}{m} \int_0^{\infty} G_x(a) da \quad (1 b)$$

og

$$W_x = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} a G_x(a) da. \quad (2 b)$$

Til Bestemmelse af $G_x(a)$ har vi (Ligning (28) Side 42)

$$G_x(a) = -m \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{a}{kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) D(a) N(a). \quad (3 b)$$

Ved Hjælp af (1 b) og (2 b) faar vi nu

$$i_x = -A_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{kT}{\varepsilon K} \frac{\partial K}{\partial x} \right) - A_2 \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4 b)$$

$$W_x = -A_2 T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{kT}{\varepsilon K} \frac{\partial K}{\partial x} \right) - A_3 \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5 b)$$

hvor

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\varepsilon^2}{kT} \int_0^{\infty} D(a) N(a) da, & A_2 &= \frac{\varepsilon}{kT^2} \int_0^{\infty} a D(a) N(a) da, \\ A_3 &= \frac{1}{kT^2} \int_0^{\infty} a^2 D(a) N(a) da. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Som man ser, har Ligningerne (4 b) og (5 b) ganske samme Form som Ligningerne (4 a) og (5 a), og der gælder derfor de samme Bemærkninger om dem, som vi har gjort ved de sidstnævnte Ligninger.

Ligningerne (4) og (5) bestemmer fuldstændig Elektricitets- og Varmebevægelsen i Metallet. Idet vi ikke har gjort nogen særlig Antagelse om X -aksens Retning, viser Ligningerne, at Elektricitets-

og Energistrømningen gennem et Fladeelement kun afhænger af Variationerne i de ydre Kræfters Potential, Temperaturen o. s. v. i Retning vinkelret paa Elementet. Vi skal nu i de følgende Paragrafer udfra disse Ligninger undersøge Metallernes Elektricitets- og Varmeledning og de thermo-elektriske Fænomener.

§ 2.

Elektricitets- og Varmeledning.

Tænker vi os et homogent Metalstykke, der i alle sine Punkter har samme Temperatur, udsat for Virkningen af en konstant elektrisk Kraft $E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, vil det gennemløbes af en elektrisk Strøm, hvis Styrke pr. Fladeenhed i umiddelbart kan findes ved Hjælp af Ligningerne (4). Idet Differentialkvotienterne af K og T i dette Tilfælde er 0, faar vi

$$i = A_1 \cdot E.$$

Idet den elektriske Ledningsevne betegnes ved σ , faar vi altsaa

$$\sigma = A_1. \quad (8)$$

Dersom vi specielt antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted, og at Kræfterne mellem Metalmolekylerne og Elektronerne under disse Sammenstød forholder sig omvendt som n^{te} Potens af Afstanden, faar vi ved Hjælp af Ligningerne (6) Side 49 og Ligningen (5) Side 16

$$\sigma = \frac{4N\varepsilon^2}{3\sqrt{\pi}mC} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{n-5}{2(n-1)}} \Gamma\left(\frac{2n}{n-1} \right). \quad (9)$$

Dersom vi lader n vokse mod uendelig, hvilket vil være ensbetydende med at antage, at Molekylerne og Elektronerne paavirker hinanden som absolut haarde elastiske Kugler (se Side 33), faar vi, idet vi sætter $C = \frac{1}{l}$,

$$\sigma = \frac{4}{3} l N \varepsilon^2 (2\pi m k T)^{-\frac{1}{2}},$$

hvilket er den Værdi for σ , som *Lorentz*¹⁾ har fundet.

¹⁾ *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 448, 1905. (I *Lorentz's* Afhandling benyttes andre Betegnelser.)

Ved Elektronernes Bevægelse føres der foruden Elektricitet tillige Energi — Varme — igennem Metallet. Det er imidlertid i Almindelighed ikke muligt at angive en bestemt Værdi for den Energimængde, der ved Elektronernes Bevægelse føres igennem et vist Fladeelement, idet Elektronernes Energi, der er sammensat dels af kinetisk Energi, dels af potentiel Energi i Forhold til Metalmolekylerne og i Forhold til fri Elektricitetsmængder (ydre Kraftfelter), samt endelig af »indre« Energi, kun kan angives paa nær en arbitrær Konstant. Kun i et enkelt Tilfælde, nemlig hvor det samlede Antal Elektroner, der gaar gennem Fladeelementet, er 0, vil den omtalte Ubestemthed bortfalde. I dette Tilfælde vil den Energimængde, der i Tidsenheden føres gennem en Fladeenhed vinkelret paa X -aksen, være angivet ved den i det foregaaende omtalte Størrelse W_x . Da i dette Tilfælde den elektriske Strøm er 0, faar man, idet man eliminerer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ af Ligningen $i_x = 0$ og Ligningen for W_x (Ligningerne (4) og (5)),

$$W_x = - \frac{A_3 A_1 - T A_2^2}{A_1} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Energistrømningen i dette eneste fuldkommen behandlelige Tilfælde skal vi nu definere som Varmeledning, og faar altsaa, idet Varmeledningsevnen betegnes med γ ,

$$\gamma = \frac{A_3 A_1 - T A_2^2}{A_1}. \quad (10)$$

Vi ser, at vi paa denne Maade har faaet Varmeledningsevnen bestemt som en Størrelse, der kun er afhængig af Metallets Tilstand — Natur og Temperatur — paa det betragtede Sted; det er endvidere den Størrelse, der svarer til den, der er fundet ved de eksperimentelle Undersøgelser over Varmeledningsevnen. Ved de fleste af disse Undersøgelser — som f. Eks. *L. Lorenz's* ¹⁾ — iagttages Temperaturs Variation i en Metalstang, der er omgivet af elektriske Isolatorer. I en saadan Metalstang vil der meget hurtigt indtræde en elektrisk Ligevægt, saaledes at der ingen elektrisk Strøm gaar, og Forholdene i Stangen vil derfor fuldstændig svare til Forholdene i det ovenfor omtalte Tilfælde. Ved andre Undersøgelser — som f. Eks. *Jæger og Diesselhorst's* ²⁾ — iagttages Fordelingen af Temperaturen

¹⁾ *L. Lorenz*: Wied. Ann., Bd. 13, p. 422, 1881.

²⁾ *W. Jæger* u. *H. Diesselhorst*: Wiss. Abh. d. phys.-tech. Reichsanstalt, Berlin, Bd. 3, p. 269, 1900.

og af det elektriske Potential i en Metalstang, der gennemløbes af en elektrisk Strøm, hvorefter Varmeledningsevnen bestemmes ved Hjælp af en af *F. Kohlrausch*¹⁾ angivet Relation imellem Temperaturen og Potentialet i Stangens forskellige Punkter. Som vi skal se ved Omtalen af de thermoelektriske Fænomener, kommer man, ved Hjælp af Ligningerne (4) og (5) og ved at definere Varmeledningsevnen som ovenfor, til et Udtryk for Varmeudviklingen i et Volumelement af Metallet, der svarer til det, som er lagt til Grund for Opstillingen af den *Kohlrausch'ske* Relation.

Dersom vi atter specielt betragter adskilte Sammenstød og antager, at Kræfterne mellem Metalmolekylerne og Elektronerne forholder sig omvendt som n^{te} Potens af Afstanden, faar vi ved Hjælp af Ligningerne (10), (6), (8) og (9)

$$\gamma = A_1 \cdot \frac{2n}{n-1} \frac{k^2}{\epsilon^2} T = \frac{8nNk^2T}{3\sqrt{\pi}(n-1)mC} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{n-5}{2(n-1)}} \Gamma\left(\frac{2n}{n-1}\right). \quad (11)$$

Dersom vi lader n vokse imod ∞ og sætter $C = \frac{1}{l}$, faar vi

$$\gamma = \frac{8}{3} l N k^2 T (2\pi m k T)^{-\frac{1}{2}},$$

hvilket er *Lorentz's* Værdi for γ .

For Forholdet mellem Ledningsevnerne for Varme og Elektricitet faar vi nu af (8) og (10)

$$\kappa = \frac{\gamma}{\sigma} = \frac{A_3 A_1 - T A_2^2}{A_1^2}. \quad (12)$$

I det ovenfor betragtede specielle Tilfælde faar vi af Ligningerne (9) og (11)

$$\kappa = \frac{2n}{n-1} \frac{k^2}{\epsilon^2} T \quad (13)$$

og heraf for n lig ∞ den Værdi, som *Lorentz* har fundet²⁾,

$$\kappa = 2 \frac{k^2}{\epsilon^2} T. \quad (14)$$

¹⁾ *F. Kohlrausch*: Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wiss. 1899, p. 711.

²⁾ *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 449, 1905.

Vi skal her i Forbindelse med *Lorentz's* Værdi for κ omtale de Værdier, som *E. Riecke* (Wied. Ann., Bd. 66, pp. 353, 545 og 1199, 1898; Ann. d. Phys., Bd. 2, p. 835,

Medens de fundne Udtryk for den elektriske Ledningsevne og for Varmeledningsevnen indeholder de paa Forhaand ukendte eller i det mindste meget usikkert kendte Størrelser N og $l(C)$, er dette,

1900; Jahrb. d. Rad. u. Elek., Bd. 3, p. 24, 1906; Phys. Zeitschr., Bd. 10, p. 508, 1909) og *P. Drude* (Ann. d. Phys., Bd. 1, p. 566 og Bd. 3, p. 369, 1900) tidligere har beregnet for denne Størrelse, nemlig med vore Betegnelser henholdsvis

$$\kappa = \frac{27}{8} \frac{k^2}{e^2} T \left(1 + \frac{2}{3} \frac{T}{N} \frac{dN}{dT} \right) \quad \text{og} \quad \kappa = 3 \frac{k^2}{e^2} T;$$

disse Værdier stemmer nemlig bedre overens med Erfaringerne end den af *Lorentz* beregnede (se f. Eks. *Riecke*: Phys. Zeitschr. Bd. 10, p. 513—514, 1909).

De nævnte Forfattere gør samme Antagelser om Virkningerne af Sammenstødene mellem Metalmolekylerne og Elektronerne, som *Lorentz*, d. v. s. de antager, at en Elektron ved et Sammenstød i Middel mister hele sin oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning; de antager ogsaa, at de fri Elektroner befinder sig i Varmeligevægt med Metalmolekylerne — d. v. s. de antager, at Middelværdien af en Elektrons kinetiske Energi er lig Middelværdien af den kinetiske Energi af den fremadskridende Bevægelse af et Luftmolekyle ved samme Temperatur —; de antager derimod i Modsætning til *Lorentz*, at alle Elektronerne har samme absolute Hastighed. Efter den kinetiske Lufttheori er imidlertid Tilstedeværelsen af den *Maxwell'ske* Hastighedsfordeling saa nøje knyttet til Tilstedeværelsen af en Varmeligevægt i den ovenfor omtalte Forstand, at det synes, at man næppe er berettiget til at tillægge den nævnte bedre Overensstemmelse nogen Vægt. Vi kan iøvrigt vise, at denne bedre Overensstemmelse for den væsentligste Del ikke hidrører fra den omtalte Antagelse, men fra den ikke fuldt nøjagtige Maade, hvorpaa Beregningerne er udførte.

For Elektricitetsledningsevnen finder *Riecke* ved at gennemføre Beregningerne af de enkelte Elektrons Baner $\sigma = \frac{2}{3} l N e^2 (3mkT)^{-\frac{1}{2}}$. *Drude* finder derimod $\sigma = \frac{1}{2} l N e^2 (3mkT)^{-\frac{1}{2}}$, en Værdi, der, som man ser, er $\frac{3}{4}$ saa stor som *Riecke's*. Denne Forskel kommer af, at *Drude* beregner Elektronernes Middelhastighed i en bestemt Retning ved Hjælp af de Middelhastigheder, hvormed de enkelte Elektrons fri Baner mellem to Sammenstød gennemløbes, uden at tage Hensyn til, at de enkelte Baner gennemløbes i forskellige Tider, alt eftersom Elektronerne bevæger sig med eller imod den ydre elektriske Kraft.

For Varmeledningsevnen finder *Riecke* og *Drude* henholdsvis følgende Værdier:

$$\gamma = \frac{2}{3} l N k^2 T (3mkT)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{T}{N} \frac{dN}{dT} \right) \quad \text{og} \quad \gamma = \frac{2}{3} l N k^2 T (3mkT)^{-\frac{1}{2}}.$$

Forskellen mellem disse to Værdier hidrører fra, at *Riecke* og *Drude* definerer Varmeledningsevnen forskellig; medens *Drude*, ligesom vi ovenfor, definerer Varmeledningen som Energibevægelse uden elektrisk Strøm, definerer *Riecke* Varmeledningen som Energibevægelse uden ydre elektrisk Kraft. (De Korrektionsled hidrørende fra Forandringerne i de fri Elektrons Antal med Temperaturen, som indkommer i *Riecke's* Formel, stammer saaledes fra Led, der svarer til Leddet med $\frac{\partial K}{\partial x}$ i Ligning (5) (i Teksten), hvilket Led ved den af *Riecke* benyttede Definition fra Varmeledningen kommer til at spille en Rolle.) *Riecke's* Værdi for Varmeledningsevnen vil derfor, efter hvad vi ovenfor i Teksten har omtalt, ikke kunne benyttes til Sammenligning med de eksperimentelt fundne Værdier for denne Størrelse.

Vi ser altsaa, at den Værdi, man faar for Forholdet mellem Elektricitets- og

som vi ser, ikke Tilfældet med Udtrykkene (13) og (14) for Forholdet mellem Ledningsevnerne. Disse Udtryk giver derfor Lejlighed til at sammenligne Theorien med de eksperimentelt fundne Resultater.

De i Udtrykkene (13) og (14) indgaaende Størrelser ϵ (Elementarkvantum for Elektricitet) og k (den absolute Luftkonstant henført til et enkelt Molekyle) kendes vel kun med en temmelig ringe Nøjagtighed; men som *M. Reinganum*¹⁾ har gjort opmærksom paa, kan Forholdet k/ϵ bestemmes med stor Nøjagtighed ved Hjælp af velkendte Størrelser. Kaldes saaledes Antallet af Molekyler i en cm^3 af en Luftart (f. Eks. Brint) ved den absolute Temperatur T og Trykket p for N , har man (se Side 11) $p = kNT$; er endvidere den Elektricitetsmængde, der maa ledes igennem en Elektrolyt for at udskille en cm^3 Brint ved samme Tryk og Temperatur, lig E , har man $E = 2\epsilon N$ og altsaa $k/\epsilon = 2p/ET$. Vi faar paa denne Maade (idet, for $T = 273$ og $p = 1,013 \cdot 10^6$ (1 Atm.), $E = 0,259 \cdot 10^{10}$ (abs. elektrostatiske Maal)) $k/\epsilon = 0,287 \cdot 10^{-6}$.

Tabellen Side 56 indeholder en Oversigt over Resultaterne af *Jaeger* og *Diesselhorst's* Forsøg²⁾; Værdierne for σ , γ og κ er angivne ved 18°, og ved $\frac{T \Delta \sigma}{\sigma \Delta T}$, $\frac{T \Delta \gamma}{\gamma \Delta T}$ og $\frac{T \Delta \kappa}{\kappa \Delta T}$ skal forstaas $\frac{T_{180} \sigma_{1000} - \sigma_{180}}{\sigma_{180} T_{1000} - T_{180}}$ og de analoge Udtryk.

Varmeledningsevnen, udfra det Grundlag, hvorpaa *Riecke's* og *Drude's* Theorier er opbyggede, bliver (Forholdet mellem *Drude's* Værdi for γ og *Riecke's* for σ)

$$\kappa = \frac{9}{4} \frac{k^2}{\epsilon^2} T,$$

en Værdi, der kun afviger meget lidt fra *Lorentz's*, og som ikke stemmer væsentlig bedre overens med Erfaringerne end denne.

Vi skal endvidere her ved Omtalen af *Lorentz's* Beregninger omtale et Forsøg, som *G. Jäger* (Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl., Bd. 117, Abt. II a, p. 869, 1908) har gjort paa, udfra de samme fysiske Antagelser som *Lorentz*, at beregne Forholdet mellem Elektricitets- og Varmeledningsevnen uden Benyttelse af den statistiske Fremgangsmaade, men ved Betragtning af selve Elektronernes Baner. *Jäger* finder en Værdi for σ , der er $\frac{3}{4}$ Gange saa stor som *Lorentz's*, hvilket hidrører fra, at han beregner denne Størrelse paa tilsvarende Maade som *Drude* (smlg. ovenfor). At *Jäger* desuagtet finder samme Værdi for κ som *Lorentz*, hidrører fra, at der i hans Beregninger af Varmeledningsevnen er indkommet en Regnefejl, hvorved ogsaa Værdien for denne Størrelse bliver $\frac{3}{4}$ Gange for stor. Det antages nemlig (loc. cit., p. 873), at de Elektroner, der gaar igennem et Fladeelement, i Middel har haft deres sidste Sammenstød i en Afstand af $\frac{1}{2}l$ fra Fladen (l er Middelvejglængden), medens denne Afstand i Virkeligheden er $\frac{2}{3}l$. (Fejlen er indkommet ved, at det i Beregningerne af den omtalte Middelf afstand antages, at der gaar ligemange Elektroner gennem Fladeelementet i alle mulige Retninger, medens Antallet af Elektroner, der gaar gennem Fladen, i Virkeligheden er proportional med Cosinus af Vinklen mellem Elektronernes Retning og Normalen til Fladen.)

¹⁾ *M. Reinganum*: Ann. d. Phys., Bd. 2, p. 398, 1900.

²⁾ *W. Jaeger* und *H. Diesselhorst*: loc. cit., p. 424. [Tallene er beregnede ved Hjælp af Slutningstabellen. I de Tilfælde, hvor der er undersøgt flere Prøver af det samme Metal, er kun benyttet de Værdier, der svarer til de Metalprøver, der indeholder de færreste Urenheder.]

	$\sigma \cdot 10^{-17}, -\frac{T \Delta \sigma}{\sigma \Delta T}$	$\gamma \cdot 10^{-7}, \frac{T \Delta \gamma}{\sigma \Delta T}$	$\kappa \cdot 10^{10}, \frac{T \Delta \kappa}{\kappa \Delta T}$
Sølv	5,53	0,84	4,21 - 0,05 0,762 1,03
Kobber	5,06	0,86	3,76 - 0,06 0,742 1,07
Guld	3,72	0,79	2,93 + 0,01 0,788 1,03
Aluminium	2,84	0,82	2,01 + 0,09 0,707 1,18
Zink	1,486	0,84	1,110 - 0,04 0,747 1,05
Kadmium	1,182	0,88	0,927 - 0,11 0,784 1,02
Palladium	0,840	0,78	0,704 + 0,20 0,838 1,26
Platin	0,832	0,81	0,696 - 0,15 0,837 1,25
Nikkel	0,765	0,89	0,594 - 0,09 0,777 1,07
Tin	0,745	0,93	0,608 - 0,23 0,817 0,94
Jern	0,699	0,97	0,636 - 0,12 0,911 1,18
Staal	0,452	0,98	0,453 - 0,02 1,003 0,98
Bly	0,436	0,88	0,346 - 0,05 0,794 1,11
Vismut	0,0756	0,91	0,081 - 0,60 1,071 0,43
Messing	0,710	0,22	0,597 + 0,67 0,841 0,95
(85,7 Cu; 7,15 Zn; 6,39 Sn; 0,58 Ni)			
Manganin	0,214	0,00	0,217 - 0,77 1,016 0,76
(84 Cu; 4 Ni; 12 Mn.)			
Konstantan	0,184	0,00	0,224 - 0,66 1,229 0,67
(60 Cu; 40 Ni)			

De Værdier, der svarer til *Lorentz's* Theori (Ligning (14)), er

$$\kappa = 0,479 \cdot 10^{-10} \text{ og } \frac{T \Delta \kappa}{\kappa \Delta T} = 1.$$

Man ser af Tabellen, at de forskellige Metaller, tiltrods for at deres Ledningsevner for Varme og Elektricitet er meget forskellige, dog har omtrent samme Forhold mellem Ledningsevnerne — *Wiedemann-Franz's* Lov —, samt at dette Forhold for de enkelte Metaller varierer omtrent som den absolute Temperatur — *Lorenz's* Lov —.

Som man ser, er der endvidere, hvad Størrelsesordnen angaar, god Overensstemmelse mellem den beregnede Værdi for κ og de eksperimentelt fundne.

Denne Overensstemmelse, der som omtalt i det foregaaende først er paavist af *Drude*, er et af Elektrontheoriens smukkeste Resultater og synes bestemt at vise, at saavel Elektricitets- som Varmebevægelsen i Metallerne maa føres af Partikler, der har elektriske Ladninger af samme Størrelsesorden som Ionerne i en Elektrolyt, og som befinder sig i mekanisk Varmeligevægt med Metalmolekylerne, det vil sige i Middel

har en kinetisk Energi, hidrørende fra deres fremadskridende Bevægelse, der er lig Middelenergien af den fremadskridende Bevægelse af et Luftmolekyle ved samme Temperatur (se *Reinganum*: loc. cit, p. 403).

Som man ser af Tabellen paa forrige Side, er der dog betydelige Afvigelser mellem Værdierne for κ for de enkelte Metaller, ligesom endvidere alle de eksperimentelt fundne Værdier for κ ikke er saa lidt større end den af *Lorentz* beregnede Værdi.

Før vi fortsætter med denne Sammenligning mellem Theorien og Erfaringen, maa vi her først omtale et Forhold, der kunde tænkes at bevirke, at de eksperimentelt fundne Resultater ikke umiddelbart kan sammenlignes med den her behandlede Theori. Man kan nemlig tænke sig, at Varmeledningen i Metallerne for en Del ogsaa kan foregaa paa anden Maade end ved de fri Elektroners Bevægelse, idet jo ogsaa de Legemer, der kun i yderst ringe Grad leder Elektriciteten, besidder en vis, omend ringe Varmeledningsevne. Tilstedeværelsen af en saadan ikke-metallisk Varmeledningsevne vilde bevirke, at Forholdet κ var større end det, der svarer til det her beregnede. Efter Beregning af *J. Koenigsberger*¹⁾ vil imidlertid en saadan Varmeledningsevne af samme Størrelsesorden som den, man finder ved Isolatorerne, kun have meget ringe Indflydelse paa Værdien for κ hos de bedst ledende Metaller, men vilde vise sig tydeligt ved de slettest ledende Metaller og vilde kunne forklare den Omstændighed, at man for de slettest ledende Metaller gennemgaaende finder de største Værdier for κ . *Koenigsberger* tænker sig derfor Muligheden af, at Forholdet mellem den metalliske Varmeledningsevne og Elektricitetsledningsevnen i Virkeligheden er det samme hos alle de rene Metaller — (hos Legeringerne synes Forholdet at maatte være noget større) — og lig c. $0,70 \cdot 10^{-10}$ ved 18° .

De ovenfor omtalte Afvigelser er imidlertid ikke andet end, hvad man kunde vente efter vore foregaaende Beregninger. Ligning (13) Side 53 viser saaledes, at Forholdet mellem Varme- og Elektricitetsledningsevnen til en vis Grad er afhængigt af de specielle Antagelser, som man indfører om de mellem Metalmolekylerne og Elektronerne virkende Kræfter; ligesom denne Ligning viser, at dette Forholds Værdi i de omhandlede Tilfælde²⁾ altid vil være større end den af *Lorentz*

¹⁾ *J. Koenigsberger*: Phys. Zeitschr., Bd. 8, p. 237, 1907. (Se ogsaa *M. Reinganum*: Phys. Zeitschr., Bd. 10, pp. 355 og 645, 1909 og Bd. 11, p. 673, 1910, hvilken sidste Forfatter viser, at den Del af Varmeledningsevnen, der kan hidrøre fra indre Varmestraaling, for Metallerne Vedkommende vil være forsvindende i Forhold til den iagttagne Varmeledningsevne.)

²⁾ Værdien for κ vil blive større end *Lorentz's* Værdi i alle saadanne Tilfælde, hvor den »effektive fri Middelvej længde« (se Side 33) i det forholdsvis lille Interval omkring Elektronernes Middelhastighed, indenfor hvilket næsten alle Elektronernes absolute Hastigheder ligger, vokser paa regelmæssig Maade med voksende r (d. v. s.

beregnete Værdi. (Det kan saaledes bemærkes, at dersom vi i Ligningen (13) sætter $n = 3$ — svarende til de af *J. J. Thomson* betragtede »doublets« (se Side 34) —, faar vi en Værdi for κ , der stemmer udmærket overens med de eksperimentelt fundne Værdier for de bedst ledende Metaller, og som falder meget nær sammen med den af *Koenigsberger* (se ovenfor) angivne hypothetiske Værdi for κ for alle rene Metaller.)

Efter hvad vi har omtalt i Slutningen af forrige Kapitel (Side 44), vil man endvidere ogsaa i det Tilfælde, hvor Metalmolekylernes Dimensioner ikke antages at være forsvindende i Forhold til deres indbyrdes Afstande, dersom man ser bort fra Vekselvirkningen mellem de fri Elektroner indbyrdes og betragter Metalmolekylernes Kraftfelter som stationære, genfinde *Lorentz's* Værdi for κ , dersom Metalmolekylerne antages at være haarde elastiske Legemer (eller, hvad der udtrykker det samme, dersom Kræfterne mellem Metalmolekylerne og Elektronerne antages at variere overordentlig hurtigt med Afstanden), medens Værdien for κ i andre Tilfælde af den her omhandlede Art (jvnfr. Slutbemærkningen Side 45) i Lighed med i de ovenfor betragtede Tilfælde (smlg. Note 2, Side 57) i Almindelighed vil være større end *Lorentz's*.

Dersom man derimod vilde antage, at Virkningen af Sammenstødene mellem de fri Elektroner indbyrdes ikke var ringe i Forhold til Vekselvirkningen mellem Metalmolekylerne og Elektronerne, vil Værdien for κ kunne blive betydelig mindre end den af *Lorentz* fundne. Dette hidrører fra, at Sammenstødene mellem de fri Elektroner indbyrdes vil kunne bevirke en betydelig Nedsættelse af Varmeledningsevnen, idet de vil virke hindrende paa de enkelte Elektroners fri Bevægelser fra Sted til Sted i Metallet paa lignende Maade som Sammenstødene med Metalmolekylerne, medens de kun vil have yderst ringe Indflydelse paa Elektricitetslednings-evnen, idet de stødende Elektroners samlede Bevægelsesmængde i en be-

f. Eks. dersom den effektive fri Middelvejtlængde i det paagældende Interval med tilstrækkelig Tilnærmelse kan skrives paa Formen $a + b(r - r_0)$, hvor r_0 betegner Elektronernes Middelhastighed, og a og b er positive Konstanter). I saadanne særlige Tilfælde, hvor den effektive fri Middelvejtlængde antages at vokse meget uregelmæssigt med voksende r , vil imidlertid Værdien for κ under Omstændigheder kunne blive mindre end den af *Lorentz* beregnede Værdi. Dette sidste vil f. Eks. være Tilfældet ved *Gruner's* Theori (se Side 29), i hvilken Theori Værdien for κ findes mindre end *Lorentz's*, dersom Forholdet mellem den indførte »kritiske« Hastighed G og Elektronernes Middelhastighed ved den paagældende Temperatur samt Forholdet mellem de to Middelvejtlængder l_1 og l_2 ligger mellem visse bestemte Grænser (se *Gruner*: Phys. Zeitschr., Bd. 10, p. 50, 1909).

stemt Retning ikke vil forandres ved Sammenstødene¹⁾. Hele Virkningen paa Elektricitetsledningsevnen vil kun hidrøre fra, at der ved de betragtede Sammenstød omsættes Bevægelsesmængde mellem de forskellige Grupper af Elektroner med forskellige absolute Hastigheder, og at disse forskellige Grupper ulige hurtigt vil miste deres Bevægelsesmængde ved Sammenstød med Metalmolekylerne; i saadanne særlige Tilfælde, hvor det sidste ikke vil finde Sted — f. Eks. dersom man betragter adskilte Sammenstød og antager, at Metalmolekylerne paavirker Elektronerne med Kræfter, der forholder sig omvendt som 5^{te} Potens af Afstanden, (se Side 33) — vil derfor de betragtede Sammenstød mellem Elektronerne indbyrdes ingensomhelst Virkning kunne have paa Elektricitetsledningsevnen.

Vi maa endelig her bemærke, at man efter de foregaaende Beregninger ikke paa Forhaand kan vente nogen systematisk Afhængighed mellem Afvigelserne fra den *Wiedemann-Franz'ske* Lov og Afvigelserne fra den *Lorenz'ske* Lov. Ligning (13) viser nemlig, at κ vel er afhængig af den Maade, hvorpaa Kræfterne mellem Metalmolekylerne og Elektronerne varierer med Afstanden, men at dette Forhold, dersom man betragter adskilte Sammenstød og antager, at de omtalte Kræfter forholder sig omvendt som en eller anden Potens af Afstanden, for hvert enkelt Metal vil være proportionalt med den absolute Temperatur; og Afvigelser fra den *Lorenz'ske* Lov vil derfor i saadanne Tilfælde kun kunne fremkomme, dersom man antager, at selve de Kræfter, hvormed Metalmolekylerne paavirker Elektronerne, varierer med Temperaturen (f. Eks. som Følge af Forandringer indenfor selve Molekylerne).

Medens Elektrontheorien i hvert Tilfælde tilnærmelsesvis tillader at bestemme Forholdet mellem Metallernes Elektricitets- og Varmeledningsevne, idet dette Forhold, som vi har set, kun i temmelig ringe Grad er afhængigt af de specielle Antagelser om de Kræfter, der virker mellem Metalmolekylerne og Elektronerne, stiller Sagen sig ganske anderledes, naar det drejer sig om de enkelte Ledningsevner. De i det foregaaende beregnede Udtryk for Ledningsevnerne tillader,

¹⁾ Jvnfr. *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 449, 1905. (Vi maa i Sammenhæng med det her anførte omtale et Forsøg, som *P. Debye* (loc. cit., p. 484) har gjort paa at beregne Virkningen af Sammenstød mellem de fri Elektroner indbyrdes paa Elektricitets- og Varmeledningsevnen. *Debye* finder som Resultat af sine Beregninger, at Forholdet mellem Ledningsevnerne, i Modsætning til hvad vi ovenfor har omtalt, med Tilnærmelse ikke vil forandres ved de omhandlede Sammenstød. Dette hidrører imidlertid fra, at *Debye* antager, at en Elektron i Middel vil miste hele sin Bevægelsesmængde i en bestemt Retning ved et Sammenstød; dette sidste er efter det ovenfor omtalte ikke rigtigt, idet netop det karakteristiske for Sammenstød mellem fri Elektroner indbyrdes er, at Elektronernes samlede Bevægelsesmængde — og dermed deres Bidrag til den elektriske Strøm — ikke forandres ved Sammenstødet.)

som ovenfor bemærket, ikke nogen direkte Sammenligning med Erfaringerne paa Grund af de i dem indgaaende ubekendte Størrelser; heller ikke den Maade, hvorpaa Ledningsevnerne varierer med Temperaturen, kan forklares uden at indføre særlige Antagelser.

Det maa i denne Sammenhæng bemærkes, at de i det foregaaende ud fra specielle simple Antagelser udledte Formler for Elektricitetsledningsevnen ikke, dersom man antager, at de i Formlerne indgaaende Konstanter N og C , resp. I , er uafhængige af Temperaturen, kan bringes i Overensstemmelse med den Maade, hvorpaa Metallernes Elektricitetsledningsevne eksperimentelt findes at variere med Temperaturen. — (Ligning (9) viser saaledes, at Elektricitetsledningsevnen, dersom N og C ikke antages at variere med Temperaturen, i alle de betragtede Tilfælde (d. v. s. for alle $n > 2$) højst vil aftage ligesaa hurtigt som $T^{-\frac{1}{2}}$, medens derimod Ledningsevnen for de fleste rene Metaller aftager tilnærmelsesvis som T^{-1} .) — Dette er imidlertid næppe andet end, hvad man paa Forhaand kunde vente, idet Forholdene for Elektronernes Bevægelser i Metallerne sikkert maa antages i Virkeligheden at være meget indviklede og paa meget indviklet Maade at kunne forandre sig med Temperaturen ¹⁾.

De eksperimentelle Resultater er ogsaa her langt mere uensartede end i det ovenfor omtalte Tilfælde; navnlig er der her en langt større Forskel paa Legeringernes og de rene Metaller Forhold. Mange Legeringers Ledningsevne er saaledes langt ringere end de rene Metaller,

¹⁾ *J. Koenigsberger* (Jahrb. d. Rad. u. Elek., Bd. 4, p. 158, 1907) og *J. Koenigsberger* og *K. Schilling* (Ann. d. Phys., Bd. 32, p. 179, 1910) har forsøgt udfra Elektrontheorien at forklare den Maade, hvorpaa de faste Stoffers Elektricitetsledningsevne varierer med Temperaturen. De nævnte Forfattere betragter Tilstedeværelsen af de fri Elektroner i Metallet som et Resultat af en Dissociationsproces af Metalmolekylerne og antager derfor, at den Maade, hvorpaa Antallet N af fri Elektroner i Volumenenheden forandrer sig med Temperaturen, kan beregnes ud fra almindelige thermodynamiske Betragtninger. Udfra en saadan Antagelse kan man vel forklare, at Elektricitetsledningsevnen hos næsten alle undersøgte Stoffer besidder et Maksimum for en bestemt Temperatur (hos de rene Metaller er denne Temperatur dog i hvert Tilfælde meget lav); men for at opnaa en nærmere Overensstemmelse med Erfaringerne maa de nævnte Forfattere (se f. Eks. Ann. d. Phys., loc. cit., p. 218) yderligere indføre passende Antagelser om den fri Middelvejlængdes Forandring med Temperaturen — (de nævnte Forfattere bygger paa et Udtryk for Elektricitetsledningsevnen, der svarer til *Lorentz's* Theori; Forholdene vilde iøvrigt i den omhandlede Henseende ikke blive bedre, dersom man gik ud fra et Udtryk for σ svarende til Ligningen (9), idet man da maatte gøre lignende Antagelser om Forandringen af C med Temperaturen) —, Antagelser, for hvilke de ikke giver nogen theoretisk Begrundelse.

hvoraf de er sammensatte, og forandrer sig paa ganske anden Maade med Temperaturen (smlg. Tabellen Side 56)¹⁾.

Vi maa her omtale, at man har forsøgt at forklare disse sidste Forhold ved at opstille en Theori, efter hvilken der skulde være en væsentlig Forskel imellem Elektricitetsledningen igennem Legeringerne og de rene Metaller, hidrørende fra, at de første ikke skulde kunne betragtes som fysisk homogene, men som bestaaende af smaa Dele (Krystaller) af de rene Metaller, hvoraf de er sammensatte. I Legeringerne skulde der derfor foruden den almindelige elektriske Modstand optræde en tilsyneladende Modstand, nemlig en thermoelektrisk Polarisering, hidrørende fra Temperaturforskelle, frembragte ved *Peltier-Effekt* i Berøringsfladerne mellem de omtalte Smaadele. En saadan Theori er uafhængig af hinanden opstillet af *Lorenz*, *Ostwald*, *Rayleigh* og *Liebenow*²⁾. Senere Undersøgelser synes imidlertid bestemt at vise, at Legeringernes Forhold ikke kan forklares ved Antagelsen af en fysisk Inhomogenitet af den omhandlede Art³⁾.

Før vi forlader disse Spørgsmaal, skal vi her omtale, at Legeringernes Forhold synes at kunne forklares ud fra Elektrontheorien⁴⁾ uden

¹⁾ Angaaende de eksperimentelle Resultater vedrørende Legeringernes Ledningsevne for Elektricitet se f. Eks. *W. Guertler*: Jahrb. d. Rad. u. Elek., Bd. 5, p. 17, 1908.

²⁾ *L. Lorenz*: Wied. Ann., Bd. 13, p. 600, 1881; *W. Ostwald*: Zeitschr. f. physik. Chem., Bd. 11, p. 520, 1893; *Lord Rayleigh*: Nature, vol. 54, p. 154, 1896; *C. Liebenow*: Zeitschr. f. Elektrochem., Bd. 4, p. 201, 1897.

³⁾ Se f. Eks. *K. Baedeker*: Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern, Braunschweig 1911, p. 47—48.

⁴⁾ Vi maa her omtale et Forsøg, som *R. Schenck* (Ann. d. Phys., Bd. 32, p. 261, 1910) har gjort paa at forklare Forskellen mellem Legeringerne og de rene Metaller ud fra Elektrontheorien. I *Schenck's* Theori opfattes Legeringerne som »faste Opløsninger« af det ene Metal i det andet, og det opløste Metals Molekyler antages i Middel at besidde en ligesaa stor Bevægelsesenergi som et Luftmolekyle ved samme Temperatur. Idet Molekylernes Bevægelser antages at være underkastede meget store »Gnidningsmodstande«, vil de dog kun meget langsomt bevæge sig fra Sted til Sted og derfor ikke selv tage direkte Del i Varme- eller Elektricitetsledningen; deres Bevægelser antages imidlertid at øve Indflydelse paa de fri Elektroners Bevægelser. For det første antages Molekylernes Bevægelse at forøge »Gnidningsmodstanden« mod Elektronernes Bevægelse. For endvidere at forklare, at Legeringerne udviser en større Værdi for Forholdet mellem Varme- og Elektricitetsledningsevnen end de rene Metaller, antager *Schenck* (loc. cit. p. 272), »at Molekylerne er i Stand til at afgive deres kinetiske Energi til de fri Elektroner ved Stød og saaledes at bidrage til Varmeudligningen«. Dette udtrykkes nærmere saaledes (loc. cit., p. 273): »Den kinetiske Energi, som Elektronerne i Legeringerne har at transportere, er større end i de rene Metaller; til deres egen kommer endnu den, som de har optaget ved Sammenstødene med de opløste Molekyler. Den af Elektronerne i Legeringen overførte samlede kinetiske Energi er $i = \frac{N_e - N_\mu}{N_e}$ Gange saa stor som den i det rene Metal«. (N_e er de fri Elektroners Antal, N_μ Antallet af de opløste Molekyler i Rumfangsenheden.) I Overensstem-

at indføre nogen særlig Forskel mellem dem og de rene Metaller, dersom man, hvad der ikke forekommer mig usandsynligt, kan antage, at den samtidige Tilstedeværelse af uensartede Molekyler i Legeringerne, vil bevirke, at Kraftfelterne i det Indre af Metallet i disse er stærkere end i de rene Metaller, hvor Kræfterne kan tænkes i højere Grad at op-hæve hinanden. Dette vilde nemlig ikke alene kunne forklare Lege-ringernes ringe Ledningsevne som en Følge af den større Modstand mod Elektronernes samlede Bevægelse; men idet de omhandlede Kraftfelter vilde have større Indflydelse paa de langsomme Elektroners Bevægelse end paa de hurtigere, vilde Varmeledningen nedsættes i

melse med det her anførte sætter derfor *Schenck* i Formlerne for Elektricitets- og Varmeledningsevnen (*Drudes* Formler benyttes) ik i Stedet for k ($\frac{3}{2}kT$ betegner et Luftmolekyles Middelenergi ved Temperaturen T , hidrørende fra dets fremadskridende Bevægelse) og finder derfor Forholdet mellem Varme- og Elektricitetsledningsevnen i^2 Gange saa stort for Legeringerne som for de rene Metaller.

De forskellige Antagelser, der gøres i den omhandlede Theori, synes imidlertid ikke berettigede. For det første antages kun det opløste Stofs Molekyler og ikke Opløsningsmidlets Molekyler at være i Besiddelse af Bevægelsesenergi; dette synes ganske utænkeligt, — en hel anden Sag er det jo, at man ved mange Spørgsmaal, f. Eks. det opløste Stofs osmotiske Tryk, Diffusion o. s. v., ikke behøver at tage direkte Hensyn til Bevægelsen af Opløsningsmidlets Molekyler —; tilskriver man imidlertid ogsaa Opløsningsmidlets Molekyler Bevægelsesenergi, falder, som man umiddelbart indser, hele den i *Schenck's* Theori omhandlede Forskel mellem Legeringerne og de rene Metaller fuldstændig bort. Rent bortset fra dette, synes imidlertid heller ikke de Slutninger, *Schenck* drager af de opløste Molekylers Bevægelse at være berettigede. Saaledes vil vel Sandsynligheden for Sammenstød mellem Elektronerne og Metalmolekylerne, og dermed de ovenfor omtalte »Gnidningsmodstande«, være større, naar Molekylerne tænkes at være i Bevægelse, end naar de tænkes at være i Hvile, men Forøgelsen vil i det her omhandlede Tilfælde paa Grund af Elektronernes store Hastigheder i Forhold til Metalmolekylernes være ganske forsvindende. (Man beviser saaledes i den kinetiske Lufttheori (se f. Eks. *Jeans*: Dynamical Theory of Gases, p. 234), at Sandsynligheden for Sammenstød mellem to forskellige Slags Luftmolekyler med Masserne m_1 og

m_2 vil være $K \cdot \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}$, hvor K betyder Sandsynligheden for Sammenstød, naar Molekylerne med Masse m_2 tænkes ubevægelige. Ved de almindelige Metaller vil Forholdet mellem Elektronernes Masser og Metalmolekylernes Masser være c. 10^{-5} og Kvadratroden derfor ikke afvige mærkeligt fra 1.) Hvad endvidere *Schenck's* Antagelser om de fri Elektroners Energioverføring angaar, synes dette efter min Mening ikke at kunne opfattes anderledes, end at de fri Elektroners Middelenergi i *Schenck's* Theori sættes lig med $i \cdot \frac{3}{2}kT$. (Det synes nemlig ikke berettiget at skelne mellem Elektronernes »egen« Energi og »den, som de har optaget ved Sammenstødene med Metalmolekylerne«.) Dette vil imidlertid være i Modstrid med de Antagelser, der theoretisk begrundes i den kinetiske Lufttheori, og som danner Grundlaget for Metallernes Elektrontheori, efter hvilke Middelenergien af et Molekyle af en hvilken som helst Slags, der befinder sig i mekanisk Varmelige-vægt med Molekyler af samme eller andre Slags, er lig $\frac{3}{2}kT$.

forholdsvis ringere Grad end Elektricitetsledningen; og endelig maatte Temperaturkoefficienten (regnet med Fortegn) for Elektricitetslednings-
evnen ventes at være større end for de rene Metaller, idet den effek-
tive Middelveljængde (forudsat, at Molekylernes Kraftfelter antages at
være uafhængige af Temperaturen) vilde stige stærkere med Tempe-
raturen end hos disse (smlg. Forandringerne med aftagende n i Vær-
dierne for $\frac{\gamma}{\sigma}$ og $\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT}$ givne ved Ligningerne (13) og (9)).

§ 3.

Thermoelektriske Fænomener.

Vi har i det foregaaende betragtet to særlige Tilfælde — Elektri-
citetets- og Varmeledning — af henholdsvis Elektricitets- og Energi-
bevægelse i et homogent Metalstykke. Vi skal nu udfra Ligningerne
(4) og (5) betragte de mere almindelige Tilfælde af Elektricitets- og
Varmebevægelse i et Metalstykke, og vi skal se, hvorledes de om-
handlede Ligninger fører til en fuldstændig Theori for de saakaldte
thermoelektriske Fænomener. Ved Behandlingen af disse Spørgs-
maal skal vi i Hovedsagen følge den elegante Fremstillingsmaade, der
er angivet af *H. A. Lorentz*¹⁾.

Ligningerne (4) og (5) kan, idet man indfører de i det foregaaende
ved σ og γ betegnede Størrelser (se Ligningerne (8) og (10)) og sætter
 $A_2 = \mu \frac{k}{\varepsilon} A_1$, skrives paa Formen

$$i_x = -\sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{k}{\varepsilon} \frac{T}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (15)$$

og

$$W_x = \mu \frac{k}{\varepsilon} T i_x - \gamma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (16)$$

hvor Størrelsen K efter Ligning (20) Side 39 bestemmes ved

$$K = N \cdot \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\int e^{-\frac{e\lambda}{kT}} dv \right]^{-1} \quad (17)$$

(hvilket, dersom man betragter »adskilte Sammenstød« ($\lambda = 0$), giver
 $K = N \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{3}{2}}$ (smlg. Lign. (5) Side 16)).

Ligningerne (15) og (16) bestemmer fuldstændig Elektricitets- og
Varmebevægelsen i et Metalstykke, i hvilket Metallets Natur og Tem-

¹⁾ *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, pp. 451 og 585, 1905.

peratur er ens i alle Punkter af et Plan vinkelret paa X -aksen; i de mere almindelige Tilfælde, hvor Metallets Natur og Temperatur varierer paa vilkaarlig Maade, maa man ogsaa benytte de til (15) og (16) svarende Ligninger, der faas ved at ombytte x med henholdsvis y og z . Vi skal imidlertid i det følgende for Simpelteds Skyld, da det ikke medfører nogen væsentlig Forandring i Resultaternes Karakter, antage, at det Metalstykke, vi betragter, har Form af en tynd Traad — en thermoelektrisk Kæde —, hvis Tværsnits Dimensioner overalt er meget smaa i Forhold til Krumningsradien, og i hvilken Metallets Natur og Temperatur antages at være meget nær ens i alle Punkter af hvert enkelt Tværsnit. I et saadant Tilfælde vil man, som man umiddelbart indser, kunne nøjes med at benytte Ligningerne (15) og (16), dersom blot x i disse Ligninger antages at betegne Buelængden paa en Kurve lagt igennem Tyngdepunkterne af Kædens Tværsnit regnet ud fra et fast Punkt paa denne Kurve.

Vi skal nu først betragte en aaben thermoelektrisk Kæde, det vil sige en Kæde, i hvilken der ingen elektrisk Strøm gaar. I dette Tilfælde faar vi af Ligningen (15), idet vi sætter $i_x = 0$,

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{T}{K} \frac{dK}{dx} + \mu \frac{dT}{dx} \right), \quad (18)$$

en Ligning, ved Hjælp af hvilken man kan bestemme Potentialdifferensen mellem to hvilket som helst Punkter af Kæden.

Det maa dog bemærkes, at de her omhandlede Potentialdifferenser er Differenser mellem Potentialen i Punkter i det Indre af Metallet. Disse Potentialdifferenser er derfor ikke direkte tilgængelige for Maalinger, idet det maa antages, at der finder et betydeligt Potentialfald Sted i umiddelbar Nærhed af Metallets Overflade. (Et saadant Potentialfald iagttages saaledes ved Undersøgelser over Metallernes Udsendelse af Elektroner ved høje Temperaturer og over den Varmemængde, der frigøres ved Metallernes »Absorption« af fri Elektroner (se f. Eks. *Richardson* og *Cooke*: *Phil. Mag.*, vol. 20, p. 173, 1910).) De nedenstaaende Beregninger kan derfor ikke benyttes til direkte Sammenligning med Erfaringerne, undtagen i saadanne Tilfælde, hvor det gælder Potentialdifferensen mellem to Punkter af Kæden, der bestaar af samme Metal, og som har samme Temperatur.

Ligningen (18) tillader at drage forskellige Slutninger.

1) Dersom Temperaturen overalt i Kæden er konstant, faar man ved Integration

$$\varphi_P - \varphi_Q = -\frac{k}{\varepsilon} T \log \frac{K_P}{K_Q}, \quad (19)$$

hvilken Ligning udsiger, at Potentialdifferensen mellem to Punkter, P og Q , af Kæden kun vil være afhængig af Metallets Natur i disse Punkter og vil være 0, dersom denne er den samme. — Heraf følger, at Metallerne med Hensyn til de betragtede Potentialdifferenser for hver Temperatur vil kunne lade sig ordne i en saakaldt Spændingsrække. —

Af Ligning (18) faas i det her omhandlede Tilfælde ved Benyttelse af (17)

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{k}{\varepsilon} \frac{T}{N} \frac{dN}{dx} - \int \frac{\partial \lambda}{\partial x} e^{-\frac{\varepsilon \lambda}{kT}} dv : \int e^{-\frac{\varepsilon \lambda}{kT}} dv. \quad (20)$$

Da Antallet af Elektroner i Volumenelementet dv efter Ligning (19) Side 39, dersom der er statistisk Ligevægt, vil være proportionalt med $e^{-\frac{\varepsilon \lambda}{kT}}$, vil i et saadant Tilfælde det sidste Led i Ligning (20) være lig Middelværdien af $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$ beregnet over alle Elektronerne; idet vi betegner en saadan Middelværdi med $\overline{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}$, faar vi af Ligning (20)

$$-N\varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dx} + \overline{\frac{\partial \lambda}{\partial x}} \right) - kT \frac{dN}{dx} = 0,$$

hvilken Ligning umiddelbart udtrykker Betingelsen for, at de elektriske Kræfter, der virker paa Elektronerne, holder Ligevægt med Forandringerne i Elektronernes Tryk, $p = k \cdot NT$ (se Side 11); i det her betragtede Tilfælde, hvor der dels er elektrisk Ligevægt, og dels Temperaturen er konstant, vil nemlig Elektronerne ikke besidde nogen ordnet Bevægelse i en bestemt Retning, og der vil derfor ikke fremkomme nogen »Ophobning af Elektronerne foran Metalmolekylerne« (se Side 43, smlg. iøvrigt det følgende Tilfælde).

2) Dersom Kæden overalt bestaar af samme Metal, vil, idet i dette Tilfælde K og μ er Funktioner af Temperaturen alene, Udtrykket for $d\varphi$ være et eksakt Differential med Hensyn til dT , og Potentialdifferensen mellem to Punkter af Kæden vil derfor kun afhænge af Temperaturen i disse Punkter og være 0, dersom Temperaturen er den samme.

Ligning (18) tillader i dette Tilfælde ikke en saa simpel Tydning som i det forrige Tilfælde, hvilket hidrører fra, at der i dette Tilfælde vil gaa en Varmestrøm igennem Kæden, og der derfor vil fremkomme en Modstand mod Elektronernes ordnede Bevægelse fra Metalmole-

kylernes Side. Dette ses simplest, dersom man betragter et Metalstykke, i hvilket det antages, at der finder adskilte Sammenstød Sted. Dersom man antager, at de Kræfter, hvormed Metalmolekylerne paavirker Elektronerne, aftager omvendt som n^{te} Potens af Afstanden, faar man i dette Tilfælde ved Hjælp af Ligningerne (6) Side 49 $\mu = \frac{2n}{n-1}$; af (18) faas nu ved Hjælp af (17), idet vi sætter $\lambda = 0$,

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{T}{N} \frac{dN}{dT} + \frac{n+3}{2(n-1)} \right) \frac{dT}{dx}. \quad (21)$$

Dersom $n = \infty$, bliver det sidste Led indenfor Parenthesen lig $\frac{1}{2}$, hvilket svarer til Koefficienten til det paagældende Led i *Lorentz's* Udtryk for $\frac{d\varphi}{dx}$. Dersom $n = 5$, bliver det omhandlede Led lig 1, og dette

svarer til et Udtryk for $\frac{d\varphi}{dx}$, som *G. Jäger*¹⁾ har udledt ved at gaa ud fra, at der skulde være Ligevægt mellem de ydre elektriske Kræfter og Elektronernes Tryk; denne sidste Overensstemmelse er ogsaa let forstaaelig, idet vi Side 33 har omtalt, at den i Tidsenheden til Metalmolekylerne afgivne Bevægelsesmængde — og følgelig den resulterende Kraft, hvormed Molekylerne modsætter sig Elektronernes ordnede Bevægelse —, dersom $n = 5$, er proportional med Elektronernes samlede Bevægelsesmængde, og denne er i dette Tilfælde lig 0, da der ingen elektrisk Strøm gaar.

3) Dersom Kæden bestaar af flere forskellige Metaller, og Temperaturen er forskellig paa de forskellige Steder, vil Potentialdifferensen mellem Kædens Endepunkter, dersom disse bestaar af samme Metal og har samme Temperatur, kun afhænge af Temperaturen i Berøringsstederne mellem de forskellige Metaller (Temperaturen antages her at være konstant paa de korte Stykker, hvor den gradvise Overgang mellem Metallerne tænkes at finde Sted). Rigtigheden af denne Sætning fremgaar umiddelbart af det, der er sagt ved Omtalen af de to ovenfor behandlede Tilfælde. Vi skal nu her beregne Størrelsen af

¹⁾ *G. Jäger*: Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl., Bd. 117, Abt. II a, p. 859, 1908. [*Jäger* begrunder (loc. cit., p. 859, Note 1) ikke sin Fremgangsmaade ud fra en saadan Betragtning som den i Teksten staaende, men derudfra, at han antager, at man kan se bort fra Sammenstødene mellem Elektronerne og Metalmolekylerne i Forhold til Sammenstødene mellem Elektronerne indbyrdes, en Antagelse, der imidlertid, efter hvad der er omtalt i det foregaaende (Side 58), ikke kan forenes med de eksperimentelt fundne Værdier for Forholdet mellem Varme- og Elektricitetsledningsevnen, idet Værdien af dette Forhold, beregnet ud fra en saadan Antagelse, vil blive mange Gange for lille.]

Potentialdifferensen mellem Endepunkterne af en Kæde, der bestaar af to Metaller P og Q , idet vi antager, at Temperaturen i Berøringsstedet mellem P og Q er T_1 og mellem Q og P er T_2 , samt at Temperaturen i Endepunkterne x_1 og x_2 , der antages at bestaa af Metallet P , er lig T_0 . Af Ligning (18) faar vi, idet vi betegner den omhandlede Potentialdifferens — den elektromotoriske Kraft i Kæden — med F ,

$$F = \varphi_{x_2} - \varphi_{x_1} = - \frac{k}{\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{T}{K} \frac{dK}{dx} + \mu \frac{dT}{dx} \right) dx.$$

Ved partiel Integration af det første Led under Integraltegnet faar vi

$$F = \frac{k}{\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} (\log K - \mu) \frac{dT}{dx} dx = \frac{k}{\varepsilon} \int_{T_0}^{T_1} (\log K_p - \mu_p) dT + \frac{k}{\varepsilon} \int_{T_1}^{T_2} (\log K_q - \mu_q) dT + \frac{k}{\varepsilon} \int_{T_2}^{T_0} (\log K_p - \mu_p) dT,$$

og heraf

$$F = \frac{k}{\varepsilon} \int_{T_1}^{T_2} \left(\log \left(\frac{K_q}{K_p} \right) - (\mu_q - \mu_p) \right) dT. \quad (22)$$

Dette Udtryk adskiller sig fra det af *Lorentz*¹⁾ givne Udtryk ved Tilføjelsen af det sidste Led under Integraltegnet; dette Led forsvinder nemlig af *Lorentz's* Beregninger, fordi μ efter hans Theori har samme Værdi for alle Metaller, nemlig $\mu = 2$ (se Side 66). I *Gruner's*²⁾ Theori (se Side 29) vil derimod μ være forskellig for to Metaller, dersom den i denne Theori indgaaende kritiske Hastighed G , eller Forholdet mellem de to Middelveljængder l_1 og l_2 , er forskellig i de omhandlede Metaller. Det af *Gruner* givne Udtryk for F har derfor samme Form som det i (22) givne almindelige Udtryk.

Vi skal nu undersøge den Varmetoning, der finder Sted, naar der gaar en elektrisk Strøm gennem en saadan thermo-elektrisk Kæde. Tilstanden skal antages at være stationær, idet Temperaturen tænkes at blive holdt konstant i ethvert Punkt af Kæden, ved at der udefra tilføres eller bortledes Varme. — Idet Kæden antages

¹⁾ *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 453, 1905.

²⁾ *P. Gruner*: Phys. Zeitschr., Bd. 10, p. 50, 1909.

at bestaa af en tynd Traad, vil dette kunne lade sig gøre, uden at Temperaturen i et enkelt Tværsnit varierer mærkeligt. —

Vi skal nu betragte et lille Element af Kæden beliggende mellem to Planer, der bestemmes ved Koordinaterne x og $x + dx$, og vi skal søge den Varmemængde dQ , der i Tidsenheden maa ledes bort fra et saadant Element for at holde Temperaturen konstant.

Denne Varmemængde vil være lig Differensen mellem den Energi, der tilføres Elektronerne i Elementet ved de ydre Kræfters Virksomhed, og den Energi, der ved Elektronernes Bevægelse føres bort i Kædens Længderetning. Idet Tilstanden antages at være stationær, vil der føres ligesaa mange Elektroner ud af som ind i det betragtede Element af Kæden, og den sidst omtalte Energimængde vil derfor kunne bestemmes ved Hjælp af Udtrykket for W_x , der angiver Summen af den kinetiske Energi og den potentielle Energi i Forhold til Metalmolekylerne, der i Tidsenheden ved Elektronernes Bevægelse føres igennem en Fladeenhed af Kædens Tværsnit (jvnfr. Side 52); vi har derfor, idet Arealet af Kædens Tværsnit betegnes ved ω ,

$$dQ = - \left(\omega i_x \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d(\omega W_x)}{dx} \right) dx.$$

Dette giver ved Hjælp af Ligningerne (15) og (16), idet vi borteliminerer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ og bemærker, at $\omega i_x = i$ i det omhandlede Tilfælde er uafhængig af x ,

$$dQ = \left(\frac{i^2}{\omega \sigma} + i \frac{k}{\varepsilon} T \frac{d(\log K - \mu)}{dx} - \frac{d \left(\omega k \frac{dT}{dx} \right)}{dx} \right) dx. \quad (23)$$

Det første Led i Udtrykket for dQ , der er proportionalt med Strømstyrkens Kvadrat, angiver den *Joule'ske* Varme, og det sidste Led, der er uafhængigt af den elektriske Strøm, den Varmeudvikling, der skyldes den almindelige Varmeledning; endelig giver det mellemste Led, der svarer til en Varmeudvikling

$$dQ_R = i \frac{k}{\varepsilon} T \frac{d(\log K - \mu)}{dx}, \quad (24)$$

der er proportional med Strømstyrken, og som forandrer sit Fortegn, naar Strømmens Retning forandres, Udtryk for de saakaldte *Peltier-* og *Thomson-Effekter*. For at undersøge denne sidste Varmetoning nærmere skal vi her betragte to forskellige Tilfælde.

Vi skal først betragte et Stykke af Kæden, indenfor hvilket Temperaturen er konstant, og i hvilket der finder en Overgang Sted fra Metallet P til Metallet Q . Ved Hjælp af Udtrykket (24) finder vi ved

Integration, at den Varmemængde, der udvikles i Tidsenheden i den betragtede Del af Kæden, og som angives ved det omhandlede Led i Formlen (23), vil være lig

$$i \frac{k}{\varepsilon} T \left(\log \frac{K_Q}{K_P} - (\mu_Q - \mu_P) \right).$$

Idet vi nu ved *Peltier*-Effekten $\pi_{P,Q}$ skal forstaa den Varmemængde, der absorberes ved Berøringsstedet mellem to Metaller *P* og *Q*, der som der gaar en Elektricitetsenhed gennem Berøringsstedet fra *P* til *Q*, faar vi

$$\pi_{P,Q} = \frac{k}{\varepsilon} T \left(\log \frac{K_P}{K_Q} - (\mu_P - \mu_Q) \right). \quad (25)$$

Betragter vi dernæst et Stykke af Kæden, indenfor hvilket Metallet er det samme, faar vi af Udtrykket (24), idet *K* og μ i dette Tilfælde vil være Funktionen af *T* alene, at den Varmemængde, der angives ved det omhandlede Led i (23), og som udvikles i Tidsenheden i et lille Stykke af Kæden, indenfor hvilket Temperaturen forandrer sig fra *T* til *T* + *dT*, vil være

$$i \frac{k}{\varepsilon} T \frac{d(\log K - \mu)}{dT} dT.$$

Idet vi nu ved *Thomson*-Effekten ρ skal forstaa den Varmemængde, der absorberes i et Stykke af en Metalstang, i hvilket Temperaturen varierer 1°, naar der gaar en Elektricitetsenhed gennem Stangen i Retning fra lavere Temperatur til højere, faar vi

$$\rho = - \frac{k}{\varepsilon} T \frac{d(\log K - \mu)}{dT}. \quad (26)$$

Dersom vi antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted, og at Molekylernes Kraftfelter — Loven for Sammenstødene — er ens i alle Metaller og ved alle Temperaturer, vil Udtrykkene for *F*, π og ρ , idet vi indsætter Værdien for *K*, given ved Ligningen (17) Side 63 ($\lambda = 0$), og bemærker at μ i dette Tilfælde er konstant, blive

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{k}{\varepsilon} \int_{T_1}^{T_2} \log \left(\frac{N_Q}{N_P} \right) dT, & \pi_{P,Q} &= \frac{k}{\varepsilon} T \log \left(\frac{N_P}{N_Q} \right), \\ \rho &= - \frac{k}{\varepsilon} T \frac{d \log N}{dT} + \frac{3}{2} \frac{k}{\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

hvilket er de Værdier, som *Lorentz* har fundet. Idet $\frac{3}{2} kT$ er Middelværdien af en Elektrons kinetiske Energi ved Temperaturen *T*, vil det sidste Led i Udtrykket for *Thomson*-Effekten $\frac{3}{2} k/\varepsilon$ være den

Varmemængde, der skal tilføres en Samling fri Elektroner, hvis samlede elektriske Ladning er en Elektricitetsenhed, naar Temperaturen skal stige en Grad.

De her udledte Udtryk for den thermoelektriske Kraft og *Peltier*- og *Thomson*-Effekterne tillader ikke en nøjere direkte Sammenligning med Erfaringen paa Grund af de i dem indgaaende ubekendte Størrelser K og μ . — Vi skal derimod i det følgende betragte den indbyrdes Sammenhæng mellem de tre omhandlede Størrelser. — Vi skal her kun omtale den Omstændighed, at Udtrykket for *Thomson*-Effekten indeholder et Led, nemlig det ovenfor betragtede Led $\frac{3}{2} k/\epsilon$, der er betydelig større end de iagttagne Værdier for *Thomson*-Effekten¹⁾. Dersom man antager adskilte Sammenstød og samme Lov for Sammenstødene i alle Metaller og ved alle Temperaturer (se Lign. (27)), maa man derfor, for at kunne forklare *Thomson*-Effekten i Overensstemmelse med Erfaringen, antage, at de fri Elektroners Antal i Volumenenheden i alle Metaller varierer omtrentlig paa samme Maade med Temperaturen, nemlig som $T^{\frac{3}{2}}$; kun i dette Tilfælde vil nemlig de to Led i Udtrykket for *Thomson*-Effekten omtrentlig hæve hinanden²⁾. Som det fremgaar af Ligningen (26), vil der imidlertid yderligere indkomme Led i Udtrykket for *Thomson*-Effekten, dersom μ varierer med Temperaturen, d. v. s. dersom Metalmolekylernes Kraftfelter forandrer sig med Temperaturen. Det kan i denne Sammenhæng bemærkes, at Antagelsen af en saadan Forandring, efter hvad vi har omtalt i forrige Paragraf (se Noten Side 60), er nødvendig for at forklare den elektriske Ledningsevnes iagttagne Afhængighed af Temperaturen.

¹⁾ Se f. Eks. *J. Kunz*: *Phil. Mag.*, vol. 16. p. 781, 1908. [*Kunz* mener, at man kan forklare den omhandlede tilsyneladende Uoverensstemmelse mellem Theorien og Erfaringerne ved at antage, at Elektroner, der bevæger sig gennem Metallet i Retning fra lavere Temperatur til højere, ikke vil absorbere den samme Energi fra Metallet, dersom de bevæger sig under Indflydelse af en ydre elektrisk Kraft, som naar de diffunderer frit som Følge af Temperaturforskelle. En saadan Antagelse vil imidlertid stride imod de Hovedprinciper, der lægges til Grund for Metallerne Eletrontheori — og hvis Rigtighed ogsaa antages af *Kunz* selv paa det citerede Sted —, nemlig at de ydre Kræfter kun vil have en meget ringe Indflydelse paa de enkelte Elektroners Bevægelse.]

²⁾ Se f. Eks. *J. J. Thomson*: *The Corpuscular Theory of Matter*, p. 79. [Paa det citerede Sted angives dog, hidrørende fra den ikke fuldt nøjagtige Beregningsmaade (den kinetiske Energi, der under en Luftarts Bevægelse føres igennem en Flade i en bestemt Retning, er nemlig ikke lig Molekylernes Middelenergi $\frac{3}{2} kT$ multipliceret med det Antal Molekyler, der gaar gennem Fladen, men er, som en nærmere Beregning viser, $\frac{5}{3}$ Gange saa stor), at N maa forholde sig som $T^{\frac{3}{2}}$ i Stedet for som $T^{\frac{5}{2}}$.]

Vi maa her bemærke, at de fundne Udtryk for π og ρ vel afhænger af Metalmolekylernes Kraftfelter, for saa vidt som disse bestemmer de fri Elektroners Bevægelser paa de enkelte Steder i Metallet, men ikke er direkte afhængige af Forandringen fra Sted til Sted i Metallet af Middelværdien af Elektronernes Potential i Forhold til Metalmolekylerne, og at der derfor f. Eks. ingen umiddelbar Sammenhæng er imellem Værdien af *Peltier*-Effekten og de i det foregaaende omtalte Spændingsdifferenser mellem to Metaller i Berøring. Betragter man saaledes to Metalstykker P og Q , i hvis Indre alle Forhold antages at være ens, undtagen at Elektronernes potentielle Energi i hvert Punkt i det Indre af P er λ_0 større end den potentielle Energi i det tilsvarende Punkt i Q , vil Spændingsforskellen mellem de to Metaller, der angives ved (19), som det ses ved Betragtning af Udtrykket (17) for K , være $\varphi_P - \varphi_Q = -\lambda_0$. Derimod vil i et saadant Tilfælde *Peltier*-Effekten være 0, idet Værdien af $(\log K - \mu)$, som det ses ved Betragtningen af Ligningerne (7) og (17), vil være uafhængig af en saadan konstant Forskel i Elektronernes potentielle Energi. Dette er ogsaa, hvad man paa Forhaand kunde vente, idet de omhandlede Spændingsdifferenser i et saadant Tilfælde netop holder Ligevægt med de fra Metalmolekylerne udgaaende Kræfter, saa at Elektronerne i det Indre af Metallet vil bevæge sig, som om Metalstykket var homogent¹⁾.

Vi skal nu gaa over til at omtale de i det foregaaende udledte Resultaters Stilling til den af Lord *Kelvin*²⁾ opstillede thermodynamiske Theori for de thermoelektriske Forhold. I denne Theori betragtes Elektricitetens Gennemgang gennem en sluttet thermoelektrisk Kæde som en reversibel Kredsproces, ved hvilken der kan omsættes Varme til Arbejde og omvendt, — de Varmemængder, der her er Tale om, er dem, der udvikles eller absorberes ved *Peltier*- og *Thomson*-Effekterne, og det omhandlede Arbejde er det, som den thermoelektriske Kraft udfører under Elektricitetens Bevægelse i Kæden —. Ved at anvende Varmetheoriens anden Hovedsætning paa denne Kredsproces faar man følgende Betingelse:

$$\int \frac{dQ_R}{T} = 0, \quad (28)$$

hvor Integrationen tænkes udført over hele Kæden.

Ved Hjælp af denne Ligning og ved at anvende Energisætningen finder man følgende af Lord *Kelvin* opstillede Betingelser (loc. cit., p. 135):

$$\rho_Q - \rho_P - T \frac{d\left(\frac{\pi_{P,Q}}{T}\right)}{dT} = 0 \quad \text{og} \quad E_{P,Q} - \frac{\pi_{P,Q}}{T} = 0, \quad (29)$$

¹⁾ Se f. Eks. *R. Clausius*: Pogg. Ann., Bd. 90, p. 520, 1853.

²⁾ *W. Thomson*: Trans. Roy. Soc., Edinburgh 1854, p. 123.

hvor $E_{p,q}$ betegner den thermoelektriske Kraft i en Kæde, der bestaar af to Metaller, og hvor det ene Berøringssted er en Grad varmere end det andet; den omhandlede Kraft er regnet positiv i Retning fra Metallet P igennem det varmere Lodningssted til Metallet Q .

Disse Betingelser har som bekendt vist sig, i hvert Tilfælde med Tilnærmelse, at stemme overens med de eksperimentelt fundne Resultater¹⁾.

Den her omtalte Udledning af Ligningerne (28) og (29) er imidlertid, som Lord *Kelvin* allerede omtaler (loc. cit., p. 128), og som navnlig *Boltzmann*²⁾ har fremhævet, ikke strengt begrundet, idet den her omhandlede reversible Kredsproces nødvendig er forbunden med irreversible Processer, nemlig Udviklingen af den *Fouleske* Varme og Varmeledningen, og det paa en saadan Maade, at de Varmetoner, der skyldes de sidstnævnte Processer, ikke paa nogen Maade samtidig kan gøres forsvindende smaa i Sammenligning med den thermoelektriske Varmetoning. Som *Boltzmann* har vist, vil Varmetheoriens anden Hovedsætning i Virkeligheden altid være tilfredsstillet, naar Størrelserne E , π og ρ — i Stedet for Betingelserne (28) — blot opfylder følgende Betingelser (loc. cit., p. 1281):

$$\left. \begin{aligned} \rho_Q - \rho_P - T \cdot \frac{d\left(\frac{\pi_{p,q}}{T}\right)}{dT} &\leq \frac{2}{\sqrt{T}} \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)_P} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)_Q} \right) \\ E_{p,q} - \frac{\pi_{p,q}}{T} &\leq \frac{2}{\sqrt{T}} \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)_P} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)_Q} \right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Ligningen (28) og de deraf følgende Betingelser (29) kan derfor ikke begrundes ad ren thermodynamisk Vej.

Som vi ser, tilfredsstiller det i det foregaaende (Side 68) udfra Elektrontheorien udledte Udtryk (24) for den thermoelektriske Varmetoning dQ_R Ligningen (28); de fundne Udtryk for F , π og ρ vil derfor ogsaa tilfredsstille Betingelserne (29). Denne Overensstemmelse mellem Elektrontheoriens og den thermodynamiske Theoris Resultater er for et fuldkommen strengt gennemregnet Eksempels Vedkommende først paavist af *H. A. Lorentz*³⁾. Som vi har set, finder den omtalte

¹⁾ Se f. Eks. *Baedecker*: Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern, p. 81—86.

²⁾ *Boltzmann*: Sitzungsber. d. Wiener Acad. d. Wiss., math.-nat. Kl., Bd. 96, Abt. II, p. 1258, 1887.

³⁾ *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 7, p. 589, 1905; se ogsaa Jahrb. d. Rad. u. Elek., Bd. 2, p. 377, 1905. [Dersom man ikke tager Hensyn til Tilstedeværelsen af den *Maxwellske* Hastighedsfordeling, vil man ikke komme til en saadan Overensstemmelse (se f. Eks. *Riecke*: Wied. Ann., Bd. 66, p. 1200, 1898).]

Overensstemmelse Sted i alle de her betragtede Tilfælde; nemlig, forudsat Opfyldelsen af de i Indledningen omtalte Hovedantagelser, i alle Tilfælde, hvor der finder adskilte Sammenstød Sted, og endvidere i det Tilfælde, hvor Elektronernes Bevægelser kan betragtes som foregaaende uafhængige af hverandre i et stationært Kraftfelt, et Tilfælde, der, som omtalt i Kapitel I Side 38, kan antages tilnærmelsesvis at svare til de virkelige Forhold i Metallerne.

Den her omhandlede Overensstemmelse mellem Elektrontheorien og Lord *Kelvin's* Theori for de thermoelektriske Fænomener er saameget mere interessant, som den ikke paa Forhaand kunde ventes, idet Elektrontheorien, der tænker sig saavel Elektricitetens som Varmens Bevægelse knyttet til de samme Partikler, tilsyneladende ikke giver nogen Berettigelse til ved Behandlingen formelt at skille de reversible Processer fra de irreversible ¹⁾).

¹⁾ *J. Kunz* (Phil. Mag., vol. 16, p. 767, 1908) forsøger at forklare den omtalte Overensstemmelse, idet han beregner de thermoelektriske Varmetoner ved Hjælp af det Arbejde, som de elektriske Kræfter, der svarer til de Spændingsforskelle, der efter Elektrontheorien er til Stede mellem to Metaller i Berøring og mellem de forskellige Punkter af et homogent Metalstykke, der ikke overalt har samme Temperatur, udtører under Elektricitetens Gennemgang gennem Kæden. *Kunz* mener nu (loc. cit., p. 779), at man kan betragte de omhandlede Varmetoner som hidrørende fra en reversibel Kredsproces, idet man ved Beregningen af de omtalte Spændingsforskelle ikke behøver at tage direkte Hensyn til Varmeledning. Hertil er imidlertid at bemærke, at en Betragtning som den af *Kunz* anvendte kun viser, at de omhandlede Varmetoner er formelt reversible i den Forstand, at de skifter Fortegn, naar Strømmens Retning forandres, men ikke, at de omhandlede Varmetoner er at betragte som hidrørende fra en af irreversible Processer uafhængig reversibel Kredsproces, paa hvilken man for sig alene kan anvende Varmetheoriens anden Hovedsætning. Endvidere kan anføres, at den af *Kunz* benyttede Beregningsmaade for de thermoelektriske Varmetoner kun giver rigtigt Resultat under saadanne simple Antagelser som dem, der lægges til Grund ved *Kunz's* Betragtninger. *Kunz* antager nemlig ligesom *Drude*, at alle Elektronerne har samme Hastighed, og at en elektrisk Strøm derfor altid vil medføre en bestemt Mængde Energi, kun afhængig af Temperaturen; tager man imidlertid Hensyn til Elektronernes forskellige Hastigheder, vil man finde, at den elektriske Strøm i højere eller mindre Grad vil føres fortrinsvis af de hurtigere Elektroner, alt efter de Antagelser, man gør om Kræfterne mellem Metalmolekylerne og Elektronerne, og man maa derfor ved Beregningen af Varmetoning tage Hensyn til den forskellige Mængde af Energi, den elektriske Strøm fører med sig i de forskellige Metaller og ved de forskellige Temperaturer. En nærmere Beregning viser endvidere, at i saadanne mere almindelige Tilfælde vil den Varmetoning, der hidrører alene fra det til Spændingsforskellene knyttede Arbejde, ikke tilfredsstillende Betingelsen (28); men denne Ligning vil kun tilfredsstilles af Summen af denne Varmetoning og den, der hidrører fra den med Strømmen førte Energi.

Man har forsøgt at forklare den omhandlede Overensstemmelse ved at sammenligne Elektronernes Gennemgang gennem en thermoelektrisk Kæde med en Kredsproces, ved hvilken en Luftart føres gennem en Række Tilstande, der i Tryk og Temperatur svarer til Elektronernes Tryk og Metallets Temperatur paa de forskellige Steder af Kæden, og ved Hjælp af en saadan Betragtning at beregne de thermoelektriske Varmetoner og den elektromotoriske Kraft i Kæden udfra de Varmemængder, som en Luftart vil modtage og afgive, og det Arbejde, den vil kunne udføre under den omhandlede Kredsproces¹⁾. Ved en Betragtning som den nævnte kommer man til Udtryk for F , π og ρ , der svarer til dem, som *Lorentz* har fundet. At de Resultater, man finder ad en saadan Vej, maatte være i Overensstemmelse med Lord *Kelvin's* Theori, er paa Forhaand indlysende, idet Resultaterne netop er beregnede ved Betragtning af en Kredsproces, ved hvilken en Luftart føres gennem en Række Ligevægtstilstande, altsaa en almindelig reversibel thermodynamisk Kredsproces. En saadan Betragtning kan imidlertid ikke opfattes som andet end som en Illustration til Lord *Kelvin's* Theori, idet man, da der uden nærmere Begrundelse ses bort fra Elektricitets- og Varmeledningen, ikke paa Forhaand kan være sikker paa, at de beregnede Varmetoner stemmer overens med dem, der virkelig finder Sted i Kæden. En Beregning udfra et mere almindeligt Grundlag end det, hvorpaa *Lorentz* bygger, viser ogsaa, at en saadan Overensstemmelse i Almindelighed ikke vil være til Stede, idet der, som vi har set, i Udtrykkene for de omhandlede Varmetoner foruden saadanne Størrelser (som f. Eks. Elektronernes

¹⁾ Smlg. *J. J. Thomson*: The Corpuscular Theory of Matter, p. 73; se ogsaa *K. Baedeker*: Phys. Zeitschr., Bd. 11, p. 809, 1910. [I den sidste Afhandling gøres der et yderligere Forsøg paa at belyse Elektrontheoriens Behandling af de thermoelektriske Fænomener, ved Hjælp af de udfra Eksperimenter over Metallernes Udsending af Elektroner ved høj Temperatur dragne Slutninger, efter hvilke der i et Hulrum dannet i et homogent Metalstykke, dersom der skal være Ligevægt til Stede, maa befinde sig en ganske bestemt Mængde fri Elektroner pr. Volumenenhed, udøvende et bestemt Tryk, afhængigt af Metallets Natur og Temperatur. *Baedeker* betragter nu en reversibel Kredsproces, ved hvilken en Samling Elektroner føres gennem en Række Tilstande, der i Tryk og Temperatur svarer til dem, der vilde være til Stede i Hulrum dannede paa de forskellige Steder i Kæden. Dersom Elektronernes Koncentration i de betragtede Hulrum antages at være proportional med de fri Elektroners Koncentration i selve Metallet, giver en saadan Beregningsmaade samme Resultat som den oven for i Teksten omtalte, og de Bemærkninger, der er knyttede til denne sidste, gælder derfor ogsaa for *Baedeker's* Theori. Er den omtalte Betingelse vedrørende Elektronernes Koncentration derimod ikke opfyldt (se *Baedeker*: loc. cit., p. 810), vil der ikke være nogen simpel Forbindelse mellem de af *Baedeker* beregnede Varmetoner og de i Kæden optrædende *Peltier-* og *Thomson-Effekter*.]

Antal i Volumenenheden), der karakteriserer de omhandlede Ligevægtstilstande, ogsaa indgaar Størrelser (som den i det foregaaende ved μ betegnede), der karakteriserer den Maade, hvorpaa Elektronernes samlede Bevægelsesmængde vil fordele sig mellem Elektronerne med de forskellige absolute Hastigheder, dersom Ligevægten forstyrres, Størrelser, der ifølge Sagens Natur er udelukkede fra at kunne komme til at indgaa i Resultater, der er udledte udfra en Betragtning som den ovennævnte.

Forskellen mellem det her behandlede Problem og de sædvanlige (strengt begrundede) Anvendelser af Varmetheoriens anden Hovedsætning viser sig ogsaa tydeligt ved Forskellen mellem den i det foregaaende udfra Elektrontheorien givne Udledning af Betingelsen (28) og de sædvanlige Verifikationer af thermodynamiske Resultater ved Hjælp af kinetiske Theorier. Medens man saaledes ved de sidstnævnte Problemer udelukkende betragter statistiske Ligevægtstilstande og disses Forskydninger, betragter vi derimod her systematiske Afvigelser fra den statistiske Ligevægt, nemlig Elektronernes ordnede Bevægelse mellem Metallets Molekyler; og Rigtigheden af Ligningen (28) udledes her direkte udfra den særlige Form, som Ligningerne til Bestemmelse af Elektronernes samlede Bevægelsesmængde i en bestemt Retning antager — d. v. s. Sammenhængen mellem Koefficienterne til $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ og til $\frac{\partial T}{\partial x}$ samt, i de Tilfælde (adskilte Sammenstød) hvor vi har antaget en »Energiomsætning« (se Side 35) mellem Metalmolekylerne og Elektronerne eller mellem de sidste indbyrdes, den særlige Form for Funktionen $Q(\rho, r)$ given ved Ligning (13) Side 23 —, og den deraf udledte Form for Udtrykkene for Elektricitets- og Energistrømningen gennem Metallet given ved Ligningerne (15) og (16)¹⁾.

¹⁾ Det kan her bemærkes, at *W. Voigt* (se f. Eks. *Wied. Ann.*, Bd. 67, p. 717, 1899) har vist, at dersom den af Lord *Kelvin* opstillede Betingelse (28) skal være opfyldt, maa Ligningerne for Elektricitets- og Varmebevægelsen i et isotropt Medium nødvendigvis have en Form, der svarer til den, der angives ved Ligningerne (15) og (16).

KAPITEL III.

BEHANDLING AF IKKE-STATIONÆRE PROBLEMER.

Metallernes Absorption og Emission af Varmestraaler.

Kirchhoff har som bekendt, ud fra den Antagelse, at der blandt Legemer, der er fuldstændig afskaarne fra ydre Paavirkninger, vil opstaa en Temperaturligevægt, der ikke vil forstyrres ved Legemernes gensidige Varmestraaling, paavist, at der i et Hulrum omgivet af Legemer i Temperaturligevægt pr. Volumenenhed vil være en ganske bestemt, kun af Temperaturen afhængig, Mængde straalende Energi til Stede, fordelt paa en ganske bestemt Maade mellem Straaler med forskellige Svingningstider; samt at der vil bestaa et bestemt Forhold mellem et hvilketsomhelst Legemes Absorptionsevne og dets Emissionsevne for Varmestraaler, kun afhængigt af Temperaturen og de paagældende Straalers Svingningstid, hvilket Forhold vil staa i en meget simpel Relation til den ovenfor omtalte Energimængde. Det har derfor været af stor Interesse at søge ad theoretisk Vej at bestemme et eller andet Legemes Absorptions- og Emissionsevne for Varmestraaler, idet man ad denne Vej vil kunne naa til en theoretisk Bestemmelse af den ovenfor omtalte Energimængde og dens Fordeling paa Varmestraaler af de forskellige Svingningstider eller, som man ofte udtrykker det, til en theoretisk Bestemmelse af Varmestraalingsloven. I Metallernes Elektrontheori behandler man nu imidlertid netop saadanne Legemer, ved hvilke en Bestemmelse som den omtalte er mulig. De herhen hørende Beregninger er ved Betragtning af et Metalstykke, for hvilket der gøres særlig simple Antagelser om Vekselvirkningen mellem Molekylerne og Elektronerne, udført af *H. A. Lorentz*¹⁾ for saadanne Varmestraalers Ved-

¹⁾ *H. A. Lorentz*: Proc. Acad. Amsterdam, vol. 5, p. 666, 1903; se ogsaa *H. A. Lorentz*: Theory of Electrons, Leipzig 1909, Kap. II.

kommende, hvis Svingningstider er store i Forhold til de meget smaa Tider, indenfor hvilke de enkelte Elektroner mister næsten hele deres oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning. *Lorentz's* Beregninger er i meget god Overensstemmelse med eksperimentelle Undersøgelser over Varmestraaler med Svingningstider som de nævnte, en Overensstemmelse, der maa anses for et af Elektrontheoriens interessanteste Resultater.

*J. J. Thomson*¹⁾ har senere forsøgt at udstrække Beregningerne til ogsaa at omfatte Straaler med kortere Svingningstider. *Thomson* antager ligesom *Lorentz*, at der finder adskilte Sammenstød Sted, og at en Elektron ved et Sammenstød i Middel mister hele sin oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning; medens imidlertid Beregningerne for Straaler med store Svingningstider kun er afhængige af »Resultatet« for Sammenstødene, viser *Thomson* derimod, hvorledes Beregningen af Emissionsevnen for Straaler med Svingningstider, der er af samme Størrelsesorden som Varigheden af de enkelte Sammenstød, er i højeste Grad afhængig af de Antagelser, man gør om Elektronernes Bevægelse under de enkelte Sammenstød. Den Ligning, som *Thomson* opstiller til Beregning af selve Varmestraalingsloven, og som benyttes til at beregne Udtryk for denne Lov udfra forskellige specielle Antagelser om Elektronernes Bevægelse under Sammenstødene²⁾, er imidlertid efter min Mening ikke rigtig, idet der ikke ved Beregningerne af Absorptionsevnen, saaledes som ved Beregningen af Emissionsevnen, er taget tilstrækkeligt Hensyn til Elektronernes Bevægelse under de enkelte Sammenstød. Vi skal i det følgende komme tilbage til dette Spørgsmaal.

*J. H. Jeans*³⁾ har forsøgt at gennemføre Beregningerne af Forholdet mellem et Metalstykkets Absorption og Emission af Varmestraaler uden at gøre specielle Antagelser om Metallets Natur. *Jeans's* Beregninger vil imidlertid, som omtalt i det foregaaende, ikke gælde i Almindelighed, men kun under visse meget specielle Antagelser; Antagelser, der f. Eks. ikke vil være opfyldte ved det af *Lorentz* betragtede Tilfælde. *H. A. Wilson*⁴⁾, der har gjort opmærksom paa Mangler ved *Jeans's* Beregninger, har forsøgt at gennemføre Beregningerne under de samme specielle Antagelser som *Lorentz*, men overfor Varmestraaler med kortere Svingningstider end de af *Lorentz* under-

¹⁾ *J. J. Thomson*: Phil. Mag., vol. 14, p. 217, 1907.

²⁾ *J. J. Thomson*: Phil. Mag., vol. 14, p. 225—231, 1907 og vol. 20, p. 238, 1910.

³⁾ *J. H. Jeans*: Phil. Mag., vol. 17, p. 773, 1909.

⁴⁾ *H. A. Wilson*: Phil. Mag., vol. 20, p. 835, 1910.

søgte, nemlig for Svingningstider, der kun antages at være store i Forhold til de Tider, der medgaar til de enkelte Sammenstød. *Wilson's* Resultat er imidlertid, som berørt i det foregaaende, og som vi her nærmere skal se, ikke rigtigt.

Vi skal nu i dette Kapitel vise, hvorledes Beregningerne af Metalernes Absorption og Emission af Varmestraaler med »store« Svingningstider kan gennemføres i alle saadanne Tilfælde, som vi har undersøgt i Kapitel I. I de Tilfælde, hvor vi antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted, og i hvilke Beregningerne kan udføres uden specielle Forudsætninger, vil Undersøgelsen kunne udstrækkes til Varmestraaler af alle Svingningstider, der blot er store i Forhold til Tiden for et enkelt Sammenstød; i de andre Tilfælde kun til Varmestraaler, hvis Svingningstider er store i Sammenligning med de Tider, indenfor hvilke de enkelte Elektroner i Middel mister næsten hele deres oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning.

§ 1.

Absorption af Varmestraaler.

Dersom et Metalstykke er udsat for Virkningen af en konstant ydre elektrisk Kraft, vil de fri Elektroner faa en Middelbevægelse i Kraftens Retning, og Elektronerne vil derfor under deres Bevægelser i Middel modtage kinetisk Energi under Kraftens Indvirkning — hvilket vi ogsaa kan udtrykke ved at sige, at Elektronerne vil absorbere Energi fra det ydre elektriske Felt —; denne Energi vil ved Vekselvirkningen (Sammenstødene) med Metalmolekylerne omsættes til Varme, det vil sige til kinetisk Energi fordelt paa tilfældige uregelmæssige Bevægelser. Ganske tilsvarende Forhold finder nu Sted, dersom et Metalstykke udsættes for Varmestraaler, hvilke efter den elektromagnetiske Lystheori jo bestaar af hurtigt varierende elektriske og magnetiske Felter.

Vi skal her først betragte saadanne Varmestraaler, hvis Svingningstider er store i Forhold til de meget smaa Tider, indenfor hvilke de enkelte Elektroner i Middel mister Størstedelen af deres Bevægelsesmængde i en bestemt Retning. I dette Tilfælde vil Tilstanden i hvert enkelt Øjeblik kunne betragtes som stationær — »quasi-stationær« (se Side 27) —.

Vi skal nu betegne Komposanterne efter Koordinataksene af den ydre elektriske Kraft i et Punkt af Metallet til Tiden t med E_x , E_y og E_z . Den elektriske Strøm gennem et Fladeelement dS vinkelret paa X -aksen vil da i det her betragtede Tilfælde være $i_x dS = \sigma E_x dS$, hvor σ betegner den almindelige elektriske Ledningsmodstand; og ganske lignende Udtryk vil gælde for den elektriske Strømning efter Y - og Z -aksen. Den Energi, der absorberes i et Volumenelement dV af Metallet dt , vil derfor være

$$(i_x E_x + i_y E_y + i_z E_z) dV dt = \sigma \cdot (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) dV dt.$$

Og den Energi, der absorberes i Tidsenheden i en Volumenenhed af Metallet, vil være

$$\sigma \cdot (\overline{E_x^2} + \overline{E_y^2} + \overline{E_z^2}),$$

hvor de vandrette Streger skal betegne, at Størrelserne er beregnede som Middelværdier saavel over Volumen som over Tid.

Den Energimængde, der i Middel paa Grund af Straalingen vil være til Stede i en Volumenenhed af det tomme Rum mellem Molekylerne og Elektronerne — denne Energi er ikke den hele Energi, der paa Grund af Straalingen vil være til Stede i Metallet; der vil nemlig ogsaa være Energi til Stede hidrørende fra de fri Elektroners ordnede Bevægelse (og eventuelt ogsaa fra Medsvingninger af de indenfor Molekylerne bundne Elektroner) —, vil være

$$2 \cdot \frac{1}{8\pi} (\overline{E_x^2} + \overline{E_y^2} + \overline{E_z^2}),$$

hvor Faktoren 2 hidrører fra, at den magnetiske Energi ved elektromagnetiske Svingninger som de her betragtede i Middel vil være lige saa stor som den elektriske Energi. (Vi har ved Beregningen af Absorptionen ikke taget Hensyn til Indvirkningen af de magnetiske Kræfter; thi idet Elektronernes Hastigheder vil være meget smaa i Sammenligning med Lysets Hastighed (smlg. Noten Side 11), vil Virkningen paa Elektronernes Bevægelser af de magnetiske Kræfter i det her omhandlede Tilfælde være forsvindende i Sammenligning med Virkningen af de elektriske Kræfter.)

Idet vi nu ved Absorptionskoefficienten α skal betegne den Energimængde, der absorberes i en Volumenenhed af Metallet, dersom den straalende elektromagnetiske Energi pr. Volumenenhed (beregnet paa den ovenfor omtalte Maade) er lig 1, faar vi

$$\alpha = 4\pi \cdot \sigma. \quad (1)$$

Man kan i Almindelighed ikke ved Hjælp af de her anførte Beregninger direkte finde den Energi, der absorberes i et Metalstykke, der er udsat for Varmestraaler; thi de fri Elektroners ordnede Bevægelse (og de i Molekylerne bundne Elektroners Medsvingninger) vil virke tilbage paa de ydre elektromagnetiske Felter, idet de foruden til Absorption vil give Anledning til de Fænomener, der betegnes ved Tilbagekastning og Brydning. Dersom man imidlertid, som ved de Anvendelser, vi i det følgende skal gøre af Ligning (1), betragter et Metalstykke, der er saa lille, at man kan se bort fra Tilbagevirkningen af dets Elektroner paa de ydre Felter — (Metalstykket skal dog antages at indeholde et meget stort Antal Elektroner og Molekyler, saa at man kan benytte de i de foregaaende Kapitler udførte Beregninger for den elektriske Ledningsmodstand o. s. v.; denne sidste Fordring er imidlertid forenelig med den ovenstaaende Fordring, idet Tilbagevirkningen af de enkelte Elektroner paa de ydre Felter er ganske overordentlig ringe, hvilket f. Eks. for de fri Elektroners Vedkommende hidrører fra, at de enkelte Elektroner paa Grund af deres store Hastigheder og hyppige Sammenstød kun i meget ringe Grad kan følge de ydre Kræfters Indflydelse) —, vil man ved direkte Anvendelse af Ligningen (1) finde, at den Energimængde, der absorberes i Metalstykket, hvis Volumen vi skal betegne ved ΔV , dersom det udsættes for et Bundt af Varmestraaler, for hvilket den i Volumenenheden tilstedeværende Energi er A — og altsaa den igennem en Fladeenhed vinkelret paa Bundtet pr. Sek. gaaende Energi er cA , hvor c er Lysets Hastighed — vil være

$$\alpha A \Delta V.$$

Forsøg af *Hagen* og *Rubens*¹⁾ over Metallernes Refleksion og Emission af Varmestraaler viser nu, at Metallernes Absorption af Varmestraaler med store Svingningstider (d. v. s. større end 10^{-13} Sek.) virkelig kan beregnes i Overensstemmelse med Erfaringen ud fra Metallernes elektriske Ledningsevne for stationære Strømme, det vil sige efter Ligning (1). Forsøgene viser imidlertid endvidere, at for kortere Svingningstider vil den elektriske Ledningsevne beregnet paa denne Maade ikke stemme overens med den, der findes for stationære Strømme.

Vi skal nu gaa over til at beregne Absorptionen af Varmestraaler med saadanne kortere Svingningstider. Vi kan her, som ovenfor berørt, kun gennemføre Behandlingen i det Tilfælde, hvor vi antager,

¹⁾ *E. Hagen* og *H. Rubens*: Ann. d. Phys., Bd. 11, p. 873, 1903.

at der finder adskilte Sammenstød Sted, idet vi i de andre Tilfælde ved Opstillingen af Betingelsesligningerne i Kapitel I kun har behandlet stationære Tilstande.

Idet vi her skal antage, at Temperaturen er konstant og Metallet homogent, vil Ligningen til Bestemmelse af Elektronernes samlede Bevægelse, dersom der finder adskilte Sammenstød Sted, være (Lign. (14) Side 26)

$$\left[\frac{dG_x(r)}{dt} \right] = - \frac{4\pi m e K}{3kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}} - G_x(r) F(r) + \int_0^\infty G_x(\rho) Q(\rho, r) d\rho. \quad (2)$$

Denne Ligning er ikke umiddelbart at opfatte som en almindelig Differentialligning, idet Ledet paa venstre Side af Lighedstegnet (se Side 26) kun angiver Middelværdien af $\frac{dG_x(r)}{dt}$ for givne Værdier af $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ og af Størrelserne $G_x(\rho)$. Ved de Anvendelser, vi her skal gøre, kan vi imidlertid betragte Ligningen som en almindelig Differentialligning, idet vi her kun søger en Middelværdi af $G_x(r)$, og idet der ikke vil være nogen mærkelig systematisk Forbindelse mellem Værdierne af $\frac{dG_x(r)}{dt}$ og forudgaaende Tilstande (undtagen naturligvis, hvad der udsiges gennem selve Lign. (2)). At der ikke findes en saadan Forbindelse, hidrører fra, at Sandsynligheden for Sammenstød (se Side 20) er antaget at være uafhængig af Elektronernes Baner; dette sidste gælder dog strengt taget kun, dersom den Tid, de enkelte Sammenstød tager, antages at være uendelig kort; antager man derimod, at Sammenstødene i Middel varer en vis lille Tid ν — (den Tid, Elektronerne bruger om at gennemløbe Strækninger af samme Størrelsesorden som Elektronernes eller Molekylernes Dimensioner) —, vil der være systematiske Forbindelser mellem $\frac{dG_x(r)}{dt}$ og forudgaaende Tilstande, der har fundet Sted indenfor Tider, der kan sammenlignes med ν . Ligningen (2) kan derfor kun benyttes som Differentialligning, dersom dt kan betragtes som stor i Sammenligning med ν , hvilket vil sige, dersom $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — og dermed $G_x(r)$ beregnet som Middelværdi — ikke forandrer sig mærkeligt indenfor Tidsrum af samme Størrelsesorden som ν . De følgende Beregninger vil derfor kun gælde for Absorptionen af saadanne Varmestraaler, hvis Svingningstider er store i Sammenligning med de Tider, der medgaar til de enkelte Sammenstød; Tider, der imidlertid her skal antages at være meget smaa i Sammenligning med de Tider, inden-

for hvilke Elektronerne i Middel mister Størstedelen af deres oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning.

Vi skal nu antage, at der virker en elektrisk Kraft efter X -aksen, der udtrykkes ved

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = E \cos pt.$$

Betingelsen for, at Ligningen (2) vil være tilfredsstillet af en Løsning af Formen

$$G_x(r) = \psi_1(r) \cos pt + \psi_2(r) \sin pt \quad (3)$$

(man kan let vise, at Lign. (2) kun kan have én periodisk Løsning), vil være

$$p\psi_2(r) = \frac{4\pi m e K}{3kT} E r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}} - \psi_1(r) F(r) + \int_0^\infty \psi_1(\rho) Q(\rho, r) d\rho \quad (4)$$

og

$$-p\psi_1(r) = -\psi_2(r) F(r) + \int_0^\infty \psi_2(\rho) Q(\rho, r) d\rho. \quad (5)$$

Disse to sammenhørende Integralligninger vil have en Løsning, der kan skrives paa Formen (dette indses lettest ved at løse den sidste med Hensyn til $\psi_2(r)$ ved Hjælp af *Fredholm's* Løsning (se Side 47) og indsætte i den første og løse denne paa samme Maade):

$$\psi_1(r) = \frac{4\pi m e K}{3kT} E \left(r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}} \cdot F_1(r) + \int_0^\infty \rho^4 e^{-\frac{m\rho^2}{2kT}} \cdot Q_1(\rho, r) d\rho \right), \quad (6)$$

hvor $F_1(r)$ og $Q_1(\rho, r)$ kun afhænger af $F(r)$, $Q(\rho, r)$ og p (d. v. s. ikke afhænger af det første Led paa højre Side af Lighedstegnet i Lign. (4)), samt et dertil ganske svarende Udtryk for $\psi_2(r)$, i hvilket vi blot skal tænke os Indeks 1 ombyttet med Indeks 2.

Idet vi nu sætter

$$P_1(r) = F_1(r) + \int_0^\infty Q_1(r, \rho) d\rho, \quad (7)$$

samt

$$\sigma_p = \frac{4\pi e^2 K}{3kT} \cdot \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}} P_1(r) dr, \quad (8)$$

hvor σ_p vil være en Størrelse, der saavel er afhængig af Metallets Natur og Temperatur som af p , og betegner det tilsvarende Udtryk for Indeks 2 med δ_p , faar vi ved Hjælp af (3), (6), (7) og (8) for den elektriske Strøm gennem en Fladeenhed vinkelret paa X -aksen

$$i_x = \frac{\varepsilon}{m} \int_0^{\infty} G_x(r) dr = E \cdot (\sigma_p \cos pt + \delta_p \sin pt), \quad (9)$$

og for den Energi, der i Tidsenheden absorberes i en Volumenenhed af Metallet,

$$\frac{p}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} i_x E \cos pt dt = \frac{1}{2} E^2 \cdot \sigma_p.$$

Idet nu den Energi, der i Middel vil være til Stede i en Volumenenhed af Metallet (se Side 79), vil være $\frac{1}{4\pi} \cdot \overline{E_x^2} = \frac{1}{8\pi} \cdot E^2$, faar man for Absorptionskoefficienten (se Side 79) α_p for Varmestraaler med Svingningstid $\frac{2\pi}{p}$

$$\alpha_p = 4\pi \cdot \sigma_p. \quad (10)$$

Dette Udtryk, der med den ovenfor (Side 81) omtalte Indskrænkning for p gælder i alle Tilfælde, hvor man betragter adskilte Sammenstød, skal vi benytte ved den senere Sammenligning med Emissionsevnen.

I Analogi med de Betragtninger, der har ført os til Ligningen (1) Side 79, kan man udtrykke Ligningen (10) ved at sige, at Metallet overfor en elektrisk Kraft, der varierer som $\cos pt$, besidder en »effektiv elektrisk Ledningsevne« σ_p forskellig fra (mindre end) Ledningsevnen σ_0 for stationære Strømme. For saadanne hurtigt varierende elektriske Kræfter fremkommer der endvidere, som det fremgaar af Ligning (9) en Faceforskel mellem den elektriske Strøm og den elektriske Kraft, der med de benyttede Betegnelser udtrykkes ved $\arctg \frac{\delta_p}{\sigma_p}$. Denne Faceforskel, der fremkommer paa Grund af de fri Elektroners Inerti, viser sig som en Forsinkelse af Strømmen i Forhold til den elektriske Kraft; Optrædelsen af en saadan Faceforskel vil have samme Virkning paa Beregningen af Metallernes optiske Forhold som Tilstedeværelsen af en (effektiv) negativ Dielektricitetskonstant.

Vi skal nu her nærmere betragte Udtrykkene for σ_p og δ_p i det simple Tilfælde, hvor Metalmolekylerne antages at være faste Kraftcentrer, der paavirker Elektronerne med Kræfter, der forholder sig omvendt som n^{te} Potens af Afstanden, og i hvilket man ser bort fra Sammenstødene mellem Elektronerne indbyrdes. I dette Tilfælde har man (se Side 33)

$$F(r) = C \cdot r^{\frac{n-5}{n-1}} \quad \text{og} \quad Q(\rho, r) = 0.$$

Man faar derfor

$$F_1(r) = \left(F(r) + \frac{p^2}{F(r)} \right)^{-1} = \frac{\frac{1}{C} r^{-\frac{n-5}{n-1}}}{1 - \frac{p^2}{C^2} r^{-2\frac{n-5}{n-1}}} \quad \text{og} \quad Q_1(\rho, r) = 0,$$

og deraf ved Hjælp af (7) og (8)

$$\sigma_p = \frac{4\pi\epsilon^2 K}{3kTC} \cdot \int_0^\infty \frac{r^{\frac{3n+1}{n-1}} e^{-\frac{mr^2}{2kT}}}{1 + \frac{p^2}{C^2} r^{-2\frac{n-5}{n-1}}} dr. \quad (11)$$

Dette Udtryk adskiller sig fra Udtrykket for σ for stationære Strømme (Side 49 Lign. (6), Udtrykket for A_1) ved Tilføjesen af det sidste Led i Nævneren under Integraltegnet. Integrationen i Udtrykket (11) kan i Almindelighed ikke udføres fuldstændigt; men dersom vi antager, at p er saa lille, at Nævneren for alle Værdier af r , der afgiver et væsentligt Bidrag til Integralet (vi antager $n > 2$), er meget nær 1, kan man med Tilnærmelse sætte

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{4\pi\epsilon^2 K}{3kTC} \cdot \int_0^\infty \left(r^{\frac{3n+1}{n-1}} - \frac{p^2}{C^2} r^{\frac{n+1}{n-1}} \right) e^{-\frac{mr^2}{2kT}} dr \\ &= \frac{4\pi\epsilon^2 K}{3kTC} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{2n}{n-1}} \Gamma\left(\frac{2n}{n-1}\right) - \frac{p^2}{C^2} \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{n+5}{n-1}} \Gamma\left(\frac{n+5}{n-1}\right) \right); \end{aligned}$$

dette giver

$$\sigma_p = \sigma_0 \left(1 - \frac{p^2}{C^2} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{n-5}{n-1}} \Gamma\left(\frac{n+5}{n-1}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{2n}{n-1}\right) \right).$$

Ved Hjælp af Ligningen (9) Side 51 kan dette skrives

$$\sigma_p = \sigma_0 \left(1 - \sigma_0^2 \frac{p^2 m^2}{N^2 \epsilon^4} \frac{9\pi}{16} \Gamma\left(\frac{n+5}{n-1}\right) \Gamma^{-3}\left(\frac{2n}{n-1}\right) \right). \quad (12a)$$

Paa tilsvarende Maade faas

$$\delta_p = \frac{4\pi\epsilon^2 K}{3kTC} \int_0^\infty \frac{\frac{p}{C} r^{\frac{2n+6}{n-1}} e^{-\frac{mr^2}{2kT}}}{1 + \frac{p^2}{C^2} r^{-\frac{n-5}{n-1}}} dr,$$

og med samme Tilnærmelse som ovenfor faas heraf

$$\delta_p = \sigma_0^2 \frac{pm}{N\epsilon^2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left(\frac{3n+5}{2(n-1)}\right) \Gamma^2\left(\frac{2n}{n-1}\right). \quad (12b)$$

Vi skal nu betragte nogle specielle Tilfælde svarende til forskellige Værdier af n .

1) For $n = \infty$ faar vi af (12a) og (12b)

$$\sigma_p = \sigma_0 \left(1 - \sigma_0^2 \frac{p^2 m^2}{N^2 \epsilon^4} \frac{9\pi}{16}\right) \quad \text{og} \quad \delta_p = \sigma_0^2 \frac{pm}{N\epsilon^2} \frac{3\pi}{8}, \quad (13)$$

hvilket er de Udtryk, der vil gælde, dersom Metalmolekylerne antages at være haarde elastiske Kugler, eller anderledes udtrykt, dersom Elektronerne i Middel mister hele deres Bevægelsesmængde i en bestemt Retning ved et enkelt Sammenstød.

J. J. Thomson¹⁾ har som omtalt i det foregaaende beregnet et Udtryk for σ_p udfra en Antagelse om Virkningerne af Sammenstødene, der svarer til de her omhandlede. Den Værdi, Thomson har fundet, nemlig (med vore Betegnelser)

$$\sigma_p = \sigma_0 \cdot \left[\frac{\sin \frac{\sigma_0 pm}{N\epsilon^2}}{\frac{\sigma_0 pm}{N\epsilon^2}} \right]^2 = \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\sigma_0^2 p^2 m}{N^2 \epsilon^4} \dots \right), \quad (13')$$

adskiller sig imidlertid, som man ser, meget væsentligt fra den ovenfor beregnede. (Det Led, der angiver Ledningsevnsens Afhængighed af Svingningstallet, er saaledes c. 5 Gange mindre end det tilsvarende Led i Lign. (13)). Denne Forskel hidrører dels derfra, at Thomson antager, at alle Elektronerne har samme absolute Hastighed, dels fra, at de Tider, i hvilke Elektronerne tilbagelægger deres fri Vejlængder, ved Thomson's Beregninger sættes lige store, uden at der tages Hensyn til de Hastigheder, Elektronerne opnaar under de ydre Kræfters Indvirkning²⁾.

Udtrykket (13') benyttes af Thomson til Beregning af et Metals Absorption for Straaler af alle mulige Svingningstider. Udtrykket er imidlertid — bortset fra de omtalte Indvendinger, der ikke berører Størrelsesordenen af Svingningstidens Indflydelse paa Absorptionskoefficienten — efter min

¹⁾ J. J. Thomson: Phil. Mag., vol. 14, p. 225, 1907.

²⁾ Jvnfr. J. H. Jeans: Phil. Mag., vol. 17, p. 778, 1909.

Mening paa Grund af den Maade, hvorpaa det er udledt, ikke anvendeligt (smlg. Side 81) overfor Straaler, hvis Svingningstider ikke er korte i Sammenligning med de Tider, der medgaar til de enkelte Sammenstød (se Side 77).

*H. A. Wilson*¹⁾, der, som omtalt Side 77, ogsaa har beregnet σ_p udfra den ovennævnte Antagelse om Sammenstødenes Art, har ligeledes fundet et Resultat, der ikke falder sammen med Udtrykket (13). *Wilson* har beregnet sin Værdi for σ_p paa to forskellige Maader; af disse svarer den ene til den her benyttede Beregningsmaade, men den Ligning, der i *Wilson's* Beregninger svarer til Ligningen (2), er, som det er forklaret Side 19, ikke rigtig; ved den anden Beregningsmaade betragter *Wilson* ligesom *J. J. Thomson* derimod de enkelte Elektroners Bevægelser og undersøger, hvor stor en Energi der i Middel absorberes af en Elektron under Tilbagelæggelsen af en enkelt fri Vejlængde mellem to paa hinanden følgende Sammenstød. Ved denne Beregning er der imidlertid ligesom ved *Thomson's* ikke taget Hensyn til, at den Tid, der medgaar til at gennemløbe en saadan fri Vejlængde, i Middel vil være større, naar Elektronen bevæger sig imod den ydre elektriske Kraft, end naar den bevæger sig i Kraftens Retning. *Wilson's* Resultater saavel for σ_o — Værdien for σ_o findes saaledes $\frac{3}{2}$ Gange saa stor som *Lorentz's* Værdi — som for σ_p er derfor ikke rigtige.

2) Dersom vi i Ligningerne (12a) og (12b) sætter $n = 5$, faar vi

$$\sigma_p = \sigma_o \left(1 - \sigma_o^2 \frac{p^2 m^2}{N^2 \epsilon^4} \right) \quad \text{og} \quad \delta_p = \sigma_o^2 \frac{p m}{N \epsilon^2}. \quad (14)$$

I dette Tilfælde, der svarer til den Antagelse, at Metalmolekylerne er smaa Magneter (se Side 35), vil, som man kan vise, Talkoefficienterne i Korrektionsleddet paa σ og i Udtrykket for δ_p (saaledes som det specielt ses ved Sammenligning med det foregaaende og det efterfølgende Eksempel) være mindre end i alle andre Tilfælde, hvor man betragter adskilte Sammenstød og ser bort fra Vekselvirkningen mellem Elektronerne indbyrdes.

Den ved Lign. (14) givne Værdi for σ_p svarer til den Værdi for σ_p , som *J. H. Jeans*²⁾ har beregnet, nemlig

$$\sigma_p = \sigma_o \left(1 + \sigma_o^2 \frac{p^2 m^2}{N^2 \epsilon^4} \right)^{-1}, \quad (14')$$

et Udtryk, der efter *Jeans's* Mening skulde gælde i fuld Almindelighed ogsaa uden Antagelse af adskilte Sammenstød. Grunden til, at vi netop genfinder *Jeans's* Udtryk ved at sætte $n = 5$, er forklaret i det foregaaende (se Side 33).

¹⁾ *H. A. Wilson*: Phil. Mag., vol. 20, p. 835, 1910.

²⁾ *J. H. Jeans*: Phil. Mag., vol. 17, p. 778, 1909.

3) Dersom vi endelig sætter $n = 3$, faar vi

$$\sigma_p = \sigma_0 \left(1 - \sigma_0 \frac{\rho^2 m^2}{N^2 \epsilon^4} \frac{27\pi}{64} \right) \quad \text{og} \quad \delta_p = \sigma_0^2 \frac{\rho m}{N \epsilon^2} \frac{45\pi}{128}, \quad (15)$$

Udtryk, der vil gælde, dersom Metalmolekylerne antages at være saadanne elektriske Dobbeltsystemer som dem, vi har betragtet Side 34.

Beregner man nu Refleksionskoefficienten for en Metalflade for vinkelret indfaldende Varmestraaler udfra Antagelsen af en Sammenhæng mellem den elektriske Kraft og den elektriske Strøm som den, der udtrykkes ved Ligning (9), finder man ¹⁾, idet Refleksionskoefficienten betegnes ved R , og idet man ved Beregningerne bortkaster Led, der forholder sig til de betydende Led som Kvadratet paa Størrelsen δ_p/σ_p , og ser bort fra en mulig Virkning af de bundne Elektroners Medsvingninger, idet en saadan Virkning af samme Størrelsesorden som den, man finder hos Isolatorerne, paa Grund af Metallernes store Ledningsevne i dette Tilfælde vil være forsvindende i Forhold til de betydende Led (se *Drude*: loc. cit., p. 941), følgende Ligning:

$$\left(\frac{1+R}{1-R} \right)^2 = \frac{2\pi}{\rho} \cdot \sigma_p \left(1 + \frac{\delta_p}{\sigma_p} \right).$$

Idet Koefficienten til $\frac{2\pi}{\rho}$ paa Ligningens højre Side for uendelig langsomme Svingninger er lig σ_0 , viser Ligningen, at der i Formlen for Refleksionskoefficienten for Varmestraaler med kortere Svingningstider i Stedet for den almindelige elektriske Ledningsevne σ_0 indgaar en effektiv Ledningsevne $\sigma_p \left(1 + \frac{\delta_p}{\sigma_p} \right)$. Idet nu for tilstrækkelig store Svingningstider Korrektionsleddet i Udtrykket for σ_p efter de i det foregaaende udførte Beregninger er af samme Størrelsesorden som $\left(\frac{\delta_p}{\sigma_p} \right)^2$, maa man derfor efter den her omhandlede Theori (Antagelsen af adskilte Sammenstød) vente en Forøgelse ($\delta_p > 0$) af den tilsyneladende Ledningsevne for aftagende Svingningstider.

Sammenligner man nu de her udledte Resultater med *Hagen's* og

¹⁾ Se *P. Drude*: Ann. d. Phys., Bd. 14, p. 940, 1904. *Drude's* Resultat svarer til det nedenfor i Teksten givne Udtryk, dersom man for σ_p og δ_p indsætter de i det foregaaende, for det Tilfælde, at Metalmolekylerne antages at paavirke Elektronerne med Kræfter, der forholder sig omvendt som 5^{te} Potens af Afstanden, fundne Udtryk (Lign. (14)); dette hidrører fra, at Modstanden mod Elektronernes Bevægelse hos *Drude* sættes proportional med Elektronernes Hastighed (smlg. det foregaaende, Side 33).

*Rubens's*¹⁾ ovenfor omtalte Forsøg over Metallernes Refleksionsevne for Varmestraaler, ser man imidlertid, at der for de fleste Metaller (blandt de rene Metaller er kun Sølv undtaget) finder en Aftagen af den tilsyneladende Ledningsevne Sted for aftagende Svingningstider²⁾.

Denne Uoverensstemmelse mellem Theorien og Erfaringen hidrører efter min Mening fra, at Antagelsen om Tilstedeværelsen af adskilte Sammenstød mellem Elektronerne og Metalmolekylerne i Metallernes Indre ikke er berettiget.

Dersom der nemlig finder adskilte Sammenstød Sted, vil en ydre Kraft væsentlig frembringe en Forandring i Elektronernes Bevægelse, men ikke i deres rumlige Fordeling (en saadan Forandring vil kun indtræde i den allernærmeste Nærhed af Metalmolekylerne); er Metalmolekylernes Dimensioner — de Omraader, indenfor hvilke de paavirker Elektronerne kendeligt — derimod ikke forsvindende i Forhold til hele Metallets Volumen, vil den Ophobning af Elektronerne foran Metalmolekylerne, der finder Sted under Elektronernes samlede Bevægelse (se Side 43), i væsentlig Grad kunne forandre Elektronernes rumlige Fordeling, og der vil derfor i dette Tilfælde foruden den Virkning, der skyldes Elektronernes Enerti og som betragtet for sig vil frembringe en effektiv negativ Dielektricitetskonstant, ogsaa være en Virkning hidrørende fra Elektronernes Forskydning i Metalmolekylernes Kraftfelter (ikke at forveksle med Metalmolekylernes Polarisering, hidrørende fra de bundne Elektroners Bevægelse, hvilken, ved Sving-

¹⁾ *E. Hagen* u. *H. Rubens*: Ann. d. Phys., Bd. 11, p. 884, 1903.

²⁾ Jvnfr. *Drude*: loc. cit., p. 944. [Den her omhandlede Aftagen af den tilsyneladende Ledningsevne er af flere senere Forfattere (se f. Eks. *J. H. Jeans* Phil. Mag., vol. 17, p. 779, 1909) opfattet som værende i Overensstemmelse med en Elektrontheori af den her behandlede Art, idet den er blevet betragtet som hidrørende fra en Aftagen af den effektive Ledningsevne beregnet ved Hjælp af Absorptionskoefficienten (smlg. ovenfor Side 83). Man har ad denne Vej, ved Hjælp af saadanne Udtryk for σ_p som de i det foregaaende omtalte (Lign. (13')—(14')), søgt at beregne Antallet N af fri Elektroner i Volumenenheden af de forskellige Metaller; dette Antal er nemlig den eneste paa Forhaand ubekendte Størrelse, der indgaar i de omhandlede Formler. De Værdier for N , man paa denne Maade har beregnet, er for de fleste Metaller Vedkommende større end saadanne Værdier, der lader sig forene med de eksperimentelt fundne Værdier for Metallernes Varmedeflydelse (se *Jeans*: loc. cit., p. 780). Den her omtalte Brug af de omhandlede Formler er imidlertid, som vi ovenfor har set, ikke tilladelig, idet den Indflydelse paa den tilsyneladende Ledningsevne, beregnet udfra Metallernes Refleksionskoefficienter, der hidrører fra den effektive Dielektricitetskonstant (se Side 83), er af modsat Tegn og af lavere Størrelsesorden end den, der hidrører fra Forandringen i den tilsyneladende Ledningsevne, beregnet ud fra Absorptionskoefficienterne.]

ningstider som de her omhandlede, vil være af yderst ringe Indflydelse (se forrige Side)), der betragtet for sig vil frembringe en positiv Dielektricitetskonstant.

§ 2.

Emission af Varmestraaler.

Dersom en Elektron har en retlinet Bevægelse med konstant Hastighed, vil den ikke udsende Energi; i et saadant Tilfælde vil nemlig det Elektronen omgivende elektromagnetiske Felt, som man kan udtrykke det, føres med Elektronen under dennes Bevægelse.

Anderledes forholder det sig derimod, dersom Elektronens Hastighed forandres enten i Størrelse eller Retning; i dette Tilfælde vil nemlig Elektronen udsende Energi, hvilket man kan udtrykke ved at sige, at en Del af Elektronens elektromagnetiske Felt vil løsrive sig fra Elektronen og forplante sig bort i det omgivende Rum i alle mulige Retninger med Lysets Hastighed. Idet vi her antager, at Elektronernes absolute Hastighed vil være meget ringe i Forhold til Lysets Hastighed c , vil den Energi, der paa denne Maade udsendes af en Elektron i Tiden dt være lig¹⁾

$$\frac{2e^2}{3c^3} j^2 dt, \quad (16)$$

hvor j betegner den absolute Værdi for Elektronens Acceleration. Denne Energimængde er beregnet som den Energimængde, der vil sendes ud igennem en lukket Flade, hvis Afstand fra Elektronen er stor i Sammenligning med saadanne Afstande, indenfor hvilke de Kræfter, der stammer fra Elektronens medførte Felt, har en mærkelig Værdi.

Et Stykke Metal, i hvilket de fri Elektroners Bevægelse paa Grund af Sammenstødene — Paavirkningen fra Metalmolekylernes Kraftfelter — er underkastet store, hurtigt paa hinanden følgende Forandringer, vil derfor være Stedet for en Udsendelse af Energi. Vi skal nu nærmere undersøge Størrelsen af denne Energiudsendelse og den Maade, hvorpaa den fordeler sig paa Straaler med forskellige Svingningstider. Som omtalt i det foregaaende har *Lorentz* behandlet

¹⁾ Se f. Eks. *H. A. Lorentz: Theory of Electrons*, p. 52, Lign. (82). [I den citerede Formel er anvendt en anden Enhed for Elektricitetsmængder end den, vi her benytter (abs. elektrostatiske Maal), hvilket bevirker, at Udtrykket for den omhandlede Energimængde er divideret med 4π .]

dette Spørgsmaal i det Tilfælde, hvor man ser bort fra Vekselvirkningen mellem Elektronerne indbyrdes og antager, at Metalmolekylerne paavirker Elektronerne som haarde elastiske Kugler, samt hvor det drejer sig om at bestemme den udstraalede Energis Fordeling paa Straaler med Svingningstider, der er meget store i Sammenligning med de Tider, indenfor hvilke Elektronerne mister næsten hele deres oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning. Ved *Lorentz's* Behandling følges de enkelte Elektrons Bevægelser; dette vilde imidlertid blive meget indviklet i de mere almindelige Tilfælde, vi her skal betragte. (At *Lorentz's* Tilfælde er simplere, hidrører fra, at Elektronernes Bevægelsesretning efter et Sammenstød, i hans Theori, antages i Middel at være fuldkommen uafhængig af Bevægelsesretningen før Sammenstødet.) Vi skal derfor her betragte Elektronernes samlede Bevægelse i en bestemt Retning under ét, idet vi hermed følger den Vej, der er angivet af *Jeans*.

Vi skal nu undersøge den Energi, der udsendes fra et lille Volumen-element af Metallet ΔV , hvilket Element skal antages at indeholde et meget stort Antal Metalmolekyler og Elektroner og samtidig være saa lille, at den Energi, der udsendes af de enkelte Elektroner, ikke absorberes i kendelig Grad i Elementet selv (smlg. Side 80). For at beregne den søgte Energimængde skal vi tænke os en enkelt Elektron, hvis Bevægelsesmængde i hvert enkelt Øjeblik i Størrelse og Retning skal være lig den samlede Bevægelsesmængde af Elektronerne i Volumelementet ΔV , og paa denne Elektron anvende Formlen (16).

[Om en saadan Anvendelse af Formlen (16) maa vi dog bemærke følgende. Formlen er kun udledt for en punktførmig Ladnings Bevægelse, og den er som ovenfor omtalt udledt ved Integration over den Energi, der vil udsendes gennem de enkelte Elementer af en lukket Flade, der omgiver Ladningen. Dersom vi nu søger den Energi, der sendes gennem et saadant Fladeelement paa Grund af Elektronernes samlede Bevægelse, kan vi vel betragte denne som samlet i en punktførmig Ladning, men denne Ladnings Bevægelse vil ikke være Middel af Elektronernes samtidige Bevægelser, men derimod Middel af Elektronernes Bevægelser i Tidspunkter valgte saaledes for hver enkelt Elektron, at Lysstraaler udgaaende fra Elektronerne i disse Tidspunkter samtidig vil naa det betragtede Fladeelement. Idet vi nu imidlertid antager, at Elektronerne har Hastigheder, der er overordentlig mange Gange mindre end Lysets, vil enhver Bevægelse blandt Elektronerne forplante sig overordentlig mange Gange langsommere end Lyset, og der vil derfor i Middel være meget nær de samme systematiske Forbindelser mellem de enkelte Elektrons Bevægelser¹⁾, hvad enten vi

¹⁾ *J. H. Jeans* (Phil. Mag., vol. 18, p. 213, 1909) udtaler den Mening, at man kan beregne et Metalstykkets Energiudstraaling som en Sum af Straalingerne fra de enkelte Elektroner, betragtet hver for sig, da der, efter den statistiske Mekanik, i Middel

betrakter deres samtidige Bevægelser i almindelig Forstand, eller vi betragter Bevægelser, der er »effektivt samtidige« i Forhold til det betragtede Fladelement i den ovenomtalte Forstand. Vi vil derfor i Middel faa den rigtige Værdi for Energistrømmen gennem Fladeelementet, dersom vi beregner den ud fra Betragtning af en enkelt punktformig Ladning, der er i Besiddelse af en Bevægelsesmængde lig Summen af de enkelte Elektroners samtidige Bevægelsesmængder. Idet det samme gælder for hvert enkelt Element af den ovenfor omtalte lukkede Flade — for hvert enkelt Element vil der naturligvis være en forskellig »effektiv Samtidighed« —, vil det gælde for hele Energistrømmen gennem Fladen.]

Kaldes nu Komposanterne efter Koordinatakserne af Elektronernes samlede Bevægelsesmængde i ΔV for g_x , g_y og g_z , faar man af Formlen (16) som Udtryk for den Energi, der i Middel udsendes i Tidsenheden,

$$\mathcal{E} = \frac{2\epsilon^2}{3m^2c^3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} \left(\left(\frac{dg_x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dg_y}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dg_z}{dt} \right)^2 \right) dt,$$

hvor $\mathfrak{T}$ betegner et Tidsrum, der skal antages at være overordentlig stort i Forhold til alle i Betragtning kommende Svingningstider. Da der i Middel ikke vil være nogen Afhængighed mellem Bevægelsesmængderne efter de tre Akser (i de i Kapitel I opstillede Ligninger til Bestemmelse af Elektronernes samlede Bevægelsesmængde efter X -aksen indgaar nemlig kun Elektronernes Bevægelsesmængde i den omhandlede Akse Retning), vil man kunne betragte den Udstraaling, der svarer til hvert enkelt af Leddene, for sig, og man vil derfor paa Grund af Symmetrien faa

ikke vil være nogensomhelst systematisk Forbindelse mellem to forskellige Elektroners samtidige Hastighedskoordinater. En saadan Beregningsmaade vil dog kun give rigtigt Resultat, dersom man antager, at man kan se bort fra Vekselvirkningen mellem Elektronerne indbyrdes, idet der, i Tilfælde af en saadan Vekselvirkning, vel ikke i Middel vil være nogen systematisk Forbindelse mellem de forskellige Elektroners samtidige Hastighedskoordinater, men derimod imellem deres samtidige Accelerationer. Ved et Sammenstød mellem to Elektroner vil der saaledes ikke udsendes nogen Energi, idet Elektronernes samlede Bevægelsesmængde ikke forandres, og saadanne Sammenstød vil derfor kun have indirekte Virkning paa Metalstykkets Energiudstraaling (smlg. det analoge Spørgsmaal (se det foregaaende, Side 58) vedrørende de omhandlede Sammenstøds Indvirkning paa Elektricitetsledningsevnen, og derigennem paa Absorptionsevnen); havde man derimod beregnet Energiudstraalingen som en Sum af Straalingerne fra de enkelte Elektroner betragtet hver for sig — d. v. s. beregnet ud fra de enkelte Elektroners Accelerationer ved Hjælp af Formlen (16) —, vilde man have fundet, at de betragtede Sammenstød vilde have en (i Forhold til deres Antal) betydelig direkte Indflydelse paa Metalstykkets Energiudstraaling.

$$\mathcal{F} = \frac{2\mathcal{E}^2}{m^2 c^3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} \left(\frac{dg_x}{dt} \right)^2 dt. \quad (17)$$

For at undersøge, hvorledes denne Energi vil fordele sig paa Straaler med forskellige Svingningstider, skal vi skrive $\frac{dg_x}{dt}$ som en Sum af harmoniske Svingninger ved Hjælp af et *Fourier'ske* Integral gældende fra Tiden 0 til Tiden $\mathfrak{T}$. Vi vil saaledes kunne skrive

$$\frac{dg_x}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A_p \cos pt + B_p \sin pt) dp, \quad (18)$$

hvor

$$A_p = \int_0^{\mathfrak{T}} \frac{dg_x}{dt} \cos ptdt \quad \text{og} \quad B_p = \int_0^{\mathfrak{T}} \frac{dg_x}{dt} \sin ptdt. \quad (19)$$

Som Lord *Rayleigh*¹⁾ har bevist, følger ud af (18) og (19)

$$\int_0^{\mathfrak{T}} \left(\frac{dg_x}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A_p^2 + B_p^2) dp.$$

Medens Størrelserne A_p og B_p vil variere overordentlig stærkt og uregelmæssigt med p og $\mathfrak{T}$, vil, som vi skal vise, Størrelsen $(A_p^2 + B_p^2) : \mathfrak{T}$, dersom $\mathfrak{T}$ er tilstrækkelig stor, nærme sig en bestemt Grænseværdi, der vil variere regelmæssigt med p .

Af (17) faar vi nu, at den i Tidsenheden udstraalede Energi kan skrives

$$\mathcal{F} = \frac{2\mathcal{E}^2}{\pi m^2 c^3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^{\infty} (A_p^2 + B_p^2) dp, \quad (20)$$

i hvilket Udtryk Koefficienten til dp vil være den Energi, der svarer til Straaler med Svingningstal pr. Sek. mellem $\frac{1}{2\pi}p$ og $\frac{1}{2\pi}(p + dp)$.

Af (19) faas ved partiel Integration

$$A_p = \left| g_x \cos pt \right|_0^{\mathfrak{T}} + p \int_0^{\mathfrak{T}} g_x \sin ptdt.$$

¹⁾ Lord *Rayleigh*: Phil. Mag (5), vol. 27, p. 465, 1889.

Idet det første Led paa højre Side af denne Ligning ikke vil vokse (d. v. s. ikke vil oscillere med tiltagende Amplitude) med voksende $\mathfrak{T}$, vil man ved Beregningen af $(A_p^2 + B_p^2)$ kunne se bort fra dette Led i Sammenligning med det sidste Led. Vi faar derfor, idet man ligeledes ser bort fra det tilsvarende Led i Udtrykket for B_p ,

$$A_p = p \int_0^{\mathfrak{T}} g_x \sin p t dt \quad \text{og} \quad B_p = -p \int_0^{\mathfrak{T}} g_x \cos p t dt. \quad (21)$$

Af (21) faar vi nu, idet vi betegner Værdien af g_x til Tiden t med $g_x(t)$,

$$A_p^2 = p^2 \int_0^{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} g_x(t_1) g_x(t_2) \sin p t_1 \sin p t_2 dt_1 dt_2$$

og

$$B_p^2 = p^2 \int_0^{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} g_x(t_1) g_x(t_2) \cos p t_1 \cos p t_2 dt_1 dt_2.$$

Dette giver

$$A_p^2 + B_p^2 = p^2 \int_0^{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} g_x(t_1) g_x(t_2) \cos p(t_2 - t_1) dt_1 dt_2,$$

hvilket kan skrives

$$A_p^2 + B_p^2 = 2p^2 \int_0^{\mathfrak{T}} g_x(t_1) \int_{t_1}^{\mathfrak{T}} g_x(t_2) \cos p(t_2 - t_1) dt_2 dt_1^1). \quad (22)$$

¹⁾ Ligningen (22) er den samme Ligning som *Jeans* (Phil. Mag., vol. 17, p. 789, 1909) lægger til Grund for sine Beregninger. Han beregner derudfra $A_p^2 + B_p^2$ ved at benytte en Ligning af Formen (med vore Betegnelser):

$$\left[\frac{dg_x}{dt} \right] = -\alpha \cdot g_x, \quad (1')$$

hvor Ledet paa venstre Side af Lighedstegnet skal betegne Middelværdien af Differentialkvotienten for en given Værdi af g_x . Af Ligningen (1') udleder *Jeans*

$$g_x(t_2) = g_x(t_1) e^{-\alpha(t_2 - t_1)} + j, \quad (2')$$

hvor j betegner en Størrelse, hvis Middelværdi er 0. Ved at indsætte Udtrykket (2') i Ligningen (22) og udføre Integrationen med Hensyn til t_2 finder *Jeans* sluttelig (loc. cit., p. 790)

$$A_p^2 + B_p^2 = \frac{2\alpha p^2}{\alpha^2 + p^2} \cdot \int_0^{\mathfrak{T}} (g_x(t_1))^2 dt_1, \quad (3')$$

ved Hjælp af hvilken Ligning $A_p^2 + B_p^2$ simpelt lader sig bestemme.

Disse Beregninger er imidlertid i Almindelighed ikke rigtige (smlg. *H. A. Wilson*

Ved Beregningen af $A_p^2 + B_p^2$ udfra Ligningen (22), skal vi nu først betragte det Tilfælde, hvor vi antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted.

I dette Tilfælde har vi med de i det foregaaende anvendte Betegnelser

$$g_x = \Delta V \cdot \int_0^\infty G_x(r) dr, \quad (23)$$

hvor $G_x(r)$, idet vi her tænker os, at vi betragter et Metalstykke, der ikke paavirkes af ydre Kræfter, og som overalt har samme Temperatur, bestemmes ved Ligningen (Lign. (14) Side 26)

$$\left[\frac{dG_x(r)}{dt} \right]_{G_x(\rho)} = -G_x(r) F(r) + \int_0^\infty G_x(\rho) Q(\rho, r) dr, \quad (24)$$

hvor Leddet paa Ligningens venstre Side skal betegne Middelværdien af $\frac{dG_x(r)}{dt}$ taget for alle mulige Maader, hvorpaa Bevægelsesmængden kan være fordelt mellem de enkelte Elektroner, saaledes at Størrelserne $G_x(\rho)$ antager de Værdier, der er tænkt indsatte i Ligningens højre Side.

Dersom vi nu multiplicerer Leddet paa venstre Side af Ligningen (24) med $\cos \phi(t_2 - t_1)$ og integrerer med Hensyn til t_2 fra t_1 til $\mathfrak{T}$, og dernæst tager Middelværdien af dette Integral for alle mulige Maader, hvorpaa Tilstanden ved Tiden t_1 er betegnet ved bestemte Værdier af $G_x(\rho)$, faar vi, idet vi benytter tilsvarende Betegnelser som ovenfor og kalder den søgte Middelværdi for a ,

$$a = \left[\int_{t_1}^{\mathfrak{T}} \left[\frac{dG_x(r)}{dt} \right]_{(G_x(\rho))_{t_2}} \cdot \cos \phi(t_2 - t_1) dt_2 \right]_{(G_x(\rho))_{t_1}}. \quad (25)$$

Idet der nu i dette Tilfælde, hvor vi betragter adskilte Sammenstød, i Middel ikke er nogen systematisk Forbindelse mellem $\frac{dG_x(r)}{dt}$ og for-

loc. cit., p. 836); som vi har set i første Kapitel, vil nemlig den Hastighed, hvormed g_x aftager, være afhængig af den Maade, hvorpaa Bevægelsesmængden er fordelt mellem Elektronerne med de forskellige absolute Hastigheder; og denne Fordeling vil paa systematisk Maade forandre sig, medens g_x aftager, idet Elektronerne med de forskellige absolute Hastigheder vil miste deres Bevægelsesmængde i en bestemt Retning med forskellig Hurtighed.

udgaaende Tilstande (smlg. Side 81) — vi antager her, ligesom ved Beregningen af Absorptionen, at $\cos pt$ kun forandrer sig overordentlig lidt i de Tider, der medgaar til et enkelt Sammenstød —, vil man have

$$a = \left[\int_{t_1}^{\mathfrak{T}} \frac{dG_x(r)}{dt_2} \cos p(t_2 - t_1) dt_2 \right]_{(G_x(\rho))_{t_1}}. \quad (26)$$

Af (26) faas ved partiel Integration

$$a = \left[(G_x(r))_{\mathfrak{T}} \cdot \cos p(\mathfrak{T} - t_1) - (G_x(r))_{t_1} + p \int_{t_1}^{\mathfrak{T}} G_x(r) \sin p(t_2 - t_1) dt_2 \right]_{(G_x(\rho))_{t_1}}.$$

Idet nu Middelværdien af det første Led indenfor Parenthesen, dersom $\mathfrak{T}$ er tilstrækkelig stor, vil være 0, faar vi, idet vi sætter

$$\xi_2(r) = \left[\int_{t_1}^{\mathfrak{T}} G_x(r) \sin p(t_2 - t_1) dt_2 \right]_{(G_x(\rho))_{t_1}}, \quad (27)$$

$$a = - (G_x(r))_{t_1} + p \xi_2(r). \quad (28)$$

Idet vi nu endvidere sætter

$$b = \left[\int_{t_1}^{\mathfrak{T}} \left[\frac{dG_x(r)}{dt} \right]_{(G_x(\rho))_{t_1}} \cdot \sin p(t_2 - t_1) dt_2 \right]_{(G_x(\rho))_{t_1}} \quad (29)$$

og

$$\xi_1(r) = \left[\int_{t_1}^{\mathfrak{T}} G_x(r) \cos p(t_2 - t_1) dt_2 \right]_{(G_x(\rho))_{t_1}}, \quad (30)$$

faar vi ved at gaa frem paa ganske samme Maade som ovenfor

$$b = -p \xi_1(r). \quad (31)$$

Dersom vi nu multiplicerer begge Sider af Ligningen (24) med henholdsvis $\cos p(t_2 - t_1)$ og $\sin p(t_2 - t_1)$ og integrerer med Hensyn til t_2 fra t_1 til $\mathfrak{T}$ og dernæst tager Middelværdien af Integralerne for alle mulige Maader, hvorpaa Bevægelsesmængden kan være fordelt mellem de enkelte Elektroner, saaledes at Tilstanden ved Tiden t_1 er

betegnet ved givne Værdier for $G_x(\rho)$, faar vi ved Hjælp af Ligningerne (25), (27), (28), (29), (30) og (31)

$$-(G_x(r))_{t_1} + p \xi_2(r) = -\xi_1(r) F(r) + \int_0^\infty \xi_1(\rho) Q(\rho, r) d\rho \quad (32)$$

og

$$-p \xi_1(r) = -\xi_2(r) F(r) + \int_0^\infty \xi_2(\rho) Q(\rho, r) d\rho. \quad (33)$$

Idet Ligningerne (32) og (33) til Bestemmelse af $\xi_1(r)$ og $\xi_2(r)$, som man ser, ganske svarer til Ligningerne (4) og (5) Side 82 til Bestemmelse af $\psi_1(r)$ og $\psi_2(r)$, faar man her paa ganske samme Maade som ved disse Ligninger

$$\xi_1(r) = (G_x(r))_{t_1} \cdot F_1(r) + \int_0^\infty (G_x(\rho))_{t_1} \cdot Q_1(\rho, r) d\rho, \quad (34)$$

hvor $F_1(r)$ og $Q_1(\rho, r)$ betegner de samme Funktioner som i Ligningen (6) Side 82. Ved Hjælp af Ligningerne (23), (30) og (34) samt Ligningen (7) Side 82 faar vi nu

$$\left[\int_{t_1}^{\mathfrak{T}} g_x(t_2) \cos p(t_2 - t_1) dt_2 \right]_{(G_x(\rho))_{t_1}} = \Delta V \cdot \int_0^\infty (G_x(r))_{t_1} P_1(r) dr. \quad (35)$$

Idet vi nu antager, at Tiden $\mathfrak{T}$ er saa lang, at $g_x(t)$ indenfor denne Tid ikke alene antager alle mulige Værdier, som den kan antage, men antager enhver af disse saa mange Gange, at man kan regne, at den har haft denne Værdi, med Bevægelsesmængden fordelt paa de enkelte Elektroner paa alle mulige Maader, vil man kunne indsætte Udtrykket (35) i Ligningen (22) i Stedet for Integralet i denne Ligning med Hensyn til t_2 ; vi faar derfor

$$A_p^2 + B_p^2 = 2p^2 \cdot (\Delta V)^2 \cdot \int_0^{\mathfrak{T}} \left(\int_0^\infty G_x(r) dr \cdot \int_0^\infty G_x(r) P_1(r) dr \right)_{t_1} dt_1. \quad (36)$$

Som man ser, har vi nu opnaaet, at Størrelsen under Integraltegnet er henført til samme Tidspunkt, og derved er Opgaven blevet overordentlig meget simplificeret.

Vi har hidtil, for at lette Oversigten, i vore Beregninger benyttet Integraler til Udtrykkene for Elektronernes samlede Bevægelsesmængde o. s. v.; dette er strengt taget ikke rigtigt, idet der kun er et endeligt Antal Elektroner til Stede i ΔV ; men man indser let, at det ingen væsentlig Forandring vilde have medført, dersom man havde erstattet Integralerne med Summer over de enkelte Elektroner. Ved den nærmere Beregning af Udtrykket (36) stiller det sig imidlertid ganske anderledes, idet det Integral, der indgaar i dette Udtryk, er i højeste Grad afhængigt af Antallet af Elektroner. Vi skal derfor i Stedet for Integralerne med Hensyn til r i Udtrykket (36) indføre Summer over de ΔN Elektroner i Volumenelementet ΔV .

Vi faar, idet vi betegner en enkelt Elektrons Hastighed med (ξ, η, ζ) ,

$$A_p^2 + B_p^2 = 2p^2 m^2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\sum_I^{\Delta N} \xi_n \cdot \sum_I^{\Delta N} \xi_n P_1(r_n) \right)_{t_1} dt_1. \quad (37)$$

Man beviser nu imidlertid i den statistiske Mekanik, at der, hvilke Kræfter der end antages at virke mellem Elektronerne, i Middel ikke vil bestaa nogen systematisk Afhængighed mellem de enkelte Elektrons samtidige Hastighedskoordinater — (der vil derimod være systematiske Forbindelser mellem Elektronernes samtidige Accelerationer (se Noten Side 90); dette er der imidlertid ved de foregaaende Beregninger taget Hensyn til, nemlig gennem Benyttelsen af Ligningen (24)) —. Leddene med $\xi_n \cdot \xi_m P(r_m)$, hvor n og m er forskellige, vil derfor intet Bidrag give til Integralet i (37), og vi faar

$$A_p^2 + B_p^2 = 2p^2 m^2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\sum_I^{\Delta N} \xi_n^2 P_1(r_n) \right) \cdot dt. \quad (38)$$

Idet nu Middelværdien af $\xi_n^2 P_1(r_n)$ paa Grund af Symmetrien (idet $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$) vil være lig $\frac{1}{3}$ af Middelværdien af $r_n^2 P_1(r_n)$, og idet endvidere Elektronernes Hastighedsfordeling i Middel udtrykkes ved Ligningen (4) Side 16, faar man

$$\left. \begin{aligned} A_p^2 + B_p^2 &= 2p^2 m^2 \cdot \mathfrak{T} \Delta V \int_0^{\infty} \frac{r^2}{3} P_1(r) \cdot Ke^{-\frac{mr^2}{2kT}} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{2m^2 kT}{\epsilon^2} \sigma_p p^2 \mathfrak{T} \Delta V, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

hvor σ_p betegner den ved Ligningen (8) Side 82 definerede Størrelse.

Af Ligningerne (20) og (39) faar vi nu, idet den Energi, der i Tidsenheden udstraales fra et lille Metalstykke med Volumen ΔV fordelt paa Straaler med Svingningstal mellem $\frac{1}{2\pi}p$ og $\frac{1}{2\pi}(p + dp)$, betegnes ved $\beta_p dp \Delta V$,

$$\beta_p = \frac{4kT}{\pi c^3} \sigma_p p^2. \quad (40)$$

Indsætter vi i (40) den Værdi for σ_p , der er givet ved Ligningen (11) Side 84, og sættes henholdsvis $n = \infty$ og $n = 5$, faar vi de Værdier, der er givne for β_p af henholdsvis *Wilson*¹⁾ og *Jeans*²⁾.

Vi skal nu betragte det Tilfælde, hvor Metalmolekylernes Dimensioner ikke antages at være forsvindende i Forhold til deres indbyrdes Afstande. I dette Tilfælde vil man ikke kunne anvende en Fremgangsmaade, der svarer til den, vi har benyttet i det ovenfor omhandlede Tilfælde, idet der her i Middel vil være systematiske Forbindelser mellem den Hastighed, hvormed Bevægelsesmængden aftager, og tidligere Tilstande indenfor Tidsrum, der er af samme Størrelsesorden som de Tider, indenfor hvilke de enkelte Elektroner i Middel mister Størstedelen af deres oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning³⁾. (Et Tidsrum af denne Størrelsesorden skal vi i det følgende for Kortheds Skyld betegne ved τ .)

Vi skal her kun betragte det Tilfælde (se Side 37), i hvilket Metalmolekylernes Kraftfelter antages at være stationære, og hvor man ser bort fra Vekselvirkningen mellem Elektronerne indbyrdes; og vi skal endvidere kun gennemføre Beregningerne for saadanne Varmestraalers Vedkommende, hvis Svingningstider er store i Forhold til den ovenfor omtalte Størrelse τ .

Idet Elektronerne her antages at bevæge sig uafhængigt af hverandre, vil der ikke være systematiske Forbindelser mellem deres samtidige Bevægelser; og Udstraalingen fra et lille Metalstykke ΔV vil

¹⁾ *H. A. Wilson*: loc. cit., p. 842.

²⁾ *J. H. Jeans*: Phil. Mag., vol. 17, p. 790, 1909.

³⁾ *Jeans* benytter samme Fremgangsmaade i alle Tilfælde, han bemærker blot (loc. cit., p. 776), at Størrelsen dt i den Ligning, der svarer til Ligning (1') i Noten Side 93. i det her omhandlede Tilfælde skal betragtes som stor i Forhold til saadanne Tidsrum, indenfor hvilke g_x forandrer sig meget stærkt. Bortset fra de Mangler ved *Jeans's* Beregninger, som vi ovenfor har omtalt, og som naturligvis ogsaa vil være til Stede i dette mere almindelige Tilfælde, synes den nævnte Antagelse om dt ikke at kunne bringes i Overensstemmelse med Benyttelsen af Ligningen (1') som Differentialligning (nemlig til at udlede (2')), ved hvilken Benyttelse man jo netop nødvendigvis maa gaa ud fra, at g_x kun forandrer sig meget lidt i Tiden dt .

derfor kunne beregnes som Summen af Udstraalingerne fra de enkelte Elektroner betragtede hver for sig. Idet Antallet af Elektroner i Metalstykket betegnes ved ΔN , faar vi i dette Tilfælde paa ganske samme Maade som ovenfor, svarende til Ligningerne (20) og (22), for den Mængde Energi, der udstraales i en Tidsenhed,

$$\mathcal{F} = \frac{2\varepsilon^2}{\pi c^3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}} \int_0^\infty \left\{ \sum_1^{\Delta N} (A_p^2 + B_p^2)_n \right\} dp, \quad (41)$$

hvor

$$(A_p^2 + B_p^2)_n = p^2 \int_0^{\mathfrak{T}} \int_0^{\mathfrak{T}} \xi_n(t_1) \xi_n(t_2) \cos p(t_2 - t_1) dt_1 dt_2, \quad (42)$$

i hvilken Ligning $\xi_n(t)$ betegner en enkelt Elektrons Hastighed efter X -aksen til Tiden t .

Da vi nu her kun skal betragte Svingningstider, der er store i Sammenligning med τ , kan $\cos p(t_2 - t_1)$ sættes lig 1 for alle saadanne Værdier af t_1 og t_2 , ved hvilke der i Middel vil være nogen kendelig systematisk Forbindelse imellem $\xi_n(t_1)$ og $\xi_n(t_2)$; man vil imidlertid indse, at man, ogsaa for de øvrige Værdier af t_1 og t_2 , i Integralet i (42) kan erstatte $\cos p(t_2 - t_1)$ med 1; thi disse sidste Værdier vil, paa Grund af Uafhængigheden mellem $\xi_n(t_1)$ og $\xi_n(t_2)$, ikke i noget af de to Tilfælde i Middel give noget kendeligt Bidrag til Værdien af Integralet i (42). Vi faar da af (42)

$$(A_p^2 + B_p^2)_n = p^2 \left(\int_0^{\mathfrak{T}} \xi_n(t) dt \right)^2, \quad (43)$$

i hvilket Udtryk Integralet paa højre Side vil være lig Projektionen paa X -aksen af det Stykke, den paagældende Elektron har bevæget sig i Tiden $\mathfrak{T}$.

Idet vi antager, at der ikke finder nogen Vekselvirkning Sted mellem de fri Elektroner indbyrdes, og at Metalmolekylernes Kraftfelter er stationære, vil Summen a af en enkelt Elektrons kinetiske Energi og dens potentielle Energi i Forhold til Metalmolekylerne være konstant under Elektronens Bevægelse, og vi har i 1^{ste} Kapitel omtalt, hvorledes de enkelte Elektrons Bevægelse kan betragtes som en »fri Diffusion« med Diffusionskoefficienten $D(a)$ (se Side 41). — Ved Beregningerne i 1^{ste} Kapitel har vi, for at bringe Forbindelse til Veje mellem det her omhandlede Tilfælde og Forholdene i de virkelige

Metaller, kun antaget, at a i Middel er mærkelig konstant indenfor Tider af samme Størrelsesorden som τ (se Side 38); vi skal imidlertid her for Simpelt Skyld antage, at a vil være konstant under hele den enkelte Elektrons Bevægelse i den lange Tid $\mathfrak{T}$; dette vil nemlig af Grunde, der ganske svarer til, hvad der blev omtalt, da vi ovenfor erstattede $\cos p(t_2 - t_1)$ med 1, ikke have nogen kendelig Indvirkning paa Værdien af Udtrykket for $\Sigma(A_p^2 + B_p^2)_n$. —

Bestemmelsen af Størrelsen $\Sigma(A_p^2 + B_p^2)_n$ er nu ved Ligningen (43) bleven henført til Spørgsmaalet om Fordelingen til Tiden $\mathfrak{T}$ af et stort Antal uafhængigt af hinanden diffunderende Partikler, der til Tiden $t = 0$ befinder sig i en bestemt Plan (f. Eks. YZ -planen). Dette Spørgsmaal kan, som *A. Einstein*¹⁾ har vist, behandles paa en meget simpel Maade. Partiklernes Fordeling vil nemlig bestemmes ved Ligningen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

hvor $f(x, t) dx$ betegner Antallet af Partikler til Tiden t mellem to parallelle Planer i Afstandene x og $x + dx$ fra den faste Plan, og hvor Diffusionskoefficienten D svarer til den ovenfor omtalte Størrelse $D(a)$. Løsningen af denne Ligning under den Betingelse, at $f(x, t) = 0$ for $t = 0$ og $x \leq 0$, — hvilken Løsning kendes fra *Fourier's* Theori for Varmeledning i et isotropt Medium — vil være

$$f(x, t) = Ct^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

og Middelværdien af Kvadratet paa Partiklernes Afstande fra den faste Plan til Tiden $\mathfrak{T}$, vil være (*Einstein*: loc. cit., p. 559)

$$\int_0^\infty x^2 f(x, \mathfrak{T}) dx : \int_0^\infty f(x, \mathfrak{T}) dx = 2D\mathfrak{T}.$$

Af Ligningen (43) faar vi derfor nu

$$\sum_1^{\Delta N} (A_p^2 + B_p^2)_n = 2p^2 \mathfrak{T} \sum_1^{\Delta N} D(a),$$

og idet vi ligesom i første Kapitel skal betegne Antallet af Elektroner i Volumenenheden, hvis Energi ligger imellem a og $a + da$, ved $N(a) da$, faar vi

¹⁾ *A. Einstein*: Ann. d. Phys., Bd. 17, p. 556, 1905.

$$\sum_1^{\Delta N} (A_p^2 + B_p^2)_n = 2p^2 \mathfrak{T} \cdot \Delta V \int_0^\infty D(a) N(a) da. \quad (44)$$

Idet endvidere Metallets elektriske Ledningsevne σ vil være (se Lign. (7) Side 50 og Lign. (8) Side 51)

$$\sigma = \frac{\varepsilon^2}{kT} \int_0^\infty D(a) N(a) da,$$

faar vi sluttelig med Benyttelse af de samme Betegnelser som paa Side 98 ved Hjælp af Ligningerne (41) og (44)

$$\beta_p = \frac{4kT}{\pi c^3} \sigma p^2. \quad (45)$$

Vi skal nu benytte de i det foregaaende udførte Beregninger til Bestemmelse af Varmestraalingsloven for Straaler med store Svingningstider. Tænker vi os et lille Metalstykke i Ligevægt med den elektromagnetiske Straaling i det omgivende tomme Rum, maa den Energi fordelt paa Straaler med bestemte Svingningstider, som Metallet absorberer i Tidsenheden, i Middel være lig den Energi, som det udsender i den samme Tid fordelt paa Straaler med de samme Svingningstider. Vi faar derfor, idet vi kalder den Energi, der i Ligevægtstilstanden findes i en Volumenenhed af det omgivende tomme Rum fordelt paa Straaler med Svingningstal mellem $\frac{1}{2\pi} p$ og $\frac{1}{2\pi} (p + dp)$, for $E(p) dp$, og idet vi betegner Metalstykkets Volumen ved ΔV ,

$$E(p) dp \cdot \alpha_p \Delta V = \beta_p dp \Delta V,$$

hvoraf faas

$$E(p) = \frac{\beta_p}{\alpha_p}.$$

Idet vi nu indsætter de fundne Værdier for α_p og β_p enten fra Ligningerne (10) og (40) eller fra Ligningerne (1) og (45), faar vi i begge Tilfælde

$$E(p) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \cdot p^2. \quad (46)$$

Som det fremgaar af, hvad der er omtalt ved Bestemmelserne af α_p og β_p (se Side 86 og 98), er Ligningen (46) den samme som den af *Jeans* udledte, men forskellig fra den af *Wilson* fundne; dette sidste hidrører efter *Wilson's*

Mening fra, at der ved hans Beregninger ikke er taget Hensyn til Sammenstødene mellem Elektronerne indbyrdes (loc. cit., p. 844), men som vi har set, er Ligningen, i hvert Tilfælde saa længe man antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted, fuldkommen uafhængig af den Indflydelse, man tilskriver Vekselvirkningen mellem Elektronerne indbyrdes i Forhold til Vekselvirkningen mellem Elektronerne og Metalmolekylerne.

Dersom vi i Stedet for p indfører Bølgelængden λ , der staar i Forbindelse med p gennem Ligningen $\frac{1}{2\pi}p = \frac{c}{\lambda}$, og betegner Energien i Volumenenheden fordelt paa Straaler med Bølgebredde mellem λ og $\lambda + d\lambda$ med $E(\lambda) d\lambda$, faar vi af (46)

$$E(\lambda) = 8\pi kT \cdot \lambda^{-4}. \quad (47)$$

Denne Formel, hvis Rigtighed vi her har bevist for alle de i Kapitel I behandlede Tilfælde, er den samme som den af *Lorentz* udledte, og er som omtalt i det foregaaende i udmærket Overensstemmelse med Eksperimenterne over Varmestraaler med store Bølgelængder.

For nærmere at kunne undersøge Betydningen af Formlen (47) maa vi her omtale et Forsøg, der er gjort af Lord *Rayleigh*¹⁾ og *Jeans*²⁾ paa at beregne Varmestraalingsloven for Straaler med alle mulige Svingningstider umiddelbart ud fra selve de til Grund liggende Antagelser, hvorpaa den elektromagnetiske Theori bygger. De nævnte Forfattere har nemlig forsøgt ved Hjælp af den statistiske Mekaniks almindelige Behandlingsmetoder at undersøge Betingelserne for Ligevægt mellem den elektromagnetiske Straaling og et hvilket som helst Elektronsystem, der befinder sig i et Rum, der er fuldstændig afskaaret fra ydre Paavirkninger. Resultatet af disse Undersøgelser er nu, at Betingelsen for Ligevægt er, at den straalende Energi i Volumenenheden udtrykkes ved Formlen (47), resp. (46), for Straaler med alle mulige Svingningstider. Dette vil imidlertid, som man indser, medføre, at hele Energien paa Volumenenhed bliver uendelig stor, hvilket betyder, at der slet ikke kan opnaas en Ligevægt, men at hele Energien efterhaanden vil gaa over paa Straalingen og her mere og mere koncentrerer paa Straaler med kortere og kortere Svingningstider, ja til Slut vil hele Energien være koncentreret paa Straaler med uendelig korte Svingningstider.

¹⁾ Lord *Rayleigh*: Phil. Mag. (5), vol. 49, p. 539, 1900. Nature, vol. 72, pp. 54 og 243, 1905.

²⁾ *J. H. Jeans*: Phil. Mag. (6), vol. 10, p. 91, 1905 og vol. 17, p. 229, 1909; se ogsaa *H. A. Lorentz*: Nuovo Cimento (5), Tom. 16, p. 5, 1908.

Paa Grundlag af disse Resultater har *Jeans* fremsat den Anskuelse, at der ved Forsøgene over Varmestraalingen slet ikke er Tale om nogen virkelig Ligevægt, men kun om en Tilstand, der forskyder sig meget langsomt paa Grund af de almindelige Legemers ringe Absorptions- og Emissionsevne for Straaler med meget korte Svingningstider. Dette er imidlertid, som det fremgaar af den Diskussion¹⁾, der har været ført herom, ikke tilstrækkeligt til at forklare de ved Eksperimenterne fundne Fænomener. Det synes derfor, som om det er udelukket at forklare Varmestraalingsloven i Overensstemmelse med Erfaringen, dersom man vil fastholde de Grundantagelser, hvorpaa den elektromagnetiske Theori bygger²⁾. Dette hidrører antagelig fra, at den elektromagnetiske Theori ikke er i Overensstemmelse med de virkelige Forhold, og at den kun kan give rigtige Resultater, dersom den anvendes overfor et stort Antal Elektroner (som ved de almindelige Legemer), eller til at bestemme Middelbevægelsen af en enkelt Elektron i forholdsvis lange Tidsrum (saaledes som ved Beregningen af Katodestraalernes Bevægelse), men ikke kan benyttes til at undersøge en enkelt Elektrons Bevægelse indenfor korte Tidsrum. Vi skal ikke her, da det ligger ganske udenfor de Spørgsmaal, som behandles i denne Afhandling, komme ind paa en Omtale af de Forsøg, der er gjort paa at indføre principielle Forandringer i den elektromagnetiske Theori; Forsøg, der synes at skulle føre til meget interessante Resultater.

Man kunde nu spørge om, hvorledes de Berægninger, som vi har udført i dette Kapitel, stiller sig til det her omtalte. Vi maa da først og fremmest gøre opmærksom paa, at vi slet ikke har forsøgt at finde en Ligevægtstilstand i den Forstand som Lord *Rayleigh* og *Jeans*. Vi er nemlig stiltiende gaaet ud fra, at der i Overensstemmelse med Erfaringen vil eksistere en Ligevægtstilstand, ved hvilken den elektromagnetiske Energi i Volumenenheden vil være en forholdsvis lille Størrelse, nemlig saa lille, at de elektromagnetiske Felter hidrørende fra Straalingen kun vil have en yderst ringe Indflydelse paa de fri Elektrons Bevægelser i Forhold til de Kræfter, hvormed Elektronerne paavirkes af hinanden og af Metalmolekylerne³⁾. — (Der-

¹⁾ Se f. Eks. *O. Lummer* og *E. Pringsheim*: *Phys. Zeitschr.*, Bd. 9, p. 449, 1908; og *H. A. Lorentz*: *Phys. Zeitschr.*, Bd. 9, p. 562, 1908.

²⁾ Se *A. Einstein*: *Phys. Zeitschr.*, Bd. 10, pp. 185 og 817, 1909; se ogsaa *M. Planck*: *Ann. d. Phys.*, Bd. 31, p. 758, 1910; og *A. Einstein* u. *L. Hopf*: *Ann. d. Phys.*, Bd. 33, p. 1105, 1910.

³⁾ Naar flere Forfattere (*J. J. Thomson*: *Phil. Mag.*, vol. 14, p. 217, 1907 og vol. 20, p. 238, 1910 og *J. Kunz*: *Physical. Review*, vol. 28, p. 313, 1909; smlg. ogsaa *J. H. Jeans*: *Phil. Mag.*, vol. 18, p. 217, 1909 og vol. 20, p. 642, 1910) er af den

som man derimod vilde søge den Ligevægtstilstand, der vilde opstaa i et fra ydre Paavirkning afskaaret Rum, dersom de elektromagnetiske Grundantagelser var fuldstændig rigtige, maatte man, som *Jeans*¹⁾ har gjort opmærksom paa, nødvendigvis tage Hensyn til de omtalte elektromagnetiske Felter, der efterhaanden, som den straalende Energi voksede, vilde blive af langt større Indflydelse paa de enkelte Elektroners Bevægelser end Metalmolekylernes Kraftfelter.) — Idet vi endvidere kun har behandlet saadanne Varmestraaler, hvis Svingningstider er store i Forhold til Varigheden af de enkelte elektromagnetiske »Processer« (Sammenstødene), synes det, som om det ikke er uberettiget paa Forhaand at vente, at de i dette Kapitel udførte Beregninger har samme Stilling til og samme Krav paa Overensstemmelse med Erfaringen som den øvrige Metallernes Elektrontheori. — Dette synes navnlig at maatte gælde for den Udledning, vi har givet i det sidst behandlede Tilfælde, idet vi her ikke har gjort Brug af nogen Antagelse om, at der overhovedet finder pludselige Sammenstød Sted.

Mening, at man udfra Elektrontheorien, ved en Beregningsmaade som den omtalte, ved Hjælp af passende Antagelser om Virkningen mellem Metalmolekylerne og Elektronerne kan forklare i hvert Tilfælde Karakteren af den eksperimentelt fundne Straalingslov for alle Svingningstider — f. Eks. den meget hurtige Aftagen af Energien fordelt paa Straaler med meget korte Svingningstider —, synes dette dog ikke rigtigt. Ved alle de nævnte Undersøgelser er der nemlig ikke taget tilstrækkeligt Hensyn til den overordentlig hurtige Aftagen af Absorptionsevnen for Straaler med meget korte Svingningstider, men kun til Emissionsevnen Aftagen (smlg. Side 77). Dersom man imidlertid ogsaa tager Hensyn til Absorptionsevnen Aftagen, vil man efter min Mening i alle Tilfælde nødvendigvis komme til en Straalingslov, der ikke lader sig forene med Erfaringerne; thi det modsatte Resultat vilde være i Strid med Lord *Rayleigh's* og *Jeans's* Beregninger. Førtes man nemlig, udfra Forudantagelser som de ovenfor nævnte om Tilstedeværelsen af en Ligevægt som den eksperimentelt fundne, til en Straalingslov, der for alle Svingningstider lod sig forene med disse Antagelser, vilde denne svare til en virkelig Ligevægt og ikke (smlg. ovenfor ved Omtalen af *Jeans's* Theori) til en tilsyneladende Ligevægt.

¹⁾ *J. H. Jeans*: Phil. Mag., vol. 18, p. 215, 1909.

KAPITEL IV.

ET MAGNETISK FELTS INDVIRKNING PAA DE FRI ELEKTRONERS BEVÆGELSE.

§ 1.

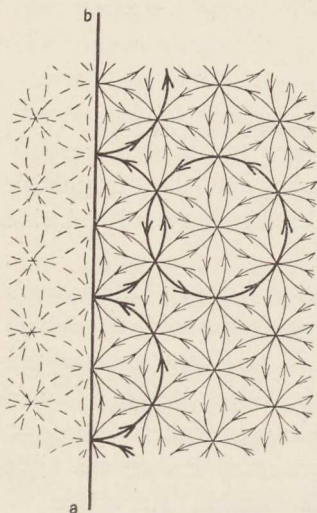
Tilfælde, hvor der er statistisk Ligevægt til Stede.

Vi skal her først undersøge, hvad Virkning et ydre magnetisk Felt vil have paa et Metalstykke, der befinder sig saavel i elektrisk Ligevægt som i Temperaturligevægt.

Under det magnetiske Felts Indvirkning vil de fri Elektroners Baner blive krummede i en bestemt Retning i Forhold til Feltets Akse — dersom man antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted, vil Elektronernes Baner mellem Sammenstødene bestaa af smaa Stykker af Skruelinier, hvis Akser er parallele med Feltets Akse —. Man kunde nu tænke sig, at denne Elektronernes Bevægelse vilde frembringe ydre magnetiske Virkninger. En saadan Antagelse vil imidlertid, som vi skal se, ikke være rigtig. Krumningen alene af Banerne vil nemlig ikke frembringe magnetiske Virkninger, idet den magnetiske Kraft, der stammer fra en Elektrons Bevægelse, kun vil være afhængig af Elektronens Sted og Hastighed i det betragtede Øjeblik (vi antager her ligesom i det foregaaende, at Elektronernes Hastighed kan regnes for forsvindende i Sammenligning med Lysets) og ikke af Elektronens Acceleration. Den samlede magnetiske Virkning af de fri Elektroners Bevægelser kan derfor bestemmes ud fra den statistiske Fordeling af Elektronernes Steds- og Hastigheds-Koordinater til enhver given Tid. Som vi nu imidlertid har omtalt i 1^{ste} Kapitel Side 13, vil denne Fordeling, dersom der er statistisk Ligevægt til Stede, være ganske uafhængig af en ydre magnetisk Kraft. Hvad enten der virker en magnetisk Kraft eller ej, vil Elektronernes Hastigheder i ethvert nok saa lille Volumenelement

af Metallet i Middel være ligelig fordelt i alle Retninger, og der vil derfor ikke udgaa nogen magnetisk Virkning fra et saadant Element og derfor heller ikke fra hele Metalstykket.

Dersom man ikke behandler Spørgsmaalet statistisk, men derimod betragter de enkelte Elektroners Bevægelser, finder man, at enhver Elektron, der bevæger sig helt i det Indre af Metallet, paa Grund af dens Banes Krumning under det ydre magnetiske Felts Indvirkning, under sin Bevægelse i Middel vil frembringe en magnetisk Kraft modsat rettet den ydre magnetiske Kraft. Flere Forfattere¹⁾ har derfor ment, at et Metalstykke, hvori der bevæger sig fri Elektroner, vil virke som et diamagnetisk Legeme. Dette er imidlertid, som vi ovenfor har set, ikke rigtigt, hvilket hidrører fra, at man ved en Betragtningssmaade som den sidst omtalte, hvor de enkelte Elektroners Baner betragtes hver for sig, maa tage særligt Hensyn til Forholdene i den umiddelbare Nærhed af Metallets Overflade.



For nærmere at vise dette skal vi her betragte Forholdene ved et specielt, særlig simpelt Eksempel.

Vi skal betragte en Samling Elektroner, der bevæger sig fuldkommen uafhængig af hverandre (ligesom Molekylerne i en stærkt fortyndet Luftart) i en lukket Beholder, og vi skal endvidere for Simpelheds Skyld yderligere antage, at Elektronerne, naar de rammer Beholderens Vægge, vil kastes tilbage som elastiske Kugler fra en glat Flade. Vi skal nu undersøge Virkningen af en ydre magnetisk Kraft paa en saadan Samling Elektroner.

Vi skal først for dette specielle Eksempel eftervise, hvad vi ovenfor har bevist i Almindelighed, nemlig at Elektronernes Hastighed i ethvert nok saa lille Volumenelement af Beholderen vil være ligelig fordelt i alle Retninger, dersom der er statistisk Ligevægt til Stede. Ovenstaaende Figur skal forestille et lille Stykke af Beholderen i Nærheden af Væggen. Denne, der tænkes at staa vinkelret paa Figurens Plan, er afbildet ved Linien *ab*, og Beholderens Indre tænkes at ligge tilhøjre for denne Linie. Den magnetiske Kraft tænkes endvidere at staa vinkelret paa Figurens Plan. Paa Figuren er medtaget Banerne for et Antal Elektroner, der alle tænkes at have samme absolute Hastighed og bevæge sig i Baner, der ligger i

¹⁾ *J. J. Thomson*: Rapp. d. Congrès d. Physique, Paris 1900, Tom. 3, p. 148 og *W. Voigt*: Ann. d. Phys., Bd. 9, p. 130 (Note 1), 1902; se ogsaa *P. Langevin*: Ann. d. Chim. et d. Phys., Tom. 5, p. 90, 1905. [Naar *Z. Thullie* (Prace mat.-fiz. Warszawa, Tom. 19, p. 207, 1908) i Modsætning til de nævnte Forfattere mener at kunne slutte, at de fri Elektroners Virkning ikke vil være diamagnetisk men paramagnetisk, synes dette at skyldes en Fortegnsfejl ved *Thullie's* Beregninger; smlg. loc. cit. Lign. (1) p. 209 og Lign. (4) p. 210.]

Figurens Plan. Vi skal nu her for Simpelheds Skyld kun betragte saadanne Elektroner som dem, hvis Baner er medtagne paa Figuren. At der vil være statistisk Ligevægt blandt en saadan Samling Elektroner, dersom deres Hastigheder i Omegnen af ethvert Punkt er ligelig fordelt i alle Retninger i Figurens Plan, følger, dersom man betragter et Punkt i en saadan Afstand fra Væggen, at en Elektron, der begynder sin Bane i Punktet, paa Grund af den magnetiske Krafts afbøjende Virkning ikke vil kunne naa Væggen, umiddelbart udfra Symmetrien med Hensyn til den magnetiske Krafts Retning; og at det samme ogsaa vil gælde om et Punkt, der ligger i nok saa stor Nærhed af Beholderens Væg, følger af, at Elektronerne (efter den ovenfor omtalte Antagelse om Tilbagekastningen fra Væggen) vil kastes saaledes tilbage, at deres Baner i Middel danner den direkte Fortsættelse af de Baner, Elektronerne vilde gennemløbe, dersom Væggen ikke var til Stede. — Ved ganske lignende Betragtninger kan man indse, at en tilsvarende statistisk Ligevægt vil gælde for alle Elektronerne, d. v. s. ogsaa, naar man medtager saadanne, der ikke ligger i Figurens Plan, eller som befinder sig i Nærheden af et Stykke af Væggen, der ikke er parallelt med den ydre magnetiske Kraft. — Bevægelsen af de betragtede Elektroner vil derfor ikke give Anledning til nogen ydre magnetisk Virkning.

Vi skal nu gaa over til at undersøge de enkelte Elektroners Baner i det her omhandlede Eksempel. Betragter vi igen saadanne Elektroner, der er afbildede paa Figuren, vil man indse, at en Elektron, der under sin Bevægelse ikke kommer i Berøring med Beholderens Væg, idet den beskriver en lukket Bane, i Middel vil frembringe en magnetisk Kraft, der vil have modsat Retning af den ydre magnetiske Kraft. Følger man derimod de Elektroner, der under Gennemløbningen af deres Baner kommer i Berøring med Væggen, vil man se, at disse, som det fremgaar af Figuren, under det magnetiske Felts Indvirkning faar en Slags krybende Bevægelse langs med Væggen; og disse Elektroner vil derfor, betragtet for sig, frembringe et magnetisk Felt i samme Retning som det ydre Felt, og som vil være ligesaa stort og modsat rettet det, som frembringes af Elektronerne i det Indre.

Vi har saaledes set, at et Metalstykke, i hvilket der er saavel elektrisk Ligevægt som Temperaturligevægt, ikke vil besidde nogensomhelst magnetiske Egenskaber hidrørende fra de fri Elektroners Tilstedeværelse. (Det maa dog bemærkes, at der i et Metalstykke, der udsættes for en variabel magnetisk Kraft, vil fremkomme en Strømning af Elektronerne — de saakaldte *Foucault'ske* Strømme — frembragt af de elektriske Kræfter, der efter den elektromagnetiske Theori er uløseligt knyttede til det magnetiske Felts Variation; en Strømning, der vil frembringe en magnetisk Virkning, der vil modvirke Feltets Variation. Ganske tilsvarende Forhold vil naturligvis finde Sted, naar et Metalstykke pludseligt udsættes for Virkningerne af et magnetisk Felt¹⁾; men i et saadant Til-

¹⁾ Som *Langevin* (loc. cit., p. 82—93) har paavist (smgl. ogsaa *Z. Thullie: Anz. d. Akad. d. Wiss. Krakau, math.-nat. Kl.*, 1907, p. 749), vil et Forhold, der ganske svarer

fælde vil den omhandlede Strømning af Elektronerne, naar det magnetiske Felt er blevet konstant, meget hurtigt forsvinde uden at efterlade nogen blivende Virkning paa Elektronernes samlede Bevægelse.)

§ 2.

De galvano- og thermomagnetiske Fænomener.

Vi har hidtil antaget, at der i det betragtede Metalstykke var saavel elektrisk Ligevægt som Temperaturligevægt; er dette imidlertid ikke Tilfældet, vil Elektronerne i Middel antage en ordnet Bevægelse

til det her omhandlede, ogsaa finde Sted, dersom man betragter de »bundne« Elektroner, der antages at bevæge sig i lukkede Baner i Metalmolekylernes Indre; idet der ogsaa her, dersom der pludselig opstaar en magnetisk Kraft, vil frembringes en Bevægelse blandt Elektronerne, der vil fremkalde en magnetisk Kraft modsat rettet den ydre magnetiske Kraft. — Naar *W. Voigt* (loc. cit., p. 125) og *J. J. Thomson* (Phil. Mag., vol. 6, p. 688, 1903) ikke har fundet en saadan Virkning hos en Samling Elektroner, der bevæger sig i lukkede Baner under Paavirkning af en Centralkraft (Tiltrækning), hidrører dette, som *Langevin* (loc. cit., p. 83) har gjort opmærksom paa, fra, at de nævnte Forfattere ikke har taget tilstrækkeligt Hensyn til de elektriske Kræfter, der er knyttede til Forandringerne i det magnetiske Felt. [Det kan her bemærkes, at sammenholdt med det ovenfor (i Teksten) omtalte, danner *Voigt's* og *Thomson's* Beregninger en Illustration til den statistiske Ligevægtsfordelings Uafhængighed af Tilstedeværelsen af magnetiske Kræfter (i det omhandlede Tilfælde, hvor Elektroner bevæger sig i lukkede Baner, vil der ikke fremkomme nogen »Randvirkning«; smlg. ovenfor).] — *Langevin* har ud fra det her omtalte søgt at forklare Legemernes diamagnetiske Egenskaber, idet han antager, at en saadan en Gang opstaaet Bevægelse vil holde sig uforandret, saalænge det magnetiske Felt holder sig konstant. Dette sidste vil dog, efter hvad vi har omtalt i første Kapitel (Side 13), ikke være Tilfældet, dersom Elektronernes Bevægelser følger de almindelige mekaniske Love, og dersom der finder blot den ringeste Energiomsætning Sted mellem de enkelte Elektroner indenfor de forskellige Molekyler (Tilstedeværelsen af en vis Energiomsætning mellem de paagældende Elektroner maa man efter den omhandlede Theori antage, idet de betragtede magnetiske Virkninger jo netop forklares ved Elektronernes Paavirkning af ydre Kræfter, d. v. s. Kræfter, der stammer fra udenfor Molekylet værende Elektroner), saaledes at der til Slut vil fremkomme en mekanisk statistisk Ligevægt.

Det følger af det ovenstaaende, at det ikke er muligt ud fra Elektrontheorien at forklare Legemernes magnetiske Egenskaber, dersom man ikke tager Hensyn til saadanne Virkninger, der, som f. Eks. Energiudstrålingen (Smlg. *W. Voigt*: loc. cit., p. 146 og *J. J. Thomson*: loc. cit., p. 689; se ogsaa *R. Gans*: Nach. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., 1910, p. 213—230. — En Energiudstråling vil dog kun kunne forklare de paramagnetiske, ikke de diamagnetiske Fænomener. —), vil kunne bevirke, at der ikke blandt de indenfor Molekylerne bundne Elektroner indstiller sig en saadan mekanisk statistisk Ligevægt som den, vi har antaget for de fri Elektroners Vedkommende. De her omtalte Forhold synes at staa i den nøjeste Forbindelse med de i Slutningen af forrige Kapitel omtalte Forhold.

i bestemte Retninger, og Indvirkningen af det magnetiske Felt paa de enkelte Elektroners Bevægelser vil derfor kunne vise sig og vil give Anledning til de saakaldte galvanomagnetiske og thermomagnetiske Fænomener.

Vi skal nu søge Betingelsesligninger for Elektronernes samlede Bevægelse, dersom der foruden saadanne ydre Kræfter som dem, der blev betragtet i Kapitel I, ogsaa virker ydre magnetiske Kræfter. Vi skal her kun betragte det Tilfælde, i hvilket det antages, at der finder adskilte Sammenstød Sted. Ligesom i første Kapitel skal vi søge den samlede Bevægelsesmængde, der indehaves af de Elektroner, der befinder sig i Volumenelementet dV og hvis absolute Hastigheder ligger mellem r og $r + dr$. Komposanterne efter Koordinatakserne af denne Bevægelsesmængde skal vi betegne ved $G_x(r)drdV$, $G_y(r)drdV$ og $G_z(r)drdV$.

Vi har i Kapitel I (Side 16—26) beregnet den Tilvækst, som den omhandlede Bevægelsesmængde vil faa i Tiden dt paa Grund af de ydre elektriske Kræfter og paa Grund af Elektronernes Bevægelser, samt paa Grund af Sammenstødene mellem Metalmolekylerne og Elektronerne og mellem disse sidste indbyrdes; vi skal nu her betragte den Tilvækst, der skyldes de magnetiske Kræfter. Denne sidste Tilvækst er meget simpel at beregne; thi da de Kræfter, der stammer fra det magnetiske Felt, staar vinkelret paa de enkelte Elektroners Bevægelsesretninger, vil de ikke forandre Elektronernes absolute Hastigheder, og de vil derfor ikke bevirke, at der gaar Elektroner ud eller ind af den betragtede Gruppe (smlg. Noten Side 19); hele den søgte Tilvækst i den omhandlede Bevægelsesmængde vil derfor være lig Summen af de enkelte Elektroners Tilvækst i Bevægelsesmængde i Tiden dt .

Under det magnetiske Felts Indvirkning vil de enkelte Elektroner paavirkes af Kræfter, hvis Komposanter efter Koordinatakserne, dersom Komposanterne af den magnetiske Kraft (maalt i abs. magnetisk Maal) betegnes ved H_x , H_y og H_z , vil være (vi benytter her et Koordinatsystem, i hvilket Z -aksens positive Retning er valgt saaledes, at Omløbsretningen i XY -planen set fra positive z har modsat Retning af Viserne paa et Uhr)

$$M_x = \frac{\epsilon}{c} H_z \cdot \eta - \frac{\epsilon}{c} H_y \cdot \zeta, \quad M_y = \frac{\epsilon}{c} H_x \cdot \zeta - \frac{\epsilon}{c} H_z \cdot \xi \quad \text{og} \quad M_z = \frac{\epsilon}{c} H_y \cdot \xi - \frac{\epsilon}{c} H_x \cdot \eta,$$

og den Tilvækst, som Bevægelsesmængden $G_x(r)drdV$ faar i Tiden dt hidrørende fra de magnetiske Kræfter, bliver derfor

$$\Sigma M_x dt = \left(\frac{\epsilon}{c} H_z \Sigma \eta - \frac{\epsilon}{c} H_y \Sigma \zeta \right) dt = \left(\frac{\epsilon}{cm} H_z \cdot G_y(r) - \frac{\epsilon}{cm} H_y \cdot G_z(r) \right) dr dV dt.$$

Ved Hjælp af de ovenfor omtalte Beregninger i Kapitel I faar vi nu som Betingelsesligninger for Elektronernes samlede Bevægelse, naar man ogsaa tager Hensyn til ydre magnetiske Kræfter,

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{dG_x(r)}{dt} \right] = & -\frac{4\pi}{3} mK \left(\frac{\varepsilon}{kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{mr^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) r^4 e^{-\frac{mr^2}{kT}} - G_x(r) F(r) \\ & + \int_0^\infty G_x(\rho) Q(\rho, r) d\rho + \frac{\varepsilon}{cm} H_z G_y(r) - \frac{\varepsilon}{cm} H_y G_z(r), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

og de to tilsvarende Ligninger, der faas ved cyklisk Ombytning af x , y og z .

Ligningen (1) og de tilsvarende Ligninger tillader under givne Forhold at bestemme Størrelserne $G_x(r)$, $G_y(r)$ og $G_z(r)$, ved Hjælp af hvilke man atter kan beregne den elektriske Strøm og den Varmestrøm, der under givne Forhold til ethvert Tidspunkt vil gaa igennem et Fladeelement i det Indre af Metallet; af Udtrykkene for disse Størrelser vil man dernæst ved en Behandling, der ganske svarer til den, vi har gennemført overfor de thermoelektriske Fænomener, atter kunne beregne de forskellige galvano- og thermomagnetiske Virkninger.

Vi skal her kun behandle et enkelt af de omtalte Fænomener, nemlig de galvanomagnetiske Virkninger, der fremkommer under stationære Forhold i et homogent Metalstykke, der overalt har samme Temperatur, og som er udsat for Indvirkningen af et homogent magnetisk Felt; vi skal endvidere kun betragte det simple Tilfælde, i hvilket Metalmolekylerne antages at være faste Kraftcentre, der paavirker Elektronerne med Kræfter, der forholder sig omvendt som n^{te} Potens af Afstanden, og hvor man ser bort fra Sammenstødene mellem Elektronerne indbyrdes.

Idet vi antager, at den magnetiske Krafts Retning er parallel med Z -aksen, faar vi i det omhandlede Tilfælde til Bestemmelse af $G_x(r)$ og $G_y(r)$, idet her $Q(\rho, r) = 0$, Ligningerne

$$\text{og} \quad \left. \begin{aligned} -\frac{4\pi m \varepsilon K}{3kT} \frac{\partial \varphi}{\partial x} r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}} - G_x(r) \cdot F(r) + \frac{\varepsilon}{cm} H_z \cdot G_y(r) &= 0 \\ -\frac{4\pi m \varepsilon K}{3kT} \frac{\partial \varphi}{\partial y} r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}} - G_y(r) \cdot F(r) - \frac{\varepsilon}{cm} H_z \cdot G_x(r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Af Ligningerne (2) faar man

$$G_x(r) = -\frac{4\pi m \varepsilon K}{3kT} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} F(r) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\varepsilon}{cm} H_z}{(F(r))^2 + \left(\frac{\varepsilon}{cm} H_z \right)^2} r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}}, \quad (3)$$

og et ganske tilsvarende Udtryk for $G_y(r)$, der faas af (3) ved at ombytte x med y og y med $-x$. For den elektriske Strøm gennem en Fladeenhed henholdsvis vinkelret paa X -aksen og paa Y -aksen har vi nu

$$i_x = \frac{\varepsilon}{m} \int_0^\infty G_x(r) dr \quad \text{og} \quad i_y = \frac{\varepsilon}{m} \int_0^\infty G_y(r) dr;$$

dette giver ved Hjælp af (3) og den tilsvarende Ligning

$$i_x = -\sigma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \delta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{og} \quad i_y = -\sigma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \delta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (4)$$

hvor σ_1 og δ_1 bestemmes ved Ligningerne

$$\sigma_1 = \frac{4\pi\varepsilon^2 K}{3kT} \int_0^\infty \frac{F(r) r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}}}{(F(r))^2 + \left(\frac{\varepsilon}{cm} H_z\right)^2} dr \quad \text{og} \quad \delta_1 = \frac{4\pi\varepsilon^2 K}{3kT} \int_0^\infty \frac{\frac{\varepsilon}{cm} H_z r^4 e^{-\frac{mr^2}{2kT}}}{(F(r))^2 + \left(\frac{\varepsilon}{cm} H_z\right)^2} dr. \quad (5)$$

Ved Beregningen af disse Udtryk skal vi antage, at $\frac{\varepsilon}{cm} H_z (F(r))^{-1}$ for alle Værdier af r , der giver et væsentligt Bidrag til Integralerne, vil være en meget lille Størrelse. — Idet $\frac{\varepsilon}{cm} H_z$, som man kan vise ved Hjælp af de ovenstaaende Udtryk for M_x og M_y , vil være den Vinkel, som Projektionen af en Elektrons Hastighed paa XY -planen vil have drejet sig i Tidsenheden under Indflydelse af den magnetiske Kraft, og idet $(F(r))^{-1}$ er lig den Tid τ , i hvilken den oprindelige Bevægelsesmængde i en bestemt Retning af en Elektron med absolut Hastighed r paa Grund af Sammenstødene med Metalmolekylerne i Middel vil af tage til $\frac{1}{e}$ af sin Værdi, vil den fysiske Betydning af den nævnte Antagelse være, at den magnetiske Kraft kun vil have ringe Indflydelse paa de enkelte Elektroners Baner i Sammenligning med de Virkninger, der stammer fra Metalmolekylerne. — Idet vi nu, svarende til det her omhandlede Tilfælde, sætter $F(r) = C \cdot r^{\frac{n-5}{n-1}}$ (se Side 33), faar vi ganske tilsvarende til Udtrykkene for σ_p og δ_p Side 84 og 85, blot med Ombytning af p med $\frac{\varepsilon}{cm} H_z$,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma \left(1 - \sigma^2 \frac{H_z^2}{N^2 \varepsilon^2 c^2} \frac{9\pi}{16} \Gamma\left(\frac{n+5}{n-1}\right) \Gamma^{-3}\left(\frac{2n}{n-1}\right) \right) \\ \delta_1 &= \sigma^2 \frac{H_z}{N \varepsilon c} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left(\frac{3n+5}{2(n-1)}\right) \Gamma^{-2}\left(\frac{2n}{n-1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Man bemærker her den fuldkomne formelle Analogi, der er til Stede mellem Beregningerne af Metallerne's Absorption for Varmestraaler og Beregningerne af Metallerne's galvanomagnetiske Egenskaber. Den fysiske Betydning af denne Analogi, der vil være til Stede i alle Tilfælde, hvor man betragter adskilte Sammenstød, kan udtrykkes ved, at den Face-forskel, der indtræder mellem den elektriske Kraft og den elektriske Strøm for hurtigt svingende elektriske Felter, og som (se Side 84) udtrykkes ved $\arctg \delta_p/\sigma_p$, vil være lig den Vinkel, som den elektriske Strøm danner med den elektriske Kraft under Indvirkning af en magnetisk Kraft, der staar vinkelret paa den elektriske Kraft, og som (se Ligning (4)) udtrykkes ved $\arctg \delta_1/\sigma_1$, dersom Svingningstiden $2\pi/\rho$ for det elektriske Felt er lig den Tid $2\pi/\frac{E}{cm} H_z$, som en Elektron bruger om at gennemløbe en Om-drejning i sin skruelinieformede Bane omkring en Akse parallel med den magnetiske Kraft.

Vi skal nu beregne de galvanomagnetiske Virkninger ved Hjælp af Ligningerne (4). Tænk vi os, at det betragtede Metalstykke gennemløbes af en elektrisk Strøm i X -aksens Retning, vil der under det magnetiske Felts Indvirkning fremkomme en Potential-Forskel mellem to Punkter af Metallet, der svarer til samme x , men til forskelligt y — *Hall-Effekt*. — Den hertil svarende elektriske Kraft E_y kan findes ved at sætte Udtrykket for i_y lig 0; dette giver

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\delta_1}{\sigma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Indsættes dette i Udtrykket for i_x , faar man

$$i_x = -\sigma_1 \left(1 + \left(\frac{\delta_1}{\sigma_1} \right)^2 \right) \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{og} \quad E_y = \frac{\delta_1}{\sigma_1^2 + \delta_1^2} i_x. \quad (7)$$

Vi ser af Ligningerne (7), hvorledes det magnetiske Felt foruden den omtalte *Hall-Effekt* ogsaa bevirker en Forandring i den elektriske Ledningsevne σ , idet denne efter Lign. (7) under Indvirkning af den magnetiske Kraft bliver

$$\sigma_H = \sigma_1 \left(1 + \left(\frac{\delta_1}{\sigma_1} \right)^2 \right). \quad (8)$$

Indsætter vi nu Værdierne for σ_1 og δ_1 , givne ved Ligningerne (6), i (7) og (8), faar vi med den ovenfor benyttede Tilnærmelse

$$\left. \begin{aligned} E_y &= i_x \frac{H_z}{N\epsilon c} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left(\frac{3n+5}{2(n-1)}\right) \Gamma^{-2}\left(\frac{2n}{n-1}\right) \\ \text{og} \\ \sigma_H &= \sigma \left(1 - \sigma^2 \frac{H_z^2}{N^2 \epsilon^2 c^2} \frac{9\pi}{16} \left(\Gamma\left(\frac{n+5}{n-1}\right) \Gamma\left(\frac{2n}{n-1}\right) - \Gamma^2\left(\frac{3n+5}{2(n-1)}\right) \right) \Gamma^{-4}\left(\frac{2n}{n-1}\right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Vi skal endnu her undersøge den Energimængde W_y , der med Elektronerne føres igennem en Fladeenhed vinkelret paa Y -aksen. Idet vi har

$$W_y = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r^2 G_y(r) dr,$$

faar vi af Ligningen (3), idet vi indfører $F(r) = C \cdot r^{\frac{n-5}{n-1}}$ og bortkaster smaa Størrelser af højere Orden med Hensyn til $\frac{\varepsilon}{cm} H_z (F(r))^{-1}$, med Benyttelse af Ligningerne (5)

$$W_y = -\frac{2n}{n-1} \frac{k}{\varepsilon} T \sigma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{3n+5}{2(n-1)} \frac{k}{\varepsilon} T \delta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

idet $i_y = 0$, faar vi ved Hjælp af (4)

$$W_y = \frac{n-5}{2(n-1)} \frac{k}{\varepsilon} T \sigma_1 E_y.$$

Vi har hidtil antaget, at Temperaturen overalt i Metalstykket er den samme; dersom imidlertid Metalstykket er afskaaret fra ydre Varmetilførsel, vil der fremkomme Temperaturforskelle i det, indtil den Varmeledning, som disse vil fremkalde, holder Ligevægt med den ovenfor omtalte Energistrømning. Med den samme Tilnærmelse, som vi har benyttet ved Beregningen af W_y , vil Varmeledningsevnen γ være uafhængig af den magnetiske Kraft, og idet man endvidere med samme Tilnærmelse kan sætte σ_1 lig σ , faar vi for Temperaturvariationen efter Y -aksen i det her omhandlede Tilfælde

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{W_y}{\gamma} = \frac{n-5}{2(n-1)} \frac{k}{\varepsilon} T \frac{\sigma}{\gamma} E_y$$

og heraf ved Benyttelse af Ligningen (13) Side 53

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{n-5}{4n} \frac{\varepsilon}{k} E_y. \quad (10)$$

[Angaaende Ligningen (10) maa vi bemærke, at E_y betegner den ovenfor omhandlede elektriske Kraft efter Y -aksen, der vil fremkomme i et Metalstykke, i hvilket Temperaturen overalt er konstant. Dersom denne sidste Antagelse, saaledes som i det her betragtede Tilfælde, ikke er opfyldt, vil den elektriske Kraft efter Y -aksen blive forandret paa Grund af de Spændingsforskelle, der fremkommer som Følge af Temperatur-differenserne, og som vi har omtalt i Kapitel II ved Behandlingen af de thermoelektriske Forhold. Idet disse Spændingsforskelle med første Til-

nærmelse vil være uafhængige af den magnetiske Kraft, faar vi, ved Hjælp af Ligning (21) Side 66, for den elektriske Kraft efter Y -aksen i det her omhandlede Tilfælde

$$E'_y = E_y + \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{T}{N} \frac{dN}{dT} + \frac{n+3}{2(n-1)} \right) \frac{\partial T}{\partial y},$$

og heraf ved Hjælp af Lign. (10)

$$E'_y = E_y \left(\frac{n-5}{4n} \frac{T}{N} \frac{dN}{dT} + \frac{9n^2 - 10n - 15}{8n(n-1)} \right). \quad (11)$$

Den her beregnede Spændingsdifferens er dog ikke (smhg. Side 64) saaledes som den ovenfor betragtede Størrelse E_y direkte tilgængelig for Maalinger.]

Vi skal nu anvende de her udviklede Formler til Undersøgelse af nogle specielle Tilfælde.

1) Dersom vi i Ligningerne (9) og (10) sætter $n = \infty$, faar vi gældende for det Tilfælde, at Metalmolekylerne antages at være elastiske Kugler,

$$E_y = i_x \frac{3\pi}{8} \frac{H_z}{N\varepsilon c}, \quad \sigma_H = \sigma \left(1 - \frac{9\pi(4-\pi)}{64} \frac{\sigma_z H_z^2}{N^2 \varepsilon^2 c^2} \right) \text{ og } \frac{\partial T}{\partial y} = i_x \frac{3\pi}{32} \frac{H_z}{Nkc}. \quad (12)$$

Disse Formler (saavel som den Værdi for den »adiabatiske Hall-Effekt«, som vi faar ved i (11) at sætte $n = \infty$) er beregnede af R. Gans¹⁾, der har givet en meget fuldstændig Behandling af de galvano- og thermomagnetiske Fænomener ud fra de samme Antagelser om Virkningerne af Sammenstødene mellem Metalmolekylerne og Elektronerne som dem, der er lagt til Grund i H. A. Lorentz's Theori.

Idet vi her er gaaet ud fra, at der kun findes én bestemt Slags Elektroner (med negativ elektrisk Ladning ε), viser den første af Ligningerne (12), at, dersom den elektriske Strøm har samme Retning som X -aksens positive Retning, og dersom den magnetiske Kraft har samme Retning som Z -aksens positive Retning, vil der fremkomme en elektrisk Kraft efter Y -aksen, der vil have samme Retning som sidstnævnte Aksens negative Retning. Endvidere viser Ligningerne (12) en Formindskelse af den elektriske Ledningsevne ($\sigma_H < \sigma$) under Indflydelse af den magnetiske Kraft.

De her omtalte Resultater stemmer imidlertid ikke overens med de eksperimentelt fundne²⁾, idet man saavel finder Metaller, der som Vismut besidder en Hall-Effekt, hvis Retning stemmer overens med

¹⁾ R. Gans: Ann. d. Phys., Bd. 20, p. 293, 1906.

²⁾ Angaaende Literaturen over de eksperimentelle Undersøgelser vedrørende disse Spørgsmaal se f. Eks. H. Zahn: Jahrb. d. Rad. u. Elek., Bd. 5, p. 166, 1908.

den ovenfor beregnede, og hvis elektriske Ledningsevne aftager i et magnetisk Felt, som andre, der som Jern besidder en *Hall*-Effekt med modsat Retning af den ovenfor beregnede, og som viser en Forøgelse af den elektriske Ledningsevne i et magnetisk Felt.

Det maa her fremhæves, at den omtalte Uoverensstemmelse mellem de beregnede og de eksperimentelt fundne Resultater ikke er en Følge af de her gjorte specielle Antagelser (de *Lorentz'ske*), idet de ovenfor beregnede Resultater (*Hall*-Effektens Fortegn og den elektriske Ledningsevnes Formindskelse ($\sigma_H \leq \sigma$)) vil gælde i alle Tilfælde, der falder ind under de i Indledningen omtalte Hovedantagelser, d. v. s. i alle Tilfælde, hvor man antager, at Metalmolekylernes Egenskaber i Middel er ens i alle Retninger, ogsaa naar der virker ydre Kræfter, saaledes at Virkningen af disse sidste Kræfter kan beregnes ud fra deres direkte Indvirkning paa de fri Elektroners Bevægelser. For at forklare de galvanomagnetiske Virkninger i Overensstemmelse med Erfaringen ved Hjælp af en Theori, der bygger paa Forestillingen om ensartede Partiklers (Elektroners) Bevægelse i Metallerne Indre, tvinges man derfor, i hvert Tilfælde for visse Metaller Vedkommende, til at antage, at de ydre magnetiske Kræfter ikke blot direkte paavirker de fri Elektroners Bevægelser, men ogsaa indirekte derigennem, at de udøver en polariserende Virkning paa Metalmolekylerne. En saadan Antagelse synes saa meget mere naturlig, som der bestaar en meget nøje Sammenhæng mellem Metallerne magnetiske Egenskaber, der jo forklares ved at antage en saadan polariserende Virkning, og de her omhandlede Forhold; Størrelsen af *Hall*-Effekten er saaledes for de ferro-magnetiske Metaller Vedkommende ikke proportional med den magnetiske Kraft, men med Magnetiseringen.

Bortset fra den her omtalte Uoverensstemmelse mellem Theorien og Erfaringen, der viser sig ved, at den observerede *Hall*-Effekt ikke altid har samme Fortegn som den beregnede, frembyder der sig for en Theori, der bygger paa de specielle Antagelser, som *Lorentz* har lagt til Grund, yderligere en principiel Vanskelighed ved Forklaringen af den galvanomagnetiske transversale Temperaturdifferent. Denne Temperaturdifferent har nemlig ved alle de Metaller, for hvilke *Hall*-Effektens Fortegn stemmer med det ovenfor beregnede, og som viser en Aftagen af den elektriske Ledningsevne i et magnetisk Felt — og hvor altsaa disse Virkninger i hvert Tilfælde kvalitativt kan forklares ved en Elektrontheori af den her omhandlede Art —, et Fortegn, der er modsat det, der er givet ved Ligningerne (12)¹⁾.

¹⁾ Se *Gans*: loc. cit., p. 307—308; jvnfr. ogsaa *Gruner*: Arch. d. sciences phys. et nat. (4), Tom. 28, p. 607—608, 1909.

Denne sidste Vanskelighed falder imidlertid, som vi i det følgende skal se, bort, dersom man forlader *Lorentz's* specielle Antagelser og ikke antager, at Metalmolekylerne og Elektronerne paavirker hinanden som haarde Legemer, men derimod med Kræfter, der varierer paa passende Maade med Afstanden.

2) Dersom vi sætter $n = 5$ — hvilket vil svare til den Antagelse, at Metalmolekylerne paavirker Elektronerne som Elementarmagneter (se Side 33) —, faar vi af Ligningerne (9) og (10)

$$E_y = \frac{i_x H_z}{N e c}, \quad \sigma_H = \sigma \quad \text{og} \quad \frac{dT}{dy} = 0. \quad (13)$$

Disse Formler er dem, som man vilde finde, dersom man tænkte sig, at alle Elektronerne havde samme Hastighed efter X -aksen (idet de f. Eks. tænktes at bevæge sig i et kontinuert Medium med indre Gnidning); idet $N e$ angiver den elektriske Ladning af de fri Elektroner i Volumenenheden, vil nemlig i et saadant Tilfælde $\frac{i_x}{N e}$ være Elektronernes fælles Hastighed; idet endvidere den elektriske Kraft E_y i et saadant Tilfælde for hver enkelt Elektrons Vedkommende fuldstændig vil ophæve de afbøjende Virkninger af den magnetiske Kraft, vil Tilstedeværelsen af et magnetisk Felt slet ingen Indflydelse have paa Ledningsevnen eller give Anledning til nogen Temperaturvariation. — At en saadan Beregningsmaade vil føre til et rigtigt Resultat i det Tilfælde, hvor $n = 5$, hidrører fra, at Elektronernes samlede Bevægelsesmængde efter X -aksen i dette Tilfælde vil være ligelig fordelt mellem Elektronerne med de forskellige absolute Værdier for deres relative Hastighed i Forhold til Middelhastigheden efter X -aksen. —

Det kan her bemærkes, at i alle andre Tilfælde, hvor man betragter adskilte Sammenstød og ikke tager Hensyn til Vekselvirkningen mellem Elektronerne indbyrdes, vil, saaledes som det specielt ses ved det foregaaende og det efterfølgende Eksempel, E_y være større end den i dette specielle Tilfælde fundne Værdi $\frac{i_x H_z}{N e c}$, samt at Formindskelsen af den elektriske Ledningsevne her antager sin mindste Værdi, nemlig 0.

3) Dersom vi sætter $n = 3$ — hvilket svarer til at antage, at Metalmolekylerne er elektriske Dobbeltssystemer som dem, der er omtalt i Kapitel I Side 34 —, faar vi af Ligningerne (9) og (10)

$$\left. \begin{aligned} E_y &= i_x \frac{45\pi}{128} \frac{H_z}{N\epsilon c}, \quad \sigma_H = \sigma \left(1 - \frac{27\pi(256 - 75\pi)}{16384} \frac{\sigma^2 H^2}{N^2 \epsilon^2 c^2} \right) \\ \text{og} \quad \frac{dT}{dy} &= -i_x \frac{15\pi}{256} \frac{H_z}{Nk\epsilon c} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Vi ser, at i dette Tilfælde har Værdien for den galvanomagnetiske transversale Temperaturdifferens modsat Fortegn af den ud fra de *Lorentz'ske* Antagelser beregnede Værdi, altsaa (smlg. ovenfor) en Værdi, der i Fortegn stemmer overens med de eksperimentelt fundne. Vi ser saaledes gennem dette Eksempel, hvorledes man, for ved de her behandlede Fænomener at bringe Overensstemmelse med Erfaringen til Veje, maa antage, at Vekselvirkningen mellem Metalmolekylerne og Elektronerne ikke foregaar som mellem haarde Kugler, men at Paa-virkningen fra Metalmolekylernes Side derimod sker gennem langsommere varierende Kraftfelter; dette er i udmærket Overensstemmelse med, hvad vi i det foregaaende har set ved Omtalen af Forholdet mellem Elektricitets- og Varmeledningsevnen, hvor vi for at bringe Overensstemmelse til Veje mellem de beregnede og de eksperimentelt fundne Værdier netop ogsaa maatte antage Tilstedeværelsen af saadanne Kræfter mellem Metalmolekylerne og Elektronerne (f. Eks. fandtes for de rene Metaller Vedkommende udmærket Overensstemmelse mellem den beregnede og den eksperimentelt fundne Værdi for Forholdet mellem Ledningsevnerne ved at sætte $n = 3$ (se Side 58)).

Det maa sluttelig bemærkes, at man gennem tilsvarende Betragtninger som dem, vi benyttede i § 4 i 1^{ste} Kapitel, kan indse, at den ovenstaaende Paavisning af Nødvendigheden af at antage, at Metalmolekylerne paavirker Elektronerne gennem kontinuerte Kraftfelter, ikke alene vil gælde, naar man antager, at der finder adskilte Sammenstød Sted, men ogsaa for saadanne Tilfælde, hvor Metalmolekylernes Dimensioner ikke antages at være forsvindende i Forhold til deres indbyrdes Afstande. Man kan nemlig vise, at dersom man antager, at man kan se bort fra Vekselvirkningen mellem Elektronerne indbyrdes i Forhold til Vekselvirkningen mellem disse sidste og Metalmolekylerne og betragte Metalmolekylernes Kraftfelter som stationære overfor Elektronernes Bevægelser — Antagelser, der som omtalt Side 38 med Tilnærmelse kan ventes opfyldte ved de virkelige Metaller —, vil Forholdet $\frac{\delta T}{\delta y} : E_y$, dersom man antager, at Molekylerne er haarde elastiske Legemer, være lig det,

der angives ved Ligningerne (12), nemlig $\varepsilon/4k$ (Udtrykkene for de enkelte Størrelser vil derimod i Almindelighed ikke være de samme), medens dette Forhold, dersom man antager Tilstedeværelsen af passende Kræfter mellem Molekylerne og Elektronerne, vil kunne faa samme Fortegn som det, der angives ved Ligningerne (14) (smlg. det analoge Tilfælde ved Omtalen af Forholdet mellem Ledningsevnerne for Varme og Elektricitet (Side 58)).

THESES.

Ved Hjælp af den i denne Afhandling udledte Ligning (14) Side 26 og saadanne Udtryk for $F(r)$ og $Q(\rho, r)$ som dem, der er givne ved Ligningerne (18) Side 36, kan man med enhver ønsket Tilnærmelse numerisk beregne Forholdet mellem Varmeledningskoefficienten og Koefficienten for Interdiffusion i sig selv for en Luftart, hvis Molekyler antages at paavirke hinanden som haarde elastiske Kugler, en Beregning, som det ikke har været muligt at udføre ved Hjælp af de Metoder, der sædvanlig anvendes overfor disse Problemer.

Det synes, som om Værdien for en Vandoverflades Spænding kun i meget ringe Grad forandrer sig i den første Tid efter Overfladens Dannelse, og at derfor Værdien for den omhandlede Spænding — i Modsætning til en almindelig udbredt Mening — kan lade sig bestemme med stor Nøjagtighed ved Hjælp af statiske Metoder.

Medens der paa Overfladen af en usammentrykkelig Vædske uden indre Gnidning, der tænkes underkastet enten alene Tyngdekraften eller alene Virkningen af en Overfladespænding, svarende til enhver Værdi for Bølgelængden, vil kunne eksistere rent periodiske Bølger, der under deres fremadskridende Bevægelse bevarer deres Form uforandret, er dette, som man kan vise, derimod ikke Tilfældet, dersom Vædsken tænkes underkastet saavel Tyngdekraftens som en Overfladespændings samtidige Indvirkning, idet der da, svarende til visse Værdier (i uendeligt Antal) for Bølgelængden, ikke vil kunne eksistere saadanne under deres Fremadskriden uforandrede Bølger. Dette staar i nøje Forbindelse med den Omstændighed, at medens Bølgernes Forplantningshastighed i de to første Tilfælde vil henholdsvis stadig vokse og stadig aftage med Bølgelængden, vil der i det sidste Tilfælde eksistere en Minimumshastighed, svarende til en bestemt Værdi for Bølgelængden.

Poincaré (Thermodynamique, 2^{ième} édition, Paris 1908, p. 384) udtaler den Mening, at Lord *Kelvin's* Theori for de thermoelektriske Fænomener kan begrundes strengt ud fra de thermodynamiske Principper alene, idet Problemet kan behandles paa en saadan Maade, at man kan se bort fra Varmeledningen. Dette er imidlertid i Modstrid med Resultatet af *Boltzmann's* Undersøgelser (Sitzungsb. d. Wiener Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl., Bd. 96, Abt. II, p. 1258, 1887). Urigtigheden i *Poincaré's* Bevisførelse hidrører fra, at han i sine Beregninger (loc. cit., p. 385—386) ikke tager Hensyn til den Entropitilvækst, der finder Sted ved Varmeledningen, og som hidrører fra, at den Varmemængde, der ledes igennem et Element af en thermoelektrisk Kæde, ledes ind i dette ved højere Temperatur og ud deraf ved lavere.

Som berørt i Afhandlingen har man opstillet en Theori for at forklare forskellige af Legeringernes Forhold, efter hvilken Legeringerne, i Modsætning til de rene Metaller, ikke skulde kunne betragtes som fysisk homogene, og derfor en væsentlig Del af Legeringernes elektriske Modstandsevne skulde hidrøre fra en thermoelektrisk Polarisation. En saadan Theori synes som omtalt uholdbar. Naar imidlertid *Lederer* (Sitzungsb. d. Wiener Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl., Bd. 117, Abt. II a, p. 311, 1908) mener at have modbevist Theorien derigennem, at han eksperimentelt har paavist, at den i en Del af et elektrisk Kredsløb udviklede Varme kan beregnes i Overensstemmelse med Erfaringerne ved Hjælp af *Foule's* Lov udfra Styrken af den elektriske Strøm og Størrelsen af den elektriske Modstand, hvad enten den betragtede Del af Kredsløbet er dannet af en Legering eller et Stykke rent Metal, er dette dog ikke rigtigt; en Overensstemmelse som den omtalte maatte nemlig paa Grund af Energisætningen være til Stede, hvad enten Legeringernes Modstand skyldtes en thermoelektrisk Polarisation eller ej.

Det synes ikke muligt, paa Elektrontheoriens nuværende Standpunkt, udfra denne Theori at forklare Legemernes magnetiske Egenskaber.

DANMARKS TEKNISKE BIBLIOTEK

Im 00 7100 73.

300004097118

