DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

DTU Bibliotek Danmarks Tekniske Universitet | Anker Engelunds Vej 1 2800 Kgs. Lyngby | Tlf. 45 25 72 50 | bibliotek@dtu.dk www.bibliotek.dtu.dk

624.013

TEKNISK BIBLIOTEK

A. Ostenfeld

Konstruktion og Beregning
af
Hvalvinger
efter Elasticitetsteorien.

1893.

624.013
gl.

604.06(083.3)

DEN POLYTEKNISKE LÆREANSTALT

Konstruktion og Beregning

af

Hvælvinger efter Elasticitetsteorien.

Af

A. Ostenfeld,
Cand. polyt.

Særtryk af „Den tekniske Forenings Tidsskrift". 5te Hæfte. 1893—94.

Kjøbenhavn.

Det Hoffensbergske Etabl.

1893.

I. Indspænding ved Vederlagene.

Siden jeg sidst beskæftigede mig med dette Spørgsmaal (se teknisk Forenings Tidsskrift 16de Aarg., S. 176), har jeg gjort Bekendtskab med *Müller-Breslaus:* Grafische Statik der Baukonstruktionen, II, 1892. Der angives heri et almindeligt Princip for Beregningen af en ved bægge Ender indspændt Bue, som fører til en temmelig simpel Konstruktion, og dets Anvendelse er vist paa en Bue bestaaende af Gitterværk, medens derimod Midlerne til dets Anvendelse paa en massiv Bue antagelig komme i et senere Bind. Paa Grund af den forholdsvis simple Konstruktion, og navnlig fordi Metoden fører til bestemte Resultater angaaende et Tværsnits størst mulige Paavirkning, skal jeg vise Princippets Anvendelse ogsaa paa massive Buer (Hvælvinger).

Som bekendt forudsættes den almindelige Metode til Beregning af statisk ubestemte Systemer; jeg skal blot her anføre de Ligninger, der bliver Brug for i det følgende.

Kaldes de statisk ubestemmelige Størrelser X_a, X_b, X_c . . ., haves som et almindeligt Udtryk for de tilbageværende Størrelser, der ere at bestemme:

$$S = S_o - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c \quad . \; . \; . \qquad (1)$$

Heri kan S betyde Momentet i et Tværsnit, Spændingen i en af de tilbageværende Stænger o. s. v. S_o er Værdien af S for $X_a = X_b = X_c = o$, altsaa den Værdi, S vil antage i det statisk bestemte System, som man faar, naar Størrelserne X forsvinde. S_a er Værdien af S for $S_o = o$, samt $X_b = X_c = o$, $X_a = \div 1$, altsaa Værdien af S, naar kun Kraften $X_a = -1$ virker paa det statisk bestemte Hovedsystem, der fremkommer, naar alle overtallige Størrelser (X) borttages. S_b og S_c have analoge Betydninger. S_a, S_b og S_c kunne let bestemmes, saa naar blot Størrelserne X ere bekendte, kunne alle andre Størrelser findes.

Til Bestemmelse af Størrelserne X haves Ligningerne:

$$\left.\begin{aligned} \delta_a &= \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ba} - X_c \delta_{ca}, \\ \delta_b &= \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ab} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{cb}, \\ \delta_c &= \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ac} - X_b \delta_{bc} - X_c \delta_{cc}, \end{aligned}\right\} (2),$$

hvorved er antaget, at Vederlagene ere urokkelige og at der ses bort fra Temperaturforandringers Indflydelse. (I Müller-Breslaus Gr. Statik II, hvor blot leddede Systemer behandles, ere disse Ligninger kun

udledede for saadanne; de kunne imidlertid let udvides til ogsaa at gælde massive elastiske Legemer). Heri betyder δ_a Projektionen paa X_a af den af Kraften X_a gennemløbne Vej, naar det statisk ubestemte System er belastet med Kræfterne P; δ_b og δ_c analogt hermed. Idet Kraften P_m har Angrebspunktet m, betyder δ_{ma} Projektionen paa P_m af m's Vej, naar det statisk bestemte Hovedsystem kun er belastet med $X_a = -1$. Betydningen af δ_{mb}, δ_{mc}, δ_{aa}, δ_{ab} . . . o. s. v. er analog hermed, idet Angrebspunktet for X_a hedder a, for X_b b, for X_c c; det første Bogstav i den dobbelte Indeks refererer sig til Angrebspunktet, det andet til Belastningstilstanden.

Ifølge Maxwells Sætning er $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ o. s. v.

I det her betragtede Tilfælde, en ved bægge Ender indspændt Bue, hvor der er tre statisk ubestemmelige Størrelser, kunde man f. Eks. vælge Horisontaltrykket og Vederlagsmomenterne som Størrelserne X; i saa Fald var $\delta_a = \delta_b = \delta_c = o$, og Størrelserne X kunde beregnes, naar de andre δ først vare bestemte. I Stedet for dette Valg er det imidlertid bekvemmere at gøre et saadant, at hver Ligning kun kommer til at indeholde én Størrelse X, og dette fordrer, at $\delta_{ab} = \delta_{bc} = \delta_{ca} = o$. Naar man saa tillige sørger for, at $\delta_a = \delta_b = \delta_c = o$, faas $X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}$ og de analoge. Tales der kun om lodrette Kræfter P, vil δ_{ma} være den lodrette Nedbøjning af Punktet m, og Ligningerne sige, at den Kurve, hvis Ordinater ere δ_{ma}, er Influenskurven for X_a.

Det er nu et saadant Valg af Størrelserne X, Müller-Breslau angiver.

Det statisk bestemte Hovedsystem er herefter en Bue, der er indspændt ved den ene Ende, fri ved den anden. De Størrelser, der skulle indføres som statisk ubestemmelige, faas paa følgende Maade (se Fig. 1): Vederlagstrykket K ved den Ende, der skal gøres fri, flyttes til et foreløbigt ubestemt Punkt O; det herved indkomne Moment, der virker paa en uelastisk Skive i fast Forbindelse med Buens fri Ende og indeholdende Punktet O, indføres som X_a. K i Punktet O opløses i X_b (lodret) og X_c (af foreløbig ubestemt Retning).

For nu at opnaa det tilsigtede Maal begynder man med at lade Momentet $X_a = \div 1$ (altsaa et Moment af Størrelse 1 og med modsat Omdrejningsretning af Kraftparret K's i Fig. 1) virke paa det statisk bestemte Hovedsystem, bestemmer den derved indtraadte Formforandring, navnlig Punktet a's Forskydning)og ny Tangentretning), og bestemmer Punktet O som Pol (Drejningscentrum) for den omtalte Skive under denne lille Bevægelse; derved har man opnaaet, at $\delta_{ba} = \delta_{ab} = o$, $\delta_{ca} = \delta_{ac} = o$. (Da X_a her er et Moment, er δ_{ab} en Vinkel; Punktet O er Angrebspunkt baade for X_b og X_c, altsaa $O = b = c$). Dernæst

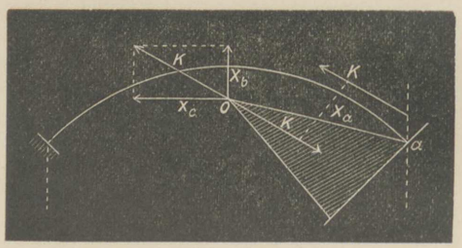

Fig. 1.

lader man $X_b = -1$ (altsaa en Kraft 1, nedad) virke paa det statisk bestemte Hovedsystem, bestemmer Punktet O's Forskydning som Følge heraf (da $\delta_{ab} = o$, er O's og a's Forskydninger de samme) og anbringer X_c vinkelret paa Forskydningens Retning; derved opnaas, at $\delta_{cb} = \delta_{bc} = o$. Ved dette Valg af Størrelserne X er naturligvis ogsaa $\delta_a = \delta_b = \delta_c = o$, naar Vederlagene forudsættes urokkelige. Det vil senere vise sig, at X_c for symmetrisk formede Hvælvinger bliver vandret, saa denne Retning skal straks forudsættes.

Ved Hvælvingers Beregning er det Momenterne og Aksialtrykkene, man ønsker at kende. Man har nu for Momentet i et vilkaarligt Tværsnit og for Horisontaltrykket:

$$M = M_o - M_a X_a - M_b X_b - M_c X_c\,, \quad H = X_c\,.$$

Betegnelserne ere analoge med dem i Ligning (1). Idet Momenterne regnes positive i den sædvanlige Retning (naar de altsaa frembringe Træk foroven i Buen), og idet Koordinaterne for O i et Kordinatsystem med Begyndelsespunkt i Buens faste Ende ere ξ og η, har man (Fig. 1):

$$M_a = +1,\ M_b = \xi - x\,,\ M_c = \eta - y.$$

Ved Indsættelse heraf i Ligningen ovenfor faas:

$$M = M_o \div X_a \div (\xi - x) X_b \div (\eta - y) X_c,\ H = X_c. \quad (3)$$

Hvis Konstruktionen gennemføres ordret som ovenfor antydet, vil man efterhaanden faa Punktet O og Retningen af X_c bestemte, og det skal da vise sig, at Betingelserne $\delta_{ab} = o$, $\delta_{bc} = o$, $\delta_{ac} = o$ ere opfyldte. Imidlertid kunne disse Ligninger ogsaa benyttes til en ganske almindelig Bestemmelse af O og X_c's Retning. Dette skal dog for Simpelheds Skyld her kun vises for symmetrisk formede Hvælvinger.

Udtrykkene for Formforandringerne af en Bue som vort statisk bestemte Hovedsystem ere udviklede

i min tidligere Artikel (se ovenfor); de sidste Led i Formlerne, som hidrøre fra den centrale Sammentrykning og Forskydningen, kunne uden væsentlig Fejl bortkastes, hvilket da er gjort i det følgende (for øvrigt kunne de uden Vanskelighed tages i Betragtning; det, som der da specielt vil være at iagttage, er ganske det samme, som desangaaende er sagt i denne Artikel). Formlerne ere, idet Δx og Δy betyde Koordinattilvæksterne i Punktet x, y, og idet σ er Drejningsvinklen for Tangenten samme Steds:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{E I_o}\int_o^x \frac{M \sec\varphi\, I_o}{I}\, dx, \\ \Delta y &= \frac{1}{E I_o}\int_o^x dx \int_o^x \frac{M \sec\varphi\, I_o}{I}\, dx, \\ \Delta x &= \frac{1}{E I_o}\int_o^y dy \int_o^x \frac{M \sec\varphi\, I_o}{I}\, dx. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$\delta_{ab} = o$ giver nu: $\int_o^l \sec\varphi \frac{I_o}{I}(\xi - x)\, dx = o$, eller

$$\xi \int_o^l \sec\varphi \frac{I_o}{I}\, dx = \int_o^l \sec\varphi \frac{I_o}{I}\, x\, dx,$$

$\delta_{ac} = o$ giver:

$\int_o^l \sec\varphi \frac{I_o}{I}(\eta - y)\, dx = o$ eller $\eta \int_o^l \sec\varphi \frac{I_o}{I}\, dx =$

$\int_o^l \sec\varphi \frac{I_o}{I}\, y\, dx$; idet $\sec\varphi\, dx = ds$, faar man altsaa,

at Punktet (ξ, η) er Tyngdepunktet for Hvælvingens Midtlinie, naar Tætheden regnes lig $\frac{I_o}{I}$.

$\delta_{bc} = o$ giver $\int_o^l dx \int_o^x (\eta - y)\frac{I_o}{I} \sec\varphi\, dx = o.$

Ved delvis Integration faas:

$$\delta_{bc} = l\int_o^l (\eta - y)\frac{I_o}{I}\sec\varphi\, dx - \int_o^l x\,(\eta - y)\frac{I_o}{I}\sec\varphi\, dx,$$

og idet første Led her forsvinder,

$$\delta_{bc} = -\eta\int_o^l \frac{I_o}{I}\sec\varphi\, x\, dx + \int_o^l \frac{I_o}{I}\sec\varphi\, xy\, dx$$

$= -\xi\,\eta\int_o^l \frac{I_o}{I}\sec\varphi\, dx + \int_o^l \frac{I_o}{I}\sec\varphi\,.\,xy\, dx.$ Dette Udtryk betyder Centrifugalmomentet (Deviationsmomentet) af Buen (idet dens Tæthed $= \frac{I_o}{I}$) med Hensyn til Akserne X_b og X_c, saa man ser, at Betingelsen $\delta_{bc} = o$ er tilfredsstillet for X_c vandret.

Det her viste (at O er Tyngdepunktet, og at X_c's Retning bestemmes, saa dette Centrifugalmoment er Nul) gælder uafhængigt af Symmetrien, men det er lidt vidtløftigere at bevise. Udviklingen her er naturligvis kun en Eftervisning af, at Betingelserne $\delta_{ab} = \delta_{bc} = \delta_{ac} = o$ ere tilfredsstillede under den gjorte Forudsætning om X_c vandret. —

I det følgende betragtes kun lodrette Kræfter som Belastning paa Buen. Man har da:

$$X_a = \frac{\Sigma P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}},\ X_b = \frac{\Sigma P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}},\ X_c = \frac{\Sigma P_m \delta_{mc}}{\delta_{cc}},$$

altsaa, som tidligere bemærket, at Kurverne med Ordinater $\delta_{ma} : \delta_{aa}$ o. s. v. ere Influenslinierne for X_a, X_b og X_c. Det er disse Kurver, der nu skulle bestemmes.

Man har:

$$\delta_{ma} = \int_o^x dx \int_o^x \sec\varphi \frac{I_o}{I}\, dx,\ \delta_{aa} = \int_o^l \sec\varphi \frac{I_o}{I}\, dx,$$

$$\delta_{mb} = \int_o^x dx \int_o^x (\xi - x)\sec\varphi \frac{I_o}{I}\, dx,$$

$$\delta_{ab} = \int_o^l dx \int_o^x (\xi - x)\sec\varphi \frac{I_o}{I}\, dx,$$

$$\delta_{mc} = \int_o^x dx \int_o^x (\eta - y)\sec\varphi \frac{I_o}{I}\, dx,$$

$$\delta_{cc} = \int_o^{y_1} dy \int_o^x (\eta - y)\sec\varphi \frac{I_o}{I}\, dx.$$

De anførte Værdier ere i Virkeligheden $E I_o \delta_{ma}$, $E I_o \delta_{aa}$ o. s. v., men $E I_o$ bortforkortes senere, saa Størrelsen er straks udeladt her.

En Størrelse som Udtrykket for δ_{ma} findes, som bekendt, som den til Abscissen x svarende Ordinat i en Tovpolygon, der er konstruet med Poldistance 1 for en Belastning fordelt efter Belastningskurven $y = sec\,\varphi \frac{I_o}{I}$. Paa lignende Maade kunne alle Udtrykkene ovenfor konstrueres, saa Løsningens Gennemførelse hermed i al Almindelighed er angivet. I det følgende skal Konstruktionen vises gennemført i Enkelthederne (Fig. 2).

I Fig. 2 er betragtet en Hvælving paa 50′ Spændvidde, Pil $= \frac{1}{4} l$. Tykkelsen varierer saaledes, at den ved Vederlagene er dobbelt saa stor som midtvejs, Tværsnittet midtvejs har Tykkelsen t_o, Inertimomentet I_o. De forskellige kontinuerlige Belastningskurver $\left(y = sec\,\varphi \frac{I_o}{I} \text{ osv.}\right)$, hvortil der skal tegnes Tovpolygoner, ere delte ved lodrette Ordinater i 10 Dele, og hvert af disse Arealer erstattede af en enkelt Kraft midt mellem Delelinierne (altsaa i Punkterne $\frac{x}{l} = 0{,}05,\ 0{,}15 \ldots$). Man beregner nu følgende Værdier (de sidste forudsætte selvfølgelig η funden først; η viser sig nedenfor at blive $= 10{,}3'$):

$\frac{x}{l} =$	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45
$\frac{t_o}{t} =$	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
$\varphi =$	47° 51′	37° 13′	26° 35′	15° 57′	5° 19′
$\frac{I_o}{I} =$	0.166	0.275	0.422	0.614	0.857
$\frac{I_o}{I}\ sec\,\varphi =$	0.25	0.35	0.47	0.64	0.86
$\frac{\xi - x}{l} =$	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
$\frac{\xi - x}{l} \cdot \frac{I_o}{I}\ sec\,\varphi =$	0.113	0.123	0.118	0.096	0.043
$\frac{\eta - y}{\eta} =$	+ 0.70	+ 0.29	+ 0.024	÷ 0.145	÷ 0 214
$\frac{\eta - y}{\eta} \cdot \frac{I_o}{I}\ sec\,\varphi =$	+ 0.17	+ 0.10	+ 0.01	÷ 0.09	÷ 0.19

O bestemmes som Skæringspunkt mellem de yderste Sider i en Tovpolygon til Kræfterne $\frac{I_o}{I}$ fordelte over Buen (Tyngdepunktsbestemmelse). De i ovenstaaende Tabel opførte Værdier af $\frac{I_o}{I}$ tænkes virkende som Kræfter i de vandrette Linier gennem m_1, m_2 . . . Kraftpolygonen 1 . . . 5 er tegnet til venstre for Buens Midtlinie paa Figurens øverste vandrette Linie (med en ganske vilkaarlig Kraftmaalestok). Polen er C, Tovpolygonen ligger ligeledes til venstre for Midtlinien. Da der fordres stor Nøjagtighed ved Bestemmelsen af O (vil

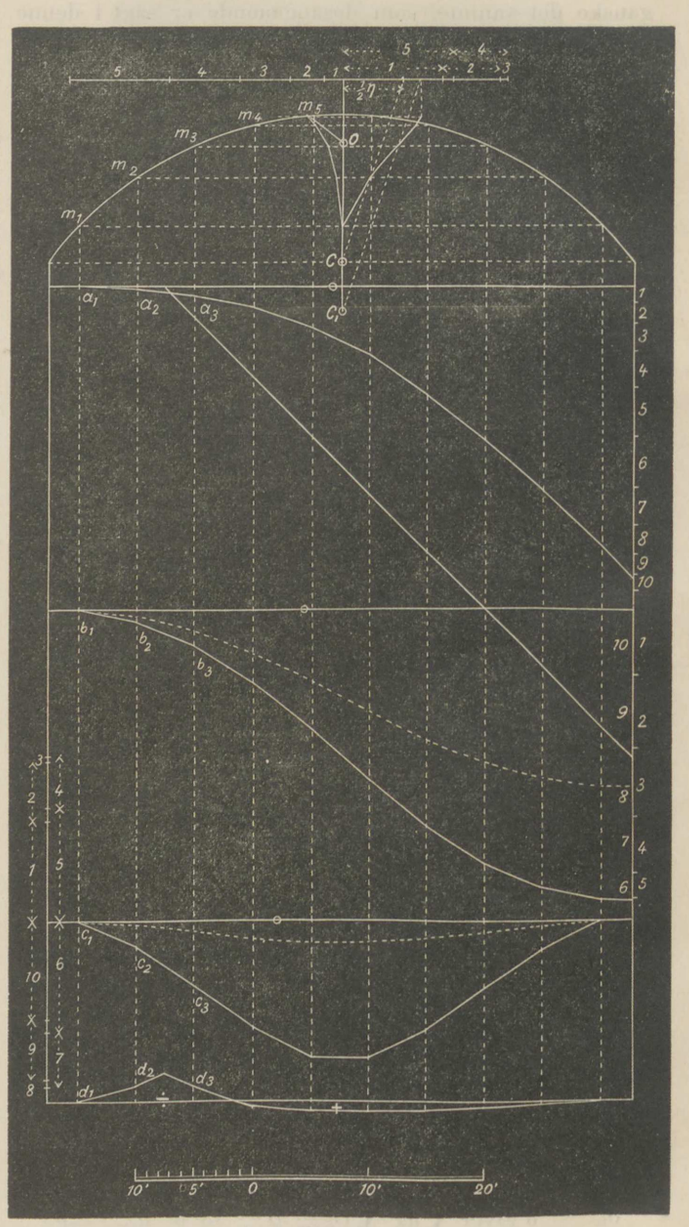

Fig. 2.

vise sig senere), bør man forstørre Tegningen i lodret Retning (Højderne multipliceres med n, det fundne η divideres med n).

Influenskurven for X_a. De i ovenstaaende Tabel anførte Værdier af $\frac{I_o}{I}\ sec\,\varphi$ tænkes virkende som

lodrette Kræfter i Punkterne m_1, m_2 . . . Paa Vertikalen gennem Buens højre Endepunkt er Kraftpolygonen 1 . . . 10 afsat efter en vilkaarlig Maalestok, og Tovpolygonen a_1, a_2, a_3 . . . er tegnet, saa der paa nævnte Vertikal afskæres Længden $\frac{1}{2}\,l$ mellem Polygonen og dens forlængede første Side. Denne Polygon er da Influenskurve for X_a (Aksen er den forlængede første Side). (Moment-) Maalestokken for Ordinaterne er: $1\,\mathfrak{A}' = 1'$ efter Længdemaalestokken. Vilde man bruge en Momentmaalestok, hvor $1' \sim n\,\mathfrak{A}$, maatte man lade Tovpolygonen afskære Stykket $\frac{l}{2n}$ efter Længdemaalestokken paa den sidste Vertikal.

Influenskurven er nemlig en Tovpolygon til Kræfterne $\frac{I_o}{I}\,sec\,\varphi$, da Ordinaterne faas ved at multiplicere Ordinaterne i en bestemt Tovpolygon (med Poldistance 1) med en Konstant $(1 : \delta_{aa})$, og den sidste Ordinat er $\frac{1}{2}\,l$, da:

$$\int_o^l dx \int_o^x sec\,\varphi\,\frac{I_o}{I}\,dx = l\int_o^l sec\,\varphi\,\frac{I_o}{I}\,dx - \int_o^l sec\,\varphi\,\frac{I_o}{I}\,x\,dx$$

$$= l\int_o^l sec\,\varphi\,\frac{I_o}{I}\,dx - \xi\int_o^l sec\,\varphi\,\frac{I_o}{I}\,dx = \frac{1}{2}\,l\,.\,\delta_{aa}.$$

Influenskurven for X_b. I Tabellen ovenfor er opført Værdierne af $\frac{\xi - x}{l}\cdot\frac{I_o}{I}\,sec\,\varphi$ for venstre Halvdel af Buen; for højre Halvdel ere de lige saa store, men negative. Disse Størrelser tænkes virkende som lodrette Kræfter i Punkterne m_1, m_2 . . . , Kraftpolygonen 1 . . . 10 er tegnet paa Vertikalen til højre, og der er konstrueret en Tovpolygon b_1, b_2, b_3 . . . , som paa Vertikalen til højre afskærer Stykket $\frac{1}{2}\,l$, regnet fra den forlængede første Side. Dette er da Influenskurven for X_b, idet (Kraft-) Maalestokkens Enheder ere $\frac{1}{2}\,l \times$ Længdemaalestokkens. Influenskurven er nemlig en Tovpolygon til Kræfterne $(\xi - x)\,\frac{I_o}{I}\,sec\,\varphi$ (at der ovenfor er divideret med Konstanten l, er naturligvis ligegyldigt), hvis Ordinater ere multiplicerede med Konstanten $1 : \delta_{bb}$, og da δ_{mb} for $x = l$ er lig δ_{bb}, skal Influenskurven paa Vertikalen til højre afskære Stykket 1 (maalt paa Kraftmaalestokken).

Hvad der interesserer mest, er imidlertid at kende det Bidrag, som X_b leverer til Influenskurven for Momenterne. Til Influenskurven for Momentet i Punktet x leverer X_b Bidraget $-(\xi - x)\,X_b$. Vil man have Kurven for dette Udtryk, skulle Ordinaterne i den fundne Kurve for X_b multipliceres med Konstanten $2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)$, hvis Momentmaalestokken som her er $1' \sim 1\,\mathfrak{A}'$. I Figuren, hvor man vil have Influenskurven for Momentet i Punktet $\frac{x}{l} = 0{,}2$, har man ved Multiplikation med 0,6 faaet den punkterede Kurve for X_b's Bidrag. Er Momentmaalestokken $n\,\mathfrak{A}' \sim 1'$, skal der multipliceres med $\frac{2}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)$. Multiplikationen kan naturligvis udføres ved at flytte Polen.

Influenskurven for X_c. Til de i Tabellen opførte Størrelser $\frac{\eta - y}{\eta}\,sec\,\varphi\,\frac{I_o}{I}$ (for Buens højre Halvdel ere de symmetriske med dem for venstre) betragtede som vandrette Kræfter, virkende i Punkterne m_1, m_2 . . . , tegnes en Tovpolygon. Kraftpolygonen er (efter en vilkaarlig Kraftmaalestok) anbragt paa Figurens øverste vandrette Linie, baade den og Tovpolygonen ere kun tegnede for Halvdelen af Buen, bægge ligge til højre for Buens Midtlinie; Polen er C; Kraftpolygonen lukker sig, da $\int_o^{\frac{1}{2}l} (\eta - y)\,sec\,\varphi\,\frac{I_o}{I}\,dx = o$; dette er en meget skarp Kontrol for Bestemmelsen af η. Har man ved Bestemmelsen af η brugt en forstørret Maalestok for Højderne, kan det samme bruges her. Naar Poldistancen kaldes h, afskæres der mellem Tovpolygonen og dens forlængede første Side paa den vandrette gjennem m_5 Stykket $\frac{\delta_{cc}}{2h}$. Man konstruerer nu Polen C_1 saaledes, at naar Tovpolygonen tegnes med Benyttelse af den, afskæres Stykket $\frac{1}{2}\,\eta$ paa den vandrette gennem m_5. Den ny Poldistance er da: $h_1 = \frac{\delta_{cc}}{2h}\cdot\frac{h}{{}^1/_2\,\eta} = \frac{\delta_{cc}}{\eta}$. Nu betragtes Størrelserne $\frac{\eta \div y}{\eta}\,sec\,\varphi\,\frac{I_o}{I}$ som lodrette Kræfter, virkende i m_1, m_2 . . . , og der tegnes en Tovpolygon $c_1\,c_2\,c_3$ . . . til dem med Poldistancen h_1 (Kraftpolygonen er anbragt paa Vertikalen til venstre med Benyttelse af samme Kraftmaalestok som før). Havde man ved Bestemmelsen af h_1 indført 1 i Stedet for η, vilde Ordina-

terne i Polygonen $c_1 c_2 \ldots$ have været $\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}$; nu ere de $\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} \cdot \eta$, og Polygonen $c_1 c_2 \ldots$ er altsaa Influenskurve for X_c (H) med Kraftmaalestokken $\eta' \sim 1\,\mathfrak{T}$. Influenskurven lukker sig, da $\delta_{bc} = o$.

X_c's Bidrag til Momentet i Punktet x er $= \div (\eta - y)\, X_c$. Kurven for dette Udtryk faas ved Multiplication af den fundne Kurve med $\frac{\eta - y}{\eta}$, hvis Momentmaalestokken som her er $1' \sim 1\,\mathfrak{T}'$. I Figuren, hvor man vil have Kurven for Punktet $\frac{x}{l} = 0.2$, har man ved Multiplikation med $1 - \frac{8,7}{10,3} = 0,16$ faaet den punkterede Kurve for X_c's Bidrag til Momentet. Er Momentmaalestokken $n\,\mathfrak{T}' \sim 1'$, skal der multipliceres med $\frac{\eta - y}{\eta . n}$.

Influenskurven for M_o i Punktet x er som bekendt en ret Linie med Ordinat 0 i Punktet x og Ordinat $(l - x)$ ved Buens højre Endepunkt; til venstre for Punktet x ere alle Ordinater 0. Den til Punktet $\frac{x}{l} = 0,2$ svarende Linie er tegnet i Figuren med samme Akse som Kurven for X_a. Bruges Momentmaalestokken $n\,\mathfrak{T}' \sim 1'$, er Ordinaten længst til højre $\frac{l - x}{n}$ (efter Længdemaalestokken).

Ved Addition af de 4 Kurvers Ordinater faas endelig Influenskurven for Momentet. I Figuren faar man Kurven $d_1\, d_2\, d_3 \ldots$, hvor de negative Ordinater ere afsatte opad, de positive nedad. (For Punktet $\frac{x}{l} = 0,2$ ere alle X-Kurverne negative, kun M_o-Kurven positiv). X-Kurverne ere alle Tovpolygoner, medens de skulde have været Tovkurver; Polygonerne tangere imidlertid de rigtige Kurver i Punkterne $\frac{x}{l} = 0,1,\ 0,2 \ldots$, saa det er Influenskurvens Ordinater i disse Punkter, man helst bør bruge.

Temperaturændringers Indflydelse. Ved større Monierhvælvinger bør man næppe undlade at tage Hensyn hertil; Materialets Udvidelseskoefficient maa vel regnes at være den samme som for Jærn, da Betonen og Jærnet angives at følges godt ad ved Udvidelser. Uden at gaa nærmere ind herpaa skal jeg blot anføre, at naar den af Temperaturændringer alene fremkaldte Kraft X_c kaldes X_{ct}, er $X_{ct} = \pm \frac{\varepsilon t l . EI_o}{\delta_{cc}}$, hvor ε er Udvidelseskoefficienten, t Temperaturændringen, δ_{cc} den ovenfor med h_1 betegnede Poldistance multipliceret med η. — X_{at} og $X_{bt} = o$. Af X_{ct} følger Momentet $X_{ct}\ (\eta - y)$.

Hermed er Opgaven i Virkeligheden løst. Uagtet Metoden i Forhold til Opgavens Vanskelighed forekommer mig at være temmelig simpel, vil den naturligvis dog i mange mindre vigtige Tilfælde være vel vidtløftig, og jeg tror derfor, at efterfølgende Tilnærmelse for flade indspændte Hvælvinger, der er gennemført saa vidt, at den paa et Øjeblik giver den farligste Paavirkning i et Tværsnit, kan have Interesse. For flade Buer kommer den Virkeligheden langt nærmere, end det er muligt ved den almindelige Indlægning af en Tryklinie, og den fører snarest hurtigere til Maalet.

Midtliniens Ligning er en Parabel med Pil f, Ligningen er

$y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$. Tykkelsen er konstant, altsaa $\frac{I_o}{I} = 1$, $\sec\varphi$ sættes $= 1$.

$$\text{Derved faas } \eta \cdot \int_o^l dx = \int_o^l y dx,\ \eta = \frac{2}{3} f.$$

Ved Udførelsen af Integrationerne faas nu:

$$\delta_{ma} = \int_o^x dx \int_o^x dx = \frac{1}{2} x^2,\ \delta_{aa} = \int_o^l dx = l.$$

$$\delta_{mb} = \int_o^x dx \int_o^x \left(\frac{1}{2} l - x\right) dx = \frac{1}{4} lx^2 - \frac{1}{6} x^3,$$

$$\delta_{bb} = \int_o^l dx \int_o^x \left(\frac{1}{2} l - x\right) dx = \frac{1}{12} l^3.$$

$$\delta_{mc} = \int_o^x dx \int_o^x (\eta - y)\, dx = \frac{1}{3} f x^2 - \frac{4f}{l^2}\left(\frac{1}{6} lx^3 - \frac{1}{12} x^4\right),$$

$$\delta_{cc} = \int_o^{y_1} dy \int_o^x (\eta - y)\, dx = \frac{4}{45} f^2 l.$$

Herved bliver Ligningen for H-Kurven:

$$H = \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{l}{f} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 \div 2 . \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right] = \frac{l}{f} \cdot A;$$

angaaende Værdierne af A se nedenfor.

Ligningen for Influenskurven for Momentet i Punktet x_1 bliver:

$$M_{x_1} = -\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} + \left(x_1 - \frac{1}{2}\,l\right)\frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}} + \left(y_1 - \frac{2}{3}\,f\right)\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} + \Big[x - x_1\Big]_{x_1}^{l},$$

hvor der ved det sidste Leds Skrivemaade antydes, at det kun skal medtages for Værdier af x mellem x_1 og l (det er $= o$ for $x < x_1$).

Ligningen bliver:

$$M_{x_1} = l\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{l} - \frac{1}{2}\right)\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right] + \left(4\left(\frac{x_1}{l} - \left(\frac{x_1}{l}\right)^2\right) - \frac{2}{3}\right)\left[\frac{15}{4}\left(\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right)\right] + \left[\frac{x}{l} - \frac{x_1}{l}\right]_{x_1}^{l}\right]$$

I nedenstaaende Tabel er angivet Ordinaterne i Influenskurven for Momenterne i Punkterne $x_1 = 0$, $0.1l \ldots 0{,}5l$ for hver Tiendedel af Spændvidden. De opførte Tal skulle dog multipliceres med l for at give de virkelige Ordinater. I nederste vandrette Række findes Ordinaterne i Influenskurven for H (skulle multipliceres med $\frac{l}{f}$). Da Parablen er Ligevægtsfigur for en Bue med ensformig Belastning over hele Horisontalprojektionen, frembringer en saadan Belastning intet Moment; den positive og den negative Del af Influenskurvernes Areal (for Momenterne) maa derfor være numerisk lige store. I et vilkaarligt Tværsnit kan altsaa en ensformig fordelt, bevægelig Belastning frembringe ligestore positive og negative største Momenter; til disse svarer der imidlertid ulige store Horisontaltryk, saa Tværsnittets resulterende Paavirkning ikke bliver ganske den samme. Har man med et Materiale som Monier at gøre (som man byder Strækning), har det Betydning at kende bægge Grænser. I Tabellens næst sidste lodrette Rubrik er opført vedkommende Moment-Influenskurves største positive eller negative Areal (efter tilnærmende Bestemmelse af Kurvens Skæringspunkt med Aksen, fundet ved Integration); det tilføjede Fortegn antyder blot, at det er dette Moment, der ledsages af det største Horisontaltryk. Det Areal af H-Influenskurven, der giver det samtidig med dette Moment optrædende største Horisontaltryk er endelig opført i Tabellens sidste Rubrik, det samtidig med Momentet af modsat Fortegn optrædende mindste Horisontaltryk faas af H-Influenskurvens Areal $\div$ det i Tabellen opførte. Arealet af hele H-Kurven findes ved Integration at være $= \frac{1}{8}\frac{l^2}{f}$, saa at en total ensformig Belastning p giver den bekendte Formel for H, $H = \frac{1}{8}\frac{p\,l^2}{f}$.

Ved Hjælp af Tabellen kan man paa et Øjeblik angive Tværsnittenes største Paavirkning, hvad enten Belastningen er kontinuerligt fordelt efter en eller anden Lov, eller den bestaar af enkelte Kræfter.

$\frac{x}{l} =$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	M-Areal	H-Areal
0.0	0	+ 0.0607	+ 0.0640	+ 0.0367	0.0	— 0.0313	— 0.0480	— 0.0473	— 0.0320	— 0.0113	0	$-0.0173 \cdot l^2$	$0.0853 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.1	0	— 0.0255	+ 0.0090	+ 0.0179	+ 0.0130	+ 0.0031	— 0.0054	— 0.0093	— 0.0078	— 0.0031	0	$+0.0042 \cdot l^2$	$0.0659 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.2	0	— 0.0142	— 0.0538	— 0.0142	+ 0.0086	+ 0.0187	+ 0.0198	+ 0.0154	+ 0.0086	+ 0.0026	0	$+0.0073 \cdot l^2$	$0.0933 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.25	0	— 0.0095	— 0.0380	— 0.0350	0.000	+ 0.0195	+ 0.0260	+ 0.0228	+ 0.0140	+ 0.0045	0	$+0.0089 \cdot l^2$	$0.0853 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.3	0	— 0.0053	— 0.0242	— 0.0595	— 0.0130	+ 0.0156	+ 0.0278	+ 0.0269	+ 0.0174	+ 0.0059	0	$+0.0093 \cdot l^2$	$0.0753 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.4	0	+ 0.0011	— 0.0022	— 0.0181	— 0.0518	— 0.0063	+ 0.0186	+ 0.0251	+ 0.0186	+ 0.0067	0	$-0.0071 \cdot l^2$	$0.0661 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.5	0	+ 0.0051	+ 0.0120	+ 0.0101	— 0.0080	— 0.0469	— 0.0080	+ 0.0101	+ 0.0120	+ 0.0051	0	$-0.0054 \cdot l^2$	$0.0631 \cdot \frac{l^2}{f}$
H-Kurven	0	0.0304	0.0960	0.1654	0.2160	0.2344	0.2160	0.1654	0.0960	0.0304	0		

II. Charnierer ved Vederlagene.

Det er navnlig Hvælvinger mellem Jærnbjælker, der kan være Tale om at behandle paa denne Maade; enten vil Bjælken kunne vippe lidt om en vandret Akse, eller der er ingen Sammenhæng mellem Buens og Bjælkens Materiale. Charnieret vil maaske ikke komme til at ligge i Buens Midtlinie, men en Behandling af Problemet ud fra denne Forudsætning vil dog give en bedre Vejledning for Dimensionsbestemmelsen end den almindelige Indlæggelse af en Tryklinie; den omtalte Usikkerhed vil navnlig have Betydning for de nærmest Enderne liggende Dele, og her kan man jo dog ikke afpasse Dimensionerne efter Paavirkningen. Jeg skal indskrænke mig til at antyde Fremgangsmaaden for den nøjagtige grafiske Beregning, der tager Hensyn til Tværsnitsændringerne, og dernæst ligesom ovenfor give en Tilnærmelse for flade Buer med konstant Tykkelse med tilhørende Tabel; denne vil formentlig ogsaa have Betydning for de nu til Dags temmelig almindelig anvendte massive Jærnbuer med Charnierer i Viadukter med lille Spændvidde.

Som eneste statisk ubestemmelige Størrelse indføres her Horisontaltrykket. Ved at sætte dette $= o$ faas det statisk bestemte Hovedsystem (Fig. 3) at være en Bue, hvis ene Ende er fastholdt ved et Charnier, medens den anden frit kan bevæge sig hen ad en vandret Linie. Der behandles ligeledes her kun symmetriske Buer og lodret virkende Belastning. Ligningerne (2) blive her til: $\Sigma P_m \delta_{ma} - H \delta_{aa} = o$, idet Vederlagene antages urokkelige. δ_{ma} betyder den lodrette Bevægelse af P_m's Angrebspunkt m og δ_{aa} den vandrette Bevægelse af Endepunktet a, bægge naar Kraften $H = \div 1$ (antydet i Fig. 3) virker paa det statisk bestemte Hovedsystem.

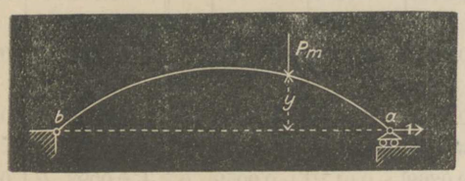

Fig. 3.

Belastningen $H = -1$ giver i Punktet m Momentet $\div y$ (y regnes fra Charnierernes vandrette Forbindelseslinie), idet vi fastholde, at et positivt Moment giver Strækning foroven. Ligning (1) anvendt paa Bestemmelse af Momenterne giver da:

$$M_x = M_o + Hy,$$

hvor M_o er det af de ydre Kræfter (Belastningen) frembragte Moment for en simpelt understøttet Bjælke ab (Fig. 3). Da dette Moment altid giver Sammentrykning foroven, skal det regnes negativt, hvorfor det er simplere at skrive:

$$M_x = Hy \div M_o.$$

Man skal nu have δ_{ma} og δ_{aa} bestemt; man har da Influenskurven for H. Hertil skal bruges Udtrykkene for Formforandringerne i Ligning (4) ovenfor, idet der dog maa tages Hensyn til, at det statisk bestemte Hovedsystem her er en ved bægge Ender simpelt understøttet Bue. Dette faar Indflydelse paa Grænserne for Integralerne. Idet Divisoren $E I_o$ bortkastes, har man $\delta_{ma} = \Delta y = \int dx \int \frac{M \sec \varphi \, I_o}{I} dx + Cx + C_1$, hvor C og C_1 bestemmes ved, at $\Delta y = o$ for $x = o$ og $x = l$, altsaa

$$\delta_{ma} = \int_o^x dx \int_o^x \frac{M \sec \varphi \, I_o}{I} dx - \frac{x}{l} \int_o^l dx \int_o^x \frac{M \sec \varphi \, I_o}{I} dx.$$

For $\delta_{aa} = \Delta x = \int_o^{y_1} dy \int_o^x \frac{M \sec \varphi \, I_o}{I} dx$, hvor y_1 er Ordinaten til Endepunktet a (Integralet kunde skrives: 2 Gange $\int_o^h \ldots$), faar Forandringen af det statisk bestemte Hovedsystem ingen Betydning, da Understøtningen ved a kun virker i lodret Retning. I ovenstaaende Udtryk for δ_{ma} og δ_{aa} indføres $M = y$ (egentlig $\div y$, men Minustegnet bortforkortes). Den nøjagtige Konstruktion med variabelt I udføres nu ganske som for Influenskurven for X_c ved den indspændte Bue. Man begynder altsaa med at tegne en Tovpolygon for de vandrette Kræfter $y \frac{I_o}{I} \sec \varphi$ virkende i Buens Punkter (tilstrækkeligt at behandle den halve Bue) med en vilkaarlig Poldistance h. Mellem Tovpolygonen og dens forlængede første Side afskæres da Stykket λ. Bruger man nu samme Poldistance h til Konstruktion af Tovpolygonen for de lodrette Kræfter $y \frac{I_o}{I} \sec \varphi$ virkende i Buens Punkter, vil denne Tovpolygon være Influenskurven for H, idet Kraftmaalestokken er: $2\lambda' = 1\,\mathfrak{T}$. Naturligvis kan man, som det er gjort ved den indspændte Bue, ved først at forandre h sørge for, at λ bliver en bekvem Konstant. Ordinaterne i H-Kurven skulle maales fra Slutlinien. Influenskurven for Momentet i Punktet x_1 har Ordinaterne

$$Hy_1 \div M_o = y_1 \left(H - \frac{M_o}{y_1}\right).$$

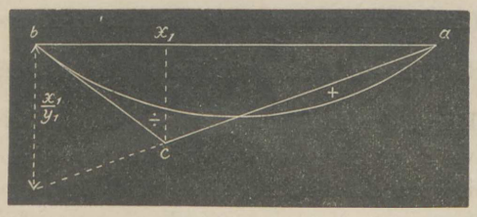

Fig. 4.

Influenskurven for $\frac{M_o}{y_1}$ er fremstillet i Fig. 4; det er Trekanten *abc*. I Fig. 4 er ogsaa tegnet en *H*-Kurve. og Fladen mellem den og Linierne *ac* og *bc* er Influensfladen for M_{x_1}, idet Ordinaterne dog skulle multipliceres med y_1 efter at være maalte paa *H*-Kurvens Kraftmaalestok.

Tilnærmelse for flade (parabolske) Buer.

Der regnes med konstant Tværsnit, og $sec\,\varphi$ sættes $= 1$. Parablens Ligning med Charnieret *b* (Fig. 3) som Begyndelsespunkt er $y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$.

Ved Udførelse af Integrationerne faas:

$$\delta_{ma} = \int_o^x dx \int_o^x y\,dx \div \frac{x}{l}\int_o^l dx \int_o^x y\,dx =$$

$$\frac{4f}{l^2}\left(\frac{1}{6}lx^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{12}l^3x\right),$$

$$\delta_{aa} = \int_o^{y_1} dy \int_o^x y dx = -\frac{8}{15}\,l\,f^2.$$

Ligningen for *H*-Linien bliver:

$$H = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{5}{8}\cdot\frac{l}{f}\cdot\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right] = \frac{l}{f}\cdot A.$$

Angaaende Værdierne af *A* se nedenfor.

Ligningen for Influenskurven for M_o i Punktet x_1 er:

$$\text{for } x < x_1 : M_o = l\left[\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x_1}{l}\right)\right],$$

$$\text{for } x > x_1 : M_o = l\left[\frac{x_1}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right].$$

$$Hy_1 = l\,.\,4\left(\frac{x_1}{l} - \left(\frac{x_1}{l}\right)^2\right).\,A.$$

Ordinaterne i Influenskurverne for Momenterne faa altsaa Formen $B\,.\,l$. Værdierne af *B* ere givne i Tabellen nedenfor for $\frac{x_1}{l} = 0.1 \ldots 0.5$ og for $\frac{x}{l} = 0$, $0.1 \ldots 1.0$. I Tabellens nederste vandrette Række findes Værdierne *A* for *H*-Kurven. De to sidste lodrette Rubrikker svare ganske til dem i Tabellen for den indspændte Bue. Ogsaa her ere Moment-Influenskurvernes positive og negative Arealer lige store, fordi Parablen er Ligevægtsfigur for total ensformig Belastning, og Arealet af hele *H*- Kurven findes atter efter Formlen $\frac{1}{8}\frac{l^2}{f}$.

$\frac{x}{l} =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	*M*-Areal.	*H*-Areal
0.1	0	− 0.0679	÷ 0.0382	− 0.0128	+ 0.0070	+ 0.0203	+ 0.0270	+ 0.0272	+ 0.0218	+ 0.0121	0	$+ 0.0116\,.\,l^2$	$0.0881 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.2	0	− 0.0408	− 0.0858	− 0.0384	− 0.0010	+ 0.0250	+ 0.0390	+ 0.0416	+ 0.0342	+ 0.0192	0	$+ 0.0163\,.\,l^2$	$0.0810 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.3	0	− 0.0185	− 0.0426	− 0.0766	− 0.0238	+ 0.0141	+ 0.0362	+ 0.0434	+ 0.0374	+ 0.0215	0	$+ 0.0153\,.\,l^2$	$0.0699 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.4	0	− 0.0011	− 0.0086	− 0.0275	− 0.0614	− 0.0125	+ 0.0186	+ 0.0324	+ 0.0314	+ 0.0188	0	$\div 0.0102\,.\,l^2$	$0.0703 \cdot \frac{l^2}{f}$
0.5	0	+ 0.0113	+ 0.0160	+ 0.0088	− 0.0140	− 0.0547	− 0.0140	+ 0.0088	+ 0.0160	+ 0.0113	0	$+ 0.0073\,.\,l^2$	$0.0647 \cdot \frac{l^2}{f}$
H-Kurve	0	0.0613	0.1160	0.1588	0.1860	0.1953	0.1860	0.1588	0.1160	0.0613	0		

Ved Etageadskillelser af Beton- eller Monierhvælvinger mellem Jærnbjælker indrettes det ofte saaledes, at der paa Hovedbjælkernes Flanger indskydes løst liggende Tværbjælker, der afgive Vederlag for Hvælvingerne, eller at Hvælvingernes Vederlag bæres af Søjler. I dette Tilfælde kunne Vederlagene ikke

siges at dannes af faste Charnierer, man nærmer sig tvært imod til det Tilfælde, at man har en Række Buer, hvor der kun er faste Charnierer ved Rækkens to Ender, medens Mellemunderstøtningerne frit kunne baade dreje sig og forskyde sig i vandret Retning, som om de dannedes af Vugge- og Rullelejer. I dette ideale Tilfælde findes Influenskurven for H ganske som ovenfor, blot at δ_{aa} her betyder den vandrette Nedbøjning af hele Buerækken. Har man n ligestore Buer, bliver δ_{aa} n Gange det for én Bue fundne, Ordinaterne i Influenskurven for H $\frac{1}{n}$ af de i ovenstaaende Tabel anførte; til Gengæld har man saa en saadan H-Kurve liggende under hver Bue. Det største Horisontaltryk bliver derfor (for en ensformig Belastning p) lig $\frac{1}{8} p \frac{l^2}{f}$ som ovenfor; derimod kunne Momenterne her blive betydelig større. Forholdet undersøges let graflsk ved som i Fig. 4 at tegne Influenskurverne op (altsaa her H-Kurver med $\frac{1}{n}$ af de tidligere fundne Ordinater for alle Fag, og en M_o-Kurve for ét Fag). Man ser da, at Belastning paa selve Faget giver overvejende negative Momenter, Belastning paa de tilstødende Fag udelukkende positive. For et bestemt n kan man naturligvis ogsaa danne sig en Tabel som ovenstaaende; man finder da, at allerede for $n = 3$ bliver Moment-Influenskurvens Ordinater i selve det betragtede Fag alle negative, hvilket imidlertid næppe svarer til Virkeligheden, naar der tales om Hvælvinger (dels fordi den vandrette Forskydning af Vederlagene ikke foregaar uhindret, dels af Hensyn til den sædvanligt brugte Overbetonnering). Det maatte derfor ad empirisk Vej bestemmes, hvilken Værdi af n der skal indføres, formentlig $n = 1.5$ à 2. I alt Fald antager jeg, at man med disse Værdier vil komme Virkeligheden nærmere end ved helt at se bort fra det her omtalte Forhold.