

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

1ste Række.

Nr. 2.

FRA VIDENSKABENS VERDEN.



Almenfattelige Smaaskrifter af danske og norske Videnskabsmænd.

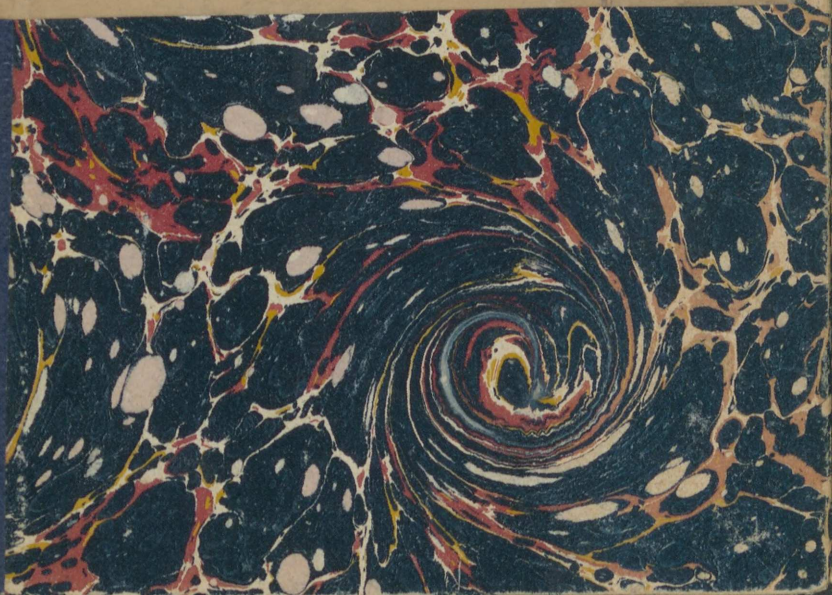
OM CIRKELENS KVADRATUR.

VED

DR. A. S. GULDBERG.

Lærer i Mathematik ved den kgl. norske Krigsskole.

513.



513

OM

CIRKELENS KVADRATUR.

VED



DR. A. S. GULDBERG,

Lærer i Mathematik ved den kgl. norske Krigsskole.

KJØBENHAVN.

FORLAGT AF G. E. C. GAD.

THIELES BOGTRYKKERI.

1873.



Cirkelen er en geometrisk Figur, hvis Egenskaber omhandles i den elementære Plangeometri. Et af de berømteste Problemer, der bleve stillede af Oldtidens Mathematikere, var *Cirkelens Kvadratur*, d. e. at konstruere et Kvadrat med samme Fladeindhold som en given Cirkel. Uagtet dette Problem allerede for lang Tid siden er løst og det særegne ved samme fuldstændig belyst og opklaret i den mathematiske Videnskab, saa gaar det dog igjen og spørger, om man saa maa sige, den Dag i Dag. Mangen en studerer fremdeles paa denne Opgave og ofrer for-gjæves Tid og Anstrængelse paa et Problem, som det vil være ham umuligt at løse ved den elementære Geometris Hjælp, og hvis rette Forstaaelse er ham lige saa umulig paa Grund af manglende Kundskaber i Mathematik. Da for øvrigt dette Problem er gaaet saa at sige ind i den almene Bevidsthed, saa at det ikke er usædvanligt, at man bruger Talemaaden »det er lige saa umuligt som Cirkelens Kvadratur« for dermed at betegne det umulige, turde det maaske ikke være uden Interesse at give en saa vidt muligt populær Fremstilling af dette berømte Problem. Forinden vi gaa over til at omtale denne særegne Opgave, skulle vi imidlertid benytte Anledningen til til at tale lidt om Geometrien i Almindelighed og om dens Betydning og Nytte baade i og for sig og for andre

Videnskabers Vedkommende for derved om muligt at give Læseren en Ide om denne mærkelige Videnskab, der for de fleste staar som noget meget vanskeligt, ja fast uforstaaeligt. Det vil derved maaske være muligt at vække nogen Interesse for denne Videnskab, der, om end tilsyneladende tør og kjedelig, dog ved et nøjere Studium har en stor Tiltrækning for et tænkende Væsen og aabner for vore Øjne en hel ny og forunderlig Verden.

Geometri betyder ordret oversat »*Landmaaling*«. I Virkeligheden var ogsaa Geometrien i sin første Begyndelse intet andet end Landmaaling; men senere hen skilte man ud den theoretiske Kjerne fra den praktiske Anvendelse og skabte derved en ren theoretisk Videnskab, som beholdt det oprindelige Navn. Hvorledes den praktiske Landmaaling kunde give den første Anledning til Studiet af, hvad vi benævne Geometri, er ikke vanskeligt at forstaa. Ved Opmaaling af et Stykke Jord ledes man strax til at betragte de Figurer, som vi kalde Trekanter, Firkanter, Femkanter o. s. v. For at finde sammes Fladeindhold eller for at tegne et Kort, hvori disse Figurer fremkomme i formindsket Maalestok, var det nødvendigt, at de første Landmaalere gjorde en Del særdeles vigtige Opdagelser med Hensyn til disse Figurers indbyrdes Egenskaber og Forhold. Disse Opdagelser ere af ren theoretisk Natur, det vil sige, de angaa alene Figurerne som saadanne uden Hensyn til, om det er en bestemt Trekant eller Firkant paa Marken. Naar man saaledes t. Ex. fandt ud, at Fladeindholdet af en retvinklet Firkant var Produktet af Grundlinie og Højde, at Fladeindholdet af et Triangel var det halve Produkt af Grundlinie og Højde o. s. v., saa gjælder dette ikke alene denne eller hin Firkant og

Trekant, men en hvilken som helst. De nævnte Opdagelser med Hensyn til Firkantens og Trekantens Fladeindhold ere geometriske Sandheder, som vi den Dag i Dag bevise Rigtigheden af, og som komme til Anvendelse ikke blot i Landmaalingen, men ogsaa ved utallige andre Lejligheder. Oldtidens Vismænd indsaa dette, og det var en naturlig og nærliggende Tanke at fremstille i al Korthed og for sig alene, adskilt fra de praktiske Anvendelser, de en Gang fundne Sandheder, der angaa de omtalte Figurer. Men herved var ogsaa Grunden lagt til Geometrien som Videnskab. Det næste Skridt var et nøjere Studium af disse simple Figurer, som den praktiske Landmaaling fremstillede for deres Øjne og ligesom tvang dem til at tænke over. Løsningen af en Opgave førte til en ny Opgave, og lidt efter lidt opdagedes en Række Sandheder, der angaa den rette Linie og de af samme dannede Figurer, Cirkelen og dens Forbindelser med den rette Linie, Ellipsen, Parablen o. s. v. Disse Sandheder stillede i Orden og Følge med tilhørende Forklaringer og Beviser danne, hvad vi kalde *Geometri*.

Man antager, at de gamle Ægyptere vare de første eller i al Fald blandt de første, der paabegyndte Studiet af Geometrien. Rimeligvis har Landets Ejendommelighed tvunget dem til meget snart at beskæftige sig med Landmaaling. Som bekjendt oversvømmer Nilen aarlig den frugtbare Del af Ægypten; hvor denne Flods Vande ikke naa hen, er Landet en Ørken. Ved Oversvømmelserne kunde det hændes, at flere af Grænsepælene mellem Ejendommene bortreves, og man var derfor nødt til at optage saa vidt muligt nøjagtige Karter over Ejendommene, for at ikke Tvistigheder skulde opstaa mellem Besidderne. Ogsaa

Kanalanlæggene, der lededes fra Nilen ind over Landet, gjorde det ønskeligt, for ej at sige nødvendigt, at optage Karter over Landets forskellige Egne. Gjorde saaledes Nødvendigheden Ægypterne først til Landmaalere, saa var Skridtet ikke langt til Studiet af Geometrien. Den ægyptiske Præstekaste har sandsynligvis talt flere Medlemmer, der med Iver og Interesse dyrkede den nye Videnskab. Hidtil kjender man imidlertid lidet til, hvor langt Ægypterne bragte Geometrien fremad; deres mægtige Bygningværker, der vidne om et fremskredent mekanisk Standpunkt, synes imidlertid at tyde hen paa, at de maa være komne et godt Stykke fremad; thi Mekaniken er lige saa nøje bundet til Geometrien som Landmaalingen.

Det Folk, hvem Geometrien skylder sine største Fremskridt, og som har overleveret den til os som en af de første Videnskaber, udmærket ved logisk Stringens og Klarhed, er imidlertid Grækerne. Det lille græske Folk staar atter her ligesom i saa meget andet, der angaar Videnskab og Kunst, som et Mønster, der søger forgjæves sin Lige i Historien. Jo mere man studerer de gamle græske Matematikeres Værker, des mere maa man beundre dem. Det er ogsaa dem, som, efter at de havde indset, at det var umuligt at løse Opgaven om Cirkelens Kvadratur ved den elementære Geometris Hjælp, løste Problemet ved Hjælp af en særegen krum Linie, *Kvadratricen* kaldet.

Geometrien som Videnskab udgjør en Del af *Mathematiken*, der deles i tre adskilte Dele, nemlig *Arithmetik*, *Geometri* og *Mekanik*. *Arithmetik* er Læren om Tallene. Den omhandler lige fra de simpleste Talregninger som

Addition, Subtraktion o. s. v. indtil de højeste og mest vanskelige Beregninger, som den nyere Tids første Tænkere have opdaget. *Geometrien* derimod omhandler de saakaldte Rumstørrelser. Den deles i to Afsnit, den *plane Geometri*, der betragter Figurer, som ligge i et Plan, f. Ex. Trianglet, Polygonen, Trapezet, Cirkelen o. s. v. og *Stereometrien*, der omhandler Legemer som Cylinderen, Keglen, Kuglen o. s. v. Endelig omhandler *Mekaniken* Kræfter og deres Virkninger paa Legemerne; den undersøger f. Ex. Betingelserne for et Legemes Ligevægt, hvilket er paa-virket af Kræfter, den beregner Legemernes Bevægelser, bestemmer deres Tyngdepunkter, forklarer Maskinernes Sammensætning, Nytte og Anvendelse, beregner deres Virkning o. s. v.

Disse tre, *Arithmetik*, *Geometri* og *Mekanik*, der til-sammen udgjøre den hele *Mathematik*, ere paa det nøjeste forbundne med hinanden. De omhandle, for at tale kort, *Tallet*, *Rummet* og *Tiden*. Hvad angaar deres Oprindelse og Vigtighed, saa kommer Arithmetiken først; thi Tallene og de simpleste Talregninger ere saa godt som uundværlige for enhver. Dernæst kommer Geometrien og Mekaniken. Den sidste er egentlig først uddannet som Videnskab af den berømte *Archimedes*, Oldtidens første Mekaniker. Det var Archimedes, som først forklarede Principet for Vægtstangen, det var ham, som først indførte Begrebet Tyngdepunkt og bestemte samme i flere Legemer, det var ham, som først opdagede Loven for Vandets Virken paa et Legeme, der er neddukket i samme, det var ham, som opfandt den berømte Skrue, der bærer hans Navn, og det var ham, som hævede Mekaniken til en Videnskab, i Rang og Værdighed lige med de øvrige Videnskaber, idet

han viste, at Mekanikens Love ere evige Fornuftsandheder, hvis Opdagelse fordre lige saa dyb Tænken og lige saa nøjagtige Beviser som Arithmetikens og Geometriens Sætninger.

Grækerne syslede med Forkjærlighed med Mathematiken, men især var Studiet af Geometrien tiltrækkende for dem. De fleste af de større græske Filosofer vare Geometre. En Undtagelse herfra gjør dog *Sokrates*; men hans Discipel, den berømte *Platon*, var derimod en udmærket Mathematiker, og man tilskriver ham den saakaldte *analytiske Methode* i Geometrien, der var epokegjørende for den hele Mathematik¹. *Platon* satte Geometrien overordentlig højt, og det er bekjendt, at ingen erholdt Adgang til hans berømte Skole eller Akademi, med mindre han havde studeret Mathematik. Han besøgte Ægypten for at lære af dets Præster, Italien for at raadsørge de ansete Pythagoræere, og han gik til Kyrene forat høre Mathematikeren *Theodoros*. Det var ved sin Hjemkomst fra disse Rejser, han grundlagde sit Akademi i Athen, hvorfra der udgik en hel Skare af udmærkede Videnskabsmænd. Man fortæller om *Platon*, at han ikke lod nogen Dag gaa hen, uden at han meddelte sine Disciple en eller anden ny Sandhed i Geometrien, og han lærte, at Guddommen beskæftigede sig altid med Mathematik. Herved mente han utvivlsomt, at alle de Love, hvorved Gud styrer Universet, ere matematiske Love, en Sandhed, som har bekræftet sig alt mere og mere, eftersom Mennesket har formaaet at trænge dybere ind i Naturens Hemmeligheder.

Indtil *Platons* Tid synes det, som om Grækerne kun have beskæftiget sig med Begyndelsesgrundene af Geo-

metrien; men Platon og hans Disciple gik betydelig videre. De opdagede Keglesnitslinierne, Ellipsen, Parablen og Hyperblen, hvilke spille en overordentlig vigtig Rolle saa vel i den rene som i den anvendte Mathematik. Lad os blot erindre om, at Planeternes og Kometernes Baner om Solen ere Ellipser, at en udskudt Kugle i lufttomt Rum bevæger sig i en Parabel. Disse krumme Linier fremkomme, naar en Kegel skjæres af et Plan; deraf Navnet Keglesnitslinier. De bleve anvendte med Held af enkelte af Platons Elever til Løsningen af visse Opgaver, der ligge over den elementære Geometri. Saaledes løste *Menæchmos* det berømte Problem om de to Mellemproportionalled ved Hjælp af to hinanden skærende Parabler. Denne Opgave er i Virkeligheden den samme som den om Kubens Fordobling, hvorom fortælles følgende.

Da en Pest rasede i Attika, sendte man Bud til Delos for at raadspørge Apollo om, hvad Middel der gaves for at dæmpe Gudernes Vrede. Oraklet gav til Svar, at Pesten vilde ophøre, naar man gjorde et Alter dobbelt saa stort som det, der fandtes i Gudens Tempel. Dette sidste var en Kubus eller Tærning. Ved første Øjekast syntes Sagen simpel, idet man mente, at det var tilstrækkeligt at forfærdige en Tærning med dobbelt saa store Sider som Alterets. Men herved fremkom i Virkeligheden en Tærning, hvis Indhold var otte Gange saa stort og ikke, som forlangt, dobbelt saa stort. Da Pesten ej heller hørte op, indsaa man, at der laa noget mere i, hvad Guden forlangte, end hvad en overfladisk Betragtning antog, og man henvendte sig da til de mest ansete Geometre med Bøn om Bistand i denne vanskelige Sag.

Et andet ikke mindre berømt Problem var *Vinkelens*

Tredeling. Denne Opgave, der for øvrigt kan løses paa flere forskellige Maader, staar mærkeligt nok i nogen Forbindelse med Cirkelens Kvadratur, idet den krumme Linie, der benævnes *Kvadratricen*, og som Platons Elev *Dinostratos* benyttede til Løsningen af den sidstnævnte Opgave, med Held lader sig anvende til at dele en hvilken som helst Vinkel i tre lige store Dele².

Foruden *Platon* er der tre andre Navne, der glimre som Stjerner af første Rang blandt Oldtidens Geometre; de ere *Euklides*, *Archimedes* og *Apollonios*. Disse i Forening med andre begavede Mænd bragte den geometriske Viden- skab saa vidt frem, at man først i den seneste Tid kan siges at være naaet videre. Efter den græske Kulturs For- fald ophørte Fremskridtene i Matematik som i de andre Videnskaber, indtil endelig *Araberne* optraadte som Viden- skabens Bærere. De gjorde adskillig Fremgang i Mathe- matik, Astronomi og andre Naturvidenskaber.

Efter Middelalderens lange Nat begyndte endelig i det 14de, 15de og 16de Aarhundrede atter Studiet af de gamles Skrifter, og dermed vaagnede ogsaa Interessen for Matematiken. Vi se, hvorledes Arithmetiken gjør Frem- skridt, den nye Gren af samme, *Algebraen*, Arabernes Opdagelse, uddannes mere og mere. De italienske Mathe- matikere *Tartalea*, *Cardan* og *Ludovico Ferrari* løse Ligninger af 3dje og 4de Grad, medens Oldtiden kun formaaede at løse dem af 1ste og 2den Grad. Det var imidlertid især det 17de og 18de Aarhundrede forbeholdt at se Mathe- matiken gjøre rivende Fremskridt. Franskmanden *Descartes*, den berømte Filosof, opdager den analytiske Geometri, hvorved han forbinder Arithmetiken og Geometrien paa det nøjeste; han illustrerer saa at sige den førstes nøgne

og abstrakte Sandheder ved geometriske Figurer. Italieneren *Galilei* bliver den anden Grundlægger af Mekaniken; han gennemforsker Himmelrummet og opdager med den af ham selv konstruerede Kikkert, at Solen har Pletter, noget man indtil da ansaa for den største Selvmodsigelse; han paaviser, at det er Jorden, som bevæger sig om Solen og ikke omvendt.

I Slutningen af det 17de Aarhundrede opdager Tyskeren *Leibnitz* og Englænderen *Isaac Newton* den forunderlige Regning, der benævnes Uendelighedsregning eller *Differential-* og *Integralregning*, og som skulde blive af højeste Vigtighed for de øvrige exakte Naturvidenskabers Fremskridt. Noget senere udgiver *Newton* sit epokegjørende Skrift "*Principia*" kaldet, der indeholder en hel ny Theori for Himmellegemernes Bevægelse, idet han opstiller den gjensidige Tiltrækningskraft mellem Legemerne som Bevægelsernes Aarsag og forklarer derved Stjernernes Gang i Himmelrummet ved mekaniske Love. Saaledes se vi Mathematiken at strække sit Herredømme videre og videre, fra Jorden til det umaalelige Verdensrum.

Ogsaa i vort Aarhundrede ere store Fremskridt gjorte, nye Baner ere brudte, og Videnskaben er beriget med mere end én stor og smuk Opdagelse. Dog kan det ikke maale sig med de to foregaaende Aarhundreder. Imidlertid maa man ingenlunde — som enkelte antage — betragte Mathematiken som en afsluttet Videnskab; tvært imod maa man sige, at den hidtil kun har overskredet de første Begyndelsesgrunde, og det er sandsynligt, at der ligger et stort Felt aabent, der ikke frembyder større Vanskeligheder, end at det lader sig bearbejde af den menneskelige Aand trods dens Indskrænkethed og Ufuldkommenhed.,

For de fleste staar Mathematiken som noget uforstaaeligt, noget, der kun kan fattes og begribes af de enkelte, der have særligt Anlæg og Lyst for samme. Ingen Mening kan være mere grundfalsk end denne, hvilket fremgaar med Nødvendighed, naar man betragter Matematikens *Methode*.

Mathematiken gaar ud fra visse Grundsætninger eller Axiomer, der ere saa klare og indlysende i og for sig, at alle maa indrømme deres Rigtighed, ja at enhver nøjere Forklaring af samme snarere vil formørke end opklare deres Sandhed. Herhen hører f. Ex., at enhver Størrelse er lig sig selv, at, naar to Størrelser ere lig en og samme tredje, saa ere de indbyrdes lige store o. s. v. Gaaende ud fra disse Grundsandheder bygger den nu op en mægtig Bygning af nye Sandheder, der imidlertid alle *bevises* d. e. man paaviser enten gaaende ud fra Grundsætningerne, at saa og saa maa Sagen forholde sig (f. Ex. at Summen af to Sider i et Triangel stedse er større end den tredje), eller man paaviser, at det modsatte er en Umulighed (f. Ex. at en Cirkels Fladeindhold hverken kan være større eller mindre end Produktet af Radien og den halve Omkreds og følgelig netop maa være lig dette Produkt).

Der gives ingen menneskelig Videnskab, der overgaar Mathematiken i Klarhed og Vished om Resultaternes Sandhed. Dog er Mathematiken ikke fuldkommen. Der gives en Methode fuldkommnere end Matematikens. Den bestaar i, for det første ikke at bruge noget Ord, der ej forud er defineret (d. e. dets Betydning forklaret), for det andet at bevise alt. Denne Methode kunne vi imidlertid ikke anvende, fordi vi ved at forklare Ordene

tilsidst komme til Ord, som vi ikke nøjere kunne forklare uden ved at anvende selve det Ord, som skal forklares, og, naar vi skulle bevise alt, tilsidst komme til Sandheder, som vi ikke kunne bevise ved andre simplere og klarere Sandheder. Matematikens Methode er vistnok ufuldkomnere og ringere end denne nævnte Methode, men den er dog ikke mindre *sikker* og *vis*. Den kan ikke forklare alt, men hvad den undlader at forklare, er Ord, hvorom alle have samme Begreb, og hvis Forstaaelse er os given saa at sige af Naturen selv; saadanne ere f. Ex. *Ligestorhed, større, mindre, Rum, Tid* o. s. v. Alle andre Ord derimod, som den benytter, f. Ex. *Vinkel, Triangel, Polygon, Cirkel* o. s. v., forklarer den saa tydeligt, at enhver kan forstaa dem. Den kan heller ikke bevise alt, men hvad den ikke beviser, er Sandheder, der ere indlysende og klare i og for sig. Men alle andre Sætninger, som den opstiller, beviser den med en saadan Klarhed, at det er umuligt at modsige dem. Hvis man derfor vil lære, hvorledes man skal adskille mellem, hvad der er sandt og falsk, saa behøver man kun at betragte Matematikens Fremgangsmaade; thi den lærer os det fuldkomment. Vistnok er dens Methode ikke absolut fuldendt; men den fører dog til Sandheden, og ingen anden Videnskab har i saa Henseende overgaaet den; thi hvad der overgaar Mathematiken, overgaar al menneskelig Magt og Evne³.

Vi skulle dernæst talé lidt om Matematikens Nytte. Man kan uden at gjøre sig skyldig i nogen Overdrivelse sige, at der gives faa Videnskaber, der ere saa nyttige og nødvendige som Mathematiken; Aarsagen hertil ligger vistnok for en stor Del deri, at den kun befatter sig med

det simpleste af alt; thi hvad kan tænkes mere simpelt og enkelt end Tallet, Rummet og Tiden? Men paa den anden Side er netop det simpleste af alt ogsaa det vigtigste af alt, og alt andet afhænger deraf.

For at give en Ide om Mathematikens Nytte og Anvendelse i andre Videnskabers Tjeneste, behøve vi kun at kaste et Blik paa Astronomien. Faa Videnskaber kunne rose sig af en saa høj Alder som denne, og faa Videnskaber ere saa fuldendte og kunne opvise saa storartede Resultater som denne Videnskab, men faa have ogsaa i den Grad gjennemgaaende, næsten i alle Detailler, gjort Brug af Mathematiken. Det er saaledes Mathematiken, der lærer Astronomen at beregne Afstanden fra Jorden til Maanen, Solen og Planeterne og at bestemme disse Himmellegemers Størrelse; det er den, som lærer ham at beregne disse sammes Vægt og at bestemme forud de Steder paa Himmelhvælvingen, hvor de ville vise sig til en forud opgiven Tid. Det er Mathematiken, som giver ham Regler for, hvorledes de Glas skulle formes, der tjene til at skærpe det menneskelige Øjes Synskraft; den lærer, hvorledes disse Glas skulle stilles og ordnes for at levere ham gode Kikkerter. Den lærer ham ogsaa at beregne Fejlene i hans Observationer, og hvorledes han skal gaa frem, for at disse Fejl skulle faa den mindst mulige Indflydelse paa de endelige Resultater.

Gaa vi til den praktiske Astronomi, der kommer til Anvendelse for Sømanden, som for at bestemme sit Sted paa Jorden tvinges til at maale Højder af Solen og Stjernerne eller de saakaldte Maanedistancer, der tjene til at bestemme den geografiske Bredde og Længde, saa maa atter Mathematiken tages til Hjælp. Naar man

betænker, hvilke Tusinder af Skibe, der færdes det hele Aar igjennem paa de store Verdenshave, hvor alene Kompasset, Kronometret og Sextanten — saa kaldes det Instrument, Sømanden anvender for at maale Sol- og Stjernehøjder — kunne give Sømanden Besked om, hvor han er, og hvorhen han skal styre, saa vil man forstaa Vigtigheden af disse Instrumenter, og man vil forstaa den uvurderlige Nytte, Mathematiken yder, naar man hører, at uden denne kloge Videnskabs Hjælp vilde de fleste Observationer være unyttige. Ja hvad der ikke er mindre mærkeligt, denne simple og klare Videnskab fordrer særdeles faa Kundskaber af den praktiske Sømand; ofte har denne studeret lidet eller intet af den egentlige Mathematik, men han kan nøjes med at lære Brugen af visse forud beregnede Tabeller, der lette Beregningerne i den Grad, at der kun forlanges Kjendskab til de første Regningsarter for at kunne udfinde af de gjorte Observationer Skibets Sted paa Jordoverfladen.

Dette er saa meget mærkeligere, fordi der strængt taget fordres temmelig betydelige Kundskaber i Mathematik, for at udføre de nævnte Beregninger saaledes, at man forstaar dem fuldkomment. I denne Henseende viser Mathematiken sig her og ved flere andre Lejligheder ligesom en kunstig Maskine, hvis Brug og Anvendelse vel er let at lære for enhver, men hvis Indretning er meget vanskelig at forstaa, og som kun Mesteren har ret Skjøn paa. Af slige Maskiner have vi flere i vore Huse til dagligt Brug uden at tale om de mange kunstige i Fabrikerne og Værkstederne; lad os kun erindre om vore Ure, Symaskiner, Strikkemaskiner o. s. v. Disse ere sindrigt udtænkte og konstruerede Maskiner, hvis Indretning

kun de færreste forstaa, men som det er let for enhver at lære at bruge og anvende. I enhver saadan Maskine ere visse Sætninger af Mekaniken og Geometrien virkelig-gjorte. Det forholder sig paa samme Maade med vore egne Legemer. Geometriens og Mekanikens Sandheder ere her blevne Virkelighed, ere blevne saa at sige Kjød og Blod. Enhver Muskel virker efter mekaniske Love, Hjertets Slag, Blodets Løb, Lemmernes Bevægelse, alt er underkastet mathematiske Love.

Det vilde føre for vidt her at opregne de forskjellige Videnskaber, der bruge Mathematiken i sin Tjeneste, og omtale i Detail Nyttens og Nødvendigheden af samme. Kun saa meget kan siges, at fast ingen Naturvidenskab eksisterer, der ej har Brug for Mathematiken, og at de fleste Naturlove, saa vidt vi forstaa og kjende dem, alene kunne udtrykkes og deres Virkninger beregnes ved Mathematikens Hjælp. Dog strækker — som før antydet — vore Kundskaber i Mathematik ikke særdeles langt; selv temmelig simple Opgaver kunne vi ofte kun løse tilnærmelsesvis rigtigt⁴. Heldigvis er dette som oftest tilstrækkeligt for os; en omtrentlig Værdi, der kun lidet afviger fra den absolut sande, er os nok.

Blandt de mange Problemer, som Oldtidens Mathematikere løste, ere især de tre forhen nævnte geometriske Opgaver berømte, nemlig *Cirkelens Kvadratur*, *Vinkelens Tredeling* og *Kubens Fordobling*. Den første Opgave, hvormed vi her nærmere skulle beskæftige os, er at konstruere et Kvadrat af samme Fladeindhold som en given Cirkel, den anden er at dele en Vinkel i tre lige store Dele, og den tredje er at konstruere en Tærning eller Kubus, hvis Indhold er dobbelt saa stort som en opgiven

Tærning. Disse tre Opgaver ere i en vis Forstand ikke særdeles vanskelige at løse, men de ligge dog alle udenfor den elementære Geometris Omraade og have derfor givet Anledning til megen Misforstaaelse. De Instrumenter, som anvendes i den elementære Geometri, og som efter gammel Vedtægt alene tillades at benyttes, ere *Linealen* og *Passeren*, og, hvad mere er, Linealen maa kun bruges til at optrække Linier mellem to Punkter, der enten ere givne eller fundne ved Konstruktion. Paa Grund af denne indskrænkede Brug af mekaniske Hjælpemidler kan den elementære Geometri alene løse Opgaver, der ligge indenfor et snævert Gebet. Rigtignok kunne Opgaverne varieres paa uendelig mange forskjellige Maader, saa at der ingen Ende er paa de mange Opgaver, den elementære Geometri løser; men ved nøjere Undersøgelse viser det sig, at de alle kunne henføres til visse bestemte Grupper. Det er den store *Descartes's* (*Cartesius*) Opdagelse af den analytiske Geometri, der først har sat os i Stand til saaledes at gruppere de forskjellige geometriske Opgaver. *Descartes* viste nemlig, at enhver geometrisk Opgave kunde løses ved Hjælp af en tilsvarende aritmetisk, der igjen fremstillede sig som en saakaldet Ligning, der maatte løses. *Descartes's* Geometri lærer os, at enhver geometrisk Opgave, der under aritmetisk Form viser sig som en algebraisk Ligning af 1ste eller 2den Grad, henhører under den elementære Geometris Omraade og stedse kan løses ved Hjælp af Passer og Lineal. Men i det Øjeblik Ligningen overskrider 2den Grad eller bliver, hvad man kalder transcendent, er det umuligt at løse den ved de nævnte Hjælpemidler; den henhører da under den

højere Geometri og fordrer andre og mere fuldkomne mekaniske Instrumenter til sin Løsning.

Uagtet Oldtidens Mathematikere ikke kjendte noget til, hvad vi benævne *analytisk Geometri*, saa vare de dog med Hensyn til de nævnte tre Opgaver fuldstændig paa det rene med, at deres Natur var en anden end de sædvanlig forekommende Opgavers i elementær Geometri, og at man til deres Løsning enten maatte benytte Linealen paa en anden Maade end sædvanligt eller bruge andre Instrumenter. Der er os overleveret gjennem de gamles Skrifter Løsninger af de omtalte Problemer, og disse Løsninger ere saa simple og elegante, at vi beundre dem den Dag i Dag og ikke formaa at sætte noget bedre i Stedet.

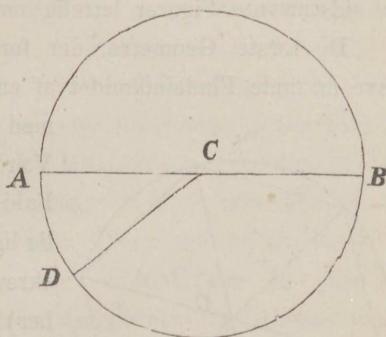
Til Trods herfor findes der dog mange, som mene, at disse Opgaver kunne løses ved den elementære Geometris Hjælpemidler, og de overgive sig til Spekulationer, lige saa unyttige og taabelige som deres, der ville forsøge at konstruere et *Perpetuum mobile*. Hertil kommer den falske Tro, at der af det franske og engelske Videnskabsakademi er udsat store Pengebelønninger for Løsningen af disse Opgaver. Dette er saa langt fra Tilfældet, at tvært imod disse videnskabelige Institutioner henlægge ethvert Arbejde, der indleveres over disse Problemer, og ikke engang læse dem igjennem. Ogsaa Norden har at opvise Mænd, tildels ikke uden Talent, hvilke have givet sig af med at studere paa disse Ting, ja enkelte studere maaske den Dag i Dag derpaa. At saadant kan ske, til Trods for at den matematiske Videnskab for lang Tid siden har løst Problemerne og fuldkommen belyst deres Natur, kommer af mangelfulde Kundskaber. I vore sædvanlige Lærebøger i Geometri forekommer ikke Løsningen af disse Opgaver;

det er ogsaa først paa et noget mere fremskredet Standpunkt, man tilfulde kan forstaa Sagen rigtig klart og tydeligt. Ikke desto mindre ville vi forsøge, saa vidt det lader sig gjøre paa en populær og almenfattelig Maade, her at fremstille den Løsning af *Cirkelens Kvadratur*, som er os given af *Platons Elev Dinostratos* ved Hjælp af *Kvadratricen*, for om muligt derved at sprede noget af det Mørke, som for de fleste hviler over dette berømte Problem.

Tager man en Passer, fæster den ene Spids i Papiret og drejer Passeren rundt, saa beskriver det andet Ben, hvortil er fæstet en Blyant eller en Ridseffjer, den Figur, som vi kalde en *Cirkel*

(se Fig. 1.). Det faste Punkt, hvori Passerspidsen stod under Omdrejningen, kaldes *Cirkelens Centrum*, den beskrevne krumme Linie *Cirkellinien* eller *Periferien*, og den Del af Planet, som indesluttet af be-

Fig. 1.



grænses af den krumme Linie, benævnes *Cirkelfladen* eller *Cirkelen*. For øvrigt benyttes hyppig Ordet *Cirkel* i Flæng om Cirkellinien og Cirkelfladen.

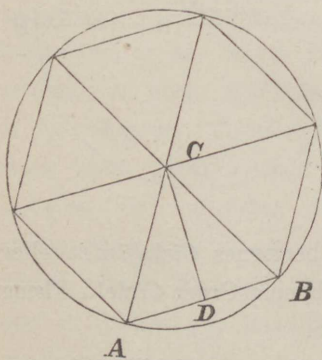
Den ejendommelige Egenskab, som adskiller Cirkelen fra enhver anden geometrisk Figur, er, at et hvilket som helst Punkt i Cirkellinien staar lige langt fra Centrum. Dette følger umiddelbart af den Maade, hvorpaa Cirkelen konstrueres ved Passeren. Drager man en ret Linie CD

fra Centrum til et Punkt i Cirkellinien, kaldes samme en *Radius* (Straale). Alle Radier ere følgende lige lange. Forlænges Radien AC til B, erhoides den saakaldte *Diameter* AB, der er saa lang som to Radier tilsammen. Da alle Radier ere lige lange, ere ogsaa alle Diametre i Cirkelen lige lange; thi de ere det dobbelte af en Radius.

Tidligere blev omtalt, at den Opgave at finde *Cirkelens Kvadratur* bestod i at konstruere et Kvadrat, hvis Fladeindhold er lige stort med en opgiven Cirkels. I Stedet for at konstruere et saadant Kvadrat kan man nøje sig med at konstruere en retvinklet Firkant (Rektangel) eller et Triangel af samme Indhold. Ved Hjælp af et Par Sætninger i den elementære Geometri kunne nemlig begge de sidstnævnte Figurer lettelig omdannes til Kvadrater⁵.

De første Geometre, der forsøgte at løse den Opgave at finde Fladeindholdet af en Cirkel, have nøjet sig

Fig. 2.



med at finde en tilnærmet Værdi. Den Vej, man i saa Fald havde at gaa, er temmelig lige til at finde; man indskrev en regelmæssig (regulær) Polygon med mange Sider i Cirkelen og fandt denne Polygons Indhold, idet man delte den i Triangler. Tog man nu den saaledes fundne Værdi for Cirkelens

Indhold, saa begik man vistnok en Fejl, men denne Fejl var liden, naar Polygonen havde mange Sider.

Indskrives man f. Ex. i en Cirkel en regulær Sexkant, saa er sammes Fladeindhold lige stort med 6 Gange

Trianglet ACB (se Fig. 2); thi Sexkanten bestaar af 6 indbyrdes lige store Triangler. Nu bevises i Geometrien, at et Triangles Indhold er lige stort med det halve Produkt af Grundlinie og Højde. Grundlinien i $\triangle$ ACB er AB og Højden er CD; følgelig bliver Indholdet af den hele Sexkant, hvilken vi for Kortheds Skyld betegne med P:

$$P = 6 \times \frac{1}{2} \times AB \times CD.$$

Da det er ligegyldigt, i hvad Orden man multiplicerer flere Tal eller Størrelser med hinanden, kan man gjerne skrive:

$$P = \frac{1}{2} \times 6 \times AB \times CD.$$

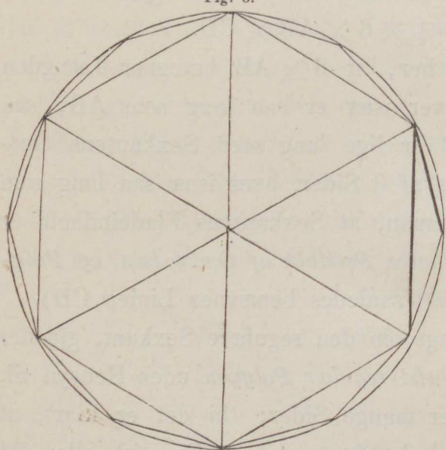
Bemærker man her, at $6 \times AB$ betegner Længden af 6 Linier, der hver især er saa lang som AB, saa indses, at $6 \times AB$ er lige lang med Sexkantens Omkreds, der jo dannes af 6 Sider, hver især saa lang som AB. Deraf slutter man, at Sexkantens Fladeindhold er lige stort med *det halve Produkt af Omkredsen og Polygonens mindre Radius* (saaledes benævnes Linien CD).

Hvad her er sagt om den regulære Sexkant, gjælder om en *hvilken som helst regulær Polygon* uden Hensyn til, om den har faa eller mange Sider; thi det er klart, at hvis Sidernes Antal havde været f. Ex. 12 eller 24 i Stedet for 6, saa vilde Trianglernes Antal ogsaa været 12 eller 24 i Stedet for 6, og man vilde ved at gaa frem aldeles som ovenfor have fundet, at Fladeindholdet var lige stort med Halvdelen af Produktet af Omkredsen og den mindre Radius i Polygonen.

Gaar man nu f. Ex. ud fra Sexkanten og efterhaanden fordobler Sidernes Antal, saa erholder man successive den regulære 12-kant, 24-kant, 48-kant o. s. v. Disse Polygoner nærme sig mere og mere til Cirkelen; saaledes er 12-kantens Fladeindhold nærmere Cirkelens

end Sexkantens, og 24-kantens Fladeindhold atter nærmere Cirkelens end 12-kantens o. s. v., hvilket umiddelbart ses af Fig. 3. Ja fortsætter man saaledes at konstruere regulære Polygoner, hvis Siders Antal stadig fordobles, kan Øjet snart ikke skille mellem Cirkelen og Polygonen. Støttende sig herpaa gjorde Oldtidens Matematikere en Slutning, som vistnok var dristig, men dog senere viste sig at være sand. Da enhver Polygons Indhold, uanset

Fig. 3.



Sidernes Antal, er lig med det halve Produkt af Polygonens Omkreds og mindre Radius, og da til- lige Cirkelens Forskjel fra en Polygon bliver alt mindre og mindre, jo større Sidernes Antal bliver, saa er det rimeligt at

antage, at ogsaa Cirkelens Fladeindhold er *det halve Produkt af Cirkelens Omkreds og mindre Radius*; men Cirkelens Omkreds er Periferiens Længde, og dens mindre Radius saa vel som dens større er Cirkelradien selv. Man sluttede altsaa ved Analogi, at Cirkelens Indhold var lig *det halve Produkt af Periferien og Radien* eller udtrykt i det matematiske Tegnsprog:

$$C = \frac{1}{2} p \cdot r,$$

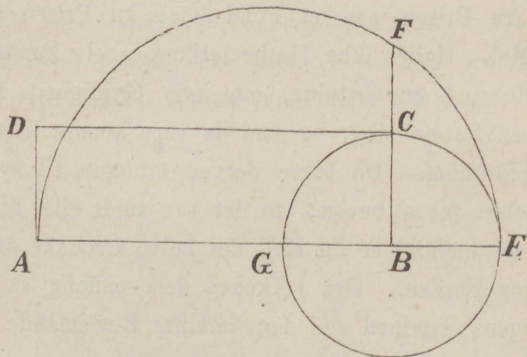
hvor C betyder Cirkelens Fladeindhold, p Periferiens Længde og r Cirkelradien.

Denne Slutning blev imidlertid heftig angreben af de græske Sofister. De sagde, at Cirkelen ingenlunde var en Polygon, og at man derfor ikke fra en Egenskab ved Polygonen kunde slutte til en tilsvarende ved Cirkelen; det var — for at bruge en Lignelse — lige saa galt som at slutte fra Prisen paa et Pund Kjød til Prisen paa et Pund Mel. Heller ikke Mathematikerne selv kunde blive staaende ved en Sætning, om hvis Gyldighed de kun havde en Formodning, og som de vare komne til ved en Analogislutning. De bleve derved tvungne til nye Anstrængelser for at bevise, om det var sandt eller falsk, at Cirkelens Indhold er lig med det halve Produkt af Periferien og Radien. Det lykkedes dem endelig at bevise Sætningens Sandhed ved den berømte Bevismaade kaldet »*Reduktion til det Absurde*» (*reductio ad absurdum*). Denne Bevismaade bestaar i, at man beviser, at Cirkelens Fladeindhold *ikke kan være større*, heller *ikke mindre* end det halve Produkt af Periferien og Radien, hvorafter følger med Nødvendighed, at den maa være lig med Halvdelen af det nævnte Produkt.

Efter at denne Sætning saaledes var bevist, sluttede man med Vished, at Cirkelens Fladeindhold var lige stort med et Rektangel ABCD (se Fig. 4), hvis Grundlinie AB er den halve Periferis Længde, og hvis Højde AD er Cirkelradien. For at konstruere dette Rektangel maa man altsaa kjende Periferiens Længde; er denne funden, saa er Opgaven løst; thi som før sagt er det en let Sag at omdanne dette Rektangel til et dermed lige stort Kvadrat. For at finde Siden i det søgte Kvadrat, hvis Fladeindhold er lige stort med Rektanglets, behøver man nemlig kun at forlænge Grundlinien AB og nedbøje BC, saaledes at BE

bliver lige saa lang som BC; derpaa deles AE i to lige Dele, og om Midtpunktet G slaas en Cirkel med AG som Radius. Endelig forlænges BC til F, saa er BF det søgte Kvadrats Side ⁶.

Fig. 4.



Hvad det altsaa kommer an paa for at finde Cirkelens Kvadratur, er ene og alene at finde Periferiens Længde. Men her er man ogsaa kommen til det Punkt, hvor den elementære Geometri stanser, naar det gjælder at konstruere denne Længde *absolut nøjagtig*. *Archimedes* beviste, at Periferiens Længde var mere end $3\frac{1}{7}$ Gange Diameterens Længde, men mindre end $3\frac{1}{6}$ (eller $3\frac{1}{5}$) Gange Diameterens Længde. Man kan bevise, at der maa existere et Tal, der falder mellem disse Grænser $3\frac{1}{7}$ og $3\frac{1}{6}$, hvilket Tal sædvanligt betegnes med det græske Bogstav π (Pi), og som multipliceret med Diameteren nøjagtig giver Periferiens Længde. Det er imidlertid umuligt ved hele Tal og Brøker at angive dette Tal rigtigt; man kan alene angive Grænseværdier, imellem hvilke det ligger. Saaledes har man beregnet, at det er større end 3,1415926 og mindre end 3,1415927. Et saadant

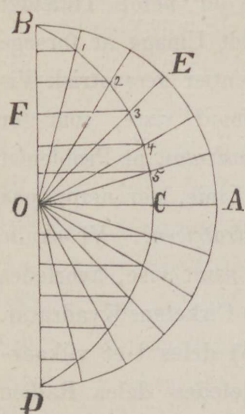
Tal kaldes *irrationalt* eller ufatteligt, fordi det ikke kan fattes eller begribes, men alene tænkes. Af irrationale Tal gives der i Mathematiken utallige, og de ere for Geometrien intet usædvanligt. Saaledes er Forholdet mellem Diagonalen og Siden i et Kvadrat et irrationalt Tal; ligeledes Forholdstallet mellem Kvadratets Side og den omskrevne Cirkels Radius. Man kan i visse Tilfælde med Lineal og Passer konstruere Linier, hvis Forholdstal ere irrationale, men dog alene, naar den algebraiske Ligning, der bestemmer det søgte Forholdstal, er af første eller anden Grad. Overskrider Ligningen anden Grad eller den bliver transscendent, saa er Opgaven umulig for den elementære Geometri. Dette sidste er netop Tilfældet med Tallet π , og det er derfor spildt Umage at forsøge paa med Passer og Lineal paa elementær geometrisk Vis at finde Periferiens Længde. Derimod viste, som før omtalt, den græske Mathematiker *Dinostratos*, at Problemet lader sig løse ved en særegen krum Linie, der netop paa Grund heraf har faaet Navnet *Kvadratricen*. Vi skulle nærmere omtale denne krumme Linie samt vise, hvorledes samme tjener til at løse Opgaven om Cirkelens Kvadratur.

Cirkelkvadranten AB (se Fig. 5) deles i et vilkaarligt Antal lige Dele f. Ex. 6; ligeledes deles Radien OB i samme Antal lige store Dele. Man drager gennem Centrum i Cirkelen Radier til Buens Delingspunkter; derpaa drages gennem Delingspunkterne i Radien OB Linier parallelle med den anden Radius OA. Disse sidste Linier skære de optrukne Radier i Punkterne 1, 2, 3, 4, 5. En krum Linie, der udgaar fra B og passerer gennem Punkterne 1, 2, 3, 4, 5, er da *Kvadratricen*. Den kan følgelig tænkes fremkommen ved, at Radien OB med jævn

Hastighed drejer sig om Cirkelens Centrum, og samtidigt en ret Linie bevæger sig fra B og med jævn Hastighed nærmer sig OA, idet den under hele Bevægelsen forbliver parallel med OA og ankommer til OA samtidigt med den anden omtalte Radius. Skjæringspunkterne mellem disse to Linier ville da alle tilsammen danne en sammenhængende krum Linie, som er Kvadratricen. Tænkes Bevægelsen fortsat paa den anden Side af AO, fremkommer paa samme Maade Grenen CD.

Heraf fremgaar, at man med Passer og Lineal kan konstruere saadanne Punkter i Kvadratricen som de, der

Fig. 5.



i Figur 5 ere betegnede med Tallene 1, 2, 3, 4, 5, og disse Punkters Antal kan gøres saa stort, som man vil, idet man blot behøver at dele Buen AB og Radien OB i et tilstrækkeligt stort Antal Dele. Derimod kan Punktet C, hvor Kvadratricen skærer Radien OA, ikke bestemmes med Lineal og Passer; thi her falde de to Linier sammen, som skulde skære hinanden, og følgelig bliver Skjæringspunktet ubestemt. Punktet

C kan med Lineal og Passer kun tilnærmelsesvis bestemmes, idet man konstruerer Punkter saa nær samme som muligt. Men nu afhænger Cirkelens Kvadratur netop af Punktet C. *Dinostratos* beviste nemlig, at et Kvadrat konstrueret paa Radien OB er lige stort med et Rektangel, hvis Højde er OC, og hvis Grundlinie er Længden af Buen AB, hvilken sidste atter er Fjerdeparten af Periferien⁷.

konstruere et Kvadrat saa stort som dette Rektangel. For at gjøre dette finder man først Midtpunktet K af Linien AE og slaar en Halvcirkel med KA som Radius. Man forlænger OB, til den træffer denne Halvcirkel i F, saa er OF Siden i det søgte Kvadrat¹⁰. Man konstruerer altsaa paa Siden OF et Kvadrat (i Figuren er dette Kvadrat overstreget), saa er samme i Fladeindhold lige stort med Rektanglet OBME, hvilket sidste atter er saa stort som Cirkelen om O; følgelig bliver denne Cirkels Fladeindhold lige stort med det overstregede Kvadrat, og Opgaven er saaledes løst.

Til den her givne Løsning af Problemet om Cirkelens Kvadratur af den gamle græske Geometer kan den moderne Tids Videnskab ikke føje noget nyt og bedre eller sætte en simplere og smukkere Løsning i Stedet. Da det væsentlige ved Sagen er at finde Længden OC, hvoraf Periferiens Længde afhænger, og Punktet C ikke kan bestemmes med Lineal og Passer alene, saaledes som Elementargeometrien forlanger disse Instrumenter benyttede, saa ses det umulige i at løse Problemet paa elementær geometrisk Vis.

Det ligger for øvrigt i Sagens egen Natur, at i det Øjeblik man indskrænker sig til to saa simple mekaniske Instrumenter som Passeren og Linealen, saa kan man alene haabe at løse et meget indskrænket Antal Opgaver. Der eksisterer i Virkeligheden en Uendelighed af Opgaver, der ikke kunne løses ved disse to Instrumenter alene. Borttager man Passeren og alene tillader Brugen af Linealen til Optrækning af rette Linier, saa indskrænkes naturligvis Feltet end yderligere, og en Mængde af de Opgaver, der nu løses i Elementargeometrien, blive uløselige. Det samme vil finde Sted, om man borttager Linealen

og kun tilsteder Brugen af Passeren. Føjer man derimod til disse to Instrumenter et eller flere andre, hvorved man sættes i Stand til at bruge andre krumme Linier end Cirkelen f. Ex. Konkoiden, Cyssoiden eller Kvadratricen o. s. v., da udvides Gebetet, og man sættes i Stand til Løsningen af nye og vanskeligere Opgaver; men man har da ogsaa overskredet Grænsen for den elementære Geometri, saaledes som *Euklides* har givet os den, og man befinder sig paa den højere Geometris Enemærker.

Anmærkninger.

¹ Man adskiller mellem den *synthetiske* og *analytiske* Methode. Den første, som er den sædvanlige i vore elementære Lærebøger i Mathematik, bestaar i, at man gaaende ud fra visse Grundsætninger eller allerede forhen beviste Sandheder paaviser denne eller hin Sætning, f. Ex. at Summen af to Sider i et Triangel er større end den tredje. Denne Methode tjener derfor til at bevise allerede fundne Sandheder. Den analytiske Methode kommer derimod til Anvendelse, naar man skal løse en eller anden Opgave eller udfinde en ny, ukjendt Sandhed. Den bestaar i, at man foreløbig antager Problemet løst eller den opstillede Sætning for sand og deraf drager de nødvendige Slutninger, indtil man kommer til en bekjendt Sandhed eller til en Modsigelse. I første Tilfælde bygger man saa at sige en ny Sandhed ved Sammensætning af flere gamle bekjendte, hvoraf Navnet *Synthese* (Sammensætning). I andet Tilfælde opløser man derimod en antagen og ubevist Sætning i sine enkelte Dele, hvilke alle maa findes sande og fast forbundne, hvis Sætningen skal være sand; deraf Navnet *Analyse*, som betegner Opløsning. I Synthesen gaar man fra det bekjendte til det ubekjendte, fra Stammen til Grenene, i Analysen fra det ubekjendte til det bekjendte, fra Grenene til Stammen.

² Ved Kvadratricens Hjælp kan en given Vinkel deles i et hvilket som helst Antal lige store Dele.

³ *Pascal*: „*Réflexions sur la géométrie en général*“.

⁴ De fleste fysiske Opgaver, der løses ved Mathematikens Hjælp, forudsætte en vis Idealiseren; vi kunne ikke medtage i Beregningerne alle de Faktorer, der i Virkeligheden ere tilstede.

⁵ Disse Sætninger ere følgende:

Et Triangels Fladeindhold er lige stort med et Rektangels, der har lige stor Grundlinie som Trianglet, og hvis Højde er Halvdelen af Trianglets Højde.

Et Rektangels Fladeindhold er lige stort med et Kvadrats, hvis Side er Mellemproportionalleddet mellem Rektanglets Grundlinie og Højde.

⁶ Rigtigheden af denne Konstruktion følger af, at man ifølge Plangeometrien har:

$$\overline{BF}^2 = AB \times BE = AB \times BC, \text{ da } BE = BC.$$

⁷ Betragtes et hvilket som helst Punkt i Kvadratricen f. Ex. det, som i Fig. 5 er betegnet med Tallet 3, saa finder følgende Forhold Sted:

$$\frown AB : \frown AE = OB : OF.$$

eller naar man kalder $\angle AOE$ for Kortheds Skyld α , Cirkelens Radius R og Længden af Linien OB sættes lig r samt bemærker, at $\frown AE = R \cdot \alpha$, $OB = R$ og $OF = r \sin \alpha$:

$$\frown AB : R \cdot \alpha = R : r \sin \alpha.$$

Heraf faas:

$$r \sin \alpha = \frac{R^2 \cdot \alpha}{\frown AB} \text{ eller } r = \frac{R^2}{\frown AB} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha},$$

som er Kvadratricens Ligning i Polarkoordinater. Nærmer her α sig Nul, saa nærmer r sig til OC , og man erholder, idet man gaar til Grænsen:

$$OC = \frac{R^2}{\frown AB} \text{ eller } \frown AB \times OC = R^2 \circ.$$

Kvadratet paa Cirkelens Radius er lige stort med Rektanglet paa Buen AB og Linien OC .

⁸ Et saadant Instrument lader sig uden Vanskelighed konstruere, idet den Stift, som beskriver Kvadratricen, samtidig er underkastet alene to Bevægelser, en Rotation og en Parallelforskydning.

⁹ $\overline{OB}^2 = OC \times OD \circ$: Kvadratet paa OB er lige stort med Rektanglet paa OC og OD . Men ifølge det foregaaende er ogsaa:

$\overline{OB}^2 = OC \times \frown AB$; følgelig maa OD i Længde være lig Buen AB (se Note 7).

¹⁰ Man har nemlig $\overline{OF}^2 = EO \times OA = EO \times OB$, da $OA = OB$.

