DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

341 342
531.P3 535.L

Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle.

Ikke kat.

Af

L. Lorenz.

Methoder til korte Tiders, særlig Rotationstiders, Udmaaling.

En experimental Undersøgelse

TB Gl.
531.76/77 Pry

af

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

K. Prytz.

Dansk Ingeniørforenings
Bogsamling. 341

POLYTEKNISK
Teknisk Bibliotek
LÆREANSTALT.

Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle.

Af

L. Lorenz.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. VI. 1.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1890.

341

Saalænge vi betragte Lyset som Straaler, der indbyrdes interferere, brydes og tilbagekastes i Legemernes Overflader efter visse Love, er vor Opfattelse af Lysbevægelsen endnu kun elementær og stykkevis, idet vi opløse den almindelige Grundlov for hele Lysbevægelsen i Enkeltlove og adskille Fænomener, som væsentlig høre sammen. Denne elementære Betragtningsmaade har og vil dog altid have sin store Betydning, men saalænge vi ikke kunne komme ud over den, ville mange af Optikens Opgaver komme til at henstaa uløste og uopløselige.

Den almindelige Grundlov for Lysbevægelsen er ligesom Lovene for Elektricitetens og Elasticitetskræfternes Forplantning af en simpel Form, idet den kan udtrykkes ved tre samtidige partielle lineære Differentialligninger af anden Orden, hvori de tre Svingningskomposanter ere de afhængige, Rummets og Tidens Koordinater de uafhængige Variable. Alle den formelle Optiks Opgaver maa kunne lade sig henføre til Integrationen af disse Ligninger.

I en Afhandling «Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche» havde A. Clebsch[1]) søgt at bestemme Lysets Tilbagekastning fra fuldstændig reflekterende Kugleflader ved at gaa ud fra Elasticitetstheoriens Differentialligninger, men den egentlige Hovedvanskelighed lykkedes det den dygtige Mathematiker ikke at overvinde, hvad Forfatteren udtaler i Indledningen med de Ord: «Die Resultate der ganzen Untersuchung sind sehr verwickelt, und namentlich für den in der Optik wichtigen Fall einer sehr kleinen Wellenlänge scheint es sehr schwer dieselben einfach in passender Form darzustellen». Hvorimod der tilføjes: «Der entgegengesetzte Fall eines gegen die Wellenlänge sehr kleinen Radius der reflectirenden Kugel ist dagegen für eine Annäherung sehr geeignet».

De Differentialligninger, hvorfra nærværende Undersøgelser gaa ud, have været fremstillede og begrundede i flere af mine tidligere Arbejder. De adskille sig fra Elasticitetstheoriens derved, at de udelukke Muligheden af Længdesvingninger, og da de gjælde

[1]) Crelles Journal, Bd. 61, S. 195. 1863.

for ethvert Punkt i et hvilketsomhelst gjennemsigtigt heterogent Medium, ville Grænsebetingelserne ved Overgangen fra et Legeme til et andet lade sig udlede af selve Differentialligningerne.

I et tidligere Arbejde «Farvespredningens Theori»[1]) har jeg af de samme Differentialligninger udledet Formler, som tjene til Bestemmelsen af Lysbevægelsen i et af koncentriske, kugleformige Lag bestaaende Medium, og Beregningen blev her anvendt paa et System af smaa, ved «tomt» Rum adskilte Kugler med store indbyrdes Afstande, med det Maal for Øje at bestemme Lysbrydningens Afhængighed af Systemets Tæthed. Senere har jeg benyttet de samme Rækkeudviklinger til Løsningen af den Opgave, som jeg her har for Øje, nemlig Bestemmelsen af den Lysbevægelse, som fremkommer, naar en homogen, gjennemsigtig og isotrop Kugle belyses af plane, parallele Lysbølger, og det er ogsaa ad denne Vej lykkedes mig at naa til de samme Resultater, som her skulle meddeles. Men jeg har i det følgende foretrukket en anden og simplere Fremstillingsmaade, hvorved jeg tillige til Lettelse for Læsningen skal undgaa at forudsætte Kjendskab til mit tidligere Arbejde.

I. Grænsebetingelser.

Ved ξ, η, ζ betegnes Lyssvingningernes Komposanter, svarende til Tids- og Rumkoordinaterne t, x, y, z. Indføres endvidere Betegnelserne

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}, \quad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

ville Lovene for Lysbevægelsen i et hvilketsomhelst gjennemsigtigt Medium kunne udtrykkes ved de tre Differentialligninger

$$\Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2}, \tag{1}$$

idet ω i Almindelighed er en af x, y, z afhængig Variabel, som svarer til Lysets Hastighed i Punktet x, y, z, for saa vidt som man inden for et meget lille Rum kan betragte denne som konstant.

Nærværende Opgave bestaar i at integrere disse Ligninger under Forudsætning af, at ω har en konstant Værdi inden for en given Kugles Overflade og en anden konstant Værdi uden for samme, med diskontinuert Overgang i selve Kuglefladen. Denne diskontinuerte Overgang kan betragtes som fremkommen ved, at et Overfladelag med endelig

[1]) Vidensk. Selsk. Skr. 6. Række, S. 167. 1883.

Tykkelse og kontinuerlig Forandring af ω, betragtet som Funktion af Afstanden r fra Kuglens Centrum, gaar over til at blive et Lag med Tykkelsen Nul. Ved denne Overgang maa Svingningskomposanterne her som overalt forblive endelige, hvorimod deres Differentialkoefficienter med Hensyn til r kunne blive uendelige. Komposanterne og deres Differentialkoefficienter gaa derfor i Almindelighed i Grænsefladen, naar Grænselagets Tykkelse reduceres til 0, diskontinuert over fra en Værdi til en anden, medens dog enkelte Kombinationer af dem kunne beholde deres Værdi uforandret.

Idet jeg skal opsøge disse, vil jeg foretrække i Stedet for Komposanterne med Hensyn til det faste Axesystem at benytte Projektionen af Svingningsudslaget paa Radius, Projektionen vinkelret herpaa og beliggende i Planen gjennem Radius og x-Axen, og Projektionen vinkelret paa de to foregaaende og altsaa vinkelret paa x-Axen.

Sættes i polære Koordinater

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\varphi\sin\psi,$$

og betegnes de nye Komposanter ved $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, vil man have disse bestemt ved

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi} &= \cos\varphi\,\xi + \sin\varphi\cos\psi\,\eta + \sin\varphi\sin\psi\,\zeta, \\ \bar{\eta} &= -\sin\varphi\,\xi + \cos\varphi\cos\psi\,\eta + \cos\varphi\sin\psi\,\zeta, \\ \bar{\zeta} &= -\sin\psi\,\eta + \cos\psi\,\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Naar Ligningerne (1) multipliceres henholdsvis med x, y og z, og adderes, vil man erholde

$$\Delta_2 r\bar{\xi} - \frac{dr^2\theta}{r\,dr} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2 r\bar{\xi}}{dt^2},$$

hvoraf ses, naar Δ_2 udtrykkes ved polære Koordinater, at

$$\frac{d^2 r^2\bar{\xi}}{dr^2} - \frac{dr^2\theta}{dr}$$

lader sig udtrykke ved Størrelser, som forblive endelige, ogsaa naar Grænselagets Tykkelse reduceres til Nul.

Men heraf følger, at

$$\frac{dr^2\bar{\xi}}{dr} - r^2\theta$$

er en kontinuerlig Funktion, som derfor ogsaa forbliver endelig i Grænsefladen, da den er endelig til begge Sider uden for denne. Altsaa er ogsaa

$$\frac{d\bar{\xi}}{dr} - \theta$$

en overalt endelig Størrelse.

Multipliceres endvidere Ligningerne (1) henholdsvis med $-\sin\varphi$, $\cos\varphi\cos\psi$, $\cos\varphi\sin\psi$ og adderes, vil man erholde

$$\frac{d^2 r\bar{\eta}}{dr^2} - \frac{d\theta}{d\varphi}$$

udtrykt ved Størrelser, som forblive endelige overalt. Ligeledes findes ved Multiplikation af Ligningerne (1) med 0, $-\sin\psi$, $\cos\psi$ og Addition

$$\frac{d^2 r\bar{\zeta}}{dr^2} - \frac{d\theta}{\sin\varphi\, d\psi}$$

udtrykt ved overalt endelige Størrelser.

Vi have saaledes fundet tre Kombinationer, som ere endelige overalt. Elimineres heraf θ, ses det, at Størrelserne

$$\frac{d^2 r\bar{\eta}}{dr^2} - \frac{d^2\bar{\xi}}{d\varphi dr} \quad \text{og} \quad \frac{d^2 r\bar{\zeta}}{dr^2} - \frac{d^2\bar{\xi}}{\sin\varphi\, d\psi\, dr}$$

ere endelige overalt, hvoraf følger, at

$$\frac{dr\bar{\eta}}{dr} - \frac{d\bar{\xi}}{d\varphi} \quad \text{og} \quad \frac{dr\bar{\zeta}}{dr} - \frac{d\bar{\xi}}{\sin\varphi\, d\psi}$$

ere kontinuerlige Funktioner, som altsaa forblive uforandrede ved Overgangen fra den ene Side af Kuglens Begrænsningsflade til den anden. Jeg vil udtrykke dette ved

$$\left[\frac{dr\bar{\eta}}{dr} - \frac{d\bar{\xi}}{d\varphi}\right] = 0, \quad \left[\frac{dr\bar{\zeta}}{dr} - \frac{d\bar{\xi}}{\sin\varphi\, d\psi}\right] = 0. \tag{3}$$

Tillige bemærkes, at de samme Størrelser som kontinuerlige Funktioner og endelige overalt uden for Grænsefladen ogsaa maa være endelige i Grænsefladen. Men heraf følger, at $r\bar{\eta}$ og $r\bar{\zeta}$ maa være kontinuerlige, saaledes at man med samme Betegnelse som ovenfor vil have

$$[\bar{\eta}] = 0, \quad [\bar{\zeta}] = 0. \tag{4}$$

De til $r = 0$ og $r = \infty$ svarende Grænsebetingelser ere udtrykte derved, at Lysbevægelsen er endelig overalt, altsaa ogsaa for $r = 0$, og at der i uendelig Afstand fra Kuglen foruden det givne indfaldende Lys kun findes Lys, som er udgaaet fra Kuglen, men intet, som bevæger sig henimod den.

2. Udvikling efter Kuglefunktioner.

Det paa Kuglen indfaldende Lys er antaget at bestaa af plane, parallele Lysbølger. I Almindelighed kunne disse indeholde en Samling af Svingninger, forskjellige i Henseende til Amplitude, Retning inden for Bølgeplanen, Svingningstid og Fase, men dette almindelige Tilfælde lader sig med Lethed aflede af det enkelte, hvori Svingningskomposanterne, som vi ville betegne ved ξ_0, η_0, ζ_0, uden for Kuglen ere bestemte ved

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = e^{(kt-lx)i}, \quad \zeta_0 = 0. \tag{5}$$

Her er den exponentielle Form valgt som den simpleste, Svingningerne med Amplituden 1 gaa i Retning af y-Axen og forplante sig i Retning af x-Axen med den konstante Hastighed $\frac{k}{l} = \Omega$, med Bølgelængden $\frac{2\pi}{l} = \lambda$ og Svingningstiden $\frac{2\pi}{k} = T$.

Idet vi saaledes uden for Kuglen udskille det indfaldende Lys fra det øvrige, ved Hastighedsforandringen i Kuglens Overflade fremkaldte, Lys, sættes her

$$\xi = \xi_0 + \xi_e, \quad \eta = \eta_0 + \eta_e, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta_e, \tag{6}$$

medens der inden for Kuglens Overflade sættes

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta', \tag{7}$$

hvor ogsaa l', Ω' λ' træde i Stedet for de tilsvarende umarkerede Størrelser uden for Kuglen. Betegnes endvidere Forholdet imellem de to Hastigheder Ω og Ω' ved N (Kuglens Brydningsforhold), vil man have

$$\Omega = N\Omega', \quad l' = Nl, \quad \lambda = N\lambda'. \tag{8}$$

Komposanterne ξ, η, ζ ere saavel uden for som inden for Kuglefladen indbyrdes forbundne ved Ligningen $\theta = 0$, som for ω konstant fremgaar af Ligningerne (1), og de kunne derfor fremstilles som afhængige alene af to Størrelser Q og S uden for Kuglen, eller Q' og S' inden for Kuglen. Man vil nemlig kunne sætte

$$\left.\begin{aligned} \xi_e &= \frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}, \quad \eta_e = \frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}, \quad \zeta_e = \frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}, \\ A &= z\frac{dQ}{dy} - y\frac{dQ}{dz} + xS, \quad B = x\frac{dQ}{dz} - z\frac{dQ}{dx} + yS, \quad C = y\frac{dQ}{dx} - x\frac{dQ}{dy} + zS, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ligesom ogsaa ξ', η', ζ' kunne udtrykkes paa tilsvarende Maade. Ligningerne (1) ville da være tilfredsstillede under Forudsætning af, at man har

$$\Delta_2 Q + l^2 Q = 0, \quad \Delta_2 S + l^2 S = 0, \tag{10}$$

$$\Delta_2 Q' + l'^2 Q' = 0, \quad \Delta_2 S' + l'^2 S' = 0. \tag{11}$$

Det kan her bemærkes, at de to radielle Projektioner

$$x\xi_e + y\eta_e + z\zeta_e$$

og

$$x\left(\frac{d\zeta_e}{dy} - \frac{d\eta_e}{dz}\right) + y\left(\frac{d\xi_e}{dz} - \frac{d\zeta_e}{dx}\right) + z\left(\frac{d\eta_e}{dx} - \frac{d\xi_e}{dy}\right)$$

ved Hjælp af Ligningerne (9) kunne omdannes til

$$-r^2\Delta_2 Q + r\frac{d^2 rQ}{dr^2} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\frac{dQ}{d\varphi} - \frac{d^2 Q}{\sin^2\varphi\, d\psi^2}$$

og

$$-r^2\Delta_2 S + r\frac{d^2 rS}{dr^2} = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\frac{dS}{d\varphi} - \frac{d^2 S}{\sin^2\varphi\, d\psi^2}.$$

Heraf ses, at naar Q og S ere udviklede i Række efter Kuglefunktioner Q_n og S_n, nemlig

$$Q = \Sigma Q_n, \quad S = \Sigma S_n,$$

saa ville de ovenstaaende radielle Projektioner være henholdsvis bestemte ved

$$\Sigma n(n+1)\,Q_n \quad \text{og} \quad \Sigma n(n+1)\,S_n .$$

Det tilsvarende gjælder for Rummet inden for Kuglen.

De i det foregaaende Afsnit indførte Komposanter $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ kunne vi i Analogi med (6) for Punkter uden for Kuglen udtrykke ved

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_e , \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_e , \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0 + \bar{\zeta}_e , \tag{12}$$

idet disse nye Komposanter ere bestemte ved

$$\bar{\xi}_0 = \sin\varphi\cos\psi e^{(kt-lx)i}, \quad \bar{\eta}_0 = \cos\varphi\cos\psi e^{(kt-lx)i}, \quad \bar{\zeta}_0 = -\sin\psi e^{(kt-lx)i}, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi}_e &= \cos\varphi\,\xi_e + \sin\varphi\cos\psi\,\eta_e + \sin\varphi\sin\psi\,\zeta_e , \\ \bar{\eta}_e &= -\sin\varphi\,\xi_e + \cos\varphi\cos\psi\,\eta_e + \cos\varphi\sin\psi\,\zeta_v , \\ \bar{\zeta}_e &= \qquad\qquad -\sin\psi\,\eta_e + \cos\psi\,\zeta_e . \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Indføres nu for Kortheds Skyld i det følgende Betegnelserne

$$lr = a, \quad l'r = a', \quad lQ = K, \quad l'Q' = K' \tag{15}$$

og, idet R er den givne Kugles Radius,

$$lR = \alpha, \quad l'R = \alpha', \tag{16}$$

saa vil man ved Ligningerne (9) og ved Benyttelse af Ligningerne (10) erholde

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi}_e &= \frac{d^2 aK}{da^2} + aK , \\ \bar{\eta}_e &= \frac{d^2 aK}{a\,d\varphi\,da} + \frac{dS}{\sin\varphi\,d\psi} , \\ \bar{\zeta}_e &= \frac{d^2 aK}{a\sin\varphi\,d\psi\,da} - \frac{dS}{d\varphi} . \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ligesom man tilsvarende for et indre Punkt har

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi}' &= \frac{d^2 a'K'}{da'^2} + a'K' , \\ \bar{\eta}' &= \frac{d^2 a'K'}{a'd\varphi\,da'} + \frac{dS'}{\sin\varphi\,d\psi} , \\ \bar{\zeta}' &= \frac{d^2 a'K'}{a'\sin\varphi\,d\psi\,da'} - \frac{dS'}{d\varphi} . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Det vil nu være Opgaven at udvikle disse Komposanter i Rækker efter Kuglefunktioner. Naar overhovedet en Funktion $f(x)$ kan udvikles efter Kuglefunktioner, saa er som bekjendt Udviklingen følgende:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{1} f(u)\,P_n(u)\,du ,$$

idet Summen tages for alle hele Værdier af n fra $n = 0$ til $n = \infty$, og

$$P_n(x) = \frac{1\,.\,3\,\ldots\,2n-1}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right) .$$

Søge vi nu først at udvikle de i Ligningerne (13), hvori sættes $lx = a\cos\varphi$, givne Udtryk for $\overline{\xi}_0$, $\overline{\eta}_0$, $\overline{\zeta}_0$, ville vi i Henhold til ovenstaaende have

$$e^{-a\cos\varphi\, i} = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\varphi) \int_{-1}^{1} e^{-aui} P_n(u)\, du\ .$$

Det heri indgaaende bestemte Integral lader sig udtrykke ved den Besselske Funktion $J_{n+\frac{1}{2}}(a)$, eller, hvad jeg her vil foretrække, ved en anden ved $v_n(a)$ betegnet Funktion, som kun ved en Faktor er forskjellig fra den Besselske, idet der sættes

$$v_n(a) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(a)\ .$$

Man vil da, som bekjendt fra de Besselske Funktioners Theori, kunne definere $v_n(a)$ ved

$$v_n(a) = \frac{a^{n+1}}{2^{n+1}[n]} \int_{-1}^{1} e^{-aui} (1-u^2)^n\, du\ .$$

Dette Integral gaar ved n Gange delvis Integration over til

$$v_n(a) = \frac{a}{2^{n+1}[n]\, i^n} \int_{-1}^{1} e^{-aui} \frac{d^n (1-u^2)^n}{du^n}\, du\,,$$

som med Benyttelse af et andet bekjendt Udtryk for P_n, nemlig

$$P_n(u) = \frac{(-1)^n}{2^n[n]} \frac{d^n(1-u^2)^n}{du^n}\ ,$$

ogsaa kan gives Formen

$$v_n(a) = \frac{a}{2}\, i^n \int_{-1}^{1} e^{-aui} P_n(u)\, du\ . \tag{19}$$

Paa denne Maade erholdes

$$e^{-a\cos\varphi\, i} = \frac{1}{a} \sum_0^\infty (2n+1)\, P_n(\cos\varphi)\, e^{-\frac{n\pi}{2} i}\, v_n(a)\ . \tag{20}$$

Det vil bemærkes, at Funktionen $v_n(a)$ tilfredsstiller Differentialligningen

$$\frac{d^2 v_n(a)}{da^2} = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1\right) v_n(a)\,, \tag{21}$$

og at den, udviklet efter Potenser af a, giver Rækken

$$v_n(a) = \frac{a^{n+1}}{1\,.\,3\ldots 2n+1} \left(1 - \frac{a^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4}{2\,.\,4(2n+3)(2n+5)} - \ldots\right). \tag{22}$$

En anden fra de Besselske Funktioners Theori bekjendt Rækkeudvikling, hvor Leddenes Antal er endeligt, er

$$\left.\begin{aligned} v_n(a) &= g_n(a)\sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right) + h_n(a)\cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right), \\ g_n(a) &= 1 - \frac{(n-1)\,n(n+1)(n+2)}{2\,.\,4\,a^2} + \frac{(n-3)(n-2)\ldots(n+4)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,a^4} - \ldots, \\ h_n(a) &= \frac{n(n+1)}{2a} - \frac{(n-2)(n-1)\ldots(n+3)}{2\,.\,4\,.\,6\,a^3} + \ldots\ . \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Betegnes endvidere ved $w_n(a)$ et andet partikulært Integral af Ligning (21), og defineres dette Integral nærmere ved Rækkeudviklingen

$$w_n(a) = \frac{1 \cdot 3 \ldots 2n-1}{a^n}\left(1 + \frac{a^2}{2(2n-1)} + \frac{a^4}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} + \ldots\right), \tag{24}$$

vil denne Funktion ligeledes kun ved en Faktor være forskjellig fra en Besselsk Funktion, nemlig $J_{-n-\frac{1}{2}}(a)$, og med de ovenfor givne Rækker for g_n og h_n vil den ogsaa kunne udtrykkes ved

$$w_n(a) = g_n(a)\cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right) - h_n(a)\sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right). \tag{25}$$

Af Udviklingen (20) kan nu de i Ligningerne (13) givne Udtryk bestemmes paa følgende Maade. Man udtager af Rækken (20) det første til $n = 0$ svarende Led og sætter

$$P_n(\cos\varphi) = -\frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi},$$

hvorved erholdes

$$e^{-a\cos\varphi i} = \frac{\sin a}{a} - \frac{1}{a}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi}e^{-\frac{n\pi}{2}i}v_n(a).$$

Indføres heri til Afkortning Betegnelserne

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(\cos\varphi)\,e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}v_n(a), \\ S_0 &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(\cos\varphi)\,e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}v_n(a), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

vil man ved Multiplikation af Ligningen med $\cos\psi\, e^{kti}\sin\varphi\, d\varphi$ eller med $-\sin\psi\, e^{kti}\sin\varphi\, d\varphi$ og ved Integration af de to saaledes erholdte Ligninger fra $\varphi = 0$ til $\varphi = \varphi$ erholde

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= \frac{\cos\psi}{a\sin\varphi}(i\sin a\cos\varphi - \cos a + e^{-a\cos\varphi i})\,e^{kti}, \\ S_0 &= -\frac{\sin\psi}{a\sin\varphi}(-\sin a\cos\varphi - i\cos a + ie^{-a\cos\varphi i})\,e^{kti}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Heraf findes sluttelig

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2aK_0}{da^2} + aK_0 &= \sin\varphi\cos\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i} = \overline{\xi}_0, \\ \frac{d^2aK_0}{a\,d\varphi\,da} + \frac{dS_0}{\sin\varphi\,d\psi} &= \cos\varphi\cos\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i} = \overline{\eta}_0, \\ \frac{d^2aK_0}{a\sin\varphi\,d\psi\,da} - \frac{dS_0}{d\varphi} &= -\sin\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i} = \overline{\zeta}_0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Disse Udtryk for Komposanterne $\overline{\xi}_0$, $\overline{\eta}_0$, $\overline{\zeta}_0$ svare til de i (17) fremstillede Udtryk for Komposanterne $\overline{\xi}_e$, $\overline{\eta}_e$, $\overline{\zeta}_e$, idet K_0 og S_0 træde i Stedet for K og S i Ligningerne (17). For K_0 og S_0 have vi i (26) Udviklingerne efter Kuglefunktioner, og disse maa, hvad man

ogsaa let kan overbevise sig om, tilfredsstille de samme Differentialligninger, som K og S, nemlig ifølge (10) $\Delta_2 K_0 + l^2 K_0 = 0$, $\Delta_2 S_0 + l^2 S_0 = 0$. Udviklingerne af K og S efter Kuglefunktioner maa følgelig blive analog med Udviklingerne (26), idet der her i Stedet for det partikulære Integral $v_n(a)$ af Ligningen (21) indsættes det almindelige Integral, udtrykt lineært ved $v_n(a)$ og $w_n(a)$. Man erholder saaledes med de endnu ubestemte Konstanter k_n, $\varkappa_n$, s_n, σ_n,

$$\left.\begin{aligned} K &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(k_n v_n(a) + \varkappa_n w_n(a)\right), \\ S &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(s_n v_n(a) + \sigma_n w_n(a)\right), \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

og tilsvarende for et indre Punkt

$$\left.\begin{aligned} K' &= -i\frac{\cos\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(k_n' v_n(a') + \varkappa_n' w_n(a')\right), \\ S' &= -\frac{\sin\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left(s_n' v_n(a') + \sigma_n' w_n(a')\right). \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Heri er $P_n(\cos\varphi)$ afkortet til P_n.

Benytte vi nu først den til $a' = 0$ svarende Grænsebetingelse, ses det af (24), at $w_n(a')$ bliver ∞ for $a' = 0$ og $n > 0$, og at altsaa Endelighedsbetingelsen udkræver

$$\varkappa_n' = 0, \quad \sigma_n' = 0.$$

Til $a = \infty$ svarer ifølge (23) og (25) $v_n(a) = \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right)$, $w_n(a) = \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right)$. I uendelig Afstand fra Kuglen vil man altsaa have

$$2\left(k_n v_n(a) + \varkappa_n w_n(a)\right) e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} = \left(-k_n i + \varkappa_n\right) e^{(kt+a-n\pi)i} + \left(k_n i + \varkappa_n\right) e^{(kt-a)i}.$$

Det ses heraf, at Lysbevægelsen i Almindelighed i denne Afstand vil fremtræde som periodiske Funktioner af $kt + a$ og $kt - a$, svarende til to modsatte Bølgebevægelser, den ene bevægende sig henimod Kuglecentret, den anden i Retning fra Centret. Da nu kun denne sidste, ifølge de antagne Betingelser, er virkelig tilstede, maa man have

$$-k_n i + \varkappa_n = 0, \quad \text{ligesom ogsaa tilsvarende} \quad -s_n i + \sigma_n = 0.$$

Saaledes reduceres Rækkerne (29) og (30) til

$$\left.\begin{aligned} K &= -i\frac{\cos\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} k_n\left(v_n(a) + w_n(a)\,i\right), \\ S &= -\frac{\sin\psi}{a}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} s_n\left(v_n(a) + w_n(a)\,i\right), \\ K' &= -i\frac{\cos\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} k_n' v_n(a'), \\ S' &= -\frac{\sin\psi}{a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i} s_n v_n(a'). \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Endelig have vi ogsaa de i (3) og (4) fremstillede Grænsebetingelser, som kunne udtrykkes ved

$$\left.\begin{aligned} \bar{\eta} &= \bar{\eta}', \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}' \\ \frac{da\,\bar{\eta}}{da} - \frac{d\bar{\xi}}{d\varphi} &= \frac{da'\bar{\eta}'}{da'} - \frac{d\bar{\xi}'}{d\varphi} \\ \frac{da\,\bar{\zeta}}{da} - \frac{d\bar{\xi}}{\sin\varphi\, d\psi} &= \frac{da'\bar{\zeta}'}{da'} - \frac{d\bar{\xi}'}{\sin\varphi\, d\psi} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= \alpha \\ a' &= \alpha'. \end{aligned}$$

Indsættes heri de ved Ligningerne (12), (17) og (28) givne Udtryk for $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, og for $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\zeta}'$ Udtrykkene (18), kunne disse Betingelser omdannes til

$$\left.\begin{aligned} a(K_0 + K) &= a'K', \quad S_0 + S = S' \\ \frac{da(K_0+K)}{ada} &= \frac{da'K'}{a'da'}, \quad \frac{da(S_0+S)}{da} = \frac{da'S}{da'} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a &= \alpha \\ a' &= \alpha'. \end{aligned} \tag{32}$$

Heri udvikles K_0, S_0, K, S, K', S' ved de i (26) og (31) givne Rækker, hvorved erholdes 4 Ligninger imellem Koefficienterne. Betegnes for Kortheds Skyld de afledede Funktioner $\frac{dv_n(\alpha)}{da}$, $\frac{dw_n(\alpha)}{da}$, $\frac{dv_n(\alpha')}{da'}$ ved $v_n'(\alpha)$, $w_n'(\alpha)$, $v_n'(\alpha')$, blive disse Ligninger

$$\begin{aligned} N\big(v_n'(\alpha) + k_n(v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\big) &= k_n' v_n'(\alpha', \\ N\big(v_n(\alpha) + s_n(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\big) &= s_n' v_n(\alpha') \\ v_n(\alpha) + k_n(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i) &= k_n' v_n(\alpha') \\ v_n'(\alpha) + s_n(v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i) &= s_n' v_n'(\alpha'). \end{aligned}$$

Heraf kunne de fire Koefficienter bestemmes. Ved Indførelsen af en lille Reduktion ved Hjælp af Ligningen

$$w_n(\alpha)\, v_n'(\alpha) - w_n'(\alpha)\, v_n(\alpha) = 1,$$

vil man saaledes erholde

$$\left.\begin{aligned} 2k_n &= -1 - \frac{(v_n(\alpha) - w_n(\alpha)i)\, v_n'(\alpha') - N(v_n'(\alpha) - w_n'(\alpha)i)\, v_n(\alpha')}{(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\, v_n'(\alpha') - N(v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\, v_n(\alpha')}, \\ 2s_n &= -1 - \frac{N(v_n(\alpha) - w_n(\alpha)i)\, v_n'(\alpha') - (v_n'(\alpha) - w_n'(\alpha)i)\, v_n(\alpha')}{N(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\, v_n'(\alpha') - (v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\, v_n(\alpha')}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} k_n' &= \frac{Ni}{(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\, v_n'(\alpha') - N(v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\, v_n(\alpha')}, \\ s_n' &= \frac{Ni}{N(v_n(\alpha) + w_n(\alpha)i)\, v_n'(\alpha') - (v_n'(\alpha) + w_n'(\alpha)i)\, v_n(\alpha')}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Den stillede Opgave er hermed for saa vidt løst, som Svingningskomposanterne overalt i Rummet ere bestemte ved uendelige Rækker med bekjendte Koefficienter. Det vil vise sig, at Rækkerne i den givne Form egne sig godt for Beregningen, naar enten α, som svarer til Kuglens Omkreds maalt med Bølgelængden λ, er et lille Tal, eller det betragtede Punkt ligger nær ved Centret, hvorimod det, naar α er et meget stort Tal, hvilket

næsten kan siges at være Tilfældet med alle for det blotte Øje synlige Kugler, i Almindelighed vil være nødvendigt, at omdanne Rækkerne saaledes, at Summationerne kunne udføres med tilstrækkelig Tilnærmelse. Jeg skal nu først fremstille de Summationsformler, som herved ville komme til Anvendelse.

3. Summationsformler.

Der vil i det følgende Afsnit fremkomme Summer, som kunne henføres til Formen

$$\sum_{n_1}^{n_2} A_n e^{F_n i}, \tag{35}$$

hvor n gjennemløber Talrækken fra $n = n_1$ til $n = n_2$.

De to Funktioner A_n og F_n ere saaledes beskafne, at naar deri sættes $n = \nu + z$, hvor begge de nye Variable ligeledes betragtes som hele Tal, vil man erholde følgende, inden for de givne Grænser konvergente, Rækker

$$A_n = A + B\frac{z}{a} + C\frac{z^2}{a^2} + \ldots, \quad F_n = Fa + Gz + H\frac{z^2}{a} + I\frac{z^3}{a^2} + \ldots. \tag{36}$$

Leddene ere her ordnede efter stigende Potenser af z og aftagende Potenser af Størrelsen a. Denne sidste betragtes som et meget stort, dog ikke uendelig stort, Tal, og alle Størrelser ville i det følgende blive ordnede efter Potenser af a, saaledes at den Størrelse, som indeholder en højere Potens af a, betragtes som en Størrelse af højere Orden. Her ere Koefficienterne A, B, ... F, G, ... i det højeste Størrelser af samme Orden som Enheden (a^0). Beregningen skal nu gaa ud paa at fremstille Resultaterne med en saadan Nøjagtighed, at kun Størrelser, som ere af lavere Orden end Enheden, betragtes som saa smaa, at de kunne bortkastes.

Antallet af Led i Rækken (35) er selv et meget stort Tal, af samme Orden som a. Grænserne n_1 og n_2 ere ubestemte og til en vis Grad vilkaarlige, nemlig kun betingede paa den ene Side af Konvergensbetingelserne for Rækkerne (36), paa den anden Side af den Fordring, at $n_2 - n_1$ skal være et meget stort Tal. Denne her indførte Art af ubestemte, vilkaarlige Størrelser, for hvilke jeg i det følgende vil benytte Fællesmærket ω, ere definerede derved, at en Funktion af denne Størrelse betyder den Grænse, hvortil Middelværdien af den samme Funktion af en bestemt Størrelse x konvergerer, naar man lader x gjennemløbe en efterhaanden større og større Række af Værdier inden for de for ω afstukne Grænser.

Gaa vi saaledes ud fra de bekjendte Integraler

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu), \quad \ldots \tag{37}$$

$$\int_0^\infty e^{xi} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu) e^{\frac{\mu\pi}{2} i}, \quad \ldots \tag{38}$$

det første gjældende for alle positive Værdier af μ, det andet kun for de positive Værdier, som ere mindre end 1, saa ses det, at man ogsaa for $\mu < 1$ maa have

$$\int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu) e^{\frac{\mu\pi}{2} i}, \tag{39}$$

idet

$$\int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-1} dx = \int_0^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx - \int_{\omega}^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx,$$

hvor det sidste Integral ved delvis Integration kan udvikles i en semikonvergent Række, hvis til forskjellige Værdi af ω svarende Middelværdi konvergerer til 0, naar Middelværdien tages paa den ovenfor angivne Maade imellem videre og videre Grænser. Er i Integralet (39) endvidere $\mu > 1$, kan denne Exponent ved delvis Integration reduceres til at blive mindre end 1, og Middelværdien af de fremkomne periodiske Led uden for Integralet vil ligeledes konvergere til 0. Altsaa er Ligning (39) med den vedtagne Betydning af den øvre Grænse ω gjældende for alle positive Værdier af μ.

Som et andet Exempel, der vil faa Anvendelse i det følgende, kunne vi tage Summen (35) reduceret til den simpleste Form

$$\sum_{n_1}^{n_2} e^{ani} = \frac{e^{an_1 i} - e^{a(n_2+1)i}}{1 - e^{ai}}.$$

Ogsaa her maa højre Side forsvinde, forudsat, at a ikke er 0 eller et Multiplum af 2π, da i saa Tilfælde Summen bliver $n_2 - n_1 + 1$, som vel er ubestemt, men i ethvert Tilfælde ikke kan blive lig Nul. Er endvidere a meget lille eller meget nær ved et Multiplum af 2π, tør man heller ikke betragte Summen som Nul, da Leddenes Antal vel er antaget meget stort, men ikke uendelig stort.

Er Summen Nul, vil den ogsaa vedblive at være det, naar den differentieres et vilkaarligt Antal Gange med Hensyn til a. Man vil altsaa mere almindeligt have

$$\sum_{n_1}^{n_2} n^m e^{ani} = 0, \tag{40}$$

naar m er et helt Tal eller 0, og a ikke er lig med eller ligger meget nær ved 0 eller et Multiplum af 2π.

Betragte vi nu den ved Udviklingerne (35) og (36) givne Sum, ses det, at den kan forandres til en konvergent Række med Led, som med Udeladelse af konstante Faktorer have Formen

$$\sum_{n_1-\nu}^{n_2-\nu} z^m e^{Gzi}.$$

Hvis man altsaa ikke kan have

$$G = 2p\pi, \tag{41}$$

for $p = 0$ eller et helt Tal, og heller ikke $G - 2p\pi$ meget nær lig 0, saa vil hele Summen (35) forsvinde.

Hvis man derimod er i Stand til at finde en Værdi af ν, som gjør det muligt at tilfredsstille ovenstaaende Betingelse (41), saa kan Gz udelades af Exponenten, og Summationen kan nu uden kjendelig Fejl forandres til Integration. Summen (35) vil altsaa kunne gives Formen

$$\int_{-(\nu-n_1)}^{n_2-\nu} dz\left(A+B\frac{z}{a}+\ldots\right)e^{\left(Fa+H\frac{z^2}{a}+I\frac{z^3}{a^2}+\ldots\right)i}, \qquad (42)$$

hvor vi ville indskrænke os til at antage ν beliggende imellem n_1 og n_2 og saaledes, at baade $\nu-n_1$ og $n_2-\nu$ komme til at høre til den ovenfor definerede Art af ubestemte Størrelser. Forandres i dette Integral for $z<0$ Fortegnet for z, og sættes derefter $Hz^2=ax$, ville Grænserne for x, forudsat at H ikke er 0 eller meget lille, høre til den ovenfor ved Fællesmærket ω betegnede Art af Størrelser, og Integralet vil ved Rækkeudvikling gaa over til

$$\int_0^\omega \frac{dx}{2}\left(A\sqrt{\frac{a}{Hx}}+\frac{B}{H}\cdots+\frac{AIxi}{H^2}+\ldots\right)e^{(Fa+x)i}+\int_0^\omega \frac{dx}{2}\left(A\sqrt{\frac{a}{Hx}}-\frac{B}{H}\cdots-\frac{AIxi}{H^2}+\ldots\right)e^{(Fa+x)i}.$$

Disse Integraler ville ifølge (39), idet $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, tilsammen blive

$$A\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\,e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i}, \qquad (43)$$

idet de Led, som ere af Ordenen $a^{-\frac{1}{2}}$ og af lavere Orden ere bortkastede. Dette Resultat er ogsaa gjældende for negative Værdier af H, naar det paases, at man i dette Tilfælde maa sætte

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}=-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Resultatet bliver ugyldigt for

$$H=0. \qquad (44)$$

I dette Tilfælde kunne vi, for yderligere at generalisere det, antage, at $G-2p\pi$ er en meget lille Størrelse. Ogsaa i dette Tilfælde vil Summationen kunne forandres til Integration og i Stedet for (42) vil man erholde Integralet

$$\int_{-(\nu-n_1)}^{n_2-\nu} dz\left(A+B\frac{z}{a}+C\frac{z^2}{a^2}+\ldots\right)e^{\left(Fa+(G-2p\pi)z+I\frac{z^3}{a^2}+K\frac{z^4}{a^3}+L\frac{z^5}{a^4}\cdots\right)i}. \qquad (45)$$

Heri forandres ligeledes for $z<0$ Fortegnet for z, og derefter sættes $\pm Iz^3=a^2x$, hvor det dobbelte Fortegn bestemmes saaledes, at $\pm I$ bliver positiv. Indføres for Kortheds Skyld Betegnelserne

$$G-2p\pi=-\varepsilon\sqrt[3]{\frac{I}{a^2}}, \qquad (46) \qquad \int_0^\omega x^{-\frac{2}{3}}\cos\left(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}}+x\right)dx=Q, \qquad (47)$$

samt

$$A = A_1 I, \quad B = B_1 I, \quad C = C_1 I, \quad K = K_1 I, \quad L = L_1 I, \tag{48}$$

vil man uden Vanskelighed kunne give Integralet (45) Formen

$$\pm \tfrac{2}{3} e^{Fai} \Big[(\alpha I)^{\frac{2}{3}} A_1 Q + (\alpha I)^{\frac{1}{3}} i \Big(B_1 \frac{dQ}{d\varepsilon} + A_1 K_1 \frac{d^4 Q}{d\varepsilon^4} \Big) - C_1 \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2}$$
$$- (A_1 L_1 + B_1 K_1) \frac{d^5 Q}{d\varepsilon^5} - \tfrac{1}{2} A_1 K_1^2 \frac{d^8 Q}{d\varepsilon^8} \Big] , \tag{49}$$

idet Leddene af Ordenen $\alpha^{-\frac{1}{3}}$ og derunder bortkastes.

I Tilfælde af, at man har $\varepsilon = 0$, erholdes ved Hjælp af (39)

$$\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) \cos\frac{\pi}{6} = Q = -3 \frac{d^3 Q}{d\varepsilon^3}, \quad \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) \cos\frac{\pi}{6} = \frac{dQ}{d\varepsilon} = -\frac{3}{2} \frac{d^4 Q}{d\varepsilon^4},$$
$$0 = \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} = \frac{d^5 Q}{d\varepsilon^5} = \frac{d^8 Q}{d\varepsilon^8},$$

hvor

$$\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) = 2{,}67894 \ldots , \quad \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) = 1{,}35412 \ldots ,$$

eller ved sædvanlige Logarithmer

$$\operatorname{Log} \Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) = 0{,}4279627 \ldots , \quad \operatorname{Log} \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) = 0{,}1316565 \ldots .$$

Herved gaar (49) over til

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} e^{Fai} \Big[(\alpha I)^{\frac{2}{3}} A_1 \Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) + (\alpha I)^{\frac{1}{3}} i \Big(B_1 - \frac{2}{3} A_1 K_1 \Big) \Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) \Big] . \tag{50}$$

Integralet Q (47) har under en noget anden Form været numerisk beregnet af Airy[1]), som for Integralet

$$\int_0^\infty d\omega \cos\frac{\pi}{2} (\omega^3 - m\omega) = W$$

har angivet følgende Tavle

m	W	m	W
-5	0,00041	0	0,66527
-4	0,00298	1	1,00041
-3	0,01730	2	0,56490
-2	0,07908	3	$-0{,}56322$
-1	0,27283	4	$-0{,}47446$
		5	0,68182.

[1]) On the intensity of Ligth in the neighbourhood of a Caustic. Trans. of the Cambr. Soc. t. VI, p. 379, t. VIII, p. 595

Ved Hjælp heraf kan ogsaa Q beregnes, idet man har

$$\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} m, \quad \sout{Q = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} W.} \qquad Q = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot W.$$

Gaa vi fra $m = 0$ til den negative Side, saa er W stadig aftagende indtil 0, gaa vi til den positive Side er W først voxende, naaer et Maximum ved $m = 1{,}08$, og nærmer sig derefter gjennem en periodisk Bevægelse omkring Nulpunktet ligeledes til 0. Det første og største Maximum af W er 1,504 Gange større end Værdien af W for $m = 0$.

Stokes[1]) har udvidet den Airy'ske Beregning til de 50 første Rødder i Ligningen $W = 0$ og de 10 første Rødder i $\frac{dW}{dm} = 0$. Saaledes svarer til $W = 0$

$$m = 2{,}4955;\ 4{,}3631;\ 5{,}8922;\ 7{,}2436;\ 8{,}4788;\ \ldots$$

i hvilken Række den q-de Rod med voxende q konvergerer til $3\left(q - \frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$. Ligeledes er for $\frac{dW}{dm} = 0$

$$m = 1{,}0845;\ 3{,}4669;\ 5{,}1446;\ 6{,}5782;\ 7{,}8685;\ \ldots$$

hvor den q-de Rod konvergerer til $3\left(q - \frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$.

De forskjellige Differentialkoefficienter af Q med Hensyn til ε, som indgaa i Udtrykket (49), ville alle let kunne udtrykkes ved Q og $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, idet det bemærkes, at man har

$$\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2} = -\frac{\varepsilon}{3} Q,$$

hvoraf atter de højere Differentialkoefficienter kunne afledes, for Exempel

$$\frac{d^4Q}{d\varepsilon^4} = \frac{\varepsilon^2}{9} Q - \frac{2}{3}\frac{dQ}{d\varepsilon}, \text{ o. s. v.}$$

Maximal- og Minimalpunkterne for $\frac{dQ}{d\varepsilon}$ svare altsaa til $Q = 0$, hvoraf ses, at det første Maximum her først indtræder for $m = 2{,}4955\ldots$. Modulus (eller Amplituden) for det i (49) givne Udtryk forandrer sig med voxende ε paa tilsvarende Maade som Integralet W, hvis man alene behøver at tage det første Led, som er af højeste Orden, i Betragtning, men hvis ogsaa de følgende Led i Udtrykket faa Betydning, vil Modulus komme til at indeholde saavel Q som $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, hvoraf følger, at Maximalpunkterne ville blive forskudte, og at i Almindelighed Modulus ikke ved de periodiske Forandringer vil kunne blive 0. Periodiciteten vil saaledes blive mere udvisket.

Ved Sammenligning mellem de to i (43) og (49) givne Udtryk for Integralet (42) ses det, at det første er af Størrelsesordenen $\alpha^{\frac{1}{2}}$, det andet af Ordenen $\alpha^{\frac{2}{3}}$. Hvorledes Overgangen sker fra det ene Udtryk til det andet, kan ses, naar man tænker sig H aftagende til en meget lille Størrelse samtidig med, at man beholder $G - 2p\pi = 0$. Man

[1]) Trans. of the Cambr. Phil. Soc. t. 9. p. 166.

vil da i Integralet (42) kunne sætte $z = z' + \delta$ og bestemme δ saaledes, at Koefficienten til z'^2 i Exponenten bliver 0. Herved komme vi til den i (45) antagne Form, hvor $G - 2p\pi$ bliver lig $-\frac{H^2}{3I}$, og altsaa

$$3\varepsilon = H^2 \sqrt[3]{\frac{a^2}{I^4}}.$$

Det ses heraf, at ved denne Overgang fra Integralet (42) til Integralet (45) vil ε nødvendigvis forblive positiv. Overgangen fra (43) til (49) sker altsaa gjennem den ovenfor beskrevne periodiske Bevægelse ved positiv aftagende m eller ε, hvorved det sidste og største Maximum naas forinden ε bliver 0, medens herfra Modulus hurtig aftager til 0, samtidig med at ε gjennem 0 gaar over til lavere og lavere negative Værdier.

Vi ville endelig ogsaa i det følgende Afsnit møde Summer, som lade sig omdanne til et Integral af Formen

$$\int_0^{z_1} dz \left(A\frac{z}{a} + B\frac{z^3}{a^3} + \ldots \right) e^{\left(Fa + G\frac{z^2}{a} + H\frac{z^4}{a^3} + I\frac{z^6}{a^5} + \ldots\right)i}. \tag{51}$$

Naar heri sættes $Gz^2 = ax$ og G ikke er 0 eller meget lille, vil den øvre Grænse for x høre til den ovenfor ved ω betegnede Art af Størrelser, og idet Leddene af lavere Orden end Enheden bortkastes, vil Resultatet af Integrationen blive

$$\frac{A}{2G} e^{\left(Fa + \frac{\pi}{2}\right)i}. \tag{52}$$

Er derimod G meget lille, sættes $Hz^4 = a^3x^2$, den øvre Grænse for x betegnes ligesom før ved ω, og til Afkortning sættes

$$G = \pm\varepsilon\sqrt{\frac{H}{a}}, \tag{53}$$

idet det øverste Fortegn svarer til G positiv, det nederste til G negativ. Integralet gaar herved over til

$$\frac{1}{2H}\int_0^{\omega} dx \left((aH)^{\frac{1}{2}} A + Bx + \frac{AIi}{H} x^3 \right) e^{(Fa \pm \varepsilon x + x^2)i}. \tag{54}$$

For $\varepsilon = 0$ erholdes heraf ved Integration

$$\frac{A}{4}\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\, e^{\left(Fa + \frac{\pi}{4}\right)i} + \frac{1}{4H^2}(BH - AI)\, e^{\left(Fa + \frac{\pi}{2}\right)i}, \tag{55}$$

medens det almindelige Integral (54) lader sig udtrykke ved

$$\frac{e^{Fai}}{2H}\left((aH)^{\frac{1}{2}} AQ \mp iB\frac{dQ}{d\varepsilon} \mp \frac{AI}{H}\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3} \right), \tag{56}$$

idet

$$Q = \int_0^{\omega} dx\, e^{(\pm\varepsilon x + x^2)i}. \tag{57}$$

Af dette sidste Integral erholdes ved Differentiation med Hensyn til ε og delvis Integration

$$\frac{dQ}{d\varepsilon} = \mp\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon i}{2} Q , \tag{58}$$

hvoraf endvidere findes

$$\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3} = \pm\left(\frac{i}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8}\right) + \left(-\frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^3 i}{8}\right) Q . \tag{59}$$

Ved Indsættelsen af disse Værdier i (56), vil dette Udtryk for det søgte Integral være bestemt ved bekjendte Størrelser og ved Integralet Q.

Dette sidste Integral har under forskjellige Former ofte været behandlet, navnlig ved Beregningen af Bøjningsfænomener, saaledes af Fresnel, Cauchy, Knochenhauer, Quet, o. a. En større Tavle har været beregnet af Ph. Gilbert[1]) for de to Funktioner N og M, bestemte ved

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\omega dx\, e^{(\varepsilon x + x^2)i} = N + Mi , \quad \varepsilon = \sqrt{2\pi}\,\mu ,$$

og omfattende alle Værdier fra $\mu^2 = 0{,}00$ til $\mu^2 = 30{,}00$.

Naar altsaa i Integralet Q øverste Fortegn læses, kan dette Integral beregnes umiddelbart ved denne Tavle. Læses nederste Fortegn, og sættes

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\omega dx\, e^{(-\varepsilon x + x^2)i} = N_1 + M_1 i ,$$

vil man have

$$N + N_1 + (M + M_1)i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\omega}^{\omega} dx\, e^{(\varepsilon x + x^2)i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi - \varepsilon^2}{4} + i \sin\frac{\pi - \varepsilon^2}{4}\right) ,$$

hvorved N_1 og M_1 erholdes bestemte ved

$$N_1 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi - \varepsilon^2}{4} - N , \quad M_1 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi - \varepsilon^2}{4} - M .$$

Begge Størrelserne N og M aftage hurtig og vedvarende med voxende ε, hvoraf følger, at N_1 og M_1 ere periodiske Funktioner. Da man ifølge (58), naar nederste Fortegn læses, har

$$\frac{dN_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\varepsilon}{2} M_1 , \quad \frac{dM_1}{d\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{2} N_1 ,$$

bliver

$$N_1 \frac{dN_1}{d\varepsilon} + M_1 \frac{dM_1}{d\varepsilon} = \frac{N_1}{\sqrt{2\pi}} .$$

Heraf ses, at Maximum og Minimum for $N_1^2 + M_1^2$ svarer til $N_1 = 0$, som atter for store Værdier af ε tilnærmelsesvis vil svare til $\cos\frac{\pi - \varepsilon^2}{4} = 0$, altsaa til $\varepsilon^2 = (4p - 1)\pi$ eller $\mu = \sqrt{\frac{4p-1}{2}}$, idet p er et helt Tal.

[1]) Recherches anal. sur la diffraction de la lumière. Mém. cour. de l'Acad. de Bruxelles, t. XXXI, p. 1, 1862—63.

Ifølge Gilbert er

$$N_1^2 + M_1^2 = 2{,}7407 \text{ ved } \mu = 1{,}2172\,, \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2247\right), \text{ 1ste Max.}$$

$$1{,}5562 \text{ ved } \mu = 1{,}8725\,, \quad \left(\sqrt{\frac{7}{2}} = 1{,}8708\right), \text{ 1ste Min.}$$

$$2{,}3985 \text{ ved } \mu = 2{,}3445\,, \quad \left(\sqrt{\frac{11}{2}} = 2{,}3452\right), \text{ 2det Max.}$$

$$1{,}6864 \text{ ved } \mu = 2{,}7390\,, \quad \left(\sqrt{\frac{15}{2}} = 2{,}7386\right), \text{ 2det Min.}$$

Til $\mu = 0$ svarer $N_1^2 + M_1^2 = \frac{1}{2}$, til $\mu = \infty$ $N_1^2 + M_1^2 = 2$.

Tage vi kun Hensyn til Leddet af den højeste Orden ($\alpha^{\frac{1}{2}}$) i (56), vil det af det ovenfor udviklede fremgaa, at dette Udtryks Modulus voxer fra 0 ved $G = +\infty$ indtil $\frac{A}{4}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{H}}$ ved $G = 0$, voxer yderligere med aftagende G indtil $2{,}3412 \cdot \frac{A}{4}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{H}}$ ved $G = -1{,}2172\sqrt{\frac{2\pi H}{\alpha}}$, og naar sluttelig gjennem aftagende periodiske Svingninger til det dobbelte af den til $G = 0$ svarende Værdi.

4. α meget stor. Bevægelsen i Hovedaxen.

Ligesom i det foregaaende Afsnit betragtes her α som et meget stort Tal, og Lysbevægelsen skal søges bestemt saaledes, at kun Størrelser, som ere af lavere Orden end Enheden bortkastes.

Vi ville først søge at bestemme Bevægelsen i Nærheden af Kuglens Centrum, idet α', som er det betragtede Punkts Afstand fra Centret, maalt med $\frac{\lambda'}{2\pi}$ som Længdeenhed, betragtes som et i Forhold til α og α' meget lille Tal. Under denne Betingelse vil $v_n(\alpha')$, bestemt ved Rækken (22) blive meget lille, naar n nærmer sig i Størrelse til α, hvorfor Leddene i Rækkerne (31) for K' og S' kun faa Betydning for de lavere Værdier af n. I de ved (34) givne Udtryk for k_n' og s_n' vil man derfor ogsaa i Henhold til (23) og (25) kunne sætte

$$v_n(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{n\pi}{2}\right), \quad v_n(\alpha') = \sin\left(\alpha' - \frac{n\pi}{2}\right), \quad w_n(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Saaledes erholdes

$$\left.\begin{aligned} s'_{2n+1} = k'_{2n} = k'_0 &= e^{\alpha i}\frac{N}{\cos\alpha' + iN\sin\alpha'}, \\ s'_{2n} = k'_{2n+1} = s'_0 &= e^{\alpha i}\frac{N}{N\cos\alpha' + i\sin\alpha'}. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Rækkerne (31) gaa herved over til

$$K' = -i\frac{\cos\psi}{2a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left[(P_n(\cos\varphi)+P_n(-\cos\varphi))k_0'+(P_n(\cos\varphi)-P_n(-\cos\varphi))s_0'\right]v_n(a'),$$

$$S' = -\frac{\sin\psi}{2a'}\frac{d}{d\varphi}\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{\left(kt-\frac{n\pi}{2}\right)i}\left[(P_n(\cos\varphi)+P_n(-\cos\varphi))s_0'+(P_n(\cos\varphi)-P_n(-\cos\varphi))k_0'\right]v_n(a').$$

Disse Rækker kunne summeres ved Hjælp af Ligningerne (26) og (27), hvorved findes

$$K' = -i\frac{\cos\psi}{a'\sin\varphi} e^{kti}\left[(-\sin a'\cos\varphi+\sin(a'\cos\varphi))k_0'+i(-\cos a'+\cos(a'\cos\varphi))s_0'\right],$$

$$S' = -\frac{\sin\psi}{a'\sin\varphi} e^{kti}\left[(-\sin a'\cos\varphi+\sin(a'\cos\varphi))s_0'+i(-\cos a'+\cos(a'\cos\varphi))k_0'\right].$$

Indsættes nu disse Værdier i Ligningerne (18) og sættes til Afkortning

$$e^{kti}(-i\sin(a'\cos\varphi)k_0'+\cos(a'\cos\varphi)s_0') = Q,$$

erholdes

$$\bar{\xi}' = \sin\varphi\cos\psi\, Q, \quad \bar{\eta}' = \cos\varphi\cos\varphi\, Q, \quad \bar{\zeta}' = -\sin\psi\, Q.$$

Heraf findes atter Komposanterne med Hensyn til de faste Axer

$$\xi' = 0, \quad \eta' = Q, \quad \zeta' = 0.$$

Indsættes den ovenfor givne Værdi af Q, erholdes ved en lille Omforming

$$\eta' = e^{(kt-a'\cos\varphi)i}\frac{k_0'+s_0'}{2} - e^{(kt+a'\cos\varphi)i}\frac{k_0'-s_0'}{2}. \tag{61}$$

Den fysiske Betydning af dette Resultat fremgaar bedst, naar de i (60) givne Værdier af k_0' og s_0' udvikles i Række, efter at $\cos a'$ og $\sin a'$ ere udtrykte i exponentiel Form, nemlig

$$k_0' = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^m e^{(a-(2m+1)a')i}, \quad s_0' = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{1-N}{1+N}\right)^m e^{(a-(2m+1)a')i},$$

hvor m gjennemløber Talrækken fra 0 til ∞. Saaledes erholdes

$$\eta' = \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2m} e^{(kt-a'\cos\varphi+a-(4m+1)a')i} - \frac{2N}{N+1}\sum_0^\infty\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2m+1} e^{(kt+a'\cos\varphi+a-(4m+3)a')i}. \tag{62}$$

Paa denne Maade er Lysbevægelsen i Nærheden af Centret fremstillet som en Sum af Svingninger, der ere parallele med de indfaldende Straalers Svingninger og tilhøre to Sæt af Straaler, det ene gaaende i de indfaldende Straalers Retning, tilbagekastet et lige Antal Gange eller slet ikke fra de indre Kugleflader, det andet gaaende i modsat Retning efter et ulige Antal Tilbagekastninger. Ved Straalernes Indtrædelse i Kuglen er Udslaget forandret efter Forholdet $1+N$ til $2N$ og ved hver Tilbagekastning efter Forholdet $1+N$ til $1-N$, medens Fasen svarer til den tilbagelagte optiske Vejlængde, alt overensstemmende med de Resultater, man kommer til ved den elementære Betragtningsmaade, naar de to brydende Flader betragtes som plane og vinkelrette paa de indfaldende Straaler.

Naar det betragtede Punkt ikke ligger meget nær ved Centret, maa man tage Hensyn til de Led i Rækkerne, som svare til meget store Værdier af n. Det vil derfor først være nødvendigt at søge hertil passende Udviklinger for Funktionerne v_n og w_n.

Man har identisk

$$v_n = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \sin \operatorname{arc}\, tg \frac{v_n}{w_n}, \quad w_n = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \cos \operatorname{arc}\, tg \frac{v_n}{w_n},$$

eller, naar man sætter

$$v_n^2 + w_n^2 = q_n, \quad \operatorname{arc}\, tg \frac{v_n}{w_n} = \lambda_n,$$

$$v_n = \sqrt{q_n} \sin \lambda_n, \quad w_n = \sqrt{q_n} \cos \lambda_n. \tag{63}$$

Med Benyttelse af Ligningen

$$w_n v_n' - w_n' v_n = 1$$

erholdes endvidere, naar den Variable betegnes ved a,

$$\frac{d\lambda_n}{da} = \frac{1}{q_n}, \tag{64}$$

hvoraf atter ved Integration, idet til $a = \infty$ svarer $\lambda_n = a - \frac{n\pi}{2}$,

$$\lambda_n = a - \frac{n\pi}{2} - \int_a^\infty da \left(\frac{1}{q_n} - 1\right). \tag{65}$$

Af de i (23) og (25) givne Rækker for v_n og w_n findes

$$q_n = 1 + \frac{n(n+1)}{a^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{a^4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \ldots . \tag{66}$$

Er nu a et meget stort Tal af Størrelsesordenen α og kunne alle Størrelser som ere af Ordenen α^{-1} eller af lavere Orden lades ude af Betragtning ved Siden af samme Orden som Enheden, saa vil man for alle Værdier af n indtil en vis Grænse, som ligger lavere end a, og hvor endnu Differensen $a - \left(n + \frac{1}{2}\right)$ kan henregnes til Størrelsesordenen α, ved Summation af Rækken (66) erholde

$$q_n = \frac{a}{\sqrt{a^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}}, \quad a > n + \tfrac{1}{2}. \tag{67}$$

Indsættes dette Udtryk for q_n i (65), hvor det maa forblive gjældende for alle Integralets Elementer, erholdes ved Integration

$$\lambda_n = \sqrt{a^2 - \left(n + \tfrac{1}{2}\right)^2} - \frac{n\pi}{2} + \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \operatorname{arc}\, \sin \frac{n + \frac{1}{2}}{a}. \tag{68}$$

Til Funktionsbetegnelserne q_n og λ_n vil i det følgende blive tilføjet den Variable, som her for Kortheds Skyld har været udeladt.

Saalænge Ligning (67) er gjældende, ville Differentialkoefficienterne af $q_n(a)$ og $q_n(a')$ med Hensyn til a og a' kunne bortkastes ved Siden af Størrelser af Ordenen a^0,

som $q_n(\alpha)$, $q_n(\alpha')$. Gaa vi nu tilbage til Koefficientligningerne (33) og (34) og indføres for Kortheds Skyld følgende Betegnelser

$$\frac{Nq_n(\alpha') - q_n(\alpha)}{Nq_n(\alpha') + q_n(\alpha)} = b_n\,, \qquad \frac{2Nq_n(\alpha)q_n(\alpha')(Nq_n(\alpha') - q_n(\alpha))^m}{(Nq_n(\alpha') + q_n(\alpha))^{m+2}} = b_{n,m}\,,$$

$$\frac{q_n(\alpha') - Nq_n(\alpha)}{q_n(\alpha') + Nq_n(\alpha)} = c_n\,, \qquad \frac{2Nq_n(\alpha)q_n(\alpha')(q_n(\alpha') - Nq_n(\alpha))^m}{(q_n(\alpha') + Nq_n(\alpha))^{m+2}} = c_{n,m}\,,$$

$$\frac{2N\sqrt{q_n(\alpha)q_n(\alpha')}(Nq_n(\alpha') - q_n(\alpha))^m}{(Nq_n(\alpha') + q_n(\alpha))^{m+1}} = \beta_{n,m}\,, \qquad \frac{2N\sqrt{q_n(\alpha)q_n(\alpha')}(q_n(\alpha') - Nq_n(\alpha))^m}{(q_n(\alpha') + Nq_n(\alpha))^{m+1}} = \gamma_{n,m}\,,$$

saa vil man kunne udtrykke Koefficienterne ved Brøker, som lade sig udvikle i følgende konvergente Rækker:

$$\left.\begin{aligned} 2k_n &= -1 - b_n e^{2\lambda_n(\alpha)i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} 2b_{n,m} e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i}\,, \\ 2s_n &= -1 - c_n e^{2\lambda_n(\alpha)i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} 2c_{n,m} e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i}\,, \\ k_n' &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \beta_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}\,, \quad s_n' = \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}\,. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Idet vi dernæst gaa over til Summationen af Rækkerne (31), ville vi i dette Afsnit indskrænke os til det Tilfælde, at det betragtede Punkt ligger i x-Axen (Hovedaxen). Det vil bemærkes, at man har

$$\text{for } \cos\varphi = 1\,, \quad \frac{dP_n(\cos\varphi)}{\sin\varphi\, d\varphi} = \frac{d^2P_n(\cos\varphi)}{d\varphi^2} = -\frac{n(n+1)}{2}\,,$$

$$\text{for } \cos\varphi = -1\,, \quad \frac{dP_n(\cos\varphi)}{\sin\varphi\, d\varphi} = -\frac{d^2P_n(\cos\varphi)}{d\varphi^2} = \left(-1\right)^n \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Naar nu de givne Rækker for K og S indsættes i (17), for K' og S' i (18), og man dernæst bestemmer Komposanterne med Hensyn til de faste Axer ved Hjælp af Ligningerne

$$\begin{aligned} \xi &= \cos\varphi\bar{\xi} - \sin\varphi\bar{\eta}\,, \\ \eta &= \sin\varphi\cos\psi\bar{\xi} + \cos\varphi\cos\psi\bar{\eta} - \sin\psi\bar{\zeta}\,, \\ \zeta &= \sin\varphi\sin\psi\bar{\xi} + \cos\varphi\sin\psi\bar{\eta} + \cos\psi\bar{\zeta}\,, \end{aligned}$$

og de tilsvarende Ligninger for et indre Punkt, saa vil man finde, at Svingningerne overalt i Hovedaxen gaa i Retning af y-Axen, hvad da ogsaa er en umiddelbar Følge af, at hele Lysbevægelsen er symmetrisk med Hensyn til xy-Planen, samt at Svingningsudslagene uden for og inden for Kuglen ville være bestemte ved

$$\left.\begin{aligned} \eta &= e^{(kt \mp a)i} + \sum_1^\infty \frac{n+\frac{1}{2}}{a} e^{\left(kt \mp \frac{n\pi}{2}\right)i} \left(\pm ik_n(v_n'(a) + w_n'(a)i) + s_n(v_n(a) + w_n(a)i)\right)\,, \\ \eta' &= \sum_1^\infty \frac{n+\frac{1}{2}}{a'} e^{\left(kt \mp \frac{n\pi}{2}\right)i} \left(\pm ik_n' v_a'(a') + s_n' v_n(a')\right)\,, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

øverste Fortegn gjældende for x-Axens positive, nederste for dens negative Side.

De heri indgaaende Funktioner af n lade sig udvikle efter Potenser af $n+\frac{1}{2}$ i Rækker, som forblive konvergente indtil en vis Grænse $n = n_1$, indtil hvilken Grænse vi da først ville udføre de angivne Summationer. Saaledes vil det i (68) givne Udtryk for $\lambda_n(a)$ kunne udvikles i følgende Række

$$\lambda_n(a) = a - \frac{n\pi}{2} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{a}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}{3a^3}\cdot\frac{1}{2.4} + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^6}{5a^5}\cdot\frac{1.3}{2.4.6} + \dots . \qquad (71)$$

For q_n haves Rækkeudviklingen (66) og af Ligningerne (63) erholdes

$$v_n(a) + w_n(a)\,i = i\sqrt{q_n(a)}\,e^{-\lambda_n(a)\,i},$$

samt med Bortkastelse af $q_n'(a)$ ifølge (64)

$$v_n'(a) + w_n'(a)\,i = \frac{1}{\sqrt{q_n(a)}}\,e^{-\lambda_n(a)\,i}.$$

Vi ville nu særlig udtage de enkelte Led, hvoraf Ligningerne (69) for Koefficienterne bestaa, og begynde med at sætte

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1.$$

Med disse Forudsætninger vil den første Ligning (70) give

$$\eta = e^{(kt\mp a)\,i} - i\sum_1^{n_1}{}'\frac{n+\frac{1}{2}}{2a}\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{q_n(a)}} + \sqrt{q_n(a)}\right)e^{\left(kt\mp\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)\right)i}.$$

Naar heri indsættes den i (71) givne Række for $\lambda_n(a)$, vil det ses, at Exponenten kommer til at indeholde Leddet $\frac{n\pi}{2}(\mp 1 + 1)$. Naar nederste Fortegn læses, vil dette Led blive $n\pi$, og i Henhold til det i foregaaende Afsnit udviklede vil Summen blive 0. Altsaa er for x-Axens negative Side

$$\eta = e^{(kt+a)\,i}.$$

Naar derimod øverste Fortegn læses, kan Summen, idet der sættes $n+\frac{1}{2} = z$, forandres til et Integral af Formen (51), og ved Sammenligningen erholdes

$$A = \frac{a}{a}, \quad Fa = kt - a, \quad G = -\frac{a}{2a},$$

medens ifølge (52) Integralet bliver lig med

$$-e^{\left(kt-a+\frac{\pi}{2}\right)i}.$$

Altsaa er for x-Axens positive Side

$$\eta = e^{(kt-a)\,i} + ie^{\left(kt-a+\frac{\pi}{2}\right)i} = 0.$$

Den her fremstillede Del af Bevægelsen er saaledes intet andet end den indfaldende Centralstraale indtil det Punkt, hvor den træffer Kuglen.

Udtages dernæst det andet Led af de to første Ligninger (69) og sættes

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(\alpha)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(\alpha)i},$$

vil Summen i Udtrykket (70) for η komme til at indeholde Exponenten

$$\left(kt - a + 2a + \frac{n\pi}{2}(\mp 1 - 1) + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\right) + \ldots\right)i.$$

Her maa, naar øverste Fortegn læses, Summen blive 0. Med nederste Fortegn vil derimod Summen ligesom før kunne omdannes til et Integral af Formen (51), og ved Sammenligningen erholdes

$$A = \frac{N-1}{N+1}\frac{a}{a}i, \quad Fa = kt - a + 2a, \quad G = \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\right).$$

Ifølge (52) vil altsaa Integralet blive lig med

$$-\frac{N-1}{N+1}\cdot\frac{1}{a\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\right)}e^{(kt-a+2a)i}. \tag{72}$$

Denne Del af Bevægelsen svarer til den fra den forreste Del af Kuglefladen tilbagekastede Centralstraale, og Resultatet er det samme som det, man ad elementær Vej vil kunne udlede, idet Fasen bestemmes ved den tilbagelagte optiske Vejlængde, og Amplituden efter Tilbagekastningen er $-\frac{N-1}{N+1}$ i selve Kuglefladen, altsaa i Afstanden $\frac{1}{2}a$ (Afstandene maalte med $\frac{\lambda}{2\pi}$ som Længdeenhed) fra Centralstraalernes indbildte Brændpunkt, og derefter maa aftage i samme Forhold, som det betragtede Punkt fjerner sig fra dette Brændpunkt.

Udtages endelig det Led af Ligningerne (69), som svarer til

$$k_n = b_{n,m}e^{2(\lambda_n(a)-(m+1)\lambda_n(a'))i}, \quad s_n = c_{n,m}e^{2(\lambda_n(a)-(m+1)\lambda_n(a'))i},$$

vil Udslaget være bestemt ved

$$\sum_1^{n_1} i\frac{n+\frac{1}{2}}{a\sqrt{q_n(a)}}(\pm b_{n,m} + c_{n,m}q_n(a))\,e^{\left(kt\mp\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)+2\lambda_n(a)-(2m+2)\lambda_n(a')\right)i}.$$

Udviklet efter Potenser af $n+\frac{1}{2}$ vil denne Exponent blive

$$\left(kt - a + 2a - (2m+2)a' + \frac{n\pi}{2}(\mp 1 + 2m + 1) + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}-\frac{2m+2}{a'}\right) + \ldots\right)i.$$

Summen vil forsvinde, med mindre man har

$$\mp 1 + 2m + 1 = 4p,$$

det vil sige, med mindre m er et lige Tal, naar Punktet ligger paa x-Axens positive Side (øverste Fortegn), eller m er ulige, naar Punktet ligger paa den negative Side. Dette forudsat, kan Summen forandres til et Integral af Formen (51) og ved Sammenligningen erholdes

$$A = i\frac{a}{a}\frac{4N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}, \qquad B = 0,$$

$$Fa = kt - a + 2a - (2m+2)a', \qquad G = \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}-\frac{2m+2}{a'}\right),$$

$$H = \frac{a^3}{24}\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^3}-\frac{2m+2}{a'^3}\right), \qquad I = \frac{a^5}{80}\left(-\frac{1}{a^5}+\frac{2}{a^5}-\frac{2m+2}{a'^5}\right).$$

Ifølge (52), som forudsætter, at G ikke er meget lille, vil Resultatet af Integrationen blive

$$-\frac{4N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}\cdot\frac{1}{a\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}-\frac{2m+2}{a'}\right)}e^{(kt-a+2a-(2m+2)a')i}. \tag{73}$$

Ogsaa dette Resultat vil kunne udledes ad elementær Vej. Man tænke sig et cylindrisk Bundt Centralstraaler med Diameteren 1 træde ind i Kuglen. Efter m indre Tilbagekastninger vil dette Bundt træde ud af Kuglen med Diameteren $\frac{(2m+2)a-a'}{a'}$ og dernæst forene sig til et virkeligt eller indbildt Brændpunkt. Er dettes Afstand fra Centret a_1, saa vil i Afstanden a Straalebundtets Diameter blive $\frac{a_1-a}{a_1}\cdot\frac{(2m+2)a-a'}{a'}$. Nu er Brændvidden a_1 bestemt ved $-\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a}-\frac{2m+2}{a'}=0$, og Svingningsamplituden, som efter de m Tilbagekastninger og to Brydninger er forandret til $\left(\frac{1-N}{1+N}\right)^m\frac{4N}{(1+N)^2}$, vil blive forøget i samme Forhold, som Straalebundtets Diameter er blevet mindre. Naar desuden Fasen bestemmes efter den tilbagelagte optiske Vejlængde, ses det, at Resultatet vil blive nøjagtig det samme, som ovenfor er fundet.

Derimod kan man ikke paa denne Maade bestemme Bevægelsen i selve Brændpunkterne. Disse ere bestemte ved Ligningen $G = 0$, og hertil knytter sig den til $0 < \frac{1}{a} \leqq \frac{1}{a}$ svarende Betingelse $2N > 2m+2 \geqq N$, hvoraf ses, at der til $N \leqq 1$ svarer intet virkeligt Brændpunkt, til $1 < N < 2$ kun et Brændpunkt, o. s. v. Til $G = 0$ svarer Udtrykket (55), som med de ovenfor angivne Værdier af A, B, H og I giver Udslaget i det betragtede Brændpunkt bestemt ved

$$-\frac{2N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}\left(\sqrt{\frac{6\pi}{a^2\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^3}-\frac{2m+2}{a'^3}\right)}}e^{\left(Fa-\frac{\pi}{4}\right)i}-\frac{18}{5}\frac{-\frac{1}{a^5}+\frac{2}{a^5}-\frac{2m+2}{a'^5}}{a\left(-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^3}-\frac{2m+2}{a'^3}\right)^2}e^{Fai}\right). \tag{74}$$

Det fremgaar af Udtrykket for G, at naar vi langs Hovedaxen fra et ydre Punkt nærme os Kuglen og passere et Brændpunkt, saa vil G fra en positiv Værdi gjennem 0 gaa over til en negativ Værdi. Heraf ses, i Henhold til det i Slutningen af forrige Afsnit anførte, at Amplituden under denne Bevægelse hurtig voxer fra en meget lille Størrelse i Nærheden af Brændpunktet til den ovenfor for Brændpunktet bestemte Værdi af Størrelsesordenen $a^{\frac{1}{2}}$,

voxer endnu yderligere for derefter gjennem Svingninger at naa til det dobbelte af Amplituden i Brændpunktet. Derefter træffes Axen af andre Straaler, som ligge uden for Centralstraalerne, og hvis Virkning vil blive bestemt i det følgende. En nærmere Bestemmelse af Lysbevægelsen i Nærheden af et Brændpunkt fremgaar af (56) og den derefter givne Oversigt over Værdien af Integralet Q (57).

Som Exempel vil jeg antage $m = 0$, Kuglens Radius lig 1^{cm}, Brydningsforholdet 1,5 og Bølgelængden af det indfaldende Lys lig $0{,}0005^{mm}$. Man vil da have

$$\alpha = 40000\pi, \quad \alpha' = 1{,}5\alpha, \quad a = 1{,}5\alpha, \quad N = 1{,}5.$$

Disse Talværdier indsatte i (74) give som Resultat

$$-467{,}23\, e^{\left(F\alpha - \frac{\pi}{4}\right)i} + 1{,}50\, e^{F\alpha i}.$$

Heraf ses, at det andet Led kun faar en ringe Betydning, og at Intensiteten, som regnes proportional med Amplitudens Kvadrat, er meget betydelig i dette Brændpunkt, nemlig 217311 Gange større end Intensiteten af det indfaldende Lys. For en Kugle med samme Brydningsforhold og en dobbelt saa stor Radius vilde Intensiteten meget nær blive det dobbelte.

I en lille Afstand δ (maalt med $\frac{\lambda}{2\pi}$ som Længdeenhed) inden for Brændpunktet vil man have $G = -\frac{a\delta}{2a^2}$, og har paa dette Punkt Intensiteten naaet sit første Maximum, vil man af den i Slutningen af forrige Afsnit angivne Værdi af G i dette Punkt finde $d = 1047$, svarende til $0{,}0833^{mm}$. I dette Punkt vil Intensiteten være steget til 1191200, idet den her er 5,4814 Gange større end i Brændpunktet.

Beregningen af den Del af Lysbevægelsen i Axen inden for Kuglen, som hidrører fra Centralstraalerne, kan udføres paa ganske lignende Maade, idet vi gaa ud fra den anden Ligning (70). Den Sum, som bliver at beregne, naar det almindelige Led af de i (69) for k_n' og s_n' givne Summer udtages, vil være

$$\sum_1^{n_1}{}' \frac{n + \frac{1}{2}}{a'\sqrt{q_n(a')}} \left(\mp i \cos \lambda_n(a')\beta_{n,m} + \sin \lambda_n(a')\gamma_{n,m}\right) e^{\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} + \lambda_n(a) - (2m+1)\lambda_n(a')\right)i}.$$

Naar man nu heri giver $\cos \lambda_n(a')$ og $\sin \lambda_n(a')$ exponentiel Form og dernæst udvikler alle Funktionerne λ_n efter Formlen (71), ville i Exponenterne Koefficienterne til $\frac{n\pi}{2} i$ blive

$$\mp 1 + 2m + 1 \quad \text{og} \quad \mp 1 + 2m - 1.$$

Kun naar disse Koefficienter ere 0 eller et Multiplum af 4, vil Summen ikke forsvinde, og dette vil kun være Tilfældet, naar de kunne henføres til Formen

$$\mp (1 - (-1)^m) + 2m.$$

I dette Tilfælde vil Summen kunne gives Form af Integralet (51), og ved Sammenligning med dette erholdes

$$A = \pm i \frac{a}{a'} \frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}}, \qquad B = 0,$$

$$Fa = kt \mp (-1)^m a' + a - (2m+1)a', \qquad G = \frac{a}{2}\left(\mp\frac{(-1)^m}{a'} + \frac{1}{a} - \frac{2m+1}{a'}\right),$$

$$H = \frac{a^3}{24}\left(\mp\frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right), \qquad I = \frac{a^5}{80}\left(\mp\frac{(-1)^m}{a'^5} + \frac{1}{a^5} - \frac{2m+1}{a'^5}\right).$$

Er G ikke meget lille vil ifølge (52) Resultatet af Integrationen blive

$$\mp\frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}} \cdot \frac{1}{a'\left(\mp\frac{(-1)^m}{a'} + \frac{1}{a} - \frac{2m+1}{a'}\right)} e^{(kt\mp(-1)^m a' + a - (2m+1)a')i}. \tag{75}$$

Hvis man derimod har $G = 0$, erholdes ifølge (55)

$$\mp\frac{N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}}\left(\sqrt{\frac{6\pi}{a'^2\left(\mp\frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right)}} e^{\left(Fa - \frac{\pi}{4}\right)i} - \frac{18}{5}\frac{\mp\frac{(-1)^m}{a'^5} + \frac{1}{a^5} - \frac{2m+1}{a'^5}}{a'\left(\mp\frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}\right)^2} e^{Fai}\right). \tag{76}$$

Da man skal have $a' \leqq a'$, vil man se, at Ligningen $G = 0$ ikke er mulig for $N - 1 < 2m + 1 < N + 1$, medens derimod for alle andre Værdier af m Ligningen vil kunne tilfredsstilles enten ved det ene eller ved det andet af de to i G indgaaende Fortegn.

Naar man i (75) betragter a' som uendelig lille og dernæst for m sætter $2m$ og $2m + 1$, vil Resultatet slutte sig umiddelbart til det i (62) fundne, hvor Udslaget i Nærheden af Centret er bestemt ad anden Vej.

Vi fortsætte nu Summationen af Rækkerne (70) fra $n = n_1$ til $n = n_2$, idet n_2 er den højeste Grænse for n, som er mulig, naar Funktionerne q_n og λ_n skulle kunne udtrykkes ved Formlerne (67) og (68). Rækkerne antage altsaa den i (35) givne Form, og idet vi ogsaa her sætte $n = \nu + z$, hvor ν og z betragtes som hele Tal, ville vi indføre følgende Betegnelser

$$\nu + \tfrac{1}{2} = a \sin\theta = a' \sin\theta' = a \sin\vartheta = a' \sin\vartheta', \tag{77}$$

hvor de fire Vinkler θ, θ', ϑ og ϑ' ere beliggende imellem 0 og $\frac{\pi}{2}$ og antages foreløbig ikke at falde meget nær ved disse to Grænser.

Af (67) følger

$$1 = \cos\theta q_\nu(a) = \cos\theta' q_\nu(a') = \cos\vartheta q_\nu(a) = \cos\vartheta' q_\nu(a'), \tag{78}$$

hvorefter Koefficienterne b_ν, $b_{\nu,m}$ o. s. v. blive bestemte ved

$$b_\nu = \frac{N\cos\theta - \cos\theta'}{N\cos\theta + \cos\theta'}, \qquad b_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta'\frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta')^{m+2}},$$

$$c_\nu = \frac{\cos\theta - N\cos\theta'}{\cos\theta + N\cos\theta'}, \qquad c_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta'\frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+2}},$$

$$\beta_{\nu,m} = 2N\sqrt{\cos\theta\cos\theta'}\frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta')^{m+1}}, \qquad \gamma_{\nu,m} = 2N\sqrt{\cos\theta\cos\theta'}\frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+1}}.$$

De tilsvarende Koefficienter b_n, $b_{n,m}$ o. s. v. ville kunne udvikles i Rækker efter Potenser af z, saaledes til Exempel

$$b_n = b_\nu + \left(\frac{1}{a\cos\theta}\frac{db_\nu}{d\theta} + \frac{1}{a'\cos\theta'}\frac{db_\nu}{d\theta'}\right)z + \ldots .$$

Ligeledes er ifølge (68)

$$\lambda_\nu(a) = a\cos\theta - \frac{\nu\pi}{2} + (\nu + \tfrac{1}{2})\theta ,$$

$$\lambda_n(a) = \lambda_\nu(a) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)z + \frac{z^2}{2a\cos\theta} + \frac{\sin\theta\, z^3}{6a^2\cos^3\theta} + \frac{(1+2\sin^2\theta)z^4}{24a^3\cos^5\theta} + \ldots ,$$

ligesom tilsvarende Udviklinger erholdes for $\lambda_n(a')$, $\lambda_n(a)$, $\lambda_n(a')$.

Vi udtage nu ligesom tidligere de enkelte Led af Rækkerne (69) for k_n og s_n og begynde med Antagelsen

$$2k_n = -1 , \quad 2s_n = -1 .$$

Den i (70) for η angivne Sum, taget fra $n = n_1$ til $n = n_2$, vil under denne Forudsætning indeholde Potensexponenten

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a)\right)i = \left(kt \mp \frac{\nu\pi}{2} - \lambda_\nu(a) + \left(\mp\frac{\pi}{2} - \vartheta + \frac{\pi}{2}\right)z + \ldots\right)i .$$

Da Koefficienten til z her ikke kan blive 0 eller meget lille, vil altsaa i dette Tilfælde Summen forsvinde.

Antages dernæst

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i} , \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i} ,$$

vil Summen indeholde Exponenten

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a)\right)i ,$$

hvori Koefficienten til zi vil blive $\mp\frac{\pi}{2} - \left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, hvilken Koefficient heller ikke kan blive 0 eller meget lille, da $2\theta - \vartheta$ maa være mindre end π og tillige større end 0, fordi man maa have $\theta \geqq \vartheta$. Ogsaa i dette Tilfælde maa altsaa Summen blive 0.

Sættes endelig

$$k_n = b_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i} , \quad s_n = c_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i} ,$$

vil Summen indeholde Exponenten

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) - (2m+2)\lambda_n(a')\right)i ,$$

hvori Koefficienten til zi vil blive

$$\frac{\pi}{2}(2m + 1 \mp 1) - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' = G .$$

Antages nu ligesom i (41) $G = 2p\pi$, vil Summen gaa over til et Integral af Formen (42), hvor Koefficienterne ville blive

$$A = i\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta}}(\pm\cos\vartheta\, b_{\nu,m} + c_{\nu,m}), \qquad B = a\frac{dA}{d\nu},$$

$$Fa = kt + (\nu+\tfrac{1}{2})G - \frac{\pi}{4}(2m+1\mp1) - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta - (2m+2)a'\cos\theta',$$

$$H = \frac{a}{2}\left(-\frac{1}{a\cos\vartheta} + \frac{2}{a\cos\theta} - \frac{2m+2}{a'\cos\theta'}\right) = \frac{1}{2\sin\theta}(-\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\theta - (2m+2)\operatorname{tg}\theta'),$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}(-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta'),$$

$$K = \frac{I}{4\sin\theta} + \frac{1}{8\sin^3\theta}(-\operatorname{tg}^5\vartheta + 2\operatorname{tg}^5\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^5\theta').$$

I Stedet for det i Fa indgaaende Led $(\nu+\frac{1}{2})G$ vil man ogsaa, da ν er et helt Tal, kunne sætte $p\pi$, naar Betingelsen $G = 2p\pi$ er tilfredsstillet.

Resultatet af Integrationen vil da være givet ved Formlen (43) og, hvis man har $H = 0$, ved (50), eller mere almindelig, naar $G - 2p\pi$ ikke er 0, men meget lille, ved (49).

Ved de samme Formler kunne ogsaa Resultaterne med Hensyn til et indre Punkt bestemmes, idet vi da have at gaa ud fra den anden Ligning (70), som fører til følgende Værdier for Koefficienterne

$$A = i\frac{\sin\vartheta'}{\sqrt{\cos\vartheta'}}(\pm\cos\vartheta'\beta_{\nu,m} - (\pm)\gamma_{\nu,m}), \qquad B = a\frac{dA}{d\nu},$$

$$G = \frac{\pi}{2}(2m - (\pm)1\mp1) + (\pm)\vartheta' + \theta - (2m+1)\theta',$$

$$Fa = kt + (\nu+\tfrac{1}{2})G - \frac{\pi}{4}(2m - (\pm)1\mp1) + (\pm)a'\cos\vartheta' + a\cos\theta - (2m+1)a'\cos\theta',$$

$$H = \frac{1}{2\sin\theta}\left((\pm)\operatorname{tg}\vartheta' + \operatorname{tg}\theta - (2m+1)\operatorname{tg}\theta'\right),$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}\left((\pm)\operatorname{tg}^3\vartheta' + \operatorname{tg}^3\theta - (2m+1)\operatorname{tg}^3\theta'\right),$$

$$K = \frac{I}{4\sin\theta} + \frac{1}{8\sin^3\theta}\left((\pm)\operatorname{tg}^5\vartheta' + \operatorname{tg}^5\theta - (2m+1)\operatorname{tg}^5\theta'\right).$$

Det indklamrede Fortegn $(\pm)$ tages overalt ens enten som $+$ eller som $-$ og bestemmes nærmere ved den Betingelse, at $G - 2p\pi$ skal være 0 eller meget lille.

Tænke vi os den saaledes beregnede Lysbevægelse i Hovedaxen frembragt ved Brydning og indre Tilbagekastning af Lysstraaler, ville disse svare til alle de Lysstraaler, som træffe Kuglen i Afstanden $\nu+\frac{1}{2}$ fra Hovedaxen. Indfaldsvinklen vil svare til θ,

Brydningsvinklen til θ', medens ϑ og ϑ' blive de spidse Vinkler, hvorunder Straalerne træffe Hovedaxen i Punktet a uden for Kuglen eller i Punktet a' inden for Kuglen. Efter m indre Tilbagekastninger vil en indfaldende Straale være omdrejet Vinklen

$$\Delta_m = m\pi + 2\theta - (2m+2)\theta',$$

naar Straalen er traadt ud af Kuglen, og Vinklen

$$\Delta'_m = m\pi + \theta - (2m+1)\theta',$$

naar Straalen ikke er traadt ud af Kuglen.

For et ydre Punkt vil altsaa Betingelsen $G = 2p\pi$ ogsaa, ifølge den ovenfor givne Værdi af G, kunne udtrykkes ved

$$\Delta_m = \vartheta + (2p - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi,$$

hvilken Ligning udtrykker, at Straalerne ere omdrejede Vinkleu ϑ og enten et helt Antal Omdrejninger, naar øverste Fortegn læses og Skjæringen med x-Axen altsaa finder Sted paa dennes positive Side, eller et ulige Antal halve Omdrejninger, naar nederste Fortegn læses og Skjæringen foregaar paa x-Axens negative Side.

For et indre Punkt vil Betingelsen $G = 2p\pi$ svare til enten

$$\Delta'_m = -\vartheta' + (2p + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi \quad \text{eller} \quad \Delta'_m = \vartheta' + (2p - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\pi.$$

Det sidste Tilfælde svarer til det foregaaende, hvor Straalernes Skjæring med Hovedaxen laa uden for Kuglen, det første Tilfælde indtræder, naar Straalerne efter at være omdrejede et helt Antal Gange og den stumpe Vinkel $\pi - \vartheta'$ træffer Axens positive Side, eller ved at være omdrejet et ulige Antal halve Omgange og Vinklen $\pi - \vartheta'$ træffer Axens negative Side, noget som ikke vil kunne indtræde for Skjæringer med Axen uden for Kuglen.

Det ses saaledes, at overhovedet alle Tilfælde, hvorunder et Punkt i Axen kan træffes af nogen af de Straaler, som uden for Centralstraalerne ere faldne ind paa Kuglen og have lidt m Tilbagekastninger, ere indbefattede under Betingelsen $G = 2p\pi$.

Naar for et Punkt $G = 2p\pi$ ikke kan være 0, men er en meget lille Størrelse, saa træffes Punktet ikke direkte af de retliniede brudte, men kun af de interfererende, bøjede Straaler.

Det er ovenfor omtalt, at naar vi fra et ydre Punkt nærme os Kuglen langs Hovedaxen, saa ville vi kort efter at have passeret et af Centralstraalernes Brændpunkter træffe en Amplitude, som er dobbelt saa stor som Amplituden i Brændpunktet. Herfra kan nu Lysbevægelsen videre bestemmes ved de ovenfor for et ydre Punkt fundne Resultater. Antages i disse Vinklerne meget smaa, ville vi have

$$-\vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' = 0, \quad \text{og} \quad 2m + 1 \mp 1 = \text{et Multiplum af } 4,$$

altsaa er m lige for øverste Fortegn, ulige for nederste.

Endvidere findes

$$A = i\vartheta 4\, N \frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}, \qquad Fa = kt - a + 2a - (2m+2)\alpha',$$

og ved Udvikling i Række

$$H = \frac{1}{6\theta}(-\vartheta^3 + 2\theta^3 - (2m+2)\theta'^3).$$

Udslaget, bestemt ved (43), vil altsaa blive

$$A\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i} = i\vartheta 4\, N \frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}} \sqrt{\frac{6\,a\theta\pi}{-\vartheta^3 + 2\theta^3 - (2m+2)\theta'^3}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i}.$$

Bemærkes det nu, at naar, som antaget, Vinklerne ere meget smaa, vil man ifølge (77) have $a\theta = \alpha'\theta' = a\vartheta$, hvorved det fundne Udtryk netop ogsaa bliver det dobbelte af Udslaget i Brændpunktet, saaledes som dette er bestemt i (74). Det andet, lidet betydende Led i denne sidste Formel er her ladet ude af Betragtning. Heraf ses, at de fundne Resultater ogsaa gjælde for saa smaa Vinkler, at de slutte sig umiddelbart til de tidligere for Centralstraalerne afledede Formler. Ganske det samme gjælder for de indre Punkters Vedkommende.

Naar θ eller θ' nærmer sig den øvre Grænse $\frac{\pi}{2}$, vil baade for et ydre og for et indre Punkt H nærme sig plus eller minus ∞, og det ved (43) bestemte Udslag vil altsaa konvergere til 0. Naar for et indre Punkt ϑ' nærmer sig $\frac{\pi}{2}$, vil A konvergere til $-(\pm)\, i \frac{\gamma_{\nu,m}}{2\sqrt{\cos\vartheta'}}$, H til $(\pm)\frac{1}{2\sin\theta\cos\vartheta'}$ og Fa til $C + (\pm)\frac{\pi}{4}$, idet

$$C = kt + p\pi - \frac{\pi}{4}(2m \mp 1) + a\cos\theta - (2m+1)\alpha'\cos\theta'.$$

Formlen (43) vil altsaa blive

$$A\sqrt{\frac{a\pi}{H}}\, e^{\left(Fa+\frac{\pi}{4}\right)i} = -(\pm)\, i \frac{\gamma_{\nu,m}}{2\sqrt{\cos\vartheta'}} \sqrt{\frac{a\pi \,.\, 2\sin\theta\cos\vartheta'}{(\pm)\,1}}\, e^{\left(C+\frac{\pi}{4}(1+(\pm)1)\right)i},$$

som, baade naar øverste og naar nederste Fortegn læses, bliver lig

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{\nu,m}\sqrt{2\pi a\sin\theta}\, e^{Ci}.$$

Naar nu α' antages at være et Punkt, for hvilket ϑ' nøjagtig vil blive lig $\frac{\pi}{2}$, og naar til et meget nærliggende Punkt $\alpha' + h$ svarer et af de to Fortegn $(\pm)$, saa vil til et andet Punkt $\alpha' - h$ svare det modsatte Fortegn. Det ses imidlertid af det ovenfor fundne Resultat, at for begge disse to meget nærliggende Punkter bliver det beregnede Udslag det samme og uafhængig af deres Afstand fra Punktet α', hvoraf kan sluttes, at de fundne Formler ogsaa forblive gyldige i Tilfælde af, at ϑ' naar selve Grænsen $\frac{\pi}{2}$.

De i dette Afsnit fremstillede Resultater omfatte saaledes alle de Tilfælde, hvor Lysstraalerne efter at være tilbagekastede og brudte et vilkaarligt Antal Gange enten umiddelbart eller, i Nærheden af Brændpunkterne, ved Interferens træffe Hovedaxen. Foruden disse Tilfælde kan der ogsaa blive Spørgsmaal om Virkningen af de uden om Kuglen gaaende Straalers Bøjning, men disse Bøjningsfænomener optræde kun i Nærheden af Kuglens geometriske Skyggerand og ville i et følgende Afsnit blive gjort til Gjenstand for en nærmere Undersøgelse.

Som almindeligt Resultat af det her udviklede fremgaar, at den til Amplitudens Kvadrat svarende Lysintensitet fremtræder meget forskjellig i de forskjellige Punkter af Hovedaxen, snart som en Størrelse af samme Orden som Enheden, det vil sige, som Intensiteten af det indfaldende Lys, snart, nemlig i Centralstraalernes Brændpunkter og i de andre Straalers axiale Brændlinier, som en Størrelse af Ordenen α, og endelig ogsaa i nogle af Brændliniernes Endepunkter som en Størrelse af Ordenen $\alpha^{\frac{4}{3}}$. I disse sidste Brændpunkter vilde altsaa for en uendelig stor Kugle Intensiteten være større end i et hvilket som helst andet Punkt i Axen (saa vel som ogsaa uden for Axen), men i Virkeligheden bliver, naar vi holde os inden for de praktisk mulige Grænser, Intensiteten i disse Punkter altid betydelig mindre end i Centralstraalernes første, til $m = 0$ svarende, Brændpunkt. Tages som Exempel $N = 1{,}5$, vil der først fremkomme et saadant ydre Brændpunkt efter tre indre Tilbagekastninger. Sættes nu $m = 3$, vil man finde

$$\theta = 73°39'16{,}6'', \quad \theta' = 39°46'15{,}8'', \quad \vartheta = 9°8'26{,}8'',$$

svarende til $G = 2\pi$ og $H = 0$. Antages endvidere $\alpha = 40000\pi$, vil man af Formlen (50), hvori kun Leddet af højeste Orden medtages, finde Amplituden 24,681, Intensiteten 609,14, medens Intensiteten i det første Brændpunkt, som tidligere vist, er 217311, altsaa mangfoldige Gange større.

5. α meget stor. Bevægelsen uden for Hovedaxen.

For Kuglefunktionen $P_n(\cos\varphi)$ haves den bekjendte Udvikling

$$P_n(\cos\varphi) = 2\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\left(\cos n\varphi + \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2}\cos(n-2)\varphi + \frac{2n(2n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cos(n-4)\varphi + \ldots\right),$$

hvilken Række, naar n er ulige, ender med det Led, som indeholder $\cos\varphi$, og naar n er lige, med et konstant Led, hvoraf tages det halve.

Vi ville nu her forudsætte, at φ ikke er 0 eller meget lille, og at n er et meget stort Tal. Man vil da som bekjendt ved Summation af Rækken erholde det allerede af Laplace fundne Udtryk

$$P_n(\cos\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}} \cos\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Heraf dannes endvidere, med Bortkastelse af Størrelser af lavere Orden,

$$\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2n}{\pi \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Denne Værdi indsættes i Rækkerne (31). Da det betragtede Punkt antages at ligge uden for Hovedaxen, vil det ikke kunne træffes af Centralstraalerne, som svare til $n < n_1$, hvorfor Summationerne her kun behøve at udføres fra $n = n_1$ til $n = \infty$. Rækkerne ville saaledes kunne udtrykkes ved

$$\left.\begin{aligned}
K &= -\frac{\cos\psi}{a} \sum_{n_1}^{\infty}{}' \sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a)\right)i} 2k_n, \\
S &= i\frac{\sin\psi}{a} \sum_{n_1}^{\infty}{}' \sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a)\right)i} 2s_n, \\
K' &= i\frac{\cos\psi}{a'} \sum_{n_1}^{\infty}{}' \sqrt{\frac{2q_n(a')}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2}\right)i} \sin\lambda_n(a') 2k_n', \\
S' &= \frac{\sin\psi}{a'} \sum_{n_1}^{\infty}{}' \sqrt{\frac{2q_n(a')}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2}\right)i} \sin\lambda_n(a') 2s_n'.
\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Vi indskrænke os i dette Afsnit til at udføre disse Summationer indtil $n = n_2$, det vil sige, indtil den højeste Grænse for n, inden for hvilken Funktionerne q_n og λ_n lade sig udtrykke ved de i (67) og (68) givne Formler.

Af Rækkerne for K og S udtages, med Anvendelsen af samme Fremgangsmaade som i det foregaaende Afsnit, den til

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1$$

svarende Del. Leddene heri ville komme til at indeholde de to Exponenter

$$\left(kt - \frac{\pi n}{2} - \lambda_n(a) \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) i.$$

Sættes heri $n = \nu + z$, blive ved Udviklingen efter Potenser af z Koefficienterne til zi

$$G = -\vartheta \pm \varphi,$$

hvor Vinklen ϑ ligger imellem 0 og $\frac{\pi}{2}$, Vinklen φ imellem 0 og π, uden at de naa disse Grænser. Betingelsen $G = 2p\pi$ vil derfor kun kunne tilfredsstilles for $p = 0$ og $\vartheta = \varphi$. Dette forudsat, kan Summen forandres til et Integral af Formen (42), hvorefter man for Rækken K ved Sammenligningen erholder

$$A = \frac{\cos\psi}{2ai}\sqrt{\frac{2}{\pi a \cos\vartheta \sin\vartheta \sin\varphi}} = -i\frac{\cos\psi}{a\sin\varphi\sqrt{2\pi a\cos\varphi}},$$

$$Fa = kt - a\cos\varphi - \frac{\pi}{4}, \quad H = -\frac{a}{2a\cos\varphi}.$$

Det ved (43) bestemte Resultat af Integrationen bliver

$$-\frac{\cos\psi}{a\sin\varphi}e^{(kt-a\cos\varphi)i}.$$

Der er herved, paa Grund af Ligningen $\vartheta = \varphi$, forudsat, at man har $a\sin\varphi < a$ og $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Er dette ikke Tilfældet, bliver Resultatet 0.

Tilsvarende for Rækken S findes

$$i\frac{\sin\psi}{a\sin\varphi}e^{(kt-a\cos\varphi)i}.$$

Ved Indsættelsen af disse to Udtryk for K og S i Ligningerne (17) erholdes, med Bortkastelse af de Led, som ere af lavere Orden end Enheden, den tilsvarende Del af Komposanterne $\bar{\xi}_e$, $\bar{\eta}_e$, $\bar{\zeta}_e$ bestemte ved

$$\bar{\zeta}_e = -\sin\varphi\cos\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i}, \quad \bar{\eta}_e = -\cos\varphi\cos\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i}, \quad \bar{\zeta}_e = \sin\psi\, e^{(kt-a\cos\varphi)i},$$

hvilke Værdier ses at være ligestore med de i Ligningerne (13) givne Udtryk for Komposanterne af det indfaldende Lys med modsat Fortegn. Dette Resultat udsiger saaledes kun, at naar de tilbagekastede og brudte Straaler holdes ude af Betragtning, og Kuglen altsaa betragtes som fuldkommen sort og uigjennemsigtig, saa vil der være fuldstændig Mørke bag ved den belyste Kugle uden for Hovedaxen indtil en vis Afstand fra denne. At det ogsaa er Tilfældet i Hovedaxen er vist i det foregaaende Afsnit.

Vi udtage dernæst det Led af de to første Ligninger (69), som svarer til

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i}.$$

Disse Værdier indsatte i Rækkerne K og S ville give Led med de to Exponenter

$$\left(kt-\frac{n\pi}{2}-\lambda_n(a)+2\lambda_n(a)\pm\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right)i,$$

hvor, ved Udviklingen efter Potenser af z, Koefficienten til zi bliver

$$G = -\pi-\vartheta+2\theta\pm\varphi.$$

Da man maa have $\theta \geqq \vartheta$, svarende til $a \geqq a$, kan Betingelsen $G = 2p\pi$ kun tilfredsstilles for $p = 0$ og naar øverste Fortegn læses. Altsaa er

$$G = -\pi-\vartheta+2\theta+\varphi = 0.$$

For Summen K erholdes dernæst ved Sammenligning med Integralet (42) Koefficienterne

$$A = -i\frac{\cos\psi\, b_\nu}{a\sqrt{2\pi a\cos\vartheta\sin\theta\sin\varphi}}, \quad Fa = kt-a\cos\vartheta+2a\cos\theta+\frac{\pi}{4},$$

$$H = \frac{-\operatorname{tg}\vartheta+2\operatorname{tg}\theta}{2\sin\theta},$$

hvorefter den ved (43) bestemte Værdi af Integralet bliver

$$K = \frac{\cos\psi b_\nu}{a\sqrt{\cos\vartheta \sin\varphi\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}\,.$$

Tilsvarende findes

$$S = \frac{-i\sin\psi c_\nu}{a\sqrt{\cos\vartheta \sin\varphi\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}\,.$$

Idet disse Værdier skulle indsættes i Ligningerne (17) til Bestemmelsen af Svingningskomposanterne, kunne først følgende, mere almindelig gjældende, Bemærkninger gjøres. Naar Rækkerne (79) for K og S ere forandrede til Integraler, vil ved Differentioner med Hensyn til a og φ, naar alle Størrelser af lavere Orden bortkastes, kun Potensexponenterne komme i Betragtning. Disse ere betegnede ved Fai og man har

$$\frac{dFa}{d\nu} = G = 2p\pi\,.$$

Da ethvert Multiplum af $2\pi i$ kan tænkes udskudt af Exponenten, vil man, naar man i Stedet for ν vælger θ som uafhængig Variabel, altsaa have $\frac{dFa}{d\theta} = 0$, hvoraf atter følger, naar tillige a er variabel,

$$\frac{dFa}{da} = -\cos\vartheta\,.$$

Endvidere maa φ indgaa saaledes i Fa, at man faar

$$\frac{dFa}{d\varphi} = \pm(\nu + \tfrac{1}{2}) = \pm a\sin\vartheta\,,$$

Fortegnet svarende til det Fortegn, hvormed φ indgaar i Fa.

Man vil saaledes erholde almindelig

$$\bar{\xi}_e = \sin^2\vartheta\, aK\,, \quad \bar{\eta}_e = \pm\sin\vartheta\cos\vartheta\, aK\,, \quad \bar{\zeta}_e = \mp i\sin\vartheta\, aS\,. \tag{80}$$

Dette anvendt paa det ovenfor beregnede Tilfælde giver

$$\bar{\xi}_e\cos\vartheta - \bar{\eta}_e\sin\vartheta = 0\,,$$

$$\bar{\xi}_e\sin\vartheta + \bar{\eta}_e\cos\vartheta = \frac{\cos\psi b_\nu \sin\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta\sin\varphi\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}\,,$$

$$\bar{\zeta}_e = -\frac{\sin\psi c_\nu \sin\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta\sin\varphi\,(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)}}\, e^{(kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta)i}\,.$$

Denne Del af Lysbevægelsen svarer til Bevægelsen i de fra Kuglens forreste Flade tilbagekastede Lysstraaler, og de samme Resultater kunne let udledes ad elementær Vej. Idet θ er Indfaldsvinklen, ϑ den spidse Vinkel, som den tilbagekastede Straale danner med Radiusvektor, vil Loven for Tilbagekastningen give $-\pi - \vartheta + 2\theta + \varphi = 0$. Den tilbagekastede Lysstraale har et indbildt Brændpunkt i Afstanden $\frac{a}{2}\cos\theta$ (Afstanden maalt med

$\frac{\lambda}{2\pi}$ som Længdeenhed) fra det reflekterende Fladeelement. Det betragtede Punkts Afstand fra dette Element er $a\cos\vartheta - a\cos\theta$, og dets Afstand fra Brændpunktet $a\cos\vartheta - \frac{1}{2}a\cos\theta$.

Ligger det betragtede Punkt i selve Kuglens Overflade, har man $\vartheta = \theta = \pi - \varphi$, og med det valgte Axesystem ere her Komposanterne af det indfaldende Lys

$$\overline{\xi_0} = \sin\varphi\cos\psi C, \quad \overline{\eta_0} = \cos\varphi\cos\psi C, \quad \overline{\zeta_0} = -\sin\psi C, \quad C = e^{(kt+\alpha\cos\theta)i}.$$

I Indfaldsplanen er altsaa Svingningsudslaget

$$\overline{\eta_0}\cos\theta - \overline{\xi_0}\sin\theta = -\cos\psi C,$$

som ifølge Fresnels Love ved Tilbagekastningen forandres til

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta-\theta')}{\operatorname{tg}(\theta+\theta')}\cos\psi C = b_\nu\cos\psi C,$$

medens det paa Indfaldsplanen vinkelrette Svingningsudslag efter Tilbagekastningen bliver

$$\frac{\sin(\theta-\theta')}{\sin(\theta+\theta')}\sin\psi C = -c_\nu\sin\psi C.$$

I den tilbagekastede Lysstraale maa dernæst Intensiteten aftage i samme Forhold som Lyset udbreder sig over et større Fladeelement og Amplituden altsaa i Forhold til Kvadratroden af dette Fladeelement.

Dette Fladeelement er i det betragtede Punkt bestemt ved

$$\left(a\cos\vartheta - \frac{a}{2}\cos\theta\right) 2\,d\theta\,.\,a\sin\varphi\,d\psi,$$

som for $a = \alpha$, hvortil svarer $\vartheta = \theta = \pi - \varphi$, gaar over til

$$\alpha\cos\theta\,d\theta\,.\,\alpha\sin\theta\,d\psi.$$

Forholdet imellem disse to Elementer er

$$\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{(2a\cos\vartheta - a\cos\theta)a\sin\varphi} = \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta\sin\varphi(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta)},$$

idet a og α elimineres ved Ligningen $a\sin\vartheta = \alpha\sin\theta$.

Det vil ses, at man saaledes kommer nøjagtig til det samme Resultat, som ovenfor blev fundet.

Indsættes endelig det almindelige Led af de to første Rækker (69), nemlig

$$k_n = b_{n,m}e^{2(\lambda_n(\alpha)-(m+1)\lambda_n(\alpha'))i}, \quad s_n = c_{n,m}e^{2(\lambda_n(\alpha)-(m+1)\lambda_n(\alpha'))i},$$

i Rækkerne (79) for K og S, ville Leddene indeholde Exponenterne

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(\alpha) - (2m+2)\lambda_n(\alpha') \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)i.$$

Ved Udviklingen heraf efter Potenser af z, vil Koefficienten til zi blive

$$G = m\pi - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' \pm \varphi.$$

Heri er $m\pi + 2\theta - (2m+2)\theta' = \Delta_m$ den Vinkel, som den indfaldende Straale er omdrejet efter m indre Tilbagekastninger (S. 31), saa at Ligningen ogsaa kan skrives $G = \Delta_m - \vartheta \pm \varphi$. Det ses heraf, at Betingelsen $G = 2p\pi$ er opfyldt, naar Indfaldsvinklen θ er valgt saaledes, at Straalen efter m indre Tilbagekastninger træffer det betragtede Punkt, og at øverste Fortegn maa læses, naar dette Punkt og den indfaldende Straale ligge paa samme Side af Hovedaxen, nederste Fortegn derimod, naar de ligge paa modsatte Sider af Hovedaxen.

For Summen K erholdes dernæst ved Sammenligning med Integralet (42) Koefficienten

$$A = \pm i \frac{2\cos\psi\, b_{\nu,m}}{a\sqrt{2\pi a\cos\vartheta\sin\theta\sin\varphi}},$$

for Summen S Koefficienten

$$A = \pm \frac{2\sin\psi\, c_{\nu,m}}{a\sqrt{2\pi a\cos\vartheta\sin\theta\sin\varphi}},$$

og for begge Summerne Koefficienterne

$$Fa = kt - a\cos\vartheta + 2a\cos\theta - (2m+2)a'\cos\theta' + (p - \tfrac{1}{2}m \mp \tfrac{1}{4})\pi,$$

$$H = \frac{1}{2\sin\theta}(-\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{tg}\theta - (2m+2)\operatorname{tg}\theta'),$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}(-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta').$$

Resultatet er givet i Formlen (43) og i Tilfælde af, at man har $H = 0$, ved Formlen (49). I det første Tilfælde vil Udslaget, hvis Komposanter ere bestemte ved Ligningerne (80), blive af samme Orden som Enheden, i det andet Tilfælde ($H = 0$), som repræsenterer alle Brændfladerne, vil Udslaget blive af Ordenen $a^{\frac{1}{6}}$, Intensiteten af Ordenen $a^{\frac{1}{3}}$. Da alle Størrelser, som ere af lavere Orden end Enheden overalt i denne Regning bortkastes, vil man altsaa her kun have at medtage det første Led af Formlen (49).

Hvorledes Lysbevægelsen i Nærheden af Brændfladerne er beskaffen fremgaar af de til Formlen (49) knyttede Beregninger og efterfølgende Diskussion. Det ses heraf, at naar H nærmer sig til 0, hvilket sker derved, at vi nærme os Brændfladen fra den Side, hvor de retliniede brudte og m Gange tilbagekastede Lysstraaler kunne naa hen ($G = 2p\pi$), saa vil Svingningsamplituden voxe gjennem en periodisk Bevægelse fra at være af Ordenen a^0 til Ordenen $a^{\frac{1}{6}}$. Det sidste og største Maximum naas, forinden vi naa til selve Brændfladen, hvorefter Amplituden aftager til den ved Formlen (50) bestemte Størrelse, svarende til selve Brændfladen ($H = 0$, $G = 2p\pi$). Derefter aftager Amplituden hurtig til 0. I Maximalpunktet nærmest Brændfladen er Amplituden 1,504, Intensiteten 2,262 Gange større end i Brændfladen.

Da Bestemmelsen af Lysintensiteten i og i Nærheden af Brændfladen har særlig Interesse, navnlig af Hensyn til Regnbuens Theori, skal jeg lægge Formlerne herfor nærmere tilrette for den numeriske Beregning.

Lysintensiteten af de m Gange fra Kuglens Inderflade tilbagekastede Straaler være i det ved φ, ψ, a bestemte Punkt betegnet ved $I_m(\varphi)$. Amplituden bestemmes ved Ligningerne (80), hvorefter Intensiteten, Amplitudens Kvadrat, findes udtrykt ved

$$I_m(\varphi) = a^2 \sin^2\vartheta \text{ Ampl. } (K^2 + S^2).$$

Ifølge den almindelige Formel (49), hvoraf kun det første Led medtages, er

$$\text{Ampl. } K^2 = \frac{4\,a^{\frac{4}{3}}}{9\,I^{\frac{2}{3}}}\,Q^2A^2\,, \quad \text{hvor } A^2 = \frac{2\cos^2\psi\, b^2{}_{\nu,m}}{a^2\alpha\pi\cos\vartheta\sin\theta\sin\varphi}\,,$$

$$\text{Ampl. } S^2 = \frac{4\,a^{\frac{4}{3}}}{9\,I^{\frac{2}{3}}}\,Q^2A^2\,, \quad \text{hvor } A^2 = \frac{2\sin^2\psi\, c^2{}_{\nu,m}}{a^2\alpha\pi\cos\vartheta\sin\theta\sin\varphi}\,.$$

Er det indfaldende Lys upolariseret, hvad vi i det følgende ville forudsætte, erholdes Intensiteten som den til alle Værdier af ψ fra 0 til 2π svarende Middelværdi. Der sættes derfor

$$\cos^2\psi\, b^2{}_{\nu,m} + \sin^2\psi\, c^2{}_{\nu,m} = \tfrac{1}{2}(b^2{}_{\nu,m} + c^2{}_{\nu,m})\,,$$

hvorefter vi med den ovenfor angivne Værdi af I erholde

$$I_m(\varphi) = \frac{4\,a^{\frac{1}{3}}Q^2\sin^2\vartheta}{9\pi\sin\varphi\cos\vartheta\sin\theta}\left(\frac{6\sin^2\theta}{-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta'}\right)^{\frac{2}{3}}(b^2{}_{\nu,m} + c^2{}_{\nu,m})\,.$$

Indføres to nye Betegnelser p og p' ved

$$\operatorname{tg}\theta = p\operatorname{tg}\theta'\,, \quad N^2p' = p\,,$$

erholdes

$$b_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta'\frac{(N\cos\theta - \cos\theta')^m}{(N\cos\theta + \cos\theta')^{m+2}} = 2p'\frac{(1-p')^m}{(1+p')^{m+2}}\,,$$

$$c_{\nu,m} = 2N\cos\theta\cos\theta'\frac{(\cos\theta - N\cos\theta')^m}{(\cos\theta + N\cos\theta')^{m+2}} = 2p\frac{(1-p)^m}{(1+p)^{m+2}}\,.$$

Tillige ere Vinklerne θ, θ' og ϑ bestemte ved

$$\sin\theta = N\sin\theta' = \sqrt{\frac{p^2-N^2}{p^2-1}}\,, \quad \operatorname{tg}\vartheta = 2(p-m-1)\operatorname{tg}\theta'\,,$$

ligesom man ogsaa har

$$a\sin\vartheta = a\sin\theta\,, \quad a\lambda = 2\pi R\,, \quad a\lambda = 2\pi r\,,$$

idet R er Kuglens Radius, r Punktets Afstand fra Centret, begge maalte ligesom λ med en vilkaarlig Længdeenhed, samt (se Side 17)

$$Q = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}W.$$

Ved disse Substitutioner kan Intensitetsformlen gives Formen

$$I_m(\varphi) = \frac{W^2}{\sin\varphi}\,C_m\,, \qquad \text{(a)}$$

hvor C_m er uafhængig af φ og bestemt ved

$$C_m = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{48p^2(N^2-1)}{\cos\vartheta(p^2-1)} \left(\frac{R(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{6\lambda(p^2-1)^{\frac{1}{2}}(p^3-4(p-m-1)^3-m-1)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(p'^2 \frac{(1-p')^{2m}}{(1+p')^{2m+4}} + p^2 \frac{(1-p)^{2m}}{(1+p)^{2m+4}} \right), \quad \text{(b)}$$

$$\cos\vartheta = \frac{p\sqrt{N^2-1}}{\sqrt{p^2(N^2-1)+4(p-m-1)^2(p^2-N^2)}}.$$

Den i Formlen (a) indgaaende Størrelse W er bestemt ved

$$W = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(\omega^3 - m'\omega)\,d\omega,$$

hvor m' er afhængig af φ paa følgende Maade. Man antage φ_0 at være den Værdi af φ, som svarer til Brændfladen og altsaa er bestemt ved

$$G = m\pi - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' \pm \varphi_0 = 2p_1\pi,$$

hvor p_1 er et helt Tal. Fortegnet for φ_0, som ligger imellem 0 og π, bliver bestemt ved selve Ligningen.

Sættes nu $\varphi = \varphi_0 \mp \delta$, erholdes $G - 2p_1\pi = -\delta$, men ifølge (46) er

$$G - 2p_1\pi = -\varepsilon\left(\frac{I}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ hvor } \varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} m'.$$

Saaledes erholdes, naar tillige den givne Værdi af I indføres,

$$\delta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} m' \left(\frac{-\operatorname{tg}^3\vartheta + 2\operatorname{tg}^3\theta - (2m+2)\operatorname{tg}^3\theta'}{6a^2\sin^2\theta} \right)^{\frac{1}{3}},$$

og med de ovenfor benyttede Substitutioner

$$\delta = m' \left(\frac{\lambda^2(p^2-1)(p^3-4(p-m-1)^3-m-1)(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{48R^2p^3(N^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad \text{(c)}$$

I Tilfælde af, at a kan betragtes som uendelig stor (Regnbuen), har man $\vartheta = 0$, $p = m+1$, hvorved Formlerne (b) og (c) reduceres til

$$C_m = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{48p^2(N^2-1)}{p^2-1} \left(\frac{R(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{6\lambda p^2(p^2-1)^{\frac{5}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(p'^2 \frac{(1-p')^{2m}}{(1+p')^{2m+4}} + p^2 \frac{(1-p)^{2m}}{(1+p)^{2m+4}} \right), \quad \text{(b')}$$

$$\delta = m' \left(\frac{\lambda^2(p^2-1)^2(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{48R^2p^2(N^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad \text{(c')}$$

Ligningen $W = 0$, som svarer til $I_m(\varphi) = 0$, giver, som omtalt Side 17, en Række Værdier af m', hvoraf den q-de for tilstrækkelig store Værdier af q er bestemt ved $m' = 3(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$. Hertil vil svare

$$\delta = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{(p^2-1)^2(p^2-N^2)^{\frac{1}{2}}}{p^2(N^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\lambda}{R}(4q-1) \right)^{\frac{2}{3}},$$

under hvilken Form Resultatet, udledet ad elementær Vej, nylig er fremstillet af M. Boitel[1]),

[1]) Journ. de phys. S. II, t. 8, p. 282. 1889.

dog med den Forskjel, at paa Ligningens venstre Side træder hos Boitel $\operatorname{tg}\delta$ i Stedet for δ. Ved Beregningen af nogle Forsøg med en Glasstang har derimod Mascart[1]) benyttet Formlen $\delta = A(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$ og fundet selv for temmelig store Værdier af $\delta(9°)$ en god Overensstemmelse imellem Forsøg og Beregning.

Intensiteten i selve Brændfladen ($m' = 0$) er bestemt ved

$$I_m(\varphi_0) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^2}{12}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{C_m}{\sin\varphi_0},$$

hvoraf atter den egentlige Maximalintensitet, som svarer til $m' = 1{,}0845$, med tilstrækkelig Tilnærmelse (idet den til denne Værdi af m' svarende Værdi af φ i Reglen bliver meget lidt forskjellig fra φ_0) kan findes ved Multiplikation med 2,262. Paa denne Maade har jeg beregnet Maximalintensiteten i et Par Exempler.

Man antage $R = 10^{mm}$, $N = 1{,}5$, $\lambda = 0{,}0005^{mm}$, $m = 1$. For et ydre Punkt umiddelbart ved Kuglens Overflade er $r = R$, $\vartheta = \theta$, $\operatorname{tg}\theta = 4\operatorname{tg}\theta'$, altsaa $p = 4$, $p' = \frac{16}{9}$. Idet C_m bestemmes ved Formlen (b), findes med disse Talværdier Maximalintensiteten lig 4,5423. Da denne Intensitet er proportional med $R^{\frac{1}{3}}$, ses heraf, at selv for meget, indtil næsten 100 Gange, mindre Kugler vil Intensiteten blive større end 1. I en Afstand af en halv Radius fra Kuglens Overflade er $r = 1{,}5R$, $\vartheta = \theta'$, $p = \frac{5}{2}$, $p' = \frac{10}{9}$, hvortil svarer Maximalintensiteten 0,9423.

Af disse Resultater fremgaar det, at der i saa godt som alle praktisk forefaldende Tilfælde af gjennemsigtige Kugler vil kunne findes Steder udenfor Kuglen, som blive belyste lige saa stærkt af det direkte indfaldende Lys, som fra den anden Side af det en Gang fra Kuglens indre Flade tilbagekastede Lys, hvor dette er stærkest. Da saadanne Steder vistnok let ville kunne opsøges experimentalt og ved de meddelte Formler ligeledes ville kunne bestemmes theoretisk, vil der herved være givet et godt Middel til at kontrollere Overensstemmelsen mellem Forsøg og Beregning.

Som et andet Exempel vil jeg vælge en kugleformig Vanddraabe med Brydningsforholdet $\frac{4}{3}$. For $m = 1$ og a uendelig stor findes her

$$\text{Maximalintensiteten} = 0{,}06728\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Tages til Sammenligning en anden ligesaa stor Kugle med fuldstændig Tilbagekastning, vil i samme Afstand Intensiteten af det fra den forreste Flade tilbagekastede Lys være $\frac{R^2}{4r^2}$. Disse to Intensiteter ville altsaa være lige store, naar man har $R = 51{,}30\lambda$, som for $\lambda = 0{,}000585^{mm}$ giver $R = 0{,}03^{mm}$. Ved en Regndraabe med en 8 Gange saa

[1]) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 106, p. 1575. 1888.

stor Radius vilde Maximalintensiteten af det fra den indre Flade en Gang tilbagekastede Lys være dobbelt saa stor som den Intensitet, man vilde erholde, naar der i Stedet for Regndraaben sattes en ligesaa stor totalreflekterende Kugle.

I Stedet for en enkelt Kugle ville vi nu tænke os en Samling af lige store adskilte Kugler, alle lige stærkt belyste af de parallele indfaldende, upolariserede Lysstraaler, hvis Intensitet vi sætte lig 1. Kuglerne antages at ligge saa tæt eller i et Lag af saa stor Udstrækning, at Synslinierne fra den fjernt stillede Iagttager overalt træffer en af Kuglerne. Den hele Mængde af Kugler, der ligger inden for en Kegle, hvis Spids er i Iagttagerens Øje og som omfatter Enheden af Rumvinkel, vil da udsende Lys, hvis Intensitet i Keglens Spids er $\frac{r^2}{R^2\pi}$ Gange større end den Intensitet, som skyldes den enkelte Kugle. Idet vi kalde Intensiteten af det Lys, som indenfor Enhed af Rumvinkel træffer Iagttagerens Øje, den tilsyneladende Klarhed, ville vi altsaa for en saadan Samling kugleformige Regndraaber med Brydningsforholdet $\frac{4}{3}$ have

$$\text{Max. af tilsyneladende Klarhed} = 0{,}06728\frac{1}{\pi}\left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

For en lignende Samling af totalreflekterende Kugler vilde man, uafhængig af Kuglernes Størrelse, erholde den tilsyneladende Klarhed $\frac{1}{4\pi}$. Ved Sammenligningen maa det imidlertid her bemærkes, at alt det Lys, som ved en enkelt Tilbagekastning gaar ind imod Systemet, ved nye Tilbagekastninger føres tilbage igjen, hvorfor den tilsyneladende Klarhed her rettest bør fordobles eller sættes lig $\frac{1}{2\pi}$. Dette forudsat, ville de to Systemer ved enkeltfarvet Lys eller betragtede gjennem et ensfarvet Glas ses med den samme tilsyneladende Klarhed, naar Regndraabernes Radius er 8 Gange saa stor, som ovenfor beregnet, altsaa naar den er 0,24^{mm}.

Lysfænomenerne ved den her betragtede Samling af Regndraaber svare til de fuldt udviklede Regnbuer. Beregningen af disses og de surnumeræ re Regnbuers tilsyneladende Klarhed vil nu for de enkelte Spektralfarver kunne udføres ved de meddelte Formler (a), (b′), (c′) i Forbindelse med en Tavle over Integralet W. Her skal sluttelig kun som et Exempel, der tillader en Kontrol ved Iagttagelserne, anføres, at den anden, efter to indre Tilbagekastninger fremkomne, Regnbue efter Beregning har en 7,864 Gange mindre tilsyneladende Klarhed end den første Regnbue, selvfølgelig forudsat, at de ere dannede under samme Betingelser.

Lysbevægelsen i en Kugles Indre bliver at bestemme ved Hjælp af Rækkerne for K' og S' (79), idet heri sættes

$$k'_n = \beta_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha)-(2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}, \quad s'_n = \gamma_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha)-(2m+1)\lambda_n(\alpha'))i}.$$

Der vil i Leddene fremkomme de fire Exponenter

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} + (\pm)\lambda_n(a') + \lambda_n(a) - (2m+1)\lambda_n(a') \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) i\,,$$

som ved Udviklingen efter Potenser give som Koefficient til zi

$$G = (2m-1)\frac{\pi}{2} + (\pm)\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right) + \theta - (2m+1)\theta' \pm \varphi\,.$$

Heri er $m\pi + \theta - (2m+1)\theta' = \Delta'_m$ den Vinkel, som den indfaldende Straale er omdrejet efter m indre Tilbagekastninger. Betingelsen $G = 2p\pi$ giver den nærmere Bestemmelse af de to dobbelte Fortegn, og det vil ses, at ligesom for et ydre Punkt svarer øverste Fortegn for φ til det Tilfælde, at det betragtede Punkt og den indfaldende Straale ligge paa samme Side af Hovedaxen, samt at ϑ' og φ have samme Fortegn, naar den Straale, som træffer det betragtede Punkt, skjærer Hovedaxens positive Side, men modsat Fortegn, naar Skjæringen falder paa Hovedaxens negative Side.

Ved Sammenligningen med Integralet (42) erholdes dernæst for Rækkerne K' og S' henholdsvis Koefficienterne

$$A = \mp(\pm)\frac{i\cos\psi}{a'\sqrt{2\pi a}\cos\vartheta'\sin\theta\sin\varphi} \quad \text{og} \quad A = \mp(\pm)\frac{\sin\psi}{a'\sqrt{2\pi a}\cos\vartheta'\sin\theta\sin\varphi}\,,$$

samt for begge Rækker

$$Fa = kt + (\pm)\left(a'\cos\vartheta' + \frac{\pi}{4}\right) + a\cos\theta - (2m+1)a'\cos\theta' + \left(p - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4}\right)\pi\,,$$

$$H = \frac{1}{2\sin\theta}\left((\pm)\operatorname{tg}\vartheta' + \operatorname{tg}\theta - (2m+1)\operatorname{tg}\theta'\right),$$

$$I = \frac{1}{6\sin^2\theta}\left((\pm)\operatorname{tg}^3\vartheta' + \operatorname{tg}^3\theta - (2m+1)\operatorname{tg}^3\theta'\right).$$

Til Bestemmelse af Svingningskomposanterne $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\zeta}'$ tjene de med (80) analoge Ligninger

$$\bar{\xi}' = \sin^2\vartheta' a' K'\,, \quad \bar{\eta}' = \mp(\pm)\sin\vartheta'\cos\vartheta' a' K'\,, \quad \bar{\zeta}' = \mp i a'\sin\vartheta' S'\,. \tag{81}$$

Lysbevægelsen er saaledes bestemt overalt, for saa vidt det er tilstrækkeligt at udføre Summationerne med Hensyn til n uden at overskride Grænsen $n = n_2$, hvorved er forudsat, at Formlerne (67) og (68) for q_n og λ_n, der atter bestemme Funktionerne v_n og w_n, ere brugbare. Naar denne Grænse for n maa overskrides, bliver det nødvendigt at søge andre Udviklinger for disse Funktioner, hvad jeg i det følgende Afsnit skal gaa over til.

Endnu skal kun bemærkes, at naar ϑ' naaer Grænsen $\frac{\pi}{2}$ i isolerede indre Punkter, saa lader Bevægelsen sig ogsaa her beregne ved de givne Formler, hvorfor Beviset kan føres paa samme Maade som i det tilsvarende tidligere (Side 32) behandlede Tilfælde, da Punktet var beliggende i Hovedaxen.

6. Fortsættelse. Fuldstændig Tilbagekastning, Bøjning.

Funktionerne v_n og w_n kunne ogsaa bestemmes paa en anden Maade end den, som tidligere (Side 22) har været benyttet, ved en iøvrigt ganske tilsvarende Udvikling. Man har identisk

$$v_n = \sqrt{v_n w_n}\, e^{\frac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n}}, \quad w_n = \sqrt{v_n w_n}\, e^{-\frac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n}}.$$

Sættes

$$v_n w_n = r_n, \quad \frac{1}{2}\log\frac{v_n}{w_n} = \mu_n,$$

vil man altsaa have

$$v_n = \sqrt{r_n}\, e^{\mu_n}, \quad w_n = \sqrt{r_n}\, e^{-\mu_n}. \tag{82}$$

Med Benyttelse af Ligningen $w_n v_n' - w_n v_n = 1$ vil man endvidere, naar den Variable betegnes ved a, erholde

$$\frac{d\mu_n}{da} = \frac{1}{2r_n}, \tag{83}$$

hvoraf ved Integration og med Indførelse af den til $a = 0$ svarende Værdi af μ_n

$$\mu_n = \frac{1}{2}\log\frac{a^{2n+1}}{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)} + \int_0^a da\left(\frac{1}{2r_n} - \frac{2n+1}{2a}\right). \tag{84}$$

Endvidere give Rækkerne (22) og (24) for v_n og w_n ved Multiplikation

$$2r_n = \frac{2a}{2n+1} + \frac{(2a)^3}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(2a)^5}{(2n-3)(2n-1)\ldots(2n+5)}\cdot\frac{1.3}{2.4} + \ldots. \tag{85}$$

Rigtigheden af den her antydede Lov for Rækken kunde ogsaa vises ved Dannelsen af Differentialligningen for r_n. Man kunde, idet u_n antages at tilfredsstille Differentialligningen (21), mere almindelig sætte

$$u_n = \sqrt{p_n}\, e^{c\int\frac{da}{p_n}}, \tag{86}$$

som indsat i (21) fører til Ligningen

$$p_n\frac{d^2p_n}{da^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dp_n}{da}\right)^2 + \left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2}\right)2p_n^2 + 2c^2 = 0, \tag{87}$$

hvoraf atter ved Differentiation fremgaar den lineære Ligning

$$\frac{d^3p_n}{da^3} + 4\left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2}\right)\frac{dp_n}{da} + \frac{4n(n+1)}{a^3}p_n = 0. \tag{88}$$

Ligningen (86) svarer til Ligningerne (82) for $p_n = r_n$ og $c = \pm\frac{1}{2}$, ligesom den svarer til Ligningerne (63) for $p_n = q_n$ og $c = \pm i$. Altsaa maa den sidste Ligning (88) tilfredsstilles saavel for $p_n = q_n$ som for $p_n = r_n$, og det vil da ikke være vanskeligt ved Hjælp af denne Ligning at kontrollere Rigtigheden af Lovene i de for q_n og r_n angivne Rækker.

Saavel n som a betragtes som store Tal, begge af Størrelsesordenen a. Naar vi endvidere ligesom tidligere ved Summationen af Rækken for q_n lade alle Størrelser af lavere Orden end Enheden ude af Betragtning, saa vil under visse Betingelser Rækken (85) kunne summeres ved

$$2r_n = \frac{a}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a^2}} . \tag{89}$$

Betingelsen maa bestaa i, at a ikke overskrider en vis Grænse, men ved nærmere Betragtning af Rækken vil man snart blive opmærksom paa, at Bestemmelsen af denne Grænse frembyder visse Vanskeligheder. Rækkernes Led ville nemlig for $a < n$ først aftage, naa et Minimum og derefter voxe, faa vexlende Fortegn og naa et Maximum for sluttelig at aftage til 0. Saaledes har det Led, som gaar forud for det første negative Led, allerede naaet Størrelsen

$$\frac{(2a)^{2n+1}}{1.3\ldots 4n+1} \cdot \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n} ,$$

som for $ea > 2n+1$, f. Ex. $a = 0{,}75n$, med voxende n voxer i det uendelige.

Det vil derfor være nødvendigt at bringe Rækken for r_n under en anden Form. Ved Hjælp af Ligningen

$$\frac{1.2.3\ldots 2m}{(2n-2m+1)(2n-2m+3)\ldots(2n+2m+1)} = (-1)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \sin^{2m}x ,$$

kan Rækken (85) gives Formen

$$2r_n = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \left(1 - \frac{a^2}{1^2}\sin^2 x + \frac{a^4}{1^2.2^2}\sin^4 x - \ldots\right) ,$$

og med Benyttelse af den Besselske Funktion J_0

$$2r_n = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x J_0(2a\sin x) . \tag{90}$$

Vi udføre denne Integration først fra $x = 0$ til $x = h$, idet h antages saa lille, at man uden kjendelig Fejl kan sætte x for $\sin x$, saalænge x er mindre end h. Denne Del af Integralet vil saaledes ved Indførelsen af en ny Variabel $y = (2n+1)x$ blive

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{(2n+1)h} dy \sin y J_0\left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{a}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{(2n+1)h} dy \sin y \left(1 - \left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^2} + \left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)^4 \frac{1}{2^2.4^2} - \ldots\right). \tag{91}$$

Dette Integrals øvre Grænse vil kunne betragtes ganske som den Art af ubestemte, vilkaarlige Størrelser, vi have betegnet ved Fællesmærket ω, og Integrationen vil derfor kunne udføres ved Formlen (39). Resultatet bliver Rækken

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)^5 \frac{1.3}{2.4} + \ldots = \frac{a}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a^2}} ,$$

hvor Konvergensbetingelsen alene er $a < n + \frac{1}{2}$.

I den anden Del af Integralet (90) kan den Besselske Funktion udvikles efter aftagende Potenser af a i den bekjendte semikonvergente Række

$$J_0(2a\sin x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \sin x}}\cos\left(2a\sin x - \frac{\pi}{4}\right) + \dots,$$

hvor Leddenes Størrelsesorden er $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{3}{2}}$, ...

Denne Del af Integralet vil saaledes med Udeladelse af de følgende Led af Rækken for J_0 blive

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin y \cos\left(2a\sin\frac{y}{2n+1} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi a \sin\frac{y}{2n+1}}} =$$

$$\sqrt{\frac{a}{(2n+1)\pi}}\int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin\left(\left(1+\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y - \frac{ay^3}{24(n+\frac{1}{2})^3} + \dots - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y + \frac{ay^3}{24(n+\frac{1}{2})^3} - \dots + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y - \frac{y^3}{24(n+\frac{1}{2})^2} + \dots}}. \quad (92)$$

Det ses heraf, at saalænge Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ er af Ordenen a, saa vil denne Del af Integralet blive af lavere Orden end Enheden, og da Ligningen (89) forudsætter, at disse Størrelser lades ude af Betragtning, saa vil altsaa denne sidste Ligning forblive gyldig, naar blot Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ er positiv og af Størrelsesordenen a. Denne Betingelse svarer saaledes, med Ombytning af a og $n+\frac{1}{2}$, ganske til den for q_n Ligning (67) gjældende.

Sættes i Ligning (84), idet n forudsættes meget stor,

$$1^2.3^2\dots(2n-1)^2(2n+1) = 2(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)},$$

erholdes nu ved Hjælp af (89)

$$\mu_n = -\tfrac{1}{2}\log 2 + (n+\tfrac{1}{2})\log\frac{n+\frac{1}{2}-\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-a^2}}{a} + \sqrt{(n+\tfrac{1}{2})^2-a^2}. \quad (93)$$

Vi ere saaledes i Stand til at bestemme Funktionerne v_n og w_n saavel for $n+\frac{1}{2} > a$ som for $n+\frac{1}{2} < a$, i første Tilfælde ved Hjælp af r_n og μ_n, i andet ved q_n og λ_n. Men der bliver endnu et Gebet tilbage, hvor disse Funktioner ikke ere bestemte ved de fundne Formler, nemlig naar Differensen $n+\frac{1}{2}-a$, hvad enten den er positiv eller negativ, er af en lavere Størrelsesorden end a.

Medens vi hidtil have søgt at summere alle forekommende Rækker med en saadan Nøjagtighed, at kun de Størrelser, som ere af en lavere Orden end Enheden, ere bortkastede, ville vi nu i det følgende indskrænke Nøjagtigheden saavidt, at kun Leddene af højeste Orden medtages. Dette forudsat, vil man, naar $n+\frac{1}{2}-a$ er af en lavere Størrelsesorden end a, ved Bestemmelsen af r_n kunne bortkaste alle Størrelser, som kun ere af samme Orden som Enheden, da r_n selv vil vise sig at være en Størrelse af højere Orden. Naar vi altsaa betragte den valgte Grænse $(2n+1)h$ som en Størrelse af Ordenen a^0,

saa vil hele Integralet (91) kunne bortkastes, idet de to i Integralet indgaaende Funktioner sin og J_0 ikke for nogen Værdi af den Variable kunne blive numerisk større end 1. Endvidere vil den anden Del af Integralet, bestemt ved (92), reduceres til

$$\sqrt{\frac{a}{(2n+1)\pi}}\int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy\,\frac{\sin\left(\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y+\frac{ay^3}{24(n+\frac{1}{2})^3}-\ldots+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y-\frac{y^3}{24(n+\frac{1}{2})^2}+\ldots}}, \tag{94}$$

hvor atter den lavere Grænse kan forandres til 0, da heller ikke her Integrationen fra 0 til $(2n+1)h$ kan føre til et Resultat af højere Orden end Enheden, medens den øvre Grænse for x efter Substitutionen $ay^3 = 24(n+\frac{1}{2})^3 x$ ligesom før kan betegnes ved ω. Man erholder saaledes, naar alle Led, der kun føre til Resultater af lavere Orden, bortkastes,

$$2r_n(a) = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\int_0^{\omega} dx\,x^{-\frac{5}{6}}\sin\left((n+\tfrac{1}{2}-a)\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x+\frac{\pi}{4}\right). \tag{95}$$

Ved Udvikling efter Potenser af $n+\frac{1}{2}-a$ og Integration ved Hjælp af Ligningen (39) vil man heraf erholde

$$2r_n(a) = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\sin\frac{\pi}{3}+\Gamma\left(\frac{3}{6}\right)\sin\frac{3\pi}{3}\cdot(n+\tfrac{1}{2}-a)\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1}+\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\sin\frac{5\pi}{3}\cdot(n+\tfrac{1}{2}-a)^2\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1.2}+\ldots\right]. \tag{96}$$

I denne Række bliver 2det, 5te, 8de, ... Led lig 0.

Sættes for Exempel $a = n+\frac{1}{2}$, erholdes

$$2r_n(n+\tfrac{1}{2}) = c(n+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{3}},\quad c = \frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}08874\,,\quad \operatorname{Log} c = 0{,}0369226\,. \tag{97}$$

Ved at indsætte Rækkerne (23) og (25) for v_n og w_n i $r_n = v_n w_n$ har jeg beregnet nedenstaaende Tavle, som viser en overraskende god Overensstemmelse mellem de virkelige og de ved Formlerne (97) beregnede Værdier af $r_n(n+\frac{1}{2})$ allerede ved de laveste Værdier af n.

$n =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$2r_n(n+\frac{1}{2}) =$	0,8415,	1,2416,	1,4756,	1,6518,	1,7967,	1,9212,	2,0314,
$c(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} =$	0,8641,	1,2463,	1,4776,	1,6530,	1,7975,	1,9218,	2,0319.

Det vil bemærkes, at naar $n+\frac{1}{2}-a$ er af højere Orden end $a^{\frac{1}{3}}$, vil Leddenes Størrelsesorden være voxende. Men med denne Forudsætning vil ogsaa Integralet (94) ved Substitutionen $\left(1-\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y = x$ reduceres til

$$2r_n = \sqrt{\frac{a}{(2n+1-2a)\pi}}\int_0^{\omega}\frac{dx}{\sqrt{x}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2a(n+\frac{1}{2}-a)}}, \tag{98}$$

som viser, at vi nu atter kunne gaa over til den simplere Formel (89) for $2r_n$, idet denne fører til det samme Resultat, naar alene Størrelserne af højeste Orden tages i Betragtning. Med denne Indskrænkning i Nøjagtigheden vedbliver altsaa Formlen (89) at være gjældende saalænge Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ er af en højere Orden end $a^{\frac{1}{3}}$. Naar Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ ikke er af lavere Orden end a, saa er $r_n(a)$ aldrig af højere Orden end Enheden. Er nemlig denne Differens positiv, fremgaar dette af Ligningen (89), er Differensen negativ ses det samme ved i Ligningen $r_n = v_n w_n$ at udtrykke v_n og w_n ved Ligningerne (23) og (25). Hvis derimod Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ bliver af lavere Orden end a, saa kan $r_n(a)$ blive af en højere Orden end Enheden, og denne Funktion vil ved Variation af n sluttelig ifølge (96) naa sin højeste Værdi for $n+\frac{1}{2} = a$.

I Rækken (66) for q_n vil det almindelige Led, naar $n+\frac{1}{2}-a$ er af lavere Orden end a, kunne bestemmes ved

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n+m)}{a^{2m}} \cdot \frac{1\,.\,3\dots 2m-1}{2\,.\,4\dots 2m} = \frac{e^{-2m}(n+\frac{1}{2}+m)^{n+\frac{1}{2}+m}}{\sqrt{\pi m}\, a^{2m}(n+\frac{1}{2}-m)^{n+\frac{1}{2}-m}}.$$

Ved Forandring af Summation til Integration vil man erholde

$$q_n(a) = \int_0^n \frac{dm}{\sqrt{\pi m}} e^{F(m)}, \quad F(m) = -2m + m\log\frac{(n+\frac{1}{2})^2-m^2}{a^2} + (n+\tfrac{1}{2})\log\frac{n+\frac{1}{2}+m}{n+\frac{1}{2}-m},$$

eller ved Udvikling efter Potenser af m

$$F(m) = -2m\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}} - 2\left(\frac{m^3}{(n+\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{1}{2\,.\,3} + \frac{m^5}{(n+\frac{1}{2})^4}\cdot\frac{1}{4\,.\,5} + \dots\right).$$

Sættes dernæst $m^3 = 3(n+\frac{1}{2})^2 x$ vil, med den her udkrævede Nøjagtighed, Integralet kunne reduceres til

$$q_n(a) = \frac{(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx\, x^{-\frac{5}{6}} e^{-(24)^{\frac{1}{3}}(n+\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} - x}.$$

Heri vil ligeledes med tilstrækkelig Nøjagtighed kunne sættes $\log\frac{a}{n+\frac{1}{2}} = \frac{a-n-\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}$, hvorefter Integrationen fører til Resultatet

$$q_n(a) = \frac{(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{6}}\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) + \Gamma\left(\frac{3}{6}\right)(n+\tfrac{1}{2}-a)\left(\frac{24}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1} + \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)(n+\tfrac{1}{2}-a)^2\left(\frac{24}{n+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1\,.\,2} + \dots\right]. \quad (99)$$

Indsættes heri $a = n+\frac{1}{2}$, faas med samme Betydning af c som ovenfor

$$q_n(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}c(n+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{3}}, \quad \mathrm{Log}\frac{2}{\sqrt{3}}c = 0{,}0993920\,. \quad (100)$$

Ogsaa her finder en god Overensstemmelse Sted med de umiddelbart af Rækken (66) beregnede exakte Værdier af $q_n(n+\frac{1}{2})$ allerede ved de laveste Værdier af n, hvad følgende Tavle udviser.

$n =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$q_n(n+\frac{1}{2}) =$	1,0000,	1,4444,	1,7104,	1,9121,	2,0783,	2,2215,	2,3482,
$\frac{2c}{\sqrt{3}}(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} =$	0,9978,	1,4391,	1,7062,	1,9087,	2,0755,	2,2191,	2,3462.

Analog med r_n vil q_n kunne udtrykkes med den begrænsede Nøjagtighed ved Ligning (67), saalænge Differensen $a-(n+\frac{1}{2})$ er af højere Orden end $a^{\frac{1}{3}}$, men modsat r_n har q_n en med voxende n stadig voxende Værdi.

Af de saaledes fundne Værdier for r_n og q_n kunne saavel λ_n og μ_n som v_n og w_n beregnes. Af Ligningerne $2r_n = 2v_nw_n = q_n \sin 2\lambda_n$ findes $\sin 2\lambda_n(n+\frac{1}{2}) = \sin\frac{\pi}{3}$, hvoraf for $\lambda_n(n+\frac{1}{2})$ fremgaar Værdierne $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\ldots$, men bestemmes $\lambda_n(n+\frac{1}{2})$ nærmere af Ligningerne $v_n = \sqrt{q_n}\sin\lambda_n$, $w_n = \sqrt{q_n}\cos\lambda_n$ for $n = 0, 1, 2, 3\ldots$, findes henholdsvis

$$\lambda_n(n+\tfrac{1}{2}) = 0{,}5,\ 0{,}5165,\ 0{,}5203,\ 0{,}5215\ldots.$$

Denne Række konvergerer øjensynlig til den laveste af de ovenfor angivne Værdier, nemlig til

$$\lambda_n(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236\ldots. \tag{101}$$

Heraf findes atter ved Hjælp af Ligningerne $v_n^2 = r_n e^{2\mu_n} = q_n \sin^2\lambda_n$

$$\mu_n(n+\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{4}\log 3. \tag{102}$$

Da man har $\lambda_n'(a) = \frac{1}{q_n(a)}$ og $\mu_n'(a) = \frac{1}{2r_n(a)}$, ville nu Rækkeudviklingerne for $\lambda_n(a)$ og $\mu_n(a)$, idet for Kortheds Skyld $q_n(n+\frac{1}{2})$, $r_n(n+\frac{1}{2})$, $q_n'(n+\frac{1}{2})$, o.s.v. betegnes ved q, r, q', $\ldots$, blive

$$\lambda_n(a) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{q}\frac{a-n-\frac{1}{2}}{1} - \frac{q'}{q^2}\cdot\frac{(a-n-\frac{1}{2})^2}{1\,.\,2} + \ldots, \tag{103}$$

$$\mu_n(a) = -\frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{2r}\frac{a-n-\frac{1}{2}}{1} - \frac{r'}{2r^2}\cdot\frac{(a-n-\frac{1}{2})^2}{1\,.\,2} + \ldots, \tag{104}$$

Heri ville q', r' og de højere Differentialkoefficienter af $q_n(a)$ og $r_n(a)$ med Hensyn til a for $a = n+\frac{1}{2}$ være at beregne af Ligningerne (99) og (96). Saaledes findes $q' = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $r' = \frac{r}{3(n+\frac{1}{2})}$, hvilken sidste Værdi kun er af Ordenen $a^{-\frac{2}{3}}$ og derfor maa betragtes som 0.

Selve Funktionerne v_n og w_n kunne bestemmes af Ligningerne $(v_n \pm w_n)^2 = q_n \pm 2r_n$, idet Fortegnene for v_n og w_n, som her er ubestemt, nærmere bestemmes af $v_n = \sqrt{q_n}\sin\lambda_n$, $w_n = \sqrt{q_n}\cos\lambda_n$, hvor $\sqrt{q_n}$ er positiv. De Rækkeudviklinger, jeg ad denne Vej har fundet ved Hjælp af Rækkeudviklingerne (96) og (99), hvori uden for Differensen $n+\frac{1}{2}-a$ de to Størrelser $n+\frac{1}{2}$ og a kunne betragtes som lige store, ere

$$v_n(a) = C\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6} + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\varepsilon}{1} + \Gamma\left(\frac{3}{3}\right)\cos\frac{9\pi}{6}\cdot\frac{\varepsilon^2}{1.2} + \cdots\right), \tag{105}$$

$$w_n(a) = C\left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right) + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\left(1+\sin\frac{5\pi}{6}\right)\frac{\varepsilon}{1} + \Gamma\left(\frac{3}{3}\right)\left(1+\sin\frac{9\pi}{6}\right)\frac{\varepsilon^2}{1.2} + \cdots\right), \tag{106}$$

hvor

$$C = \left(\frac{a}{6}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{1}{\sqrt{3\pi}}, \quad \varepsilon = \left(\frac{6}{a}\right)^{\frac{1}{3}}(n+\tfrac{1}{2}-a).$$

Disse Rækker kunne ogsaa let føres tilbage til de bestemte Integraler

$$v_n(a) = C\int_0^\omega dx\, x^{-\frac{2}{3}}\cos(\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x), \tag{107}$$

$$w_n(a) = C\left[\int_0^\infty dx\, x^{-\frac{2}{3}}e^{\varepsilon x^{\frac{1}{3}}-x} + \int_0^\omega dx\, x^{-\frac{2}{3}}\sin(\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x)\right]. \tag{108}$$

Ved at indsætte Rækkerne (105) og (106) i $(v_n \pm w_n)^2 = q_n \pm 2r_n$ vil man uden Vanskelighed kunne overbevise sig om Rigtigheden af disse Udviklinger. Til Brug for denne Beregning skal jeg her anføre Ligningerne

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2^{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right).$$

Vi kunne nu gaa over til Fortsættelsen af den i forrige Afsnit afbrudte Beregning og betragte først det Tilfælde, at Kuglen har et mindre Brydningsforhold end det omgivende Medium. Vi forudsætte altsaa $N<1$, hvormed følger, at Ligningen $a\sin\theta = a'\sin\theta'$ bliver umulig for $\sin\theta > N$.

I Ligningerne (33) og (34) sættes nu $v_n(a') = \sqrt{r_n(a')}\,e^{\mu_n(a')}$, medens $v_n(a)$ og $w_n(a)$ ligesom tidligere udtrykkes ved $q_n(a)$ og $\lambda_n(a)$, og ligesom q_n' kan bortkastes i Sammenligning med q_n, saaledes vil ogsaa r_n' kunne bortkastes i Sammenligning med r_n. Idet $q_n(a)$ bestemmes ved (67), $r_n(a')$ ved (89), vil man erholde

$$2k_n = -1 + e^{2\lambda_n(a)i}\frac{q_n - 2r_n(a')Ni}{q_n + 2r_n(a')Ni} = -1 + e^{2\lambda_n(a)i}\frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a'^2} - \sqrt{a^2-(n+\frac{1}{2})^2}N^2 i}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a'^2} + \sqrt{a^2-(n+\frac{1}{2})^2}N^2 i},$$

og sættes

$$\frac{\sqrt{a^2-(n+\frac{1}{2})^2}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-a'^2}}N^2 = \operatorname{tg}\delta,$$

faar dette Udtryk den simplere Form

$$2k_n = -1 + e^{2(\lambda_n(a)-\delta)i}.$$

Paa lignende Maade erholdes

$$2s_n = -1 + e^{2(\lambda_n(a)-\Delta)i}, \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{\sqrt{a^2-(n+\frac{1}{2})^2}}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-a'^2}}.$$

Det Tilfælde, at man alene har $2k_n = -1$, $2s_n = -1$, har allerede været behandlet i det foregaaende Afsnit (Side 34). Det var her almindeligt forudsat, at Funktionerne q_n og λ_n for alle de forekommende Variable skulde kunne udtrykkes ved de i Ligningerne (67) og (68) angivne Formler, men det vil bemærkes, at for dette særlige Tilfældes Vedkommende, hvor k_n og s_n slet ikke indeholde de Variable α og α', have vi kun at gjøre med Funktionerne $q_n(\alpha)$ og $\lambda_n(\alpha)$, og Betingelsen for, at disse skulle kunne udtrykkes ved (67) og (68) er alene $\nu + \frac{1}{2} = a \sin\vartheta < a$. De fundne Resultater gjælde altsaa indtil Afstanden a fra Hovedaxen, og som det vil erindres bestod den paa denne Maade fremstillede Lysbevægelse uden for Kuglen i selve det indfaldende Lys i Rummet paa yz-Planens negative Side og fuldstændig Mørke paa den positive Side af yz-Planen.

Antages dernæst

$$2k_n = e^{2(\lambda_n(\alpha)-\delta)i}, \quad 2s_n = e^{2(\lambda_n(\alpha)-\Delta)i},$$

og sættes heri paa sædvanlig Maade $n = \nu + z$, vil det bemærkes, at Udviklingen efter Potenser af z af $\lambda_{\nu+z}(\alpha)$ give Koefficienter til de forskjellige Potenser af z af en højere Størrelsesorden, end dem som erholdes ved den tilsvarende Udvikling af δ og Δ. Idet vi altsaa sætte $\nu + \frac{1}{2} = a \sin\theta$, ville δ og Δ kunne udtrykkes ved de konstante Værdier

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}} N^2, \quad \operatorname{tg}\Delta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}.$$

Udtrykkene for k_n og s_n svare nu ganske til det tidligere (Side 35) behandlede Tilfælde, hvorved Tilbagekastningen fra Kuglens ydre Overflade bestemtes. Forskjellen bestaar kun i, at Faktorerne b_ν og c_ν ere gaaede over til -1, og at Fasen er formindsket i K med 2δ og i S med 2Δ, og de tidligere fundne Resultater ville altsaa med disse Forandringer her finde Anvendelse.

Grænsetilfældet $\sin\theta = N$ vil ikke danne nogen særlig Undtagelse, da δ og Δ, naar θ aftager indtil denne Grænse gaa over til $\frac{\pi}{2}$, og Faktorerne $e^{-2\delta i}$ og $e^{-2\Delta i}$ saaledes blive lig -1, hvorved K og S komme til at antage de samme Værdier som dem, der vilde fremgaa af de tidligere Formler, naar θ voxede til den samme Grænse.

Koefficienterne k'_n og s'_n ere bestemte ved

$$k'_n = e^{\lambda_n(\alpha)i - \mu_n(\alpha')} \frac{2N\sqrt{q_n(\alpha)\, r_n(\alpha')}}{q_n(\alpha) + 2r_n(\alpha')Ni}, \quad s'_n = e^{\lambda_n(\alpha)i - \mu_n(\alpha')} \frac{2N\sqrt{q_n(\alpha)\, r_n(\alpha')}}{Nq_n(\alpha) + 2r_n(\alpha')i}.$$

Da der tillige for et indre Punkt til $n > \alpha'$ ogsaa maa svare $n > \alpha'$, maa man i Rækkerne for K' og S' (79) sætte $\sqrt{q_n(\alpha')} \sin\lambda_n(\alpha') = \sqrt{r_n(\alpha')}\, e^{\mu_n(\alpha')}$. Det ses saaledes, at disse Rækker ville komme til at indeholde Faktoren $e^{\mu_n(\alpha') - \mu_n(\alpha')}$, som, naar α' og α' ikke ere meget nær lige store, bliver en forsvindende lille Størrelse. Dette fremgaar af det i (93) givne Udtryk for μ_n, som, naar den Variable ikke falder meget nær ved n, ses at være

en meget stor, negativ Størrelse og desto større, jo mindre den Variable er. Lysbevægelsen inden for den totalreflekterende Del af Kuglen finder altsaa kun i kjendelig Grad Sted i et tyndt Lag nærmest under Kuglens Overflade.

Sættes $a' = a' - Nh$ og antages h meget lille, vil man have

$$\mu_n(a') - \mu_n(a') = \frac{Nh}{2r_n(a')} = \frac{h}{a}\sqrt{(n+\tfrac{1}{2})^2 - a'^2}\,.$$

Man vil dernæst paa sædvanlig Maade finde

$$K' = \frac{2N\cos\psi}{a\sqrt{1-N^2}\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{\sin^2\theta - N^2\cos^2\theta}}\, e^{\left(kt+a\cos\theta+\frac{\pi}{2}-\delta\right)i - h\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}\,,$$

$$S' = -i\frac{2\sin\psi}{a\sqrt{1-N^2}\,\mathrm{tg}\,\theta}\, e^{\left(kt+a\cos\theta+\frac{\pi}{2}-\Delta\right)i - h\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}\,,$$

og $\varphi + \theta = \pi$. Ved Bestemmelsen af Komposanterne $\overline{\xi'}$, $\overline{\eta'}$, $\overline{\zeta'}$ maa man gaa tilbage til Ligningerne (18), hvorved bemærkes, at, da K' og S' oprindelig indeholde Faktoren $e^{\mu_n(a')}$, vil man med Bortkastelse af Størrelser af lavere Orden have

$$\frac{dK'}{da'} = \frac{d\mu_n(a')}{da'}K' = \frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a'}}{a'}K' = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}{N}K'.$$

Tillige erholdes

$$\frac{dK'}{d\varphi'} = (n+\tfrac{1}{2})K'i = a\sin\theta K'i\,,$$

og de samme Ligninger gjælde ogsaa, naar for K' sættes S'. Ligningerne (18) give saaledes for dette Tilfælde

$$\overline{\xi'} = \frac{\sin^2\theta}{N}aK', \quad \overline{\eta'} = i\frac{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - N^2}}{N}aK', \quad \overline{\zeta'} = -i\sin\theta\, aS',$$

hvor de ovenfor fundne Værdier af K' og S' kunne indsættes.

Resultaterne af denne Beregning af den fuldstændige Tilbagekastning vise sig, saavel for de ydre som for de indre Punkters Vedkommende at være i Overensstemmelse med, hvad der er bekjendt fra Theorien om den fuldstændige Tilbagekastning fra plane Flader, og Beregningen fører saaledes ikke ud over, hvad man ogsaa ad elementær Vej vilde kunne udlede.

Der staar endnu kun tilbage at fortsætte Summationerne af Rækkerne K og S (79) fra den Grænse for n, ved hvilken Ligningerne (67) og (68) ikke længere ere gyldige for den Variable a. I alle Tilfælde vil den i (33) givne Værdi af k_n kunne omdannes til

$$2k_n = -1 + Ae^{2\lambda_n(a)i}, \quad A = \frac{q_n(a)(1+r_n'(a')) - N(i+\frac{1}{2}q_n'(a))2r_n(a')}{q_n(a)(1+r_n'(a')) - N(-i+\frac{1}{2}q_n'(a))2r_n(a')}\,.$$

Denne ved A betegnede Brøk, vil, naar n overskrider den omtalte Grænse, vise sig at blive lig 1, forudsat at N er forskjellig fra 1. Det Tilfælde, at $N-1$ er saa lille, at denne Differens maa betragtes som en Størrelse af lavere Orden end Enheden, ville vi her lade ude af Betragtning.

Ligningen $A = 1$ vil nemlig altid finde Sted, naar $q_n'(\alpha)$ er af højere Orden end Enheden, hvilket ifølge (99) er Tilfældet, naar $n-\alpha$ er positiv af højere Orden end $\alpha^{\frac{1}{3}}$. Endvidere er i den betragtede Sum n saa stor, at $q_n(\alpha)$ er af større Orden end Enheden, medens $r_n(\alpha')$ og $r_n'(\alpha')$, naar Differensen $n-\alpha$ baade positiv og negativ er af lavere Orden end α, ikke kunne blive af højere Orden end Enheden. Dette sidste fremgaar af det tidligere (Side 48) anførte, idet man har $n-\alpha' = n-\alpha-(N-1)\alpha$, hvor det sidste Led ikke kan blive af lavere Orden end α. Det ses saaledes, at man i det foreliggende Tilfælde altid maa have $A = 1$, og da ganske de samme Betragtninger kunne anvendes paa den i (33) givne Værdi af s_n, vil man altsaa have

$$2k_n = -1 + e^{2\lambda_n(\alpha)i}, \quad 2s_n = -1 + e^{2\lambda_n(\alpha)i}.$$

Begge disse Koefficienter konvergere hurtig for $n > \alpha$ med voxende n til 0.

Idet vi med Hensyn til Tilfældet $2k_n = -1$, $2s_n = -1$ kunne henvise til det foregaaende, ville vi have at betragte Rækken

$$Q = \frac{aK}{\cos\psi} = \frac{iaS}{\sin\psi} = -\sum_{n_2}^{n_3}{}' \sqrt{\frac{2q_n(\alpha)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\alpha)\right)i},$$

hvor n_3 er den øvre Grænse for n, inden for hvilken $q_n(\alpha)$ og $\lambda_n(\alpha)$ lade sig bestemme ved (67) og (68).

Potensexponenten i denne Sum er

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\alpha) \pm \left((n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right) i,$$

og sættes heri $n = \nu + z$ og $\nu + \frac{1}{2} = a\sin\vartheta$, vil Koefficienten til z med Udeladelse af Størrelser, som ere lavere end Enheden, alene blive $-\vartheta \pm \varphi$. Skal denne Koefficient altsaa være 0 eller meget lille, maa øverste Fortegn læses og $\varphi - \vartheta$ maa være 0 eller meget lille. Heraf ses, at Svingningskomposanterne ifølge (80) kunne bestemmes ved

$$\bar{\xi}_e = \sin^2\varphi\cos\psi Q, \quad \bar{\eta}_e = \sin\varphi\cos\varphi\cos\psi Q, \quad \bar{\zeta}_e = -\sin\varphi\sin\psi Q,$$

hvoraf atter for Komposanterne med Hensyn til de faste Axer erholdes

$$\xi_e = 0, \quad \eta_e = \sin\varphi Q, \quad \zeta_e = 0.$$

Selve Størrelsen $\sin\varphi Q$ lader sig, da $\varphi - \vartheta$ er meget lille og man derfor udenfor Exponenten kan sætte $q_n(\alpha) = \frac{1}{\cos\vartheta} = \frac{1}{\cos\varphi}$ og $n = a\sin\vartheta = a\sin\varphi$, reducere til

$$\sin\varphi Q = \eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a\cos\varphi}} \sum_{n_2}^{n_3}{}' e^{F_n i}, \quad F_n = kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(\alpha) - \lambda_n(\alpha) + (n+\tfrac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4},$$

hvorved det sammensatte Fænomen, der omfatter parallele Lysstraalers Bøjning ved en reflekterende Kugle, er fremstillet under en simpel Form.

Betragte vi først den Del af Summen, hvor n er større end α, ses det, at $\lambda_n(\alpha)$ med voxende n aftager fra $\frac{\pi}{6}$ til 0. En nærmere Bestemmelse heraf erholdes ved Ligningerne

$$e^{2\lambda_n(\alpha)i} = \frac{1+\operatorname{tg}\lambda_n(\alpha)\,i}{1-\operatorname{tg}\lambda_n(\alpha)\,i} = \frac{1+e^{2\mu_n(\alpha)}\,i}{1-e^{2\mu_n(\alpha)}\,i} = 1+2\sum_0^\infty{}' e^{2m\mu_n(\alpha)}\,i^m\,,$$

hvor $\mu_n(\alpha)$ for $n=\alpha$ har Værdien $-\frac{1}{4}\log 3$ og med voxende n hurtig aftager.

Sættes altsaa i den betragtede Sum først $e^{2\lambda_n(\alpha)i}=1$, og indsættes i Exponenten paa sædvanlig Maade $n=\nu+z$, $\nu+\frac{1}{2}=a\sin\vartheta$, vil ved Udvikling efter Potenser af z Koefficienter til zi i Exponenten blive $\varphi-\vartheta$. Saaledes gaar for $\varphi=\vartheta$ Summen over til Integralet

$$\int_{a-a\sin\vartheta}^{n_3-a\sin\vartheta} dz\, e^{\left(kt-a\cos\varphi-\frac{\pi}{4}-\frac{z^2}{2a\cos\varphi}\right)i} = -i\sqrt{2\pi a\cos\varphi}\;\eta_e\,,$$

som ved Substitutionen

$$z=\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2a\cos\varphi}\,,\quad \frac{\varepsilon}{2}=\frac{a\sin\varphi-a}{\sqrt{2a\cos\varphi}}\,,$$

giver

$$\eta_e = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\,e^{\left(kt-a\cos\varphi-\frac{\pi+\varepsilon^2}{4}\right)i}\int_0^\omega dx\, e^{(\varepsilon x-x^2)i}\,,$$

hvilket Integral svarer til Integralet (57) naar Fortegnet for i forandres til det modsatte. Det fremgaar af Behandlingen af dette sidste Integral, at for $\varepsilon>0$, altsaa Punktet beliggende uden for Kuglens geometriske Skyggerand ($a\sin\varphi>\alpha$), er Integralet en periodisk Funktion. Inden for Skyggeranden ($\varepsilon<0$) bliver det derimod aperiodisk. I selve Skyggeranden ($\varepsilon=0$) erholdes

$$\eta_e = \tfrac{1}{2}\,e^{(kt-a\cos\varphi)\,i}\,.$$

Resultatet er i alle Henseender det samme som det, man erholder for Lysets Bøjning ved en plan, cirkulær Skive, sat i Stedet for Kuglen i den Storcirkel, som tangeres af de indfaldende Straaler.

Den anden Del af den ovenfor betragtede Sum er

$$2\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{\alpha}^{n_3} e^{\left(kt-\lambda_n(\alpha)+(n+\frac{1}{2})\varphi-(2n-2m+1)\frac{\pi}{4}\right)i+2m\mu_n(\alpha)}\,.$$

Sættes heri $n=\nu+z$, $\nu+\frac{1}{2}=\alpha=a\sin\vartheta$ og benyttes for $\mu_n(\alpha)$ Udviklingen (104), vil ved Udviklingen efter Potenser af z, Koefficienten til z i Exponenten blive $(\varphi-\vartheta)i-\frac{m}{r}$, hvor $r=r_\nu(\nu+\frac{1}{2})$ er bestemt ved (97) og er af Ordenen $\alpha^{\frac{1}{3}}$.

Hvis nu $\varphi - \vartheta$ er af højere Orden end $\alpha^{-\frac{1}{3}}$, vil den betragtede Sum, naar alene Størrelserne af højeste Orden medtages, kunne udtrykkes ved

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{\varphi - \vartheta} e^{\left(kt - a\cos\vartheta + a(\varphi-\vartheta) + (2m+1)\frac{\pi}{4}\right)i - \frac{m}{2}\log 3},$$

som er af en lavere Orden end $\alpha^{\frac{1}{3}}$.

Hvis derimod det betragtede Punkt ligger saa nær ved Kuglens geometriske Skyggerand, at $\varphi - \vartheta$ bliver af samme Orden som $\alpha^{-\frac{1}{3}}$ eller af en lavere Orden, saa ville alle Led i Udviklingen af Exponenten efter Potenser af z komme i Betragtning, men ved Substitutionen $z = rx$ ville de alle blive af Ordenen α^0, og hele Integralet vil blive af samme Orden som r, altsaa af Ordenen $\alpha^{\frac{1}{3}}$. Den hertil svarende Svingningsamplitude vilde saaledes kunne udtrykkes ved

$$C\frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a\cos\varphi}},$$

hvor C er en numerisk Konstant. En nærmere Beregning af denne Konstant har næppe tilstrækkelig Interesse, da det hurtig ses, at denne Del af Lysbevægelsen kun kan blive meget ringe, og, idet den falder sammen med det øvrige bøjede Lys, næppe vil kunne blive Gjenstand for Iagttagelsen. Formlen viser, at Intensiteten af dette Lys er proportional med Kuglens Radius i Potensen $\frac{2}{3}$, og med Bølgelængden i Potenseu $\frac{1}{3}$, samt omvendt proportional med det betragtede Punkts Afstand fra den af de indfaldende Straaler tangerede Storcirkel, forudsat dog, at denne sidste Afstand selv ikke bliver meget lille.

Sluttelig er ogsaa det til $n < \alpha$ svarende Svingningsudslag bestemt ved

$$\eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a\cos\varphi}} \sum_{n_2}^{\alpha} e^{Fn\,i},$$

under hvilken Summation $\lambda_n(\alpha)$ med voxende n aftager fra en ubestemt stort Værdi til $\frac{\pi}{6}$. Sættes $n = \nu - z$, $\nu + \frac{1}{2} = \alpha = a\sin\vartheta$, erholdes

$$\eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a\cos\varphi}} \int_0^{\omega} dz\, e^{\left(kt - a\cos\vartheta + a(\varphi-\vartheta) + 2\lambda_{\nu-z}(\alpha) - \frac{\pi}{4} - (\varphi-\vartheta)z\right)i},$$

hvor $\lambda_{\nu-z}(\alpha)$ udvikles ifølge (103). Det vil nu ses, at dette Tilfælde ganske svarer til det ovenfor behandlede, og at Resultatet kan fremstilles under samme Form. Denne Del af Lysbevægelsen svarer til Bøjningen af de under streifende Incidens fuldstændig tilbagekastede Lysstraaler. Intensiteten af disse sidste Straaler aftager med voxende Indfaldsvinkel, dog vil paa Grund af Bøjningen denne Intensitet ikke blive Nul i den geometriske Skyggerand, men derimod en Størrelse af samme Art som Intensiteten af de ovenfor betragtede bøjede Straaler, hvorefter Intensiteten hurtig aftager indenfor Skyggeranden.

Summationerne med Hensyn til n ere endnu kun udførte indtil den øvre Grænse $n = n_3$, men som ovenfor bemærket ville Koefficienterne k_n og s_n for $n > \alpha$ hurtig konvergere til 0 med voxende n. Denne Del af Summerne vil derfor i Almindelighed blive en forsvindende lille Størrelse.

7. Mængde af udstraalet Lys. α meget lille. System af smaa Kugler.

Alt fra den belyste Kugle udgaaet Lys tænkes opsamlet paa den indvendige Side af en koncentrisk Kugleflade i uendelig Afstand fra Kuglen. Er L hele den opsamlede Lysmængde, r den uendelige Kugles Radius og I den ved Amplitudens Kvadrat maalte Lysintensitet i Afstanden r, saa vil L kunne defineres og bestemmes ved

$$L = r^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \, I. \tag{109}$$

Ifølge Ligningerne (17) og (31) kunne Svingningskomposanterne for $a = \frac{2\pi r}{\lambda}$ og r uendelig stor udtrykkes ved

$$\bar{\xi}_e = 0, \quad \bar{\eta}_e = -\frac{i\cos\psi}{a} e^{(kt-a)i} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(k_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} + s_n \frac{dP_n}{\sin\varphi \, d\varphi} \right),$$

$$\bar{\zeta}_e = \frac{i\sin\psi}{a} e^{(kt-a)i} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(k_n \frac{dP_n}{\sin\varphi \, d\varphi} + s_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \right).$$

Heri ere k_n og s_n komplexe Størrelser, hvis Modulus være betegnet ved $\bar{k}_n$ og $\bar{s}_n$. Bestemmes nu I ved Summen af Kvadraterne af disse Komposanters Amplituder, vil Ligning (109), efter at Integrationen med Hensyn til ψ er udført, give

$$L = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \left[\left(\sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\bar{k}_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} + \bar{s}_n \frac{dP_n}{\sin\varphi \, d\varphi} \right) \right)^2 + \left(\sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\bar{k}_n \frac{dP_n}{\sin\varphi \, d\varphi} + \bar{s}_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \right) \right)^2 \right].$$

Ethvert af disse Kvadrater kan ogsaa udtrykkes som et Produkt af to Summer med de Variable n og m, og bemærkes, at man har

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \left(\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \cdot \frac{d^2 P_m}{d\varphi^2} + \frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{dP_n}{d\varphi} \frac{dP_m}{d\varphi} \right) = \begin{cases} 0 \text{ for } m \gtrless n \\ \dfrac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} \text{ for } m = n, \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} d\varphi \left(\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \cdot \frac{dP_m}{d\varphi} + \frac{dP_n}{d\varphi} \cdot \frac{d^2 P_m}{d\varphi^2} \right) = 0,$$

vil man finde Lysmængden L bestemt ved

$$L = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_1^{\infty} (2n+1) \left(\bar{k}_n^2 + \bar{s}_n^2 \right). \tag{110}$$

De almindelige Udtryk (33) for Koefficienterne k_n og s_n kunne ogsaa skrives under Formen

$$k_n = -\frac{1}{1+p_n i}, \quad p_n = \frac{w_n(\alpha) v_n'(\alpha') - N w_n'(\alpha) v_n(\alpha')}{v_n(\alpha) v_n'(\alpha') - N v_n'(\alpha) v_n(\alpha')}, \tag{111}$$

$$s_n = -\frac{1}{1+q_n i}, \quad q_n = \frac{N w_n(\alpha) v_n'(\alpha') - w_n'(\alpha) v_n(\alpha')}{N v_n(\alpha) v_n'(\alpha') - v_n'(\alpha) v_n(\alpha')}. \tag{112}$$

Disse Koefficienters Modulus er altsaa mindre end 1, undtagen i de Tilfælde, at man har $p_n = 0$, hvortil svarer $k_n = -1$, eller $q_n = 0$, hvortil svarer $s_n = -1$.

Vi skulle nu nærmere bestemme Lysbevægelsen i det Tilfælde, at den belyste Kugles Diameter er meget lille i Sammenligning med Bølgelængden af det indfaldende Lys, saaledes at α bliver at betragte som saa lille et Tal, at i Rækkeudviklinger efter Potenser af α i Reglen kun det Led, som indeholder den laveste Potens af α, medtages. Med Hensyn til α' gjøres derimod foreløbig ingen indskrænkende Antagelse.

Ifølge Rækkeudviklingerne (22) og (24) vil man, naar kun det første Led af Rækkerne medtages, have

$$v_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{1.3\ldots 2n+1}, \quad v_n'(\alpha) = \frac{(n+1)\alpha^n}{1.3\ldots 2n+1},$$

$$w_n(\alpha) = \frac{1.3\ldots 2n-1}{\alpha^n}, \quad w_n'(\alpha) = -n\frac{1.3\ldots 2n-1}{\alpha^{n+1}}.$$

Indsættes disse Værdier i (111) og (112), vil det ses, at i Almindelighed blive k_n og s_n meget smaa Størrelser af Ordenen α^{2n+1}. Man vil nemlig erholde

$$p_n = \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{\alpha' v_n'(\alpha') + N^2 n v_n(\alpha')}{\alpha' v_n'(\alpha') - N^2(n+1) v_n(\alpha')},$$

$$q_n = \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{\alpha' v_n'(\alpha') + n v_n(\alpha')}{\alpha' v_n'(\alpha') - (n+1) v_n(\alpha')},$$

i hvilket sidste Udtryk ogsaa kan sættes

$$\alpha' v_n'(\alpha') + n v_n(\alpha') = \alpha' v_{n-1}(\alpha'), \quad \alpha' v_n'(\alpha') - (n+1) v_n(\alpha') = -\alpha' v_{n+1}(\alpha').$$

Afset altsaa fra de særlige Tilfælde, ville Rækkerne (31) for K og S indskrænke sig til det første, til $n = 1$ svarende Led, hvori vil indgaa

$$k_1 = i\frac{\alpha^3}{3} \cdot \frac{\alpha' v_1'(\alpha') - 2N^2 v_1(\alpha')}{\alpha' v_1'(\alpha') + N^2 v_1(\alpha')}, \quad s_1 = -i\frac{\alpha^3}{3}\frac{v_2(\alpha')}{v_0(\alpha')},$$

hvorefter Svingningskomposanterne $\bar{\xi}_e$, $\bar{\eta}_e$, $\bar{\zeta}_e$ let bestemmes ved Hjælp af Ligningerne (17).

Hvis nu α' ligesom α er en meget lille Størrelse, vil k_1 kunne reduceres til Formen

$$k_1 = -i\frac{2\alpha^3}{3} \cdot \frac{N^2-1}{N^2+2},$$

medens man for α' meget lille eller naar α' er Rod i Ligningen $v_2(\alpha') = 0$ erholder $s_1 = 0$.

I dette sidste Tilfælde vil altid ifølge Ligningerne (17) $\overline{\eta_e}$ være proportional med $\cos\varphi$, hvoraf følger, at det vinkelret paa de indfaldende Straaler tilbagekastede Lys svinger vinkelret paa Indfaldsplanen og altsaa er fuldstændig polariseret i Indfaldsplanen. Dette gjælder selvfølgelig ogsaa, naar det indfaldende Lys er upolariseret.

Ligeledes maa under de samme Forudsætninger den samme Lov gjælde, naar vi i Stedet for en enkelt Kugle tænke os en Samling af lignende, indbyrdes adskilte og tilfældig ordnede Kugler. Sættes endvidere i Udtrykket for k_1 $\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda}$, idet R er Kuglens Radius, ses det, at Lysbevægelsen i et vilkaarligt Punkt uden for Kuglen afhænger, foruden af det indfaldende Lys og af Punktets Koordinater, alene af Størrelsen $\frac{N^2-1}{N^2+2}R^3$. Tænke vi os nu i det omtalte System af Kugler disses Radier, ved uforandret Stilling af deres Centrer, voxe indtil R_1, som dog vedvarende maa være meget lille i Sammenligning med en Bølgelængde, medens deres Brydningsforhold forandres fra N til N_1, og sker denne Forandring saaledes, at man beholder

$$\frac{N^2-1}{N^2+1}R^3 = \frac{N_1^2-1}{N_1^2+2}R_1^3,$$

saa maa Lysbevægelsen udenfor Kuglerne og overalt udenfor Systemet forblive upaavirket af Forandringen. Lade vi R_1 blive lige stor med Kuglecentrernes mindste halve Middelafstand, som antages meget lille i Sammenligning med Bølgelængden, vil Systemet meget nær komme til at svare til et homogent Medium med Brydningsforholdet N_1. Heraf kan atter sluttes, at naar i Systemet Kuglerne forblive uforandrede, medens dets Tæthed d_1 forandres, vil Systemets Brydningsforhold N_1 forandre sig saaledes, at $\frac{N_1^2-1}{N_1^2+1}\frac{1}{d_1}$ forbliver konstant (jvnf. «Farvespredningens Theori»).

Hele Mængden af det af den enkelte Kugle udstraalede Lys vil ifølge (110) være bestemt ved

$$L = \frac{2\lambda^2\alpha^6}{3\pi}\left(\frac{N^2-1}{N^2+2}\right)^2,$$

og er A Antallet af Kugler indenfor Rumenheden, vil AL være hele den Lysmængde, som udstraales fra hver Rumenhed af Systemet. Denne Størrelse er Systemets Absorbtionskoefficient, og betegnes denne ved h, vil man altsaa, naar tillige α udtrykkes ved $\frac{2\pi R}{\lambda}$, have

$$h = AL = A\frac{128\pi^5R^6}{3\lambda^4}\left(\frac{N^2-1}{N^2+2}\right)^2, \qquad A = \frac{3}{4\pi {R_1}^3}.$$

Det ses heraf, at Absorbtionskoefficienten er omvendt proportional med fjerde Potens af Bølgelængden (Rayleigh's Lov [1]). Er omvendt Systemets Absorptionskoefficient h og dets

[1]) J. W. Strutt: Phil. Mag. 41, Febr., Apr., Jun. 1871.

Brydningsforhold N_1 givet, vil under de givne Forudsætninger Kuglernes Antal paa Rumenheden og en lavere Grænse for deres Størrelse kunne udledes, idet man af de angivne Formler finder

$$A = \frac{24\pi^3}{h\lambda^4}\left(\frac{N_1^2-1}{N_1^2+2}\right)^2, \qquad R^3 = \frac{h\lambda^4}{32\pi^4}\frac{(N_1^2+2)(N^2+2)}{(N_1^2-1)(N^2-1)} > \frac{h\lambda^4}{32\pi^4}\frac{N_1^2+2}{N_1^2-1}.$$

Som Exempel kunne vi tage Brydningsforholdet og Absorptionskoefficienten for den atmosfæriske Luft ved sædvanligt Tryk, nemlig $N_1 = 0{,}00029$ og, idet 10^{-6} mm tages som Længdeenhed, $h\lambda^4 = 0{,}0017$. Med denne sidste Koefficient vil der paa en Strækning af 8 Kilometer absorberes 11,3 Procent af Lys med Bølgelængden 580 og det dobbelte for $\lambda = 480$.

Disse Talværdier indsatte ovenfor give

$$A = 0{,}0163\,, \qquad R = 0{,}141\left(\frac{N^2+2}{N^2-1}\right)^{\frac{1}{3}} > 0{,}141\,,$$

altsaa paa en Kubikmillimeter et Antal af $0{,}0163.10^{18}$ Kugler med en Radius af mindst $0{,}141^{-6}$ mm. Hertil svarer $\alpha = 0{,}00153$ for $\lambda = 580$ og $\alpha = 0{,}00185$ for $\lambda = 480$.

Vidt forskjellig fra denne Lysbevægelse er den, som fremkommer i de særlige Tilfælde, at man har $p_n = 0$ eller $q_n = 0$, hvilke Muligheder indtræde for en hel Række af Bølgelængder. Hertil svarer ifølge Ligningerne (111) og (112)

$$w_n(\alpha)v_n'(\alpha') - Nw_n'(\alpha)v_n(\alpha') = 0\,, \qquad Nw_n(\alpha)v_n'(\alpha') - w_n'(\alpha)v_n(\alpha') = 0\,.$$

Den første af disse Ligninger svarer tilnærmelsesvis til $v_n(\alpha') = 0$, den anden til $v_{n-1}(\alpha') = 0$. Sættes nøjagtigere i den første Ligning $\alpha' = \beta + \varepsilon$, og er β Rod i Ligningen $v_n(\beta) = 0$, saa erholdes ved Udvikling efter Potenser af ε og Bortkastelse af de Led, som indeholde højere Potenser af ε end den første,

$$\varepsilon = \frac{w_n(\alpha)}{Nw_n'(\alpha)} = -\frac{\alpha}{Nn}\,.$$

Er den givne Ligning $q_{n+1} = 0$, vil hertil, naar de to første Led i Udviklingen af $w_{n+1}(\alpha)$ og $w_{n+1}'(\alpha)$ medtages, svare

$$N\alpha\left(1 + \frac{\alpha^2}{2(2n+1)}\right)v_{n+1}'(\alpha') + \left(n+1+\frac{(n-1)\alpha^2}{2(2n+1)}\right)v_{n+1}(\alpha') = 0\,,$$

hvor

$$v_{n+1}(\alpha') = -v_n'(\alpha') + \frac{n+1}{\alpha'}v_n(\alpha') \quad \text{og} \quad v_{n+1}'(\alpha') = -\left(\frac{(n+1)^2}{\alpha'^2} - 1\right)v_n(\alpha') + \frac{n+1}{\alpha'}v_n'(\alpha')\,.$$

Heraf findes med den vedtagne Grad af Tilnærmelse

$$(2n+1)\alpha' v_n(\alpha') + \alpha^2 v_n'(\alpha') = 0\,.$$

Sættes nu heri $\alpha' = \beta + \varepsilon'$, idet ligesom før $v_n(\beta) = 0$, erholdes

$$\varepsilon' = -\frac{\alpha^2}{(2n+1)\alpha'} = -\frac{\alpha}{N(2n+1)}\,.$$

Rødderne i $p_n = 0$ og $q_{n+1} = 0$ ere altsaa meget nær, men ikke nøjagtig lige store, og Forskjellen imellem to tilsvarende Rødder er

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{a(n+1)}{Nn(2n+1)}, \quad n > 0.$$

Betegnes de tilsvarende Forandringer af Bølgelængden ved δ og δ', saa er

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = -\frac{\delta}{\lambda}, \quad \frac{\varepsilon'}{\beta} = -\frac{\delta'}{\lambda} \quad \text{og} \quad \delta - \delta' = \frac{\lambda a(n+1)}{\beta Nn(2n+1)} = \frac{\pi^2}{\beta^2} \cdot \frac{4R^2}{\lambda} \cdot \frac{n+1}{n(2n+1)}.$$

Nedenstaaende Tavle angiver de fem største Værdier af $\frac{\pi}{\beta}$ for $n = 0, 1, 2, 3$, idet β er Rod i $v_n(\beta) = 0$.

$n = 0,$	$n = 1,$	$n = 2,$	$n = 3,$	
1	0,6992	0,5451	0,4496	. . .
0,5000	0,4067	0,3454	0,3016	. . .
0,3333	0,2881	0,2549	0,2293	. . .
0,2500	0,2233	0,2025	0,1856	. . .
0,2000	0,1823	0,1681	0,1561	. . .
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	

Det vil nu ses, at den største Forskjel i Bølgelængde $\delta - \delta'$ svarer til $\frac{\pi}{\beta} = 0{,}6992$, $n = 1$. Sættes dernæst til Exempel $R = 0{,}141$ og $\lambda = 580$, erholdes $\delta - \delta' = 0{,}000045$, som er 13000 Gange mindre end Forskjellen (0,6) imellem Bølgelængderne af Solspektrets to Linier D_1 og D_2.

I et System af Kugler fremkommer i de her betragtede særlige Tilfælde Absorbtionstriber, naar gjennemgaaende hvidt Lys opløses i et Spektrum. Medens nemlig, som vi have set, den fra hver Kugle udstraalede Lysmængde i Almindelighed er en meget lille, med R^6 proportional, Størrelse, vil den for $p_n = 0$ eller $q_n = 0$ være $\frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}$ eller lige saa stor som den Mængde af indfaldende Lys, der ved uforstyrret Gang af Lysstraalerne vilde ramme en Kugle med Radius $\frac{\lambda\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\pi}$. Da i det antagne System Nabokuglernes Middelafstande ere forudsatte at være langt mindre, ses det, at Systemet omtrent kan siges at være uigjennemtrængeligt for denne Art af Straaler. Det vil tillige bemærkes, at de til $q_1 = 0$ eller $v_0(\beta) = 0$ svarende Absorbtionstriber ere enkelte, alle de andre dobbelte.

Har man for et System bestemt en Række Absorbtionstribers Bølgelængder, ville disse kunne henføres til Reciprokerne af Rødderne i $v_n(\beta) = 0$, $n = 0,1,2, \ldots$, ved Multiplikation med en enkelt konstant Faktor. Idet denne Faktor er lig med $\frac{N}{2\pi R}$, vil det

altsaa være muligt heraf, af Systemets Brydningsforhold og af dets almindelige Absorbtionskoefficient, at bestemme alle Systemets Konstanter, nemlig Antallet af Kugler paa Rumenheden, Kuglernes Størrelse og deres Brydningsforhold.

Hertil vil ogsaa kunne benyttes Maalinger af Stribernes Bredde, hvoraf Beregningen kan udføres paa følgende Maade.

Naar Bølgelængden λ svarer til $p_n = 0$, vil Værdien af p_n for en nærliggende Bølgelængde $\lambda + \delta$ være bestemt ved

$$p_n = -\left[\frac{dp_n}{d\alpha} + \frac{dp_n}{d\alpha'} N\right]^{p=0} \cdot \frac{\alpha\delta}{\lambda} = \frac{1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{N^2-1}{N^2} \left(nN^2 + n(n+1)\right) \frac{\delta}{\lambda} .$$

Paa samme Maade vil, naar λ svarer til $q_n = 0$, q_n for Bølgelængden $\lambda + \delta$ være bestemt ved

$$q_n = \frac{1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2}{\alpha^{2n-1}} (N^2 - 1) \frac{\delta}{\lambda} .$$

Skjøndt δ er betragtet som en lille Størrelse, vil den dog altid kunne antages saa stor, at p_n og q_n blive meget store i Forhold til Enheden, saaledes at k_n og s_n ville kunne bestemmes ved

$$k_n = \frac{i}{p_n} , \quad s_n = \frac{i}{q_n} .$$

For et System af Kugler ville de hertil svarende Absorbtionskoefficienter være

$$\frac{A}{p_n^2} \frac{\lambda^2 (2n+1)}{2\pi} \quad \text{og} \quad \frac{A}{q_n^2} \cdot \frac{\lambda^2 (2n+1)}{2\pi} .$$

Vi kunne nu i Spektret af det gjennemgaaede Lys betragte de to Grænser for en Absorbtionstribe som de Punkter, hvor Lysintensiteten er reduceret til en konstant Brøk e^{-c}, og Stribens Bredde tænkes da bestemt ved Forskjellen 2δ imellem Bølgelængderne i disse to Punkter. Er x den tilbagelagte Strækning af Systemet, vil man have

$$c = \frac{Ax}{p_n^2} \cdot \frac{\lambda^2 (2n+1)}{2\pi} \quad \text{og} \quad c = \frac{Ax}{q_n^2} \cdot \frac{\lambda^2 (2n+1)}{2\pi} .$$

Indsættes heri de ovenfor beregnede Værdier af p_n og q_n, ses det, at Stribernes Bredde altid er proportional med Kvadratroden af den tilbagelagte Vejlængde, ligesom ogsaa med Kvadratroden af Antallet af Kugler paa Rumenheden.

Den bredeste Stribe svarer til $\alpha' = \pi$, $q_1 = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha^3} \cdot \frac{\delta}{\lambda}$, som giver

$$2\delta = \frac{8R^3}{\lambda} \sqrt{\frac{6\pi A x}{c}} .$$

For $A = 0{,}0163$, $R = 0{,}141$, $\lambda = 580$, $x = 10^{10}$ eller 10 Meter og $c = 0{,}693$, svarende til en Absorbtion i Stribens Grænser af 50 Procent, erholdes

$$2\delta = 2{,}57 ,$$

som svarer til en Bredde, der er 4,3 Gange større end Afstanden imellem de to Linier $D_1 D_2$. Det er ikke uden Interesse at lægge Mærke til, at 2δ ogsaa umiddelbart kan

beregnes af den almindelige Absorbtionskoefficient h uden Kjendskab til Systemets øvrige Konstanter, idet nemlig N i Formlen for h her kan betragtes som et meget stort Tal.

Absorbtionstriberne kunne saaledes blive meget brede og faa snarere Karakteren af Absorbtionsbaand, naar α' hører til de mindste af Rødderne i $v_0(\alpha') = 0$. Hører derimod α' til Rødderne i $v_1(\alpha') = 0$, $v_2(\alpha') = 0$, ... blive med de her exempelvis benyttede Talkonstanter selv i gunstigste Tilfælde Striberne reducerede til Linier af en næppe maalelig Bredde, hvad selvfølgelig dog ikke udelukker, at de kunne gjøres synlige.

Det har ikke været min Hensigt med denne Beregning af Lysbevægelsen indenfor et System af smaa Kugler at gjennemføre en nøjagtig Bestemmelse af denne, hvortil vilde udkræves et større Apparat. Jeg har kun søgt at fremdrage det ejendommelige ved denne Lysbevægelse, som for en enkelt Kugles Vedkommende lader sig nøjagtig bestemme og derigjennem i Hovedsagen ogsaa lader sig beregne for en Samling af Kugler, idet Hensigten hermed har været, dels at paavise Muligheden af gjennem Systemets optiske Egenskaber at komme til Kundskab om Elementerne, som ved deres Lidenhed selv unddrage sig den umiddelbare Iagttagelse, dels at aabne Blikket for den slaaende Analogi, som her af sig selv træder frem, imellem det antagne Systems og Luftarternes optiske Egenskaber.

Rettelse.

Side 17, 2den Linie fra oven:

$$Q = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} W \quad \text{læs} \quad Q = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} W.$$

Dansk Ingeniørforenings
Bogsamling. 342

Methoder til korte Tiders, særlig Rotationstiders, Udmaaling.

En experimental Undersøgelse

af

K. Prytz.

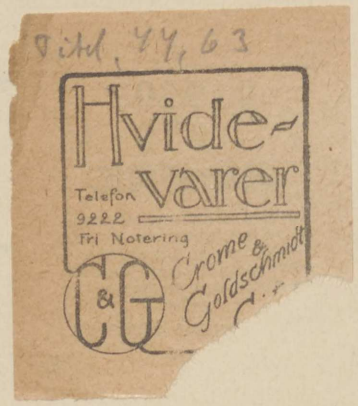
Med 16 Figurer i Texten.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. VII. 2.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1890.


Hvide-
varer
Telefon
9222
Fri Notering
C&G
Crome &
Goldschmidt

Indhold.

Side

I. Maaling af Rotationstiden til et vilkaarligt Tidspunkt . . . . . 41.

II. Centrifugalsugning . . . . . 58.

III. Bestemmelse af en Rotationshastigheds Maximum . . . . . 64.

IV. Tilvejebringelse af en i Forvejen given Hastighed. Stemmegaflers Svingningstid . . . . . 70.

Tillæg . . . . . 80.

Ved adskillige fysiske Undersøgelser kan der blive Anledning til at benytte de Egenskaber, et Legeme faar, naar det sættes i hurtig Rotation. Jeg har forsøgt at anvende Centrifugaltrykket i luftformige Legemer til en Undersøgelse af disses Vægtfylde; ved den Lejlighed følte jeg Mangelen af nogenlunde simple og nøjagtige Methoder til Maaling af Rotationshastigheder, og jeg blev derved ført ind paa den her foreliggende Undersøgelse. Mit Arbejde med den hurtige Rotations Anvendelse og Maaling har jeg paabegyndt i mit Hjem, hvor jeg ved Understøttelser fra Kultusministeriet og Carlsbergfondet var bleven sat istand til om end efter en beskeden Maalestok at indrette mig et fysisk Arbejdsrum, da andre Lokaler ikke stode til min Raadighed. Senere fortsatte jeg Arbejdet paa Officersskolens fysiske Samling efter min Ansættelse der i 1887 som Lærer i Fysik.

Mit Arbejde med Undersøgelse af Rotationsbevægelsen er gaaet ud paa følgende:

1) har jeg tilvejebragt to Methoder til Maaling af Rotationshastigheden til et vilkaarligt Tidspunkt under Rotationen. Ved den første fremkaldes der i Iagttagelsesøjeblikket en Virkning af Rotationen, hvorved man bagefter kan bestemme Hastigheden; ved den anden sker Maalingen ved en umiddelbar Iagttagelse, som uden nogen efterfølgende Maaling giver Hastighedens Størrelse.

Den første Methode er den nøjagtigste; den kan imidlertid med Fordel kombineres med den anden, idet det er af ikke ringe Betydning under Rotationsforsøg at kunne se, hvor stor Hastighed man i Øjeblikket omtrent har.

Jeg har dernæst funden Midler til

2) at finde den største Hastighed, man har haft under en given Rotation.

3) at afgjøre, naar én eller visse enkelte forud bestemte Hastigheder ere tilvejebragte.

4) at afgjøre, om Hastigheden i et givet Øjeblik er konstant, eller om den er voxende eller aftagende.

5) at vedligeholde konstant i længere Tid en i Forvejen bestemt Hastighed.

I hvad Omfang mine Methoder ere nøjagtige og brugbare, vil forméntlig fremgaa af de nedenfor meddelte Resultater. Saa vidt mig bekjendt, ere de alle nye. Man har

hidtil i paafaldende ringe Grad beskæftiget sig med Maaling af Rotationshastigheder som Genstand for særlige Undersøgelser. I vore Tider, da Maaleapparater og Maalemethoder spille saa stor en Rolle, synes der derfor for Rotationens Vedkommende at være et Hul at udfylde; som ovenfor antydet, tror jeg, at naar man først har bekvemme og nøjagtige Maalemethoder for Rotationen, vil denne kunne faa adskillige Anvendelser ved fysiske Undersøgelser, der ville lettes ved den Udvikling, som Centrifugetekniken har faaet i de senere Aar.

I. Maaling af Rotationstiden til et vilkaarligt Tidspunkt.

1. Maalemethoden og de til den anvendte Apparater. Forinden de forskjellige Methoder kunde udvikles og prøves, gjaldt det om at tilvejebringe en sikker Methode til en absolut Bestemmelse af Rotationshastigheden i et vilkaarligt Tidspunkt.

Den Opgave at maale Middelværdien for Omløbstiden af et stort Antal efter hinanden følgende Omløb er løst ved at sætte Rotationsaxen i Forbindelse med et Tælleværk, som tæller Antallet af Omløb i en ved et Ur afmaalt Tid. Den Opgave jeg satte mig, var imidlertid at faa maalt Tiden for et enkelt (eller for nogle faa) Omløb. Skal dette ske, maa Begyndelsen og Slutningen af det hele Omløb (eller af en bekjendt Brøkdel deraf) betegnes ved to bagefter synlige Mærker, som afsættes samtidig henholdsvis med Begyndelsen og Slutningen af Tiden. Mærkerne kunne afsættes af det roterende Legeme paa et andet Legeme, hvis Bevægelse kjendes, eller de kunne afsættes paa det roterende Legeme selv. Da der her er Tale om Maaling af korte Rotationstider (mindre end $^1/_{10}$ Sekund), vil man næppe kunne benytte andet som bekjendt Bevægelse end det frie Fald, idet Pendulsvingninger foregaa med en for ringe Hastighed. Man kunde naturligvis her som ellers ofte ved Maaling af korte Tider benytte en jævn Rotation, hvis Hastighed er bestemt ved et Urværk eller som i la Cours Tonehjul ved en Stemmegaffel. Men kræves der ved Maalingen af den korte Tid en procentisk Nøjagtighed, der kan sammenlignes med den, hvormed længere Tidsrum udmaales ved Uret, er der dog forskjellige Indvendinger at gjøre mod Anvendelsen af en reguleret Rotationshastighed til Maaling af en kort Tid. Paa Grund af Elasticitet og Dødgang i de mange Tandhjulsomsætninger i et Urværk, der fremkalder en hurtig Rotation, kan det nemlig næppe undgaas, at den sidste Axe i Omsætningen kan bevæge sig en ret anselig Vinkel ved fuldstændig Stilstand af den af Pendulet regulerede Axe; heri ligger der en Mulighed for en periodisk Variation i Rotationshastigheden, selv om dennes Middelværdi er bestemt ved Pendulet. En lignende Betragtning maa gjøres gjældende overfor Tonehjulet.

En Stemmegaffels Svingningstid kan — Ligetidigheden forudsat — bestemmes med stor Nøjagtighed, og derfor kan ogsaa Stemmegaflen omvendt, som i Tonehjulet, benyttes til en med samme procentiske Nøjagtighed udført Bestemmelse af et Tidsrum, der er langt i Forhold til Svingningstiden. Derimod vil Stemmegaflen ikke kunne bruges umiddelbart til en nøjagtig Maaling af en kort Tid; thi hvis de Mærker, der betegne Tidens

Begyndelse og Slutning, afsættes i en af Stemmegaflen beskreven Kurve, er den af Stemmegaflen i samme Tid udførte Bevægelse for lille i Forhold til Mærkernes Størrelse. Hvis man omvendt benytter Stemmegaflen til at afsætte Tidsmærker f. Ex. slutte eller afbryde en elektrisk Strøm ved hver Svingning, da vil man sikkert i alle Tilfælde finde, 1) at Afgivelsen af Mærket vil kræve et Arbejde, der kan faa Indflydelse paa Svingningstiden, 2) at der vil kunne være nogen Forskjel i Beliggenheden af det Punkt af Bevægelsens Bane, hvor Afgivelsen (f. Ex. Strømafbrydningen) foranlediges. Den sidste Omstændighed vil bevirke, at der ikke altid forløber lige lange Tider mellem Afgivelsen af to paa hinanden følgende Mærker, og den derved opstaaede Usikkerhed vil kunne blive meget kjendelig i Forhold til Svingningstiden paa Grund af Stemmegaflens ringe Udsving.

Til Afgivelse af de ovenfor omtalte Tidsmærker paa et Legeme i Bevægelse har man sædvanlig benyttet den elektriske Strøm, idet man enten har benyttet det Mærke, en elektrisk Gnist kan efterlade i en sodet eller paa anden Maade tilberedt Overflade, eller man har afsat Mærker mekanisk ved en elektromagnetisk Udløsning. Den elektromagnetiske Udløsning kan dog ikke finde Anvendelse ved en nøjagtig Udmaaling af korte Tider paa Grund af den forholdsvis lange Tid, der medgaar til Magnetismens Forsvinden. Derimod afgiver den elektriske Gnist et fortrinligt Tidsmærke, naar den bliver rigtig anvendt. Gnisten kan anvendes til Maaling af en Rotationshastighed, ved at man paa det roterende Legeme anbringer en Slæbekontakt, der afbryder Hovedledningen for et Induktionsapparat i en bestemt Stilling af Legemet. Lader man Gnisterne fra Induktionsledningen springe over paa en faldende Metalstang, ville de paa denne af Gnisterne afsatte Mærker kunne tjene til Bestemmelse af Rotationshastigheden. Imidlertid er der, ogsaa bortset fra, at hele Gnistapparatet er et noget besværligt og vidtløftigt Hjælpeapparat, ikke uvæsenlige Vanskeligheder ved Brugen.

Afbrydningen af Hovedstrømmen kan saaledes volde Vanskeligheder ved Kontaktfladernes Iltning, idet denne Iltning kan have til Følge, at Afbrydningen indtræder for tidlig, og man maa sikre sig mod Svingninger af Kontaktfjedren, da de kunne fremkalde uvedkommende Afbrydninger.

Gnistbanen er ikke meget konstant, hvorfor man maa bringe den Spids, der fører Gnisten over paa Stangen, meget tæt hen til denne; af den Grund maa der sørges for at undgaa Sammenstød mellem den frit hængende Stang og Spidsen. Den bedste Beklædning for den Overflade, der skal modtage Gnistmærket, tror jeg er Sod, naar det afsættes af en Flamme, umiddelbart paa Metalfladen. Papir, Fernis og andre helt eller halvt isolerende faste Lag kunne nemlig bevirke en betydelig Afvigelse af Gnisten fra den korteste Vej; findes der saaledes i Nærheden af denne en fuldstændig eller delvis Gjennembrydning af det faste Lag (f. Ex. Hullet fra en tidligere Udladning) kan Gnisten, som jeg har bemærket, gaa langs Laget en forholdsvis lang Vej for at søge gjennem Gjennembrydningen til

Metallet. Det paa Metal umiddelbart anbragte Sodlag maa imidlertid behandles med stor Forsigtighed for ikke ved et Uheld at skrabes af.

Som det heraf vil fremgaa, er der Grunde nok til, hvor det kan ske, at søge et andet Middel end den elektriske Gnist til Afgivelse af Tidsmærker, naar der kan opnaaes samme Nøjagtighed som ved Gnisten. Et saadant Middel har jeg fundet for korte Rotationstiders Vedkommende. Jeg har anvendt det til Afgivelse af Mærker paa en frit faldende Metalstang; men det vil ogsaa kunne anvendes paa en roterende Cylinders Overflade. I Hovedsagen er min Fremgangsmaade denne: Axen for det Rotationsapparat, jeg har indrettet, staar lodret, og Faldstangens Bane gaar tæt forbi Randen af en paa Axen anbragt vandret Skive. I et Hul i denne er anbragt et lille Forraad af et opløst Farvestof, for hvilket der aabnes en snever Kanal, samtidig med at Stangen begynder sit Fald. Det gjennem Kanalen udsprøjtende Farvestof vil en Gang for hvert Omløb træffe Stangen og tværs over denne afsætte Mærkestreger, hvis indbyrdes Afstande bagefter kunne udmaales til Bestemmelse af Omløbstiden.

For nærmere at belyse, hvorledes jeg har bragt denne Fremgangsmaade til Udførelse, skal jeg i Enkelthederne beskrive det Rotationsapparat, som paa forskjellig Maade har gjort Tjeneste i alle de i denne Afhandling omtalte Undersøgelser. Som Bevægkraft benyttede jeg en elektrisk Motor af ældre Konstruktion. Den blev dreven ved indtil 8 Bunsenske Elementer eller 4—5 Akkumulatorer. Fra Motoren blev Bevægelsen meddelt til Rotationsapparatet ved to Snorløbsoverføringer, hvorved Hastigheden blev forøget til det 12dobbelte. Rotationsapparatet i den Skikkelse, hvori det er fremstillet i Fig. 1, modtog ikke Bevægelsen direkte fra det sidste Snorløb. For at udjævne Uregelmæssigheder i Motorens Bevægelse lod jeg nemlig Apparatet modtage Bevægelsen ved Kviksølvfriktion. Den Axe, a, der modtager Bevægelsen, hviler med en Spids i Apparatets Underlag, en meget tung Støbejærnsplade; lidt over Snorløbsskiven, ss, er Axen støttet i et Leje i en fastskruet smal Staalplade, cc. Tæt over denne bærer Axen en flad Beholder, dd, dannet af en Staalring, der er fastklemt ved et stort Antal Skruer mellem to Staalplader. Ringens Diameter er 15 Cm. Axens øverste Ende er fæstet i Beholderens Bund og ender tæt over denne. Midt i Axens Endeflade er der boret en kegleformig Fordybning til Leje for Spidsen af en ny Axe, f, der bærer det egentlige Rotationsapparat. Axen f gaar frit op igjennem et Hul i Beholderen dd's Laag. Inde i denne Beholder bærer Axen f en tynd Staalskive, ee; da Beholderen næsten er fyldt med Kviksølv, vil dettes Gnidning mod den Del af Skiven, der under Rotationen er omgiven deraf, overføre Axen a's Bevægelse til f.

Rotationsapparatet bestaar af en Støbejærnsskive, gg, hvori der diametralt modsat er boret to Huller, z, z, fra Randen ind mod Axen til Optagelse af det ovenfor omtalte Farvestof. Paa den øverste Side er Skiven gg forsynet med en opstaaende Krave, nn, der indvendig er drejet konisk af. I denne Krave er indsleben den nederste koniske

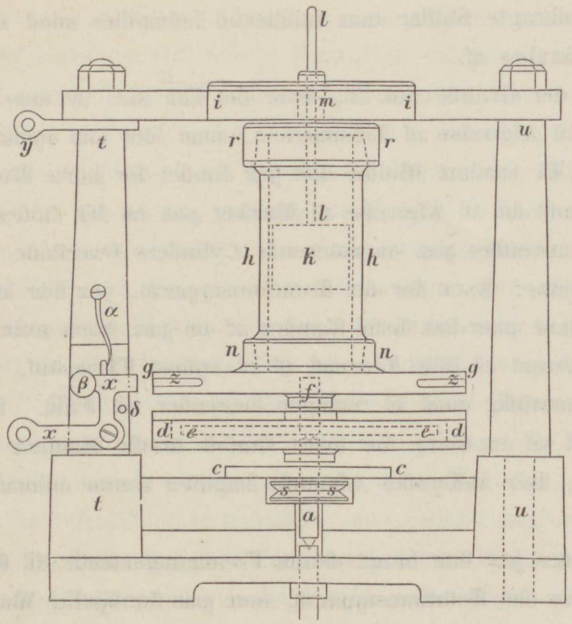


Fig. 1.

Del af en afdrejet Staalcylinder, hh, hvis Diameter udvendig er 5 Cm. og indvendig 4 Cm. Cylindren er foroven lukket ved et Laag, rr, af Staal, i hvilket den er anbragt paa samme Maade som i Pladen gg. Ved tre tilspidsede Skruer i hver af de to Kraver er Cylindren presset ind i disse, efter at de koniske Flader for Tætnings Skyld først ere blevne overtrukne med et tyndt Lag Paraffin. Cylindrens Laag bærer foroven en paa langs gjennemboret Staaltap, m, der bevæger sig i et i en fast Bronceplade, ii, udboret Leje.

I Cylindren, der delvis er fyldt med Kviksølv, er der anbragt et Stempel, k, hvis Stempelstang, ll, gaar op gjennem Udboringen i Tappen m. Stemplet bevæger sig frit i Cylindren uden at berøre dennes Vægge; det vil stille sig i forskjellige Højder i Cylindren efter Rotationshastigheden, idet det suges nedad, naar Hastigheden voxer, og atter stiger, naar denne aftager. Forøvrigt vil denne Del af Apparatet blive nærmere omtalt i Afsnit II.

Den ovenfor omtalte Bronceplade, ii, der tjener som øverste Støtte for Rotationsaxen, bæres af to solide Staalstøtter, tt og uu, som ere fæstede, en paa hver Side af Apparatet, i dettes Grundplade. I en stor Del af de i det følgende omtalte Forsøg havde jeg, som vist i Fig. 7, anbragt under Støbejærnsskiven gg en 1,8 Cm. tyk Messingskive, der blev fæstet til gg ved to solide Skruer. For at faa Plads til Messingskiven maatte jeg give Afkald paa at overføre Bevægelsen ved Kviksølvfriktion, idet jeg fjærnede Beholderen dd og forbandt Snorløbshjulet og Rotationsapparatet ved en fast Axe.

Farvestoffet anbringes i et af Hullerne z, z, indesluttet i en lille Glasbeholder, der i naturlig Størrelse er afbildet i Fig. 2. Denne Beholder er dannet af et Glasrør, a, der ved den ene Ende er trukket ud til et meget fint Rør, b. Ved den modsatte Ende er Røret indsnævret saa meget, at Vædske, anbragt i a, ikke vil løbe ud. Glasbeholderen indsættes, som vist i Fig. 3, i et Messingrør, cd, der passer i Hullerne z, z i Rotationsapparatets Skive, efter at der først er anbragt en Prop af Bomuld

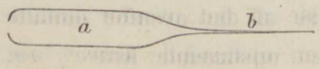


Fig. 2.

i a ved Overgangen til b (Hensigten hermed er, at Farvestoffet under Udsprøjtningen skal filtreres, før det kommer ind i Røret b, hvorved Forstoppelse af dette undgaaes). b afsmeltes 3—4 Mm. udenfor Messingrøret; dette opvarmes ved d, og der dannes af smeltet Vox en lille Kegle om det fine Glasrør med Basis paa Messingrørets Endeflade. Naar Voxet er størknet, tjener det til at støtte Glasrøret og foranledige, at dette ved Afbrydningen netop knækker af ved Keglens Top. Beholderen a fyldes nu med Farvestoffet, og den hele Patron anbringes i et af Hullerne z i Jærnskiven. Her fastholdes Patronen, som vist i Fig. 3 og i Fig. 7 ved f, ved en Skinne, der ved to Skruer fæstes i et Udsnit i Jærnskiven [1]).

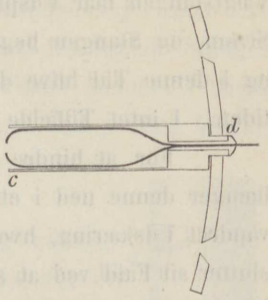


Fig. 3.

At der er boret to Huller til Optagelse af Farvestoffet er nærmest for Afbalanceringens Skyld, men ogsaa for, om man vil, at kunne faa to samtidige Udsprøjtninger.

Paa Støtten tt (Fig. 1) er der anbragt en Vinkelvægtstang, xx, som ved Fjedren a trykkes ind mod en isoleret elektrisk Kontakt β. Ved en Snor, der er fæstet i den vandrette Arm og er ført op gjennem Øjet y, kan man ved et Ryk give Vægtstangen en lille Drejning, til den møder en Stopper, δ. Herved nærmes en fra den lodrette Arm fremspringende Staalplade saa meget til den roterende Skive, at det fine Rør fra Farvebeholderne støder derimod og knækker over, hvorefter Udsprøjtningen tager sin Begyndelse.

Faldstangen hænger ned tæt ved Skiven i nogen Afstand i Rotationsretningen fra det Sted, mod hvilket Vægtstangen er rettet (se Fig. 7). Den er drejet af Messing 76 Cm. lang, 1,4 Cm. tyk og vejer 1,1 Kg. Foroven fortsættes den med en lige saa tyk, 5 Cm. lang Jærncylinder, saa at den hele Længde bliver 81 Cm. Ved denne Jærncylinder bæres Stangen af en Elektromagnet. Dennes Vindinger fortsættes ned omkring Jærncylindren, der dog selvfølgelig ikke berører Røret, hvorom Vindingerne ere lagte. Derved opnaaes det, at Strømmen fra 1 Bunsenselement kan bære den over 1 Kg. tunge Stang, uagtet Jærncylindren holdes i Afstand fra Elektromagneten ved en Messingknast. Faldstangens nederste Punkt hænger omtrent i Højde med Skiven; dens lodrette Stilling bliver kontrolleret ved to Lodsnore. Elektromagneten bæres af en fra en Mur udadgaaende Staalarm, saa at Faldstangen ikke er udsat for at komme i Bevægelse ved Rystelser fra Rotationsapparatet. Elektromagnetens Strøm føres til en med Støtten tt forbunden Klemskrue og derfra gjennem Vinkelvægtstangen og den isolerede Kontakt β. Naar man ved at dreje

[1]) Tildannelsen og Fyldningen af Farvepatronerne gaar vel meget let og i kort Tid; det er dog indlysende, at det var ønskeligt at kunne undvære denne Operation. Jeg har derfor, som det længere fremme nærmere vil blive omtalt, i et Apparat, jeg har ladet udføre særlig til Maaling af Stemmegaffers Svingningstid, indrettet det saaledes, at Farvestoffet bringes ind i Skiven under Rotationen og sprøjter ud gjennem en til enhver Tid aaben snæver Kanal.

Vægtstangen faar Udsprøjtningen til at begynde, afbrydes altsaa samtidig Elektromagnetens Strøm, og Stangen begynder sit Fald. Den er omtrent $^1/_3$ Sekund om at passere Skiven, og i denne Tid blive de Mærker afsatte, hvis Afstande tjene til Bestemmelse af Omløbstiden. I intet Tilfælde er Farvebeholdningen (omtrent $^1/_5$ Cubcm.) sluppen for tidlig op.

For at hindre tilfældige Sammenstød mellem den roterende Skive og Faldstangen, hænger denne ned i et kort Messingrør (se Fig. 7), der ud for Skiven er forsynet med en vandret Udskæring, hvorigjennem det udsprøjtende Farvestof finder Vej til Stangen. Denne slutter sit Fald ved at støde mod en i en Messingcylinder anbragt Blyprop, ovenover hvilken der i en Tragt af Træ er stoppet Blaar for at dæmpe Sammenstødet. En Ring i passende Højde over Stødpuden hindrer Stangen i at falde.

For at beskytte Omgivelserne mod Udsprøjtningen bliver der udenom det Messingrør, hvor Faldstangen hænger ned, og udenom de to Støtter *tt* og *uu* udspændt et Baand af Filtrerpapir rundt om Skiven og i Højde med den.

Vædsken sprøjter ud i Retning af Tangenten til den Bane, den afbrudte Flaskehals's Spids beskriver. Med den i Fig. 4 angivne Omløbsretning vil derfor Farvemærket paa Stangen afsættes som en Stribe *acb* tværs over denne, idet *ea* og *db* ere vandrette Fællestangenter for Skive og Stang. Med de givne Dimensioner for Skive og Stang samt den sidstes Afstand, omtrent 0,3 Cm. fra Flaskemundingen findes *db* at være omtrent 2,3 Cm. og *ea* = 5,1 Cm. Mærket afsættes som en fra Midten mod begge Ender tilspidset Stribe; medens Spidsen ved *b* er meget fin og skarpt tegnet, er den grovere og undertiden noget flosset ved *a*, hvad der forklares ved den længere Vej, som Vædsken maa tilbagelægge til *a*. Da Vejen til *b* allerede ikke er saa ganske kort, kunde det befrygtes, at Luftmodstanden vilde foranledige Uregelmæssigheder i den Bane, Vædsken beskriver; jeg har dog ikke kunnet bemærke saadanne Uregelmæssigheder og vil i saa Henseende særlig henvise til Forsøg Nr. 6 (S. 53), hvor jeg har maalt Mærkernes indbyrdes Afstand ved begge Ender. Var der nogen kjendelig Forstyrrelse i Vædskedelenes Baner ved *db*, maatte den give sig endnu tydeligere tilkjende paa den mere end dobbelt saa lange Vej *ea*. Sammenlignes imidlertid de af begge Rækker af Maalinger beregnede Omløbstider i det nævnte Forsøg, vil det sees, at Resultaterne for de 8 sidste Omløbstider, for hvilke den anvendte Beregningsmaade tillader en tilstrækkelig nøjagtig Bestemmelse, ikke vise større Afvigelser end $^1/_{50000}$ Sekund mellem de to Værdier for det samme Omløb, eftersom dette er bestemt ved den ene eller den anden Ende af Mærket. Da Vejen *ea* er meget nær lig *edb*, ville de to Spidser af hvert Mærke meget nær findes i samme Højde. Mærket buer noget nedad,

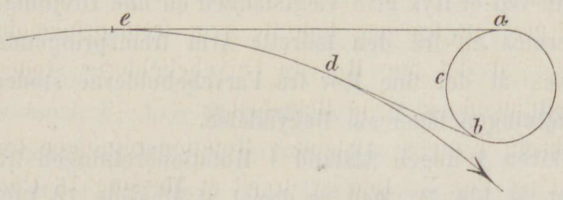


Fig. 4.

idet Farvestoffet har kortest Vej til Midten c af Mærket. Denne Højdeforskjel maa vise sig størst ved den øverste Ende af Stangen paa Grund af den voxende Hastighed. Stangen har en Hastighed af omtrent 300 Cm. naar dens øverste Del under Faldet kommer i Højde med Skiven. Fig. 5 viser i naturlig Størrelse et saadant paa Stangen ved p afsat Mærke. Af dette sees noget over Halvdelen, idet den Skiven nærmeste Spids er fremstillet omtrent midt paa Stangen.

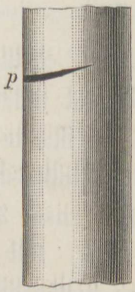


Fig. 5.

Mærkernes Højde aflæste jeg ved Kathetometer, idet jeg stillede Stangen lodret op ud for dette. Kathetometerkikkerten indstilledes paa et Punkt i Nærheden af Spidsen b (Fig. 4). Traadkorset indstilles paa Midten af det lille Stykke af Frembringeren, der falder indenfor Farvemærket. Denne Indstilling kan foretages med $^1/_{100}$—$^1/_{50}$ Mm. Sikkerhed. Der sørgedes for, at den lodrette Traad ved alle Mærkerne blev indstillet paa samme Frembringer paa den cylindriske Stang. Dette er nødvendigt, da Mærkerne, som ovenfor nævnt, bue nedad fra begge Ender. Den noget besværlige Kathetometeraflæsning vilde kunne afløses af en betydelig hurtigere og bekvemmere Aflæsning, naar der blev indrettet et særligt Maaleapparat dertil. Ved i forskjellige Forsøg at benytte to forskjellige Farver som vinaandige Opløsninger af Fuchsin og Methylviolet og ved at vende forskjellige Sider af Stangen til Skiven kan man opsætte Udmaalingen af Mærkerne, til mindst fire Forsøg ere udførte.

2. Beregning af Omløbstiden. Hvis man nøjagtig kjendte det Sted paa Stangen, hvor Udsprøjtningen vilde ramme, hvis Stangen blev hængende rolig ɔ: Nulpunktet for de Faldhøjder, der angives af Mærkerne, som afsættes under Faldet, og hvis det kunde forudsættes, at Stangen lige fra Begyndelsen fulgte Faldloven, vilde man simpelthen af Afstanden mellem to Mærker kunne finde Tiden for det tilsvarende Omløb af Skiven. Nulpunktet vilde man vel kunne faa afsat ved en lille Modifikation i Apparatet. Derimod kan man ikke paaregne, at Stangen begynder sit Fald efter Faldloven, da det som bekjendt tager en kjendelig Tid, før en Elektromagnets Magnetisme fuldstændig forsvinder. Følgen deraf vil være, at der under det første lille Fald virker en kjendelig Brøkdel af den Magnetisme, der har baaret Stangen.

For at være uafhængig af den heraf følgende Usikkerhed beregner jeg Hastigheden under den Forudsætning, at to paa hinanden følgende Omløbstider ere lige lange; det er en Forudsætning, hvis Rigtighed kan kontrolleres, og som man i de fleste Tilfælde kan gjøre Fyldest, hvad der næppe kan siges at gjælde Forudsætningen om Faldlovens Gyldighed under Faldets Begyndelse, hvad Slags Udløsning man saa end benytter. Til to paa hinanden følgende Omløb svarer tre paa hinanden følgende Mærker; ere disses aflæste Højder lig h_1, h_2, h_3, og kaldes de tilhørende Faldhastigheder v_1, v_2, v_3, har man, naar Omløbstiden er t,

$$h_2 - h_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} t, \quad h_3 - h_2 = \frac{v_2 + v_3}{2} t,$$

$$\delta = h_3 - h_2 - (h_2 - h_1) = \frac{v_3 - v_1}{2} t = g t^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{\delta}{g}}.$$

Omløbstiden beregnes altsaa meget simpelt af Forskjellen δ mellem Faldvejene for to paa hinanden følgende Omløb og af Faldets Acceleration g. Da de Omløbstider, der bleve maalte, altid vare saa smaa, at der blev afsat en Række af Mærker paa Stangen, kan Omløbstidernes Ligestorhed kontrolleres ved den Nøjagtighed, hvormed de forskjellige Differenser δ ere ligestore.

Har man et Antal Mærker, svarende til en Række ligetidige Omløb, kan man af tre hvilkesomhelst Mærkers Beliggenhed finde δ og altsaa Omløbstiden. Er l_1 Afstanden fra det første til det andet og l_2 fra det andet til det tredie Mærke, og svare disse Afstande til henholdsvis n_1 og n_2 Omløb, faar man

$$\delta = \frac{2}{n_1 + n_2} \left(\frac{l_2}{n_2} - \frac{l_1}{n_1} \right).$$

Jeg skal for at belyse Fremgangsmaaden nærmere omtale en enkelt Rotationsmaaling. Maalingen blev udført paa den Maade, at et Kathetometer var opstillet tæt ved Rotationsapparatet; Kikkerten var indstillet paa Stempelstangen ll (Fig. 1). Efter at Sprøjteflasken, anbragt i sit Messinghylster og fyldt med Farvestof, var sat ind i Jærnskiven gg (Fig. 1), blev denne omgiven med sin Skærm, og Strømmen til Faldstangens Elektromagnet blev sluttet samt Stangen hængt lodret op. Nu blev den elektriske Motors Strøm sluttet, og Stempelstangens nedadgaaende Vandring iagttoges. Efter nogen Tids Forløb naaede Rotationshastigheden sit Maximum, Stempelstangen sin dybeste Stilling; efter at den sidste i nogen Tid havde holdt sig uforandret i samme Stilling, et Tegn paa konstant Hastighed, blev ved et Ryk Vinkelvægtstangen, som foranlediger, at Faldet begynder, og at Sprøjteflaskens Hals knækker over, bevæget. Paa Faldstangen viste der sig bagefter afsat 16 Mærker af det udsprøjtende Farvestof. Stangen blev stillet lodret op overfor et andet Kathetometer og Mærkernes Højde aflæst som omtalt ovenfor. De iagttagne Højder vare i Cm.:

h_1	= 9,750	h_9	= 34,770
h_2	= 10,992	h_{10}	= 40,327
h_3	= 12,766	h_{11}	= 46,418
h_4	= 15,088	h_{12}	= 53,058
h_5	= 17,937	h_{13}	= 60,229
h_6	= 21,342	h_{14}	= 67,960
h_7	= 25,281	h_{15}	= 76,220
h_8	= 29,759	h_{16}	= 85,014.

Heraf findes for δ følgende Værdier:

0,532, 0,548, 0,527, 0,556, 0,534, 0,539, 0,533,
0,546, 0,534, 0,549, 0,531, 0,560, 0,529, 0,534.

Afvigelserne i de forskjellige Værdier af δ kunne dels hidrøre fra virkelige Forskjelligheder i Tiderne for de forskjellige Omløb, dels fra Rystelser i Rotationsapparatet. Derimod vil der, som vist S. 46, ikke fremkomme kjendelige Afvigelser ved Luftmodstanden mod det udsprøjtende Farvestof. Fejlen ved Kathetometeraflæsningen kan, som ovenfor sagt, regnes til højst $^1/_{50}$ Mm. Af den Maade, hvorpaa δ beregnes af de tre aflæste Højder, vil det sees, at der i δ kan indgaa en 4 Gange saa stor Fejl som i de aflæste Højder. I Middeltallet af n paa hinanden følgende Værdier af δ, kan Fejlen ikke overskride $^4/_n$ af Fejlen i den enkelte Højde; man har nemlig:

$$\sum_1^n \delta = h_{n+2} - h_{n+1} - (h_2 - h_1).$$

Da den søgte Omløbstid findes ved Kvadratrodsuddragning af δ, vil dens procentiske Fejl kun være det halve af δ's.

For at komme til Klarhed over Methodens Brugbarhed har jeg anstillet adskillige Maalinger, hvor jeg har aflæst alle de afsatte Mærkers Højder. Fremgaar det af disse, at Hastigheden har været tilnærmelsesvis konstant, kan man beregne Beliggenheden paa Stangen af et Nulpunkt for Faldet, svarende til, at Stangen hele Tiden var falden frit; paa Grund af Magnetismens langsomme Forsvinden falder dette Nulpunkt ikke sammen med det Punkt paa Stangen, der virkelig har været i Højde med det udsprøjtende Farvestof, før Faldet begyndte; det beregnede Nulpunkt maa ligge noget højere paa Stangen end det virkelige. Ved det beregnede Nulpunkt kan nu Faldtiderne for hvert enkelt af de forskjellige Farvemærker beregnes, og man kan saaledes faa en Værdi for det enkelte Omløb i Steden for som ved den foregaaende Beregning at faa en Middelværdi af to eller flere Omløbstider. Beregningsmaaden medfører, at de første Omløbstider findes med mindre Nøjagtighed end de senere. Naar det første Mærke tilfældigvis er bleven afsat meget kort Tid efter Faldets Begyndelse, kan det slet ikke benyttes, fordi det er bleven afsat, medens Bevægelsen endnu var paavirket af Magnetismen.

Højden $h_r - h_o$ fra det beregnede Nulpunkt til det r'te Mærke findes ved to af de aflæste Højder h_p og h_r samt ved δ, idet

$$h_o = h_r - \frac{\left(h_p - h_r - (p-r)^2 \frac{\delta}{2}\right)^2}{2(p-r)^2 \delta}.$$

Har man herved funden h_o, kan man beregne Faldvejen $h_m - h_o$ og derved Faldtiden t_m for hver aflæst Højde og saaledes finde den enkelte Omløbstid. Er der en Fejl $\Delta(h_m - h_o)$ i Faldvejen, vil den medføre en Fejl i Faldtiden, der er

$$\Delta t_m = \frac{\Delta(h_m - h_o)}{\sqrt{2g}\sqrt{h_m - h_o}}.$$

Da Δh_m ikke ved Maalingerne har vist sig at voxe med h_m, sees det heraf, at de sidste Faldtider maa bestemmes med størst Nøjagtighed. Jeg har derfor i de nedenfor angivne Resultater kun benyttet Faldveje > 10 Cm. til Beregning af Omløbstiderne.

Paa denne Maade har jeg beregnet Omløbstiderne i en Række af Maalinger, hvis Resultater findes nedenfor. Den første Række har Overskriften «Kviksølvfriktion», da de i den indeholdte Forsøg bleve udførte med Apparatet, saaledes som det er beskrevet ovenfor, saa at Bevægelsen overførtes til Axen ved Kviksølvfriktion. Den anden Række med Overskrift «Fast Axe uden Messingskive» er udført med det samme Apparat, hvorfra den flade Kviksølvbeholder er fjernet, og Snorløbet *ss* er forbundet direkte ved en fast Axe med Rotationsapparatet. I den tredie Række med Overskrift «Fast Axe med Messingskive» var der under Jærnskiven anbragt den S. 44 omtalte tykke Messingskive. Inertiemomentet var altsaa betydelig større end i de to andre Forsøgsrækker. I hver Forsøgsrække ere Forsøgene ordnede efter Omløbshastigheden. De under $h_m - h_o$ angivne Tal ere efter det foregaaende de direkte iagttagne, fra et vilkaarligt Nulpunkt regnede, Højder formindskede med den beregnede Højde h_o; det er vedføjet, hvilke af de aflæste Højder, der have været benyttede til Beregningen af h_o.

Kviksølvfriktion.

1. $\delta = 0{,}8728$, $h_2 = 2{,}278$, $h_8 = 27{,}926$;
heraf $h_2 - h_o = 1{,}571$.

m	$h_m - h_o$	Faldtider	Omløbstider	Δ
2	1,571	0,05658		
3	3,665	0,08642	0,02984	— 2
4	6,631	0,11624	0,02982	0
5	10,465	0,14604	0,02980	+ 2
6	15,179	0,17588	0,02984	— 2
7	20,761	0,20569	0,02981	+ 1
8	27,219	0,23551	0,02982	0.

Middelværdien for Omløbstiden er

$$t = 0{,}02982 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00002 Sek.

2. $\delta = 1{,}1189$, $h_2 = 12{,}695$, $h_6 = 30{,}201$, $h_{11} = 77{,}297$;
heraf $h_2 - h_o = 2{,}050$.

m	$h_m - h_o$	Faldtider	Omløbstider	Δ
1	0,468	0,03088		
2	2,050	0,06463	0,03375	
3	4,744	0,09832	0,03369	
4	8,564	0,13210	0,03378	— 1
5	13,506	0,16589	0,03379	— 2
6	19,556	0,19962	0,03373	+ 4
			0,03379	— 2
8	35,040	0,26720		
9	44,454	0,30096	0,03376	+ 1
10	55,000	0,33477	0,03381	— 4
11	66,652	0,36853	0,03376	+ 1.

Middelværdien for de 7 sidste Omløbstider er

$$t = 0{,}03377 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00004 Sek.

3. $\delta = 1{,}8690$, $h_1 = 21{,}662$, $h_5 = 40{,}914$, $h_9 = 90{,}084$;
heraf $h_1 - h_o = 0{,}310$.

m	$h_m - h_o$	Faldtider	Omløbstider	Δ
1	0,310	0,02513		
2	2,322	0,06878	0,04365	
3	6,194	0,11234	0,04356	
4	11,944	0,15601	0,04367	— 2
5	19,562	0,19965	0,04364	+ 1
6	29,050	0,24330	0,04365	0
7	40,412	0,28696	0,04366	— 1
8	53,638	0,33060	0,04364	+ 1
9	68,732	0,37425	0,04365	0.

Middelværdien for de 6 sidste Omløbstider er

$$t = 0{,}04365 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00002 Sek.

Fast Axe uden Messingskive.

4. $\delta = 0{,}5394$, $h_1 = 9{,}750$, $h_2 = 10{,}992$, $h_7 = 25{,}281$, $h_{16} = 85{,}014$;
heraf $h_1 - h_o = 0{,}875$.

m	$hm - ho$	Faldtider	Omløbstider	Δ
1	0,875	0,04222		
2	2,117	0,06568	0,02346	
3	3,891	0,08904	0,02336	
4	6,213	0,11252	0,02348	
5	9,062	0,13589	0,02337	
6	12,467	0,15939	0,02350	
7	16,406	0,18284	0,02345	0
8	20,884	0,20629	0,02345	0
9	25,895	0,22971	0,02342	+ 3
10	31,452	0,25316	0,02345	0
11	37,543	0,27659	0,02343	+ 2
12	44,183	0,30005	0,92346	— 1
13	51,354	0,32349	0,02344	+ 1
14	59,085	0,34699	0,02350	— 5
15	67,345	0,37044	0,02345	0
16	76,139	0,39388	0,02344	+ 1.

Middelværdien af de 10 sidste Omløbstider er

$$t = 0{,}02345 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00005 Sek.

5. $\delta = 0{,}6374$, $h_3 = 13{,}089$, $h_7 = 27{,}462$, $h_{11} = 52{,}025$;
heraf $h_3 - h_o = 4{,}215$.

m	$hm - ho$	Faldtider	Omløbstider	Δ
2	2,214	0,06717		
3	4,215	0,09270	0,02553	
4	6,848	0,11813	0,02543	
5	10,127	0,14365	0,02552	
6	14,043	0,16916	0,02551	— 3
7	18,587	0,19461	0,02545	+ 3
8	23,775	0,22011	0,02550	— 2
9	29,599	0,24559	0,02548	0
10	36,060	0,27107	0,02546	+ 2
11	43,150	0,29652	0,02545	+ 3
12	50,882	0,32199	0,02547	+ 1
13	59,258	0,34749	0,02550	— 2
14	68,264	0,37296	0,02547	+ 1
15	77,913	0,39844	0,02548	0.

Middelværdien af de 10 sidste Omløbstider er

$$t = 0{,}02548 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00003 Sek.

6. I dette Forsøg bleve Faldhøjderne maalte ved begge Ender af Mærkerne (jvfr. S. 46).

a. Mærkerne maalte ved den Skiven nærmeste Ende:

$\delta = 0{,}8682$, $h_3 = 13{,}183$, $h_7 = 30{,}848$, $h_{11} = 62{,}399$;

heraf $h_3 - h_o = 4{,}135$.

m	$h_m - h_o$	Faldtider	Omløbstider	Δ
1	0,498	0,03185		
2				
3	4,135	0,09179		
4	7,242	0,12148	0,02969	
5	11,232	0,15129	0,02981	
6	16,087	0,18105	0,02976	— 3
7	21,800	0,21076	0,02971	+ 2
8	28,391	0,24052	0,02976	— 3
9	35,838	0,27023	0,02971	+ 2
10	44,162	0,29998	0,02975	— 2
11	53,351	0,32971	0,02973	0
12	63,413	0,35947	0,02976	— 3
13	74,334	0,38919	0,02972	+ 1.

Middelværdien af de 8 sidste Omløbstider er

$$t = 0{,}029735 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00003 Sek.

b. Mærkerne maalte ved den fra Skiven fjærneste Ende:

$\delta = 0{,}8682$, $h_3 = 13{,}146$, $h_7 = 30{,}811$, $h_{11} = 62{,}365$;

heraf $h_3 - h_o = 4{,}135$.

m	$h_m - h_o$	Faldtider	Omløbstider	Δ
1	0,505	0,03208		
2	1,885	0,06197	0,02989	
3	4,135	0,09179	0,02982	
4	7,247	0,12152	0,02973	
5	11,235	0,15131	0,02972	
6	16,089	0,18106	0,02975	— 2
7	21,800	0,21076	0,02970	+ 3
8	28,389	0,24051	0,02975	— 2
9	35,840	0,27024	0,02973	0
10	44,169	0,30000	0,02976	— 3
11	53,354	0,32971	0,02971	+ 2
12	63,411	0,35946	0,02975	— 2
13	74,332	0,38918	0,02972	+ 1.

Middelværdien af de 8 sidste Omløbstider er

$$t = 0{,}029734 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00003 Sek.

Som det ses, afvige de to af a og b fremgaaende Middeltal indbyrdes kun 0,000001 Sek. Overensstemmelsen for hver enkelt Omløbstids Vedkommende, eftersom den er bestemt ved Mærkernes inderste eller yderste Ender, vil fremgaa af nedenstaaende Sammenstilling af Resultaterne for de 8 sidste Omløbstider.

m	Omløbstider bestemt ved a.	Omløbstider bestemt ved b.
6	0,02976	0,02975
7	0,02971	0,02970
8	0,02976	0,02975
9	0,02971	0,02973
10	0,02975	0,02976
11	0,02973	0,02971
12	0,02976	0,02975
13	0,02972	0,02972

Det sees af denne Sammenstilling, at kun for to Omløbstider beløber Forskjellen paa de to Bestemmelser sig til 0,00002 Sek., medens de øvrige højst afvige 0,00001 Sek. Jeg anser dette Forsøg for afgjørende med Hensyn til Sprøjtemethodens Brugbarhed, idet det, som allerede omtalt S. 46, viser, at det udsprøjtende Farvestof bevæger sig med stor Sikkerhed gjennem Luften selv paa en flere Cm. lang Vej, og — i Overensstemmelse med mine øvrige Iagttagelser — bestemmer Grændsen for den Nøjagtighed, jeg har naaet i den enkelte Tidsmaaling, til $^1/_{50000}$ Sek.

7. $\delta = 1{,}6456$, $h_3 = 19{,}293$, $h_6 = 44{,}105$, $h_9 = 83{,}694$.
heraf $h_3 - h_o = 10{,}220$.

m	$h_m - h_o$	Faldtider	Omløbstider	Δ
1	1,869	0,06171		
2	5,190	0,10283	0,04112	
3	10,220	0,14431	0,04147	
4	16,847	0,18528	0,04097	— 3
5	25,111	0,22621	0,04093	+ 1
6	35,032	0,26718	0,04097	— 3
7	46,588	0,30811	0,04093	+ 1
8	59,781	0,34902	0,04091	+ 3
9	74,621	0,38995	0,04093	+ 1.

Middelværdien af de 6 sidste Omløbstider er

$$t = 0{,}04094 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00003 Sek.

Fast Axe med Messingskive.

8. $\delta = 4{,}042$, $h_1 = 22{,}515$, $h_4 = 63{,}989$;
heraf $h_1 - h_o = 7{,}459$.

m	$h_m - h_o$	Faldtider	Omløbstider	Δ
1	7,459	0,12328		
2	17,247	0,18747	0,06419	
3	31,074	0,25163	0,06416	0
4	48,933	0,31577	0,06414	+ 2
5	70,846	0,37995	0,06418	− 2.

Middelværdien af de 3 sidste Omløbstider er

$$t = 0{,}06416 \text{ Sek.}$$

Største Afvigelse fra Middelværdien er 0,00002 Sek.

Naar man i alle de her anførte Forsøg i Henhold til Bestemmelsen ovenfor S. 49 af Fejlen, der skyldes Beregningsmaaden af de enkelte Omløbstider, udelader de Omløbstider, i hvilke Faldveje mindre end 10 Cm. indgaa, og naar man betragter hver enkelt Højdemaalings Resultat som en selvstændig Tidsmaaling, vil det sees,

1) at i de Forsøg, hvor Kviksølvfriktion har været anvendt, er der af 18 Maalinger kun to, hvor Afvigelsen fra Middeltallet naar $^1/_{25000}$ Sek., medens den i de øvrige ikke overskrider $^1/_{50000}$ Sek.;

2) at i Forsøgene med fast Axe er der af 49 Maalinger 1 med en Afvigelse lig 0,00005 Sek. fra det tilhørende Middeltal, 11 med en Afvigelse 0,00003 Sek., medens Afvigelsen for de øvrige 37 Maalinger ikke overskrider $^1/_{50000}$ Sek. Overførelse af Bevægelse ved Kviksølvfriktion har saaledes øjensynlig bidraget til at gjøre Bevægelsen jævn.

Det vil formentlig heraf, og af hvad der blev sagt under Forsøg 6, fremgaa som overvejende sandsynligt, at de iagttagne Afvigelser $> {}^1/_{50000}$ Sek. skyldes virkelige Variationer i Omløbstiden og ikke Fejl hidrørende fra Maalemethoden. Jeg tør derfor paastaa at have tilvejebragt et Middel til under nogenlunde gunstige Forhold at maale en enkelt Omløbstid med en Nøjagtighed af $^1/_{50000}$ Sek.

Stangens største Hastighed under Faldet forbi den roterende Skive er omtrent 300 Cm. Med den Hastighed falder den 0,006 Cm. i $^1/_{50000}$ Sek. Da Flertallet af Mærker svare til mindre Hastigheder, vil det heraf fremgaa, at den opnaaede Nøjagtighed i Tidsmaalingen kommer nær op til den Grændse, der bestemmes ved Længdemaalingens Nøjagtighed. Jeg tvivler ikke om, at man kan naa denne Grændse med et fuldkomnere Apparat end det, jeg hidtil har arbejdet med. Lader man Faldstangen faa en længere Faldvej, saa at den passerer Skiven med større Hastigheder end de her anvendte, ville Fejlene i Længdemaalingerne faa en endnu mindre Betydning end i de her

nævnte Maalinger. Længdemaalingens Nøjagtighed vil, tror jeg, bestemmes af Maaleapparatets, idet Farvemærkerne paa Faldstangen ere saa skarpt begrændsede, at de danne et fortrinligt Objekt for Maalingen. Ved at gjøre Udstrømningsaabningen fin, kunne Mærkestregerne gjøres meget smalle.

Lader man Farvestoffet sprøjte ud ad et fint Glasrør, kan man ikke i de forskjellige Forsøg faa lige fine Mærker, da hver Glasbeholder kun kan bruges én Gang. I et nyt Apparat, jeg har ladet udføre, har jeg bl. a. derfor ændret Methoden saaledes som antydet S. 45, Anm. Farvestoffet anbringes umiddelbart i den Kanal, der bores ind i Skiven, og sprøjter ud ad et fint Hul i en Metalprop, der lukker denne Kanals yderste Munding. For at faa Sprøjtningen til at begynde i rette Tid, indretter jeg det saaledes, at Opløsningen føres ind i den nævnte Kanal i Skiven, medens denne roterer, og umiddelbart før Stangen begynder sit Fald. Hullet i Metalproppen vilde snart forstoppes, hvis det tilbageværende Farvestof fik Lov til at indtørres deri; dette undgaaes imidlertid ved, medens Skiven endnu roterer, at sende Vinaand samme Vej som før Farvestoffet, hvorved der fremkommer en grundig Udvaskning af Kanalens og Hullets Vægge. Metalproppens Yderflade sidder i Flugt med Skivens Rand; da saaledes Udstrømningsaabningen er i konstant Afstand fra Omdrejningsaxen, og da man er fri for den fra Skivens Rand udgaaende Glasspids, der knækkes af, kan man lade Faldstangen falde meget tæt forbi Skiven, saa at Farvestoffets Vej i Luften kan reduceres betydeligt.

Ved at lade Farvestoffet sprøjte ud gjennem en fastsiddende Metalprop, vil man i Forvejen kunne kjende det virkelige Nulpunkt for Faldet; dette er nu, som omtalt S. 47, uden Betydning for Tidsberegningen paa Grund af de forstyrrende Virkninger, der sikkert ville komme ved enhver Slags Udløsning og i hvert Tilfælde ere tilstede ved den bekvemmeste, nemlig den elektromagnetiske. Ved imidlertid at sammenligne det virkelige Nulpunkts Beliggenhed med det af Farvemærkerne beregnede, vil man kunne faa Oplysninger om Betydningen af de forstyrrende Virkninger, der gjøre sig gjældende ved Udløsningen; dette har nogen Interesse, da mange Tidsmaalinger ere foretagne og stadig foretages (f. Ex. ved Boulengers Kronograf) under Forudsætning af en momentan Forsvinden af en Elektromagnets Magnetisme eller dog af en højst problematisk Elimination af Tiden for dens Forsvinden.

Anvendeligheden af den her beskrevne Methode til Maaling af Rotationstider er betinget dels af Vinkelhastigheden dels af Afstanden fra Axen til Udstrømningsaabningen. Bedst egner den sig naturligvis til Maaling af store Hastigheder. Jeg har anvendt den ved Hastigheder fra 15 til over 40 Omløb i Sekundet; Skivens Diameter var 15 Cm. Med den Diameter tror jeg ikke man kan gaa langt under 15 Omløb pr. Sekund. Anvendeligheden vil væsenligst være betinget af Periferihastigheden; naar altsaa Diametren voxer i omvendt Forhold af Vinkelhastigheden, vil Methoden kunne anvendes ogsaa ved mindre Vinkelhastigheder end 15 pr. Sekund.

Den Hastighed, man maaler, er den, som Rotationsapparatet har, efter at Glasspidsen er afbrudt. Ønsker man, hvad der jo oftest vil være Tilfældet, at kjende Hastigheden umiddelbart før eller samtidig med Afbrydningen, maa man sørge for, at denne ikke foranlediger noget kjendeligt Hastighedstab. Da det fine Glasrør, der brydes over i mine Forsøg, kun har været 0,2—0,3 Mm. i udvendigt Maal, og da Rotationsapparatets Bevægelsesenergi ved de mindste Hastigheder har været flere Kgrmetre stor, indsees det, at Hastighedstabet kun kan have været meget ringe; at dets Indflydelse paa Maalingsresultatet i hvert Tilfælde er betydelig mindre end Iagttagelsesfejlene, vil jeg paavise i Afsnit IV. Forøvrigt undgaaes Glasrørets Overbrydning ved den ovenfor omtalte Ændring af Methoden. I Steden for vil der fremkomme et yderst ringe Hastighedstab ved Farvestoffets Indbringelse i den roterende Skive; men dette Tab vil med Sikkerhed kunne beregnes.

I de hidtil nævnte Rotationsmaalinger har jeg maalt alle eller saa godt som alle Mærkerne, for at komme til en Afgjørelse af den Nøjagtighed, Maalingen kunde give samt af, hvorvidt man under givne Omstændigheder kunde anse Omløbstiden for konstant, i den Tid (omtr. $^1/_3$ Sek.) Stangen falder. Som nævnt S. 48 blev Faldet begyndt, naar Stempelstangen i Rotationsapparatets Staalcylinder i nogen Tid ($^1/_2$—1 Minut) havde holdt sig i konstant Højde, og dette Kjendetegn paa konstant Hastighed har ved de nævnte Forsøg vist sig fuldkommen paalideligt; uden det vilde jeg næppe have kunnet udføre nogen af de i det følgende omtalte Undersøgelser fuldt tilfredsstillende. Naar man har et saadant Kjendetegn paa konstant Hastighed, behøver man ikke ved Anvendelse af Sprøjtemethoden at maale mere end tre Mærker (se S. 48); jeg har i Reglen for Kontrollens Skyld maalt 4 eller 5 ved de Anvendelser af Methoden, jeg i det følgende skal omtale.

Foruden de Anvendelser, min Methode kan faa, hvor det gjælder om at bestemme Tiden for et enkelt Omløb, skal jeg gjøre opmærksom paa, at den i omvendt Anvendelse giver en smuk Paavisning af Faldloven og kan til Forelæsningsbrug tjene til Bestemmelse af Accelerationen ved det frie Fald. Mit Apparat er altsaa en ny Faldmaskine; det kan som saadan ikke blot gjøre Tjeneste ved Undervisningen, men ogsaa i videnskabelige Undersøgelser; saaledes vil man ved samtidig at lade to Stænger falde kunne komme til Resultater over Luftmodstanden og over Modstanden, som en Leder møder ved at bevæge sig i et magnetisk Felt (og derigjennem over Ledningsmodstanden), idet man kan lade den ene Stang falde frit, medens den anden faar en maalelig Paavirkning ved en af de nævnte Modstande. Jeg har i det ovenfor omtalte nye Apparat taget Hensyn til denne Anvendelse. De ovenfor angivne Resultater vise, at Luftmodstanden ikke har haft nogen paaviselig Indflydelse paa Faldet i mine Forsøg.

II. Centrifugalsugning.

1. En foroven og forneden lukket Cylinder $CDEF$ af Radius R_o (Fig. 6) antages at indeholde en mindre, lukket (massiv eller hul) Cylinder, Stemplet, af Radius r_o og Højde h, endvidere en Vædske og Luft af Tryk c. Luften antages at fylde et Rum v. Cylindren antages at rotere om sin lodret staaende Axe, og Luften befinder sig udelukkende over Stemplet; dettes Middelvægtfylde, ρ_1, antages mindre end Vædskens ρ. Vinkelhastigheden ω antages saa stor, at den parabolske fri Overflade skæres af Fladen CD og af Stemplets Overside. Der søges de lodrette Tryk, som virke paa Stemplets Over- og Underside, idet den førstes Afstand x fra Fladen CD er given.

Idet den parabolske Overflade tænkes fortsat nedad til sit nederste Punkt A, kaldes Afstanden fra A til et Punkt i Axen z og Radien i Paraboloidens cirkulære Snit gjennem Punktet med Ordinaten z kaldes r. Man har da

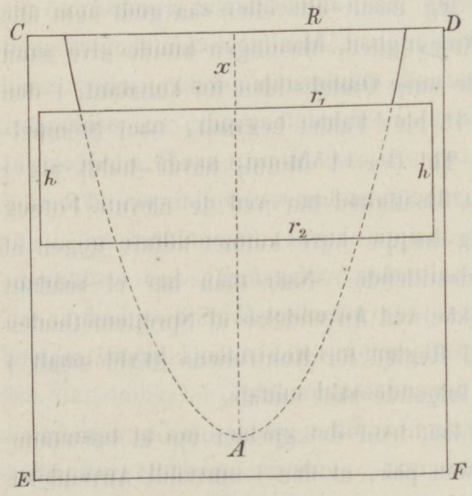


Fig. 6.

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hvor g er Accelerationen ved det frie Fald.

Radierne til Cirklerne, som Paraboloidefladen afskærer af Fladen CD samt Stemplets Over- og Underside, kaldes henholdsvis R, r_1 og r_2. Man finder

$$v = \frac{\pi\omega^2}{4g}(R^4 - r_1^4) = \frac{\pi g}{\omega^2} x(2Z - x),$$

hvor Z er z-Koordinaten til CD. Heraf faaes

$$Z = \frac{\omega^2 v}{2\pi g x} + \tfrac{1}{2} x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Fladeenhedstrykket paa Oversiden af Stemplet indenfor Cirklen med Radius r_1 sættes lig det konstante Lufttryk c, idet der bortsees fra Variationen i Lufttrykket ved Rotationen, hvad der er berettiget i det foreliggende Tilfælde, hvor der er Tale om atmosfærisk Luft af almindelig Tæthed og det 10000 Gange saa vægtfyldige Kviksølv. Udenfor den nævnte Cirkel, hvis Radius r_1 faaes ved (1), idet z-Koordinaten er $Z - x$, er der et Fladeenhedstryk i Afstand r fra Axen

$$p = c + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2(r^2 - r_1^2).$$

Som Kraftenhed benyttes den absolute Kraftenhed i Cm., Gr., Sek. Systemet. Det hele Tryk paa Stemplets Overside bliver altsaa

$$P_1 = \pi r_o^2 c + \int_{r_1}^{r_o} 2\pi r p\, dr = \pi r_o^2 c + \tfrac{1}{2}\pi\rho\omega^2\left(\tfrac{1}{2}(r_o^4 + r_1^4) - r_o^2 r_1^2\right).$$

Trykket P_2 paa Undersiden af Stemplet findes paa lignende Maade; her varierer Trykket lige fra Axen til Randen; til Bestemmelse af Integrationskonstanten har man, at Paraboloideoverfladens Fortsættelse under Stemplet er en Niveauflade, hvor Trykket er c. Man maa altsaa finde Radien r_2 ved (1) og ved z-Koordinaten, der er $Z-x-h$. Man faar

$$P_2 = \pi r_o^2 c - \tfrac{1}{2}\pi\rho\omega^2(r_o^2 r_2^2 - \tfrac{1}{2}r_o^4).$$

Denne Beregning har dog kun Gyldighed, naar Trykket c er stort nok til at hindre, at der dannes et lufttomt Rum under Stemplet.

Resultanten P af Trykkene paa Over- og Undersiden, som jeg kalder Centrifugalsugningen, bliver

$$P = P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\pi\rho\omega^2(\tfrac{1}{2}r_1^4 - r_o^2(r_1^2 - r_2^2))$$
$$= \rho g\frac{\pi\omega^2}{4g}r_1^4 - \rho g\pi r_o^2 h = \rho g\frac{\pi\omega^2}{4g}r_2^4 - \rho g\left(\pi r_o^2 h - \frac{\pi\omega^2}{4g}(r_1^4 - r_2^4)\right) \quad \ldots \quad (3)$$

I det sidste Udtryk for P sees det første Led at være Vægten af den Vædske, som fylder det parabolske Rum under Stemplet, medens det sidste Led er Vægten af den Vædske, som fortrænges af Stemplet udenfor den parabolske Flade. Forholdet kan altsaa opfattes saaledes, at Vægten af det parabolske Vædskerumfang under Stemplet bæres af dette, ligesom Kviksølvet i et lige Barometerrør kan siges at bæres af Røret, idet Kviksølvet forøger Rørets tilsyneladende Vægt med sin egen. Denne nedadgaaende Kraft modvirkes af den af Stemplet uddrevne Vædskemasses Vægt, altsaa af Opdriften, svarende til Opdriften paa den Del af et Barometerrør, der naar ned under Kviksølvoverfladen i Barometerkarret.

Reduceres Stemplet til en uendelig tynd Skive, bliver $h = O$, $r_1 = r_2$, saa at sidste Led forsvinder.

Foruden Trykket P, virker der paa Stemplet dettes egen Vægt $g\rho_1\pi r_o^2 h$. Resultanten af alle de virkende Kræfter bliver altsaa

$$P' = \tfrac{1}{4}\pi\rho\omega^2 r_1^4 - \pi(\rho - \rho_1)g r_o^2 h.$$

Indføres z-Koordinaten z_1 til Stemplets Overside for r_1, faaes, idet $z_1 = Z - x$

$$P' = \frac{\pi\rho g^2}{\omega^2}z_1^2 - \pi(\rho-\rho_1)g r_o^2 h = \pi\rho\left(\frac{v}{2\pi}\frac{\omega}{x} - \frac{g}{2}\frac{x}{\omega}\right)^2 - \pi(\rho-\rho_1)g r_o^2 h.$$

Er Stemplet frit, vil det bevæge sig i Retning af Kraften P' og tilsidst antage en Ligevægtsstilling bestemt ved Stemplets Oversides Afstand ξ fra Fladen CD, hvor $P' = 0$. Man har altsaa til Bestemmelse af ξ

$$\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{\rho-\rho_1}{\rho}\frac{r_o^2 h}{g}}\frac{\xi}{\omega} - \frac{v}{\pi g} = 0.$$

Kvadratroden maa have positivt Fortegn, da z_1 ifølge Forudsætningen er positiv. Af Ligningens Form sees det allerede, at Stemplets Afstand fra Fladen CD er proportional med Vinkelhastigheden. Man faar, idet Stemplets Volumen $\pi r_o^2 h = \varphi$,

$$\frac{\xi}{\omega} = \frac{\sqrt{v + \frac{\rho-\rho_1}{\rho}\varphi} - \sqrt{\frac{\rho-\rho_1}{\rho}\varphi}}{\sqrt{\pi g}} = \frac{1}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Denne Formel og altsaa Proportionaliteten mellem ξ og ω er begrændset ved Forudsætningerne for Beregningen, som ere, dels at den parabolske Overflade skæres saavel af Fladen CD som af Stemplets Overside, dels af, at der ikke dannes noget tomt Rum under Stemplet; det sidste giver en højere, det første en lavere Grændse for de Vinkelhastigheder, for hvilke Beregningen finder Anvendelse.

Forudsættes Stemplets Diameter kun lidt mindre end den ydre Cylinders, kan den lavere Grændse ω_1 findes som den, der gjør $R = R_o$. Man har ved (4) $\xi_1 = \frac{1}{C}\omega_1$ og ifølge (2) og (1)

$$Z = \frac{\omega_1 v}{2\pi g} C + \tfrac{1}{2}\frac{\omega_1}{C} = \frac{\omega_1^2}{2g} R_o^2$$

$$\omega_1 = \left(\frac{vC}{\pi} + \frac{g}{C}\right) : R_o^2.$$

Er f. Ex. $R_o = 2$ Cm., $\rho = 10\rho_1$, $v = \varphi = 40$ Cubcm., faaes med omtrentlige Værdier

$$\frac{1}{C} = 0{,}0489, \quad \omega_1 = 77.$$

Hertil svarer et Omløbstal af noget over 12 i Sek.

Maximumhastigheden ω_2, for hvilken Beregningen gjælder, findes ved at søge Trykket i Axens Skæringspunkt med Undersiden af Stemplet. Dette Tryk er

$$p = c - \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r_2^2.$$

For $p = 0$, faar man $\omega = \omega_2$. Altsaa

$$r_2^2\omega_2^2 = \frac{2c}{\rho} = 2gz_2,$$

$$z_2 = \frac{\omega_2^2 v}{2\pi g\xi_2} - \tfrac{1}{2}\xi_2 - h = \frac{c}{g\rho},$$

$$\frac{\omega_2 vC}{2\pi g} - \frac{1}{2C}\omega_2 = \frac{c}{g\rho} + h,$$

$$\omega_2 = 2\frac{\frac{c}{g\rho} + h}{\frac{vC}{\pi g} - \frac{1}{C}}.$$

Udtrykket for z_2 viser, hvad der jo ogsaa kan indsees umiddelbart, at Trykket under Stemplet bliver Nul, naar z-Koordinaten til Stemplets Underside er lig Barometerstanden $\frac{c}{g\rho}$, idet c forudsættes at være Atmosfærens Tryk og Vædsken at være Kviksølv.

Antages det, at i Udtrykket for ω_2 er $\rho = 13{,}6$ og $\frac{c}{g\rho} + h = 80$ Cm., og benyttes forøvrigt de samme Værdier som ovenfor, faaes

$$\omega_2 = 741,$$

hvortil svarer et Maximumomløbstal af over 100 i Sek.

I det her forudsatte Exempel sees det, at naar Cylindrens Vinkelhastighed voxer fra 77 til 741 (Omløbstallet fra c. 12 i Sek. til c. 117), vil Stemplet synke fra Afstand 3,76 Cm. fra Fladen *CD* til Afstand 36,24, forudsat at den ydre Cylinder er dyb nok. Dets Afstand fra *CD* vil være proportional med Vinkelhastigheden. Hastighedens Forøgelse med 1 Omløb pr. Sekund vil flytte Stemplet omtrent 3,1 Millim.

2. Hastighedsmaaling ved Centrifugalsugning. Det vil fremgaa af det ovenfor nævnte, at man ved Centrifugalsugningen kan faa et Middel til ved en umiddelbar lagttagelse at maale en Axes Omløbshastighed under Rotationen. Maalingen er absolut, naar man i Forvejen har udmaalt Dimensionerne og Vægtfylderne, idet man da ved (4) kan finde det konstante Forhold mellem Afstanden ξ og Vinkelhastighederne. Der kan maales baade smaa og ubegrændset store Hastigheder, naar man afpasser Apparatets Dimensioner efter Hastigheden. Særlig vil jeg gjøre opmærksom paa, at man ved at variere Vædskemængden i et Apparat, hvis Dimensioner forøvrigt ere givne, kan variere Konstanten *C* indenfor vide Grændser. Stemplet vil paa Grund af sin mindre Vægtfylde ved selve Centrifugalvirkningen i Vædsken faa sin Axe indstillet i Rotationsaxen, saa at det ikke risikeres, at noget Punkt af det slæber paa den ydre Cylinder. Stemplets Stilling kan observeres, ved at det forsynes med en lodret opadgaaende Stang, der gaar op gjennem et Hul i Laaget paa den ydre Cylinder. Hvis det foretrækkes, kan det samme opnaaes, ved at man fører en Følestift, som ikke deltager i Rotationen ned til Oversiden af Stemplet, der for Midtens Vedkommende jo altid er blottet for Vædske.

De Stoffer, det ligger nærmest at benytte, i det mindste naar der er Tale om hurtig Rotation, er Jærn og Kviksølv. Det er ret anselige Kræfter, der i saa Tilfælde komme til at virke paa Stemplet selv ved smaa Dimensioner. Har man saaledes en Jærncylinder af 4 Cm. Diameter med et Stempel af omtrent samme Diameter og en Højde af 3 Cm., og fylder Luftrummet 2 Cm. i Cylindren, vil man ved (3) finde, at det resulterende Tryk fra Kviksølvet paa Stemplet er omtrent $5^1/_2$ Kgr., naar dettes Overside holdes $2^1/_2$ Cm. fra Fladen *CD*, og Cylindren roterer med en Hastighed af 2400 Omløb i Minutet.

Som det vil erindres fra Beskrivelsen af mit Rotationsapparat, har jeg der anbragt en saadan Hastighedsmaaler. Jeg skal nu nævne mine Erfaringer ved Brugen af denne Del af Apparatet. Med Hensyn til den Sikkerhed, hvormed Stemplet indstiller sig i sin Ligevægtsstilling, har jeg erfaret, hvad der jo ogsaa var at vente, at naar Hastigheden varierer, er Stemplet noget tilbage i sin Vandring, fordi Kviksølvet ikke strax faar Staalcylindrens

Hastighed. Da Stemplet i mit Apparat er 3 Cm. højt, og Cylinderhøjden er 11 Cm., indeholder Cylindren en betydelig Mængde Kviksølv og tillader en stor Vandring af Stemplet. Ved et Apparat, der kun er indrettet til Maaling af Hastigheder indenfor nogenlunde snævre Grændser, kan Kviksølvmængden formindskes saa betydelig, at man ikke herved kan møde nogen Hindring i at faa et sikkert Maal for Hastigheden, naar denne blot er nogenlunde jævn.

I de Forsøg jeg har gjort, hvor jeg i nogen Tid holdt en bestemt Hastighed konstant vedlige (se IV), har jeg ved lagttagelse med en tæt ved Apparatet anbragt Kathetometerkikkert altid fundet, at Stempelstangen nøjagtig indtog samme Stilling ved samme Hastighed.

Jeg har ikke hidtil benyttet Stempelbevægelsen til egenlig Hastighedsmaaling men benyttet den med stor Fordel dels til, naar en bestemt Hastighed tilstræbtes, da at skønne, naar denne omtrent var naaet, for derefter at afpasse Motorens Bevægkraft, dels og især til ved Stempelstangens Stillestaaen at konstatere jævn Hastighed.

3. Hastighedsregulering. Paa Grund af den betydelige Kraft, der paavirker Stemplet, naar det kommer ud af sin Ligevægtsstilling, kan Virkningen paa Stemplet med Fordel benyttes til Regulering af Hastigheder. Jeg tvivler ikke om, at Apparatet, naar man giver det tilstrækkelig store Dimensioner, kan benyttes som en meget paalidelig Regulator for en Damp- eller Gasmotor, paalidelig fordi Apparatet er meget solidt, og fordi den hele Virkning er grundet paa Rotationens Virkning paa Kviksølv, saa at der ingen Fjeder behøves. Jeg har prøvet Apparatet som Regulator for den elektriske Motor, der drev Rotationsapparatet. Den ved denne Lejlighed benyttede Motor var en Edelmanns Dynamo med c. 7 Ohms Modstand; den blev dreven ved 10—12 Accumulatorer. Arbejdet, som forlangtes af Motoren, var meget ringe i Sammenligning med, hvad den er konstrueret til, saa at den ikke har arbejdet under gunstige Betingelser for konstant Hastighed.

Regulatorapparatet sees anbragt i Fig. 7. Det blev fastskruet paa den Bom i Rotationsapparatet, der forbinder de to Støtter *tt* og *uu* (Fig. 1), og hvori Rotationsapparatets Tap *m* har sit Leje. Det bestaar af to isolerede Opstandere, en paa hver Side af Stempelstangen. Den ene bærer en Fjeder *a*, der kan hæves eller sænkes noget ved Stilleskruen *b*. Rotationsaxens Forlængelse og altsaa Stempelstangen træffer Fjedren *a* omtrent paa Midten. Den anden Opstander bærer en Arm, der fører hen over Midten af Fjedren *a*, og den er der forsynet med en isolerende Knop *c*, der støtter Fjedren fra oven. Samme Arm bærer en Kontaktskrue *k*, der med en Platinspids møder en Platinplade paa Fjedren *a*. Skruen *k* sænkes saa meget, at Fjedren, naar den trykkes opad, møder *k*, mens der endnu er lidt Afstand mellem Fjedren og Knoppen *c*. Naar Apparatet er i Ro eller gaar med ringe Hastighed, vil Opdriften paa Stemplet gjennem Stempelstangen trykke Fjedren op mod Kontaktskruen *k*. Naar en vis Hastighed overskrides, ophører Trykket, og Fjederkraften vil afbryde Forbindelsen mellem *a* og *k*.

Motorens Strøm blev sendt gjennem Fjedren og Kontaktskruen ved to Klemskruer *d* og *e*, der tiltillige bleve forbundne ved en Modstand af passende Størrelse og uden Selvinduktion. Der blev valgt en Batterikraft, der uden indskudt Modstand vilde give Apparatet en lidt for stor Hastighed, og den mellem *d* og *e* anbragte Modstand valgtes saa stor (sædvanlig 1 S. E.), at den, indskudt, vilde give en lidt for lille Hastighed. Følgen heraf vil være, at Apparatet faar en Middelhastighed lig den, der netop faar Fjedren *a* til at røre Kontaktskruen *k*. Under Reguleringen rører Fjedren aldrig Stopperen *c*. Fjedren svinger uafladelig, saa at Strømmen meget hyppig afbrydes; Gnisterne vare meget svage; de saaes kun i Loupe.

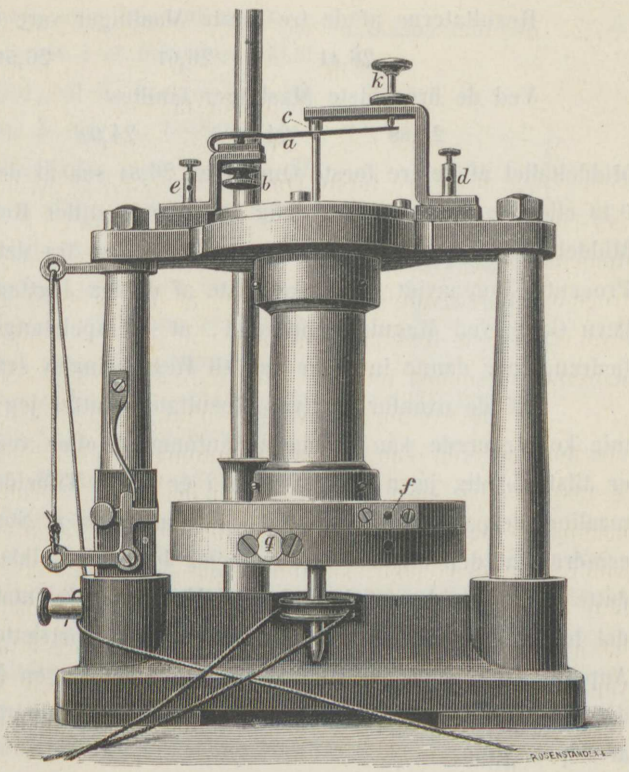


Fig. 7.

For at Kviksølvet hurtig skulde antage Staalcylindrens Hastighed, blev der over og under Stemplet anbragt Vinger, hvert Sted dannede af to buede Plader, hvis Spændvidder vare lidt større end Cylindrens Diameter; de bleve med Randene mod hinanden pressede ned i Cylindren, hvor de fastholdtes ved deres egen Spænding. Vingerne tillode kun Stemplet en faa Millimeters Vandring. Hastigheden kunde varieres ved Kviksølvmængden.

For at prøve, hvor fint Regulatorapparatet virker, har jeg maalt Hastigheden 7 Gange ved Sprøjtemethoden, mens Regulatoren fungerede. I alle Maalingerne mødte Fjedren Kontaktskruen i samme Højde, men i de tre første var Stilleskruen *b* stillet saaledes, at Fjedren uden noget Tryk var i en minimal Afstand fra Platinspidsen; i de fire sidste Maalinger var Fjedren, naar den ikke fik noget Tryk fra neden, fjærnet flere Mm. fra Spidsen; Strømmen blev i de fire sidste Maalinger derfor sluttet, naar Hastigheden var saa meget mindre end i de tre første, at den derved fremkomne Opdrift paa Stemplet tvang Fjedren op mod Spidsen. Man maa derfor finde mindre Hastighed i den anden Række end i den første.

Resultaterne af de tre første Maalinger vare Omløbstallene

26,41 26,67 26,54 Omløb i Sek.

Ved de fire sidste Maalinger fandtes

24,88 24,92 24,92 24,95 Omløb i Sek.

Middeltallet af de tre første Omløb er 26,54 saa at den største Afvigelse fra Middeltallet er 0,13 eller $^1/_2$ Procent. Betydelig gunstigere stiller Resultatet sig i den sidste Række, hvor Middeltallet er 24,92, og den største Afvigelse fra dette er 0,04 eller noget mindre end $^1/_6$ Procent. Forsaavidt man kan slutte af de faa Iagttagelser, er det heldigt for at opnaa en jævn Gang ved Regulatorapparatet, at Stempelstangen udøver et let Tryk mod Kontaktfjedren, naar denne indtager den til Reguleringen svarende Stilling.

Af de ovenfor angivne Resultater slutter jeg, at man ved et Apparat som det af mig konstruerede kan opnaa en automatisk eller ved Haandkraft reguleret Rotation, der er tilstrækkelig jævn, til at man i de fleste Tilfælde kan grunde en paalidelig Smaatidsmaaling derpaa (Gnistkronograf, Bestemmelse af Stemmegaflers Svingningstal). Det maa erindres, at den elektriske Motor, jeg benyttede, ikke passede synderlig til Apparatet, idet dette kun krævede en ringe Del af Motorens Maximalarbejdskraft; af den Grund ansaa jeg det heller ikke for at være Umagen værd at fortsætte Iagttagelserne med det nærværende Apparat; men naar jeg med dette kunde opnaa en Nøjagtighed af $^1/_6$ Procent, anser jeg det for sandsynligt, at der ved et fuldkomnere Apparat vil kunne paaregnes en Nøjagtighed af 1 pro Mille.

Jeg omtalte ovenfor, at Apparatet kunde benyttes uden Motor, ved Haandkraft; dette kan ske, naar man, idet Apparatet bevæges ved Haanden, sender Strømmen fra et Element gjennem Reguleringskontakten og et Galvanoskop (elektrisk Klokke eller Telefon), samt afpasser Trækkraften efter dettes Angivelser.

III. Bestemmelse af en Rotationshastigheds Maximum.

Vil man fremkalde og undersøge en blivende Virkning af Rotationen paa et Legeme, vil denne Virkning sædvanlig afhænge af Maximumhastigheden, som Legemet har haft under Rotationen; det vil i saa Tilfælde være dette Maximum, det gjælder om at bestemme. Forinden jeg nærmere beskriver det Middel, jeg har anvendt til denne Bestemmelse, skal jeg gjøre en almindelig Bemærkning om Vædskers Forhold under hurtig Rotation.

Naar man afmaaler en Vædskemængde i en lodret staaende Beholder, ved at man hælder Vædske i, til det flyder over Randen, vil der fremkomme en med den frie Overflades Størrelse voxende Usikkerhed paa Grund af Overfladens ved Haarrørsvirkningen fremkaldte ulige Højde i forskjellige gjentagne Maalinger. Denne Fejlkilde vil være yderst ringe,

naar den overskydende Vædske gaar bort som Følge af en energisk Centrifugalkraft. Hælder man Kviksølv i et forneden lukket Rør, paa hvis Side der er boret et Hul, vil Kviksølvet løbe af, indtil Tyngdetrykket fra Vædskehøjden h (Fig. 8) holder Ligevægt mod den fra Krumningen af Overfladen ved Punktet M hidrørende Overfladespænding. Tænkes det samme Rør sat i hurtig Rotation om en Axe $AB \perp$ Rørets Axe, kan en ganske tilsvarende Bemærkning gjøres gjældende, men den Størrelse, som her kommer til at svare til Højden h, vil kunne regnes at blive mindre end h i samme Forhold som Tyngdekraften er mindre end Centrifugalkraften; i samme Forhold ville ogsaa Usikkerhederne ved Udmaalingen formindskes. Ved 2000 Omløb i Minutet vil der allerede i 5 Cm. Afstand fra Axen virke en Centrifugalkraft, der er mere end 200 Gange saa stor som Tyngdekraften.

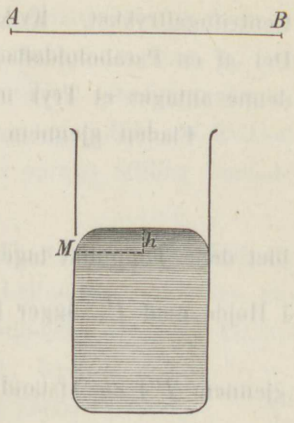


Fig. 8.

Jeg har benyttet mig heraf ved at gjøre Torricellis Forsøg med et i Rotationsapparatet vandret anbragt Rør, der var lukket i den mod Axen vendte Ende og aabent samt ombøjet ved den modsatte Ende. Røret var helt fyldt med Kviksølv. Sættes Apparatet med et saaledes anbragt Rør i Rotation, vil, naar en vis Hastighed overskrides, noget af Kviksølvet slynges ud, idet der dannes et tomt Rum indad mod Axen, indtil Centrifugalvirkningen paa den tilbageværende Kviksølvmasse holder Ligevægt mod Luftens Tryk. Medens Barometerstanden i et almindeligt Barometer sædvanlig maa maales ved en direkte Højdemaaling, og ikke, uden naar Røret har en anselig Diameter, kan findes tilstrækkelig nøjagtig ved Vejning paa Grund af de ovenfor omtalte Variationer i Overfladeforholdene, er Forholdet omvendt i Centrifugalbarometret. Der kan man ikke direkte maale Afstanden mellem de to Kviksølvoverflader, hvorimod denne vil kunne bestemmes meget sikkert ved bagefter at veje den i Barometret tilbageværende Kviksølvmængde.

Selvfølgelig har jeg ikke villet benytte dette til at bestemme Barometerstanden, men derimod til Bestemmelse af Maximumhastigheden. Forinden jeg meddeler de opnaaede Resultater, skal jeg først nærmere præcisere Opgaven. Et lukket, vandret, cylindrisk Rør R (Fig. 9) tænkes at rotere om en Axe $AB \perp$ Rørets Axe. Fra den udadvendte Ende af Røret udgaar en snæver Kanal, der udmunder ved P i en Afstand r_1 fra Axen; det hele er oprindelig fyldt med Kviksølv men antages nu delvis udtømt ved

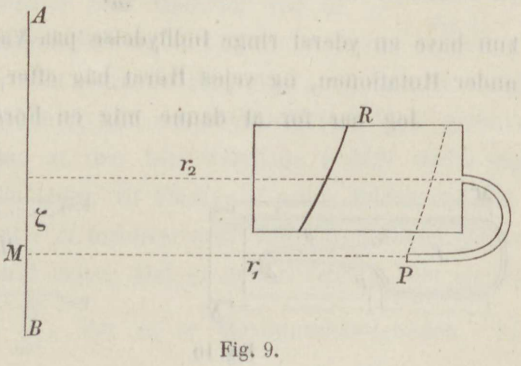


Fig. 9.

Centrifugaltrykket. Kviksølvet vil da være begrændset forinden af en af Røret afskaaren Del af en Paraboloideflade, foruden af et Fladeelement i P af en anden Paraboloide; i denne antages et Tryk maalt ved Barometerstanden B at virke.

Fladen gjennem P vil alene afhænge af Vinkelhastigheden ω; dens Ligning er

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

idet dens Toppunkt tages til Nulpunkt for z-Koordinaten. Punktet M, der ligger i Axen i Højde med P, ligger i Afstand $z_1 = \frac{\omega^2}{2g} r_1^2$ fra Toppunktet. Rørets Axe skærer Fladen gjennem P i en Afstand $r_1' = \sqrt{r_1^2 + \frac{2g}{\omega^2}\zeta}$, idet ζ er denne Axes Højde over P.

Den indre Paraboloide maa have sit Toppunkt B Cm. over den ydres. Dens Ligning er altsaa

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + B;$$

derved faaes, at Rørets Axe skærer denne Flade i en Afstand $r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{2g}{\omega^2}(B-\zeta)}$. Herved er Størrelsen $r_1 - r_2$, og ved den ogsaa Vægten af Kviksølvet i Røret bestemt. Gjøres ζ til Nul, vil r_2 alene afhænge af Forholdet mellem Barometerstanden og Kvadratet paa Vinkelhastigheden. Varierer B, og holdes $\frac{B}{\omega^2}$ konstant, vil man altsaa faa samme Værdi for r_2. Den indre Overflades Form vil derimod variere; Variationen vil bestaa i, at Overfladen vil hælde mere ved den lavere end ved den højere Barometerstand; men da dens Midtpunkt holder sin Afstand fra Omdrejningsaxen uforandret, vil det med de Variationer, som Barometerstanden kan være underkastet, kun faa meget ringe Indflydelse paa Vægten af det tilbageblivende Kviksølv. Denne Vægt kan derfor, naar Dimensioner og Afstande fra Axen vælges rigtigt i Forhold til de Hastigheder, der skulle kunne maales, betragtes som en Funktion alene af Forholdet $\frac{B}{\omega^2}$, hvor ω er Maximumhastigheden; Temperaturen vil kun have en yderst ringe Indflydelse paa Vægten af Kviksølvet. Iagttages Barometerstanden under Rotationen, og vejes Røret bag efter, kan man derfor finde Maximumhastigheden.

Jeg har for at danne mig en Forestilling om Methodens Brugbarhed konstrueret følgende Apparat (Fig. 10). MN er et Staalrør, der er lukket ved N. I Bunden er der boret et Hul, hvori et snævert Glasrør g er indkittet. Et kortere Staalrør H ligeledes lukket ved den ene Ende kan skrues til Bunden af MN. Sammen-

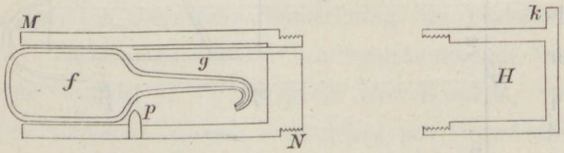


Fig. 10.

skruede have de to Rør en samlet Længde af 5,2 Cm. I MN er Rotationsbarometret anbragt. Det har Form af en lille Flaske f, hvis Beholder er omtrent 1,6 Cm. lang, og som fortsættes med en ombøjet Hals. En Knast p møder Flaskens Bryst. Ombøjningen anbringes modsat Røret g. Omgiven med tyndt Papir slutter f saa tæt i MN, at Kviksølv indenfor f ikke løber ud. f fyldes med Kviksølv, og idet MN i oprejst Stilling ligeledes fyldes med Kviksølv til Mundingen af g, sættes f ned i MN.

Den Fremgangsmaade, jeg benyttede for at faa den lille Flaske fyldt med Kviksølv, skal jeg omtale, da jeg tror, den kan være bekvem ved flere Lejligheder. Flasken blev nedsat i et Glasrør AB (Fig. 11), hvis Rand forneden var lidt indbøjet. Omkring Flasken blev der fra oven stoppet fin Asbest ved en flad, skærpet Pind; herved blev Røret tæt nok til at kunne holde paa flere Cm. Kviksølv over Flaskens Munding. Ved først at skaffe noget Kviksølv ind og derpaa holde Røret ind i en Flamme, kunde Kviksølvet holdes i samtidig Kog over og i Flasken, idet denne frembød Bunden for direkte Paavirkning fra Flammen.

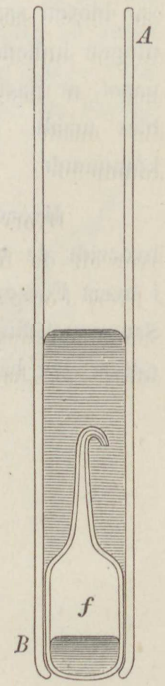


Fig. 11.

Paa denne Maade blev der indrettet to Rotationsbarometre, som for Afbalanceringens Skyld begge bleve anbragte i Rotationsapparatet diametralt modsat. Med dette var der i den Anledning foretaget den S. 44 omtalte Forandring, at den flade Kviksølvbeholder til Overførelse af Bevægelsen ved Kviksølvfriktion blev fjærnet, og det øvrige Apparat blev baaret af en enkelt Axe. Herved blev der Plads til at anbringe den 1,8 Cm. tykke Messingskive (Fig. 7), der har samme Diameter som gg (Fig 1) og er fæstet til denne ved to stærke Skruer. Messingskiven var gjennemboret efter to paa hinanden vinkelrette Diametre, saa at der fremkom 4 Huller. To af disse bleve foreløbig tilstoppede, medens der i hvert af de to andre blev anbragt et Rotationsbarometer, der helt og holdent fik Plads i Skiven. Det korte Staalrør var forsynet med en Knast k (Fig. 10), der passede i et Udsnit i Skiven, hvorved Barometrets Stilling i denne blev bestemt saaledes at Røret g (Fig. 10) laa øverst. Hvert Barometer blev fastholdt ved to Skruer. Barometret sees i Fig. 7 ved q anbragt i Skiven.

Naar nu Apparatet sættes i Rotation med voxende Hastighed, vil der fra en vis Hastighed at regne drives Kviksølv ud af Flasken f; det overskydende i MN vil gjennem Røret g gaa over i det korte Staalrør H, saa at den frie Overflade i MN stadig gaar gjennem Mundingen af g. Aftager Hastigheden igjen, vil Flasken f paany fyldes ved det i MN tilbageværende Kviksølv, medens Kviksølvet i H forbliver der. Efter Rotationen fjærnes Røret H og dets Kviksølv, og det øvrige Apparat vejes. Det er denne Vægt Q, det gjælder om ved Forsøg at bestemme som Funktion af $\frac{B}{\omega^2}$, idet ω er Maximumhastigheden. For

at kunne benytte Apparatet paany, bliver det, idet H fremdeles er fjærnet, trykket noget ned i et Prøveglas med Kviksølv; gjennem Røret g erstattes da det i forrige Forsøg udslyngede Kviksølv.

Jeg har med de to Apparater foretaget en Række samtidige Bestemmelser af Vægten Q, Barometerstanden B og Maximumhastigheden, hvilken sidste jeg bestemte ved Farvesprøjtemethoden. Efterat Rotationsbarometrene vare indbragte i Messingskiven og Sprøjteflasken med Farvestof i Jærnskiven gg (Fig. 1) samt Faldstangen hængt op, blev Apparatet sat i Gang ved et Antal Elementer bestemt efter den Hastighed, der skulde naaes. Stempelstangens Bevægelse nedad blev fulgt i Kikkert, og naar den nedadgaaende Bevægelse var bleven saa langsom, at den endnu netop kunde mærkes, blev Faldet og Farvesprøjtningen indledede og umiddelbart derefter Motorens Strøm afbrudt. Herved blev det opnaaet, at Hastigheden endte med at voxe yderst langsomt, og at netop Maximumhastigheden blev maalt. Størrelsen Q blev hver Gang maalt for begge Rotationsbarometrenes Vedkommende.

Hvorvidt Slutningshastigheden har kunnet betragtes som konstant, vil fremgaa af, hvorvidt de til de forskjellige Omløb svarende Faldhøjders anden Differens δ er konstant i hvert Forsøg. I hvor høj Grad dette har været Tilfældet, vil fremgaa af nedenstaaende Sammenstilling af de forskjellige Værdier af Størrelsen δ i hvert af de 7 Forsøg, jeg har udført (jeg har i hvert Forsøg maalt 4—5 af de ved Mærkerne afsatte Faldhøjder).

1. Forsøg	$\delta =$	0,6398	0,6395	0,6389
2. —	$\delta =$	0,7890	0,7888	0,7887
3. —	$\delta =$	0,8700	0,8699	
4. —	$\delta =$	1,064	1,064	
5. —	$\delta =$	1,265	1,264	
6. —	$\delta =$	1,363	1,364	
7. —	$\delta =$	1,432	1,432	1,432.

Da den procentiske Fejl i Omløbstiden kun er det halve af Procentfejlen i δ, sees Hastigheden at have været meget jævn.

I nedenstaaende Tabel ere Resultaterne fra de 7 Forsøg angivne. I Steden for $\frac{B}{\omega^2}$ har jeg beregnet den dermed proportionale Størrelse δB. Denne Størrelse er i hvert Forsøg fælles for begge Rotationsbarometre. Derimod vil Vægten Q være forskjellig paa Grund af Uligheder i de to Apparater, der betegnes ved Nr. 1 og 2.

Forsøg	δ	Omløbstal	δB	$\delta B - 48{,}20$	Barometer Nr. 1. Q	$Q - Q_1$	Barometer Nr. 2. Q	$Q - Q_1$
1	0,6394	39,18	48,20		53,6270		55,7586	
2	0,7888	35,27	60,32	12,12	54,2648	0,6378	56,4516	0,6930
3	0,8700	33,59	66,51	18,31	54,5545	0,9275	56,7603	1,0017
4	1,064	30,37	80,01	31,81	55,3093	1,6823	57,5018	1,7432
5	1,264	27,86	95,25	47,05	56,1680	2,5410	58,3854	2,6268
6	1,364	26,82	103,38	55,18	56,5620	2,9350	58,8366	3,0780
7	1,432	26,18	108,49	60,29			59,2713	3,5120

Nogen simpel Relation mellem δB og Q kan naturligvis ikke ventes, da de kun 1,6 Cm. lange, omtrent 0,8 Cm. vide, ved Enderne tilsmeltede Barometerrør vare alt andet end kalibriske. Opføres Resultaterne grafisk med $Q - Q_1$ som Abscisse og $\delta B - 48{,}20$ som Ordinater, faaes to Kurver (se Fig. 12), som løbe temmelig nær parallelt fra Forsøg 1 til 5; fra Forsøg 6 fortsættes Kurven 2 med en svag Krumning nedad, medens Kurven 1 bøjer fra Forsøg 5 opad. Da de sidste Forsøg svare til de mindste Hastigheder, hvor Barometrene næsten vare fulde, er dette i Overénsstemmelse med, at Barometerflasken Nr. 1 var kjendelig kortere end Nr. 2. De tre ved Forsøg 3, 4 og 5 bestemte Punkter ligge i hver af Kurverne meget nær paa en ret Linie, hvad der ogsaa fremgaar af, at naar man ved simpel Interpolation mellem Forsøg 3 og 5 vilde søge $(\delta B)_4$ ved Q_4, vilde man ved Barometer Nr. 1 faa $(\delta B)_4 = 79{,}95$ og ved Nr. 2 $(\delta B)_4 = 79{,}6$, medens Forsøget gav 80,01. Det fremgaar heraf, at man med Sikkerhed kunde benytte ethvert af de to Rotationsbarometre til ved Interpolation imellem Tallene fra Forsøg 3, 4 og 5 at maale Maximumhastigheder beliggende mellem de i Forsøg 3 og 5 tilvejebragte, henholdsvis 33,6 og 27,9 Omløb i Sek.; den til Forandringen 5,7 i Omløbstallet svarende Vægtforandring er, som Tabellen viser, omtrent 1,6 Gr. Ved at anvende et nøjagtig udboret Staalrør i Steden for Glas vil man

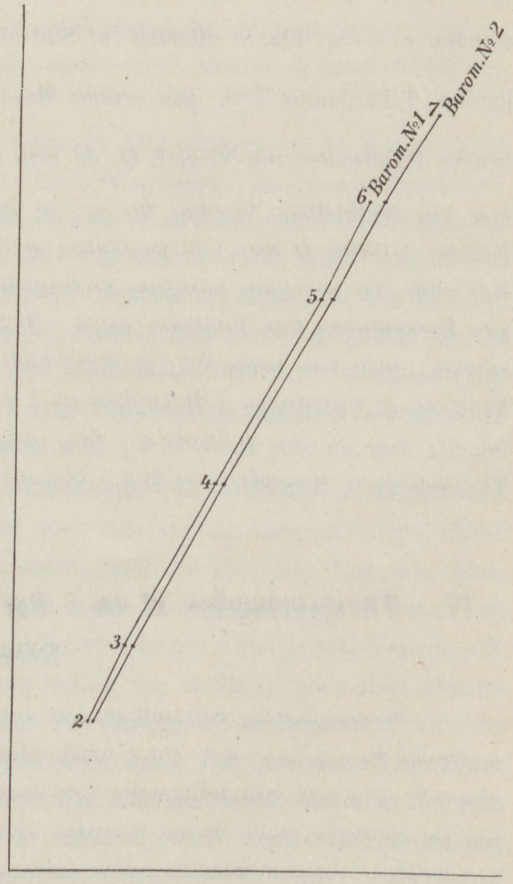


Fig. 12.

ved et Apparat af lignende Dimensioner som de af mig anvendte kunne maale indenfor betydelig videre Grændser end de her angivne.

Et saadant Apparat til Maaling af Maximumhastigheden vil i de fleste Tilfælde uden Vanskelighed kunne anbringes paa en Maskinaxe, og det vil derfor kunne tjene som Control for Forcering af Hastigheden ud over tilladelige Grændser, hvad der turde være af Betydning overfor Misbrug f. Ex. af Centrifuger.

Jeg betegnede mit Forsøg med Rotationsbarometret som en Udførelse af Torricellis Forsøg med Anvendelse af Centrifugalkraften i Steden for Tyngdekraften. Paa samme Maade har jeg udført Daltons Forsøg til Maaling af mættet Damps Tryk; efter at have afsluttet de ovenfor beskrevne Forsøg, bragte jeg nemlig lidt Æther (omtr. 2 Mg.) ind i Barometerflasken Nr. 2 og anbragte derefter Barometret som før i Rotationsapparatet. Sættes dette i Bevægelse, vil Kviksølv drives ud af Flasken ved en mindre Rotationshastighed end før, idet det før tomme Rum nu udfyldes med mættet Ætherdamp. Nu vil Afstanden $r_1 - r_2$ (Fig. 9) afhænge af Størrelsen $\frac{B-P}{\omega^2}$, hvor B er Barometerstanden, P mættet Ætherdamps Tryk, paa samme Maade som før af $\frac{B}{\omega^2}$. Derimod kan dette ikke længer forudsættes om Vægten Q, da man ved samme Værdi af Forholdene $\frac{B-P}{\omega^2}$ og $\frac{B}{\omega^2}$ faar saa forskjellige Værdier for ω, at de frie Overflader hælde kjendelig forskjelligt i Rørene, hvorfor Q ikke kan paaregnes at faa samme Værdi. I et Apparat med kalibriske Rør vilde der let kunne beregnes de fornødne Korrektioner, men med det benyttede Apparat kan Beregningen kun foretages grovt. Jeg vil derfor ikke gjengive Enkeltheder ved Forsøgene, men kun bemærke, at disse faldt ud ganske efter Forventning, baade hvad Indflydelsen af Variationer i Hastighed og i Temperatur angaar. Temperaturen, der her selvfølgelig faar en stor Indflydelse, blev maalt ved før og efter Rotationen at anbringe et Thermometers Beholder i et Hul i Skiven.

IV. Tilvejebringelse af en i Forvejen given Hastighed. Stemmegaflers Svingningstid.

Stemmegaflens Svingninger ere tidligere paa flere Maader bragte i Forbindelse med roterende Bevægelser, dels forat maale Omløbstallet, naar Svingningstallet er givet, dels for omvendt at maale Svingningstallet ved Omløbstallet; i la Cours Tonehjul er Stemmegaflen paa en særdeles smuk Maade benyttet til at regulere Omløbshastigheden. Ved den Slags Anvendelser svinger Stemmegaflen sædvanlig ikke fuldstændig frit; idet den enten skal skrive i Sod eller under sine Svingninger støde mod Fjedre eller mod Kviksølvoverflader

for at slutte en elektrisk Strøm. Selv om det Arbejde, der kræves udført, kun er ringe, maa det dog befrygtes, at det har nogen Indflydelse paa Svingningstiden, hvorfor den Tillid, man kan have til Maalinger, som grundes paa Svingningernes Ligetidighed, begrændses, idet man umulig vil kunne sikre sig, at Gaflens Arbejde bliver det samme i forskjellige Forsøg. Jeg har derfor tilvejebragt en Methode, hvorved Omløbstal og Svingningstal bringes i Relation til hinanden under saadanne Omstændigheder, at Stemmegaflen svinger fuldkommen frit. Jeg blev ledet ind paa den Vej, jeg fulgte, ved at jeg havde skaffet mig en la Coursk Stemmegaffel for at benytte den til Maaling af Rotationshastigheder; jeg fjærnede i den Hensigt Stemmegaflens Kontaktfjeder og indrettede det saaledes, at Strømmen gik uden nogen Afbrydelse gjennem Beviklingen for Elektromagneten. Paa Rotationsaxen for det Apparat, jeg benyttede (det var ikke det i denne Afhandling beskrevne), var der anbragt et Kontakthjul, d. v. s. et Tandhjul af Kobber, hvor Mellemrummene mellem Tænderne var udfyldt med Elfenben. Hjulet var i ledende Forbindelse med Axen. I et elektrisk Kredsløb var Axen, en Kontaktfjeder, der trykkede mod Hjulet, og Stemmegaflens Elektromagnet indskudte; Strømmen blev altsaa afbrudt under hvert Omløb et Antal Gange lig Tændernes Antal.

Naar Tiden t mellem to paa hinanden følgende Afbrydninger er et Multiplum af Stemmegaflens (hele) Svingningstid ϑ, vil Gaflen sættes i Svingninger. Lader man Rotationshastigheden voxe langsomt fra Nul, vil man derfor ved de smaa Hastigheder høre Stemmegaflen brumme hele Tiden; der er t nemlig saa stor, at enhver Værdi ligger nær ved et Multiplum af ϑ eller, mere fysisk talt, Virkningen paa Stemmegaflen er, at den med Mellemrum, der ere store i Sammenligning med ϑ, faar en Række Stød, der ikke tillade den at komme i Ro. Er Hastigheden bleven saa stor, at t ~~overskrider~~ bliver mindre end f. Ex. 4ϑ, vil Gaflen være saa godt som taus den meste Tid og kun give en kraftig Tone ved Hastigheder, der temmelig nær give $t = 3\vartheta$, 2ϑ, ϑ. Bliver $t < \vartheta$, ophører al Lyd.

I Stemmegaflens Tonen har man altsaa et Kjendetegn paa en Række af Hastigheder. Ved en nærmere Undersøgelse vil det imidlertid vise sig ikke at være en meget sikker Bestemmelse af Hastigheden; Stemmegaflen vil nemlig give en kjendelig Lyd ikke blot, naar t har nøjagtig de ovenfor angivne Værdier, men ogsaa naar den er tæt ved dem. Lad os antage, at Stemmegaflens Svingningstal er n og Afbrydningernes Antal i Sek. f. Ex. $n - 3$. Er Gaflen i Hvile, vil den ved den første Strømslutning faa et Stød, som giver den en lille Bevægelse; denne Bevægelse vil voxe ved en hel Række af de følgende Strømslutninger, idet Strømimpulsen først efter $^1/_6$ Sek. paany vil træffe Gaflen i dens Ligevægtsstilling og i en Bevægelsesretning, der er modsat Impulsen fra Strømmen; efter $^1/_3$ Sek. ville Impuls og Bevægelsesretning atter være ensrettede. Holdtes den ovenfor forudsatte Omløbshastighed konstant vedlige i nogen Tid, vilde Stemmegaflen derfor svinge hele Tiden, men med periodisk Stigen og Dalen af Lydens Styrke; man vilde faa at høre en Tone

med 3 Stød i Sek. Voxer derimod Hastigheden langsomt til den Værdi, der giver n Omløb i Sek., $t = \frac{1}{n}$, vil man ikke faa de nævnte Stød at høre, men Tonens Styrke (og maaske dens Renhed) vil voxe og naa et Maximum, naar t er lig eller maaske (se nedenfor) lidt større end $\frac{1}{n}$; voxer Hastigheden yderligere, vil Styrken atter aftage. Dette Maximum af Lyd kan ikke skælnes tilstrækkelig skarpt af Øret til at kunne tjene som Kjendetegn paa den tilsvarende Hastighed, idet Øret kun kan afgjøre (og det endda næppe meget skarpt) naar Maximumværdien er passeret.

De forskjellige Maxima svarende til $t = 3\vartheta$, 2ϑ, ϑ har jeg kunnet konstatere ved det ovenfor omtalte Apparat, idet jeg drejede Axen rundt med Haanden og hørte Lyden i en Telefon, der stod i Forbindelse med en Mikrofon; dennes Træplade var ved en udspændt tynd Metaltraad forbunden med den ene Gren af Stemmegaflen tæt ved dens Knudepunkt. Det viste sig vanskeligt at afpasse Hastigheden saaledes, at Lyden hørtes i længere Tid, hvoraf jeg slutter, at der ikke er noget stort Spillerum for de Hastigheder, der kunne give en kjendelig Lyd; for imidlertid at reducere Usikkerheden til et Minimum ændrede jeg Fremgangsmaaden, dels saaledes, at Apparatet blev simplere og derved konstantere i sin Virkning, dels saaledes, at Iagttagelsen af Svingningerne blev uafhængig af Hørelsen.

Den ændrede Fremgangsmaade blev bragt i Anvendelse paa det samme Rotationsapparat, der har gjort Tjeneste ved de øvrige i denne Afhandling omtalte Undersøgelser. Det tjente her til Bestemmelse af Stemmegaflens Svingningstid, idet Omløbstiden blev maalt ved Sprøjtemethoden; ogsaa her fik jeg, som det vil fremgaa af det følgende, en fortrinlig Hjælp af Stempelbevægelsen i Apparatets Staalcylinder. Apparatet var i den Tilstand, der er beskreven S. 67; det manglede altsaa Overførelsen af Bevægelse ved Kviksølvfriktion, og under Jærnskiven var anbragt den tykke Messingskive med de fire under rette Vinkler radialt borede Huller. I hvert af disse blev der anbragt en cylindrisk Staalmagnet, omtrent 5 Cm. lang og 1,4 Cm. tyk. Magneterne bleve fastholdte paa samme Maade som tidligere Rotationsbarometrene. De vendte alle ensartede Poler udad. De ydre Polflader vare afskaarne saaledes, at de laa i Flugt med Skivens cylindriske Randflade.

Disse 4 Magneter benyttedes til under Rotationen at sætte en Stemmegaffel i Svingninger. Denne blev anbragt med lodret Svingningsplan, saaledes at dens Grene pegte ind mod Skiven. Grenenes Endepunkter stode tæt ved Messingskivens Rand (Fig. 13) og saaledes, at Polfladerne N for de i Skiven siddende Magneter under Rotationen gik forbi Mellemrummet mellem Grenene; disse ville derfor ved hver Magnetpassage modtage en meget kortvarig Impuls til Bevægelsens Vedligeholdelse, saa at Stemmegaflen vil svinge saa frit, som det overhovedet kan tænkes at ske, naar dens Svingninger skulle

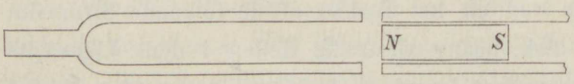


Fig. 13.

holdes vedlige. Det absolute Maximum af Virkning vil opnaaes, naar Tiden mellem to Impulser er lig Svingningstiden, altsaa naar Omløbstallet N er en Fjerdedel af Svingningstallet n, og naar Impulsen træffer Grenene i deres Ligevægtsstilling.

Den Stemmegaffel, jeg benyttede, blev dannet af blødt Jærn. Gaflens Længde, regnet fra Tilstødningsstedet for Skaftet, er 13 Cm., Grenene ere 1,05 Cm. brede og 0,38 Cm. tykke. Afstanden mellem Grenene er 1,5 Cm. I de fleste Forsøg blev Gaflen baaren af et Stativ, der blev støttet saaledes, at det ikke modtog Rystelser fra Rotationsapparatet. Naar Hastigheden blev godt afpasset, kunde jeg sætte Stemmegaflen i meget energiske Svingninger; der viste sig Maximum af Udsving omtrent ved Omløbstallene

$$N = 15{,}6 \text{ og } N = 23{,}4;$$

da disse Tal forholde sig som 2 til 3, sluttes det, at Svingningstallet findes af det første Maximum ved Multiplikation af Omløbstallet med 12 og af det sidste ved Multiplikation med 8. For at kunne give Stemmegaflen en Impuls ved hver Svingning, maatte der et Omløbstal 46,8 til; saa stor en Hastighed nærede jeg dog nogen Betænkelighed ved at tilvejebringe; paa Grund af de Omdannelser, der vare foretagne med Apparatet, for at det kunde tjene de forskjellige i denne Afhandling nævnte Formaal, havde det mistet noget af sin Symmetri, hvorfor det ved de største Hastigheder, jeg har maalt (omtrent 40 Omløb i Sek.) gav saadanne Rystelser, at jeg ikke ansaa det for raadeligt at forcere Hastigheden meget videre. Dette maa ogsaa tages med i Betragtning ved Vurderingen af den Nøjagtighed, jeg har opnaaet ved mine Maalinger; Nøjagtigheden har kun kunnet skades ved de nævnte Rystelser; og jeg mener derfor at kunne betragte de Grændser, jeg har fundet for mine Methoders Nøjagtighed som lavere Grændser for, hvad man vil kunne opnaa ved en omhyggelig Udførelse af Apparater, hvoraf ethvert kun skal tjene ét af de forskjellige Formaal, for hvilke mit enkelte Apparat har maattet gjøre Tjeneste.

Da Omløbstallet 23 falder indenfor de Grændser af Hastigheder, der kunne maales med en tilfredsstillende Nøjagtighed ved Sprøjtemethoden med de Dimensioner, jeg havde givet Rotationsapparatet, valgte jeg det til Undersøgelse af den Stemmegaffel, jeg havde ladet udføre.

Stemmegaflen, som jeg indrettede til denne Undersøgelse, er med sit Stativ afbildet i Fig. 14. En vandret liggende Messingstang AB fastklemmes ved Tappen D og bærer ved den ene Ende Opstanderen BC, i hvilken Stemmegaflens Skaft kan fastskrues, og hvorpaa Klemskruen r er anbragt. Ved den anden Ende bærer AB et isoleret Messingstykke E, hvori Kontaktskruen F gaar; denne gaar med

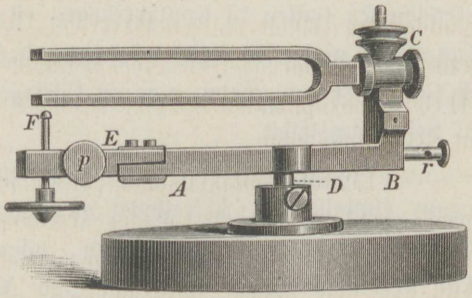


Fig. 14.

en passende Friktion, idet E er spaltet; ved Skruen p kan F derfor klemmes mere eller mindre fast i sin Møttrik. E bærer endvidere en elektrisk Klemskrue. Over Spidsen af Skruen F, der er forsynet med et kort Stykke tilloddet Platintraad, er der paa Stemmegaflen fastloddet en lille Platinplade. Forbindes de to elektriske Klemskruer med Polerne af et galvanisk Element, og indskydes i Elementets Kredsløb et Galvanoskop, vil dette sidste give tilkjende, naar der kommer Berøring mellem Stemmegaflen og Kontaktskruen F. Paa dennes Hoved var der anbragt en inddelt Kreds i Forbindelse med en fast Viser. Naar man holdt Stemmegaflen rolig i sin Ligevægtsstilling og drejede Skruen, til Galvanoskopet gav Udslag, kunde man paa Kredsen aflæse denne Skruens Nulstilling. Ved derpaa at dreje Skruen tilbage kunde man paa Kredsen aflæse Afstanden fra Stemmegaflens Ligevægtsstilling til Kontaktskruens Platintraad; Skruegangshøjden var $^1/_2$ Mm. Kommer Stemmegaflen i Svingninger, hvis Udsving naar denne Afstand, vil Galvanoskopet give dem tilkjende, medens alle mindre Svingninger ikke ville mærkes.

Stemmegaflen blev nu, efter at være anbragt paa sin Plads ved Skiven, benyttet saaledes, at man tilvejebragte en ringe Afstand mellem F og Gaflen; Sprøjteflasken med Farvestof til Hastighedsmaalingen blev anbragt i Jærnskiven i Rotationsapparatet, og Faldstangen blev hængt op i sin Elektromagnet. Ved en Kathetometerkikkert kunde Spidsen af Stempelstangen iagttages. Sættes Apparatet i Rotation, finder man uafladelige Udslag ved smaa Hastigheder; voxer Hastigheden bliver Magneten i Ro, indtil man kommer i Nærheden af Omløbstal 15,6; da slaar Magneten energisk ud for atter at svinge tilbage og blive i Ro, til man er i Nærheden af Omløbstal 23,4, hvor der atter iagttages et vedvarende Udslag. Naar dette Udslag sees, indstilles Kathetometerkikkerten paa Stempelstangen.

Herefter fjærnes Kontaktskruen noget fra Gaflen, og man lader Hastigheden voxe eller aftage meget langsomt, saaledes at Stempelstangen passerer den før iagttagne Stilling; hvis Strømmen i Galvanoskopet herved holdes sluttet i nogen Tid, fjærnes Kontaktskruen yderligere; saaledes fortsættes, indtil man faar Kontaktskruen saa fjærn, at man kun ved yderst langsom Variation i Hastigheden kan faa et forbigaaende Udslag paa Galvanoskopet. Naar dette er opnaaet, iagttages den Stempelhøjde, der haves samtidig med Udslaget. Afstanden fra Gaflen til Kontaktskruen vil meget nøje være lig det Maximum af Udsving, der kan naaes under de forhaandenværende Betingelser, og maales Omløbstallet i det Øjeblik, da Galvanoskopmagneten gjør sit Udslag, vil dette Omløbstal N kunne tjene til Bestemmelse af Svingningstallet.

Efterat Kontaktafstand og Stempelstilling saaledes ere bestemte, tilvejebringer man paany Omløbstallet N vejledet af Stempelhøjden. Naaes N ved for hurtig Variation, vil Stempelstangen passere Stillingen, uden at der kommer noget Udslag paa Galvanoskopet; kun hvis man opnaar at tilvejebringe N konstant eller ved en minimal Variation, opnaaes Udslaget, og naar det iagttages, bevæges Vægtstangen, der fremkalder Udsprøjtningen og

afbryder Faldstangelektromagnetens Strøm. Ved et Thermometer, hvis Beholder er anbragt mellem Stemmegaflens Grene, aflæses dennes Temperatur.

For at opnaa en konstant Hastighed har jeg dels benyttet en Jærntraadsrheostat i Motorens Kredsløb, dels bremset Motoren ved et let Tryk af en Finger og afpasset Trykket efter Stempelstangens Bevægelse for tilsidst at faa Stemplet til at standse i den forud bestemte Højde.

Jeg har undersøgt Stemmegaflens Svingningstal dels ved forskjellige Udsving (fra $^1/_{200}$ Mm. til $^1/_{12}$ Mm.), dels ved forskjellige Temperaturer; endelig har jeg maalt Svingningstallet af Gaflen anbragt indeni en Traadrulle med Strøm, saa at den var magnetiseret efter sin Længderetning, mens den svingede. For i forskjellige Forsøg at faa forskjellige Udsving stillede jeg Gaffelgrenenes Endepunkter i forskjellige Afstande fra Skiven ved at dreje Gaflen om Tappen D (Fig. 14).

For at kunne opvarme Gaflen under Svingningerne omgav jeg den med et Paprør, hvis ene lukkede Ende var fæstet til Opstanderen BC (Fig. 14). Røret var lidt længere end Gaflen og var ind mod Skiven delvis lukket med en Velinplade. Kontaktskruen gik op gjennem et Hul i Røret, og gjennem et midtvejs paa Siden af Røret anbragt Hul var et Thermometers Beholder ført ind. Tæt ved Opstanderen BC var der ført et omtrent 40 Cm. langt og omtrent 2 Cm. vidt, ved begge Ender aabent Blikrør ind i Paprøret, hvorfra det gik skraat nedad; dette Blikrør blev opvarmet udvendig ved en Spritlampe og førte derved ind i Paprøret en Strøm af varm Luft, der søgte ud gjennem Aabninger i den modsatte Ende af Røret. Paa denne Maade kunde jeg opvarme Gaflen til omtrent 40° C.

Det samme Paprør benyttede jeg ved Maalingen af Stemmegaflens Svingningstal, naar den blev magnetiseret, idet jeg viklede den magnetiserende Strømleder udenom det Stemmegaflen omgivende Rør.

Jeg har udført ialt 23 Maalinger af Svingningstallet; af disse ere imidlertid de 7 første kun at betragte som Øvelsesforsøg; ved deres Udførelse blev jeg efterhaanden ledet til at benytte de i det foregaaende nævnte Forholdsregler, som jeg fuldt ud bragte til Anvendelse i de 5 Maalinger Nr. 8—12.

Maalingerne Nr. 1—5 ere udførte ved Omløbstal 15,6; de give for Svingningstallet ved 14° $N = 187{,}28$, den største Afvigelse fra Middeltallet er 0,49. Alle de følgende Maalinger ere udførte ved Omløbstallet 23,4.

De 5 Maalinger Nr. 8—12, som jeg har benyttet til Bestemmelse af Svingningstallet ved almindelig Temperatur, ere angivne i omstaaende Tabel, hvor tillige Temperatur og Udsving ere angivne.

Forsøg	Temp.	Udsving i Mm.	Svingningstal	
8	14°	0,020	187,44	*V*
9	14°	0,005	187,23	
10	14°	0,007	187,23	*A*
11	14°	0,060	187,28	*A*
12	15°	0,080	187,39	*V*

Af disse Tal vil det fremgaa, at hvis Udsvingets Størrelse har Indflydelse paa Svingningstallet, vil denne for Udsving $< {}^1/_{10}$ Mm. næppe andrage mere end $^1/_{2000}$ af Svingningstallet. Da endvidere mine Forsøg over Temperaturens Indflydelse kun vise en Aftagen af 0,026 i Svingningstallet for hver Grad, beregnes Stemmegaflens Svingningstal ved 14° og ved Udsving mindre end $^1/_{10}$ Mm. ved Middeltallet af de 5 sidste Tal i Tabellen til 187,31.

I den sidste Kolonne angiver *V*, at den rette Hastighed er naaet ved en Voxen og *A*, at den er naaet ved en Aftagen af Hastigheden. Tabellen viser, at den voxende Hastighed har givet de største Resultater for Svingningstallet. Da det samme, paa en enkelt Undtagelse nær, viser sig at være Tilfældet med de som Øvelsesmaalinger betegnede første 7 Bestemmelser, kan det sluttes, at Maximum af Udsving saa vel ved voxende som ved aftagende Hastighed, først er naaet, kort efter at den rette Hastighed er passeret. Spillerummet er imidlertid, som det sees i Tabellen, kun meget lille, og det iagttagne Forhold giver en overvejende Sandsynlighed for, at den sande Værdi virkelig ligger mellem den højeste og den laveste af de iagttagne Værdier.

Ovenstaaende Tabel giver 0,03 som den sandsynlige Fejl, saa at man kan sætte

$$N_{14} = 187{,}31 \pm 0{,}03.$$

Ved højere Temperaturer har jeg gjort 7 Maalinger. Ogsaa her maatte jeg gjøre nogle Øvelsesmaalinger, Nr. 13—16, før jeg blev opmærksom paa en Fejl, som jeg rettede i de tre følgende Maalinger. Denne Fejl bestod i, at jeg indstillede Kontaktskruen paa Maximum af Udsving før Opvarmningen; ved denne blev Afstanden mellem Kontaktskruen og Stemmegaflen formindsket, saa at Galvanoskopets Udslag ikke svarede til Maximum af Udsving. I Maalingerne Nr. 17—19 indstillede jeg derfor Kontaktskruen, efter at Opvarmningen var bleven stationær. Resultaterne af de tre Maalinger vare

Forsøg	Temp.	Svingningstal
17	36°	186,71
18	38°	186,66
19	35°	186,81

Middeltallet heraf giver Svingningstallet ved 36°

$$N_{36} = 186{,}73.$$

Ved 22° Opvarmning er altsaa Svingningstallet aftaget 0,58. Temperaturkoefficienten for Svingningstallets Aftagen bliver efter dette

$$\alpha = 0{,}00014\,,$$

et Tal, der er i god Overensstemmelse med tidligere fundne Værdier. Svingningstallet ved Temperaturen t bliver

$$N_t = 187{,}31(1 - 0{,}00014(t - 14)).$$

Ved min Methode til at holde Svingningerne vedlige, bliver Stemmegaflen ganske vist magnetiseret, men i saa lille en Brøkdel af Svingningstiden, at Magnetismens mulige Indflydelse paa Elasticiteten næppe kan have haft nogen kjendelig Indflydelse paa Svingningstiden. Da imidlertid de elektromagnetisk bevægede Stemmegafler ofte magnetiseres stærkt og forholdsvis længe, ansaa jeg det ikke for at være uden Interesse at sammenligne Svingningstallet af Gaflen, naar den var udsat for en stadig virkende magnetiserende Kraft, med det tidligere fundne Svingningstal. Jeg magnetiserede Gaflen som omtalt S. 75 ved en begge Grene omgivende Traadrulle med 36 Vindinger, hvori der gik en Strøm af omtrent 2,7 Ampere. Da Gaflen, som ovenfor omtalt, var af blødt Jærn, blev den saaledes ret kraftig magnetiseret. Jeg har udført 4 Maalinger af Svingningstallet for den saaledes magnetiserede Stemmegaffel; Resultaterne findes opførte i nedenstaaende Tabel.

Forsøg	Temp.	Svingningstal	
20	16,6°	187,33	*V*
21	16,2°	187,18	*V*
22	16,3°	187,13	*A*
23	15,8°	187,03	*A*

Disse Forsøg kunne tyde paa, at Magnetiseringen har bragt Svingningstallet ned, og at denne Indflydelse er voxet med Tiden; dette sidste skyldes maaske en Samvirken af Svingningerne og Magnetiseringen paa Jærnets moleculære Tilstand; Forsøgene bleve udførte kort efter hinanden paa samme Dag. Som det vil sees, har Magnetiseringen i hvert Tilfælde kun haft en ringe Indflydelse. Tages Middeltallet af de 4 Forsøg, og reduceres det til 14° ved den ovenfor fundne Temperaturkoefficient, findes

$$187{,}23\,,$$

altsaa kun 0,08 mindre end det tidligere fundne Svingningstal.

Jeg har ikke fortsat Undersøgelserne af Stemmegaflen videre, hverken hvad Temperaturens eller Magnetismens Indflydelse angaar; mit Hovedformaal var her nemlig kun det i Indledningen angivne at undersøge, hvorvidt den her beskrevne Methode med tilfredsstillende Nøjagtighed kan tjene til ved en Stemmegaffel at give tilkjende, naar en forud bestemt Rotationshastighed er tilvejebragt. Af de i Tabellerne S. 76 angivne Resultater mener jeg at kunne slutte, at man med nogen Øvelse vil kunne faa den givne Hastighed tilvejebragt med Fejl, der ikke naa 1 pro mille; med mere fuldkomne Apparater, særlig hvad Afpasning af Hastigheden angaar, end dem jeg arbejdede med, antager jeg, at Nøjagtigheden kan blive betydelig større.

Endvidere godtgjøre netop disse Forsøg, at Sprøjtemethoden til Rotationshastigheders Maaling, hvorpaa alle mine Undersøgelser ere grundede, ikke lider af systematiske Fejl, naar kun den Glasspids, der skal knækkes over, er tilstrækkelig tynd, og Inertiemomentet for de roterende Dele er tilstrækkelig stort. Den gode Overensstemmelse i Resultaterne af Forsøgene tyder i og for sig paa, at Hastighedsmaalingen er paalidelig. Den eneste systematiske Fejl, der kunde befrygtes, er den allerede S. 57 omtalte, at Arbejdet til det fine Glasrørs Overbrydning kunde formindske Hastigheden kjendeligt; dette kan imidlertid ikke give nogen konstant Fejl (og kun en saadan kan paa Grund af Resultaternes Overensstemmelse befrygtes), da der i hvert Forsøg maatte benyttes et nyt Glasrør, og disse vare ingenlunde lige tykke. At det nævnte Arbejde har været forsvindende lille, fremgaar dog mest afgjørende ved en Sammenligning af Resultatet for Svingningstallet fra Omløbstallet 15,6 med Resultatet fra Omløbstallet 23,4. Det første gav nemlig som Middeltal af 6 Forsøg

$$N_{14} = 187{,}28,$$

og det sidste af 5 Forsøg

$$N_{14} = 187{,}31.$$

Arbejdet til Glasspidsens Overbrydning maa gjøre N for lille; men den procentiske Formindskelse af N maa ifølge Udtrykket for den levende Kraft ved forskjellige Hastigheder og samme Arbejde forholde sig omvendt som Kvadratet paa Hastighederne. Naar nu de to Hastigheder, hvis Kvadrater forholde sig som 9 til 4, give næsten identiske Resultater, saa indsees det, at Arbejdet til Glasspidsens Overbrydning kun kan have haft en aldeles forsvindende Indflydelse paa Rotationshastigheden.

Da Stemmegaflen, som før omtalt, kan give en Bestemmelse af Hastigheden, hvor Fejlen højst er 1 pro mille og sikkert kan bringes betydelig lavere ned, sees det, at Kombinationen af en hurtig Rotation med en Stemmegaffel kan benyttes til Dannelse af en meget nøjagtig Gnistkronograf.

Jeg tvivler ikke om, at man vil kunne sætte en Jærnstang, der er anbragt vandret med sin ene Ende tæt ved Skivens Rand, og som er rettet ind mod Axen, i kraftige staaende Længdesvingninger, naar Hastigheden afpasses efter Svingningstallet; ved Maaling af Omløbstallet vil da Svingningstallet kunne findes paa lignende Maade som Stemmegaflens; mulig vil det samme kunne finde Sted ogsaa ved en Stang af andet Metal, der er armeret ind mod Skiven med en Jærncylinder. Man vil saaledes ved mange Lejligheder kunne faa en Maaling af Svingningstal, der er uafhængig af Hørelsen, og hvor det svingende Legeme svinger fuldstændig frit.

Der foreligger adskillige Undersøgelser over Stemmegaflers Svingninger, dels sammenlignende, dels absolute Bestemmelser af Svingningstallet. Svingningstallet har været absolut bestemt 1) grafisk, idet man har ladet Gaflen opskrive en Kurve i et Sodlag,

2) akustisk, idet man ved Øret har sammenlignet Stemmegaflens Tone med en Tone af bekjendt Svingningstal, 3) optisk, idet man har benyttet sig af Øjets Evne til at bevare en Eftervirkning af et kortvarigt Lysindtryk. Herved kan man, som bekjendt, tilsyneladende sammensætte to Bevægelser. Lissajous har saaledes optisk sammensat to Stemmegaflers samtidige Svingninger og derved fundet Middel til at sammenligne Svingningstallene. Poske har sammenlignet ad optisk Vej en Stemmegaffels Svingningstid med Omløbstiden for en roterende Skive[1]). Han benyttede en Helmholtz' Mikroskopgaffel. Det paa Gaflen anbragte Mikroskopobjektiv var anbragt tæt over en med radiale Spalter forsynet roterende Skive. Under denne var der paa en sværtet Glasstang anbragt en en Flamme spejlende Kviksølvdraabe, hvorpaa Mikroskopet var indstillet. Er Svingningstiden lig Tiden mellem to paa hinanden følgende Spalters Forbigang over Kviksølvdraaben, vil denne synes at staa stille. Er der en ringe Forskjel paa de to Tider, vil Draaben synes at gjøre langsomme Svingninger. Tælles disse i en given Tid, kan man finde Svingningstallet af Omløbstallet. Ved en beslægtet optisk Methode have Clarke og M'Leod foretaget Maalinger af Stemmegaflers Svingningstal[2]). Poske bemærker med Hensyn til saadanne Maalinger (l. c. S. 452): «Bei jeder Bestimmung der absoluten Schwingungszahl, etwa an Stimmgabeln, kommt es schliesslich darauf an, dieselbe mit der astronomischen Uhr (resp. der Bewegung des Sekundenpendels) zu vergleichen. Da indessen beide Bewegungen von zu verschiedener Ordnung sind, um direct in Beziehung gesetzt zu werden, so liegt es nahe, nach einer andern constanten Bewegung zu suchen, welche in der Mitte zwischen beiden steht.» Det er Vanskeligheden ved at tilvejebringe en saadan i længere Tid konstant Hastighed, jeg har villet undgaa ved min Methode, idet jeg kommer i Forbindelse med Sekundpendulet ved det frie Fald, hvis Hastighed er af passende Størrelse til direkte Anvendelse ved Udmaaling af Svingningstiden. De her beskrevne optiske Methoder have det samme Fortrin som min, at Stemmegaflen svinger frit. Men uden en Maalemethode, der som min Sprøjtemethode tillader en Udmaaling til et vilkaarligt Tidspunkt af Omløbstidens øjeblikkelige Værdi, er man nødsaget til at iagttage den optisk sammensatte Bevægelse i en Tid, der er lang i Forhold til Svingningstiden. Man maa derfor til Tider meddele Stemmegaflen Impulser for at holde Svingningerne vedlige, og herved kan der fremkomme forstyrrende Faseforandringer; dernæst skal Tiden, hvori den optisk sammensatte Bevægelse iagttages, udmaales, og Omløbstiden bestemmes ved et astronomisk Ur. Det hele Apparat bliver af den Grund temmelig omstændeligt, og Arbejdet dermed vanskeligt. Endvidere vil det vanskelig kunne forenes med den optiske Methode at indeslutte Gaflen helt i et Hylster; man er saaledes ikke saa frit stillet som ved min Methode med

[1]) Pogg. Ann. Bd. 152, S. 448, 1874.
[2]) Phil. Transact. Bd. 171, S. 1, 1880.

Hensyn til at undersøge forskjellige Omstændigheders (Opvarmnings, Magnetiserings og Luftmodstands) Indflydelse paa Svingningstallet. Endelig vil man ikke kunne undersøge meget smaa Svingninger ad optisk Vej, hvorimod min Methode efter mine Erfaringer synes at kunne anvendes paa overordenlig smaa Svingninger, naar kun det svingende Legeme er opstillet saaledes, at det er beskyttet mod Rystelser.

Alle Iagttagere have fundet Stemmegaflens Svingningstal aftagende med voxende Temperatur. Temperaturkoefficienten afhænger sandsynligvis af Gaflens Dimensioner og Materiale. Den er af nogle Iagttagere funden lidt mindre, af andre lidt større end 0,0001 (Clarke og M'Leod fandt 0,00011), medens jeg fandt 0,00014. Hertil er at bemærke, at min Stemmegaffel var af blødt Jærn, havde forholdsvis tynde Grene og var uden Skydevægte.

Tillæg.

Jeg har gjort nogle Iagttagelser over det Hastighedstab, der lides, naar man overfører Bevægelsen fra den af Motoren direkte bevægede Axe til Rotationsapparatet ved Kviksølvfriktion paa den S. 43 omtalte Maade. Naar Hastighederne ikke længer variere, vil der være Ligevægt mellem Momentet M af Modstandene, som Rotationsapparatet møder, og Momentet F af Kviksølvfriktionen. M tør antages væsenlig at skyldes Tapfriktionen ved Tappen m (Fig. 1) og er altsaa en Friktion mellem faste Flader, som jo antages uafhængig af Hastigheden. F maa derimod som en Vædskefriktion antages at være proportional med den relative Hastighed for Beholderen dd og Skiven ee. Men denne relative Hastighed er netop Hastighedstabet $N_1 - N_2$, idet N_1 er Axen a's og N_2 Axen f's Omløbstal. Man kan altsaa under disse Forudsætninger sætte

$$N_1 - N_2 = CM,$$

hvor C er en af Hastigheden uafhængig Konstant. Heraf sluttes, at Hastighedstabet maa være uafhængigt af Omløbstallet.

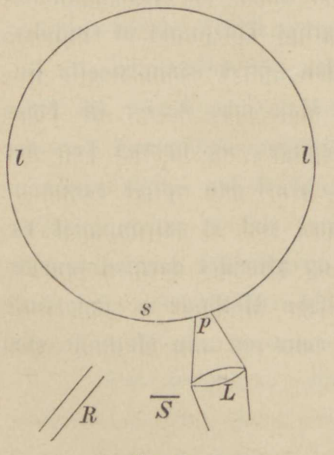


Fig. 15.

Hastighedstabet $N_1 - N_2$ maalte jeg paa følgende Maade. I Fig. 15 tænkes Jærnskiven gg og den flade Kviksølvbeholder dd begge projicerede i Cirklen ll. I Randen af Jærnskiven fæstede jeg et lille Planspejl s, hvis Normal var rettet udad fra Axen. Om Randen af den flade Kviksølvbeholder lagde jeg et Papirbaand; dette var delt i tre lige store Længder, der vare forsynede henholdsvis med 1, 2 og 3 Streger parallele med Baandets Længderetning. Udfoldet tog Baandet sig altsaa ud som vist i Fig. 16.

Ved en Petroleumslampe og en Linse L (Fig. 15), frembragte jeg en kraftig belyst Plet p paa Papirbaandet om Kviksølvbeholderen. Ved Siden af Linsen var der anbragt et fast Spejl S stillet saaledes, at det kastede Lyset fra p mod Randen af Jærnskiven. Et Rør R var rettet mod det Punkt af Jærnskiven, mod hvilket Spejlet S kastede Lyset fra p. Heraf fulgte, at man gjennem R kunde se et Spejlbillede af den belyste Flade p, naar Spejlet s netop var anbragt ud for Røret. L, S og R vare anbragte i Siden af en stor Kasse, der var hvælvet over hele Apparatet for at holde uvedkommende Lys ude.

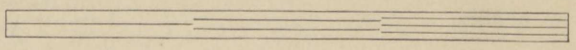


Fig. 16.

Rotere Kviksølvbeholder og Jærnskive lige hurtig, vil man en Gang under hvert Omløb gjennem Røret R se stedse det samme Sted af Papirbaandet; ved lige hurtig Rotation vil Baandet derfor synes at staa stille. Gaar derimod Jærnskiven langsommere rundt end Kviksølvbeholderen, vil man for hvert nyt Omløb se et Punkt af Papirbaandet, der i Forhold til Rotationsretningen ligger bagved det i det foregaaende Omløb iagttagne; man vil derfor tro at se Papirbaandet løbe rundt i Rotationsretningen med en Hastighed, der netop er lig den relative Hastighed mellem Kviksølvbeholder og Jærnskive. Den relative Hastighed eller Hastighedstabet $N_1 - N_2$ kan derfor findes ved at tælle det Antal Gange, et af Felterne paa Papirbaandet viser sig i en given Tid.

Jeg har paa denne Maade maalt Hastighedstabet 7 Gange ved temmelig forskjellige Omløbstal. I Reglen maalte jeg Tiden for 50 relative Omløb. Jeg fandt i de 7 Forsøg, idet N_1 er Kviksølvbeholderens, N_2 Jærnskivens Omløbstal i Sekundet, de i nedenstaaende Tabel angivne Hastighedstab.

N_1	$N_1 - N_2$
22	1,03
21	0,80
24	0,87
23	0,90
8	0,73
8	0,68
23	0,71.

Stor Overensstemmelse i Værdierne af $N_1 - N_2$ kan der naturligvis ikke ventes, da Tapfriktionen vil afhænge af Smørelsens Tilstand; de tre sidste Forsøg ere udførte umiddelbart efter hinanden, og den nære Overensstemmelse, som $N_1 - N_2$ frembyder i disse Forsøg, hvor Hastighederne have været meget forskjellige, viser, at Hastighedstabet i hvert Fald temmelig nær er uafhængigt af Omløbstallet.

Denne Omstændighed er af væsentlig Betydning for Anvendelsen af Vædskefriktion til Overførelse af Bevægelse fra en Axe til en anden. Nyttevirkningen ved Overførelsen

er nemlig $$1 - \frac{N_1 - N_2}{N_1}.$$

Naar $N_1 - N_2$ er uafhængig af N_1, sees altsaa Nyttevirkningen at voxe med Omløbstallet; det tabte Arbejde er omvendt proportionalt med Omløbstallet. I det sidste Forsøg ved 23 Omløb i Sek. har saaledes Nyttevirkningen været omtrent 97 pCt., medens den i næstsidste ved 8 Omløb kun var omtrent 91 pCt.

Det fremgaar af disse Forsøg, at man kan overføre en roterende Bevægelse ved Kviksølvfriktion uden noget væsenligt Tab i Hastighed, naar kun Omløbstallet er stort nok. Selv om Rotationsapparatet skulde præstere et ret anseligt nyttigt Arbejde foruden det af Tapfriktionen absorberede, vilde Kviksølvfriktionen kunne arbejde med ganske god Nyttevirkning. Skulde der f. Ex. præsteres et nyttigt Arbejde, der var 9 Gange Tapfriktionen, vilde ved Omløbstal 23 Nyttevirkningen endnu være omtrent 70 pCt., medens den ved Omløbstal 8 kun vilde være omtrent 10 pCt., alt under Forudsætning af, at Kviksølvfriktionen vedbliver at være proportional med den relative Hastighed.