DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

TEKNISK BIBLIOTEK

JUL. HARTMANN

MAALETEKNIK

JUL. GJELLERUPS FORLAG KØBENHAVN

Læseværelsets Haandbibliotek
Polyteknisk Læreanstalt
fra Forlæggeren

DEN
POLYTEKNISKE
LÆREANSTALT

MAALETEKNIK

53,08 Har
1914
(Ex. 1)

H. MEYERS BOGTRYKKERI

TEKNISK BIBLIOTEK

MAALETEKNIK

PLANLÆGGELSE AF MAALINGEN MED GIVEN TOLERANS

DEN POLYTEKNISKE LÆREANSTALT

AF

JUL. HARTMANN

KØBENHAVN
JUL. GJELLERUPS FORLAG
1914

Ex. 1.

FORORD

I det efterfølgende har jeg forsøgt at fremstille den almindelige Teknik for en Maaling af given Tolerans, udført ved paa Forhaand givne Midler. Den Diskussion, jeg har gennemført, finder imidlertid, som det let vil ses, i sine Hovedtræk Anvendelse ikke alene paa den specielle maaletekniske Fremstilling, men i det hele taget paa al rationel kvantitativ Fremstilling, altsaa f. Eks. paa Regning og konstruktiv Tegning samt sidst men ikke mindst paa den Fremstilling — den industrielle — for hvilken saavel Maaling som Regning og Tegning er Hovedmidler.

Fremstillingens Hovedbetragtning er den, at enhver kvantitativ Fremstilling kræver et Regnskab over de mulige Afvigelser mellem, hvad der tilstræbes, og hvad der naaes —. Den kræver det, fordi enhver rationel Fremstilling maa være en Fremstilling med given Tolerans d. v. s. med en vis største Afvigelse, der kan tillades, men ikke maa overskrides. Regnskabet maa i Hovedsagen angaa Midlerne for Fremstillingen og de Afvigelser eller Anomalier, Brugen af disse Midler kan give Anledning til.

Hvor indlysende rigtigt dette Krav til Fremstillingen nu end er, kan det dog næppe bestrides, at der er en Tilbøjelighed til at skyde det antydede Regnskab til Side, idet man til Gengæld ofte stræber at sikre Opnaaelsen af det ønskede Resultat ved

Anvendelse af saa megen større Omhu paa Udførelsen. Denne Omlægning af Arbejdet er dog, som det ses, irrationel. Anvender man de bedst mulige Midler til Fremstillingen og tillige den størst mulige Omhu paa Uskadeliggørelse af dennes Anomalier, ja saa naar man ogsaa det tilstræbte Resultat, om det kan naas. Men man faar netop i Almindelighed ikke Sikkerhed for, at det virkelig naas, og i langt de fleste Tilfælde vil man i ethvert Fald betale Fremstillingen for dyrt ofte urimeligt meget for dyrt. Det er da netop et Synspunkt, som ønskes fastslaaet ved det foreliggende Arbejde, at den rationelle Fremstilling ikke i Almindelighed er en Fremstilling, der er saa nøjagtig som mulig, men en, der i alle Punkter er saa nøjagtig som nødvendigt. Det er det antydede Regnskabs Sag at holde Rede paa, hvor nøjagtig Udførelsen i hvert enkelt Punkt skal gøres og i det hele taget med, hvad der er væsentligt, og hvad der er uvæsentligt under Fremstillingen.

Man tager næppe Fejl, naar man søger Aarsagen til den antydede Forskydning i Arbejdets Fordeling deri, at Indøvelsen i Regnskabet i Teknikerens Undervisning hidtil er forsømt til Fordel for Indøvelsen i Udførelsens Teknik. Forfatteren nærer den Anskuelse, at den sidste vanskeligt kan blive grundig nok. Jo grundigere den er, desto flere og desto vanskeligere Opgaver vil Teknikeren kunne løse. Der skal næppe slaas af paa Fordringerne til en fint uddannet Teknik f. Eks. Tegneteknik eller matematisk Teknik, snarere bør man tænke paa en Udvidelse af Undervisningen til ogsaa at omfatte f. Eks. Regneteknik. Men til denne Undervisning bør ubetinget knyttes en Indøvelse i den rationelle Brug af disse Redskaber for den industrielle Fremstilling d. v. s. i det Regnskab, der i dette Arbejde peges paa for Maalingens Vedkommende. Det er ikke vanskeligt at antyde Opgaver for en saadan Undervisning. Lad Eleven f. Eks.

bestemme, hvilken Sikkerhed hans tekniske Overslag har, naar de Talkonstanter, dette bygger paa, forudsættes at have en given Tolerans. Lad ham afgøre, hvilket Regnemiddel, der mest passende kan anvendes til Talregningen. Eller lad Eleven bestemme Toleransen for den grafiske Konstruktion paa Grundlag af Kendskab til dennes Formaal o. s. v. Undervisningen bør ogsaa drage Anvendelsen af det matematiske Værktøj ind under sit Omraade, saaledes som det er sket i sidste Afsnit af denne Bog. I det hele taget frembyder Undervisningen i enhver Teknik Opgaver nok, men maaske tillader dog ingen en saa fuldstændig og alsidig Indøvelse i det antydede Regnskab som en Undervisning i Maaleteknik. En grundig Undervisning i dette Fag vilde i Virkeligheden være en Indøvelse i den rationelle Fremstillings Teknik og utvivlsomt bidrage overordentligt til den klare Erkendelse af denne Tekniks Krav i enhver Art Fremstilling.

Jeg nærer det Haab, at den foreliggende Fremstilling maa bidrage væsentligt til, at Opmærksomheden saavel i Undervisning som i Praksis skærpes overfor det Krav, den fremsætter. Derved vilde et Hovedformaal med mit Arbejde være opfyldt. Men den foreliggende Bog har ogsaa et mere direkte Formaal, nemlig det at tjene Uddannelsen af vore Teknikere i Maalingens specielle Teknik. Maaleteknik er saa nøje knyttet til moderne industriel Fremstilling, at en Undervisning i dette Fag nødvendigvis maa udgøre et Led i Teknikerens Uddannelse. Det falder naturligt at knytte en saadan Undervisning til de praktiske Laboratorieøvelser i Fysik, og i Forbindelse med disse har de studerende ved den herværende Polytekniske Læreanstalt da ogsaa de sidste 7—8 Aar modtaget en omend stærkt begrænset Undervisning i Maaling. Af de Forelæsninger, jeg i disse Aar har holdt som Vejledning til det praktiske Arbejde i Laboratoriet, er den foreliggende Maaleteknik fremstaaet. Dog har jeg ikke

begrænset Bogen til det, som den antydede Undervisning har kunnet og for Øjeblikket kan give, men strœbt at skabe en nogenlunde fuldstændig Fremstilling, der vil kunne tjene de studerende til Haandbog i deres senere Virksomhed og tillige som Middel for en eventuel udvidet Undervisning.

Den Mulighed synes mig nemlig ikke fjærn, at man i Fremtiden vil finde det formaalstjenligt dels at give alle studerende ved de tekniske Højskoler, specielt vor egen, en saadan udvidet Undervisning i Maaleteknik dels at skabe en Specialuddannelse af, hvad man kunde kalde Laboratorieingeniører, d. v. s. Ingeniører eller Fysikere, hvad man vil, med særlig Uddannelse i Maale- og Forsøgsteknik. For saadanne Ingeniører er der i vore Dage god Brug i snart sagt alle større industrielle Virksomheder og i de stadig talrigere offentlige Prøveanstalter.

Den første Fremstilling af Grundlaget for en ny Disciplin volder selvsagt store Vanskeligheder, navnlig hvad Stoffets Ordning angaar. Flere Muligheder er her at vælge imellem, saaledes som det blandt andet vil fremgaa af, at en noget forskellig Ordning er valgt for andet Afsnit i Hovedfremstillingen og det Resumé, hvormed Fremstillingen afsluttes. Jeg nærer imidlertid det Haab, at Fremstilling og Resumé i ethvert Tilfælde tilsammen vil lade de i Virkeligheden relativt enkle Linier, man kan spore indenfor de tilsyneladende saa forskelligartede Forhold, træde nogenlunde tydeligt frem.

Kjøbenhavn, Juni 1914.

Forfatteren.

INDLEDNING.

Almindelige Betegnelser. Maaling er Fremstilling af et Talbillede af en Egenskab ved Maaleobjektet (Massen af et Legeme, Længden af en Vej o. s. v.). Fremstillingen sker ved Maaleredskabet eller Maaleredskaberne, der sammen med Maaleobjektet danner Maalesystemet. Maalingen føres ved de antydede Redskaber altid tilbage til en eller flere Optællinger, enten af Inddelinger paa en Skala eller af Elementer i et Sæt af Normaler (Vægtlodder). En saadan Optælling betegner vi som en primær Iagttagelse eller blot som en Iagttagelse. Af Iagttagelserne beregnes Resultatet ved Maalingens Teori.

Maalingens Usikkerhed og Fejl. Maalingen har som enhver anden Fremstilling — f. Eks. den tekniske — sin Usikkerhed, der giver sig til Kende ved, at Resultatet, dersom det gentages, svinger indenfor et vist Interval — Usikkerhedsintervallet — hvis Bredde kan betragtes som Maal for Usikkerheden. Ligesom en teknisk Fremstilling kan Maalingen dernæst være behæftet med Fejl. Resultatet udviser da en ensidig Afvigelse fra den sande Værdi, d. v. s. en Afvigelse, der gaar igen fra Gentagelse til Gentagelse. Vi skelner gennem hele vor Fremstilling skarpt mellem de to her fremdragne Begreber, og det er os derfor om at gøre, at Forskellen mellem dem allerede paa dette Sted bringes til at træde klart frem. Hosstaaende Figur 1 a og b er i den Henseende anskuelig. I Fig. 1 a er afbildet en Maaling med en vis Usikkerhed, men uden Fejl. *S* er den sande Værdi. Gentagelse af Maalingen giver Resultater beliggende paa begge Sider af *S* indenfor et

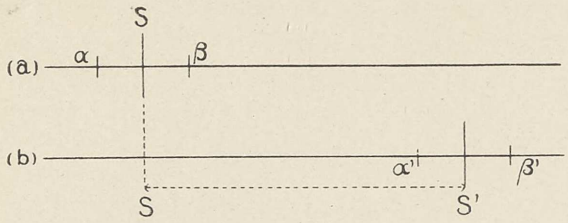

Fig. 1.

Interval $\alpha\beta$. Fig. 1 b afbilder den samme Maaling behæftet med en Fejl af Størrelse SS'. Gentagelsesværdierne fordeler sig nu om den falske Værdi S' (den sande er stadig S), men Maalingen har iøvrigt samme Usikkerhed som før, idet Gentagelsesintervallet $\alpha'\beta'$ har samme Størrelse som $\alpha\beta$.

Iøvrigt kan et Eksempel fra teknisk Fremstilling tjene til at belyse Forskellen mellem Usikkerhed og Fejl. Vi tænker paa en Samling Cyklekugler nominelt af Størrelse 3 mm. Indenfor en saadan Samling Kugler vil der optræde Svingninger i Diametren. Disse Svingninger, der maaske beløber sig til $^1/_{100}$ à $^2/_{100}$ mm., repræsenterer Fremstillingsusikkerheden. Men lad nu den Værdi, omkring hvilken Diametrene svinger, være 3,100, naar Kuglerne skulde have haft Diametren 3 mm., saa har Produktet en Fejl paa $^1/_{10}$ mm. eller relativt $3\,^0/_0$.

Oprindelsen til Maalingens Usikkerhed og Fejl. Systemets væsentlige Egenskaber. Maalingens væsentlige Forhold. For at forstaa Oprindelsen til Maalingens Usikkerhed og Fejl, altsaa til Resultatets Afvigelse fra den sande Værdi, maa vi rette vor Opmærksomhed mod Maalesystemet og dets Egenskaber. Maalingen forudsætter for en Række af disse til en vis Grad bestemte Værdier. De Egenskaber, disse Forudsætninger angaar, betegner vi som Systemets væsentlige Egenskaber. Til disse hører først og fremmest selve den Egenskab ved Maaleobjektet, vi gør til Genstand for Maaling, den Egenskab, Normalen repræsenterer, foruden en Række Egenskaber ved det Apparat, hvorved Maaleobjekt sammenlignes med Normalen. Ser vi bort fra den Del af Usikker-

heden, der hidrører fra Iagttageren, den subjektive Usikkerhed, afspejler Maalingens Usikkerhed — den objektive Usikkerhed — altid svingende Afvigelse af en eller flere væsentlige Egenskaber fra de for dem forudsatte Værdier, mens Fejlen paa sin Side afspejler ensidig Afvigelse. For saa vidt har vi i de antydede Afvigelser den nærmeste Aarsag til objektiv Usikkerhed, resp. Fejl, og ofte betragter vi i Virkeligheden ogsaa Afvigelsen som den praktiske Aarsag. Dog er det her som overalt saaledes, at den nærmeste Aarsag ikke altid er den, vi i Praksis regner for Aarsagen. Den praktiske Aarsag er i Almindelighed det Led i Aarsagskæden, hvor vi effektivt kan gribe ind. Den praktiske Kilde til Maalingens Usikkerhed og Fejl kan derfor være utallige og højest forskelligartede Forhold, og disse Forhold, hvilke de end er, betegner vi under et som Maalingens væsentlige Forhold. Disse omfatter alle de Forhold, der ved Maalingen maa drages ind under Kontrol i Modsætning til de mangfoldige uvæsentlige Forhold, der kan lades ude af Betragtning.

Hovedlinien i den efterfølgende Fremstilling af Maaletekniken. Vi skal herefter optrække Hovedlinien i vor Fremstilling af Maaletekniken.

Til Formaal har Fremstillingen at give Tekniken for Planlæggelsen af en Maaling af given Tolerans udført ved givne Redskaber. Vi tænker os altsaa, at den yderst almindelige Situation foreligger, at vi ved de Redskaber, som Maaletekniken stiller til vor Raadighed, skal maale en vis Størrelse og derved være sikre paa, at Resultatets Afvigelse fra den sande Værdi ikke overskrider en vis Grænse — Toleransgrænsen.

Det første Skridt i Planlæggelsen maa da blive at vælge mellem de for Maalingen givne Metoder. Afgørende for dette Valg bliver nu Metodens Sikkerhed d. v. s. den Sikkerhed paa Resultatet, som uundgaaelig Usikkerhed paa de indgaaende Iagttagelser tillader. Metodens Usikkerhed maa

naturligvis ikke overskride Toleransgrænsen. I Virkeligheden vælger vi Metoden saaledes, at dens Sikkerhed rigeligt tillader den tilstræbte Nøjagtighed, d. v. s. vi arbejder som i teknisk Fremstilling med en vis Sikkerhedsfaktor. Før vi imidlertid kan vælge Metoden efter denne Regel, maa vi have lært at vurdere Metodens Sikkerhed paa Grundlag af Kendskab til Iagttagelsernes, og før Anvisning for Udførelsen af saadan kvantitativ Vurdering kan gives, maa vi fastslaa Talmaal for saavel Iagttagelsernes som Resultatets Usikkerhed. I Overensstemmelse hermed indleder vi første Afsnit af vor Fremstilling — Afsnittet om Vurdering af Sikkerheden som Grundlag for Valg af Metoden — med at fastslaa saadanne Talmaal, hvorefter vi giver Tekniken for Beregningen af Resultatets Usikkerhed ved Iagttagelsernes.

Andet Afsnit belyser herefter Maalingens væsentlige Forhold. Det er altsaa Afsnittet om Maalingens objektive Usikkerhed og dens Fejl og da først og fremmest, fordi vor Behandling er en Teknik, Afsnittet om Forholdsreglerne mod disse. Vort Hovedsynspunkt er følgende. Vi tænker os, at et Overslag, som det vi i første Afsnit har lært at udføre, har givet, at en vis Metode tillader den foreliggende Maaling, d. v. s. at dens uundgaaelige Usikkerhed gør det. (Den uundgaaelige Usikkerhed er først og fremmest den fra Iagttageren hidrørende, men objektiv Usikkerhed kan dog ogsaa være praktisk set uundgaaelig). Vi maa da endnu sikre Maalingen mod, at Kilder til Usikkerhed eller Fejl bringer Resultatet til at falde udenfor Toleransgrænsen. Det vil sige, vi maa opsøge Maalingens Kilder til (objektiv) Usikkerhed og Fejl, vi maa gøre disse, altsaa Maalingens væsentlige Forhold, til Genstand for en Undersøgelse for at vurdere deres Indflydelse, og vi maa, dersom denne viser sig væsentlig, søge den elimineret. Andet Afsnit er saaledes sagt i Korthed Afsnittet om Analysen, Vurderingen og Eliminationen af Maalingens (objektive) Usikkerhed og Fejl.

I.

OVERSLAG OVER MAALINGENS USIKKERHED SOM GRUNDLAG FOR VALG AF METODEN

KAP. I.

GRUNDLAG FOR OVERSLAGET OVER METODENS GRÆNSEUSIKKERHED.

Iagttagelsesusikkerhedens Oprindelse. Skønt vi i det Overslag over Metodens Usikkerhed, som vi i indeværende Afsnit skal lære at udføre, i og for sig ikke spørger om Oprindelsen til Iagttagelsens Usikkerhed eller Usikkerhedens Art, vil det dog for Forstaaelsen af de Eksempler, hvorved vi indøver Overslagets Teknik, være ønskeligt, at der til en Indledning peges paa de almindeligste Kilder til Iagttagelsens Usikkerhed.

Den egentlige Iagttagelsesusikkerhed hidrører fra Iagttageren, er altsaa af subjektiv Karakter. Iagttageren har den Opgave, at aflæse Maaleapparatets Skala, eventuelt tillige den før Aflæsningen at foretage en Indstilling af Maalesystemet efter et bestemt Kriterium. (Indstilling af Wheatstones Bro paa Udslaget Nul af Galvanometret, Indstilling af Fotometret paa lige stærk Belysning af dets Felter o. s. v.). Begge Operationer har nu Usikkerhed. Den første betegner vi som Aflæsningsusikkerhed, den sidste som Indstillingsusikkerhed. Begge hidrører fra Begrænsningen i Iagttagerens Skelneevne.

Ind i Overslaget over Metodens Usikkerhed drager vi nu

imidlertid ogsaa ofte Usikkerhed af objektiv Oprindelse altsaa Usikkerhed, der mest umiddelbart afspejler Svingninger i væsentlige Egenskaber ved Systemet. Angaaende denne objektive Usikkerhed skal her blot antydes, at Kilden til den meget hyppigt er at søge i de Svingninger, der til Stadighed finder Sted i Milieuets Tilstand f. Eks. i dets Temperaturtilstand. Til disse Svingninger kan man med en vis Ret ogsaa regne de ofte meget væsentlige Usikkerhedskilder, som mekaniske Rystelser, magnetiske Forstyrrelser, optisk Uro o. s. v. betegner. Endelig maa den objektive Usikkerhed ikke sjældent føres tilbage til Uregelmæssighed indenfor Maalesystemet selv eller Systemer, der er knyttede nærmere eller fjærnere til dette. Saaledes bliver uregelmæssig Friktion i Lejerne for den roterende Skive, der benyttes ved Smaatidsmaaling, let en Kilde til Usikkerhed ved denne Art Tidsbestemmelse og Svingningerne i det elektriske Næts Spænding en Kilde til Usikkerhed ved Fotometrering af Glødelamper.

Af den subjektive og objektive Usikkerhed er nu Iagttagelsens Usikkerhed i Almindelighed sammensat, saaledes at forstaa, at de forskellige Kilder til Usikkerhed naturligvis i det enkelte Tilfælde spiller forskellig Rolle.

Det kan f. Eks. være, at Indstillingsusikkerheden er praktisk set bestemmende, men det kan ogsaa være, at denne Usikkerhed er forsvindende, og at Iagttagelsens Usikkerhed er bestemt ved Arbejdsforholdene f. Eks. ved mekaniske Rystelser i Lokalet. I mange Tilfælde kan Aflæsningsusikkerheden praktisk set være den eneste Kilde til Usikkerhed, i atter andre skyldes denne i nogenlunde lige Grad denne Kilde til Usikkerhed og f. Eks. Svingninger i Milieuets Temperaturtilstand. Alle Kombinationer er naturligvis tænkelige.

Efter denne Oversigt vil vi nu fastslaa Talmaal for Iagttagelsens Usikkerhed.

Talmaal for Iagttagelsens Grænseafvigelse (Grænseusikkerheden). Da vor Opgave gaar ud paa at afgøre, om

en Metodes Usikkerhed tillader dens Anvendelse i en Maaling med opgiven Tolerans eller Grænseafvigelse, bliver det, vi til syvende og sidst har Brug for, et Maal for den Afvigelse fra den sande Værdi, Metodens Usikkerhed højest kan give Anledning til i Resultatet. I Overensstemmelse hermed vælger vi Talmaalet for Iagttagelsens Usikkerhed saaledes, at det paa sin Side maaler Grænsen for den Afvigelse, Usikkerheden kan bevirke i Iagttagelsen.

Vi fremstiller normalt dette Talmaal paa følgende Maade: Vi gentager Iagttagelsen et vist Antal Gange f. Eks. 10 og danner Middeltallet af Gentagelserne. Derpaa opsøger vi i Rækken af Iagttagelser den, der har den største Afvigelse fra Middeltallet. Denne største Afvigelse kalder vi Grænseusikkerheden, og det er den, vi normalt lægger til Grund for vort Overslag. Da man i Almindelighed vil finde, at Grænseafvigelserne fra Middeltallet opad og nedad er praktisk set lige store, bliver vor Grænseusikkerhed meget nær det halve af Vidden af det Interval, indenfor hvilket Gentagelserne fordeler sig. Vort Talmaal, Grænseusikkerheden, er altsaa direkte knyttet til det mest umiddelbare Maal for Usikkerheden: Gentagelsesintervallets Vidde. Ved Siden heraf er det dog ogsaa som tilsigtet et Maal for den største Afvigelse, den enkelte Iagttagelse normalt kan faa fra den sande Værdi, vel at mærke under Forudsætning af, at Gentagelserne fordeler sig om denne sande Værdi og ikke om en falsk. Under den Forudsætning vil det nemlig være fuldt berettiget her at betragte Middeltallet som praktisk set sammenfaldende med den sande Værdi eller som en tilstrækkelig god Repræsentant for denne.

Vi anfører til Belysning af Fremgangsmaaden ved Bestemmelsen af Grænseusikkerheden et Eksempel. En Linses Brændvidde skulde bestemmes. Den blev anbragt i den optiske Bænks Linseholder og 10 Gange stillet ind saaledes, at den dannede et skarpt Billede af Spalten paa Bænkens Billedskærm. Afstanden mellem Spalte og Billedskærm var konstant 130 cm. Gentagelserne gav:

Tab. I.

Nr.	Indstilling	Afvigelse fra Middeltallet
1	132,12	÷ 0,10
2	31	+ 09
3	27	+ 05
4	29	+ 07
5	14	÷ 08
6	23	+ 01
7	28	+ 06
8	19	÷ 03
9	10	÷ 12
10	30	+ 08
Middeltal	132,22	

Grænseusikkerhed (paa den enkelte Iagttagelse): 0,12 cm.

Skøn over Grænsen for Iagttagelsens Afvigelse. Den her givne Regel for Bestemmelsen af Iagttagelsens Grænseusikkerhed ved en Række Gentagelser vil det være praktisk eller nødvendigt at anvende i mange Tilfælde. Fremgangsmaaden vil f. Eks. være den eneste naturlige ved Bestemmelsen af Indstillingsusikkerheden for Fotometret paa Fotometerbænken, Linsen paa den optiske Bænk, Sfærometrets Skrue paa Maaleobjektets Overflade o. s, v., o. s. v. I andre Tilfælde skaffer vi os paa anden ofte simplere Maade en tilstrækkelig nøjagtig Forestilling om den Grænseafvigelse, Usikkerheden kan give Anledning til, saaledes f. Eks. ved Brugen af Westphals hydrostatiske Vægt. For at bestemme Sikkerheden paa Iagttagelsen af Opdriften bringer vi her Ligevægt til Veje og flytter derefter det mindste Lod en Inddeling (et Hak frem eller tilbage). Lad os antage, at Vægtstangsarmens Viser derved flytter sig ret kendeligt, f. Eks. $^1/_2$ mm. Vi skønner da maaske, at vi i ethvert Fald nok vilde kunne opdage en Afvigelse af det halve fra Nulstillingen, d. v. s. en Afvigelse fra den rigtige Værdi for Opdriften svarende til det mindste Lod flyttet $^1/_2$ Inddeling eller $^1/_{20}$ af hele Armen.

Det mindste Lod er nu $^1/_{1000}$ af det største, hvis Masse sættes til 1. Den omtalte Virkning er derfor $^1/_{1000} \cdot {}^1/_{20} = {}^5/_{100000}$ af Virkningen af Loddet 1 anbragt yderst paa Armen. Ad denne Vej er vi da naaet til et Talmaal ($^5/_{100000}$) for Grænseusikkerheden paa Opdriften, et Talmaal, der er tilstrækkeligt for de efterfølgende Overslag.

Aflæsningsusikkerhedens Størrelse. Aflæsningsusikkerheden kan, som det blev antydet ovenfor, i visse Tilfælde bestemme Iagttagelsens Usikkerhed. I saadanne Tilfælde vil denne paa Forhaand være kendt, kræver altsaa ingen experimental Undersøgelse. Det hidrører fra, at de i Maaletekniken benyttede Maalestokke alle saa nogenlunde tillader den samme Aflæsningssikkerhed, og at de forskellige Iagttageres Evne til at skønne er nogenlunde den samme. Man tør i Almindelighed regne med, at Usikkerheden paa dette Skøn er $^1/_{10}$ af den mindste Inddeling, for den øvede Iagttager maaske kun $^1/_{20}$. Det er naturligvis ret tilfældigt, at Usikkerheden netop bliver at sætte lig $^1/_{10}$. Det hidrører fra, at vi som oftest vælger at skønne i Tiendedele af den mindste Inddeling.

Uregelmæssighed betragtet som en Kilde til Usikkerhed. Usikkerheden afspejler, som nævnt, hyppigt Svingninger i Tidens Løb i Maaleobjektets eller Maaleapparatets Tilstand. Som et Analogon til disse Svingninger i Tid kan man betragte den Uregelmæssighed, der ofte gør sig gældende i Maaleobjekt og Maaleapparat, og som i mange Tilfælde vil kunne give Anledning til en Art Usikkerhed i Resultat eller Iagttagelse. Det nærmere om Usikkerhedens Natur og Betingelsen for, at Uregelmæssigheden virkelig kan betragtes som en Kilde til Usikkerhed — ikke maa behandles som Fejlkilde — skal vi lære at kende i næste Afsnit. Her indskrænker vi os til at pege paa, at hvis vi kender Grænseværdien for Uregelmæssighederne, kan den Afvigelse fra den sande Værdi, Uregelmæssighederne kan give

Anledning til, som oftest beregnes paa væsentlig samme Maade som den Afvigelse, der skyldes Iagttagelsernes egentlige Usikkerhed. Saadanne Grænseværdier, brugelige i vort Overslag, staar nu for Maaleapparatets Vedkommende i mange Tilfælde til Raadighed. Ved direkte visende Instrumenter bliver det f. Eks. mere og mere almindeligt, at Fabrikanten opgiver en Grænse for Skalaens Uregelmæssighed. Saaledes garanterer Weston Co., at den egentlige Delefejl paa Firmaets Model 55 (et almindeligt anvendt Præcisionsinstrument for Jævnstrømsmaaling) ikke overskrider 0,2 Inddeling, Hartmann & Braun garanterer, at deres tekniske Modstandskasser er afpassede med en Nøjagtighed paa 2 ‰. Præcisionsmodstande er gerne afpassede med ca. 0,2 ‰ Tolerans. Erfaring viser, at Uregelmæssigheder i en 1000 mm lang Maaletraad ved Wheatstones Bro kan give Anledning til Afvigelser, der vilde svare til en Aflæsningsusikkerhed paa 1—2 mm. Grovere Mikrometerskruer eller Tykkelsesmaalere har gerne svagt konkave (indbuede) Kontaktflader. Uregelmæssigheden i Kanten af disse Flader synes for en meget almindelig anvendt Types Vedkommende at kunne give Anledning til en Usikkerhed, der ved Maaling paa tyndere Traade (1—3 mm) kan naa ca. 4 μ. Maaske hidrører dog i mange Tilfælde en Del af denne Usikkerhed fra Uregelmæssigheder i Traadens (Maaleobjektets) Overflade.

Grænseusikkerhedens Natur. — Gentagelsesintervallets Grænse, Grænseusikkerhedens Fejl og Usikkerhed. For at forstaa Berettigelsen af det valgte Talmaal for Usikkerheden — og af den almindelige Fremgangsmaade for Bestemmelsen af Resultatets Usikkerhed, som nedenfor skal udvikles, er det af Betydning at skaffe sig en klar Forestilling om Grænseusikkerhedens Natur. Følgende Spørgsmaal frembyder sig ved en Diskussion af det indførte Begreb, Grænseusikkerheden: Har Gentagelsesintervallet nogen egentlig Grænse? Maaler — hvis det er Tilfældet — Grænseusikkerheden, bestemt ved et relativt ringe Antal Gentagelser som 10,

ogsaa Grænseafvigelsen, og med hvilken Sikkerhed maales denne?

Hvad det første Spørgsmaal angaar, kan vi umiddelbart indse, at der i Praksis maa være en absolut Grænse for Iagttagelsens (og Resultatets) Afvigelse fra den Værdi, hvorom Gentagelserne svinger, ganske som der er en Grænse for et teknisk Produkts, f. Eks. Hagl, Cyklekuglers Afvigelse fra den normale Størrelse. Det ligger i Fremstillingen, der ligefrem er tilrettelagt saaledes, at Afvigelser over en vis Grænse ikke kan optræde. Vi har ovenfor antydet forskellige Kilder til Usikkerhed ved Maalingen, blandt disse f. Eks. Milieuets Temperatursvingninger. Disse er selvfølgelig begrænsede og deres Indflydelse derfor ogsaa. Er Indflydelsen for stor, sættes den dertil ved kunstige Midler ned under en vis ved Maalingens Tolerans bestemt Grænse. I visse Tilfælde vil Temperatursvingningerne praktisk set være eneste Kilde til Iagttagelsens Svingninger, og da vil Gentagelsesintervallets Vidde ogsaa praktisk set være bestemt ved Grænserne for Usikkerhedskildens Svingninger.

Hvad der imidlertid ofte giver Anledning til Misforstaaelse er følgende Betragtning: Mens Antallet af væsentlige Kilder til Usikkerhed ved Maalinger af almindeligere Tolerans, f. Eks. 1 % à 1 ‰, sjældent overstiger et Par Stykker (Aflæsningsusikkerhed, Indstillingsusikkerhed, svingende Temperatur), lægger vi Mærke til, at Antallet ikke sjældent stiger ret betydeligt, naar Fordringerne til Nøjagtighed sættes op, idet Forhold, hvis Svingning før var uden al Betydning, nu begynder at gøre sig gældende. Herved bliver vi opmærksomme paa, at Iagttagelsen som oftest principielt er afhængig af talrige Forhold, om end Afhængigheden er saa svag, at det ikke falder os ind at tage den i Betragtning ved Planlæggelsen af Maalingen. Til Trods herfor er det utvivlsomt denne Afhængighed af talrige uvæsentlige Forhold, der fører til Forestillingen om, at Afvigelser af snart sagt enhver Størrelse maa kunne optræde. Hver Svingning i et saadant Forhold maa give Anledning til en tilsvarende Svingning i Iagttagelse

eller Resultat. Udsvinget hidrørende fra det enkelte uvæsentlige Forhold er ganske vist uvæsentligt, men da der til Gengæld maaske er talrige Faktorer, der svinger, er der jo Mulighed for Ophobning af Virkninger.

Man kan nu ikke vente, at en saa vag Betragtning som den antydede skal kunne føre til noget paalideligt Billede af de virkelige Forhold. Vi vil forsøge at belyse, hvorledes Forholdene virkelig maa antages at ville stille sig. Lad os forestille os en Iagttagelse eller Maaling — thi vor Betragtning kan anvendes paa begge — ved hvilken der optræder en enkelt væsentlig Kilde til Usikkerhed. Den Grænseafvigelse, den kan give Anledning til, er A. Lad der nu være 10 andre hver for sig uvæsentlige Kilder til Usikkerhed, der hver kan give Anledning til en Grænseafvigelse paa $A/10$, 100, der kan give Anledning til $A/100$ og 1000, hvis Grænseafvigelse er $A/1000$ o. s. v. Tænker vi os, at hver Kilde til Usikkerhed ikke kan give Anledning til alle mulige Afvigelser mellem Usikkerhedsintervallets Grænser, men f. Eks. blot til 10 forskellige, og at disse 10 Afvigelser praktisk set alle har samme Sandsynlighed, saa vil de forskellige Gruppers Indflydelse være maalt ved følgende Tal.

Tab. II.

Usikkerhedskilden	Absolut Grænse-afvigelse	Sandsynlighed for denne	Praktiske Grænse-afvigelse	Sandsynlighed for denne
1 à A	A	10^{-1}	A	10^{-1}
10 - $A/10$	A	10^{-10}	$0{,}3A$	10^{-1}
100 - $A/100$	A	10^{-100}	$0{,}1A$	10^{-1}
1000 - $A/1000$	A	10^{-1000}	$0{,}03A$	10^{-1}
10000 - $A/10000$	A	10^{-10000}	$0{,}01A$	10^{-1}

Det ses af Tabellen, at de absolute Afvigelser, Grupperne kan give Anledning til, alle er A; men Sandsynligheden for denne absolute Afvigelse er allerede i anden Gruppe kun $1/100$ eller praktisk set Nul. Paa den anden Side giver Tabel-

len Maal for de forskellige Gruppers praktiske Grænseafvigelse, det vil i Overensstemmelse med en Definition, der for et analogt Tilfælde vil blive givet nedenfor, sige den Afvigelse, der har samme Sandsynlighed som den enkelte Usikkerhedskildes Grænseafvigelse altsaa $^1/_{10}$. Det er den praktiske Grænseafvigelse vi bør regne med, og vi ser da af Tabellen, hvor overordentlig ringe en Indflydelse vi faktisk har at vente fra de uvæsentlige Usikkerhedskilders Side, saa meget mere som det altid bliver højst usandsynligt, at Indflydelsen fra alle Grupperne skulde hobe sig op. Den samlede praktiske Grænseusikkerhed ovenfor vil i Overensstemmelse med en Teori, der nedenfor skal udledes, faktisk blive

$$\Delta_p = \sqrt{\Delta^2 + (0{,}3\Delta)^2 + (0{,}1\Delta)^2 + \ldots} = \sqrt{1{,}1\Delta^2} = 1{,}05\Delta$$

d. v. s. ikke væsentlig forskellig fra Δ. Vi drager heraf den Slutning, at vi kan se ganske bort fra den integrerende Virkning af de uvæsentlige Kilder til Usikkerhed, den er praktisk set Nul. Tilbage bliver da kun de faa væsentlige Usikkerhedskilder. En nærmere Betragtning af den Maade, hvorpaa et saadant begrænset Antal nogenlunde lige væsentlige Kilder til Usikkerhed gør sig gældende, fører til et Billede af Gentagelsesintervallets Grænse i det væsentligste som det, der er fremstillet i Fig. 2. Her er Antallet af Gentagelser Abscisse, Grænseafvigelsen bestemt ved disse Gentagelser Ordinat. Figuren viser en Kurve, der stiger stejlt i Vejret op mod en bestemt Grænse — den absolute Grænse Δ_t — for Gentagelsesintervallet. Noget før denne naas, nemved den praktiske Grænse Δ_p for Usikkerheden, bøjer Kurven ret skarpt af og nærmer sig asymptotisk til Grænsen Δ_t. Ved de uvæsentlige Kilder til Usikkerhed forrykkes dette Gennemsnitsbillede kun for saa vidt, som den absolute Grænse hæves i Vejret for Eks. til Δ_t'.

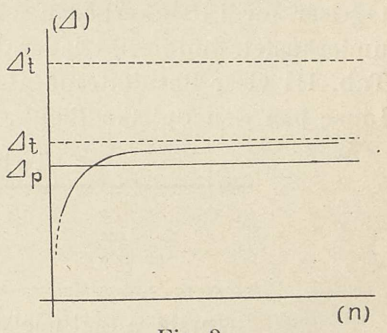

Fig. 2.

Kurven, der viser Afvigelsens Afhængighed af Gentagelsernes Antal, ændres praktisk set ikke. Den øverste næsten vandrette Del af den skal rigtignok tendere mod den højere Grænse, men den naar praktisk set først denne ved et overordentligt stort Antal Gentagelser. Den absolute Grænse bliver derfor en Størrelse uden al praktisk Interesse. Den praktiske Δ_p ligger samme Sted som før nemlig i Højde med Kurvens Knæ.

Vort andet Spørgsmaal var om 10 Gentagelser gennemsnitlig er tilstrækkelige til at give den praktiske Grænse. Det tør betragtes som afgjort, at dette er Tilfældet. Af Forsøg, som straks skal omtales, tør vi drage den Slutning, at hvis Størrelsen, vi maaler, — altsaa Usikkerheden — ikke selv er svingende, vil 10 Gentagelser give relativt overordentlig konstante Værdier for Grænsen, hvilket Forhold næppe kan forklares paa anden Maade end derved, at vi ved 10 Gentagelser allerede er naaet op til Knæet paa Kurven ovenfor, eller op til den praktiske Grænse. Det ligger nær at prøve paa experimentalt for forskellige Iagttagelser at bestemme Kurven, der viser Afhængighed mellem den Værdi, vi finder for Grænsen, og det Antal Gentagelser, hvoraf den er bestemt. Som det straks vil forstaas, er det forbundet med store Vanskeligheder at udføre en saadan Bestemmelse ved egentlige Iagttagelser, fordi Usikkerheden selv i Almindelighed er Variationer underkastet. Imidlertid lader det sig under visse Forhold gøre. Tab. III viser Resultaterne af et Forsøg med Indstilling af en Linse paa den optiske Bænk.

Tab. III.

	Grænseafvigelse Δ	Middeltal
første 5 Iagttagelser	0,11	5,05
- 10 —	0,14	06
- 15 —	0,15	06
- 20 —	0,16	07
- 25 —	0,16	07
- 30 —	0,17	08

5 Gentagelser har, som det ses, ikke været tilstrækkeligt til at bestemme Grænsen. I den 6te Iagttagelse optræder imidlertid praktisk set Grænseafvigelsen (4,92). Først i Nr. 13 gaar Grænsen op med 1 (4,91). Ved flere Gentagelser vokser *A* kun tilsyneladende. Det er i Virkeligheden en svag Gang i Middeltallet, der afspejler sig i den svage Stigning i *A*.

Tilbage er nu det vigtige Spørgsmaal om Sikkerheden paa det Talmaal for Grænseafvigelsen, som 10 Gentagelser giver. Som antydet er denne Sikkerhed relativt meget betydelig, hvad der fremgaar af Forsøg, som nu skal forklares.

Vil man skaffe sig Maal for Usikkerheden paa Bestemmelsen af Grænseafvigelsen, maa man først og fremmest sørge for ikke at sammenblande to forskellige Ting: 1° den søgte Usikkerhed og 2° Variationerne i den Usikkerhed, som Grænseusikkerheden er et Maal for. I Fig. 3 er disse to Forhold skilt ad. A-Kurven i Fig. 3 viser Variationerne i Usikkerheden ved 100 paa hinanden følgende Indstillinger af et Mikroskop (optisk Kontakt). Maalet for Usikkerheden er Grænseafvigelsen bestemt ved 10 Gentagelser. Abscissen betegner Nr. paa Gruppen af Gentagelser, hvoraf Usikkerheden er bestemt. Ordinaten til Punktet med Abscisse 1 betegner altsaa Grænseusikkerheden bestemt ved de første 10 Gentagelser, den til Abscisse 2 svarende Ordinat Usikkerheden bestemt ved de næste 10 Gentagelser o. s. v. At Usikkerheden har været Variationer underkastet, er utvivlsomt. Usikkerheden er først vokset noget, derpaa aftaget for saa atter at stige. Forklaringen herpaa turde maaske ligge i, at Iagttageren blev instrueret om at foretage Indstillingerne med den yderste Omhu. Den første ringere Værdi for Usikkerheden kan tydes

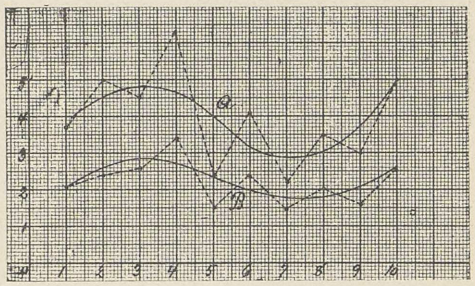

Fig. 3.

som Virkningen af denne Instruks. Derpaa er fulgt Afslapning bevirkende en svag Stigning i Usikkerhed. Derefter har Øvelsen gjort sig gældende i den stigende Sikkerhed og endelig Træthed i den voksende Usikkerhed. Vil vi nu have Maal for Usikkerheden paa Bestemmelsen af Grænseafvigelsen, maa vi se ikke paa de totale Variationer i Værdien for Grænseusikkerheden, men paa Punkternes Afvigelse fra Kurven. Vi vil da finde, at den største Afvigelse der gør sig gældende, er ca. 15 paa 40 eller ca. 37 %.

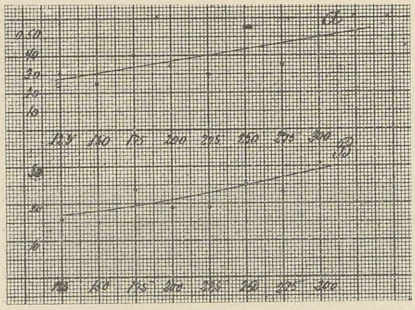

Fig. 4.

I Fig. 4 A ses en Kurve, der viser, hvorledes Usikkerheden paa Indstillingen af Fotometret ligeledes maalt ved Grænseafvigelsen bestemt af 10 Gentagelser varierer med Afstanden mellem Lamperne, hvis Lysstyrke skal sammenlignes. Her er den største Punktafvigelse ca. 10 paa 40 eller 25 %. Endelig viser Fig. 5 Usikkerhedens Variation med Afstand mellem Spalte og Billedskærm ved en optisk Bænk. Usikkerheden paa Bestemmelsen af Grænseafvigelsen ved 10 Gentagelser synes her at være af samme Størrelsesorden som i forrige Forsøg. I det hele taget vil man formentlig i de fleste Tilfælde finde, at Usikkerheden ligger omkring 20—30 %. Som Kurverne viser er Sikkerheden hermed tilstrækkelig til, at Talmaalet kan benyttes ved Undersøgelse af selv svage Variationer i Iagttagelsesusikkerheden.

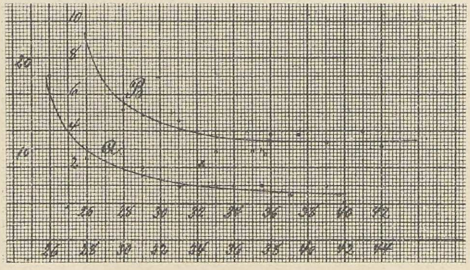

Fig. 5.

Forholdet mellem Usikkerheden paa Bestemmelsen af Grænseusikkerhed og Middelusikkerhed. Meget almindeligt er det ved Vurdering af Usikkerhed at benytte det Talmaal, der gaar under Navnet »Middelfejlen«, men som vi vil foretrække i Overensstemmelse med vor Sprogbrug at betegne ved Ordet Middelusikkerheden. Middelusikkerheden, for hvilken Tegnet $\sqrt{\lambda_2}$ i Almindelighed bruges, beregnes af en Række simple Gentagelser efter Reglen:

$$\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{\Sigma(o - o_m)^2}{n - 1}}$$

hvor n betyder Gentagelsernes Antal. Man danner altsaa som før Middeltallet o_m og de enkelte Gentagelsers Afvigelse $o - o_m$ fra dette Middeltal. Herefter kvadreres Afvigelserne og summeres op. Kvadratsummen $\Sigma(o - o_m)^2$ divideres med $n - 1$, og af Kvotienten uddrages Kvadratroden. Som det ses, er $\sqrt{\lambda_2}$ en Art Gennemsnitsværdi for Afvigelsen $o - o_m$. $\sqrt{\lambda_2}$ maaler i Virkeligheden det halve af Gennemsnitsafvigelsen mellem to og to Gentagelser ved uendelig mange Gentagelser Bestemt ved et endeligt Antal Gentagelser n har Maalet en større eller mindre Usikkerhed efter Antallet, men er ikke systematisk forkert. Derfor er $\sqrt{\lambda_2}$ et for enhver Art af Iagttagelse karakteristisk fast Tal, mod hvilket vi kan prøve det nye Talmaal: Grænseusikkerheden. Nogle Resultater af en saadan Sammenligning foretaget af Forfatteren skal her meddeles, dels fordi de belyser Grænseusikkerhedens Natur, dels fordi vi i det efterfølgende direkte vil bygge paa visse af disse Resultater.

B-Kurverne i Fig. 3, 4 og 5 gengiver Usikkerhedens Variation, naar Middelusikkerheden bestemt ved 10 Gentagelser benyttes som Maal. Det vil ses, at B-Kurverne giver i alt væsentlig samme Billede af Usikkerhedens Variation som A-Kurverne, ved hvilke Grænseusikkerheden er lagt til Grund. Usikkerheden paa Middelusikkerheden bestemt ved Punktafstanden i B-Kurverne er maaske noget, men i hvert Fald

ikke særlig meget mindre end Grænseusikkerhedens tilsvarende. I Fig. 3 er den ca. 30 % (mod 37 % i A-Kurven). I Fig. 4 naar den op til 25 % (det samme som i A-Kurven). I Fig. 5 endelig er den ca. 20 % (væsentlig som i A-Kurven). Det fremgaar umiddelbart af denne Sammenligning, at Grænseusikkerheden er et Talmaal ikke væsentlig daarligere egnet til Afbildning af Variationer i Usikkerheden, end Middelusikkerheden er det.

Grænseusikkerhed og Middelusikkerhed som Midler for Overslaget over Metodens Sikkerhed. Nu er det imidlertid ikke denne Anvendelse af Talmaalet, der her interesserer os, men dets Anvendelse i Overslaget over den Afvigelse fra den sande Værdi, som Iagttagelsesusikkerheden kan give Anledning til i Resultatet, hvilket Overslag skal vejlede os ved Valget af Metoden. Man kunde som vi nedenfor skal se, grunde en Bestemmelse af denne Resultatets Grænseusikkerhed (Grænseafvigelse) paa Talmaal for Iagttagelsernes Middelusikkerhed. At Middelusikkerheden imidlertid ikke er det naturlige Maal at udtrykke Resultatets Grænseusikkerhed ved er indlysende. Anvendelsen af dette Talmaal maa ventes at føre til og vil føre til mere komplicerede Formler end dem, der faaes, naar Iagttagelsens Grænseusikkerhed benyttes. Hertil kommer nu — som maaske den væsentligste praktiske Ulempe — det relativt store Regnearbejde ved Fremskaffelsen af Talmaalet, en Ulempe, der ligesom den først antydede radikalt undgaas ved Brugen af vort Talmaal Grænseusikkerhed, der, som det ses, er yderst simpelt at udlede. Vore Undersøgelser ovenfor og andre, som straks skal omtales, giver os nu saa at sige Vished for, at Grænseusikkerhedens Bestemmelsessikkerhed er tilstrækkelig for vort Formaal og praktisk set lige saa stor som Middelusikkerhedens. Rigtigheden af den sidste Paastand vil følgende Betragtning gøre indlysende. De ovenfor tegnede Kurver lader os erkende, at det ved Planlæggelsen af Maalingen i Almindelighed vil være nødvendigt at vælge Metoden saaledes, at dens overslags-

mæssigt bestemte Sikkerhed rigeligt tillader den foreskrevne Nøjagtighed. Med andre Ord man maa ved Planlæggelsen arbejde med en vis Sikkerhedsfaktor. Er den foreskrevne Tolerans 1 %, vil det saaledes maaske i de fleste Tilfælde være tilraadeligt ikke at vælge en Metode med større Usikkerhed end ca. 3—5 ‰. Usikkerheden er nemlig som illustreret ved Fig. 3 noget, der i Almindelighed vil være kendelige Variationer underkastet, Variationer, der kan naa Beløb af samme Størrelse som Usikkerheden selv maaske større. Vi er derfor udsat for, at Usikkerheden under Maalingen vil være væsentlig større, end den var ved Bestemmelsen. Dertil viser Fig. 4 og 5, at Usikkerheden kan være afhængig af de nærmere Forhold ved Maalingen: Værdien af den ubekendte Størrelse eller de valgte Normaler o. s. v. Da vi nu i Almindelighed i Praksis maa nøjes med en summarisk Bestemmelse af Usikkerheden — vi vil vel saaledes sjældnere ved Fotometrering af en Række forskellige Lamper i vort Overslag tage Hensyn til, at Indstillingsusikkerheden er noget forskellig for forskellig Belysning — saa tør vi af den Grund heller ikke regne for knebent. Men naar nu de to betragtede Forhold — Usikkerhedens Variation i Tidens Løb og Usikkerhedens Variation med de nærmere Forhold ved Maalingen — ved Valget af Metoden nødvendiggør en Sikkerhedsfaktor af Størrelsesordenen 2—3, saa bliver det ganske uvæsentligt, om Bestemmelsesusikkerheden paa det for Iagttagelsesusikkerheden valgte Talmaal er 20 eller 30 %. Da Forholdet mellem Middelusikkerhedens og Grænseusikkerhedens Sikkerheder netop er noget i Retning af Forholdet mellem disse Tal, vil altsaa de to Talmaal i denne Forbindelse praktisk set være lige sikre.

Talværdien for Forholdet mellem Grænseusikkerhed og Middelusikkerhed. Kurverne ovenfor viser, at der mellem Grænseusikkerheden og Middelusikkerheden bestaar et i Almindelighed praktisk set konstant Forhold. Forfatteren mener at have paavist, at dette Forhold ikke alene for samme lagt-

tagelse er overordentligt konstant, men at det i Virkeligheden synes at være det samme for al egentlig Usikkerhed, saaledes at man for alle Tilfælde kan angive et enkelt Tal for Forholdet mellem Grænseusikkerheden bestemt ved et vist Antal Gentagelser f. Eks. 10 og Middelusikkerheden. Tab. IV, V og VI indeholder nogle Resultater til Belysning heraf.

Tab. IV.

Nr.	Middeltal	Δ	$\sqrt{\lambda_2}$	$\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$	
1	68,73	+3,7	2,1	1,8	Middelværdi for $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$:
2	68,03	—5,0	2,4	2,1	
3	68,15	—4,5	2,6	1,7	1,79
4	69,66	+6,3	3,4	1,9	
5	68,84	+2,4	1,5	1,6	Grænseusikkerhed
6	68,08	+4,1	2,4	1,7	paa Forholdet $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$: 0,30
7	69,81	—2,2	1,5	1,5	
8	69,53	+3,5	2,0	1,7	Middelusikkerhed: 0,18
9	68,26	+3,0	1,6	1,9	
10	69,21	+5,0	2,5	2,0	Forhold: 1,7

Tab. V.

Nr.	Afstand mellem Lamperne	Δ	$\sqrt{\lambda_2}$	$\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$	
1	1,25 m	0,30	0,16	1,9	Middelværdi for $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$:
2	1,50 »	0,25	0,15	1,7	
3	1,75 »	0,40	0,24	1,7	1,75
4	2,00 »	0,35	0,19	1,8	Grænseusikkerhed paa
5	2,25 »	0,30	0,19	1,6	$\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$: 0,45
6	2,50 »	0,55	0,25	2,2	
7	2,75 »	0,35	0,23	1,5	Middelusikkerhed: 0,22
8	3,00 »	0,50	0,31	1.6	Forhold: 2,0

Tab. VI.

Forholdet $\frac{A}{\sqrt{\lambda_2}}$ ved forskellige Arter af Gentagelser.

I. Subjektiv Usikkerhed.

	$\frac{A}{\sqrt{\lambda_2}}$	Antal Gentagelser.	Iagttager
Linseindstilling	1,75	10 × 10	A.*)
do.	1,81	6 × 10	B.
Mikroskopindstilling	1,79	10 × 10	C.
Fotometerindstilling	1,75	8 × 10	D.
Indstill. paa Max. af Lys	1,76	8 × 10	E.
Blodfarvesammenligning	1,82	11 × 10	L. S. Fredericia.
Indstilling paa Lydmax.	1,90	3 × 10	E. H. Stevens.
do.	1,81	3 × 10	A. Kalähne.

II. Objektiv Usikkerhed.

Usikkerhed paa Best. af en Svingningstid. (Mek. Forstyrrelser).	1,77	3 × 10	—
Modstandsmaaling (Temp.)	1,59	3 × 10	Forfatteren
Kathetometermaalinger (Mek. Rystelser).	1,67	5 × 10	Weiss

III. Fremstillingsusikkerhed.

Uregelmæssigheder i Hagel best. ved Fald gennem Olie.	1,87	7 × 10	Forfatteren.

*) A, B, C, D, E betegner forskellige studerende ved den polytekniske Læreanstalt i Kjøbenhavn. Prøverne er udførte i Læreanstaltens fysiske Laboratorium.

Tab. IV indeholder de Data, paa Grundlag af hvilke Kurverne i Fig. 3 er tegnede. For hver Gruppe paa 10 er Forholdet mellem Grænseusikkerheden Δ og Middelusikkerheden $\sqrt{\lambda_2}$ beregnet. Forholdet har Middelværdien 1,79 ~ 1,8, den enkelte Bestemmelse Grænseusikkerheden 0,31 eller ca. 17 %. Middelusikkerheden er 0,18. Imellem 1,7 og 1,8 vil man nu netop i Almindelighed finde Forholdet $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ beliggende. Tab. V viser de Tal, hvoraf Fig. 4 er tegnet. Det ses, at Kolonnen $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ har ganske samme Karakter som den tilsvarende i Tab. IV. Middelværdien er her 1,75. Den enkelte Bestemmelse har Grænseusikkerheden 0,45, Middelusikkerheden 0,22. Den universelle Karakter af Forholdet belyses ved Tab. VI, i hvilken dette Forhold er opført for flere forskellige Arter af subjektiv Usikkerhed, for et Par Arter af objektiv Usikkerhed og for Fremstillingsusikkerheden paa Hagl. I tredie Kolonne er anført det Antal Grupper paa 10, hvoraf $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ er beregnet. Det er, som det fremgaar af Tabellen, ved den subjektive Usikkerhed ikke en enkelt Iagttagers Indstillinger, der er behandlede. Forholdet synes altsaa i første Linie ved subjektive Indstillinger ogsaa at være uafhængigt af Iagttageren.

Vi skal ikke paa dette Sted gaa nærmere ind paa en Diskussion af den Lovmæssighed, der synes at give sig til Kende i disse Tabeller. Enkelte Træk af denne skal dog fremdrages. Konstansen afspejler et Slægtskab i de Maader, hvorpaa Gentagelser af de forskelligste Arter fordeler sig, eller, som man vil udtrykke det, i Gentagelsernes Fordelingslove. Man kan regne ud, hvilken Værdi Forholdet vilde have, dersom man turde regne med jævn Fordeling inden for et vist Interval af Gentagelserne. Det vilde da blive 1,73. Dette Tal ligger ikke langt fra Middelværdien for de ovenfor fundne Forhold. Man vil da ogsaa i Almindelighed finde en nogenlunde jævn Fordeling af Gentagelserne indenfor Gentagelses-

intervallet. Det kan anføres, at ved jævnt aftagende Hyppighed af Gentagelserne fra Midten af Intervallet ud mod Grænserne vilde Forholdet blive 2,45. Under Forudsætning af Fordeling efter den saakaldte typiske Fejllov, og idet man for den praktiske Grænseafvigelse sætter Abscissen til den Ordinat, der deler det ved Fordelingskurve og Koordinatakserne bestemte Areal i Forholdet 1 til 10, faas for $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ 1,64.

Den Slutning ligger ikke fjærnt, at det ved Grænseusikkerheden givne Maal for Usikkerheden maa have en betydelig Sikkerhed, siden Forholdet $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$' Svingninger er saa smaa, som de faktisk er (sml. Tab. IV og V pag. 30). Imidlertid maa det herved huskes, at Δ og $\sqrt{\lambda_2}$ er bundne til hinanden, idet det er de samme Iagttagelser, der indgaar i begge. Sagen stiller sig nu saaledes, at en en enkelt, abnorm stor Afvigelse vel gør sig væsentligt stærkere gældende i Δ end i $\sqrt{\lambda_2}$, men for at tage et Eksempel hvis Δ som Følge af en isoleret stor Afvigelse i en enkelt Gruppe paa 10 Gentagelser tilfældigt forøges i Forholdet 1,9, saa vil $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ dog kun vokse i Forholdet 1,35. Bag en forholdsvis ringe Usikkerhed i $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ kan altsaa godt skjule sig en ikke helt ringe Usikkerhed i Grænseafvigelsen. Dersom Usikkerheden paa $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ i Tab. IV alene skyldtes Svingninger i Grænsen af den antydede Art og ikke ogsaa Variationer i Fordelingen indenfor Intervallet, maatte Grænseafvigelsens Svingninger have været paa ca. 50 %. Saa store er de, som vi har set ovenfor, afgjort ikke. Vi vil da ogsaa lægge Mærke til, at selv om store Værdier for $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ (Tab. IV og V) hyppigt falder sammen med store Værdier for Δ, optræder der dog meget udprægede Afvigelser fra denne Regel — om man overhovedet kan tale om nogen Regel; — f. Eks svarer en af de mindste Værdier for $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ i anden Tabel til en af de største for Δ.

Det maa ventes, at Forholdet $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$ gennemsnitligt vil udvise en svag Stigning med Antallet af Gentagelser, hvoraf Δ og $\sqrt{\lambda_2}$ beregnes. Δ skal jo nemlig efter det ovenfor tegnede Billede vokse noget, hvorimod $\sqrt{\lambda_2}$ skal holde sig konstant. Tab. VII gengiver en Undersøgelse af $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$' Afhængighed af Antallet af Gentagelser for Indstilling paa Maximum af Lys ved en Lysindikator. Stigningen er ikke meget udpræget, men den kan dog spores. Da Variationer i Usikkerheden ikke gør sig gældende i Forholdet $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$, turde den mest korrekte Maade at studere Δ' Afhængighed af Antallet paa være den, at betragte de tilsvarende Variationer i $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$. Disse Variationer skulde relativt være de samme, som dem Δ vilde udvise, dersom ingen Variationer fandt Sted i selve Usikkerheden.

Tab. VII.

Forholdet $\frac{\Delta'}{\sqrt{\lambda_2}}$ Afhængighed af Antallet af Gentagelser.

Antal Gentagelser.	Δ	$\sqrt{\lambda_2}$	$\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$	
40	9,2	4,52	2,03	Gruppe A.
30	7,1	3,84	1,85	
20	8,7	3,95	2,20	
10	6,2	3,47	1,79	
40	4,1	2,00	2,05	Gruppe B.
30	4,1	2,10	1,95	
20	3,1	1,94	1,60	
10	3,5	2,02	1,73	

KAP. II.

BEREGNING AF RESULTATETS GRÆNSEUSIKKERHED VED IAGTTAGELSERNES.

Resultatet en Funktion af en enkelt Iagttagelse. Vi skal nu vise, hvorledes Resultatets Grænseusikkerhed beregnes af Iagttagelsernes. Ved Resultatets Grænseusikkerhed skal forstaas Grænsen for den Afvigelse fra den sande Værdi, som de indgaaende Iagttagelsers Usikkerhed kan give Anledning til. Dersom Resultatet er en Funktion alene af én Iagttagelse $R = f(o)$ eller i denne Sammenhæng kan betragtes som saadan, kan Forbindelsen mellem Resultatets og Iagttagelsens Grænseusikkerhed let anskueliggøres ved en grafisk Fremstilling. Betegner i Fig. 6 o_s den sande Værdi for Iagttagelsen, og repræsenterer Kurven i samme Fig. $R = f(o)$, bliver $o_s R_s$ den sande Værdi for Resultatet. Usikkerheden paa Iagttagelsen kan nu give Anledning til en Afvigelse fra o_s paa Δo og derved, som det ses, til en Afvigelse ΔR mellem Resultatet og dets sande Værdi. ΔR er Grænseusikkerheden paa R. Den tilsvarende Afvigelse kan ligesom Δo gaa baade til den ene og til den anden Side. (Den ringe Forskel i ΔR for ligestort positivt og negativt Δo er praktisk set forsvindende.)

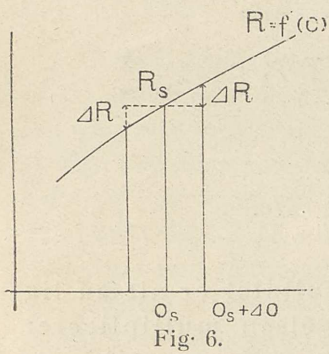

Fig. 6.

Vor Opgave er nu at fremstille et for praktisk Regning egnet Udtryk for ΔR. Man kunde tænke sig at gaa frem di-

rekte etter Figurens Anvisning, idet man først beregnede den til o_s svarende Værdi for R, R_s, derpaa i $R = f(o)$ for o indsatte $o_s + \Delta o$ for saaledes at faa $R_s + \Delta R$ og endelig ved Subtraktion ΔR. Ukendskabet til det virkelige o_s vilde ikke hindre denne Beregning, thi enten man regner med den sande Værdi for o_s eller med en anden vilkaarlig valgt Værdi i Nærheden, er praktisk set ligegyldigt, naar man blot i anden Udregning giver det valgte o den rigtige Tilvækst. (Sammenlign, hvad der nedenfor siges om Regning med afrundede Talværdier.) Imidlertid er den antydede Vej ganske upraktisk; den vilde nemlig kræve nøjagtig Beregning af R for to Værdier af o, nemlig o_s og $o_s + \Delta o$, d. v. s. et Regnearbejde, der som oftest vilde være mange Gange større end det yderst ringe, Beregningen af ΔR i Virkeligheden udkræver, naar et praktisk Udtryk for denne Størrelse anvendes.

Et saadant Udtryk naar vi til ved indenfor Gentagelsesintervallet at erstatte Funktionen $R = f(o)$ med den lineære Funktion, der fremstiller Tangenten i (o_s, R_s), altsaa med

$$R = R_s + \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)_{o_s} \cdot (o - o_s).$$

Indsættes her $o = o_s + \Delta o$ faas

$$R - R_s = \Delta R = \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)_{o_s} \cdot \Delta o.$$

Grænseusikkerheden paa Resultatet er altsaa lig Grænseusikkerheden paa Iagttagelsen multipliceret med Differentialkvotienten af R med Hensyn til Iagttagelsen. Udtrykket for ΔR er et tilnærmet Udtryk, der giver en Værdi for Grænseusikkerheden, der afviger fra den rigtige med det Beløb, hvormed Tangenten afviger fra Kurven ved Grænsen af Usikkerhedsintervallet. Denne Afvigelse er dog altid praktisk set forsvindende mod Usikkerheden paa Bestemmelsen af ΔR. Hvad denne Usikkerhed angaar, er den, som vi skal se, relativt den samme som Usikkerheden paa Δo.

Resultatet en Funktion af flere Iagttagelser. Lad nu Resultatet være en Funktion af flere Iagttagelser o, p, q, der tænkes ganske uafhængige af hinanden. Vi spørger da først om, hvilken absolut Afvigelse fra den sande Værdi, Usikkerheden paa o, p, q o. s. v. principielt kan give Anledning til. Vi danner et praktisk Udtryk til Beregning af denne teoretiske Grænseusikkerhed, som vi vil betegne ved ΔR_t, ved at erstatte $R = f(o,p,q..)$ indenfor de ved Usikkerheden paa o, p, q o. s. v. bestemte Omraader med en lineær Funktion — ganske paa samme Maade som i Tilfælde af en enkelt Iagttagelse. Den lineære Funktion er

$$R = R_s + \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)(o - o_s) + \left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)(p - p_s) + \left(\frac{\delta R}{\delta q}\right)(q - q_s) \ldots$$

Indsættes her for o_s $o_s \pm \Delta o$
» p_s $p_s \pm \Delta p$
» q_s $q_s \pm \Delta q$, faas

$$R - R_s = \Delta R_t = \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)(\pm \Delta o) + \left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)(\pm \Delta p) + \left(\frac{\delta R}{\delta q}\right)(\pm \Delta q) \ldots$$

Dette Udtryks dobbelte Tegn er at forstaa paa den Maade, at Tegnet for hver enkelt Grænseafvigelse foreløbig er ubestemt. Det skal ved Beregning af Talværdien for ΔR_t vælges saaledes, at alle Led faar samme Fortegn, altsaa hober sig op, — saaledes som de jo principielt kan gøre det, da Afvigelserne paa de enkelte Iagttagelser kan gaa til hvad Side det skal være. Udtrykket for ΔR kan følgelig fortolkes saaledes: Hver enkelt Iagttagelse leverer sit Bidrag til Resultatets teoretiske Usikkerhed. Bidraget beregnes, ganske som om Resultatet var en Funktion af denne Iagttagelse alene. Den samlede Usikkerhed paa R faas ved numerisk at opsummere de enkelte Iagttagelsers Bidrag.

Reduktion af alle Overslag til samme Sandsynlighed. — Den praktiske Grænseusikkerhed. Forudsætningen for, at den ved den teoretiske Grænseusikkerhed ΔR_t bestemte Afvigelse naas, er, at alle Iagttagelser samtidigt afviger med

deres Grænseusikkerhed fra de sande Værdier, og at Afvigelserne oven i Købet har saadanne Fortegn, at de enkelte Iagttagelsers Bidrag hober sig op. Denne Forudsætning har, naar Talen er om Resultater med blot 3—4 indgaaende Iagttagelser, en saa ringe Sandsynlighed for sig, at man praktisk set kan sige, at den aldrig vil være opfyldt. Deraf følger imidlertid ikke, at det er saa afgjort urimeligt i vort Overslag at benytte ΔR_t som praktisk Maal for Resultatets Grænseusikkerhed. I Virkeligheden kan ΔR_t som oftest godt bruges, selv om Antallet af Iagttagelser naar 2 à 3 ja selv 4, og større er det forholdsvis sjældent. Hermed har det sig saaledes. Tænker vi os, at Grænseusikkerheden for o med et bestemt Fortegn, Plus eller Minus, har Sandsynligheden $\frac{1}{10}$ — og en saadan Sandsynlighed maa vi vel nærmest regne med efter den Maade, hvorpaa vor Grænseusikkerhed normalt er bestemt — og at hver af de andre indgaaende Grænseusikkerheder har samme Sandsynlighed, vil Sandsynligheden for Opnaaelsen af den teoretiske Grænseusikkerhed ΔR_t ved to indgaaende Iagttagelser være $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10^2}$, ved tre være $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10^3}$, ved fire $\frac{1}{10^4}$ o. s. v. Sandsynligheden bliver hurtigt praktisk set forsvindende. Paa den anden Side vil, som vi skal se, den praktiske Grænseusikkerhed ΔR_p d. v. s. den Afvigelse, der har samme Sandsynlighed som den enkelte Iagttagelses Grænseusikkerhed, eller som Grænseusikkerheden for et Resultat bestemt ved en enkelt Iagttagelse, i de fleste Tilfælde være lidet mindre end den teoretiske Grænseusikkerhed. Ved to indgaaende Iagttagelser er den højst $\sqrt{2}$ Gange mindre, ved tre $\sqrt{3}$ Gange, ved fire $\sqrt{4}$ eller to Gange mindre o. s. v. Da der nu som oftest maa arbejdes med en Sikkerhedsfaktor paa 2 à 3 betyder de 30—70 %, som man ved 2—3 Iagttagelser faar den praktiske Grænseusikkerhed for stor ved umiddelbar Anvendelse af Udtrykket for ΔR_t, i Almindelighed ikke meget.

Man kunde altsaa i mange Tilfælde, maaske de fleste,

godt blive staaende ved ΔR_t som Maal for Resultatets Grænseusikkerhed. Der vil dog i Virkeligheden være liden Grund dertil, da man paa yderst simpel Maade kan reducere ethvert Overslag til samme Sandsynlighed nemlig til den, Grænseusikkerheden for den enkelte Iagttagelse har.

Naar det er Tilfældet, ligger det i, at den Maade, hvorpaa Gentagelser af alle Arter Iagttagelser fordeler sig indenfor Usikkerhedsintervallet, som vi har set, i mærkværdig Grad er ens. Vi slutter os til denne Ensartethed af den store Konstans i Forholdet $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$, som vi har set Eksempler paa i det foregaaende. Og ikke blot gælder denne Lovmæssighed for Enkeltiagttagelser af meget forskellig Art og Oprindelse, men vi kan ogsaa lægge Mærke til, at den f. Eks. gælder for selve Forholdet $\frac{\Delta}{\sqrt{\lambda_2}}$. I det hele taget synes den at have næsten universel Gyldighed. Herpaa grunder vi Udledelsen af et Udtryk til Reduktion af ΔR_t til ΔR_p.

Et Resultat af en eller flere Iagttagelser har naturligvis lige saa vel som den enkelte Iagttagelse sin Middelusikkerhed. Er de enkelte i Resultatet indgaaende Iagttagelser uafhængige af hinanden, bestaar der mellem Resultatets og de enkelte Iagttagelsers Middelusikkerhed følgende Forbindelse:

$$\sqrt{\lambda_2(R)} = \sqrt{\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)^2 \lambda_2(o) + \left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)^2 \lambda_2(p) + \left(\frac{\delta R}{\delta q}\right)^2 \lambda_2(q) + \ldots}$$

altsaa en Forbindelse, der meget minder om den, der bestaar mellem Grænseusikkerhederne. Kalder vi nu det i denne Forbindelse praktisk set universale Forhold mellem Δ og $\sqrt{\lambda_2}$ for k (k er ca. 1,8), og antager vi, hvad vi her utvivlsomt uden Betænkelighed kan, at $\frac{\Delta R_p}{\sqrt{\lambda_2(R)}}$ ogsaa er k, haves umiddelbart

$$\Delta R_p = \sqrt{\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)^2 \Delta o^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)^2 \Delta p^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta q}\right)^2 \Delta q^2 \ldots}$$

til Bestemmelse af den praktiske Grænseusikkerhed for Re-

sultatet, der altsaa som nævnt er den Afvigelse, der i Sandsynlighed svarer til Grænseusikkerheden paa den enkelte Iagttagelse.

I mange Tilfælde vil det være naturligt direkte at benytte Udtrykket for ΔR_p ved Δo, Δp o. s. v. til Beregning af den praktiske Grænseusikkerhed. I de fleste praktiske Tilfælde vil man dog have betydeligt lettere ved, som antydet, at reducere den teoretiske Grænseusikkerhed til den praktiske. Ofte vil ved Maaling med flere indgaaende Iagttagelser de enkelte Iagttagelsers Bidrag til Usikkerheden være nogenlunde lige store. Er det Tilfældet, bliver

$$\Delta R_p = \left[\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o\right] \cdot \sqrt{m}$$

$$\text{og } \Delta R_t = \left[\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o\right] \cdot m$$

hvor m er Antallet af indgaaende Iagttagelser, eller rettere sagt Antallet af de Iagttagelser, der yder et Bidrag til Usikkerheden. Heraf faas da

$$\Delta R_p = \frac{\Delta R_t}{\sqrt{m}}$$

Dersom ikke alle Bidrag til Resultatets Usikkerhed er praktisk set lige store, benyttes med Fordel et almindeligt Udtryk for Reduktionsfaktoren og en Fremgangsmaade, der nu skal udvikles.

I det almindelige Tilfælde haves

$$\frac{\Delta R_p}{\Delta R_t} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)^2 \Delta o^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)^2 \Delta p^2 + \ldots}}{\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o + \left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)\Delta p + \ldots}$$

Lad $\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o$ være det største Usikkerhedsbidrag, saa kan vi maale de andre Bidrag i Forhold til dette, altsaa sætte

$$\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o = \varepsilon_1 \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o \qquad \varepsilon_1 = 1$$

$$\left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)\Delta p = \varepsilon_2 \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o$$

$$\left(\frac{\delta R}{\delta q}\right)\Delta q = \varepsilon_3 \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o \qquad \text{o. s. v.}$$

Vi indfører ε_1 for Symmetriens Skyld. Herved faaes nu:

$$\frac{\Delta R_p}{\Delta R_t} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots}$$

Lad $\varepsilon_2 = \frac{2}{10}$, $\varepsilon_3 = \frac{4}{10}$, $\left(\varepsilon_1 = \frac{10}{10}\right)$, bliver til Eks. for $m = 3$

$$\frac{\Delta R_p}{\Delta R_t} = \frac{\sqrt{120}}{16} \backsim \frac{11}{16}$$

$$\Delta R_p = \frac{11}{16} \cdot \Delta R_t.$$

Hvad vi i Praksis gør, er — overensstemmende med dette Eksempel — det, at vi giver de enkelte Usikkerhedsbidrag hver sin »Vægt« i Forhold til deres Størrelse. Undertiden, men dog ikke altid, vil det være bekvemt at give det største Bidrag Vægten 10, de andre det hele Antal Tiendedele (1, 2, 3 .. 6, 7, 8, 9), de udgør af det største Bidrag. Vægten kan i Almindelighed umiddelbart skønnes, og Talregningen udføres i Hovedet. Reduktionen bliver derved en yderst simpel Sag.

Anm. Er alle Vægte ens, bliver Reduktionsfaktoren $\frac{\Delta R_p}{\Delta R_t}$, som ovenfor vist, $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Selv med ret betydelige Forskelle i Vægtene tør dette Udtryk i Virkeligheden benyttes. Dette kan ses saaledes: Indføres for $\frac{1}{m}$ $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_m)$ Gennemsnitsværdien ε_g og sættes $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \ldots + \varepsilon_m^2 = m\varepsilon_g^2$ faas

$$\frac{\Delta R_p}{\Delta R_t} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Den relative Fejl, der derved begaaes, bliver i Tilfælde af 3 indgaaende Iagttagelser

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}$$

Lad $\varepsilon_2 = 7$, $\varepsilon_3 = 5$ $(\varepsilon_1 = 10)$ da bliver Fejlen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 5}{174} = \frac{19}{174}$$ eller kun godt 10 %.

Middeltallets praktiske Grænseusikkerhed. Anvendes den ovenfor udledte Formel for Resultatets praktiske Grænseusikkerhed specielt paa Middeltallet af n simple Gentagelser:

$$o_m = \frac{o_1 + o_2 + \ldots o_n}{n}$$

faas for Middeltallets praktiske Grænseusikkerhed

$$(\Delta o_m)_p = \frac{\Delta o + \Delta o + \ldots \Delta o \ (n \text{ Gange})}{n\sqrt{n}} = \frac{\Delta o}{\sqrt{n}}$$

Middeltallets praktiske Grænseusikkerhed er altsaa den enkelte Iagttagelses praktiske Grænseusikkerhed divideret med Kvadratroden af Antallet af Gentagelser. Forudsætningen herfor er blot den, at hver Gentagelses Afvigelse fra den rigtige Værdi tør betragtes som praktisk set uafhængig af alle de øvriges. Vi faar hyppigt Brug for den udledte Formel i Overslag over Resultatets Usikkerhed, da Resultatet ikke sjældent bestemmes ved Middeltal for de indgaaende Iagttagelser.

Valg af Sikkerhedsfaktor. Naar Resultatets teoretiske Grænseusikkerhed paa den nu angivne Maade reduceres til samme Sandsynlighed som Grænseusikkerheden for den enkelte Iagttagelse, kan den Sikkerhedsfaktor, hvormed der maa regnes, vælges ganske uafhængigt af de ingaaende Iagttagelsers Antal.

Hvilken Sikkerhedsfaktor, man vil arbejde med, afhænger af Opgavens Natur, hvor rigoristisk Kravet er til Opnaaelsen af den opgivne Nøjagtighed, hvilke Arter af Iagttagelser, man har med at gøre, Kendskaben til Iagttagelsesusikkerhedens Natur m. m. Det vil altsaa være umuligt at anføre nogen almindelig Værdi for Sikkerhedsfaktoren. Som Eksempel skal blot anføres, at man i det elektriske Justervæsen som oftest vistnok vil søge at arbejde med en Faktor paa 2 til 3 — altsaa bestræbe sig for at uddanne Maalemetoderne saaledes, at de yder en Sikkerhed 2—3 Gange større end den Nøjagtighed, der kræves i Maalingen.

Overslag over Grænseusikkerheden paa Grundlag af de enkelte Iagttagelsers Middelusikkerhed. Det er let at se, at man ogsaa vilde kunne slaa ind paa en anden Vej end den ovenfor fulgte i Overslaget over Resultatets praktiske Grænseusikkerhed, idet man ud-

leder denne paa Grundlag af de enkelte Iagttagelsers Middelusikkerhed. Af disse faas Resultatets Middelusikkerhed ved

$$\sqrt{\lambda_2(R)} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)^2 \lambda_2(o) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 \lambda_2(p) + \ldots}$$

og ved Multiplikation med den praktisk set universelle Konstant k atter ΔRp, idet

$$\Delta Rp = k \sqrt{\lambda_2(R)}$$

hvor k tør sættes lig 1,8.

Fremgangsmaaden kræver et betydeligt større Regnearbejde end den, vi ovenfor har udviklet. Den har, som allerede antydet, næppe noget Fortrin fremfor denne. Thi vel bestemmes $\lambda_2(o)$, $\lambda_2(p)$ . . . og derfor ogsaa $\sqrt{\lambda_2(R)}$ maaske nok noget sikrere end Δo, Δp . . ΔR_t, men da Usikkerheden, der gøres til Genstand for Maaling, selv i mange Tilfælde vil være Variationer underkastet, der er store mod baade Δ' og $\sqrt{\lambda_2}$' Usikkerhed, bliver det ene Talmaal dog i Almindelighed ikke af større Værdi end det andet. Man kan iøvrigt lægge Mærke til, at mens den rigtige Bestemmelse af ΔRp ved Formlen

$$\Delta Rp = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)\Delta o^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)\Delta p^2 + \ldots}$$

(eller, hvad der bliver det samme, ved vor normale Fremgangsmaade) kun forudsætter, at $\frac{\Delta Rp}{\sqrt{\lambda_2(R)}} = \frac{\Delta o}{\sqrt{\lambda_2(o)}} = \frac{\Delta p}{\sqrt{\lambda(p)}} = k$, forudsættes der, naar ΔRp skal bestemmes direkte ved Iagttagelsernes Middelusikkerhed, Kendskab til Talværdien for k. Denne Omstændighed er det dog ikke, der lader os foretrække den første Fremgangsmaade for den sidste. k er i Virkeligheden utvivlsomt saa konstant, at den kan betragtes som kendt med en Sikkerhed, der er mere end tilstrækkelig i denne Forbindelse og ogsaa tilstrækkelig, naar man ønsker at gaa fra ΔRp, bestemt ved vor Fremgangsmaade, til Værdien for $\sqrt{\lambda_2(R)}$.

Absolut og relativ Usikkerhed. Grænseusikkerheden ΔR_p, vi nu har lært overslagsmæssigt at bestemme, udtrykkes som det vil forstaas, i samme Enhed som Resultatet selv. Vi kalder ΔR_p Resultatets absolute Grænseusikkerhed i Modsætning til den relative (praktiske) Grænseusikkerhed $\frac{\Delta R_p}{R}$, — som er Forholdet mellem den absolute Usikkerhed og Resultatet, — eller den procentiske Grænseusikkerhed, der er $100 \cdot \frac{\Delta R_p}{R}$.

Naar man taler om en Størrelses Usikkerhed er det saa at sige altid den relative, der tænkes paa. Det ligger i, at Usikkerhedens Betydning næsten altid maales ved Forholdet mellem den og Størrelsen selv. En Oplysning om, at Usikkerheden paa et eller andet Resultat har den eller den absolute Størrelse, er som oftest (ikke altid) uden al Værdi, naar ikke samtidigt den omtrentlige Værdi af Resultatet selv anføres, saa Usikkerheden kan sammenlignes med Værdien af dette. I Stedet for nu at anføre to Tal, den absolute Usikkerhed og Resultatet, er det imidlertid nok at anføre eet, den relative Usikkerhed, thi dette Tal indeholder den samme Oplysning angaaende Maalingens Præcision som de to første Tal tilsammen, og det i en anskueligere Form.

Den relative Usikkerhed bør dog i Almindelighed ikke udledes paa den Maade, at man først beregner Talværdien for den absolute og derpaa dividerer denne med (en afrundet Værdi for) Resultatets. Grunden hertil er den, at den talmæssige Beregning af Resultatets relative Usikkerhed direkte ved Formlen for denne saa at sige altid falder væsentlig simplere ud end Beregningen af den absolute Usikkerhed. Den ovenanførte Formel for ΔR_t finder derfor sjældent Anvendelse, men erstattes i det praktiske Overslag med Formlen for $\frac{\Delta R_t}{R}$, der faas af hin ved Division med $R = f(o, p, q)$ og altsaa bliver

$$\frac{\Delta R_t}{R} = \frac{o\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)}{f(o,p,q)} \cdot \left(\frac{\Delta o}{o}\right) + \frac{p\left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)}{f(o,p,q)} \cdot \left(\frac{\Delta p}{p}\right) + \frac{q\left(\frac{\delta R}{\delta q}\right)}{f(o,p,q)} \cdot \left(\frac{\Delta q}{q}\right)$$

(numerisk Sum).

Formlen bør som her skrives saaledes, at $\left(\frac{\Delta R_t}{R}\right)$ udtrykkes som lineær Funktion af lagttagelsernes relative Usikkerheder $\left(\frac{\Delta o}{o}\right)$, $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)$ o. s. v., thi som oftest bestaar der en simpel Forbindelse mellem disse og $\frac{\Delta R_t}{R}$. Naar $\frac{\Delta R_t}{R}$ er beregnet ved denne Formel, reduceres Talværdien til den praktiske, relative Grænseusikkerhed ved Multiplikation med den samme Reduktionsfaktor som ovenfor. Da nemlig;

$$\Delta R_p = (\text{Reduktionsfaktor}) \times \Delta R_t$$

er ogsaa $$\frac{\Delta R_p}{R} = (\text{Reduktionsfaktor}) \times \frac{\Delta R_t}{R}$$

Da vi nu normalt ikke beregner de enkelte Iagttagelsers Bidrag til den absolute Grænseusikkerhed, bliver følgende Sætning af Betydning: Reduktionsfaktoren beregnes paa selv samme Maade af de enkelte Iagttagelsers Bidrag til Resultatets relative Usikkerhed som af de absolute Bidrag.

Lad os ved umiddelbar Brug af Udtrykket for Resultatets relative Usikkerhed have fundet, at de forskellige Iagttagelser o, p, q o. s. v. giver Bidragene r_o, r_p, r_q til Resultatets relative Usikkerhed, saaledes at altsaa

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = r_o + r_p + r_q$$

saa forholder de Vægte, der indgaar i Reduktionsfaktoren, sig som r_o til r_p til r_q. Dette ses umiddelbart, idet

$$\Delta R_t = r_o \cdot R + r_p \cdot R + r_q \cdot R$$

Vægtene forholder sig altsaa som $r_o \cdot R$ til $r_p \cdot R$ til $r_q \cdot R$, alt saa ogsaa som r_o til r_p til r_q. Findes f. Eks. ved et Overslag

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{7{,}5}{1000} + \frac{0{,}7}{1000} + \frac{3{,}3}{1000}$$

bliver Reduktionsfaktoren

$$\frac{\sqrt{7^2 + 1^2 + 3^2}}{7 + 1 + 3} = \frac{\sqrt{60}}{11} \backsim \frac{8}{11}.$$

Anm. Den praktiske relative Grænseusikkerhed kan ogsaa beregnes direkte ved Formlen

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = \sqrt{\left[\frac{o\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)}{R}\left(\frac{\Delta o}{o}\right)\right]^2 + \left[\frac{p\left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)}{R}\left(\frac{\Delta p}{p}\right)\right]^2 + \ldots}$$

I visse Tilfælde vil Brugen af denne Formel være lige saa simpel som den normale Fremgangsmaade, fra hvilken den jo heller ikke er principielt forskellig.

Den relative Middelusikkerhed bestemmes ud fra Middelusikkerheden paa Iagttagelserne ved Formlen:

$$\frac{\sqrt{\lambda_2(R)}}{R} = \sqrt{\left[o\frac{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)}{R}\right]^2\left[\frac{\sqrt{\lambda_2(o)}}{o}\right]^2 + \left[p\frac{\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)}{R}\right]^2\left[\frac{\sqrt{\lambda_2(p)}}{p}\right]^2 + \ldots}$$

Af den relative Grænseusikkerhed $\frac{\Delta R_p}{R}$ faas $\frac{\sqrt{\lambda_2(R)}}{R}$ ved Division med k.

Usikkerheden paa den teoretiske og den praktiske Grænseusikkerhed. Den teoretiske Grænseusikkerhed er bestemt ved

$$\Delta R_t = \left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)\Delta o + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)\Delta p + \left(\frac{\partial R}{\partial q}\right)\Delta q + \ldots$$

Lad Δo, Δp og Δq være bestemt med Usikkerhederne $\Delta(\Delta o)$, $\Delta(\Delta p)$ o.s.v., saa bliver

$$\Delta(\Delta R_t) = \left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)\Delta(\Delta o) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)\Delta(\Delta p) + \left(\frac{\partial R}{\partial q}\right)\Delta(\Delta q) + \ldots$$

og den relative Usikkerhed bliver

$$\left[\frac{\Delta(\Delta R_t)}{\Delta R_t}\right] = \frac{\Delta o}{\Delta R_t}\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)\left(\frac{\Delta(\Delta o)}{\Delta o}\right) + \frac{\Delta p}{\Delta R_t}\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)\left(\frac{\Delta(\Delta p)}{\Delta p}\right) + \ldots$$

Tør man regne med en fælles relativ Usikkerhed paa Bestemmelsen af al Iagttagelsesusikkerhed, hvad man i denne Forbindelse vel nok tør, faas

$$\left[\frac{\Delta(\Delta R_t)}{\Delta R_t}\right] = \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)\Delta o + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)\Delta p + \ldots}{\Delta R_t}\cdot\left(\frac{\Delta(\Delta o)}{\Delta o}\right) = \frac{\Delta(\Delta o)}{\Delta o}$$

d. v. s. den relative Usikkerhed paa Bestemmelsen af Resultatets teoretiske Usikkerhed er lig den relative Usikkerhed paa Bestemmelsen af Iagttagelsens Usikkerhed.

Akkurat den samme Sætning gælder den praktiske Grænseusikkerheds Usikkerhed, hvad man let verificerer ved at opstille Udtrykket for denne Størrelse gaaende ud fra Formlen for ΔR_p:

$$\Delta R_p = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)^2\Delta o^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2\Delta p^2 + \ldots}$$

Den relative Usikkerhed, vi har fundet, er, som det ses, den teoretiske. Den praktiske vil blive mindre i Forholdet $\sqrt{\frac{1}{m}}$, hvor m er Antallet af indgaaede Iagttagelser, forudsat at disses Bidrag til Usikkerheden $\Delta(\Delta R_t)$ er nogenlunde lige store.

Usikkerheden paa Bestemmelsen af Middelusikkerheden. Denne er

$$\sqrt{\lambda_2(R)} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)^2 \lambda_2(o) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 \lambda_2(p) + \ldots}$$

hvoraf

$$\Delta\sqrt{\lambda_2(R)} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)^2 \Delta(\lambda_2(o)) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 \Delta(\lambda_2(p)) + \ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)^2 \lambda_2(o) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 \lambda_2(p) + \ldots}}$$

$$\frac{\Delta\sqrt{\lambda_2(R)}}{\sqrt{\lambda_2(R)}} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)^2 \Delta(\lambda_2(o)) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 \Delta(\lambda_2(p)) + \ldots}{\left(\frac{\partial R}{\partial o}\right)^2 \lambda_2(o) + \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 \lambda_2(p) + \ldots}$$

Hvis

$$\frac{\Delta(\lambda_2(o))}{\lambda_2(o)} = \frac{\Delta(\lambda_2(p))}{\lambda_2(p)} = \ldots \text{ Konstant C}$$

vil

$$\frac{\Delta\sqrt{\lambda_2(R)}}{\sqrt{\lambda_2(R)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(\lambda_2(o))}{\lambda_2(o)} = \frac{\Delta(\sqrt{\lambda_2(o)})}{\sqrt{\lambda_2(o)}}$$

d. v. s. den teoretisk relative Usikkerhed paa Resultatets Middelusikkerhed er lig den relative Usikkerhed paa Bestemmelsen af den enkelte Iagttagelses Middelusikkerhed. Den praktiske Usikkerhed bliver $\frac{1}{\sqrt{m}}$ mindre, forudsat at alle (m) Iagttagelser bidrager lige meget til Resultatets Usikkerhed.

Grafisk Fremstilling af Iagttagelsens Bidrag til Resultatets relative Usikkerhed. Af det enkelte Led i Udtrykket for Resultatets relative Usikkerhed kan man give et anskueligt grafisk Billede.

Lad *acb* i Fig. 7 fremstille, hvorledes Resultatet varierer med en af de indgaaende Iagttagelser, for Eks. *o*, naar de andre, *p*, *q* o. s. v., holdes konstante og har de Værdier, for hvilke *R* søges. Vi trækker Tangenten til *ab* i Punktet *c* — svarende til den sande Værdi for Iagttagelsen *o* — og parallel med denne Tangent gennem Nulpunktet for Koordinatsystemet Linie *Nd*. Det fra *o* hidrørende Bidrag til den relative Usikkerhed paa Resultatet er da en lige saa stor Brøkdel af Iagttagelsen *o*'s relative Usikkerhed, som *od* er af *oc* eller *R*. Dette ses umiddelbart af Udtrykket for det antydede Bidrag, som er

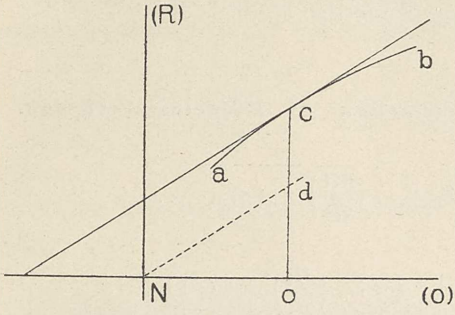

Fig. 7.

$$\frac{o \cdot \frac{\partial R}{\partial o}}{R} \cdot \left[\frac{\partial o}{o}\right]$$

idet $o \cdot \frac{\partial R}{\partial o} = od$.

Af den her udledte Sætning følger, at hvis Resultatet kun i ringe Grad varierer med den paagældende Iagttagelse, bliver Koefficienten lille (Fig. 8a), i et Maximum eller Minimum lig 0. Varierer Resultatet derimod stærkt, bliver Koefficienten stor (Fig 8b),

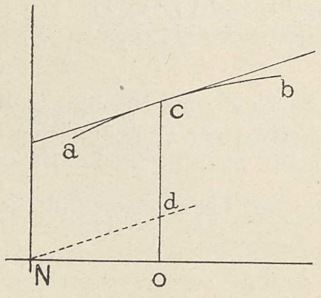

Fig. 8a.

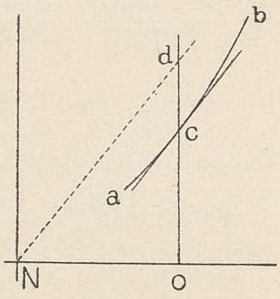

Fig. 8b.

i et Punkt med lodret Tangent uendelig. Heraf drager vi den Slutning, at der maa tilstræbes en relativ stor Iagttagelsessikkerhed i et Tilfælde som Fig. 8b, mens der i Fig. 8a kun kræves en relativ ringe Sikkerhed.

Beregning af Talværdien for Usikkerheden. Naar Udtrykket for Resultatets Usikkerhed — i Almindelighed den relative Usikkerhed — er opstillet, skal Værdier for de indgaaende Størrelser indsættes og Talværdien for Usikkerheden beregnes. Hvad nu denne Beregning angaar, giver Sikkerheden paa Bestemmelsen af de indgaaende Usikkerheder, med hvilken Tolerans Regningen skal gennemføres. Ovenfor har vi vist, at Sikkerheden paa Resultatets Usikkerhed vil være af samme Størrelsesorden som Sikkerheden paa Bestemmelsen af Iagttagelsens Usikkerhed. Sættes denne til 20—30 %, saa følger deraf, at vor Talregnings Tolerans passende kan sættes til f. Eks. 10 %. I Virkeligheden behøver Talregningen i de fleste Tilfælde næppe engang at gennemføres med denne Skarphed.

Naar Talregningens Tolerans er saa stor som 10 % eller derover, betyder det, at vi for de indgaaende Størrelser (Konstanter og Iagttagelser) kun behøver at kende omtrentlige Værdier. Stiller Sagen sig saaledes, at vi kender Talværdier, der er nøjagtigere, end de behøver at være, regner vi ikke med alle Ciffre i disse, men runder passende af. Dette er en Hovedregel for al rationel Talregning eller Regning med given Tolerans. Ikke at afrunde svarende til Toleransen betyder Tid spildt paa ganske unyttigt Regnearbejde.

Ved Bestemmelsen af Talværdien for den Iagttagelsesusikkerhed, der indgaar i Udtrykket for Resultatets Usikkerhed, vælger vi naturligvis Forholdene nogenlunde maaske endog ganske, som de vil blive under den Maaling, der planlægges. I sidste Tilfælde giver Bestemmelsen af Usikkerheden os i Middeltallet af de gentagne Iagttagelser en Værdi for Iagttagelsen, der, saafremt Overslaget godtgør Metodens Brugbarhed, kan benyttes til Beregning af Resultatet. Det vilde derimod i Følge det anførte være meningsløst at benytte Middeltallet uafrundet til Beregning af Resultatets Usikkerhed. Hvis Middeltallet f. Eks. var 23,73, vilde vi i den sidste Regning runde dette Tal af til 25 eller maaske endog til 20, hvis dette sidste Tal var mere bekvemt end 25 i vor Regning. Dette

Eksempel kan tjene til Belysning af, hvor vidt man tør drive Afrundingen.

Hvor nøje behøver man at kende Arbejdsforholdene ved Maalingen, der planlægges, for at vurdere dennes Sikkerhed? Med Hensyn til Spørgsmaalet om, hvor nøje Forholdene ved Prøven for Iagttagelsens Sikkerhed maa falde sammen med Forholdene, som de vil blive under den Maaling, der planlægges, indser vi, at naar vi i vort Overslag kun behøver at kende omtrentlige Værdier for Iagttagelser og Konstanter, behøver Forholdene ved Prøven ogsaa kun omtrentligt at falde sammen med Forholdene under Maalingen. I Virkeligheden maa der naturligvis i Almindelighed en nærmere Undersøgelse til for at afgøre, hvor vidt det Interval er, indenfor hvilket vort Overslag praktisk set gælder. Saadanne Undersøgelser skal vi nedenfor se Eksempler paa. Her skal kun anføres, at Intervallet i mange Tilfælde — vel nok i de fleste — er relativt meget vidt. I visse Tilfælde dækker det hele det praktisk mulige Omraade. Saaledes vil Usikkerheden paa Bestemmelsen af Forholdet mellem to Lampers Lysstyrke meget nær være uafhængigt af Lampeafstanden. Usikkerheden paa Bestemmelsen af en Linses Brændvidde vil paa samme Maade med stor Tilnærmelse være uafhængig af Afstanden mellem Spalte og Billedskærm. Sikkerheden paa en Modstandsmaaling ved Wheatstones Traadbro vil indenfor den største Del af Traaden — fra ca. 20—80 ved en Traad paa 100 — være praktisk set uafhængig af Kontaktstillingen o. s. v. I de fleste Tilfælde kræves derfor ved Overslaget over Metodens Sikkerhed kun en grov Forestilling om Forholdene, som de vil stille sig ved den Maaling, der planlægges.

Med hvor mange Cifre skal Resultatet beregnes? Valg af Regnemidlet. Det Antal Cifre af Resultatets Talværdi, som skal udregnes, vil i Almindelighed være bestemt ved Metodens Usikkerhed. Det betyder, at man paa For-

haand, før Beregningen af selve Resultatet er paabegyndt, kan vide, hvor mange Cifre, man skal udregne, eller fastslaa Talregningens Tolerans og dermed ogsaa Regnemidlet. Som almindelig Regel kan vi vedtage, at Regningen skal give de Cifre, der ifølge Overslaget over Usikkerheden skulde være bestemt uden Usikkerhed plus det, i hvilket Usikkerheden begynder at vise sig. Er det første betydende Ciffer i Resultatet f. Eks. 3 og Usikkerheden 1 %, begynder Usikkerheden at vise sig i det tredje betydende Ciffer, som altsaa endnu skal medtages. Det er derimod urimeligt at medtage det fjerde eller femte Ciffer. Disse Cifre afbilder nemlig intet fysisk. De er Resultat af Regning alene, ikke af Maaling. De skal ikke blot ikke medtages, de skal overhovedet ikke beregnes*).

Valget af Regnemidlet for en Talregning af given Tolerans kræver naturligvis Kendskab til de forskellige til Raadighed staaende Regnemidlers Sikkerhed. Her skal til Vejledning anføres, at man kan sætte Usikkerheden paa Regning med en almindelig Regnestok (25 cm. Skala) til ca. 1 à 2 ‰. En 4-cifret Logarithmetabel giver ca. 0,1 ‰, en 5-cifret 0,01 ‰ o. s. v. Resultatet af 1 % Usikkerhed kan man da passende beregne ved Regnestok, 1 ‰-Resultater ved 4-cifret Logaritmetabel, 0,1 ‰ ved 5-cifret o. s. v. Regninger med 10 %—20 % Tolerans (Overslagsregninger) vil vel i de fleste Tilfælde overhovedet intet Regnemiddel kræve.

Samtidig Angivelse af Resultat og dettes Sikkerhed. Naar vor Regel ovenfor overholdes, ligger der allerede i Tallet, der angiver Resultatet, en vis Oplysning om dettes Usikkerhed. Man kan, skønt det ikke er nødvendigt, fremhæve, at det sidst anførte Ciffer er usikkert ved at skrive det

*) En Undtagelse fra den her givne Regel kan der være Grund til at gøre, naar Usikkerheden udtrykt absolut er ca. 1. Man bør da maaske endnu medtage Cifret efter det, i hvilket denne Usikkerhed træder frem. Er Resultatets første Ciffer f. Eks. 1 og Usikkerheden 1 %, vil man altsaa maaske skrive Resultatet med 4 Cifre f. Eks. 1,137.

mindre end de øvrige, eventuelt samtidig lidt lavere end disse, altsaa f. Eks. $3{,}97_2$. — Imidlertid burde det sikkert blive almindelig Regel, at Tals Tolerans eller Usikkerhed direkte angaves i Forbindelse med Tallet. Vi vil derfor skrive vore Resultater enten som $R \pm \left(\frac{\Delta R}{R} \cdot 100\right)$ % eller $R \pm \Delta R$. F. Eks. $3{,}972 \pm 0{,}2$ % ($3{,}972 \pm 2$ ‰) eller $3{,}972 \pm 8$. Ved den sidste Skrivemaade anser vi det altsaa for tilstrækkeligt at anføre det betydende Ciffer i ΔR. (8 i Stedet for 0,008).

Amn. Den nu fastslaaede Regel for Beregningen af Resultatets Cifre kan kræve en vis nærmere Belysning. Naar en vis Tolerans OT i Fig. 9 kan tillades i Resultatet, betyder det maaske i de fleste Tilfælde ogsaa, at man ikke er interesseret i at kende Resultatet med større Nøjagtighed end den, der svarer til Toleransen. Egentlig burde det da maaske være Toleransen, der bestemte Antallet af beregnede Cifre, ikke Usikkerheden Ou, der er mindre end Toleransen, nemlig saa mange Gange mindre, som Sikkerhedsfaktoren angiver. Ogsaa af en anden Grund kunde man forkaste Usikkerheden som bestemmende for Antallet af Cifre. Naar dette ikke skulde bestemmes ved den foreskrevne Tolerans, vilde det mest korrekte vel være at bestemme Antallet ved Resultatets Nøjagtighed. Denne behøver strengt taget ikke at falde sammen med Sikkerheden, men kan være noget mindre. Den vil i Almindelighed kun falde sammen med Sikkerheden, saafremt Indflydelsen af alle væsentlige Fejlkilder praktisk set fuldkomment elimineres. Men nu indses det jo let, at, naar Metoden er valgt »rigelig«, taaler Maalingen en mindre fuldstændig Elimination. Summen eller rettere Resultanten OF af alle mulige Afvigelser, hidrørende dels fra Usikkerhed

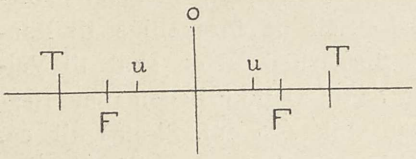

Fig. 9.

dels fra »Restfejl«, maa blot ikke nærme sig for stærkt til Toleransen OT.

Imidlertid er denne sidste Betragtning uden større praktisk Interesse. I Virkeligheden tilstræber vi nemlig i de fleste Tilfælde fuldstændigt at eliminere enhver Forfalskning. Lykkes det, og det forudsætter vi her, vil derfor de to Grænser u og F i Fig. 9 praktisk set falde sammen. Naar vi dernæst bestemmer Antallet af Cifre ved Usikkerheden ikke ved den foreskrevne Tolerans, er det jo som det ses ganske i Konsekvens med den Maade, hvorpaa vi planlægger Maalingen. Naar denne planlægges saaledes, at de til Ou svarende Cifre maales, vilde det være ganske urimeligt ikke ogsaa at beregne dem.

KAP. III.

EKSEMPLER OG OPGAVER.

Eks. 1. **Usikkerheden paa Bestemmelsen af en Linses Brændvidde.** Som et første simpelt Eksempel betragter vi Bestemmelsen af en Linses Brændvidde. Dersom vi betegner Afstanden fra den belyste Spalte til Linsen ved a og Afstanden mellem Spalteskærm og den Skærm, paa hvilken Billedet af Spalten dannes, ved L, bestemmes Linsens Brændvidde, forudsat at Linsen er tilstrækkelig tynd, ved

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{L-a}=\frac{1}{p}$$

eller ved

$$p=\frac{a(L-a)}{L}.$$

Egentlig indgaar der i dette Udtryk 3 Iagttagelser, nemlig Iagttagelsen af henholdsvis Spalteskærmens, Linsens og Billedskærmens Stillinger paa den optiske Bænk. Kaldes disse o_1, o_2 og o_3, vil

$$a=o_2-o_1$$
$$L=o_3-o_1.$$

Usikkerhederne paa Iagttagelserne o_1 og o_3 kan vi betragte som forsvindende mod Usikkerheden paa o_2. De to første Usikkerheder er nærmest Aflæsningsusikkerheder, der højest vil være at sætte til ca. 0,2 mm hver. Usikkerheden paa o_2 er derimod en Indstillingsusikkerhed, der f. Eks. (Sml. pg. 18) kan naa en Værdi af 1,2 mm. Vi betragter da L som praktisk set uden Usikkerhed og sætter Usikkerheden paa a lig Usikkerheden paa o_2. Ved Anvendelse af vort almindelige Udtryk finder vi saa

$$\Delta p = \frac{L - 2a}{L} \cdot \Delta a$$

og

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{L - 2a}{L - a} \cdot \left(\frac{\Delta a}{a}\right)$$

Ved den Bestemmelse, hvorfra vor Talværdi for Δa er laant, var $L = 130{,}00$ cm., idet Spalten var anbragt over 160 cm-Stregen, mens Billedskærmen var stillet over 30 cm-Stregen. Prøven for Indstillingssikkerhed gav for Linsens Stilling 132,22, altsaa for a 27,88. Med denne Værdi regner vi dog i Følge det ovenfor sagte ikke umiddelbart. Vi runder af til 30 og har herefter

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{130 - 60}{130 - 30} \cdot \frac{0{,}12}{30} = \frac{70}{100} \cdot \frac{0{,}12}{30} = \frac{2{,}8}{1000} \text{ eller } 2{,}8\ ‰ \backsim 3\ ‰$$

for Usikkerheden paa Bestemmelsen af Brændvidden vel at mærke ved en enkelt Indstilling, altsaa ikke ved et Middeltal af en Række Indstillinger. Ved at indsætte afrundede Værdier i Udtrykket for selve Brændvidden $p = \frac{a(L-a)}{L}$ ses det, at p vil være ca. 25 cm. 3 ‰ heraf er 7 i fjerde Ciffer. Resultatet skal følgelig beregnes med 4 Cifre. En almindelig Regnestok kan indføre en Usikkerhed paa 1 à 2 ‰. Anses denne Usikkerhed for væsentlig, vil man vælge en fireciffret Logaritmetabel til Beregning af Resultatet.

Dersom Linsen stilles ind f. Eks. 10 Gange, og man be-

regner Resultatet af Middeltallet af disse 10 Indstillinger, maa man i Overslaget naturligvis ogsaa regne med dette Middeltals Usikkerhed, der kun er $\frac{0{,}12}{\sqrt{10}}$ = ca. 0,04. Resultatets Usikkerhed bliver altsaa ogsaa kun $\frac{1}{\sqrt{10}}$ af den ovenfor fundne:

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right) \backsim \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 2{,}8\,{}^0/_{00} \backsim 1\,{}^0/_{00}.$$

Hvad Resultatet selv angaar, tør det ikke længere beregnes med Regnestok, hvis man da vil drage fuld Nytte af den forøgede Sikkerhed.

Eks. 2. **Usikkerhed paa Bestemmelsen af Lysstyrkeforholdet mellem to Glødelamper.** Ved Bestemmelsen af Forholdet mellem to Glødelamper blev de to Lamper anbragt i 3 m. Afstand fra hinanden paa en Fotometerbænk. Fotometret blev derefter stillet ind 10 Gange, derpaa vendt om (for at eliminere mulig optisk Dissymetri) og igen indstillet 10 Gange.

Indstillingerne gav

Fotometret lagt til venstre:		Fotometret lagt til højre:	
Indstilling	Δ	Indstilling	Δ
152,8	+0,11	153,5	−0,36
2,5	−0,19	3,6	−0,26
2,3	−0,39	3,5	−0,36
2,6	−0,09	3,7	−0,16
3,0	+0,31	4,2	+0,34
2,9	+0,21	4,2	+0,34
2,6	−0,09	4,3	+0,44
3,0	+0,31	3,9	+0,04
2,5	−0,19	4,0	+0,14
2,7	+0,01	3,7	−0,16
152,69	Δ = 0,39 max	153,86	Δ = 0,44 max

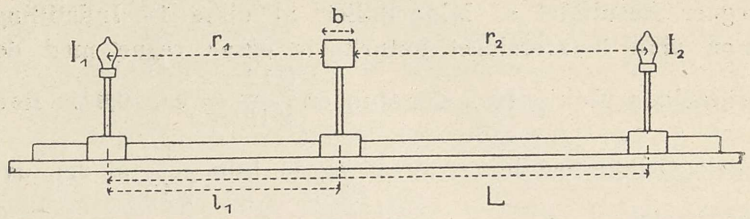

Fig. 10.

Med de paa Fig. 10 indførte Betegnelser er Lysstyrkeforholdet

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Iagttaget er L og l_1 samt Afstanden b mellem de Papirflader, hvis Belysning sammenlignes.

Altsaa er:

$$r_1 = l_1 - \frac{b}{2}$$

$$r_2 = L - l_1 - \frac{b}{2}$$

Den Usikkerhed (ikke Fejl), hvormed L er bestemt (Lamperne er stillede paa henholdsvis 0-Stregen og 300-Stregen) er forsvindende mod Indstillingsusikkerheden. Ligeledes er Usikkerheden paa Udmaaling af $\frac{b}{2}$ forsvindende. Derfor bliver

$$\Delta r_1 = \Delta l_1 = \Delta o,$$

hvor o er Indstillingen.

Nu er r_1 faktisk bestemt ved Middeltallet af de to Indstillinger med Fotometret lagt henholdsvis til højre og venstre. Altsaa

$$l_1 = \frac{l_1' + l_2''}{2}$$

Af denne Ligning følger

$$\Delta l_{1_l} = \frac{\Delta l_1' + \Delta l_1''}{2}$$

og

$$\Delta r_1 = \Delta l_{1_p} = \frac{\Delta l_1' + \Delta l_1''}{2\sqrt{2}} = \frac{0{,}39 + 0{,}44}{2\sqrt{2}} = \frac{0{,}42}{1{,}4} = 0{,}30 \text{ cm.}$$

Efter saaledes at have udledt den afledede Iagttagelse r's Sikkerhed bestemmes Resultatets Sikkerhed ud fra Formlen

$$f = \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^{\,2}}{(L - (r_1 + b))^2}$$

I dette Overslag kan vi bortkaste b mod r_1 og faar da

$$f = \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^{\,2}}{(L - r_1)^2}$$

hvoraf

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2L}{L - r_1} \cdot \left(\frac{\Delta r_1}{r_1}\right)$$

Til Raadighed for Beregningen af Talværdien for $\frac{\Delta f}{f}$ staar nu følgende Iagttagelser:

$$l_1' = 152{,}69 \text{ cm.}, \; l_1'' = 153{,}86 \text{ cm.}, \; b = 8{,}50 \text{ cm.},$$
$$L = 300, \; \Delta r_1 = 0{,}30 \text{ cm.},$$

hvoraf $l_1 = 153{,}27$ cm., og $r_1 = 148{,}02$ cm. Vi regner med

$$L = 300, \; r_1 = 150 \text{ cm.}, \; \Delta r_1 = 0{,}30$$

og faar

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2 \cdot 300}{150} \cdot \frac{0{,}30}{150} = 4 \cdot \frac{1}{500} = 8\,‰$$

for Usikkerheden paa Resultatet, bestemt ved een Indstilling af Fotometret lagt til højre og een lagt til venstre. Sikkerheden af Resultatet beregnet ved Middeltallet $r_1 = 148{,}02$ cm. bliver henimod 3 Gange saa stor — altsaa ca. 3 ‰ — idet Usikkerheden paa hver af de indgaaende, oprindelige Iagttagelsers (o_1' og o_1'') Middeltal er $\sqrt{10}$ Gange mindre end den enkelte Iagttagelses Usikkerhed.

Resultatet af Enkeltindstillingerne vil man beregne ved Regnestok, maaske ogsaa Resultatet bestemt ved Middeltallet

af 10 Gentagelser. I begge Tilfælde skal Resultatet angives med 3 Cifre. Beregnet af Middeltallene ovenfor bliver det

$$f = 0{,}851 \pm 3.$$

Eks. 3. **Usikkerheden paa Bestemmelsen af et Brydningsforhold ved Spektrometer.** Som bekendt kan Brydningsforholdet for Materialet i et Prisme bestemmes ved, at man maaler Prismets brydende Vinkel p samt den brudte Straales Hovedafvigelse a. Brydningsforholdet n beregnes herefter ved

$$n = \frac{\sin\frac{a+p}{2}}{\sin\frac{p}{2}}$$

For at finde Usikkerheden beregnes $\frac{\delta n}{\delta a}$ og $\frac{\delta n}{\delta p}$. Man faar:

$$\frac{\delta n}{\delta a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\frac{a+p}{2}}{\sin\frac{p}{2}}$$

$$\frac{\delta n}{\delta p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{p}{2}\cos\frac{a+p}{2} - \sin\frac{a+p}{2}\cos\frac{p}{2}}{\sin^2\frac{p}{2}}\right)$$

Herefter haves:

$$\Delta n = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{a+p}{2}}{\sin\frac{p}{2}}\Delta a + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{p}{2}\cos\frac{a+p}{2} - \sin\frac{a+p}{2}\cos\frac{p}{2}}{\sin^2\frac{p}{2}}\Delta p.$$

og

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{a}{2}\cot\frac{a+p}{2}\left(\frac{\Delta a}{a}\right) + \frac{p}{2}\left(\cot\frac{a+p}{2} - \cot\frac{p}{2}\right)\left(\frac{\Delta p}{p}\right)$$

numerisk beregnet.

Sikkerheden paa Vinkelmaalingen blev for et givet Spektroskop fundet ved 3 Gange at maale en og samme Vinkel i et Prisme. Spektroskopet havde to Nonier stillede 180° fra hinanden. For Supplementvinklen til den brydende Vinkel fandtes ved de 3 Gentagelser:

Nr.	Nonius I	Nonius II	Middelværdi
1	$121^0\,3'$	$120^0\,55'$	$120^0\,59_0'$
2	$121^0\,3'$	$120^0\,56'$	$120^0\,59_5'$
3	$121^0\,2'$	$120^0\,57'$	$120^0\,59_5'$

I Middeltallene er den Excentricitet i Kresens Centrering, der tydeligt giver sig til Kende i de to Nonieaflæsninger, elimineret. Tre Gentagelser vil som ovenfor antydet i Almindelighed give en for lav Værdi for Grænseusikkerheden; men de tre Værdier for Supplementvinklen giver os dog Størrelsesordenen af denne og et Grundlag for en grovere Vurdering af Metodens Sikkerhed. Vi slutter af Tabellen, at Grænseusikkerheden for Enkeltmaalingen af p — Middelværdien af Bestemmelserne ved de to Nonier — er ca. 0,5'. Desuden antager vi, at Grænseusikkerheden paa Bestemmelsen af a har samme Værdi, og sættes altsaa $\Delta a = \Delta p = 0{,}5'$. Ved en normal Maaling vil p være ca. 60^0, a vil ofte være ca. 30^0. Under disse Forhold bliver:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2}{7200},\quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{7200},\quad \cot\frac{a+p}{2} = 1,\quad \cot\frac{p}{2} = \sqrt{3} = 1{,}7,$$

$$a = \frac{1}{2},\quad p = 1,\quad \text{(Buemaal)}$$

altsaa:

$$\left(\frac{\Delta n}{n}\right)_t = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7200} + \frac{1}{2}\cdot 0{,}7\cdot\frac{1}{7200} = \frac{1}{9000} \backsim 0{,}11\,‰.$$

Den praktiske Grænseusikkerhed for Bestemmelsen af n ved Iagttagelse af a og p bliver:

$$1000 \left(\frac{\Delta n}{n}\right)_p = \frac{0{,}11}{\sqrt{2}} = 0{,}08‰.$$

Eks. 4. **Overslag over Usikkerheden paa Bestemmelsen af Modstandsevnen for et Ledningsmateriale ved Thomsons Bro.** Modstanden pr. m. pr. mm² for et Ledningsmateriale i Traadform bestemmes som bekendt ved Udmaaling af Modstanden r i en vis Længde L af Traaden, denne Længde selv og Gennemsnitsdiameteren d for det Stykke af Traaden, der benyttes under Maalingen. Herefter beregnes Modstandsevnen ved

$$k_v = \frac{r \cdot \frac{\pi}{4} d^2}{L}$$

Resultatet k_v er altsaa her en Funktion af 3 Iagttagelser r, d og L. Da det teoretiske Udtryk er logaritmisk, kan Udtrykket for den relative Usikkerhed paa k_v umiddelbart opskrives (se nedenfor). Det antager den simple Form:

$$\left(\frac{\Delta k_v}{k_v}\right)_t = \frac{\Delta r}{r} + \frac{2\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L}.$$

Vi betragter nærmere de tre Kilder til Usikkerhed:

$\frac{\Delta r}{r}$ (Modstandsmaalingen). Denne antages udført med en Wolff-Thomsons Bro bygget sammen af Modstande, der hver er afpassede med en Tolerans af (højest) 0,2 ‰. Kaldes Normalmodstanden, hvormed r sammenlignes, N og Modstandene i de to Sider af Broen, naar Ligevægt er tilvejebragt, henholdsvis r_1 og r_2, haves

$$r = \frac{r_1}{r_2} \cdot N,$$

hvoraf igen:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{\Delta r_2}{r_2} + \frac{\Delta N}{N}.$$

$\frac{\Delta N}{N}$ sætter vi lig 0, idet vi antager, at N er afpasset væsentlig sikrere end r_1 og r_2. Altsaa faas

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_t = 2 \cdot \frac{0{,}2}{1000} \text{ og } \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_p = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}2}{1000} = \text{ca. } \frac{0{,}3}{1000}.$$

$\frac{\Delta d}{d}$ (Tykkelsesmaalingen). Bestemmes Gennemsnitsværdien ved 40 Udmaalinger med en Brown og Sharpe Skrue fordelt jævnt og paa systematisk Maade over Traaden, synes alt at tyde paa, at der normalt kan naas en Sikkerhed paa mindst $^1/_{1000}$ m.m. i Maalingen af d, i Virkeligheden ved en jævn Traad snarere mere. Saaledes gav tre Gentagelser hver paa 40 Iagttagelser de tre Værdier $1{,}984_3$, $1{,}983_7$ og $1{,}984_3$. Er $d = 2$ m.m. bliver altsaa

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2000} \text{ og } \frac{2\Delta d}{d} = \frac{1}{1000}$$

L er Afstanden mellem Knivene. Denne er gerne ca. 50 cm og lader sig udmaale med en Sikkerhed af ca. 0,1 mm, saa at

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{2}{10000}.$$

For $\frac{\Delta k_v}{k_v}$ faas da:

$$\left(\frac{\Delta k_v}{k_v}\right)_t = \frac{3}{10000} + \frac{10}{10000} + \frac{2}{10000} = \frac{15}{10000} = 1{,}5\,‰$$

$$\text{og } 1000 \left(\frac{\Delta k_v}{k_v}\right)_p \backsim 1{,}5 \times \frac{11}{15} = \text{ca. } 1\,‰.$$

Som det ses kunde vi ogsaa godt i Stedet for at multiplicere med $\frac{11}{15}$ have divideret med $\sqrt{3}$. Resultatet var blevet ca. 0,9 ‰ i Stedet for 1 ‰.

Eks. 5. **Usikkerheden paa Kalibreringen af en Maaletraad.** En almindelig Metode til Kalibrering af en Maaletraad er søgt anskueliggjort i Fig. 11. Enderne af Traaden forbindes gennem svære Metalbøjler med to Kvægsølvkopper c og d i et Bræt. I dette er endnu boret 9 Huller til Kvægsølv. To og to er nu alle 11 Kvægsølvkopper forbundne med noget nær lige store bøjleformede Modstande. En af disse mærkes. Vi kan betegne den ved I. Denne Bøjle forbinder først de to Huller yderst tilvenstre; vi betegner disse 0 og 1. Den ene Ende g_1 af Broen, i hvilken Galvanometret er indskudt, dyppes ned i Hul 1. Vi antager da, at den anden Ende g_2 med Skydekontakten maa anbringes ved l_1, naar Galvanometret skal forblive i Ro. Bøjle I og Nabobøjlen tilhøjre bytter nu Plads, hvorefter Kontaktstillingen l_1' aflæses. Efter en Flytning af g_1 til Hul 2 skal Kontakten staa ved l_2, efter en Ombytning af I med næste Bøjle ved l_2' osv. Vi beregner Længderne:

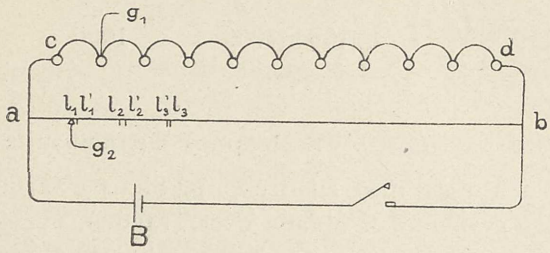

Fig. 11.

$$L_1 = l_1 - 0,\ L_2 = l_2 - l_1',\ L_3 = l_3 - l_2' \ldots . L_{10} = 100 - l_9'.$$

Vi danner Gennemsnitsværdien $\frac{1}{10}(L_1 + L_2 + \ldots L_{10}) = L_m$.

Herefter vil Korrektionerne paa 10, 20, 30, . . . 80, 90 Stregen af Metaltraadens Skala være bestemt ved følgende Udtryk:

$$\begin{aligned}
\delta_{10} &= L_m - L_1 \\
\delta_{20} &= 2L_m - L_1 - L_2 \\
\delta_{30} &= 3L_m - L_1 - L_2 - L_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{90} &= 9L_m - L_1 - L_2 - L_3 \ldots L_9
\end{aligned}$$

Disse Udtryk udledes let, naar det huskes, at Korrektionen er det, der skal adderes til Aflæsningen for at Modstandsforholdet skal kunne beregnes uden Fejl af den rettede Værdi, og idet vi sætter $\delta l_1 = \delta l_1' = \delta_{10}$, $\delta l_2 = \delta l_2' = \delta_{20}$ o. s. v. Vi finder den praktiske Grænseusikkerhed paa Bestemmelserne af δ, idet vi regner med en Usikkerhed lig 0,1 Inddeling paa Aflæsningen af hver Kontaktstilling. Vi faar da

$$\Delta L_1 = 0{,}1,\ \Delta L_2 = \Delta L_3 \ldots \Delta L_9 = \frac{0{,}1 + 0{,}1}{\sqrt{2}} = \text{ca.}0{,}15,\ \Delta L_{10} = 0{,}1$$

Nu er

$$\delta_{10} = \frac{1}{10}\,(L_2 + L_3 + \ldots L_{10}) - \frac{9}{10} L_1.$$

Da de enkelte Iagttagelsers Bidrag her er udtrykt ved saa simple Tal vil det være naturligt at benytte Kvadratrodsudtrykket til Beregning af den praktiske Grænseusikkerhed. Denne bliver

$$\Delta(\delta_{10}) = \frac{1}{10}\sqrt{8 \times 0{,}15^2 + 1 \times 0{,}1^2 + (9 \times 0{,}1)^2} = 0{,}10 \text{ Inddeling}$$

Derefter er

$$\delta_{20} = \frac{2}{10}(L_3 + L_4 + \ldots . L_{10}) - \frac{8}{10} L_1 - \frac{8}{10} L_2$$

og altsaa

$$\Delta(\delta_{20}) = \frac{1}{10}\sqrt{7 \cdot (2 \cdot 0{,}15)^2 + (2 \cdot 0{,}1)^2 + (8 \cdot 0{,}1)^2 + (8 \cdot 0{,}15)}$$

$$= 0{,}17 \text{ Inddeling.}$$

Fortsættes paa denne Maade faas de øvrige Usikkerheder. Under et er de anført i hosstaaende Tabel, der viser, at Usikkerheden fordeler sig symmetrisk om Midten, hvor den er størst, men dog ikke mere end ca. dobbelt saa stor som ved Enderne af det kalibrerede Traadstykke.

$\Delta\delta_{10} = \Delta\delta_{90}$	0,10
$\Delta\delta_{20} = \Delta\delta_{80}$	0,17
$\Delta\delta_{30} = \Delta\delta_{70}$	0,20
$\Delta\delta_{40} = \Delta\delta_{60}$	0,21
$\Delta\delta_{50} = \Delta\delta_{50}$	0,22

I et Tilfælde som her vilde det naturligvis være ganske forkert at regne med den teoretiske Grænseafvigelse.

Opgaver.

Opg. 1. Vægtfylden for Materialet i en Cyklekugle tænkes bestemt ved Hjælp af en Mikrometerskrue og en Vægt. Ved Skruen kan Gennemsnitsdiametren findes med en Sikkerhed af $^2/_{1000}$ mm. Vejningen kan udføres med $^1/_2$ mg Sikkerhed. Hvilken (praktisk) Sikkerhed i Bestemmelsen af Vægtfylden tillader Metoden. Kuglens Diameter er ca. 5 mm. Staals Vægtfylde ligger omkring 7,5.

Opg. 2. I Fig. 12 er fremstillet en Plade af et gennemsigtigt Materiale anbragt ovenpaa en plan Glasplade. Er der paa denne sidste sat et Mærke a, vil dette set igennem den øverste Plade, Maaleobjektet, synes at ligge i Højden a', hævet Stykket d. d afhænger af Maaleobjektets Brydningsforhold n, idet

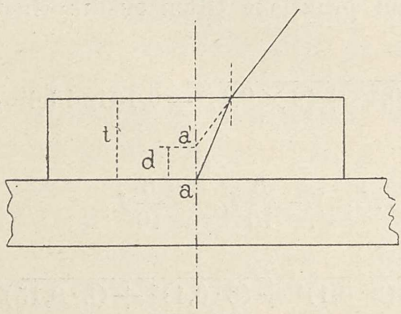

Fig. 12.

$$n = \frac{t}{t-d},$$

hvor t er Tykkelse af Maaleobjektet. Med et Mikroskop anbragt forskydeligt ved en Mikrometerskrue kan man maale baade t og $t-d$ og saaledes bestemme n. Ved Maaling af d fjærnes først den øverste Plade og der stilles ind paa a. Derpaa lægges Pladen over a, og der stilles ind paa a'. Forskydningen af Mikroskopet er da d. Er der endvidere paa Overfladen af Maaleobjektet anbragt et Mærke, og forskyder man Mikroskopet videre, faas $t-d$ som Differens mellem tredje og anden Indstilling. Naar Usikkerheden paa Indstillingerne alle er ca. $^3/_{1000}$ mm, naar Maaleobjektet er af Glas med Brydningsforhold ca. 1,5 og $t =$ ca. 3 mm, hvilken praktisk

Sikkerhed tillader da Metoden? (De oprindelige Indstillinger, for hvilke vi kender Usikkerheden, maa indføres. Kaldes de o_1, o_2, o_3, bliver $n = \frac{o_3 - o_1}{o_3 - o_2}$). Ved hvilket Regnemiddel bør Resultatet beregnes? Hvor mange Cifre skal anføres?

Opg. 3. Bessels Metode til Maaling af en positiv Linses Brændvidde bestaar som bekendt i, at man iagttager Afstanden M mellem de to Stillinger af Linsen, hvor denne paa Billedskærmen giver et skarpt Billede af den belyste Spalte. Vi tænker os Spalte og Skærm stillede henholdsvis over 0 og 150 cm. paa den optiske Bænk, og at Usikkerheden paa disse Indstillinger er forsvindende. Usikkerhederne paa Indstillingerne af Linsen i dennes to Stillinger tænker vi os lige store, lig 0,5 mm. Linsens Brændvidde er ca. 25 cm. Hvilken Sikkerhed tillader Metoden, naar Enkeltindstilling benyttes, og naar hver af de to Indstillinger gentages 10 Gange? Hvilket Regnemiddel bør anvendes, og hvor mange Cifre skal beregnes? (Linsen antages saa tynd, at den simple Formel $\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{p}$ praktisk set gælder. Af denne udledes et Udtryk for p ved M og Afstanden L mellem Spalte og Skærm).

Opg. 4. Den almindelige Traadkompensators Teori er som bekendt:

$$e = e_0 \cdot \frac{l}{l_0}$$

hvor e_0 er Normalelementets elektromotoriske Kraft, l og l_0 de Længder af Maaletraaden, der svarer til Indstilling paa henholdsvis den ubekendte Spænding e og Normalelementet. Dersom Traadens Mangel paa Homogenitet betragtes som en Kilde til Usikkerhed, og denne Usikkerheds Grænse er 1 mm, hvilken Tolerans tillader da den umiddelbare Brug af Apparatet (uden Korrektion for Kaliberfejlen) i en Bestemmelse, hvor $l_0 =$ ca. 950, $l =$ ca. 300? Dersom Korrektionerne paa l og l_0 kendes med en Sikkerhed af 0,1 mm, hvad bliver da den opnaaelige Nøjagtighed? Hvilke Regnemidler bør anvendes i de to Tilfælde?

Opg. 5. En Modstand paa omkring 200 Ohm skal maales. Til Raadighed staar et Weston Millivoltmeter ($150^0 = 60$ MV. Modstand 2 Ohm), et Weston Voltmeter ($150^0 = 3$ Volt) samt 2 Tørelementer à ca. 1,5 Volt. Man sender fra Elementerne, indskudt i Række, Strøm gennem Modstanden, maaler denne Strøm ved Millivoltmetret og samtidig Elementernes Polspænding ved Voltmetret. Hvilken Sikkerhed tør paaregnes i Resultatet, naar Fremstillingsusikkerheden for Skalaen er mindre end 0,2 Inddeling, og det antages, at man i Aflæsningen kan skønne $^1/_{10}$ Inddeling? Hvilket Regnemiddel bør anvendes, og hvor mange Cifre skal beregnes?

Opg. 6. Med det i Fig. 13 antydede System kan større Modstande af forskellig Værdi sammenlignes. Først iagttages paa Strømmaaleren W_a Udslaget α_1, naar den kendte Modstand R er indskudt i Strømkredsen, og naar dennes Strømkilde er n_1 Celler af det i Fig. antydede Batteri. Derpaa indskydes den ubekendte Modstand X i Stedet for R, og man faar nu Udslaget α_2 med n_2 Celler indskudt. Modstanden X beregnes da af

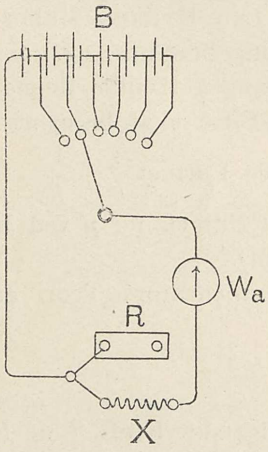

Fig. 13.

$$X = R \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + W_a \left(\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 \right)$$

eller naar W_a er lille, af

$$X = R \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

I et teknisk Skrift om Modstandsmaaling er til Belysning af denne Metode anført følgende Taleksempel:

$n_1 = 1$, $R = 10{,}000$, $\alpha_1 = 20{,}1$, $n_2 = 10$, $\alpha_2 = 9{,}8$

(heraf)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 2{,}05102$$

$$\frac{n_2}{n_1} = 10$$

$$X = 205102$$

Gennemfør Talregningen rationelt. Usikkerheden paa α_1 og α_2 kan f. Eks. sættes lig 0,2.

Opg. 7. Elementerne i en Proppe-Modstandskasse, indeholdende de 4 Modstande 1, 2, 3 og 4 Ω, er hver for sig afpassede med en Tolerans af 0,2 $^0/_{00}$. Hvad bliver den praktiske Usikkerhed paa de forskellige Kombinationer af de fire Modstande? Hvad bliver under Forudsætning af samme Tolerans paa Elementernes Afpasning Usikkerheden paa enhver Modstand i en Dekade-Modstandskasse ($10 \times 1\ \Omega$).

Opg. 8. Som antydet ovenfor vil man i overordentlig mange Tilfælde ved Reduktion til den praktiske Usikkerhed kunne regne selv meget forskellige Bidrag til Usikkerheden for lige store, saaledes at Reduktionen kan ske simpelthen ved Division med Kvadratroden af Bidragenes Antal. Undersøg, hvilke procentiske Fejl, der begaaes ved Anvendelse af den her antydede Simplifikation, naar Usikkerhedsbidragene forholder sig som:

a	1—10
b	3—10
c	5—10
d	7—10
e	1— 3—10
f	1— 7—10
g	2— 5—10
h	3— 5—10
i	5— 5—10

KAPITEL III.

PRAKTISKE REGLER FOR OVERSLAGETS UDFØRELSE.

A. Anvendelse af afledede Iagttagelser. I vort første Eksempel var o_1, o_2, o_3, d. v. s. Stillingerne af de to Skærme og Linsen i Forhold til den optiske Bænks Skala de oprindelige, primære Iagttagelser. Vi erstattede i Udtrykket for Linsens

Brændvidde de primære Iagttagelser med de afledede a og L, hvor

$$a = o_2 - o_1$$
$$L = o_3 - o_1$$

De afledede Iagttagelser er, som det ses, i Virkeligheden Maalinger — her af to Længder. Som det vil erindres, var det ikke alene i Udtrykket for Brændvidden, at vi erstattede de primære Iagttagelser med de afledede, men vi indførte ogsaa a og L i vort Udtryk for Resultatets Usikkerhed og betragtede faktisk de to Størrelser som af hinanden uafhængige Iagttagelser. At der ingen Indvendinger kunde rettes herimod i det anførte Eksempel, var indlysende, men lige saa indlysende er det, at afledede Iagttagelser ikke i ethvert Tilfælde kan betragtes som af hinanden uafhængige Iagttagelser, hvis Afvigelser fra deres sande Værdier uafhængigt af hinanden kan forudsættes lige saa godt at kunne gaa til den ene som til den anden Side. Afledede Iagttagelser kan naturligvis i Almindelighed kun betragtes som uafhængige af hinanden, naar de virkeligt er det, det vil sige, naar de ikke indeholder fælles primære Iagttagelser. Behandler man afledede Iagttagelser, der er bundne til hinanden ved saadanne, som ubundne Iagttagelser, løber man den Risiko, at man i een afledet Iagttagelse forudsætter den fælles primære Iagttagelses Afvigelse positiv og samtidigt i en anden negativ, hvorved man naturligvis føres til en falsk Værdi for Resultatets Usikkerhed.

Nu synes det rigtignok, som om vi netop i vort Eksempel har betragtet bundne, afledede Iagttagelser som frie. — a og L er jo begge udtrykt ved o_1. I Virkeligheden har vi dog kun tilsyneladende gjort det. I Overslaget forudsætter vi nemlig Iagttagelserne o_1 og o_3 uden Usikkerhed. Forholdene stiller sig da faktisk, som om der kun var een primær Iagttagelse o_2, og Indførelse af en afledet Iagttagelse a for denne giver naturligvis ikke Anledning til nogen Modsigelse af den ovenfor antydede Art. Vi vil nu imidlertid gennem et Eksempel belyse den Forfalskning af Overslagets Værdi for

Usikkerheden, som Behandlingen af bundne, afledede Iagttagelser som ubundne, primære, kan medføre. Vi fandt i Eksemplet pg. 58, at Usikkerheden paa Bestemmelsen af Brydningsforholdet ved Prismemetoden, hvor

$$n = \frac{\sin\frac{a+p}{2}}{\sin\frac{p}{2}}$$

var

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{a}{2}\cot\frac{a+p}{2}\cdot\frac{\Delta a}{a} + \frac{p}{2}\left(\cot\frac{a+p}{2} - \cot\frac{p}{2}\right)\frac{\Delta p}{p}$$

Det kunde nu være fristende ved Beregningen af $\frac{\Delta n}{n}$ at indføre to afledede Iagttagelser:

$$N = \sin\frac{a+p}{2} \text{ og } M = \sin\frac{p}{2}$$

Vi vilde da faa

$$n = \frac{N}{M}$$

og i Følge en Regneregel, vi straks skal lære at kende

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta M}{M},$$

hvor da

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2}\cot\frac{a+p}{2}\cdot(\Delta a + \Delta p), \left(\frac{\Delta N}{N}\right)_p = \frac{0{,}70}{7200}$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{2}\cot\frac{p}{2}\Delta p, \left(\frac{\Delta M}{M}\right)_p = \frac{0{,}85}{7200}$$

forudsat ligesom ovenfor pg. 59, at

$$\Delta a = \Delta p = 0{,}5', \; a = 30^0, \; p = 60^0.$$

Usikkerheden paa n vilde altsaa blive

$$\frac{\Delta n}{n} = 0{,}16\ {}^0/_{00},$$

mens den rigtigt beregnet bliver 0,11 $^0/_{00}$.

Den praktiske Grænseusikkerhed bliver, da M og N bidrager lige meget til Resultatets Usikkerhed, 0,11 $^0/_{00}$ mod 0,08 $^0/_{00}$ ved den rigtige Beregningsmaade.

Fejlen, vi har begaaet, er tydelig nok den, at vi i ΔN har forudsat Δp positiv, men i ΔM negativ, hvad naturligvis er urimeligt, da Δp betyder det samme i Udtrykkene for ΔN og ΔM.

I andre Tilfælde kan Resultatet af det »fejlagtigt udførte« Overslag blive rigtigt. Saaledes ved Bestemmelsen af en stor Modstand ved Forholdsmaaling. Indskydes først i en Jævnstrømskres den ubekendte Modstand x, og faar vi derved paa Kresens Strømmaaler Udslaget a_0, derpaa den kendte Modstand R, hvorved Udslaget gaar ned til a, haves

$$x = R \cdot \frac{a}{a_0 - a}$$

Indfører vi her for $a_0 - a$ den afledede Iagttagelse b, faaes

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b},$$

hvor

$$\Delta b = \Delta a + \Delta a_0 = 2\,\Delta a$$

Udtrykket for $\frac{\Delta x}{x}$ haves umiddelbart uden nogen Opskrivning og Beregningen af Talværdien for $\frac{\Delta x}{x}$ kan ske i Hovedet. Prøver vi her at indsætte b for at kontrollere Udtrykkets Rigtighed, faaes:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{a_0 + a}{a_0 - a} \cdot \frac{\Delta a}{a},$$

altsaa netop det samme, som vi finder, naar vi ikke indfører den afledede Iagttagelse. Aarsagen hertil er naturligvis den, at vi her ikke har tillagt Δa — den fælles oprindelige Iagttagelses Usikkerhed — modstridende Fortegn. Det vil da nu forstaaes, at vi naturligvis godt kan regne med afledede Iagttagelser i vore Overslag selv i Tilfælde, hvor disse er »bundne«, naar vi blot holder Regnskab med de Fortegn, vi giver de oprindelige Iagttagelsers Usikkerhed, altsaa sørger for, at de bliver, som de skulde være i det korrekte Overslag. Imidlertid vil Simplifikationen ved Indførelsen af afledede Iagttagelser derved i Almindelighed blive i høj Grad problematisk. Som Regel gælder det, at kun hvis de afledede Iagttagelser kan betragtes som oprindelige af hinanden uafhængige Iagttagelser, bliver det fordelagtigt at indføre dem i Overslaget.

Undtagelser eksisterer imidlertid fra denne Regel, hvad vi kan belyse ved et Par Eksempler. Modstandsforholdet er ved Wheatstones Bro bestemt ved

$$f = \frac{r_1}{r_2} = \frac{l_1}{L - l_1}$$

l_1 = Kontaktstillingen.
L = Traadens Længde.

Sættes $L - l_1 = l_2$ bliver

$$f = \frac{l_1}{l_2}$$

En Afvigelse Δl_1 fra den rigtige Værdi for l_1 og Δl_2 fra den sande Værdi for l_2 vilde paa f give en Afvigelse, der relativt er

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta l_1}{l_1} - \frac{\Delta l_2}{l_2}$$

et Udtryk, der let huskes.

Dersom Usikkerheden nu gør l_1 Δl_1 for stor, maa den nødvendigvis samtidigt gøre l_2 det samme Beløb for lille. Altsaa bliver den fra Usikkerheden hidrørende Afvigelse i f bestemt ved

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_1}{l_2}$$

Til dette naturligvis rigtige Udtryk naar vi altsaa meget let uden nogen som helst Opskrivning. Indsættelse af Talværdier kan ligeledes ske uden saadan. Hvis Indstillingsusikkerheden ved en Bro paa 1000 mm er 0,1 mm, vil $\frac{\Delta f}{f}$ paa Midten af Broen være 0,4 $^0/_{00}$. Det er utvivlsomt i dette Tilfælde fordelagtigst at benytte den her antydede Teknik for Overslaget, fordi dette da let kan udføres i Hovedet, hvad det vanskeligt kan, hvis man ikke indfører l_2 for $L - l_1$.

Paa samme Maade ses den relative Usikkerhed paa Bestemmelsen af Lysstyrkeforholdet ved Fotometerbænken at blive

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2\,\Delta l_1}{l_1} + \frac{2\,\Delta l_1}{l_2}$$

altsaa det samme, som det vilde blive, hvis de to Lampers Afstande fra Fotometret hver havde en Usikkerhed lig Fotometrets Indstillingsusikkerhed, og Bestemmelsen af l_1 iøvrigt var uafhængig af l_2.

Naturligvis er det tilladt ved Opstilling af Udtrykket for Resultatets Usikkerhed foreløbigt at indføre afledede Funktioner, hvis dette anses for en Lettelse. Under hele Regningen maa vi da blot konsekvent tillægge enhver af de til Usikkerheden svarende Afvigelser uforandret Fortegn, eller rettere lade Fortegnet være ubestemt. Vi ender saa med at ordne Udtrykket for Resultatets Usikkerhed i Led svarende til de enkelte, oprindelige Iagttagelser, og først nu fastslaar vi de Fortegn, der maa forudsættes for disse Iagttagelsers Afvigelse.

For Eks. $$x = R \cdot \frac{a}{a_0 - a}.$$

Om vi vil, kan vi sætte

$$x = R \cdot \frac{N}{M}.$$

Vi har da $\Delta N = \Delta a$

$\Delta M = \Delta a_0 - \Delta a$ (ikke $\Delta a_0 + \Delta a$)

og $$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta N}{N} - \frac{\Delta M}{M} \left(\text{ikke } \frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta M}{M} \right)$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a_0 - \Delta a}{a_0 - a} = \frac{a_0 \Delta a - a \Delta a_0}{a (a_0 - a)}$$

For nu at faa Grænseusikkerheden maa Δa_0 forudsættes negativ, og idet vi sætter $\Delta a = \Delta a_0$ (nummerisk), faaes

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{a_0 + a}{a_0 - a} \cdot \frac{\Delta a}{a}$$ som ovenfor.

Her er, som det ses, ikke Tale om Indførelsen af afledede Iagttagelser, der betragtes som frie, men blot om en maaske mere praktisk Regnemetode for at naa til Udtrykket for Resultatets Grænseusikkerhed.

B. Summationsreglen gældende for logaritmiske Udtryk. Vi skal nu lære en Regel at kende, efter hvilken Usikkerheden i mange Tilfælde umiddelbart kan angives uden forudgaaaende Opskrivning af Formler og Indsættelse i saadanne.

Det forekommer overordentlig hyppigt, at Resultatet er Forholdet mellem to Iagttagelser. Vægtfylden er saaledes Forholdet mellem Vægt og Opdrift, den elektriske Modstand er ved Anvendelse af en simpel — kendt — Metode lig Forholdet mellem Kresens elektromotoriske Kraft og Strømmen i Kresen, Galvanometrets Følsomhed er Forholdet mellem Udslaget og Strømmen, der bevirker Udslaget o. s. v. o. s. v. Vi kan under eet udlede Udtrykket for Usikkerheden i alle disse Tilfælde. Da $R = \frac{o}{p}$, hvor o og p er fuldstændig uafhængige af hinanden, haves log.nat. R = log.nat. o — log.nat. p, altsaa: $$\left(\frac{\Delta R}{R} \right)_t = \frac{\Delta o}{o} + \frac{\Delta p}{p}$$

Her staar at læse: Den relative Usikkerhed paa Forholdet mellem to af hinanden uafhængige Iagt-

tagelser er lig Summen af Iagttagelsernes relative Usikkerheder.

Det samme gælder selvfølgelig den procentiske Usikkerhed. Er altsaa et Legemes Vægt bestemt med en Usikkerhed paa 0,1 ‰, Opdriften med en Usikkerhed paa 0,2 ‰, bliver Vægtfyldebestemmelsens ikke reducerede Usikkerhed 0,3 ‰.

Det betragtede Tilfælde gaar nu i Virkeligheden ind under en mere almindelig Regel. Er Resultatet f. Eks. givet ved

$$R = \frac{a\sqrt{b}}{c^m}$$

haves

$$\text{log.nat. } R = \text{log.nat. } a + {}^1/_2 \text{ log.nat. } b - m \text{ log.nat. } c$$

og altsaa

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \frac{\Delta a}{a} + {}^1/_2 \frac{ab}{b} + m \cdot \frac{\Delta c}{c}$$

Vi erkender af dette Eksempel følgende almindelige Regel: Naar Udtrykket for Resultatet er logaritmisk, faas den (teoretiske) relative Usikkerhed ved at opsummere de enkelte Iagttagelsers relative Usikkerheder multiplicerede med Iagttagelsernes Potenseksponenter.

Bestemmelsen af en Traads Tværsnitsareal S har altsaa en dobbelt saa stor Usikkerhed som Bestemmelsen af Diametren D, idet $S = \frac{\pi}{4} D^2$. Usikkerheden paa en Kugles Volumen, bestemt ved Udmaaling af Diametren, bliver $3 \frac{\Delta D}{D}$.

Inertimomentet af et regelmæssigt Legeme med Hensyn til en Akse for dette Legeme kan vi tænke os bestemt ved at hænge Legemet op, saa det kan udføre Torsionssvingninger om Aksen. Benyttes som Ophængning en Metaltraad, hvis Direktionskraft h i Forvejen er maalt, og iagttages Svingningstiden t, vil Inertimomentet I være givet ved

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{I}{h}}.$$

Af dette Udtryk fremgaar uden nogen Opskrivning, at den teoretiske Usikkerhed paa I bliver 2 Gange Usikkerheden paa t plus Usikkerheden paa h.

Afrunding til logaritmisk Udtryk. Summationsreglen, der gør Overslaget over Usikkerheden til saa simpel en Sag, gælder, det maa naturligvis erindres, eksakt kun, naar Udtrykket for Resultatet er logaritmisk. I ikke faa Tilfælde kan vi imidlertid, selv naar Udtrykket ikke er logaritmisk, anvende Reglen, nemlig naar Funktionsafhængigheden praktisk set kan betragtes som logaritmisk -- eller sagt med andre Ord, naar Funktionsafhængigheden til Brug for Overslaget kan afrundes, saa den bliver logaritmisk. Til Belysning af saadan tilladelig Funktionsafrunding skal vi betragte et Par Eksempler.

Krumningsradius i et Hulspejl skal maales. Det sker ved et Sfærometer, der anbringes direkte paa Spejlet. Sfærometret har først været indstillet paa en plan Glasplade (Indstilling o_o), nu stilles det ind paa den krumme Overflade (Indstilling o), $o - o_o = d$ er da Højden af den Kuglekalot, hvis Randcirkel gaar igennem Sfærometrets Fødder. Lad Afstanden mellem disse være a, saa er Cirklens Radius $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$, og Hulspejlets søgte Radius R bliver at bestemme ved

$$R = \frac{d}{2} + \frac{r^2}{2d} = \frac{d^2 + r^2}{2d}$$

Opstiller vi nu Udtrykket for $\frac{\Delta R}{R}$, idet vi forudsætter en vis Usikkerhed baade paa Udmaalingen af d og r, faas

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{d^2 - r^2}{d^2 + r^2} \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{2r^2}{d^2 + r^2} \cdot \frac{\Delta r}{r}.$$

Nu kan Talværdierne ved en Maaling for Eksempel stille sig saaledes

r = ca. 35 mm	r^2 = ca. 1200
d = ca. 3 mm	d^2 = ca. 9

d^2 er altsaa kun ca. 1 % af r^2 og kan derfor i vor Regning bortkastes i Størrelserne $d^2 - r^2$ og $d^2 + r^2$. Derved simplificeres Udtrykket for Usikkerheden betydeligt. Det bliver

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta d}{d} + 2\frac{\Delta r}{r}$$

d. v. s. det samme, som Regnereglen ovenfor vilde have ført til, hvis vi i Udtrykket for R:

$$R = \frac{d^2 + r^2}{2d}$$

straks havde bortkastet d^2 i Leddet $d^2 + r^2$, altsaa afrundet Funktionen til den logaritmiske $R = \frac{r^2}{2d}$.

Vi anfører et andet Eksempel, der overordentlig tydeligt belyser den Simplifikation, Afrunding af Funktionsafhængigheden kan betyde. Fig. 14 viser skematisk en Wheatstones

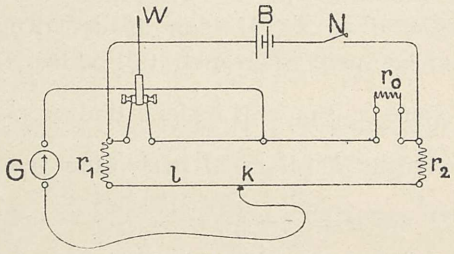

Fig. 14.

Bro bestemt til at maale den relative Modstandsforøgelse $\frac{W - W_0}{W_0}$, en Wismutspiral W faar, naar den indføres i et magnetisk Felt. Ved den relative Modstandsforøgelse kan man som bekendt maale Feltet. Brosystemet adskiller sig fra den almindelige Traadbro kun derved, at passende Modstande r_1 og r_2 er indskudt for Enderne af Traaden. Kaldes Modstanden pr. Længdeenhed i Traaden g, Traadens Længde L, Stillingen

af Kontakten k, svarende til Feltet 0, l_0, til Feltet, der maales, l, vil Modstandsforøgelsen være bestemt ved Udtrykket:

$$\frac{W-W_0}{W_0} = \frac{(r_1+r_2+Lg)\,g\,(l-l_0)}{(r_1+l_0g)\,(r_2+(L-l_0)\,g)} \cdot$$

$$\left[1+\frac{g}{(r_2+(L-l_0)\,g)}(l-l_0)+\frac{g^2}{(r_2+(L-l_0)\,g)^2}(l-l_0)^2+..\right]$$

Som det ses, er Udtrykket givet i Form af en Rækkeudvikling efter stigende Potenser af $(l-l_0)$ eller Kontaktforskydningen.

Ved en saadan Opstilling var i et givet Tilfælde:

$r_1 = 10\ \Omega$ $\qquad$ $L = 50$
$r_2 = 7$ - $\qquad$ $l_0 =$ ca. 10
$r_0 = 25$ -
$g =$ ca. $^3/_{100}$

Vi vil undersøge, hvilken Sikkerhed Brosystemet tillader i Bestemmelsen af $\frac{W-W_0}{W_0}$. Vi forudsætter r_1 og r_2 afpassede med $3\,^0/_{00}$ Sikkerhed, Kontaktstillingen aflæst med en Sikkerhed 0,02 og g bestemt med $3\,^0/_{00}$ Sikkerhed. Vi lægger da først Mærke til, at Funktionsafhængigheden i det væsentlige er given ved første Led. Hvis vi regner Kontaktforskydningen saa stor som mulig, d. v. s. ca. 40, bliver andet Led indenfor Paranthesen ca. $^1/_7$, tredie ca. $^1/_{49}$; disse Led kan vi derfor se bort fra i Overslaget og altsaa sætte

$$\frac{W-W_0}{W_0} = F = \frac{(r_1+r_2+Lg)\,g\,(l-l_0)}{(r_1+l_0g)\,(r_2+(L-l_0)\,g)}$$

Dette Udtryk kan yderligere afrundes til

$$F = \frac{r_1+r_2}{r_1\,r_2} \cdot g \cdot (l-l_0)$$

Sættes $\frac{r_1 + r_2}{r_1\ r_2}$ foreløbig lig a og $l - l_0 = dl$ haves

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta (dl)}{dl}$$

Her vil nu

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_t = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\Delta r_2}{r_2}$$

eller da $\frac{\Delta r_1}{r_1} = \frac{\Delta r_2}{r_2}$

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_t = 2 \cdot \frac{\Delta r_1}{r_1} = 2 \cdot \frac{3}{1000} = \frac{6}{1000}$$

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_p = \frac{6}{1000\sqrt{2}} = \frac{4}{1000},$$ idet Reduktionsfaktoren er $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Endvidere bliver

$\frac{\Delta (dl)}{dl} = \frac{2 \cdot 0{,}02}{40 \cdot \sqrt{2}} = \frac{0{,}7}{1000}$, forudsat at Forskydningen er 40. Er der for Eks. kun 10, bliver $\frac{\Delta (dl)}{dl} = \text{ca.}\ \frac{3}{1000}$. Regner vi hermed, faaes endelig

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right)_t = \frac{4}{1000} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{10}{1000}$$

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right)_p = \frac{10}{1000\sqrt{3}} = \frac{6}{1000} \approx 6\ {}^0/_{00}.$$

Nærmere Belysning af Funktionsafrundingen ved Overslaget over Usikkerheden. Afrundingen af Funktionen til et logaritmisk Udtryk betyder for Overslaget en overordentlig Simplifikation og bør derfor omhyggelig indøves. Imidlertid er det derved af den største Vigtighed, at man bliver klar over Afrundingens Natur. Hvad vi har Lov at gøre, er til Brug for Overslaget at erstatte en Funktionsafhængighed med

en anden simplere, der indenfor Usikkerhedsintervallet kun afviger uvæsentligt fra den virkelige. Naar vi afrunder $R = \frac{d}{2} + \frac{r^2}{2d}$ i Eksemplet ovenfor til $R = \frac{r^2}{2d}$, er det faktisk dette, vi gør. I Fig. 15 gengiver *a b c* den virkelige Funktionsafhængighed mellem R og r, *a' b' c'* den, vi sætter i Stedet. Med de i Eksemplet forudsatte Talværdier er den lodrette Afstand $\frac{d}{2}$ mellem Kurverne ca. 1,5 mm, mens R svarende til $r = 35$ er ca. 700 mm. Den relative Fejl, der begaaes ved Funktionsafrundingen, er praktisk set lig den relative Fejl paa R, som atter er $\frac{1,5}{200} = 7,5\ ‰$.

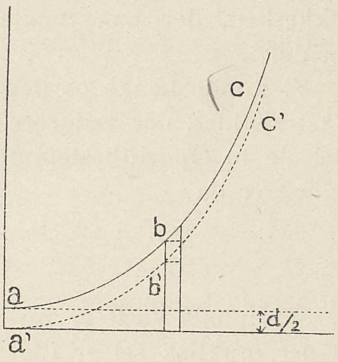

Fig. 15.

Denne Fejl er naturligvis ganske forsvindende. — I Fig. 16 er Afrundingen af Funktionsafhængigheden mellem R og d anskueliggjort. Divergensen mellem den virkelige Afhængighed *a b c* og den afrundede er dog overordentlig mange Gange forstørret.

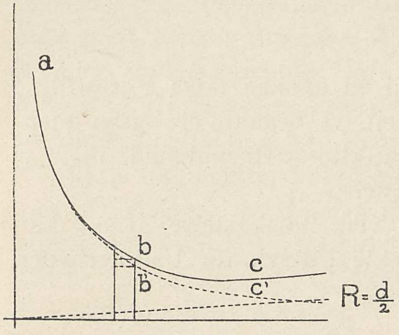

Fig. 16.

Naar d i vort Eksempel kan bortkastes, er det derfor i Følge det nu anførte ikke i og for sig, fordi d er lille. Bortkastelse af en Størrelse i Udtrykket, der benyttes i Overslaget over Usikkerheden, kan være ganske meningsløs, selv om Størrelsen er saa lille, at den praktisk set falder bort ved Resultatets Beregning. Denne Erkendelse vil vi belyse ved et Eksempel.

Ved Bestemmelse af en Væskes Vægtfylde ved Westphals Vægt foretages som bekendt følgende Indstillinger: 1^0 Afbalancering med Glaslegemet i Luft, 2^0 den tilsvarende Afbalancering med Glaslegemet hængende ned i Vand, 3^0 Afbalancering med Glaslegemet i den Væske, der maales paa. Hver Afbalancering kan i Almindelighed foretages med en Sikkerhed, der kan maales ved Loddet $^1/_{1000}$ forskudt Armen $^1/_{10}$.

Vi kunde tænke os den første Afbalancering foretaget ved Ekstralodder, der reducerede til Armen 1 var o_0. Lodderne ved de to Opdriftbestemmelser betegner vi o_1 og o_2. Vægtfylden er da

$$f = \frac{o_2 - o_0}{o_1 - o_0}$$

Westphals Vægt er nu i Almindelighed saaledes afpasset, at der praktisk set er Ligevægt i Luft. o_0 er altsaa Nul eller meget lille. Hvis vi heraf sluttede, at vi i Overslaget over Usikkerheden turde regne med

$$f = \frac{o_2}{o_1}$$

saa at

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_t = \frac{\Delta o_1}{o_1} + \frac{\Delta o_2}{o_2}$$

vilde vi i visse Tilfælde føres til en ganske falsk Forestilling om Usikkerheden. Men den Fejl, vi begaar, er ogsaa øjensynlig. Vi afrunder ikke en Funktionsafhængighed, men vi ser ganske bort fra en bestaaende.

Hvor stor Fejlen kan blive ved Bortkastelse af o_0, kan vi se ved at opskrive det korrekte Udtryk for Usikkerheden $\frac{\Delta f}{f}$. Dette bliver

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{o_2 - o_1}{o_2 - o_0} \cdot \frac{\Delta o_0}{o_1 - o_0} + \frac{\Delta o_1}{o_1 - o_0} + \frac{\Delta o_2}{o_2 - o_0}$$

Her tør vi i Almindelighed sætte $o_0 = 0$. Men derved forsvinder første Led ikke. Vi faar

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{o_2 - o_1}{o_2 \cdot o_1} \cdot \Delta o_0 + \frac{\Delta o_1}{o_1} + \frac{\Delta o_2}{o_2}$$

Fejlen, vi begaar ved at regne med $f = \frac{o_2}{o_1}$, er altsaa $\frac{o_2 - o_1}{o_1\ o_2} \cdot \Delta o_0$. Dette Led bliver kun Nul, hvis $o_2 = o_1$, altsaa hvis Væsken, vi maaler paa, har væsentlig samme Vægtfylde som Vand.

Skjulte Iagttagelser. En Usikkerhedskilde som o_0 i vort Eksempel glemmes saa meget lettere, som man sjældent vil anføre o_0 i Udtrykket for Resultatet, og det jo dog er dette Udtryk, vi i Almindelighed gaar ud fra ved Opstilling af Overslaget over Usikkerheden. o_0 er, hvad man kunde kalde en skjult Iagttagelse. Skjulte Iagttagelser, der er Kilder til Usikkerhed, forekommer ikke sjældent. Nulpunktsiagttagelsen paa et Viserinstrument er en saadan. Saa længe ingen Nulpunktsfejl er til Stede, behøver man vel næppe at regne med nogen kendelig Usikkerhed fra denne Side; men i det Øjeblik, Systemet faar en Nulpunktsfejl, gør Nulpunktsiagttagelsen sig gældende lige saa vel som Udslagsiagttagelsen. Ved Bestemmelsen af enhver Størrelse, der i væsentlig Grad afhænger af et eller andet Forhold, for Eks. Temperaturen, maa dette Forhold karakteriseres, hvad der i Almindelighed sker ved en Maaling eller Iagttagelse. Denne Iagttagelse kan betragtes som en skjult Iagttagelse, hvis Usikkerhedsbidrag ikke maa glemmes i Overslaget. Af Hensyn til Regnskabet med Usikkerheden kunde der derfor være Grund til at medtage denne og andre skjulte Iagttagelser i Udtrykket for Resultatet, saaledes som det nedenfor skal antydes.

C. Den relative Iagttagelsesusikkerheds Uafhængighed af Enheden. Lad os antage, at vi maaler en stor Modstand (f. Eks. 100—200 Ohm) ved at indskyde den i en Strømkres, der iøvrigt kun indeholder et Milliampèremeter og

et Element, hvis elektromotoriske Kraft e i Forvejen er maalt ved et Voltmeter. Milliampèremetret angiver da den Strøm i, som Elementet er i Stand til at sende gennem Kresen. Da dennes hele Modstand praktisk set ligger i den ubekendte Modstand, er

$$x = \frac{e}{i},$$

altsaa

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta i}{i}$$

Husker vi nu paa, at e og i er proportionale henholdsvis med Udslagene a og b paa Voltmetret og Milliampèremetret, haves

$$e = k_1 a,\ i = k_2 b$$

saa at

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta a}{a},\ \frac{\Delta i}{i} = \frac{\Delta b}{b}$$

og altsaa

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

d. v. s. den relative Usikkerhed paa vor Maaling er ligefrem Summen af de relative Usikkerheder paa Bestemmelserne af Udslagene a og b. Usikkerheden er alene bestemt ved Udslagene. Er disse for Eks. ca. 40 og 100 og sættes $\Delta a = \Delta b = {}^1/_{10}$ Inddeling, faaes

$$\left(\frac{\Delta x}{x}\right)_t = \frac{1}{400} + \frac{1}{1000} = \text{ca.}\ \frac{4}{1000}\ \text{eller}\ 4\,{}^0/_{00},\ \left(\frac{\Delta x}{x}\right)_p = 3\,{}^0/_{00}.$$

D. Den relative Usikkerhed er den samme for en Funktion og dens Reciprokfunktion. Vi vil til Slutning bevise en almindelig Sætning, som ikke er uden praktisk Interesse. Lad et Resultat

$$R_1 = C_1 \cdot f(o, p, q \ldots)$$

Usikkerhed paa o, p, q o. s. v. vil da give Anledning til en vis Usikkerhed paa R_1, som vi har lært at opstille det al-

mindelige Udtryk for. Hvis nu en anden Gang Resultatet

$$R_2 = C_2 : f(o, p, q \ldots)$$

vil Udtrykket for R_2' relative Usikkerhed blive ganske det samme som Udtrykket for R_1' ovenfor.

Det fra o hidrørende Bidrag til Usikkerheden er i første Tilfælde

$$\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)_o = \frac{o \cdot \frac{\delta R_1}{\delta o}}{R_1} \cdot \left(\frac{\Delta o}{o}\right)$$

I andet

$$\left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)_o = \frac{o \cdot \frac{\delta R_2}{\delta o}}{R_2} \cdot \left(\frac{\Delta o}{o}\right)$$

Nu er

$$R_2 = \frac{C}{R_1}$$

og

$$\frac{\delta R_2}{\delta o} = \frac{\delta R_2}{\delta R_1} \cdot \frac{\delta R_1}{\delta o} = -C \cdot \frac{1}{{R_1}^2} \cdot \frac{\delta R_1}{\delta o}$$

altsaa

$$\left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)_o = \frac{o \cdot \left(\frac{\delta R_1}{\delta o}\right)}{R_1} \cdot \left(\frac{\Delta o}{o}\right) \text{ (numerisk).}$$

Eksempel. Ved Maaling af et Voltmeters Modstand kan man først iagttage Voltmetrets Udslag α_o, idet en passende Spændingskilde sættes paa dets Klemmer, derpaa Udslaget α, naar der foran Voltmetret indskydes en kendt Modstand R. Idet Spændingskilden forudsættes uforandret, vil Voltmetrets Modstand være bestemt ved

$$R_v = R \cdot \frac{\alpha}{\alpha_o - \alpha}$$

Under Forudsætning af en og samme Usikkerhed $\Delta\alpha$ paa α_o og α, faaes for Usikkerheden paa Bestemmelsen af Voltmetrets Modstand

$$\frac{\Delta R_v}{R_v} = \frac{\alpha_o + \alpha}{\alpha_o - \alpha} \cdot \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)$$

Dersom vi herefter vender Maalingen om, idet vi bestemmer en ubekendt Modstand R ved Sammenligning med Voltmetrets nu kendte Modstand R_v, bliver Udtrykket for R' fra α_o og α hidrørende Usikkerhed ganske det samme som det for $\frac{\Delta R_v}{R_v}$ udledte.

Heraf kan, som vi senere vil forstaa, drages visse videregaaende Slutninger. Det kan bemærkes, at det ovenfor udledte Udtryk er af betydelig Interesse, da den Maaling, hvis Usikkerhed det gengiver, repræsenterer en almindelig Sammenligningsmetode.

Opgaver.

Opg. 1. Som bekendt kan man maale en Modstand ved at sende en passende Strøm i gennem den og iagttage denne Strøm og det Spændingsfald p, Strømmen giver Anledning til i Modstanden. I Almindelighed vil Strømmaaleren være indskudt saaledes i Kresen, at den viser ikke alene den Strøm, der gaar gennem Modstanden x, men ogsaa den, der gaar gennem Voltmetret. Kaldes den direkte aflæste Strøm da I, Voltmetrets Modstand r_v, vil

$$x = \frac{p}{i} = \frac{p}{I - \frac{p}{r_v}}$$

Vi antager, at den søgte Modstand er ca. 1 Ω, og at Maalestrømmen vælges ca. 2 Amp. Strømmen vil vi maale ved et Siemens-Halskes Millivoltmeter med Shunt $100^0 = 3$ Amp. Spændingsfaldet med et Weston Voltmeter $100^0 = 2$ Volt og med en Modstand 300 Ω. Vi forudsætter en Aflæsesikkerhed $0{,}1^0$ og en Afpasningstolerans for Skalaerne paa $0{,}2^0$. Hvad bliver Usikkerheden paa Bestemmelsen af x, og ved hvilket Udtryk bør den beregnes?

Opg. 2. For at bestemme et Galvanometers Følsomhed, d. v. s. Udslaget for Strømmen 1 ved en Skalaafstand lig 1 m,

kan man benytte den i Fig. 17 antydede Opstilling. Med de i denne indførte Betegnelser vil Strømmen gennem Galvanometret blive

$$i_g = \frac{E}{\frac{r_g \cdot R}{r} + R + r_g}$$

Iagtages for denne Strøm et Udslag α og er Maalestoksafstanden L, bliver Følsomheden

$$F = \frac{\alpha}{i_g \cdot L}$$

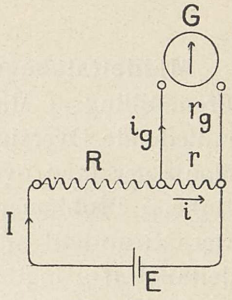

Fig. 17.

Vi antager følgende omtrentlige Værdier for de indgaaende Størrelser:

$E = 1{,}5$ Volt, $R = 10000$, $r = 1$, $r_g = 500\ \Omega$, $\alpha = 30$ cm og $L = 2$ m.

Usikkerheden paa Bestemmelsen af F skal da beregnes, idet det forudsættes, at

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{1000}, \frac{\Delta r_g}{r_g} = \frac{1}{1000}, \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{3}{1000}$$ (Afpasningstolerans), $\Delta\alpha = 0{,}02$ cm, $\Delta L = 0{,}1$ cm.

Opg. 3. Modstanden i Galvanometret kan under Forudsætning af, at Udslaget er proportionalt med Strømmen gennem Galvanometret, bestemmes ved Iagttagelse først af det Udslag α_0, der faaes ved en Opstilling som den i Fig. 17 viste, derpaa af det Udslag α, der med iøvrigt uforandret Opstilling, findes ved Indskydelse af en kendt Modstand R_0 i Række med Galvanometret. Lad $\alpha_0 = 30$ cm, $\alpha = 20$ cm, $\Delta\alpha_0 = \Delta\alpha = 0{,}02$ cm og Afpasningsusikkerheden paa R_0 $\frac{\Delta R_0}{R_0} \sim 3\,{}^0/_{00}$ hvad bliver da Usikkerheden paa Bestemmelsen af r_g? Om de øvrige i Opstillingen indgaaende Modstande og om Kresens elektromotoriske Kraft forudsættes intet bekendt.

KAP. IV.

»DEN BEDSTE VÆRDI« VED GENTAGELSER MED FORSKELLIG SIKKERHED.

Middeltalsbegrebet i udvidet Forstand. Vi gaar i vor Fremstilling af Maaletekniken, som allerede fremhævet i den indledende Oversigt, ikke nærmere ind paa de Problemer som Maalinger med overskydende Iagttagelser giver Anledning til. Enkelte Problemer af mere almindelig Interesse vil der dog være Grund til at fremdrage. Vi har allerede betragtet Middeltallet af n Iagttagelser foretagne under uforandrede Forhold og derfor af samme Sikkerhed (simple Gentagelser). Det falder nu ikke sjældent for, at man under Gentagelse varierer et eller andet Forhold for at kontrollere, om dette Forhold rummer nogen Kilde til Fejl. Det er da ikke givet, at de Værdier, Gentagelserne resulterer i, alle har samme Sikkerhed. Har de det ikke — eller har de ikke i det væsentlige samme Sikkerhed — vil man ikke simpelthen tage Middeltallet af Gentagelserne. Middeltallet er nemlig under disse Forhold ikke den bedste Værdi, der kan udledes af Gentagelserne. Et Eksempel viser tydeligt dette. Lad Gentagelsernes Antal være to. Den ene Bestemmelse tænkes at have Sikkerheden 1 $^0/_{00}$, den anden 1 $^0/_0$. Middeltallets Sikkerhed vil da praktisk set blive 0,5 $^0/_0$ altsaa 5 Gange mindre end den bedste Bestemmelses. Dette ses af følgende Udvikling. De to Bestemmelser er r_1 og r_2, Middeltallet

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

dets teoretiske Grænseusikkerhed

$$\Delta R = \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{2}$$

eller

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta r_2}{r_2}$$

da $r_1 = r_2$.

I det betragtede Tilfælde faaes altsaa

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = 0{,}5\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{100}\right) = \frac{0{,}55}{100}$$

mens den praktiske bliver

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = \frac{\sqrt{101}}{11} \cdot \frac{0{,}55}{100} \sim \frac{0{,}5}{100}$$

For at faa det bedst mulige Resultat ud af Gentagelserne $r_1\ r_2\ r_3$ o. s. v. gaar vi frem paa følgende Maade. Vi tillægger hver af Bestemmelserne en vis Vægt h, d. v. s. vi regner Bestemmelsen h-dobbelt ved Beregning af Middeltallet. Jo større Bestemmelsens Sikkerhed er, desto flere Gange skal den regnes med. Kaldes de til $r_1\ r_2\ r_3$ . . svarende Vægte $h_1\ h_2\ h_3$ . . ., beregnes Resultatet altsaa ved

$$R = \frac{h_1 r_1 + h_2 r_2 + h_3 r_3 + \cdot\cdot}{h_1 + h_2 + h_3 + \cdot\cdot}$$

Vi vil tænke os, at vi har Talmaal for den relative Usikkerhed paa hver af Bestemmelserne, og skal da finde de Værdier af $h_1\ h_2$ . ., der giver den sikreste Værdi for Resultatet R. Vi kan indskrænke os til at betragte det Tilfælde, hvor Gentagelsernes Antal kun er 2. Vi har da

$$R = \frac{h_1 r_1 + h_2 r_2}{h_1 + h_2}$$

Vi sætter:

$$\frac{\Delta r_1}{r_1} = a_1 \text{ og } \frac{\Delta r_2}{r_2} = a_2$$

Den relative Usikkerhed paa R bliver

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \frac{h_1 r_1}{h_1 r_1 + h_2 r_2} \cdot a_1 + \frac{h_2 r_2}{h_2 r_2 + h_2 r_2} a_2 \text{ eller da } r_1 = r_2$$

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \cdot a_1 + \frac{h_2}{h_1 + h_2} \cdot a_2$$

Den praktiske relative Usikkerhed bliver følgelig:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = \sqrt{\left(\frac{h_1}{h_1 + h_2}\right)^2 a_1^2 + \left(\frac{h_2}{h_1 + h_2}\right)^2 a_2^2}$$

Søges nu den Værdi for Forholdet $\frac{h_1}{h_2}$, der giver Størrelsen $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$ dens Minimumsværdi, findes

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \frac{\left(\frac{1}{a_1}\right)^2}{\left(\frac{1}{a_2}\right)^2}$$

Vægten skal følgelig vælges omvendt proportional med Kvadratet paa Bestemmelsens Grænseusikkerhed. Det vil være let at vise, at denne Regel gælder for et hvilket som helst Antal Gentagelser. Naturligvis er eller kan de Tal, vi sætter for h_1 h_2 . . være stærkt afrundede — ganske som ved Bestemmelsen af den Faktor, der reducerer den teoretiske Grænseusikkerhed til den praktiske. Naar Vægtene er valgte, kan den teoretiske Grænseusikkerhed beregnes af Udtrykket ovenfor for $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t$ og derpaa reduceres til den praktiske Grænseusikkerhed, dersom man ikke foretrækker straks at beregne denne ved Kvadratrodsudtrykket.

Vi anfører et Eksempel:

To Bestemmelser har Sikkerheder paa henholdsvis 2 og 4 $^0/_{00}$. Vi skal følgelig vælge

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{16}{4} = \frac{4}{1}$$

Vi sætter $h_1 = 4$, $h_2 = 1$. Usikkerheden paa Resultatet $R = \frac{4r_1 + r_2}{5}$ bliver

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = \frac{1}{1000}\sqrt{\frac{16}{25} \cdot 4 + \frac{1}{25} \cdot 16} = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1000} = \frac{1{,}8}{1000}$$

Havde vi regnet med simpelt Middeltal

$$R' = \frac{r_1 + r_2}{2},$$

vilde dette have faaet en Sikkerhed

$$\left(\frac{\Delta R'}{R'}\right)_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{1}{2} \frac{\Delta r_2}{r_2} = \frac{3}{1000}$$

og altsaa $\left(\frac{\Delta R'}{R'}\right)_p = \frac{3}{1000} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{1000}$, saa at

$$\left(\frac{\Delta R'}{R'}\right)_p = \frac{5}{4}\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = 1{,}25 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$$

Havde Usikkerhederne været 1 og 4 $^0/_{00}$, vilde vi have fundet

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = \frac{4}{17} \frac{\sqrt{17}}{1000} = 0{,}97\ ^0/_{00}$$

og $$\left(\frac{\Delta R'}{R'}\right)_p = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{17}}{1000} = 2{,}06\ ^0/_{00}$$

altsaa $$\left(\frac{\Delta R'}{R'}\right)_p = \text{ca. } 2 \cdot \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$$

Anm. Det er næsten indlysende, at Middeltallet $R = \frac{h_1 r_1 + h_2 r_2 \ldots}{h_1 + h_2 \ldots}$ maa være bedre end den bedste Bestemmelse, som vi kan antage er r_1. Vi kan let danne et Udtryk for Forbedringen, idet vi i Udtrykket for $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$ for $h_1\ h_2 \ldots$ sætter $\frac{1}{a_1^2}\ \frac{1}{a_2^2} \ldots$ Herved faas i Tilfælde af to Bestemmelser for Differensen mellem a_1 og Middeltallet R' Usikkerhed

$$F = \frac{a_1 \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - a_2\right)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

et Udtryk, der altid er positivt. Forbedringen bliver altsaa maalt i Forhold til a_1

$$\left(\frac{F}{a_1}\right) = f = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Maksimum faar dette Udtryk, naar $a_2 = a_1$. f bliver da $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ svarende til, at R da bliver det almindelige Middeltal, hvis Usikker-

hed er $\frac{a_1}{\sqrt{2}}$. Det er ikke uden Interesse at følge den Maade, hvorpaa f varier med $\frac{a_2}{a_1}$. Sammenhængen fremgaar af hosstaaende Tabel der tydeligt viser, hvor hurtigt Forbedringen bliver uvæsentlig, naar $\frac{a_2}{a_1}$ vokser.

$\frac{a_2}{a_1}$	Forbedring	D	Differens
1	30 %	0 %	— 30 %
2	10 -	22 -	+ 12 -
3	5 -	63 -	+ 58 -
4	3 -	110 -	+ 107 -
5	2 -	157 -	+ 155 -
10	0,5 -	400 -	+ 400 -

Man vil gennem Tabellen faa et Indtryk af, hvor lidet værdifuld den væsentlig mindre sikre Gentagelse er som Middel til at sætte Sikkerheden op. Dens Formaal vil da ogsaa sjældent være Formindskelse af Usikkerheden, men derimod Kontrol rettet mod Fejl. Staar Gentagelsen til Raadighed, og vil man benytte den ved Resultatets Beregning, saa maa det ske paa den Maade, som der her er givet Anvisning paa. Eksemplerne ovenfor belyser tydeligt, hvor urimeligt Sikkerheden vilde sættes ned ved Anvendelse af det simple Middeltal, naar der da er væsentlig Forskel paa Bestemmelsernes Sikkerhed. Det almindelige Udtryk for Forskellen mellem det simple Middeltals Usikkerhed og det korrekte bliver i Tilfælde af to Bestemmelser, naar Differensen maales i Forhold til a_1

$$D = \frac{\left(\frac{\Delta R'}{R'}\right)_p - \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p}{a_1} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)^2}{2\sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}}$$

I tredie Kolonne af Tabellen ovenfor er Differensen anført for 6 forskellige Værdier af $\frac{a_2}{a_1}$. Differensen mellem tredie og anden Kolonne anført i fjerde Kolonne vil give, hvor meget det simple Middeltal relativt er daarligere end den bedste Bestemmelse.

Man vil lægge Mærke til, at Differensen skifter Fortegn for en Værdi af $\frac{a_2}{a_1}$ mellem 1 og 2. For denne Værdi, der bliver $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{3}$, er følgelig det simple Middeltal lige saa godt som den bedste Bestemmelse. Før $\frac{a_2}{a_1}$ bliver lig $\sqrt{3}$ eller ca. 1,7, vil det simple Middeltal forbedre Bestemmelsen omend ikke saa meget som det korrekte, efter at $\sqrt{3}$ er overskreden, vil Dannelsen af det simple Middeltal formindske Bestemmelsens Godhed.

Forholdene ved flere Gentagelser er vanskeligere at diskutere. Den relative Forbedring (i Forhold til den bedste Bestemmelse) ved Dannelsen af det korrekte Middeltal bliver ved 3 Gentagelser

$$1 - \frac{a_2\ a_3}{\sqrt{(a_1\ a_2)^2 + (a_1\ a_3)^2 + (a_2\ a_3)^2}}$$

der ogsaa altid maa være positiv, og hvis største Værdi faas for $a_1 = a_2 = a_3$. Den bliver da $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vurdering af Usikkerheden i et specielt Tilfælde af Kontrolforsøg. Et Tilfælde, der meget hyppigt indtræder i den praktiske Maaleteknik, er følgende. Opgaven er for Eks. at udmaale to Modstande x_1 og x_2; man vil da ganske naturligt som Kontrol tillige maale de to Modstande indskudt i Række. Derved skulde man indenfor den ved Usikkerhederne bestemte Grænse finde Summen af Enkeltværdierne. Dersom vi nu ved en saadan Kontrol ønsker at benytte det hele Iagttagelsesmateriale til Bestemmelse af forbedrede saakaldte »udjævnede Værdier« for de to Modstande og desuden vil gøre os klart, hvilken Sikkerhed vi tør paaregne i disse udjævnede Værdier, kan dette ske paa følgende Maade. Kaldes den Værdi, vi finder for x_1 a, for x_2 b og for $x_1 + x_2$ c skulde

$$x_1 = a$$
$$x_2 = b$$
$$x_1 + x_2 = c$$

Som Følge af Usikkerheden paa a, b og c kan disse Ligninger ikke samtidigt være tilfredsstillede, men vi kan nu i

dette Tilfælde og i andre tilsvarende betragte Iagttagelsessættet som en gentaget Bestemmelse af x_1 respektive x_2. Den ene Bestemmelse for Eks. af x_1 er da simpelthen a; den anden er $c - b$. Vi kan nu, fordi a og $c - b$ i Almindelighed vil være uafhængige af hinanden — saakaldte frie Funktioner af Iagttagelserne — danne et Middeltal af dem, efter at have tillagt hver af dem en Vægt omvendt proportional med Kvadraterne paa Bestemmelsernes praktiske Grænseusikkerheder. Disse Kvadrater er henholdsvis Δa^2 og $\Delta b^2 + \Delta c^2$. Vort Middeltal bliver følgelig

$$x_1 = \frac{h_1 a + h_2 (c - b)}{h_1 + h_2} = \frac{(\Delta b^2 + \Delta c^2)\, a + \Delta a^2 (c - b)}{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}$$

Dersom $\Delta a = \Delta b = \Delta c$, bliver specielt

$$x_1 = \frac{2\, a + (c - b)}{3}$$

Naar Udtrykket for x_1 (resp. x_2) er opstillet, foretages Overslaget over Usikkerheden paa sædvanlig Maade, idet x_1 (resp. x_2) betragtes som Funktioner af a, b og c. Den praktiske Usikkerhed paa x_1 bliver altsaa, saafremt $\Delta a = \Delta b = \Delta c$

$$\Delta x_{1p} = \frac{1}{3}\sqrt{4\,\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}\,\Delta a = 0{,}8\,\Delta a$$

Fremgangsmaaden for Resultatets Beregning og Vurderingen af dets Usikkerhed kan naturligvis ogsaa anvendes, hvis flere Elementer $x_1\ x_2\ x_3$ skal udmaales altsaa f. Eks. ved en Justering af en Modstandskasse, hvor Enkeltelementerne bestemmes hver for sig og hvor Bestemmelserne tilsidst kontrolleres ved Udmaaling af Elementernes Sum. Indeholder Kassen saaledes de 4 Elementer $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ og findes for disse og Summen resp. $a\ b\ c\ d\ e$, vil x_1 være at bestemme ved

$$x_1 = \frac{(\Delta b^2 + \Delta c^2 + \Delta d^2 + \Delta e^2)\, a + \Delta a^2 (e - b - c - d)}{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 + \Delta d^2 + \Delta e^2}$$

eller hvis $\Delta a = \Delta b = \Delta c = \Delta d = \Delta e$

$$x_1 = \frac{4a + (e - b - c - d)}{5}$$

med tilsvarende Udtryk for x_2, x_3 og x_4. Usikkerheden vurderes som ovenfor.

Som det vil ses, har vi i de betragtede Tilfælde ført Behandlingen af Gentagelserne tilbage til Middeltalsbestemmelse ved Indførelse af en afledet Iagttagelse, nemlig $c - b$ i første og $e - b - c - d$ i andet Eksempel. Vi har uden Betænkelighed kunnet gøre det, fordi disse afledede Iagttagelser intet har fælles med a. a paa den ene Side og $c - b$ i første, $e - b - c - d$ i andet Tilfælde er, som antydet ovenfor, »frie« Funktioner. To afledede Funktioner kan godt have Iagttagelser fælles og dog betragtes som fri Funktioner, altsaa behandles som uafhængige af hinanden. Betingelsen herfor vil vi dog ikke paa dette Sted gaa ind paa, da en Diskussion heraf mere naturligt hører hjemme i Forsøgslæren. I denne gives en almindelig Metode for Udjævning af Usikkerheden paa et Forsøgs Iagttagelser. Metoden gaar under Navnet de mindste Kvadraters Metode og finder Anvendelse ogsaa paa de Gentagelser, vi her har betragtet, idet disse kan opfattes som Elementer af et Forsøg. De mindste Kvadraters Metode giver herved ganske samme Resultat, som vi ovenfor førtes til, men Metoden tillader Behandling ogsaa af andre Tilfælde end de her betragtede f. Eks. det, hvor vi har kontrolleret Bestemmelsen af to Vægte x_1 og x_2 ved Vejning ikke alene af Vægtenes Sum, men ogsaa af deres Differens. Her vil vi have

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_1 + x_2 = c,\ x_1 - x_2 = d$$

altsaa paa en Maade følgende Bestemmelser af x_1:

$$x_1 = a,\ x_1 = c - b,\ x_1 = d + b.$$

De to sidste er imidlertid ikke fri af hinanden, og det gaar derfor heller ikke an at behandle dem som uafhængige Iagttagelser.

Usikkerheden paa grafisk Middeltal. Vi skal endelig til Slutning give praktiske Regler for Vurderingen af Sikkerheden paa et grafisk Middeltal. Først maa vi dog ved et Eksempel belyse, hvad vi forstaar ved et saadant. Ved Bestemmelsen af Elasticitetskoefficienten E for et Traadmateriale iagttager man Traadens Forlængelse l for en given Belastningsforøgelse P. Er Traadens Tværsnitsareal S, Længden af det Stykke, for hvilket Forlængelsen iagttages, L, haves:

$$E = \frac{P \cdot L}{l \cdot S}$$

I Følge denne Formel er Iagttagelsen af et Sæt sammenhørende Værdier for l og P (i Forbindelse med Udmaaling af L og S) tilstrækkelig for en Bestemmelse af E. Imidlertid gælder Formlen kun, saafremt Belastningsforøgelsen ligger under en vis Grænse. For at afgøre om den i et givet Tilfælde gør det, vil det derfor i Almindelighed være nødvendigt at udføre en Kontrolbestemmelse med en større eller mindre Belastningsforøgelse. Ofte anlægger man dels for den antydede Kontrols Skyld dels for at forøge Sikkerheden Maalingen saaledes, at man iagttager Forlængelsen l for en Række sammenhørende, trinvis stigende Værdier af P. De sammenhørende P og l opføres i en Tabel, der afbildes grafisk paa Millimeterpapir efter de Regler, der gælder for denne Art Udjævning.

Lad den fremkomne Kurve være den i Fig. 18 antydede.

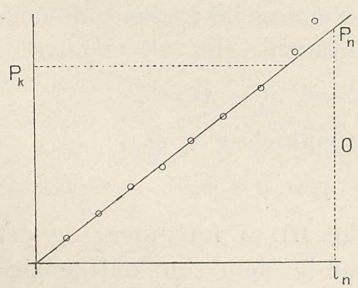

Fig. 18.

Denne viser os nu, hvor den Proportionalitet mellem P og l, der er en Forudsætning for Bestemmelsen, hører op. Det er ved P_k (Elasticitetsgrænsen), hvor Kurven begynder at krumme. Et Iagttagelsessæt over P_k vilde altsaa have ført til en falsk Værdi for E. En rigtig Værdi lader sig derimod bestemme ved den

rette Linie, der kan lægges gennem Iagttagelsessættene under Elasticitetsgrænsen. Værdien, der er at betragte som en Art Gennemsnitsværdi, faaes ved paa den eventuelt forlængede rette Linie at vælge et Normalpunkt, hvis Koordinater (l_n, P_n) udmaales. Den grafiske Fremstillings Gennemsnitsværdi for $\left(\frac{P}{l}\right)$, eller det grafiske Middeltal for denne Størrelse er da $\frac{P_n}{l_n}$. Spørgsmaalet er nu, hvilken Sikkerhed vi tør tillægge dette Middeltal. Den praktiske Vurdering heraf vil stille sig forskelligt efter Omstændighederne. Hvis Formaalet med Gentagelserne væsentligst er at opnaa Sikkerhed mod Overskridelse af Grænsen P_k, vil man maaske ofte ved Valget af den Maalestok, i hvilken Iagttagelserne afbildes, nøjes med en forholdsvis ringe »Forstørring«; man vil udjævne svagt, saaledes at Punktafvigelserne, der i den grafiske Fremstilling afspejler Iagttagelsesusikkerheden, bliver smaa. I saa Fald vil Tegningen af den udjævnende rette Linie ofte praktisk set være absolut sikker, d. v. s. den hele Usikkerhed paa Bestemmelsen af $\frac{P_n}{l_n}$ vil være at søge i Aflæsningsusikkerhed paa Millimeterpapiret. Relativt bliver Usikkerheden paa Bestemmelsen af $\frac{P_n}{l_n}$ da lig $\frac{\Delta O}{O}$ (Sml. pg. 81), hvor O er Længden af P_n udmaalt i Papirets Enheder og ΔO Usikkerheden paa Aflæsningen af O ligeledes udmaalt i Papirets Enheder.

Abscissen giver praktisk set intet Bidrag til Usikkerheden — eller vi kan sige, at den hele Usikkerhed lægges over paa Ordinatbestemmelsen, idet Abscissen vælges ikke aflæses. Vi bestemmer med andre Ord Ordinaten til en given Abscisse, og Sikkerheden bliver den, hvormed denne Ordinat kan aflæses paa Kurven. Er Kurven tegnet skarpt og rent, vil ΔO være at sætte lig ca. 0,1 mm; hvis O er lig ca. 20 cm, bliver Usikkerheden paa det grafiske Middeltal altsaa ca. $\frac{0{,}1}{200}$ lig 0,5 $^0/_{00}$.

Dersom stærkere Udjævning benyttes, d. v. s. dersom man søger ved Anvendelse af større Maalestok for Abscisse og Ordinat i højere Grad at eliminere Iagttagelsesusikkerheden, bliver Vurderingen af Resultatets Usikkerhed noget mere kompliceret. Nu bliver nemlig Usikkerheden, hvormed den udjævnende Linie er trukket mellem Punkterne, afgørende. Linien skal trækkes saaledes, at Iagttagelsespunkterne fordeler sig jævnt om den. Vi vurderer Sikkerheden af Liniens Placering paa følgende Maade. Hvis AB, Fig. 19, er den først trukne Linie, undersøger vi, hvormeget denne Linie kan drejes om A, før en kendelig Dissymmetri i Punkternes Fordeling om Linien gør sig gældende. Prøven udføres naturligvis i Praksis ved at tegne en eller flere Linier gennem A. Lad AB' være den Linie, ved hvilken Dissymmetrien netop træder tydeligt frem. Vi tager da som Maal for den Grænseusikkerhed ΔO, hvormed Ordinaten O er bestemt, Stykket BB' og har herefter, at Usikkerheden paa Bestemmelsen af Retningstangens er $\frac{\Delta O}{O}$. Fremgangsmaaden er som man ser til en vis Grad analog med den, der kan anvendes, naar man vil vurdere Sikkerheden paa Bestemmelsen af Opdriften ved en Maaling med Westphals Vægt. (Sml. pg. 18).

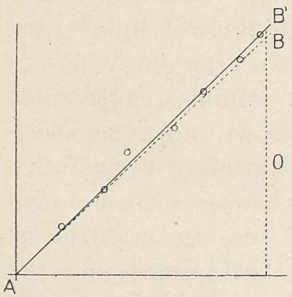

Fig. 19.

I det her betragtede Eksempel er Nulpunktet et afgjort rigtigt Punkt. (For Belastningsforøgelsen 0 er Forlængelsen naturligvis Nul). Saaledes vil det hyppigt være. I mange Tilfælde staar dog ikke et saadant fejlfrit Punkt (uden Usikkerhed) til Raadighed ved den udjævnende Kurves Tegning. Normalt bliver Usikkerheden paa Bestemmelsen af den udjævnende Linies Retningskoefficient da noget større end før, hvad der let vil forstaas.

Retningstangens Fig. 20 er nu bestemt ved

$$k = \frac{O_2 - O_1}{A_2 - A_1}$$

For at naa til en Forestilling om Usikkerheden paa k kan vi her prøve at dreje den tegnede Linie om Midtpunktet O_3, indtil en Dissymmetri i Punkternes Fordeling netop gør sig gældende. Lad Linien BC derved være kommen hen i Stillingen $B'C'$. $BB' + CC' = \Delta(O_2 - O_1)$ vil da være at betragte som et Maal for Størrelsen $O_2 - O_1$' Grænseusikkerhed, og den relative Usikkerhed paa Bestemmelsen af k vil blive

$$\frac{BB' + CC'}{O_2 - O_1}.$$

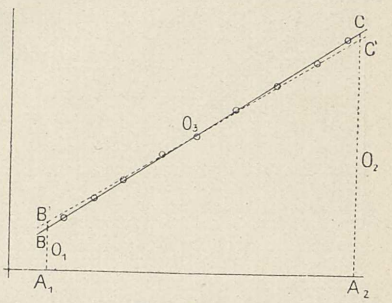

Fig. 20.

Dersom Udjævningen er saa svag, at CC' (respektive BB') praktisk set er Nul mod Aflæsningsusikkerheden paa det kvadrerede Papir, stiller Vurderingen sig noget anderledes. Paa O_2 er der da en Usikkerhed ΔO lig Aflæsningsusikkerheden paa O_1 den samme Usikkerhed. Men O_1 og O_2 er nu at betragte som to af hinanden fuldstændig uafhængige Iagttagelser, hvoraf følger, at den teoretiske Usikkerhed paa $O_2 - O_1$ vil blive $2\Delta O$, men den praktiske kun $\frac{2\Delta O}{\sqrt{2}} = 1{,}4\,\Delta O$, den relative altsaa $1{,}4\frac{\Delta O}{O_2 - O_1}$.

I det indledende Eksempel, hentet fra en Materialprøvning, var det Retningstangens for den udjævnende rette Linie, det umiddelbart kom an paa at bestemme. I Virkeligheden er det som oftest netop Retningstangens, der søges ved den grafiske Udjævning; men det kan dog ogsaa være en anden Størrelse f. Eks. det Stykke, en ret Linie afskærer af den ene eller den anden Koordinatakse. I saa Fald maa Sikkerheden

paa denne Bestemmelse vurderes ved en særlig for dette Tilfælde valgt Prøve, der kan give en Forestilling om Størrelsens Grænseusikkerhed.

Lad Opgaven være at vurdere Sikkerheden paa Stykket AB i Fig. 21. Vi vil da tænke os Linien CB drejet om C, til en Dissymmetri i Punktfordelingen gør sig kendeligt gældende. Er den nye Stilling CB', tør BB' tages som et Maal for Grænseusikkerheden paa AB. Betyder Abscisse og Ordinat i Fig. 21 henholdsvis Reciprokværdierne af Genstandens og Billedets Afstand fra Linsen ved en Linsemaaling, bliver $\frac{1}{p}$ eller Reciprokværdien af Brændvidden Middeltallet af Stykkerne AB og AC

$$\frac{1}{p} = \frac{AB + AC}{2}.$$

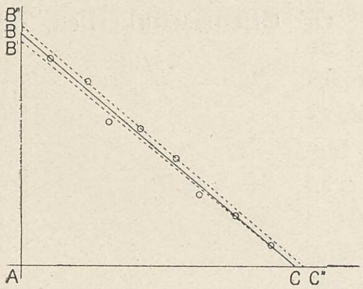

Fig. 21.

I dette Tilfælde maa Grænseusikkerheden vurderes paa den Maade, at vi prøver at parallelforskyde Linien, til Dissymmetri gør sig gældende. Naar vi derved til Grænsestillingen $C''B''$, vil $BB'' + CC''$ være Usikkerheden paa $AB + AC$, og den relative Usikkerhed paa p vil blive

$$\frac{BB'' + CC''}{AB + AC}.$$

Opgave.

I Fig. 22 fremstiller *cambd* en Resonanskurve, optaget ved løst koblede elektriske Krese. Kurvens Abscisse er i relativt Maal Kapaciteten C i Sekundærkresen, Kurvens Ordinat Udslaget α paa det Instrument, hvorved Strømeffekten maales. Af Kurven skulde Summen af de logaritmiske Dekrementer $\delta_1 + \delta_2$ for den primære og den sekundære Kres kunne bestemmes, idet

$$\delta_1 + \delta_2 = \pi \frac{C_0 - C}{C_0} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_m - \alpha}}$$

hvor C_0 betegner den Værdi for Kapaciteten, der giver Udslaget dets Maksimumsværdi α_m. Som det ses, vil $C_0 - C$ være det halve af en Korde som cd, $\alpha_m - \alpha$ Kordens Afstand fra Kurvens Toppunkt. Med hvilken Sikkerhed kan $\delta_1 + \delta_2$ findes ved Udmaaling paa den grafiske Fremstilling?

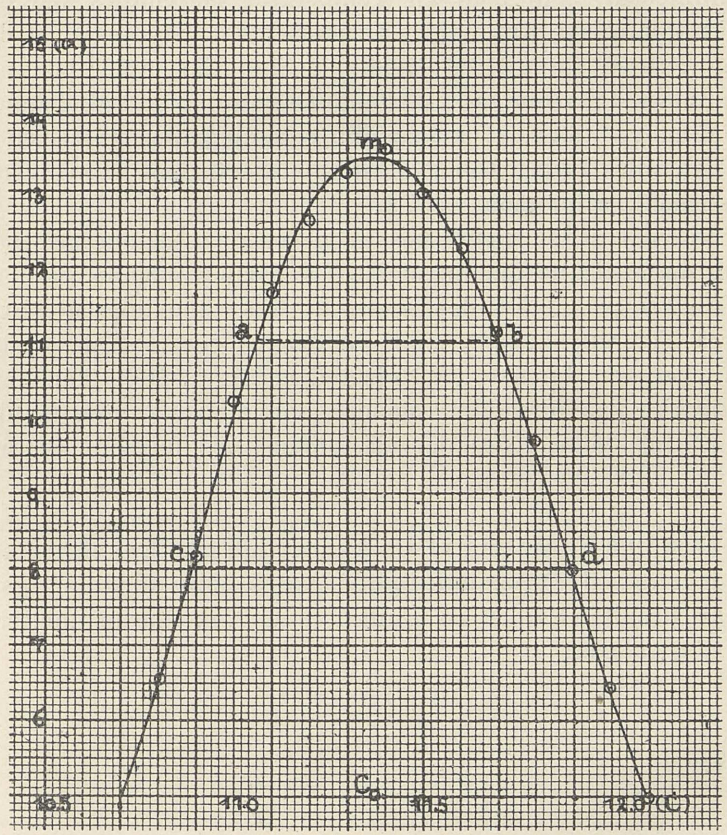

Fig. 22.

KAP. V.

DEN SAMMENSATTE MAALING.

Skønt Antallet af Egenskaber, for hvis Maaling man har uddannet specielle (primære) Systemer, er meget stort og stadig vokser, maa vel alligevel nok de fleste maalelige Egenskaber bestemmes indirekte. Den indirekte Maaling kan være usammensat, som naar en Temperatur bestemmes ved den elektromotoriske Kraft af et Termoelement. Hyppigst vil den dog være en sammensat Maaling. Som Eksempler paa saadan indirekte, sammensat Bestemmelse kan anføres Modstandsmaaling ved Strøm- og Spændingsmaaling, Bestemmelsen af et Materiales Ledningsevne, Elasticitetskoefficient, et svingende Systems Inertimoment o. s. v.

Vi vil i dette Kapitel beskæftige os med Planlæggelsen af den sammensatte Maaling. Med Hensyn til denne Planlæggelse gælder nu for det første, at Enkeltmaalingerne, hvad deres Tolerans angaar, maa vælges saaledes, at Resultatets paa Forhaand foreskrevne Nøjagtighed sikres. Dette kan imidlertid ske paa forskellige Maader, som dog ikke alle er ubetinget lige gode, hvad der vil forstaas ved følgende Betragtning.

Den lige Fordeling af Usikkerheden paa Enkeltbestemmelserne vil i Almindelighed være den fordelagtigste. Naar Resultatet R er en Funktion af Enkeltbestemmelserne $r_1\ r_2\ r_3$, altsaa:

$$R = f(r_1\, r_2\, r_3)$$

bliver

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \Sigma^r \frac{\frac{\delta R}{\delta r}}{R} \cdot \frac{\Delta r}{r}$$

Vi kan skrive

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = a + b + c$$

hvor a, b, c er Enkeltmaalingernes Bidrag til Resultatets teoretiske Usikkerhed. Den praktiske Usikkerhed faas nu ved

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = (a + b + c) \cdot F$$

hvor F er Reduktionsfaktoren. Vi omskriver Ligningen til

$$a + b + c = \frac{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p}{F}$$

og erkender herved, at jo mindre F er, desto større en Værdi kan vi i et givet Tilfælde tillade Summen af Enkeltmaalingernes Usikkerhedsbidrag at antage. Mindst bliver nu F, naar $a = b = c$, altsaa naar Bidragene gøres lige store. Derfor maa det normale blive, at vi stræber at planlægge den sammensatte Maaling saaledes, at Enkeltbestemmelsernes Bidrag til Usikkerheden bliver lige store, altsaa hvert $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$. ($n$ er Antallet af Enkeltbestemmelserne).

I hosstaaende Tabel er anført Talværdierne for F ved to Usikkerhedsbidrag svarende til Forholdet $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ mellem disse.

$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	F
0 eller ∞	1,000
0,20 - 5,00	0,850
0,40 - 2,50	0,770
0,60 - 1,66	0,729
0,80 - 1,25	0,711
1,00 - 1,00	0,708

Som det vil ses, kan Usikkerhedsbidragenes Sum ved to Bestemmelser vælges ca. 30 % større ved Ligestorhed af Bidragene, end naar det ene Bidrag er forsvindende mod det andet. Ved fire Bidrag kan Summen ved Ligestorhed gøres lig med 2, naar den i Tilfælde af, at de tre Bidrag er forsvindende, maa bringes ned til 1. Ekstreme Tilfælde, som de her antydede, bør derfor helst undgaas, naar det er muligt, hvad det imidlertid i mange Tilfælde ikke er. Derimod viser Tabellen, at Forskelle i Bidragene paa op til ca. 50 % er ret betydningsløse.

Ulige Fordeling af Usikkerheden. Naar det ikke kan undgaas, at enkelte Bidrag sluger næsten hele den til Raadighed staaende Tolerans, saaledes at andre Bidrag maa gøres praktisk set forsvindende, er det af den største Betydning for den rationelle Planlæggelse af Maalingen at lægge Mærke til, at et Usikkerhedsbidrag er praktisk set forsvindende mod et andet, naar det er 5 à 10 Gange mindre. Lad os f. Eks. tænke os en Bestemmelse, i hvilken der højest kan tillades en »Nettotolerans« paa 1 %, sammensat af to Enkeltmaalinger, hvoraf den enes Tolerans ikke kan bringes væsentligt ned under 1 %. I saa Fald er Metoden brugbar, naar den anden Enkeltbestemmelse kan udføres med en Nøjagtighed svarende til 1 à 2 ‰, men den behøver heller ikke at udføres med mindre Tolerans. Det vil tværtimod i Almindelighed være irrationelt for Enkeltbestemmelsen at vælge en Metode af f. Eks. 0,2 Promilles Tolerans. Resultatet bliver nemlig i begge Tilfælde lige nøjagtigt, men i sidste vil Arbejdet, som Enkeltmaalingen kræver, i Almindelighed være væsentligt større end i første, ofte meget betydeligt større; thi som almindelig Regel gælder, at det nødvendige Arbejde og den Omhu, en Maaling kræver, vokser relativt langt hurtigere, end Toleransen aftager. Derfor er det en af de største Fejl — men ikke den mindst hyppige — ved Planlæggelsen af den sammensatte Maaling at vælge Toleransen for Enkeltbestemmelsen urimeligt lille.

Vi vil nu belyse det anførte ved nogle typiske Eksempler.

Eks. 1. **Bestemmelse af Inertimomentet for en Ring.** Lad Opgaven være at bestemme Inertimomentet for en Ring som den i Fig. 23 antydede. Ved at danne Integralet

$$I = \int_{R_1}^{R_2} h\varsigma r^2 \cdot 2\pi r dr$$

hvor ς er Tætheden, faas for Inertimomentet Udtrykket

$$I = \varsigma \cdot h \cdot \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

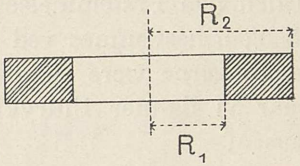

Fig. 23.

Dette Udtryk vilde det ikke være praktisk at bygge en Maaling paa. Det omskrives til

$$I = {}^1/_2 \varsigma \cdot h \pi (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = {}^1/_2 P \cdot (R_2^2 + R_1^2),$$

hvor P er Ringens Masse. Bestemmelsen af I er ved den sidste Teori ført tilbage til en Vejning og to Længdemaalinger.

Vi kan nu antage, at der for Bestemmelsen af I er foreskrevet en Tolerans paa 1,5 $^0/_{00}$. Vi vælger en Sikkerhedsfaktor 2 og skal altsaa opnaa en overslagsmæssig Tolerans paa ca. 0,7 $^0/_{00}$. Da der bliver tre Enkeltmaalinger i Bestemmelsen, maa Usikkerhedsbidragenes Sum altsaa blive $0{,}7 \times \sqrt{3} =$ ca. 1,2 $^0/_{00}$, saafremt Bidragene gøres lige store, hvad vi tilsigter. Til hvert bliver der følgelig ca. 0,4 $^0/_{00}$.

Idet vi nu ved, at Ringens Diametre er ca. 5 og 7 cm., ses det straks, at disse Diametre ikke vil kunne udmaales med en Skydelære, selv om denne har en Nonius, der tillader Aflæsning med $^1/_{20}$ mm Nøjagtighed. Den relative Usikkerhed paa Bestemmelsen af den største Diameter vilde alene blive 1:1400 altsaa nær ved 1 $^0/_{00}$. Vi maa derfor benytte et nøjagtigere Maaleapparat, og et saadant haves i Bøjlemaalet — et Skruemikrometer, der spænder over større Dimensioner end de sædvanlige Mikrometre. Vi vil være paa den sikre Side i vort Overslag, naar vi regner, at dette Apparat tillader en Bestemmelse af den ydre Diameter med $^1/_{100}$ mm' Sikker-

hed. Den indre Diameter faar vi herefter bedst ved at maale

$$d = R_2 - R_1$$

ved Hjælp af et Skruemikrometer bestemt til Maaling af Vægtykkelsen i Rør. Vi tør regne, at Sikkerheden paa Bestemmelsen ved dette Redskab er noget større end Sikkerheden paa Bestemmelsen af R_2, for Eks. ca. $^3/_{1000}$ mm. Naar R_2 og d bestemmes ved de her anførte Apparater, vil Længdemaalingerne være valgt med rimelig Sikkerhed. Dette vil ses, naar vi danner Udtrykket for Resultatets Usikkerhed, som faas af

$$I = \frac{1}{2} p \cdot (2R_2^2 - 2R_2 d + d^2) \sim p \cdot R_2^2 - pR_2 d \quad (d \text{ lille mod } R_2)$$

der giver

$$\frac{\Delta I}{I} = 2\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{d}{R_2} \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta p}{p},$$

og følgelig

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{2}{7000} + \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{1000} + \frac{\Delta p}{p}.$$

De to Længdemaalinger giver altsaa praktisk set lige store Bidrag til Usikkerheden, saaledes som det tilsigtes. Tilovers til Vejningen bliver der nu 0,5 $^0/_{00}$. Vægten af den betragtede Ring var 300 gr. 0,5 $^0/_{00}$ heraf er 0,15 gr., altsaa over $^1/_{10}$ gr. Det betyder, at Vejningen, til Trods for at Længdemaalingerne nærmest maatte være Præcisionsmaalinger, kun behøver at være ganske grov. En almindelig god Butiksvægt (til ca. 1 kg) vil kunne anvendes. Hvis en finere Vægt benyttes, kan man i hvert Fald spare sig den nøjagtigere Bestemmelse af Ligevægtsstillingerne ved Svingningsforsøg, og Interpolation bliver ganske overflødig.

Anm. Overslaget er i visse Henseender lærerigt. I' Afhængighed af R_2 kan betragtes som givet ved $I = pR_2^2$, hvoraf følger, at R_2' Bidrag til Usikkerheden bliver $2\frac{\Delta R_2}{R_2}$. Usikkerheden paa d gør sig, som vi skal lære nedenfor, gældende med et Beløb, der er $\frac{\Delta d}{d}$ mul-

tipliceret med Forholdet mellem Leddet $pR_2 d$ og Hovedleddet pR_2^2 altsaa med $\frac{d}{R_2} \cdot \left(\frac{\Delta d}{d}\right)$. (Se Korrektionens Teori).

Eks. 2. **Valg af Maaleomraader ved Brugen af Viserinstrumenter i sammensatte Maalinger.** Lad Opgaven være den kendte ved Hjælp af et Millivoltmeter og en Strømmaaler at bestemme Modstandskoefficienten for et Traadmateriale. Opstillingen er da den i Fig. 24 antydede, hvor M_v er Millivoltmetret, M_a Strømmaaleren — i Almindelighed et Millivoltmeter med Shunt —, X Traadstykket, i hvilket Modstanden skal maales. Er Spændingsfaldet i Traaden p, Strømmen i Kresen I, bliver Modstanden

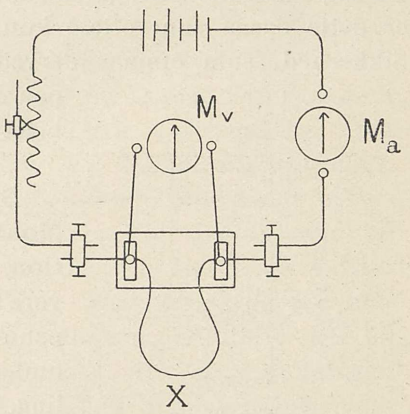

Fig. 24.

$$X = \frac{p}{I - \frac{p}{r_v}}$$

hvor r_v er Millivoltmetrets Modstand.

Som vi har set, er Usikkerheden paa X bestemt ved

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

hvor a og b er Udslagene paa de to Instrumenter.

I Overensstemmelse med det ovenfor sagte, vil vi nu paa Forhaand stræbe at gøre $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$, hvilket i Praksis i Almindelighed betyder, at man vil søge at vælge Maaleomraader og øvrige Forhold saaledes, at Udslagene paa M_a og M_v bliver nogenlunde lige store. (Forudsat ensartede Instrumenttyper). Men lad os nu tænke os, at Udslag paa f. Eks. 50 Inddelinger paa de to Instrumenter er tilstrækkelige til at

give den Sikkerhed, der er Brug for. Toleransen kunde f. Eks. være 0,6 %, hvilken med 50 Inddelingers Udslag kan opnaas ved Westoninstrumenter med Deleusikkerhed paa 0,2 Inddeling. Det indses da umiddelbart, at det for det første i Almindelighed — ikke altid — kun er af det gode, hvis vi uden væsentlige Anstalter er i Stand til at indrette Forholdene saaledes, at begge Udslag bliver større, f. Eks. de fulde Udslag paa Instrumenterne, og dernæst, at hvis blot det ene Udslag — uden særlige Anstalter — bliver f. Eks. 120, saa er dette ogsaa som oftest kun en Fordel. Den Forøgelse i Sikkerhed, som opnaas derved, faas nemlig gratis — ikke paa Bekostning af Tid eller Omhu taget fra andre Dele af Arbejdet.

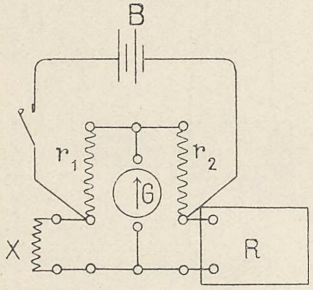

Fig. 25.

Specielle Arter af sammensat Maaling. — Naar skal Interpolation anvendes? Vi anvender nu vore ovenfor anførte Betragtninger paa et Par specielle, men dog meget omfattende Arter af sammensat Maaling. En sammensat Bestemmelse har vi med at gøre ved Maaling med et Nulsystem, der samtidigt bruges som Udslagssystem til Interpolation for endnu et eller to Cifre i Resultatet ud over dem, Systemet umiddelbart kan give. Saadan Interpolation anvendes f. Eks. hyppigt ved elektriske Brosystemer, byggede sammen af Modstandskasser. En Wheatstones Bro efter dette Princip kan bestaa af en Sammenstilling som den i Fig. 25 antydede. Her er r_1 og r_2 to nøjagtigt afpassede Modstandssæt, der hver f. Eks. indeholder 1, 10, 100 og 1000 Ohm. X er den ubekendte Modstand, R en Modstandskasse der f. Eks. indeholder fra 0,1 til 10000 Ohm. Giver man r_1 og r_2 passende, til Maalingen svarende Værdier, og udtager man herefter i R en saadan Modstand, at Galvanometret intet Udslag gør ved Strømslutning, haves

$$X = R \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

hvor $\frac{r_1}{r_2}$ er et simpelt Forhold, f. Eks.

1 : 1, 1 : 10, 1 : 100, 1 : 1000, 10 : 1, 1000 : 1, o. s. v.

Nu vil det ofte være saaledes, at det ikke er muligt at faa Galvanometret helt i Ro, fordi blot en Forandring paa $^1/_{10}$ Ohm i R giver en kendelig Forandring i Udslag. Man vil da paa sædvanlig Maade kunne interpolere sig til endnu et Ciffer — eller maaske to — i R foruden dem, der direkte aflæses paa Modstandskassen. De ved en saadan Interpolation vundne Ciffre vil dog i mange Tilfælde være ganske uden Værdi — og Interpolationen bør da selvfølgelig udelades. Forklaringen herpaa ligger i, at Rheostatens Modstande naturligvis kun er afpassede med en vis Tolerans. Denne vil ved en Præcisionskasse være ca. 0,2 $^0/_{00}$. Er R nu f. Eks. 5000, bliver 0,2 $^0/_{00}$ heraf 1 Ohm. Usikkerheden, der hidrører fra Fremstillingen af Modstandene, er altsaa her 10 Gange det mindste Trin i Rheostaten. Anvendes et følsomt Galvanometer, vil dette i Almindelighed tillade en Interpolation, men hvor meningsløs denne bliver ses umiddelbart; vi kan nemlig ikke engang udnytte Modstandskassen fuldstændigt. Hvis R var 1000 Ohm, vilde Interpolation endnu være illusorisk (0,2 $^0/_{00}$ af 1000 lig 0,2 Ohm), først naar Forholdene stiller sig saaledes, at kun et Par Hundrede Ohm af Kassens Modstande kan udnyttes, vil Interpolationen kunne faa Betydning.

Korrektionens Teori. En anden speciel, sammensat Maaling har vi med at gøre i Bestemmelser, hvis Resultat maa berigtiges ved en Korrektion. I saadanne Tilfælde kan det rigtige Resultat R skrives som

$$R = R' + k$$

hvor R' er det ukorrigerede Resultat, k Korrektionen. Her vil

k, naar der er Tale om en egenlig Korrektion, være lille mod R'.

Vi kan nu udlede en simpel Regel for, hvor stor den Sikkerhed, hvormed Korrektionen skal bestemmes, maa være i Forhold til den egentlige Maalings Sikkerhed. Vort Udtryk for R giver

$$\Delta R = \Delta R' + \Delta k$$

eller

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R'}{R'+k} \cdot \frac{\Delta R'}{R'} + \frac{k}{R'+k} \cdot \frac{\Delta k}{k}$$

I vort Overslag kan nu k bortkastes i Leddet $R'+k$, hvorved faas

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R'}{R'} + \frac{k}{R} \cdot \frac{\Delta k}{k}$$

Dersom vi nu ogsaa overfor den her betragtede Art af sammensat Maaling holder paa Reglen om den lige Fordeling af Usikkerheden, følger, at

$$\left(\frac{\Delta k}{k}\right) = \frac{R}{k} \cdot \left(\frac{\Delta R'}{R'}\right)$$

eller i Ord: Vi kan paa Korrektionsbestemmelsen tillade en Tolerans, der er lige saa mange Gange større end den, vi tillader Hovedbestemmelsen at have, som Resultatet er større end Korrektionen.

Eksempel. **Maaling af en Linses Brændvidde ved Afbildning af en fjerntstillet Genstand (Lyskilde).** Man kan som bekendt bestemme Beliggenheden af Brændpunktet og dermed Brændvidden for en positiv Linse ved at danne Billedet af en praktisk set uendelig fjern Genstand paa en i Forhold til Linsen forskydelig Skærm. Naar Skærmen er indstillet, vil Afstanden fra Linsens Midtpunkt til Skærmen være Brændvidden. En lidt ændret Metode er følgende. Man anbringer i Arbejdslokalet saa langt som muligt fra Linsen en Glødelampe og indstiller Skærm (eller Linse)

saa Billedet af Lampen bliver saa skarpt som muligt. Afstanden fra Linse til Skærm vil nu med en vis Tilnærmelse være Brændvidden, men der vil dog være en Rettelse at indføre, fordi Lampens Afstand som oftest ikke vil kunne betragtes som uendelig stor i Forhold til Brændvidden. Afstanden LB' i Fig. 26 maa korrigeres. Kaldes denne Afstand p', den sande Brændvidde $= LB - p$, samt Afstanden fra Lampen G til Linsen a, haves

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{a} = \frac{1}{p}$$

altsaa

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{p' - p}{pp'} = -\frac{p - p'}{pp'}.$$

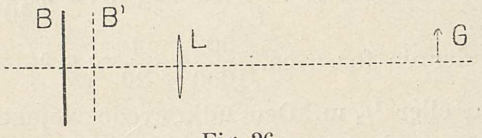

Fig. 26.

Rettelsen er nu $p - p'$. Vi ser, at den numerisk er samme Brøkdel af p', som Brændvidden er af a $\left(\frac{p - p'}{p'} = \frac{p}{a}\right)$. Vi sætter $k = p - p' = \frac{p'p}{a} \sim \frac{p'^2}{a}$ og beregner nu, med hvilken Sikkerhed Korrektionen skal bestemmes. I Følge det ovenfor fremsatte bliver, idet $p = p' + k$:

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_t = \frac{\Delta p'}{p'} + \frac{k}{p} \cdot \frac{\Delta k}{k}.$$

Hvis $p =$ ca. 20 cm., vil p' ret let kunne bestemmes med en Sikkerhed af ca. 2 $^0/_{00}$. Lad os tillade $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_p$ at blive $\frac{3}{1000}$, saa bliver der $\frac{2}{1000}$ til Leddet

$$\frac{k}{p} \cdot \frac{\Delta k}{k}.$$

Hvis $a =$ ca. 8 m, vil k være ca. $\frac{400}{800} = \frac{1}{2}$ cm. Altsaa bliver

$$\frac{\Delta k}{k} = 40 \cdot \frac{2}{1000}.$$

Nu er $\frac{\Delta k}{k}$ paa det nærmeste lig $\frac{2\,\Delta p'}{p'} + \frac{\Delta a}{a}$. Her er $\frac{2\,\Delta p'}{p'} = \frac{4}{1000}$ d. v. s. ganske forsvindende, $\frac{\Delta a}{a}$ synes altsaa at kunne sættes lig $\frac{80}{1000}$. I Virkeligheden maa det dog erindres, at hvis vi beregner k af $\frac{p'^2}{a}$ i Stedet for af $\frac{p'p}{a}$, begaar vi en Fejl, der relativt er $\frac{p'-p}{p}$ altsaa her ca. $\frac{1}{40} = \frac{25}{1000}$. Tilbage bliver der da for a ca. $\frac{50}{1000} = \frac{1}{20} \sim 5\ \%$. 5 % af 800 cm er 40 cm eller $^1/_2$ m. Den udkrævede Nøjagtighed er altsaa ikke større, end at man næsten kan nøjes med at skønne Afstanden.

Opgaver.

Opg. 1. Ved en Kalorimetermaaling er den bestemmende Temperaturstigning ca. 4°. Til Raadighed for dens Maaling staar et Termometer delt i Tiendedelsgrader med en Tolerans af ca. $^2/_{100}$°.

Vil Vandværdien af det i Kalorimetret indeholdte Vand under disse Forhold være tilstrækkelig sikkert bestemt, naar en almindelig Maalekolbe benyttes til Afmaalingen? Kalorimetret tager ca. 200 gr. Vand. Kolbens Hals har en Lysning paa ca. 1 cm.

Opg. 2. Den samlede Vandværdi for Kalorimeter med Tilbehør bestaar af Vandværdien for Vandet (ca. 200 gr.), for Metalmassen i Kalorimeter og Omrører (50 gr.) og for Termometret (et Stangtermometer ca. 8 mm i Diameter, hvoraf 7 cm er nedsænket i Vandet). Vi vil tillade Usikkerheden paa Vandværdibestemmelsen at være lige saa stor som

Usikkerheden paa Maalingen af Temperaturstigningen under Forsøget. Denne vil være ca. 4^0 og iagttages paa et Termometer, delt i Tiendedelsgrader med en Tolerans paa $^2/_{100}{}^0$. Med hvilke Toleranser vil det nu være rimeligt at veje Vand og Kalorimeter samt udmaale Termometrets nedsænkede Volumen, naar Varmefylden for Kalorimetret er ca. $^1/_{10}$ og Termometrets Vandværdi beregnes ved at multiplicere Volumenet — udtrykt i cm^3 — af den nedsænkede Del med Faktoren 0,46?

Opg. 3. Et Ampèremeter $0—^1/_2$ Amp. med Skala paa 50 Inddelinger tænkes prøvet for Enhedsfejl ved et Kobbervolta-

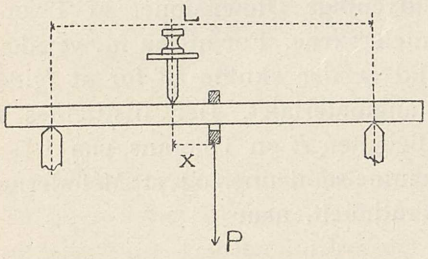

Fig. 27 a.

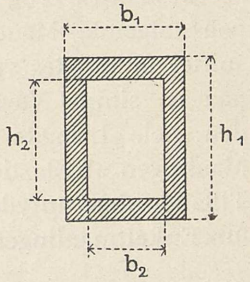

Fig. 27 b.

meter. Til Raadighed staar en Vægt med en Tolerans af 0,5 mg. Hvor længe maa Strømmen holdes sluttet, naar 1 Coulomb udskiller ca. $^1/_3$ mg?

Opg. 4. Et Galvanometers Følsomhed f er Udslaget for Strømmen 1 i 1 Meters Afstand. Faas altsaa i Afstanden L, et Udslag α for en Strøm i_g, er

$$f = \frac{\alpha}{i_g L}$$

Lad α være ca. 20 cm, L 200 cm og lad Usikkerheden paa Bestemmelsen af i_g være forsvindende, mens den paa α er ca. 0,2 mm. Med hvilken Sikkerhed og ved hvilket Maaleredskab vil L under disse Forhold passende kunne bestemmes?

Opg. 5. Fig. 27 a fremstiller Systemet ved et Bøjningsforsøg med det Formaal at bestemme Elasticitetskoefficienten

E for Materialet i en Stang for Eks. af Messing. Fig. 27 b fremstiller Stangens Tværsnit. Med de i Fig. anførte Betegnelser og idet f betegner Bøjningspilen svarende til Belastningsforøgelsen P er

$$E = \frac{P}{48\,fI} L^3 \left(1 - 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \text{ og } I = \frac{h_1^4 - h_2^4}{12}$$

idet $b_2 = h_2$, $b_1 = h_1$ (Tværsnittet kvadratisk). $\frac{P}{f}$ udmaaltes ved den antydede Bestemmelse paa den grafiske Fremstilling af Bøjningsforsøgets Iagttagelser. Af de iøvrigt indgaaende Størrelser bestemtes L og x ved en almindelig Maalestok. I maaltes paa følgende Maade. De udvendige Dimensioner af Tværsnittet udmaaltes ved Mikrometerskrue. For at faa h_2, vejedes paa en simpel Vægt det Vand Q, der skulde til for at fylde den hele Længde L_1 af Stangmaterialet. Der tilstræbtes i Maalingen af Elasticitetskoefficienten E en Tolerans paa 1 %. Tillader den antydede Bestemmelse denne, og er Metoderne for Enkeltmaalingerne valgt rationelt, naar

$$\frac{\Delta(P:f)}{P:f} = 2\,‰ \text{ (skønnet af den grafiske Fremstilling)}$$

$L = 800$ mm.	$\Delta L = 1$ mm.
$h_1 \sim 12{,}4$ mm.	$\Delta h_1 = 0{,}005$ mm.
$h_2 \sim 10{,}6$ mm.	$\Delta Q = 0{,}1$ gr.
$L_1 = 1000$ mm.	$\Delta L_1 = 1$ mm.
$x =$ ca. $^1/_{20}$ L	$\Delta x = 0{,}3$ mm.

Opg. 6. I Følge Stokes Lov skulde den indre Gnidning η i en Væske, bestemt ved Iagttagelse af Kuglers Fald gennem Væsken, være

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot g \cdot r^2 \frac{(\varsigma_k - \varsigma_v)}{h}$$

hvor g er Tyngdens Acceleration, r Kuglens Radius, ς_k dens Vægtfylde, h den konstante Hastighed, den opnaar, og ς_v Væskens Vægtfylde. h bestemmes ved Udmaaling af den Tid,

Kuglen bruger til at gennemløbe en vis Vejlængde l. For at prøve Lovens Gyldighed udførtes et Forsøg med Kvægsølvkugler, hvis relative Størrelse D udmaaltes under Mikroskop. Resultater af en saadan Prøve er anført i hosstaaende Tabel.

Diameter D	Faldtid T	D^2T	Δ
21,65	170,7	800	— 17
21,80	176,0	835	+ 18
25,60	122,5	801	— 16
30,40	91,8	846	+ 29
31,30	83,1	813	— 4
41,00	48,1	808	— 9
		817	

Væsken var Ricinusolie og Faldhøjden l var ca. 10 cm. Tabellen synes at vise, at Produktet D^2T virkelig er konstant, saaledes som Teorien fordrer det. Den viser, at Usikkerheden paa Enkeltbestemmelsen af D^2T er godt 3 %. Vi vil nu tilstræbe netop denne Sikkerhed i η og skal saa afgøre, med hvilken Sikkerhed de øvrige indgaaende Størrelser altsaa l, ς_K, ς_V og g samt den Faktor k, hvormed det relative Maal D skal multipliceres for at give Kuglens Diameter i cm, maa kendes resp. bestemmes, og ved hvilke Midler Bestemmelserne maa finde Sted. ς_V er ca. 1. — Temperaturkoefficienten for η er ca. 10 %. Med hvilken Sikkerhed maa Temperaturen bestemmes? — I Forsøget er Tiden T iagttaget ved et Stoppeur, der giver en Usikkerhed paa 0,2 Sekund. Diametrene D er bestemt med en Sikkerhed paa ca. 0,1 à 0,05. Kan den faktisk iagttagne Usikkerhed hidrøre fra Maalingen af T og D?

Opg. 7. Med hvilken Sikkerhed skal Korrektionsleddet for Strømmen gennem Voltmetret bestemmes ved den i Opgave 1 pag. 84 omtalte Maaling, naar Metodens Sikkerhed fuldt skal udnyttes? Hvor nøjagtigt maa Voltmetrets Mod-

stand kendes, og hvormange Cifre vil man i Beregningen af $\frac{p}{r_v}$ medtage af dem, Maalingen har givet for p? Hvorledes bør Beregningen udføres (hvilket Regnemiddel)?

Opg. 8. Anvendes ved Wheatstones Traadbro to Sæt lige lange Tilledningstraade hver med Modstanden μ, vil Korrektionen for disse relativt blive

$$\frac{F}{X} = \frac{2l - L}{l} \cdot \frac{\mu}{R}$$

hvor R er Sammenligningsmodstanden, X den ubekendte Modstand, l Kontaktstillingen og L Traadens hele Længde lig med 1000 mm. Lad l være lig 200 mm, R lig med $^1/_2$ Ω, og lad hvert Sæt Tilledningstraade bestaa af to Kobbertraade 10 cm lange og 1 mm i Diameter. Med hvilken Sikkerhed maa Kobberets Modstandsevne, der ligger omkring 0,017, kendes, hvis vi tillader Korrektionen at give et lige saa stort Bidrag til Usikkerheden som Aflæsningen af Kontaktens Stilling (0,1 mm)? Tør vi mon regne, at Modstandsevnen ogsaa kendes med denne Sikkerhed? Hvorledes vilde Sagen stille sig, dersom Traadene valgtes dobbelt saa tykke?

Vurdering af Overensstemmelse. I Tilknytning til den sammensatte Maaling kan vi behandle Vurderingen af en Overensstemmelse, idet vi fører denne tilbage til et Overslag over Usikkerheden paa den Differens, der tjener som (reciprokt) Maal for Overensstemmelsen. Vi betragter altsaa Maaling og Kontrolmaaling som Elementer i en sammensat Bestemmelse. For Kontrolmaalingen gælder da, at den ikke maa være af større Tolerans end den Bestemmelse, den skal kontrollere. Vi kan ikke ved en Bestemmelse af 1 Procents Tolerans kontrollere en Maaling paa 1 Promille. Vi kan i ethvert Fald ikke kontrollere den som en »1 $^0/_{00}$-Bestemmelse«.

Hvad nu Vurderingen af Overensstemmelsen angaar, saa kan vi først tænke os, at vi har maalt en og samme Størrelse R ved to ganske forskellige Metoder a og b. Overslag har givet

Usikkerhederne $\left(\frac{\Delta R_a}{R_a}\right)$ og $\left(\frac{\Delta R_b}{R_b}\right)$ for disse. Herefter spørger vi om, hvor stor Afvigelsen mellem R_a og R_b maa være, hvis den alene skal kunne forklares ved Usikkerheden i de to Bestemmelser. At skaffe sig Klarhed over dette Punkt er af den største Vigtighed, thi dersom Usikkerhed alene kan give Anledning til den tilstedeværende Divergens, er det næsten sikkert, at begge Maalinger er praktisk set fejlfri. Hvis Afvigelsen derimod ikke kan forklares ved Usikkerhed, vil den ene eller i Almindelighed begge Metoder være behæftet med Fejl.

Det stillede Spørgsmaal kan afgøres ved et simpelt Overslag over Sikkerhed. Differensen

$$D = R_a - R_b,$$

skulde være Nul. D har imidlertid en vis Usikkerhed, hvis praktiske Grænseværdi vil være et Maal for den Afvigelse i Kontrollen, der kan forklares alene ved Usikkerheden paa R_a og R_b. Vi faar

$$\Delta D_t = \Delta R_a + \Delta R_b.$$

Er $\frac{\Delta R_a}{R_a} = \alpha$, $\frac{\Delta R_b}{R_b} = \beta$, bliver

$$\Delta D_t = \alpha R_a + \beta R_b = R(\alpha + \beta)$$

og $$\Delta D_p = R(\alpha + \beta)\frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \text{ eller } R\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

hvis α og β selv er encifrede Tal.

Vi har her forudsat de to Bestemmelser ganske uafhængige af hinanden. Har de Iagttagelser eller Maalinger fælles, kan disses Usikkerhed naturligvis ikke give Anledning til nogen Afvigelse mellem Resultaterne.

Vi vil ved et Eksempel yderligere belyse Vurderingen af Overensstemmelse. De fire Elementer 1, 2, 3 og 4 Ω i en teknisk Modstandskasse udmaaltes paa en Wheatstones Bro med kalibreret Maaletraad. For Tilledningstraadene korrigeredes der. Som Kontrol udmaaltes Modstandenes Sum. Bestemmelserne er anført i omstaaende Tabel.

Modstand	Værdi	Usikkerhed
1	0,998	0,001
2	2,001	0,001
3	2,994	0,0008
4	3,999	0,0008
10	9,985	0,001

Sammenlægges Værdierne for 1, 2, 3 og 4, faas 9,992 Ω, der divergerer 0,007 Ω fra den maalte Sum. Vi vil undersøge, hvor meget den beregnede Sum S_b maa afvige fra den direkte maalte Sum S_m, saafremt Afvigelsen alene skal kunne forklares ved Enkeltbestemmelsernes Usikkerhed. Vi kan sætte

$$S_b = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$

Den vil have en teoretisk relativ Usikkerhed

$$\left(\frac{\Delta S_b}{S_b}\right)_t = \frac{r_1}{S_b}\left(\frac{\Delta r_1}{r_1}\right) + \frac{r_2}{S_b}\left(\frac{\Delta r_2}{r_2}\right) + \frac{r_3}{S_b}\left(\frac{\Delta r_3}{r_3}\right) + \frac{r_4}{S_b}\left(\frac{\Delta r_4}{r_4}\right)$$

eller, da Enkeltbestemmelserne relativt alle er lige sikre, $\left(\frac{\Delta S_b}{S_b}\right)_t = \left(\frac{\Delta r}{r}\right) =$ ca. 0,001 i vort Eksempel. Den praktiske Usikkerhed bliver herefter

$$\left(\frac{\Delta S_b}{S_b}\right)_p = 0{,}001\,\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}}{1 + 2 + 3 + 4} \sim 0{,}001 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}0005.$$

S_m har en Usikkerhed paa 0,001. Differensen $S_b - S_m$ faar altsaa en teoretisk Usikkerhed 0,0015 en praktisk paa $^2/_3$ heraf eller 0,001. Den faktisk fundne Differens er nu kun 0,0007 af Summen, hvad der viser, at Overensstemmelsen i det væsentlige er saa god, som den kan ventes at ville blive. Imidlertid tillader den paaviste Overensstemmelse os ikke at drage den Slutning, at Tallene i Tabellen er fejlfri Bestemmelser i Ohm af de fire Modstande. Samme Normal er nemlig anvendt ved alle Bestemmelser. Normalens eventuelle Fejl kan altsaa ikke røbe sig i Prøven.

Opgaver.

Opg. 1. En Skruefjeders Stivhedskoefficient blev bestemt statisk og dynamisk. Forsøget udførtes for at afgøre, om der var Forskel paa de to Konstanter. (Isotermisk og adiabatisk Elasticitet). Statisk fandtes 7860 cgs $\pm$ 0,5 %, dynamisk 7930 $\pm$ 0,9 %. Er der herefter med Sikkerhed paavist nogen Forskel?

Opg. 2. To større Modstande $1\,n$ og $4\,n$ udmaaltes ved Hjælp af et Millivoltmeter og en Præcisionsmodstandskasse (Tolerans 0,2 ‰). Substitutionsmetoden benyttedes. Som Kontrol maaltes Summen $1\,n + 4\,n$. Bestemmelserne gav:

Modstand	Modstand	Usikkerhed
$1\,n$	97,2 Ω	1 ‰
$2\,n$	109,0 -	1 -
$1\,n + 2\,n$	206,1 -	2 -

Stemmer den maalte Sum med den beregnede?

Opg. 3. Ved et Polarisationsapparat undersøgtes Drejningen af *Na*-Lys i en Sukkeropløsning. Derved fandtes

Normalopløsning:

Nulstilling I af Analysator: $1{,}3 \pm \frac{0{,}7}{\sqrt{10}}$ (10 Gentagelser)

— II - — $1{,}1 \pm \frac{0{,}3}{\sqrt{10}}$ do.

Indstilling I ved Rørlængde 20 cm: $45{,}7 \pm \frac{0{,}7}{\sqrt{10}}$ do.

— II - — 20 - $45{,}8 \pm \frac{0{,}4}{\sqrt{10}}$ do.

— I - — 40 - $89{,}6 \pm \frac{0{,}6}{\sqrt{6}}$ (6 Gentagelser)

— I - — 20 -

og $^2/_3$ Normalopløsning: $30{,}3 \pm \frac{0{,}5}{\sqrt{6}}$ do.

Det skal undersøges, om disse Iagttagelser tillader at slutte, at Drejningen er proportional med Længden af Røret og med Koncentrationen. Stemmer de to Værdier for Drejningen i 20 cm af Normalopløsningen? (Det vil erindres, at Analysatoren »slukker« Lyset i to Stillinger 180^0 fra hinanden. Det er disse Stillinger, der betegnes ved I og II).

KAP. VI.

DE GUNSTIGSTE BETINGELSER FOR MAALINGEN BESTEMT VED UDTRYKKET FOR USIKKERHEDEN.

I mange Tilfælde kan Udtrykket for Resultatets Usikkerhed give os nyttige Oplysninger om, hvorledes vi skal arbejde for at opnaa den største Sikkerhed ved Brugen af en eller anden Maalemetode eller Fremgangsmaade. Vi vil belyse dette ved enkelte Eksempler.

Eks. 1. **Usikkerhedens Afhængighed af Kontaktstillingen ved Wheatstones Traadbro.** I Almindelighed haves til Brug ved Maalinger med Wheatstones Traadbro en Modstandskasse, der indeholder en Række kendte Modstande. Hvor paa Traaden Kontakten kommer til at staa, vil da afhænge af, hvilken Sammenligningsmodstand vi benytter. Hvis Galvanometret er tilstrækkelig følsomt, vil Sikkerheden paa Bestemmelsen af Kontaktstillingen praktisk set være konstant uafhængig af Stedet paa Traaden. Den vil nemlig blive lig Aflæsningsusikkerheden eller i Almindelighed ca. $^1/_{10}$ Inddeling. Denne Iagttagelsesusikkerhed vil imidlertid give Anledning til forskellig Usikkerhed i Bestemmelsen af den ubekendte Modstand, naar vi arbejder f. Eks. tæt ved Enden af Broen, og naar vi arbejder inde paa Midten af Traaden. Idet Teorien for Wheatstones Bro er:

$$x = R \cdot \frac{l}{L - l}$$

hvor R er Sammenligningsmodstanden, l Kontaktstillingen og L Traadens hele Længde, faaes nemlig:

$$f = \frac{\Delta x}{x} = \frac{L}{L - l} \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Usikkerheden paa Bestemmelsen af den ubekendte Modstand x er altsaa en Funktion af l. Vi ser let, at, hvis l enten er meget lille eller meget nær ved L, vil f blive stor. Vi maa derfor ikke arbejde for tæt ved Enderne af Traaden. Usikkerheden bliver, som det næsten umiddelbart kan ses, mindst paa Midten af Traaden. Dette vil ogsaa fremgaa af en lille Regning. Søger vi Minimum for f ved at sætte

$$\frac{df}{dl} = o, \text{ finder vi}$$

$$(l - L) + l = o$$

$$l = \frac{L}{2}$$

Vi skal senere se, at der ogsaa er andre Grunde, der taler for at arbejde saa nær Midten som muligt. Foreløbigt har vi altsaa vist, at vi ved at gøre det, reducerer den uundgaaelige Iagttagelsesusikkerheds Indflydelse saa meget som muligt. — Vi kan afbilde Funktionen $\frac{L}{(L - l)l}$ og derved f' Variation med l i en Kurve.

Denne vil have det Udseende, som Fig. 28 antyder. Kurven viser, at Usikkerheden er praktisk set konstant paa et temmelig stort Stykke af Traaden. Vi behøver derfor ikke at være altfor ængstelige for at fjerne os selv ret betydeligt fra Midten af denne.

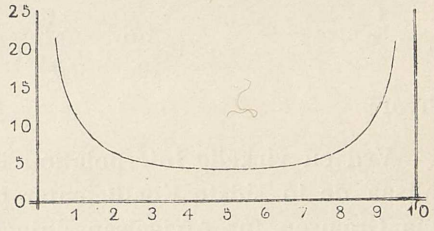

Fig. 28.

Eks. 2. **Lineær Interpolation og Ekstrapolation.** De mindste Normaler i de Sæt, der benyttes ved vore sammenlignende Maalinger, er ofte endnu for store til, at man kan bringe Ligevægt — taget i vid Betydning — til Veje ved

Hjælp af dem. Da maa Interpolation undertiden (ikke altid) anvendes. Vi kan belyse den lineære Interpolation ved et Eksempel taget fra Vejning. Lad Tungen, naar Vægten er tom og i Ligevægt, pege paa Delestregen a_0 Fig. 29 (Vægtens egen Ligevægtsstilling). Ved en Vejning af den ubekendte Vægt R finder vi, at Ligevægtsstillingen bliver a_1, naar Lodderne P er lagt paa, derimod a_2, naar Loddernes Vægt er $P + 1$ *mg*. Vi interpolerer os da om nødvendigt til den Brøkdel x af 1 *mg*., der skulde være lagt til P for at faa Tungen til at pege paa a_0. Ved denne Interpolation forudsætter vi, at Tungens Flytning er proportional med Tilvæksten til P. Naar 1 *mg* da giver Flytning $a_1 - a_2$, skal der til at give Flytning $a_1 - a_0$ en Vægtforøgelse x, som er bestemt ved

$$\frac{x}{1} = \frac{a_1 - a_0}{a_1 - a_2}.$$

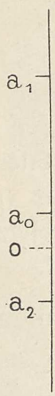

Fig. 29.

Lad os antage, at vi kender Usikkerheden paa Bestemmelsen af a_0, a_1 og a_2. Vi kan betegne den ved Δa. Vi har da, at Usikkerheden paa x bliver

$$\Delta x = -\frac{(a_1 - a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \cdot (\pm)\,\Delta a_0 + \frac{(a_0 - a_2)}{(a_1 - a_2)^2} \cdot (\pm)\,\Delta a_1 + \frac{(a_1 - a_0)}{(a_1 - a_2)^2} \cdot (\pm)\,\Delta a_2.$$

hvor

$$\Delta a_0 = \Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a$$

Ved en virkelig Interpolation tør vi antage, at $a_1 > a_0 > a_2$ altsaa de to sidste Koefficienter positive. Vi maa da for at faa Grænsen for Afvigelsen antage, at Δa_0 er negativ, altsaa regne med, at

$$\Delta x = \frac{a_1 - a_2}{(a_1 - a_2)^2}\Delta a_0 + \frac{(a_0 - a_2)}{(a_1 - a_2)^2}\Delta a_1 + \frac{(a_1 - a_0)}{(a_1 - a_2)^2}\Delta a_2 = \frac{2\,\Delta a}{(a_1 - a_2)}.$$

Den relative Usikkerhed er bestemt ved

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{2\,\Delta a}{(a_1 - a_0)}.$$

Det, der staar paa højre Side, er, som det let vil ses, netop den relative Usikkerhed paa Bestemmelsen af Udslaget $a_1 - a_0$, hvormed x er proportional.

Ved Bestemmelsen af x er det iøvrigt maaske mindre den relative Usikkerhed end den absolute Δx, der interesserer. Det ses, at

$$\Delta x = \frac{2\,\Delta a}{f} \text{*)},$$

hvor f er Følsomheden d. v. s. Udslaget for 1 mg. At det er den absolute Usikkerhed, vi her interesserer os mest for, ligger i, at x skal føjes til Størrelsen P, og det er Usikkerheden paa $P + x = R$, vi ønsker at kende. Lad os undersøge, hvad den bliver. Vi har

$$R = P + x$$

Heraf faas

$$\Delta R = \Delta P + \Delta x.$$

Vi antager, at $\Delta P = 0$ — d. v. s., at Normalerne ingen væsentlig Fremstillingsusikkerhed har. Da er

$$\Delta R = \Delta x$$

og

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta x}{P + x}.$$

Da x her i Almindelighed er lille i Forhold til P, tør vi sætte

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta x}{P}$$

I denne Regning indgaar Δx og ikke $\frac{\Delta x}{x}$; men vi kan dog ogsaa omtrent ligesaa bekvemt benytte Udtrykket

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{x}{P} \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)$$

der forudsætter Kendskab til den relative Usikkerhed paa x.

---

*) Egentlig $\Delta x = \frac{2\,\Delta a}{f} \cdot 1.$

Udtrykket for Δx giver nu den teoretiske Usikkerhed. Den praktiske faas ved Multiplikation med Reduktionsfaktoren

$$F = \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}$$

hvor ε_1, ε_2 og ε_3 forholder sig som

$$a_1 - a_2,\ a_0 - a_2 \text{ og } a_1 - a_0.$$

Hvis $a_1 - a_2$ antages lig 4,2, og vi tænker os $a_0 - a_2 = 2{,}1$, altsaa $a_1 - a_0$ ligeledes lig 2,1, bliver $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 1$ og $F = \frac{\sqrt{6}}{4} \sim 0{,}6$. Var $a_0 - a_2 = 0{,}5$, vilde vi sætte $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 1$, hvorved $F = \frac{\sqrt{2}}{2} \sim 0{,}7$. Den praktiske Grænseusikkerhed er altsaa godt det halve af den teoretiske.

Ekstrapolation. Hvis a_2 i vort Eksempel falder paa samme Side af Vægtens egen Ligevægtsstilling som a_1, kan x endnu findes, dersom vi tør gaa ud fra, at Tungens Flytning ogsaa udenfor Intervallet $a_1 - a_2$ er proportional med Belastningstilvæksten — Betingelsen for Ekstrapolation. Er denne Betingelse opfyldt, haves som før

$$\frac{x}{1} = \frac{a_1 - a_0}{a_1 - a_2}$$

Vi faar følgelig det samme Udtryk for Δx som ovenfor, men i dette er nu, kan vi regne,

$$a_1 > a_2 \text{ og } a_1 > a_0 \text{ men } a_2 > a_0,$$

saa at den midterste Koefficient bliver negativ. Usikkerheden bliver da

$$\Delta x = \frac{a_1 - a_2}{(a_1 - a_2)^2} \Delta a_0 + \frac{a_2 - a_0}{(a_1 - a_2)^2} \Delta a_1 + \frac{a_1 - a_0}{(a_1 - a_2)^2} \Delta a_2$$

$$\Delta x_e = \frac{2\,(a_1 - a_0)}{(a_1 - a_2)^2} \Delta a$$

Lad os sammenligne dette Udtryk med Udtrykket for Usikkerheden ved Interpolationen

$$\Delta x_i = \frac{2\,\Delta a}{(a_1 - a_2)} = \frac{2\,(a_1 - a_2)}{(a_1 - a_2)^2}\,\Delta a,$$

idet vi benytter Fig. 30 *a* og *b*. $a_1 - a_2$ er i begge disse Figurer lige store. Vi ser da, at

$$\Delta x_e > \Delta x_i,$$

og at

$$\frac{\Delta x_e}{\Delta x_i} = \frac{L}{a_1 - a_2}$$

Lad os antage, at vi endnu skulde have lagt p mg. paa for at faa Viserne til at staa ved a_1 i Fig. 30 *a*. Da kan vi sætte

$$L = (p + h)\,(a_1 - a_2)$$

hvor h er en ægte Brøk. Vi indser altsaa, at vi ved at anvende Ekstrapolation i dette Tilfælde, faar en Usikkerhed mellem p og $p + 1$ Gange saa stor, som den, vi udsætter os for ved Interpolationen.

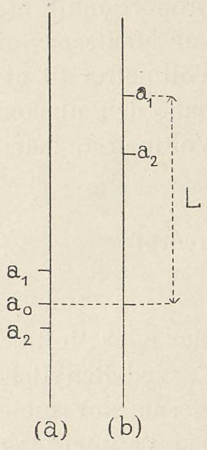

Fig. 30.

Vi har, som det ses, sammenlignet de teoretiske Usikkerheder. Intet forandres imidlertid i Billedet af Forholdet mellem Δx_e og Δx_i, om vi i Stedet for sammenligner de praktiske Usikkerheder. Vi saa, at Reduktionsfaktoren ved Interpolation vilde have en Værdi omkring 0,6 à 0,7. Den samme Værdi vil den have ved Ekstrapolation. Her er ε_1, ε_2 og ε_3 Tal, der forholder sig som $a_1 - a_2$, $a_2 - a_0$ og $a_1 - a_2$. Lad $a_1 - a_2 = 4{,}2$, $a_2 - a_0 \sim p \,.\, 4{,}2$, $a_1 - a_0 = (p + 1)\ 4{,}2$. Er nu p betydelig, f. Eks. 10, bliver Reduktionsfaktoren med ikke ringe Tilnærmelse $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7$. Er $p = 1$, bliver den ca. 0,6.

Eks. 3. **Voltmetret brugt som Ohmmeter.** Et almindeligt Voltmeter vil i mange Tilfælde være ret vel egnet til Maaling af store Modstande. Maalingen foregaar paa den Maade, at man fra et Batteri sender Strøm gennem den ubekendte Modstand R og Voltmetret (V) indskudt i Række. Af Voltmetrets Udslag kan Modstanden da beregnes, naar man

først har iagttaget Udslaget for Maalespændingen uden indskudt Modstand.

Voltmetret er jo nemlig en Strømmaaler, hvis Udslag er proportionalt med den Strøm, der passerer Apparatet. Hvis vor Maalespænding uden nogen Modstand indskudt bringer Voltmetret til at slaa ud til a_0, og hvis den samme Spænding, naar den ubekendte Modstand R er indskudt i Række med Voltmetret, faar dette til at slaa ud til a, har vi altsaa

$$e = r_v\,(ka_0),$$
$$e = (r_v + R)\cdot(ka),$$

hvoraf

$$R = r_v\,\frac{a_0 - a}{a},$$

idet r_v er Voltmetrets Modstand.

Ved Benyttelse af Metoden vil man i Almindelighed vælge a_0 saa stor som mulig dog ikke større end det største Udslag paa Voltmetret; d. v. s. man vil i Almindelighed ikke benytte større Maalespændinger end saadanne, der kan iagttages direkte ved Instrumentet selv.

Vi vil undersøge Usikkerheden paa Maaling af Modstande af forskellig Størrelse. Vi regner foreløbig alene med den Usikkerhed i Iagttagelsen, der hidrører fra Aflæserens Skøn. Denne Usikkerhed kan vi sætte til 0,1 Inddeling. Usikkerheden i Modstandsmaalingen bestemmes da ved:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \frac{a_0 + a}{a_0 - a}\cdot\frac{\Delta a}{a} = \frac{a_0 + a}{a_0 - a}\cdot\frac{0{,}1}{a}$$

Dette Udtryk siger os, at Sikkerheden er meget ringe, naar a nærmer sig a_0, — thi saa bliver første Faktor meget stor. Sikkerheden bliver imidlertid ogsaa meget lille, naar a er lille, thi da bliver $\frac{\Delta a}{a}$ stor. For et bestemt a maa Usikkerheden $f = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t$ have et Minimum. Vi finder dette ved at sætte $\frac{df}{da} = 0$. Herved faas til Bestemmelse af den Værdi for a, der giver den sikreste Maaling,

$$a^2 + 2a_0 a - a_0^2 = 0,$$

hvoraf

$$a = a_0(\sqrt{2} - 1) = \text{ca. } 0{,}4\, a_0.$$

Ligger a omkring denne Værdi, faas

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1{,}4}{0{,}6} \cdot \frac{\Delta a}{0{,}4\, a_0}, \text{ eller idet}$$

$\Delta a = 0{,}1$ og a_0 f. Eks. 100,

$\frac{\Delta R}{R} = \frac{6}{1000} = 6\,{}^0/_{00}$. Denne mindste Værdi for Usikkerheden faas, naar Udslaget ligger i Nærheden af $0{,}4 \cdot 100 = 40$, d. v. s. naar den Modstand, man maaler paa, er af Størrelsen

$$R = r_v \sqrt{2} = 1{,}4 \cdot r_v.$$

Vi kan dog meget vel benytte Udslag, der ligger endog langt fra 40, uden at udsætte os for væsentlig større Usikkerhed end Minimalusikkerheden, hvad følgende Tabel beregnet af det almindelige Udtryk for $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = f$ viser:

a	Usikkerhed f
0	∞
5	2,2 %
10	1,2 -
20	0,8 -
30	0,7 -
40	0,6 -
50	0,6 -
60	0,6 -
70	0,8 -
80	1,1 -
90	2,1 -
95	4,1 -
100	∞

Af Tabellen ses, at Sikkerheden er omtrent konstant fra 20 til 70, d. v. s. ved Maaling af Modstande fra ca. 4 r_v til $\frac{3}{7} \cdot r_v$.

Anm. Vi har bygget den foregaaende Undersøgelse paa Udtrykket for den teoretiske Usikkerhed. Paa Forhaand maa det betragtes som givet, at det derved vundne Billede af Forholdene ikke kan være væsentligt forfalsket. Vi kan let verificere dette. Udtrykket for den praktiske Grænseusikkerhed bliver:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = \frac{a_0}{a_0 - a} \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_0}{a_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{a_0^2 + a^2}}{a_0 - a} \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

saafremt $\Delta a_0 = \Delta a$.

Søges nu Minimum for $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$, faas som Betingelse:

$$a^3 + 2a\,a_0^2 - a_0^3 = 0.$$

Lad os antage $a_0 = 100$ og søge den Værdi for a, der gør

$$y = a^3 + 2 \cdot 10^4 a - 100 \cdot 10^4$$

til Nul.

Vi finder ved simpel Indsættelse følgende sammenhørende Værdier for y og a:

a	y
30	$-37 \cdot 10^4$
40	$-14 \cdot 10^4$
50	$+12 \cdot 10^4$
60	$+58 \cdot 10^4$

Ved at afbilde denne Tabel grafisk faas, at $y = 0$ for $a =$ ca. 45. — Minimum i $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$ faas altsaa for meget nær den samme Værdi, som gav et Minimum for $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t$

I de nu gennemgaaede Eksempler gav Overslaget os umiddelbart Svar paa Spørgsmaalet om de gunstigste Arbejdsbetingelser, og det bør nøje mærkes, at Resultaterne af vore Undersøgelser i denne Henseende er ganske uafhængige af vort Kendskab til den absolute Størrelse af Usikkerheden paa Iagttagelserne. I andre Tilfælde kan Spørgsmaalet om de bedste Betingelser for Maalingen først besvares efter en nærmere empirisk Undersøgelse af, hvorledes Usikkerheden paa de indgaaende Iagttagelser varierer, naar vi ændrer Maalingens Betingelser.

Eks. 4. **Sikkerhedens Variation med L (Afstanden fra Spalte til Billedskærm) ved Maaling af en Linses Brændvidde.** Vi har ovenfor fundet, at Usikkerheden paa Bestemmelsen af Brændvidden p for en tyndere positiv Linse ved Udmaaling af a og L i Udtrykket $p = \frac{a(L-a)}{L}$ er bestemt ved

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{(L-2a)}{(L-a)} \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

For at se, hvorledes $\frac{\Delta p}{p}$ varierer med L ved Maaling af en given Linse, maa vi udtrykke $\frac{\Delta p}{p}$ alene ved L og p, idet vi eliminerer a af Udtrykket for den relative Usikkerhed. Herved faas

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2\sqrt{\frac{L^2}{4} - pL}}{L} \cdot \left(\frac{\Delta a}{p}\right).$$

Dette Udtryk synes at vise, at Usikkerheden skulde kunne blive 0, nemlig naar $L = 4p$.

I dette Tilfælde falder de to Stillinger, i hvilke Linsen giver et skarpt Billede af Spalten, sammen til en — midt mellem Spalte og Skærm. — Nu kan der naturligvis ikke være Tale om en Usikkerhed, der er absolut Nul, (selvfølgelig godt om en Usikkerhed, der er praktisk set 0). Udtrykket for

$\frac{\Delta p}{p}$ tillader os da i Virkeligheden, som det let vil forstaas, heller ikke at drage den antydede Slutning. Det kan først vise os noget om, hvorledes $\frac{\Delta p}{p}$ varierer med L, naar vi kender Δa' Variation med denne Størrelse. Hvad denne Variation angaar, viser Forsøg (se Fig. 5), at Δa, naar L er væsentlig større end $4p$, er saa nogenlunde konstant. Naar L nærmer sig $4p$, vokser Δa imidlertid stærkt. Resultatet er, at Formindskelsen i Faktoren $\sqrt{\frac{L^2}{4} - pL}$ i det hele og store holdes i Skak af Forøgelsen i Δa, saa $\frac{\Delta p}{p}$ i det væsentlige bliver uafhængig af L.

Eks. 5. **De forskellige Indstillingsmaader ved Fotometri.** Ved Lysmaaling er, som det vil ses, to Indstillingsmaader mulige. Man kan holde Afstanden mellem de to Lyskilder konstant og stille Fotometret ind, eller man kan holde Afstanden mellem Fotometret og den ene Lampe konstant og stille den anden Lampe ind. En tredie Mulighed er den, at man kobler Fotometret til den ene Lampe og stiller Aggregatet ind, mens den anden Lampe forbliver i sin Stilling. Denne Fremgangsmaade, der har fundet almindelig Anvendelse, falder dog i denne Forbindelse sammen med Tilfælde Nr. 2. Vi spørger nu om, hvilken af de to førstnævnte Fremgangsmaader, der er den sikreste. Ved den Sammenligning, vi vil foretage, tænker vi os selvfølgelig, at Forholdene iøvrigt er ganske ens indenfor Opstillingen, saaledes som Fig. 31 *a* og *b* antyder.

Vi har da

Tilf. a. $$f = \frac{I_1}{I_2} = \frac{l_1^2}{(L - l_1)^2}, \qquad \frac{\Delta f}{f} = \frac{2L}{L - l_1} \cdot \frac{\Delta l_a}{l_1}$$

Tilf. b. $$f = \frac{I_1}{I_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2}, \qquad \frac{\Delta f}{f} = 2 \cdot \frac{\Delta l_b}{l_1}$$

Specielt faas for $I_1 = I_2$, altsaa $l_1 = \frac{L}{2}$

$$\frac{\Delta f}{f_{(a)}} = \frac{8\,\Delta l_a}{L}, \qquad \frac{\Delta f}{f_{(b)}} = \frac{4\,\Delta l_b}{L}$$

Glemmes det her, at Δl_a og Δl_b ikke er og ikke kan være lige store, føres man til den forkerte Slutning, at den sidste Indstillingsmaade skulde være dobbelt saa god som den første. I Virkeligheden ses det for det simple Tilfælde, at $l_1 = l_2$, let, at $\frac{\Delta f}{f_{(a)}} = \frac{\Delta f}{f_{(b)}}$, altsaa at de to Metoder maa være lige sikre. Fotometret skal nemlig i Tilfælde a kun flyttes det halve af, hvad Lampen I_1 i Tilfælde b skal flyttes (bort fra den rig-

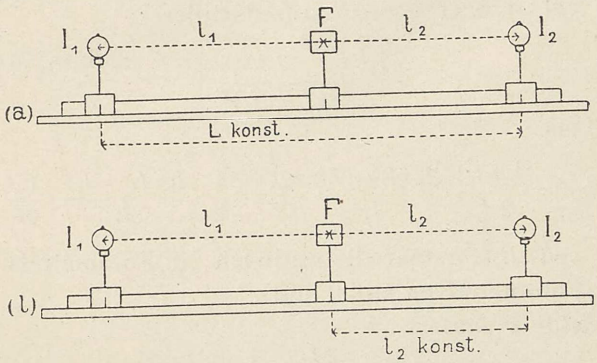

Fig. 31.

tige Indstilling), for at man skal kunne se en kendelig Forskel paa Belysningen af de to Felter i Fotometret. Heraf tør sikkert sluttes, at

$$\Delta l_a = \frac{1}{2}\,\Delta l_b, \text{ saa, at}$$

$$\frac{\Delta f}{f_{(a)}} = \frac{\Delta f}{f_{(b)}}.$$

Denne sidste Ligning gælder nu i ethvert Tilfælde, hvad vi kan vise paa følgende Maade. Er Indstillingen endnu ikke foretaget, bliver Forskellen F i Belysning af de to Felter bestemt ved Udtrykket

$$F = \frac{I_1}{4\pi l_1^2} = \frac{I_2}{4\pi l_2^2}$$

Nu maa der en vis Forskel E til, for at Felterne skal kunne erkendes som ulige belyst, og Usikkerheden maa utvivlsomt sættes proportional med den Forandring i l_1, der skal til for at frembringe denne Forskel i Belysning. Vi kalder Forandringen i de to Tilfælde henholdsvis k_a og k_b og har da, at den i Tilfælde a er bestemt ved

$$\Delta F = \frac{2}{4\pi}\left(\frac{I_1}{l_1^3} + \frac{I_2}{(L-l_1)^3}\right) k_a = E$$

hvor — vel at mærke — l_1 tilfredsstiller

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{l_1^2}{(L-l_1)^2}.$$

Herved faas

$$k_a = \frac{4\pi l_1^2}{2 I_1} \cdot \frac{l_1 (L-l_1)}{L} \cdot E = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_1 (L-l_1)}{L} \cdot \frac{E}{B},$$

naar vi ved B forstaar Belysningen af Fotometrets Felter, (efter at Fotometret er stillet ind).

I Tilfælde b faas

$$\Delta F = \frac{2 I_1}{4\pi l_1^2} \cdot \frac{1}{l_1} \cdot k_b \qquad \text{altsaa}$$

$$k_b = \frac{1}{2} l_1 \cdot \frac{E}{B}.$$

Idet Δl_a og Δl_b i vort Overslag ovenfor maa sættes proportionale henholdsvis med k_a og k_b ($\Delta l_a = C k_a$, $\Delta l_b = C k_b$), faas, at de to Usikkerheder bliver lige store, og at de er bestemte ved

$$\frac{\Delta f}{f} = C \cdot \frac{E}{B}.$$

Dette Udtryk vilde kunne sige os noget om $\frac{\Delta f}{f}$ Variation med Belysningen — altsaa ogsaa med Afstanden mellem de

to Lyskilder — dersom E' Afhængighed af B var kendt. Var $\frac{E}{B}$ konstant og C naturligvis ogsaa, vilde Usikkerheden $\frac{\Delta f}{f}$ være uafhængig af Afstanden mellem Lamperne.

Forsøg synes at vise, at $\frac{\Delta f}{f}$ i Virkeligheden i nogen Grad er afhængig af Afstanden eller Belysningen. Vi har i vor Diskussion af Grænseusikkerheden i Tabel V pag. 30 og i Fig. 4 gengivet en Undersøgelse over Indstillingsusikkerhedens Variation med Afstanden mellem Lamperne. Indsættes denne Tabels Data i Udtrykket $\frac{\Delta f}{f} = \frac{2L}{L-l} \cdot \frac{\Delta l}{l}$, faas de i hosstaaende Tabel anførte Værdier for $\frac{\Delta f}{f}$

L	Belysning	$\frac{\Delta f}{f}$
125	111,8	0,84
150	76,0	0,85
175	56,5	1,16
200	41,0	0,80
225	32,7	0,70
250	26,2	0,83
275	21,3	0,70
300	17,6	0,86

$\frac{\Delta f}{f}$ synes efter denne Tabel at have et omend kun svagt udpræget Minimum for en Belysning paa ca. 30 af Fotometrets Skærme. Det skal bemærkes, at der for Δf er indsat $\sqrt{\lambda_2(l)}$ ikke Grænseusikkerheden, hvis Usikkerhed er større end $\sqrt{\lambda_2(l)}'$, og som derfor er mindre egnet end dette Talmaal til Prøve for en Variation saa svag, som den her forekommende.

Opgaver.

Opg. 1. En stor Modstand x skal maales ved Sammenligning med en kendt af samme Størrelsesorden. Maalingen udføres paa den Maade, at Modstanden først indskydes alene i en Jævnstrømskreds med passende elektromotorisk Kraft e, (der ikke behøver at kendes). Derved faas Udslaget a_0 paa et indskudt Millivoltmeter. Efter Iagttagelsen af dette Udslag indskydes yderligere den kendte Modstand R, hvorved Udslaget bliver a.

Af a, a_0 og R bestemmes nu x ved følgende Udtryk

$$x = R \frac{a}{a_0 - a}.$$

Hvilken er den bedste Sammenligningsmodstand til Maaling af en given Modstand?

Hvilken Sikkerhed faas i det gunstigste Tilfælde?

Hvorledes varierer Usikkerheden med R?

Opg. 2. Momentet M af en Stangmagnet skal bestemmes ved Kompasmagnetometret. Forudsat at dette sker ved Udmaaling af Afstanden a mellem Magnetens Midtpunkt og Kompassets Akse og ved Iagttagelse af Udslaget α, som Magneten bevirker i den maalte Afstand, spørges der: Hvilket Udslag giver den bedste Bestemmelse af M, og hvorledes varierer Usikkerheden med α? Usikkerheden paa Bestemmelsen af α er praktisk set uafhængig af Udslaget. Usikkerheden paa Udmaalingen af Afstanden a er at betragte som forsvindende.

Opg. 3. Inertimomentet for et svingende System skal bestemmes ved Sammenligning med Inertimomentet I_0 for en afdrejet Ring. Hvor stor skal I_0 i et givet Tilfælde vælges, naar en saa stor Sikkerhed som mulig tilstræbes?

Opg. 4. Hvilken af de to Stillinger af Linsen, mellem Spalte og Billedskærm, maa paa Forhaand (ved den almindelige Metode) antages at ville give den bedste Bestemmelse af Brændvidden?

Opg. 5. Hvilken Iagttagelsesmaade giver formentlig ved en Linsemaaling størst Sikkerhed — enten den, ved hvilken

Afstanden L holdes konstant, mens Linsen stilles ind, eller den, hvor a holdes konstant, mens Skærmen indstilles? (L Afstanden mellem Skærmene, a Afstanden fra Spalte til Linse).

Opg. 6. Ved Bestemmelse af en given negativ Linses Brændvidde ved Sammenligning med en positiv Linse opstaar følgende Spørgsmaal: Hvilken Brændvidde maa den positive Linse helst have, og hvilken Afstand d mellem de to Linser vil give den sikreste Maaling? Det anføres, at Usikkerheden paa Bestemmelsen af Linsekombinationens Brændvidde, indenfor visse Grænser, i det væsentlige er uafhængig af Brændvidden og Afstanden d.

Opg. 7. Ved Bestemmelsen af det logaritmiske Decrement for en svingende Bevægelse iagttages en Række paa hinanden følgende hele Sving. Kaldes disse b_1, b_2 . . . b_n haves, at Dæmpningsforholdet f er lig

$$f = \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{b_3}{b_4} \cdots \frac{b_{n-1}}{b_n}, \text{ altsaa ogsaa}$$

$$f = \sqrt[n-1]{\frac{b_1}{b_n}}$$

Diskuter Spørgsmaalet: Hvor stort et Antal Sving giver den bedste Bestemmelse af f, respektive log.nat. f, naar den sidste Formel anvendes og det forudsættes, at $\Delta b_1 = \Delta b_2 \ldots \Delta b_n = \Delta b$?

Opg. 8. Gennemsnitsdiametren for en Traad kan bestemmes ved Opdriftsmetoden og ved Udmaaling med Mikrometerskrue. Antag at Maalingen skal udføres paa en Traadlængde lig 50 cm, at Vejningen kan udføres med en Sikkerhed af $^1/_{10}$ mg., mens Tykkelsesmaalingen har en Sikkerhed paa $^1/_{1000}$ mm og Maalingen af Traadens Længde en Sikkerhed paa $^1/_{10}$ mm. Hvad bliver Forholdet mellem de to Metoders Sikkerhed ved Traade af forskellig Tykkelse? Hvilken Metode er med andre Ord i et givet Tilfælde at foretrække, naar den størst mulige Sikkerhed tilstræbes?

Opg. 9. Gennemsnitsværdien for Diametren i en Samling paa n Kugler af nominelt samme Størrelse skal bestemmes. Hertil

kan benyttes tre Metoder: 1) Vejning, 2) Udmaaling af de enkelte Diametre (vi antager, at Kuglerne er praktisk set regelmæssige) og 3) samtidig Udmaaling af alle Kuglerne lagt i Række langs en Maalestok. Lad Vejesikkerheden være $^1/_{10000}$ gr. Sikkerheden paa Maaling med Skruen $^5/_{1000}$ mm og Aflæsningssikkerheden paa Maalestokken $^1/_{20}$ mm. Hvorledes stiller de tre Metoders relative Sikkerheder sig da til hinanden ved Kugler af forskellig Diameter og ved forskellige Antal Kugler?

II.

MAALINGENS KILDER TIL USIKKERHED OG FEJL.

Svingende Afvigelse i væsentlige Egenskaber. Maalingens objektive Usikkerhed afspejler Svingninger i Tidens Løb i væsentlige Egenskaber ved Systemet. Men det er ikke alle svingende Variationer i en væsentlig Egenskab, der giver sig til Kende som Usikkerhed. Hvad der her er afgørende er den Hastighed, hvormed Svingningerne foregaar, eller om man vil Svingningernes Periode. Er denne af samme Størrelsesorden som Tiden for en Bestemmelse eller mindre end denne Tid, vil Resultatet svinge fra Bestemmelse til Bestemmelse i en Række Gentagelser, selv om disse foretages i ubrudt Rækkefølge. Vi har da at gøre med egentlig Usikkerhed. Dersom Svingningerne i den væsentlige Egenskab derimod tager en Tid, der er lang imod Tiden for Bestemmelsen, gør den svingende Karakter sig maaske overhovedet ikke gældende ved en Række Gentagelser som de antydede. Resultatets Afvigelse er da ensidig i Forhold til den enkelte Bestemmelse om end maaske svagt varierende, og de svingende Variationer er altsaa praktisk set at opfatte som en Kilde til Fejl. De to her betragtede Tilfælde er Grænsetilfælde, mellem hvilke der optræder Overgangsformer. Om Resultatets Afvigelse ved disse er at behandle som Usikkerhed eller Fejl maa afgøres i hvert enkelt Tilfælde. Vil vi knytte de ovenfor anførte Betragtninger til et konkret Tilfælde, kan vi tænke paa de Variationer, Arbejdsrummets (Milieuets) Temperatursvingninger kan give Anledning til f. Eks. i Maaleobjektets Temperatur. Svingningerne kan, som vi skal se, baade være af hurtigere og

langsommere Karakter d. v. s. baade være en Kilde til Usikkerhed og ensidig Afvigelse i Resultatet, naar dette afhænger af Objektets Temperatur, altsaa naar denne er en væsentlig Egenskab ved Maaleobjektet.

Ofte optræder der i en væsentlig Egenskab f. Eks. netop Systemets Temperatur samtidig Svingninger af forskellig Hastighed. Der kan da være Grund til ved forskellige Navne at adskille disse Svingninger fra hinanden. Vi kunde kalde de Svingninger, der afspejles i Maalingens objektive Usikkerhed, Usikkerhedssvingninger. De Svingninger, der som Følge af deres langsommere Forløb gør sig gældende som Kilder til praktisk set ensidig Afvigelse af Resultatet, kan vi betegne som Makrosvingninger. Endelig kan Svingninger, der foregaar endnu hurtigere end Usikkerhedssvingningerne, optræde. De kunde benævnes Mikrosvingninger.

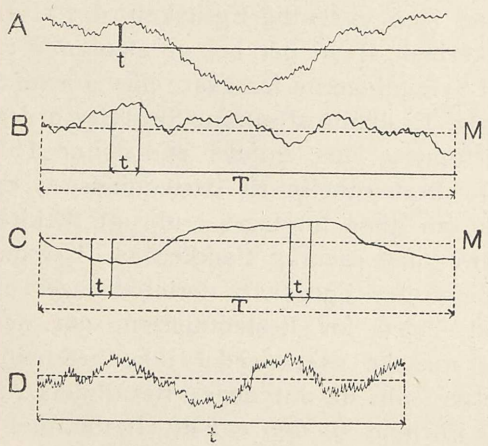

Fig. 32.

De tre Grupper, hvori man saaledes kan dele de optrædende objektive Svingninger efterStørrelsen af deres Periode, kan anskueliggøres ved Figurerne 32 *A*, *B*, *C* og *D*. I *A* er tænkt afbildet Makrosvingninger overlejrede med almindelige Svingninger, muligvis ogsaa med Mikrosvingninger. Tykkelsen af Stregen *t* betegner Iagttagelsestiden. I *B* er en Del af Fremstillingen i *A* tænkt forstørret. Ved *t* fremstilles atter Tiden for en Iagttagelse. I Tiden *T* tænkes Iagttagelsen gentaget en Række Gange. Tages Middelværdien af Gentagelserne, faas *M*. Gentagelsernes Afvigelser fra *M* vil nogenlunde blive Kurvens Afvigelser fra *M* paa de forskellige Steder ned langs Abscisseaksen, forudsat at den objektive Usikkerhed alene gør sig gældende. Afvigelserne vil nogenlunde jævnt fordele sig mellem Fortegnene Plus og Minus. I *C* er Svingningerne, der er overlejrede Makrosvingningerne, blevne noget større. Ved en Række Gentagelser fordelt paa Tiden *T* vil Afvigelserne hidrørende fra det betragtede objektive Forholds Variation kun to Gange skifte Fortegn. Gentagelsernes Svingninger har en ejendomme-

lig Karakter halvvejs den, der kendetegner Usikkerhed, halvvejs den, der karakteriserer den systematiske Variation, som i Almindelighed røber Tilstedeværelsen af en Fejlkilde. *D* endelig afbilder Mikrosvingninger overlejrede almindelige Svingninger. *t* er Tiden for den enkelte Iagttagelse, som antagelig vil give den ved den punkterede Linie antydede Værdi for den søgte Størrelse.

Ensidig Afvigelse i væsentlige Egenskaber. I en Række væsentlige Egenskaber gør der sig maaske slet ingen Ændringer gældende, Egenskaberne er uforandrede, men hermed er ikke sagt, at de har de Værdier, Maalingen forudsætter. De kan have en uforandret ensidig Afvigelse derfra.

Saadan Afvigelse vil ikke opdages ved egentlige simple Gentagelser, hvor mange der end foretages og over hvor stort et Tidsrum de end fordeles. Den vil have en tilsvarende uforandret Afvigelse af Resultatet, til Følge. Modstanden i Tilledningstraadene ved Wheatstones Bro forudsættes i Almindelighed at være praktisk set Nul. Er den det ikke, betegner Modstanden en ensidig Afvigelse fra den forudsatte Værdi af en væsentlig Egenskab ved Systemet, der er uforandret i Størrelse, saalænge Systemet ikke ændres.

I den konstante ensidige Afvigelse af væsentlige Egenskaber fra de for disse forudsatte Værdier maa vi se Kilden til Maalingens Fejl i aller egentligste Forstand. Ikke desto mindre vil man ofte i Praksis behandle saadan Afvigelse som en Kilde til Usikkerhed. Det gælder især, naar den ensidige Afvigelse hidrører fra Uregelmæssighed. Denne betegner en som oftest svingende Variation fra Sted til Sted eller fra Individ til Individ, og fastholdes det nu ikke, at Maaling paa et nyt Sted af et uregelmæssigt Objekt egentlig betyder Maaling paa et nyt Maaleobjekt, altsaa at et uregelmæssigt Maaleobjekt faktisk ikke er et, men flere Maaleobjekter, saa vil Uregelmæssighederne gøre sig gældende ganske som svingende Variationer i Tid, og som saadanne vil man i Praksis ofte til en vis Grad behandle dem.

Vi kan altsaa sammenfatte, hvad der er antydet i dette og det foregaaende Stykke, i følgende Sætninger.

Usikkerhed afspejler svingende Afvigelse i væsentlige Egenskaber, men ikke al svingende Afvigelse er en Kilde til Usikkerhed. Fejl afspejler konstant eller praktisk set konstant ensidig Afvigelse i væsentlige Egenskaber ved uforandret System. Idet man ser bort fra den sidste Bestemmelse, betragter man imidlertid i ikke faa Tilfælde ensidig Afvigelse som en Kilde til Usikkerhed.

Forholdsregler mod Maalingens objektive Usikkerhed. Vi har i Indledningen til den hele Fremstilling defineret Metodens Usikkerhed som den, der hidrører fra Iagttagelsernes uundgaaelige Usikkerhed. Denne sidste omfatter som allerede antydet først og fremmest den subjektive Iagttagelsesusikkerhed, men til den maa der ogsaa regnes praktisk set uundgaaelig objektiv Usikkerhed. Naar det Overslag, vi nu har lært at udføre, har vist os, at en Metodes Usikkerhed tillader Maaling af en given Tolerans, vil det herefter være rimeligt først at rette Opmærksomheden mod de svingende væsentlige Forhold, der iøvrigt kunde gøre sig gældende ved Maalingen. Den objektive Usikkerhed, deres Svingninger tilføjer, maa om fornødent ved særlige Foranstaltninger sættes saa langt ned, at den samlede Usikkerhed ikke overskrider Toleransen eller en vis fastsat Brøkdel af denne, som vi kan kalde Nettotoleransen. Om Foranstaltninger mod Usikkerheden paakræves, maa herved efter Usikkerhedskildens Paavisning afgøres ved en Vurdering af dens Indflydelse paa Maalingens Resultat.

Anm. Den objektive Usikkerhed er principielt undgaaelig. Som en karakteriserende Egenskab ved en Maalemetode kunde vi derfor betragte den ved den subjektive Iagttagelsesusikkerhed bestemte Grænseafvigelse. Gør vi det, følger, at Betingelsen for, at et vist System eller en vis Metode overhovedet (ved Anvendelse af et bestemt Antal Iagttagelser) skal kunne benyttes til Maaling af given Tolerans, er, at den

subjektive Usikkerhed ikke overskrider Toleransgrænsen. Lad denne Betingelse være opfyldt, saa kræver Maalingen med given Tolerans yderligere, at den objektive Usikkerhed reduceres til et saadant Beløb, at den plus den subjektive ikke overskrider Nettotoleransen. I Fig. 32, *a*, *b*, *c*, er disse Betingelser belyst.

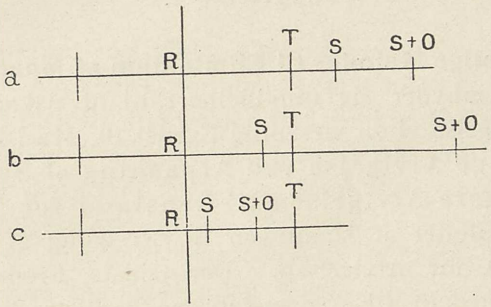

Fig. 33.

T betegner her Toleransgrænsen, *S* den subjektive Usikkerheds Grænseafvigelse, $S + O$ den Grænseafvigelse, den subjektive og objektive Usikkerhed tilsammen kan give Anledning til. Som Forholdene stiller sig i *a*, er Systemet ubrugeligt ved det forudsatte Antal Iagttagelser. I *b* er Systemet principielt brugbart, men den objektive Usikkerhed maa delsvis elimineres. I *c* er Systemet umiddelbart anvendeligt.

Forholdsregler mod Maalingens Fejl. Efter Undersøgelsen af Kilderne til den objektive Usikkerhed retter vi i Planlæggelsen af Maalingen vor Opmærksomhed mod Bestemmelsens Fejlkilder. Det vil erindres, at vi under et betegner Kilderne til Usikkerhed og Fejl som væsentlige Forhold ved Maalingen. Det er da nu de Forhold, der kan give Anledning til ensidig Afvigelse af Resultatet, vi skal betragte, idet det gælder om at sikre Maalingen imod, at disse Forhold bringer Resultatet til at falde uden for Toleransgrænsen.

Altsaa maa vi for det første analysere Maalingen for de antydede væsentlige Forhold — Maalingens

Fejlkilder — dernæst maa vi undersøge disse Fejlkilders Indflydelse, og endelig maa vi eliminere denne Indflydelse — i ethvert Fald til en saadan Grad, at den ensidige Restafvigelse i Forbindelse med den Afvigelse, alle Kilder til Usikkerhed kan give Anledning til, ikke bringer Resultatet til at falde udenfor Toleransgrænsen.

Almindelige Metoder til Elimination af Maalingens Fejl. To Veje frembyder sig umiddelbart til at uskadeliggøre en ensidig Afvigelse af en væsentlig Egenskab. Man kan fjærne den ensidige Afvigelse ved Afpasning af Systemet, og man kan gøre Afvigelsen til Genstand for Maaling og benytte Resultatet af Maalingen til Beregning af en Rettelse (Korrektion) for Afvigelsen. Den sidste Fremgangsmaade kræver Kendskab til Afhængigheden mellem Resultatet og den væsentlige Egenskab. Den første gør det tildels ogsaa, fordi vi maa være i Stand til at afgøre, med hvilken Tolerans Afpasningen skal finde Sted.

Som et Middel til Elimination af en ensidig Afvigelse maa endelig i Praksis ogsaa Uddannelsen af særlige Eliminationsmetoder betragtes, d. v. s. Maalemetoder eller blot særlige Iagttagelsesmaader af en saadan Art, at Fejlens Indflydelse er udelukket.

Planen for den efterfølgende Fremstilling. Det efterfølgende Afsnit er under et Afsnittet om Maalingens væsentlige Forhold — der altsaa omfatter baade Kilderne til Maalingens Usikkerhed og Fejl. Det skal fremdrage en Række almindelige væsentlige Forhold for derved at rette Opmærksomheden paa de Punkter, hvor Kilden til objektiv Usikkerhed og Fejl hyppigst er at finde. Det skal dernæst belyse Vurderingen af de væsentlige Forholds Indflydelse og endelig give typiske Eksempler paa Fremgangsmaader til Elimination af denne. Det bedste Overblik over de talrige væsentlige Forhold, som kan gøre sig gældende ved Maalingen, opnaar man vistnok

ved først at betragte hvert af Systemets Elementer for sig — saaledes som man maa gøre det ved den praktiske Planlæggelse af Maalingen — for saa tilsidst at rette Opmærksomheden mod det fuldstændige System, bygget op af disse Elementer. Følges denne Linie i Fremstillingen, saaledes som det her er sket, vil det være nyttigt at indlede med en Oversigt over Systemets Elementer og deres Kombinationer.

Maalesystemet og dets Elementer. I den simpleste Form bestaar Systemet foruden Maaleobjektet kun af et enkelt Maaleapparat, fremstillet for direkte Bestemmelse af den paagældende Størrelse. Maaleapparatet kan vi da betegne som et primært System, Maalingen som en direkte Maaling. Det primære System maa føre Maalingen af den søgte Størrelse tilbage til Bestemmelse af Egenskaber, der umiddelbart kan iagttages uden Hjælp af andre Redskaber (heraf Navnet primært System). Det vil sige, Maaling maa i Almindelighed føres tilbage til Optælling af Længdeenheder paa en Maalestok eller Antal Elementer i en Skala af Normaler f. Eks. et Antal Vægtlodder, Længdemaalings- og Vinkelmaalingssystemernes Hovedelement er i Overensstemmelse hermed den almindelige Maalestok, resp. Vinkelmaalestokken eller Kredsen. De »selvindstillende Udslagssystemer« (Westoninstrument, Thermometer) maaler den søgte Størrelse ved Udslaget af en Viser over en Skala (Optælling af Længdeenheder) og ved »Nulsystemer« (den almindelige Vægt, Wheatstones Modstandsbro m. m.) føres Maalingen tilbage til Optælling af Normaler dog ogsaa undertiden til Aflæsning paa en Maalestok (Bismeren, Wheatstones Traadbro). Nulsystemerne benyttes iøvrigt under Interpolationen som Udslagssystemer og er derfor i Almindelighed alene af den Grund forsynet med en Skala. Af primære Systemer bygges herefter sekundære Systemer for indirekte Maaling op. Disse Systemer kan igen være mere eller mindre sammensatte. I et Termoelement i Forbindelse med et Voltmeter haves et simpelt sekundært System. Ved Maaling

af en Modstand ved Spænding- og Strømmaaling arbejdes med et System, der bestaar af Maaleobjektet, et Voltmeter, en Strømmaaler (og desforuden af en Spændingskilde, Regulermodstand m. m.). Ved mere sammensatte Bestemmelser benyttes endelig ofte Systemer byggede sammen af et endnu større Antal primære Systemer, eller Bestemmelsen opløser sig i en Række af hinanden uafhængige direkte (eller indirekte) Maalinger. Af den her givne Oversigt fremgaar, at vi kan betegne Maalestokken og Normalen som Grundelementerne i Maaleredskabet. Det primære System er bygget op af de nævnte Elementer forbundne ved nye Elementer, og derefter er Systemerne for indirekte Maaling byggede sammen af primære Systemer*).

I Overensstemmelse med det her givne Billede af Systemet anlægger vi nu i det væsentlige følgende Plan for vor Fremstilling. Først betragter vi Maaleobjektet. Derefter Grundelementerne i det primære System, altsaa Normal og Skala. Vi gaar herpaa over til selve det primære System. Vi belyser de vigtigste Former, dette System antager, ved Betragtning af typiske Eksempler paa Længdemaalingssystemer, af et karakteristisk selvindstillende Udslagssystem og af et Nulsystem. Efter saaledes at have betragtet det fuldstændige Maalesystems to Hovedelementer hver for sig retter vi i et særligt Kapitel

*) I Almindelighed vil en given Egenskab kunne maales indirekte paa flere Maader. En, der principielt altid er mulig, bestaar i at føre Bestemmelsen tilbage til de fundamentale Maalinger, Længdemaaling, Vejning og Tidsbestemmelse. Man kalder en indirekte Bestemmelse af denne Art en absolut Maaling. Naar denne altid er principielt mulig, ligger det i, at enhver fysisk Egenskab kan udtrykkes ved de fundamentale, eller, hvad der bliver det samme, deri at enhver Enhed kan udtrykkes ved Grundenhederne cm. g. sek. Det skal iøvrigt bemærkes, at man ogsaa bruger Betegnelsen absolut Maaling for andre indirekte Bestemmelser. I nogen Grad er Udtrykket blevet en Benævnelse for al indirekte Maaling i Modsætning til den direkte Sammenligning af Maaleobjektet med en tilsvarende Normal, som vi har i relativ Maaling.

vor Opmærksomhed mod Tilbagevirkningen af Maaleobjektet paa den øvrige Del af Systemet. (Virkningen af Maaleredskabet paa Maaleobjektet er i Forvejen belyst). Endelig supplerer vi i et afsluttende Kapitel Fremstillingen med en særlig Behandling af Maalingens Teori og belyser det Analogiforhold, der bestaar mellem dette Redskab for Maalingen og Maalesystemet.

KAP. I.

MAALEOBJEKTET.
SVINGNINGER I MILIEUETS TILSTAND SOM KILDE TIL USIKKERHED OG FEJL. — ANALOGE SVINGNINGER.

a. Svingninger i Milieuets Tilstand som Kilde til Usikkerhed.

Milieusvingninger. Maalesystemet befinder sig i et Milieu — Arbejdsrummet — i hvis Tilstand der i Almindelighed til Stadighed finder Svingninger Sted. Disse Variationer kan nu overføres mer eller mindre fuldstændigt paa Maalesystemet og frembringe tilsvarende Svingninger i dettes Tilstand. Er de svingende Milieuvariationer af tilstrækkelig hurtig Karakter, vil de derved kunne give Anledning til objektiv Usikkerhed. Foregaar de langsommere, bliver de ofte en Kilde til ensidig Afvigelse. Vi betragter nu til at begynde med det første Tilfælde, idet vi foreløbigt indskrænker os til at undersøge Indflydelsen af de hurtigere Milieuvariationer paa Maaleobjektet. Som Eksempel benytter vi Milieuets Temperatursvingninger.

Vurdering af Milieuets Temperatursvingninger som Kilde til Usikkerhed. Det er umiddelbart indlysende, at en Hovedbetingelse for Maaling af en Størrelse med en foreskreven Tolerans er, at Størrelsens Svingninger er smaa mod den tilladte Usikkerhed eller i ethvert Fald ikke overskrider Toleransgrænsen. Vil vi nu med Henblik paa denne Grundbetingelse for Maalingen undersøge, hvor store de Varia-

tioner er, som Milieuets Temperatursvingninger kan give Anledning til i den søgte Størrelses Værdi, saa kan det ske indirekte, altsaa ved et Overslag, dersom følgende Data er givne: 1) Størrelsen af Milieuets Temperatursvingninger (Svingningernes Amplitude), 2) til hvilken Grad Svingningerne overføres paa Maaleobjektet (Størrelsen af Overføringsforholdet) og 3) Temperaturkoefficienten for den søgte Størrelse. Overslaget stiller sig da, som følgende Eksempel kan belyse.

Modstanden skulde maales i en lang, meget tynd Platintraad saa tynd (ca. $^1/_{10}$ mm), at det turde antages, at den nogenlunde var i Stand til at følge Rummets Temperatursvingninger. (Overføringsforholdet = 1). Svingningerne i Temperaturen paa det Sted i Lokalet, hvor Maalingen udførtes, ansloges til $^1/_{10}{}^0$. Under Forudsætning af dette Skøns Rigtighed skulde den Usikkerhed, Temperatursvingningerne kunde

	Nr.	Aflæsning	Nr.	Aflæsning	Nr.	Aflæsning
	1	15,40	11	15,70	21	15,55
	2	15,45	12	15,40	22	15,60
	3	15,50	13	15,50	23	15,60
	4	15,58	14	15,80	24	15,50
	5	15,70	15	15,82	25	15,60
	6	15,70	16	15,80	26	15,70
	7	15,80	17	15,60	27	15,75
	8	15,70	18	15,50	28	15,70
	9	15,60	19	15,55	29	15,70
	10	15,68	20	15,60	30	15,60
Middeltal		15,61		15,63		15,63
Største Afvigelser		− 21 + 19		− 23 + 19		− 13 + 12
		$\sqrt{\lambda_2} = 13$ $\frac{A}{\sqrt{\lambda_2}} = 1{,}61$		$\sqrt{\lambda_2} = 15$ $\frac{A}{\sqrt{\lambda_2}} = 1{,}53$		$\sqrt{\lambda_2} = 8$ $\frac{A}{\sqrt{\lambda_2}} = 1{,}63$

give Anledning til, blive $^1/_{10} \times 4\,^0/_{00}$ eller $0{,}4\,^0/_{00}$, idet Platins Modstand vokser ca. $4\,^0/_{00}$ pr. Grad. Dersom nu den paagældende Modstand skulde være maalt med en Tolerans af $^1/_2$—$1\,^0/_{00}$, vilde Temperatursvingningerne have været en væsentlig Kilde til Usikkerhed. Havde den foreskrevne Tolerans været $0{,}2\,^0/_{00}$, maatte der under alle Omstændigheder være taget særlige Forholdsregler for at beskytte Maaleobjektet mod Svingningerne, hvorimod disse overfor en Tolerans af $1\,^0/_0$ vilde have været ganske uvæsentlige.

En Vurdering som den antydede maa nu imidlertid nødvendigvis blive højst usikker, fordi det er saa vanskeligt at skønne over de to af de bestemmende Forhold, nemlig Størrelsen af Milieuets Temperatursvingninger og Overføringsforholdet. Langt at foretrække er det derfor i et Tilfælde som det betragtede at bygge Vurderingen paa en direkte Undersøgelse af Forholdene, som de stiller sig ved det System, der netop arbejdes med. Tabellen paa forrige Side gengiver en saadan Undersøgelse udført i Anledning af Maalingen af Modstanden i den ovenfor antydede Platintraad. Bestemmelsen foretoges ved en Wheatstones Bro, hvis Galvanometer stilledes saa vidt muligt ind paa Nul. Det udførte dog meget kendelige Svingninger svarende til de Modstandsændringer, Temperatursvingningerne gav Anledning til i Traaden. Tabellen indeholder Aflæsninger af Galvanometerindex' Stilling hver femte Sekund.

Som det ses, er Rækken af Aflæsninger delt i 3 Grupper à 10. Usikkerheden for hver er bestemt. Den antager sin største Værdi i anden Gruppe, hvor den bliver 0,23 cm. (Middeltallene er særdeles konstante). En Prøve viste, at 0,5 Ohms »Overvægt« svarede til et Udslag paa 7 mm. Til 2,3 mm svarer da en »Overvægt« paa knapt 0,2 Ohm. Disse 0,2 Ohm betød 2 i sidste Ciffer af Værdien 6,052 for Modstanden, der maaltes. Temperatursvingningerne giver altsaa paa den enkelte Bestemmelse Anledning til en Usikkerhed, der maalt relativt — altsaa i Forhold til Modstanden — er ca. $^2/_{6000}$ eller ca. $^1/_3\,^0/_{00}$. (Sml. den indirekte Undersøgelse).

Eliminationen af Temperatursvingningernes Indflydelse. Midlet mod Milieuets Temperatursvingninger er i Almindelighed det at anbringe Maaleobjektet i et kunstigt Milieu. Dette er hyppigt et Væskebad, men det kan ogsaa være et Luftbad (Lufttermostat). Det kunstige Milieu er imidlertid, som vi nedenfor skal se, ikke alene et Middel mod Usikkerhedssvingninger, i langt flere Tilfælde er det et Middel mod ensidig Temperaturafvigelse og et Middel til at sikre en tilstrækkelig nøjagtig Bestemmelse af Systemets specielt Maaleobjektets Temperaturtilstand. I Virkeligheden gør Milieuets Temperatursvingninger sig nu relativt meget sjældent gældende som Kilde til Usikkerhed, og det ligger i, at Svingningerne i Almindelighed vil dæmpes ganske overordentligt ved Systemets Varmekapacitet.

Et Eksempel vil vise, hvor stor denne Dæmpning kan være. En ca. 50 cm lang Stang dels af Jærn dels af Messing var anbragt i et System, bestemt til at maale de overordentlig smaa Længdeforandringer, Jærnet lider ved Magnetisering. Stangen var derfor omgivet med en Magnetiseringsspole, viklet paa et Messingrør. Stangens Diameter var ca. 7 mm. Apparatet til Maaling af Udvidelse gav et Udslag paa ca. 50 mm for $^1/_{1000}$ mm. Systemets Nulstilling vandrede langsomt, maaske 1 cm i 5 Min. eller saa. Derimod sporedes ikke den ringeste objektive Usikkerhed. Heraf tør formentlig sluttes, at Milieuets Temperatursvingninger i Systemet er sat saa langt ned, at de ikke giver sig til Kende med et Beløb over $^1/_{10}$ mm i Udslaget. $^1/_{10}$ mm svarer nu til en Udvidelse paa 2×10^{-6} mm, der atter svarer til ca. $^1/_{2000}{}^0$. Forsøget med Platintraaden ovenfor viser, at Milieuets Temperatursvingninger er af Størrelsesordenen $^1/_{10}{}^0$ eller maaske endnu større. Det her betragtede System har følgelig afdæmpet Temperatursvingningerne mindst 200 Gange.

Svingninger analoge med Milieuets. Den egentlige objektive Usikkerhed afspejler vel hyppigt direkte Svingninger i Milieuets Tilstand dog ikke altid, hvad et Eksempel kan belyse. Ved Fotometrering af elektriske Glødelamper vil eventuelle Svingninger i Driftspændingen kunne være en væsentlig Kilde til Usikkerhed, fordi Lampens Lysstyrke afhænger af denne Driftspænding. Lad os tænke os, at vi ved Sammenligning af en Glødelampe med en Hefnerlampe

vilde benytte Byspændingen. I denne optræder der Svingninger paa flere Tiendedele Volt, f. Eks. 0,5 Volt. Vi kan nu let bedømme, hvilken Indflydelse saadanne Svingninger vilde kunne faa paa Maalingens Sikkerhed, idet vi ved, at en Kultraadsglødelampes Lysstyrke varierer ca. 5 % pr. Volt omkring den normale Driftspænding. 0,5 Volt giver altsaa Anledning til en Usikkerhed paa godt 2 %. Skal der i Maalingen opnaas 1 %, maa Spændingen holdes konstant med mere end $^1/_5$ Volts Sikkerhed, d. v. s. det bliver i Almindelighed nødvendigt som Strømkilde at anvende et Akkumulatorbatteri, hvad man da ogsaa faktisk altid vilde gøre ved en Sammenligning som den antydede.

Gentagelse som Middel til Elimination af objektiv Usikkerhed. I første Afsnit af vor Fremstilling udledte vi for Usikkerheden af et af n Gentagelser dannet Middeltal Udtrykket

$$\Delta o_m = \frac{\Delta o}{\sqrt{n}}$$

Dette Udtryk vil utvivlsomt i de fleste Tilfælde med relativ stor Nøjagtighed gælde for subjektiv Usikkerhed; men det kan ogsaa ofte anvendes, naar Usikkerheden er af objektiv Oprindelse. Vi tør altsaa vente at faa den objektive Usikkerhed delvis elimineret ved Gentagelse. I Tabellen pag. 146 ser vi et Eksempel paa saadan Elimination. Vi lægger her Mærke til, at Middeltallene er betydelig sikrere end de enkelte Iagttagelser. Den enkelte Iagttagelses Usikkerhed er ca. 20. Den største Afvigelse mellem to Middeltal er kun 2. Dette er dog vistnok tilfældigt. Efter Udtrykket ovenfor skulde vi vente en betydelig større Afvigelse, og vi maa i ethvert Fald regne med, at en saadan kan gøre sig gældende. Udtrykket for Δo_m viser, at Gentagelse i Almindelighed ikke kan betragtes som noget praktisk Middel til Elimination af objektiv Usikkerhed. Lad nemlig f. Eks. Temperaturusikkerheden ovenfor være væsentlig imod Toleransen, saa skal den for at blive uvæsent-

lig gerne sættes 10 Gange ned. Det vil i Følge Udtrykket for Δo_m sige, at vi skal gentage Bestemmelsen 100 Gange. Disse Gentagelser vil i mange Tilfælde tage en urimelig Tid, og saa kan der endda blive nogen Tvivl tilbage med Hensyn til deres Evne til at eliminere den objektive Usikkerhed. Gentagelse er da i Praksis et Middel, som kun anvendes til Elimination af objektiv Usikkerhed, naar ikke andre Midler staar til Raadighed d. v. s., naar den objektive Usikkerhed er praktisk set uundgaaelig.

b. Svingende Variationer i Milieuets Tilstand som Kilde til ensidig Afvigelse i væsentlige Egenskaber ved Maaleobjektet.

Karakterisering og Afpasning. De Svingninger i Temperaturen, som vi ovenfor har betragtet, var Usikkerhedssvingninger, d. v. s. Svingninger af saa hurtig Skiften, at de gjorde sig gældende fra Gentagelse til Gentagelse i en fortsat Række Iagttagelser. Svingningerne afspejlede tilsvarende Svingninger i Milieuets Temperatur. Foruden disse hurtigere Svingninger optræder der nu som antydet i Milieuet langsommere Temperaturvariationer, der ligeledes er af svingende Karakter. Ogsaa disse kan naturligvis overføres paa Maalesystemet og kan derved blive et væsentligt Forhold, der ikke kan lades ude af Betragtning ved Maalingens Planlæggelse. Lad os til Belysning af de Forholdsregler, de langsommere Variationer i Temperaturen og andre tilsvarende Egenskaber kræver, ligesom ovenfor tænke paa en Modstand som Maaleobjekt, f. Eks. i en Wheatstones Bro. Modstanden har Temperaturkoefficienten 4 $^0/_{00}$ og skal maales med 1 $^0/_{00}$ Tolerans. Temperaturen i det Rum, hvor Maalingen udføres, kan f. Eks. fra Dag til Dag variere flere Grader og Variationerne overføres i det væsentlige med deres fulde Beløb paa Maaleobjektet. Dettes Modstand er da underkastet tilsvarende Variationer, og disse er, som det ses, meget væsentlige i Forhold til den tilstræbte Nøjagtighed. Skal der under disse Omstændigheder være Mening i at maale den Værdi, Modstanden har paa et givet

Tidspunkt, er det indlysende, at vi samtidig med en til Modstandsmaalingen svarende Nøjagtighed maa karakterisere den Temperatur, Modstanden har paa dette Tidspunkt. Karakteriseringen sker i et Tilfælde som det her betragtede bedst ved et Tal, som man skaffer sig ved Maaling, og det ses let, at Maalingen her maa foretages med mindst $^1/_4{}^0$ Nøjagtighed.

Vi kan nemlig tænke os Unøjagtigheden paa den karakteriserende Maaling lagt over paa Hovedmaalingen. Udføres Temperaturmaalingen i vort Eksempel med en Tolerans af $^1/_4{}^0$, vil det sige, at Modstandens Temperatur under Modstandsmaalingen kan have afveget $^1/_4{}^0$ fra den forudsatte. Dersom den nu virkelig har haft denne Afvigelse og Maalingens Resultat henføres til den forudsatte Temperatur, vil Resultatet være forskudt med $^1/_4 \times 4\,{}^0/_{00} = 1\,{}^0/_{00}$ i Forhold til det rigtige. Udføres Temperaturmaalingen altsaa kun med $^1/_4{}^0$ Nøjagtighed, sluger den, som det vil ses, hele den til Raadighed staaende Tolerans i Modstandsmaalingen, hvad den naturligvis i Almindelighed ikke maa. I Virkeligheden maa den karakteriserende Maaling udføres med en saadan Nøjagtighed, at den Afvigelse, den kan give Anledning til, i Forbindelse med anden Afvigelse ikke overskrider Nettotoleransen.

Meget almindeligt er det, at man ønsker en Modstandsmaaling som den her betragtede udført ved en bestemt Temperatur f. Eks. $20\,^0$. Denne Temperaturtilstand maa da afpasses og det naturligvis med en Nøjagtighed, der bestemmes ganske som den karakteriserende Maalings Nøjagtighed. I vort Eksempel maa Temperaturen altsaa afpasses med mindst $^1/_4{}^0$ Nøjagtighed snarere med $^1/_{10}{}^0$.

Eks. Ved Prøve af et Ledningsmateriales Modstandsevne har vi netop at gøre med Modstandsmaaling som den ovenfor antydede. I Almindelighed giver en saadan Prøve baade Modstandens Værdi ved en bestemt Temperatur gerne $20\,^0$ og Temperaturkoefficienten. Temperaturen er da ikke afpasset til netop at være $20\,^0$, men Modstanden er maalt ved to forskellige Temperaturer, der igen er iagttaget med den til Modstandsmaalingen svarende Tolerans. Af de to Bestemmelser er herefter Temperaturkoefficienten og 20^0-Værdien beregnet, og Rekvirenten er nu i Stand til indenfor visse Grænser at bestemme Modstandsevnens Værdi ved enhver Temperatur. Ofte forlanges kun Modstanden maalt ved en vilkaarlig Temperatur omkring den,

Materialet normalt vil have, idet Rekvirenten gaar ud fra, at han kender Materialets Temperaturkoefficient tilstrækkelig godt til at kunne regne tilbage til den Temperatur, ved hvilken han ønsker at kende Modstanden. Her er da et Tilfælde, hvor en Afpasning af Temperaturen under en isoleret Maaling bliver overflødig.

Den karakteriserende Maaling og Midlerne for den. Karakteriseringen eller Afpasningen kræver som antydet i Almindelighed en Maaling. Denne vil vi her betragte noget nærmere. Vi kan tænke paa Bestemmelsen af Temperaturen ved Justering af en Modstandsnormal med en Tolerans 0,01 $^0/_{00}$. Modstandnormalens Temperaturkoefficient antager vi er 0,02 $^0/_{00}$. I Overensstemmelse med det ovenfor udviklede skal Normalens Temperaturtilstand da bestemmes med mindst $^1/_2{}^0$ Sikkerhed og mindst $^1/_2{}^0$ Nøjagtighed. Hyppigst vil man vel nærmere tilstræbe $^1/_{10}{}^0$. Fordringen til $^1/_{10}{}^0$ Sikkerhed i Temperaturmaalingen betyder, at Temperaturen til en vis Grad maa være konstant. De Temperatursvingninger, der normalt gør sig gældende i det naturlige Milieu, vil nu overfor Modstandsmaalingen være at betragte som en ganske uvæsentlig Kilde til Usikkerhed. De er det imidlertid maaske ikke overfor Temperaturmaalingen, og hvis de ikke er det, maa et kunstigt Milieu, d. v. s. et Bad, anvendes. Badet er da et Middel for den tilstrækkelig sikre Bestemmelse af den Temperatur, ved hvilken Modstandsmaalingen finder Sted, ikke et Middel for Tilvejebringelse af en konstantere Temperaturtilstand indenfor Maaleobjektet. Ser vi nu paa den anden Fordring om en Temperaturbestemmelse med en Rigtighed af $^1/_{10}{}^0$, saa betyder den, at vi maa sikre os, at den (konstante) Temperatur, Termometret viser, ikke afviger mere end $^1/_{10}{}^0$ fra Maaleobjektets (konstante) Temperatur. Det kan være, at det naturlige Milieus Temperatursvingninger end ikke er en væsentlig Kilde til Usikkerhed i Temperaturmaalingen. Naar vi da alligevel anbringer Modstandsnormalen i et Bad, saa er det netop, fordi Badet er nødvendigt for at sikre imod en større Afvigelse end den tilladelige mellem Termometrets og Maaleobjektets Temperaturer altsaa for at sikre en

uforfalsket Bestemmelse af Maaleobjektets Temperaturtilstand. — Alt i alt er Badet i det her betragtede Tilfælde altsaa kun indirekte et Middel for Modstandsmaalingen. Direkte er det et Middel for den tilstrækkelig sikre og den tilstrækkelig nøjagtige Udførelse af den karakteriserende Maaling.

Andre Milieuvariationer, der optræder som Kilde til Usikkerhed eller Fejl. Vi har i det foregaaende benyttet Milieuets Temperaturvariationer som Eksempel til Belysning af Forholdsreglerne mod svingende og ensidig Afvigelse i en væsentlig Egenskab ved Maaleobjektet. Som allerede antydet optræder der dog ogsaa i andre Milieuegenskaber Variationer, der kan gøre sig gældende paa samme Maade som Temperaturens. Ved Bestemmelse af Vædskers Kogepunkt er Trykkets langsommere Variationer et væsentlig Forhold, og Trykket selv maa derfor karakteriseres. Fugtighedsgradens langsommere Variationer kan paa tilsvarende Maade gøre sig gældende som væsentligt Forhold ved Maaleobjektet i en Række Bestemmelser, hvor dette sidste eller nærmere bestemt den søgte Egenskab ved dette afhænger af Fugtighedsgraden. Kulsyreindhold, Iltmængde o. s. v. kan i andre Tilfælde være væsentlige Egenskaber ved Milieuet. Vi skal ved Betragtningen af Normalens væsentlige Forhold vende tilbage til disse Milieuegenskaber og der belyse deres Indflydelse ved et typisk Eksempel.

Mekaniske Rystelser. Af særlig Karakter er de »Milieuvariationer«, vi vil betegne som Rystelser. De hurtigere Temperatursvingninger, som vi har omtalt i Begyndelsen af dette Afsnit kan, om man vil, betragtes som en Art Rystelser, termiske Rystelser. Her tænker vi imidlertid først og fremmest paa almindelige mekaniske Rystelser. Karakteristisk for disse som for andre Rystelser er deres hurtige uberegnelige Skiften. Som Følge af denne Karakter gør Rystelser sig i Almindelighed gældende som Kilder til Usikkerhed, men ved Siden heraf

kan de ogsaa optræde som Kilder til Fejl. Et interessant Eksempel herpaa kan hentes fra den magnetiske Materialprøvning. (Undersøgelse af Jærns magnetiske Egenskaber).

Stærke Rystelser under Magnetiseringen kan her give Anledning til ganske abnormt høje Værdier for den magnetiske Induktion. De maa altsaa for enhver Pris undgaas ved Bestemmelsen af denne. Men selv svage Rystelser som de, der let optræder i en Bygning, kan kendeligt forfalske Resultatet, naar man betragter den Induktion, der findes uden Rystelser,

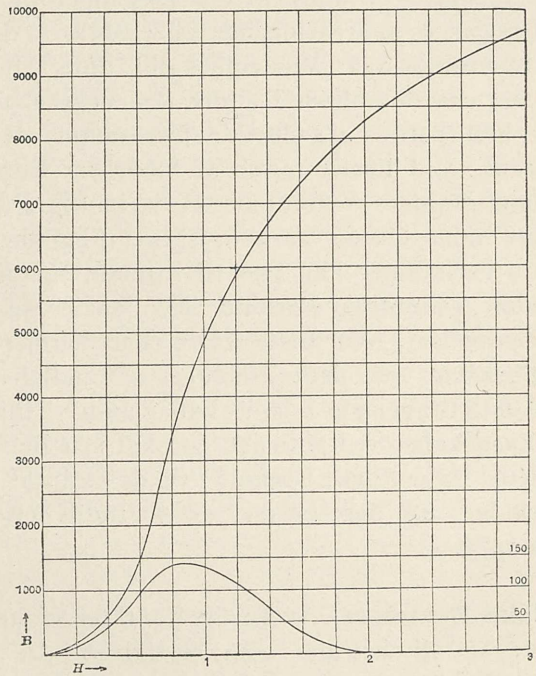

Fig. 34.

som den normale. Virkningen er studeret blandt andre af C. W. Burrows. Han finder, at den er størst eller overhovedet kun gør sig gældende ved svage Felter, saaledes som det er vist i Fig. 34. Det her afbildede Forsøg gengiver ved den nederste Kurve (Maalestok til Højre) Virkningen af Rystelser

af samme Størrelsesorden som de i Laboratoriet optrædende. Den øverste Kurve fremstiller den normale Induktion. Virkningen naar, som det ses, en Værdi af 7 % og maa altsaa i Almindelighed imødegaas ved passende Foranstaltninger, f. Eks. ved at anbringe Magnetiseringsapparatet paa et Stykke tykt Filt.

Lignende Foranstaltninger vil man ofte anvende mod de mekaniske Rystelser som Kilde til Usikkerhed. Iøvrigt gør Rystelserne sig ikke alene og ikke fortrinsvis gældende gennem Maaleobjektet. Hyppigst bliver de, som vi nedenfor skal se, en Kilde til Usikkerhed ved Maaleapparatet.

Opgaver.

Opg. 1. Følgende Sammenstilling indeholder Temperaturkoefficienter (numerisk) for en Række forskellige Egenskaber ved forskellige Legemer. Vi tænker os de paagældende Egenskaber gjort til Genstand for Maaling af 1 ‰ Tolerans og skal da afgøre, hvorvidt Temperaturen er en væsentlig Egenskab eller ej.

Legeme	Egenskab	Temperaturkoefficient
Alkohol 90 %	Rumfang eller Vægtfylde	107×10^{-5}
Kobber	Rumfang eller Vægtfylde	$5{,}1 \times 10^{-5}$
En Luftart	Rumfang eller Vægtfylde	367×10^{-5}
Ricinusolie	Indre Gnidning omkring 20°	10000×10^{-5}
Aluminium	Elasticitetskoefficient	200×10^{-5}
KNO_3	Ledningsevne ved 18°	2000×10^{-5}
Æthylæter	Dielektricitetskonstant	460×10^{-5}

Opg. 2. Med hvilken Nøjagtighed skal Maaleobjektets Temperatur bestemmes (eller afpasses) ved Maaling af Lydhastigheden i en Luftart, naar Maalingens Tolerans er 5 ‰? Med hvilken Nøjagtighed skal Æthylæters Temperatur bestemmes ved en Maaling af Brydningsforholdet med 0,1 ‰ Tolerans?

Opg. 3. Lad Kogepunktsforhøjelsen ved en Tryktilvækst af 1 mm Kvægsølv for en given Væske være 0,05°. Hvis nu en Nøjagtighed af $^1/_{100}$° ønskes i Bestemmelsen af denne Væskes Kogepunkt, hvilken Tolerans kan da tillades i Bestemmelsen af Trykket? Vil de normale Tryksvingninger være en væsentlig Kilde til Usikkerhed?

Opg. 4. Det reducerede Rumfang af en Luftart skal bestemmes med 1 $^0/_{00}$ Tolerans. Hvor nøjagtigt skal da Luftens Temperatur og Tryk maales?

KAP. II.

MAALEOBJEKTET. — UREGELMÆSSIGHED.

Variation i Rum (Uregelmæssighed) som Analogon til Variation i Tid. Efter nu at have betragtet den svingende Variation i Tidens Løb af væsentlige Egenskaber retter vi vor Opmærksomhed paa en anden Art Variation den, der kan gøre sig gældende fra Sted til Sted indenfor Dele af Systemet — her specielt Maaleobjektet — der i Følge Forudsætningerne for Maalingen skal være ensartede. Som Eksempler paa saadan Variation kan nævnes de Uregelmæssigheder, der kan optræde i Tværsnittet af Traadmaterialet ved Ledningsevnebestemmelse, eller de Variationer i Sammensætning og Struktur, der hyppigt optræder i Prøvestykket ved denne og anden Materialundersøgelse. Mellem disse Variationer i Rum og de ovenfor betragtede Variationer i Tid bestaar der et Analogiforhold, som vi nu noget nærmere vil belyse.

Lad os tænke os, at vi vil fremstille en Længdenormal af en Cyklekugle og i den Anledning udmaaler dens Tværsnit med en første Klasses Mikrometerskrue (en Braun & Sharpe Skrue). Vi vil da i Almindelighed finde, at Tværsnittet i nogen Grad varierer med Retningen f. Eks. nogle faa Tusindedele Millimeter.

Disse Variationer med Retningen kan vi bedst sammenligne med de Variationer som Følge af Temperatursvingninger,

vi ved Gentagelser fordelt over et længere Tidsrum maaske vil kunne paavise i en Modstands Værdi. Variationerne i Kuglens Tværsnit med Retningen og Variationerne i Modstandens Værdi i Tidens Løb er — skønt maaske paaviselige — uvæsentlige, dersom de ligger væsentligt under Toleransen af de Maalinger, man gør henholdsvis Tværsnit og Modstand til Genstand for. Kuglen er, hvis denne Betingelse er opfyldt, at betragte som en fuldkommen Kugle og Modstanden som en absolut Konstant. For Kuglens Vedkommende bliver Retningen, i hvilken Tværsnittet udmaales, altsaa ligegyldig. Nærmer Variationerne sig Toleransen, vil man i Praksis ofte opfatte dem som Kilde til en vis maaske ikke uvæsentlig Usikkerhed, selv om de egentlig er en Kilde til ensidig Afvigelse. Overstiger Variationerne endelig Toleransen, bliver de afgjort en væsentlig Kilde til Fejl. Det betyder, at Retningen, i hvilken Tværsnittet maales, maa karakteriseres, ganske som Modstandens Temperatur maa det og af ganske tilsvarende Grund, nemlig for at Retningen i Fremtiden kan identificeres. Den simpleste Maade at karakterisere Retningen paa vilde ved Kuglen være omkring Enderne af den Diameter, der udmaales, at ridse eller tegne to ens Cirkler. Radius for Cirklerne vil man vælge saaledes, at Variationerne i Tværsnittet indenfor den Dobbeltkegle, de bestemmer, er uvæsentlig ved den Tolerans, hvormed Tværsnittet udmaales. Den væsentlige Egenskab, Retningen, er da her karakteriseret med fornøden Tolerans. En Cyklekugle paa f. Eks. 5 mm kan nu have Variationer i Diametren paa nogle faa Tusindedele mm, og en Karakterisering af Retningen som den antydede bliver derfor nødvendig, hvis Kuglen skal tjene som Normal med kun $^1/_{1000}$ mm' Tolerans. Hvis Kuglen derimod kun skal tjene som Normal for Maalinger af ca. én Hundrededel Millimeters Tolerans, vil Retningen ved Justeringen i Almindelighed være ganske uvæsentlig. De karakteriserende Cirkler breder sig med andre Ord ud over hele Kuglen.

Paa ganske samme Maade som ved Kuglen — i første Tilfælde — bliver Retningen en væsentlig Egenskab ved Ju-

stering af en Glødelampe, der skal bruges som Normallampe ved Fotometrering af f. Eks. 1 % Tolerans. Lysstyrken omkring Glødelampen varierer nemlig, i ethvert Fald naar der er Tale om en Kultraadslampe, som oftest mere end 1 %. Man vil ved Justeringen vælge en Retning, i hvilken Variationen er svag, og karakterisere Retningen ved et Mærke anbragt paa Lampesoklen med en Tolerans svarende til Justeringens. Dette Mærke skal da ved Brugen af Normalen anbringes i Linien fra Fotometer til Lampe og det naturligvis med en Nøjagtighed svarende til Maalingens. I Almindelighed er Variationen af Lysstyrken saa svag, at Anbringelsen af Mærket ved Justeringen og Orienteringen af Normalen ved Maalingen kan ske paa Øjemaal.

Nærmere Karakterisering af den maaletekniske Opgave i de betragtede Eksempler. Vi vil nu noget nærmere gøre os klart, hvad der karakteriserer den maaletekniske Opgave, der foreligger i de to ovenfor betragtede Tilfælde. Maaleobjektet er et Legeme eller System, indenfor hvilket den Egenskab, vi gør til Genstand for Maaling, varierer fra Sted til Sted. Dens Værdi et eller andet Sted (i de betragtede Tilfælde et vilkaarligt Sted) skal bestemmes med en vis Tolerans. Vi kan da se saaledes paa Sagen. Maaleobjektet er i Virkeligheden ikke et enkelt Maaleobjekt, men en Samling Maaleobjekter. Hvert af disse er karakteriseret ved, at Variationen i den søgte Egenskab inden for det ikke overskrider Toleransen eller en vis Brøkdel af denne (Nettotoleransen). Vi kan da vælge et vilkaarligt af disse Maaleobjekter, men maa saa naturligvis

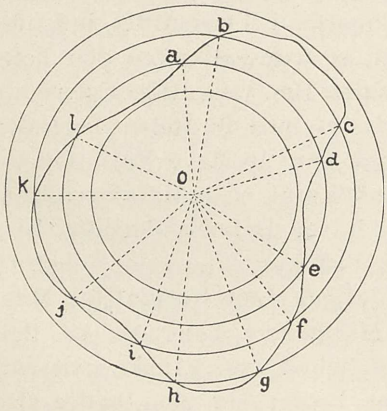

Fig. 35.

karakterisere det, saa det kendes fra de øvrige. Det er det, vi har tænkt os gjort ved Cirklerne paa Kuglen ovenfor. Hvorledes en elektrisk Glødelampe efter den her anlagte Betragtning skulde deles op i Maaleobjekter, kan Fig. 35 antyde. Kurven *a b c d e f* fremstiller i et polært Koordinatsystem Lysstyrkens Variation om Lampen. Omkring Begyndelsespunktet er tegnet en Række æqvidistante Cirkler med en indbyrdes Afstand lig Nettotoleransen. De antydede Maaleobjekter er da begrænsede ved Radiivektores til Skæringspunkterne mellem Cirklerne og Kurven. Maaleobjekterne *b o c*, *d o e*, *g o h*, *j o k* og *l o a* egner sig særligt til Maaling, fordi de er saa udstrakte, hvad der betyder det samme som, at Karakteriseringens Tolerans er stor.

Uregelmæssighed ved Bestemmelse af Gennemsnitsværdier. Ved Maaling paa et uregelmæssigt Objekt kan Opgaven nu imidlertid ogsaa være en anden end den ovenfor karakteriserede. Ofte er det Gennemsnitsværdien af den varierende Egenskab, der søges, f. Eks. Gennemsnitsdiametren af en Kugle eller af et Traadstykke, den sfæriske Middellysstyrke af Glødelampen o. s. v. I visse Tilfælde staar der for saadan Bestemmelse særlige Metoder til Raadighed, der direkte eller indirekte giver Gennemsnitsværdien. Eksempler herpaa skal vi nedenfor betragte. Her vil vi først diskutere Gentagelsen som almindeligt Middel til Bestemmelse af Gennemsnitsværdier.

Vil vi f. Eks. maale Gennemsnitsværdien for en Traad ved en Mikrometerskrue, sker det bortset fra Tilfælde, hvor Toleransen afgjort er større end Uregelmæssigheden i Traaden, ved at maale Diametren i en Række Punkter fordelt jævnt over hele Traaden. Punkterne kan f. Eks. fordeles over fire Frembringere eller Frembringerpar 45 ^{0} fra hinanden med lige

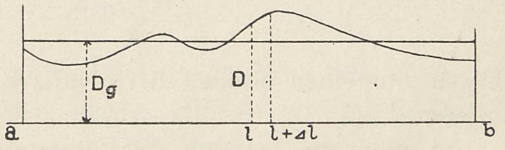

Fig. 36.

mange Maalinger i hvert Par. Holder vi os nu til Maalingerne langs én Frembringer altsaa i én Retning, saa kan vi tænke os Variationerne i Diametren ned langs Traaden gengivet grafisk, som det er sket i Fig. 36. Vi kan herefter benytte denne Figur til Belysning af Bestemmelsens Teori. Gennemsnitsdiametren D_g er, som det ses af Figuren, bestemt ved Ligningen

$$D_g\,(b-a) = \int_a^b D\,dl$$

$$D_g = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b D\,dl$$

Af denne Ligning følger, at vi i Praksis kunde tænke os at bestemme D_g ved at dele Traadens Længde i en Række vilkaarlige Stykker δl og maale Diametren paa Midten af disse Stykker. Vi skulde herefter tillægge hver Maaling en Vægt lig med eller proportional med δl, hvorefter D_g vilde være bestemt som Middelværdi af de enkelte Maalinger altsaa ved

$$D_g = \frac{D_1\,\delta l_1 + D_2\,\delta l_2 + \cdots}{\delta l_1 + \delta l_2 + \cdots} = \frac{\Sigma D \delta l}{b-a}$$

I visse Tilfælde kunde der nok være Grund til at gøre Delene δl ulige store. Som oftest dog ikke. Gøres nu imidlertid alle δl lige store, bliver

$$D_g = \frac{\Sigma D}{n} \quad (n \text{ Antallet af Gentagelser})$$

altsaa simpelhen Middeltallet af alle Enkeltmaalinger af Diametren.

Vi maa nu betragte vor Bestemmelse af Gennemsnitsdiametren ud fra vort sædvanlige Synspunkt altsaa spørge om, hvilke Kilder til Usikkerhed og hvilke Kilder til Fejl Bestemmelsen rummer.

Med Hensyn til Usikkerheden bestaar den af forskellige Bidrag. Et hidrører fra den Usikkerhed, Maalingen af D i sig selv har. Dette Bidrag bliver,

$$\Delta_1 D_g = \frac{\Delta_1 D}{\sqrt{n}}$$

Hertil kommer nu Usikkerheden, hidrørende fra Opsøgningen af Stedet, hvor den enkelte Maaling skal foretages. Skulde Maalingen ske i Punktet l, Fig. 37a, og foretages den i $l + \Delta l$, bliver Afvigelsen fra den rigtige Diameterværdi

$$\Delta D = \left(\frac{\delta D}{\delta l}\right) \cdot \Delta l$$

mens Bidraget til Usikkerheden i D_g maa sættes til

$$\Delta_2 D_g = \frac{\Sigma\left(\frac{\delta D}{\delta l}\right) \Delta l}{n\sqrt{n}}$$

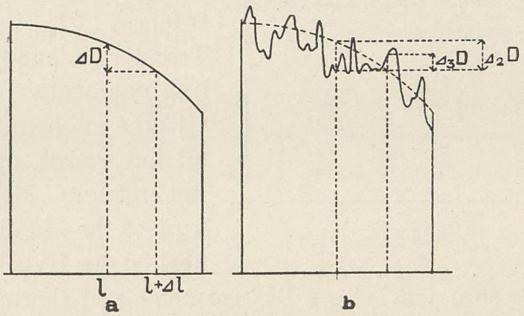

Fig. 37.

Dette Udtryk viser, at Usikkerhedsbidraget maa ventes at blive desto større, jo mere ujævnt Objektet er, thi jo større Ujævnheder, desto større vil $\left(\frac{\delta D}{\delta l}\right)$ gennemsnitlig være.

Endelig kan det ske, at de jævnere Variationer, som vi nu har betragtet, er overlejrede med svingende Variationer

af pludseligere Art, saaledes som det er søgt anskueliggjort i Fig. 37b. Selve de pludselige Svingninger bliver da eller kan under Omstændighed blive en Kilde til Usikkerhed, og det herfra hidrørende Bidrag kan med nogen Rimelighed sættes lig

$$\Delta_3 D_g = \frac{\Delta_3 D}{\sqrt{n}}$$

hvor $\Delta_3 D$ er et Maal for Grænseafvigelsen i den svingende Variation. Forudsætningen herfor er, at Perioden for Svingningerne er nogenlunde af samme Størrelsesorden eller noget mindre end Usikkerheden Δl for Opsøgningen af Stedet for Maalingen.

Vi retter herefter vor Opmærksomhed paa Bestemmelsens Fejl.

Fig. 38 vil her kunne tjene til Orientering. Hvis Variationen er jævn som i Kurve 1, hvis altsaa f. Eks. Traadens Uregelmæssighed kun bestaar i, at den er konisk, kan vi for Rigtighedens Skyld nøjes med ét Interval δl, nemlig hele Traadens Længde. En Maaling paa Midten af Traaden vil give en principielt uforfalsket Værdi, og flere ligeligt fordelte Maalinger vil kun sætte Maalingens Sikkerhed op. Hvis Variationen derimod er som i 2, vil en Bestemmelse ved Gentagelser som ovenfor altid give en principielt for lille Værdi for Gennemsnittet, mens den i et Tilfælde som 3 altid vil give en for stor Værdi. Imidlertid har vi det principielt i vor Magt ved Forøgelse af Antallet af Gentagelser at gøre Fejlen, der begaas, saa lille det skal være. Fejlen som Følge af Krumningen er indenfor det enkelte Interval δl forsvindende, naar Kurvestykket indenfor Intervallet kan betragtes som retliniet. Vi forstaar heraf, hvorledes en Forøgelse af Antallet af Gentagelser i det hele taget bliver

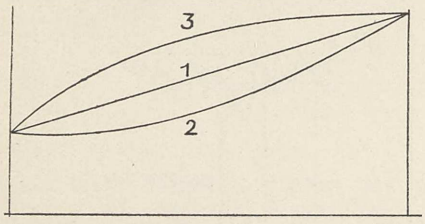

Fig. 38.

et Middel til at eliminere den fra ujævn Variation hidrørende Fejl.

Vi har i vor Diskussion forudsat, at Maaleapparatet tillader Enkeltmaaling indenfor saa smaa Intervaller, det skal være. Imidlertid »dækker« Maaleapparatet i Praksis naturligvis altid over et vist Interval, og denne Omstændighed kan blive en Kilde til Fejl. Som Eksempel til Belysning heraf kan vi atter vælge Bestemmelsen af Gennemsnitsdiametren af en Traad ved Hjælp af en Mikrometerskrue. Det er klart, at Skruen her vil være hindret i at gaa ned i Fordybninger i Traadens Overflade af en Vidde mindre end Diametren i Kontaktfladerne, og principielt vil den overhovedet ikke maale den mindste Diameter i nogen Fordybning. Deraf følger, at Bestemmelsen maa faa en Tendens til at blive for stor, og vi kan lægge Mærke til, at det forøvrigt ikke alene er Variationer i Tværsnittet, der giver Anledning til denne Tendens. Den samme Indflydelse har enhver Bøjning eller Bule paa Traaden. Den sidste Omstændighed kan i Virkeligheden ofte gøre Bestemmelsen af Gennemsnitsdiametren ved Mikrometerskrue praktisk set umulig, naar Traaden har betydelige Knæk eller Bøjninger.

Vi vil til Slutning gennem en udført Bestemmelse søge at give en Forestilling om, hvorledes Uregelmæssigheden faktisk gør sig gældende ved Udmaaling af et Traadstykkes Gennemsnitsdiameter.

Maalingen blev udført paa en Kobbertraad 50 cm lang, 2 mm tyk. Gentagelserne blev fordelt jævnt i 4 Akseplaner 45 ^{0} fra hinanden, altsaa med 10 i hver. I Tab. I er Planerne betegnede som I, II, III og IV. Alle en enkelt Bestemmelses Iagttagelser er her anført.

I Tab. II og III er derefter Resultaterne af 3 Bestemmelser sammenstillede for at give en Forestilling om den opnaaede Sikkerhed. Det ses, at Variationerne i den enkelte Plan er af Størrelsen 15 μ ($\mu = {}^1/_{1000}$ mm). Variationerne rundt i Tværsnittet er af samme Størrelsesorden, maaske lidt større. Usikkerheden paa Bestemmelsen af Gennemsnits-

diametren i en Akseplan er ca. 2 μ. Usikkerheden paa Gennemsnitsdiametren for Traaden som Helhed synes at være ca. $^1/_3$ μ.

Dersom Usikkerheden paa Enkeltmaaling med Mikrometerskruen — altsaa den Usikkerhed, der er karakteristisk for Skruen selv — sættes til 2 μ, bliver Maaleusikkerhedens Bidrag til Usikkerheden paa Gennemsnitsdiametren i en Akseplan $\frac{2}{\sqrt{10}}$ = ca. $^2/_3$ μ og dens Bidrag til Usikkerheden paa Tallene i Tab. III $\cdot \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{1}{3}$ μ.

Tabel I.

40 Diametre fordelt ligeligt over en Kobbertraad 50 cm lang, ca. 2 mm tyk.

	I	II	III	IV
	1,997	1,977	2,010	2,000
	1,997	1,988	2,011	1,998
	1,999	1,982	2,001	1,991
	2,003	1,990	1,998	1,996
	2,000	1,987	2,009	1,978
	1,996	1,970	2,006	1,991
	2,006	1,971	2,001	1,992
	2,001	1,987	2,004	1,993
	2,000	2,000	1,998	1,963
	1,994	2,000	1,989	1,959
Middeltal...	$1,999_3$	$1,985_2$	$2,002_7$	1.986_1

Gennemsnitsdiametren = $1,984_3$

Tabel II.

Gennemsnitsdiametrene i 4 Planer gennem Traadens Akse. Vinklen mellem Planerne 45 ^{0}. Tallene bestemt ved 10 ligeligt fordelte Gentagelser.

	I	II	III	IV
1ste Bestem. . . .	$1{,}999_3$	$1{,}985_2$	$2{,}002_7$	$1{,}986_1$
2den Bestem. . . .	$1{,}999_5$	$1{,}983_9$	$1{,}999_0$	$1{,}988_6$
3die Bestem. . . .	$1{,}998_5$	$1{,}982_6$	$2{,}001_7$	$1{,}990_2$

Tabel III.

Gennemsnitsværdien for Traaddiametren bestemt ved 3 Sæt Udmaalinger som det, der er gengivet i Tabel I (og for samme Traad).

	Gennemsnits-diametren
1ste Sæt	$1{,}984_3$
2det Sæt	$1{,}983_7$
3die Sæt	$1{,}984_3$

Til Belysning af Spørgsmaalet om en mulig ensidig Afvigelse af den ved Mikrometerskrue bestemte Gennemsnitsdiameter blev fire andre Traadprøver udmaalt baade ved Hjælp af Vægt (Opdriftmetoden) og ved Skrue. Resultaterne er anført i Tab. IV.

Tabel IV.

Diametren bestemt ved Opdrift	Diametren bestemt ved Mikrometerskrue
3,323 mm	3,325 mm
3,319 —	3,322 —
3,309 —	3,316 —
3,345 —	3,345 —

Skruebestemmelsen synes at være svagt forskudt i Forhold til Opdriftbestemmelsen og det til den Side, som svarer til den ovenfor omtalte Fejlkilde.

Resultaterne af den elementære Diskussion af Uregelmæssighedens Indflydelse, vi her har gennemført, kan nu paa Grund af den ovenfor antydede Analogi mellem Variation i Tid og Sted i alt væsentligt overføres paa et Maaleobjekt, ved hvilket en væsentlig Egenskab varierer i Tidens Løb. Derved faar vor Diskussion, som det vil indses, et overordentlig stort Anvendelsesomraade. Bestemmelsen ved Gentagelse af Gennemsnitsværdien for et fra Sted til Sted eller fra Tid til Tid varierende Objekt er i Virkeligheden en maaleteknisk Opgave af den største Almindelighed. Et typisk Eksempel paa Maaling af den her antydede Art haves i Meteorologiens Gennemsnitsbestemmelser, der arbejder med et Maaleobjekt, Atmosfæren, hvis Egenskaber baade varierer fra Sted til Sted og fra Tid til Tid.

Variation fra Individ til Individ. Nær i Slægt med den Uregelmæssighed, vi nu har betragtet, er den, der gør sig gældende fra Individ til Individ indenfor en Samling af nominelt ensartede Elementer. Vi kan her for at knytte vore Forestillinger til noget konkret tænke paa Variationerne indenfor en Samling Cyklekugler eller en Samling Glødelamper. Meget ofte gør man en saadan Samling til Maaleobjekt ved en Be-

stemmelse, der da til Formaal har at give Gennemsnitsværdien for Samlingens Elementer med en vis Tolerans. Hvis denne Tolerans er større end Variationerne, vil det være nok at udtage et enkelt vilkaarligt Individ og maale det. Denne Opgave kan f. Eks. tænkes at falde for, naar vi ved en Maaling blot ønsker at afgøre, om en Samling Cyklekugler er af det ene eller det andet Nummer. Ser vi imidlertid bort fra dette Grænsetilfælde, maa flere Individer udtages, naar da ikke særlige Metoder, der under et bestemmer Gennemsnitsværdien, staar til Raadighed og foretrækkes. Vi vil nu gøre os klart, hvilken Usikkerhed Bestemmelsen af Gennemsnitsværdien ved Maaling paa Stikprøver har. Vi tænker os da en meget stor Samling Elementer f. Eks. Cyklekugler. Lad Fremstillingstoleransen eller rigtigere sagt den faktiske Fremstillingsusikkerhed være ΔR. Udtages en enkelt Stikprøve, faar Bestemmelsen af Gennemsnitsværdien for R ved denne for det første en Usikkerhed lig ΔR. Hertil kommer saa Usikkerheden $\Delta' R$ paa selve Maalingen. Udtages nu et Antal n Stikprøver, tør det regnes, at den fra Fremstillingsusikkerheden hidrørende Grænseafvigelse i Middeltallet er $\frac{\Delta R}{\sqrt{n}}$. Den fra Maalingens Usikkerhed hidrørende bliver $\frac{\Delta' R}{\sqrt{n}}$. Udtrykket for det første Bidrag kan dog principielt kun gælde, naar det hele Antal Elementer i Samlingen er stort. Thi det er jo givet, at hvis vi maaler alle Elementer, skal $\frac{\Delta R}{\sqrt{n}}$ blive Nul, hvad det kun bliver for meget stort n. Bortset herfra vil altsaa Usikkerheden paa Bestemmelsen i Almindelighed kunne sættes lig

$$\Delta R_g = \frac{\Delta R + \Delta' R}{\sqrt{n}} \cdot F$$

hvor F er den sædvanlige Reduktionsfaktor. Hvis $\Delta' R$ er praktisk set Nul, bliver

$$\Delta R_g = \frac{\Delta R}{\sqrt{n}}$$

Disse Udtryk tillader altsaa overslagsmæssig Beregning af Gennemsnitsværdiens Usikkerhed, naar Fremstillingsusikkerhed og Maaleusikkerhed kendes. De udsiger iøvrigt, at den Usikkerhed, Gentagelsen faktisk udviser, enten maa være $(\Delta R + \Delta' R) \cdot F$ eller ΔR. Bestemmes den altsaa paa sædvanlig Maade, kan den i Almindelighed tjene til at bestemme ΔR eller Fremstillingsusikkerheden, hvis denne ikke kendes.

Vi anlægger den her udviklede Betragtning paa et i Materialprøvningstekniken almindeligt Tilfælde. Ved Prøvning af f. Eks. et Traadmateriales elektriske Modstandsevne eller mekaniske Styrke eller ved Undersøgelse af de magnetiske Egenskaber for Dynamoblik o. s. v. skæres Stikprøver ud af en større Længde af Traaden, respektive af en større Plade af Blikket. Hvad Tekniken nu har Brug for at vide, er Gennemsnitsværdien for den hele Fremstilling eller Levering. Den rationelle Bestemmelse af denne Størrelse maa nødvendigvis indbefatte en Angivelse af Bestemmelsens Sikkerhed. Denne kan i Følge det ovenfor anførte gives, hvis Fremstillingstoleransen for Produktet, det vil her sige de mulige Variationer indenfor det hele Produkt, er givne. Er dette ikke Tilfældet, maa den bestemmes, d. v. s. der maa af det hele Produkt eller Levering udtages jævnt fordelte Stikprøver i et passende Antal, for at Maaling paa disse Stikprøver kan give ikke alene Tal for Gennemsnitsværdien, men ogsaa det for Vurderingen af dette Tals Værdi nødvendige Maal for dets Usikkerhed.

Særlige Metoder til Maaling af Gennemsnitsværdier ved uregelmæssigt Maaleobjekt. Som antydet vil man i mange Tilfælde ved særlige Metoder, der ikke benytter Gentagelse, kunne bestemme Gennemsnitsværdier. Gennemsnitstværsnittet for et Traadstykke kan saaledes findes ved Vejning (Opdriftmetoden). Den samme Metode kunde anvendes ved Bestemmelsen af Gennemsnitsdiametren for en Samling Staalkugler, idet man under et vejede Opdriften paa alle Elementer i Samlingen eller et passende Antal Stik-

prøver. (Man vejer ikke hvert Element for sig. Baade Besvær og Usikkerhed bliver derved større). En anden Metode for den sidste Bestemmelse bestaar i, at man lægger Kuglerne langs en Lineal og maaler den Længde, de tilsammen dækker. Begge Metoder, navnlig den første, skulde føre til et principielt fejlfrit Resultat, hvor stor end Uregelmæssigheden er. I mange andre Tilfælde bliver imidlertid Uregelmæssigheden en — ofte farlig — Kilde til Forfalskning, og det ligger da i Almindelighed i, at Metoden i Virkeligheden forudsætter Regelmæssigheden. Den er da egentlig ikke en Gennemsnitsmetode, selv om den bruges som saadan.

Principielt forudsætter Maalingen af Modstanden i en Traad, at Traadens Tværsnit er konstant og Traaden homogen. I Almindelighed vil de forekommende Uregelmæssigheder her imidlertid afgjort ikke kunne give Anledning til Forfalskning. Anderledes stiller Sagen sig imidlertid ved en anden Materialprøvningsopgave, nemlig den magnetiske. De almindelige Metoder for Bestemmelse f. Eks. af Jærns Permeabilitet forudsætter i saa høj Grad Homogenitet af Jærnet, at de i Praksis forekommende Afvigelser fra Homogenitet kan volde de største Vanskeligheder, simpelthen fordi det næsten er umuligt at afgøre, hvad der egentlig maales ved Metoden, naar Maaleobjektet har væsentlige Uregelmæssigheder.

En Fremgangsmaade, som den ovenfor antydede, under et at maale »Integralværdien« for en større eller mindre Samling for fra den at slutte til det enkelte Individs Gennemsnitsværdi, er naturligvis tilladelig ved Bestemmelsen af Kuglernes Gennemsnitsdiameter. At en tilsvarende Fremgangsmaade i andre Tilfælde er principielt forkert, vil et Eksempel gøre indlysende. Opgaven var at bestemme Gennemslagsspændingen for Papir gennemtrukket med Olie. E. H. Rayner fandt ved en saadan Bestemmelse de i Tabellen pag. 170 anførte Værdier.

	Gennemslagsspænding	
	for 1 Lag	for 4 Lag
	800 Volt	9600 Volt
	1080 —	7200 —
	800 —	8900 —
	1180 —	9000 —
	1420 —	9300 —
	1020 —	9100 —
	720 —	
	980 —	
	1360 —	
	1440 —	
Middeltal pr. Lag	1080 Volt	2210 Volt

Som det ses, faas langt fra den samme Spænding pr. Lag ved Maaling paa 1 og 4 Lag. 4 Lag taaler over 100 % mere pr. Lag.

Opgaver.

Opg. 1. Elasticitetskoefficienten for Materialet i en Stang kan som bekendt bestemmes ved Bøjningsforsøg, idet Stangen f. Eks. lægges over to Kanter og belastes paa Midten. Kaldes Bøjningspilen svarende til Belastningen P for f, og er L Afstanden mellem Kanterne, I Tværsnittets Inertimoment med Hensyn til en vandret Linie gennem Tyngdepunktet samt x endelig den Afstand fra Midtpunktet, i hvilken Nedbøjningen maales, skulde Elasticitetskoefficienten E være bestemt ved

$$E = \frac{P}{48\, f \cdot I} \cdot [L^3 - 6\, L\, x^2 + 4\, x^3]$$

Dette Udtryk forudsætter, at Stangen er homogen. Hvorledes kan det prøves, om Mangel paa Homogenitet gør sig kendeligt gældende?

Opg. 2. Den elektriske Modstandsevne for et Materiale,

formet som en Mursten, skulde undersøges. Først prøvedes Materialet for Homogenitet. Det anbragtes herved paa Kvægsølv, og en Draabe af denne Væske blev lagt paa Materialets opadvendte Flade. Idet Draaben benyttedes som den ene Elektrode, mens Kvægsølvet, hvorpaa Materialet flød, var den anden, kunde Modstanden maales relativt i forskellige Dele af Materialet. Hosstaaende Tabel indeholder Tal, hvis Reciprokværdier maaler Modstanden i de paa Fig. 39 antydede Dele af Stenen.

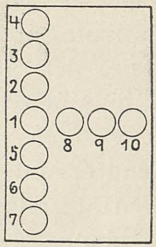

Fig. 39.

1	56,0
2	52,4
3	47,0
4	33,9
5	55,6
6	49,8
7	31,7
8	15,0
9	1,0
10	0,1

Hvilke Slutninger maa man drage af disse Iagttagelser m. H. t. Materialet som Maaleobjekt ved en Materialprøvning af den her betragtede Art?

KAP. III.

MAALEOBJEKTET.

ÆNDRINGER VED FORARBEJDNING, ÆNDRINGER VED NØDVENDIGE PROCESSER OG ÆNDRINGER, DER SKYLDES MAALEAPPARATET.

A. Bearbejdning af Materialet som Kilde til Fejl ved Materialprøvning. Maaleobjektet ved Prøven for Jærns magnetiske Egenskaber kan f. Eks. være et Bundt Strimler,

klippede ud af Blikplader for Fremstilling af Dynamoankret, ved Prøve for Ledningsevne er det gerne et Stykke Traad udtaget af Ledningsmaterialet. Et Hovedsynspunkt for Materialprøvningen maa nu, som det rent umiddelbart vil forstaas, være det, at Materialet uden nogen væsentlig Ændring skal kunne benyttes som Maaleobjekt, idet man, hvis Maaleobjektet kræver en væsentlig Bearbejdning, udsætter sig for, at denne ændrer Materialets Egenskaber og derved direkte eller indirekte den Størrelse, som skal maales. I mange Tilfælde kan nogen Tildannelse dog ikke undgaas, og da ligger der i denne en Fejlkilde, hvis Indflydelse maa undersøges ved særlige Prøver. De to antydede Eksempler, ved hvilke, som det maa synes, Materialet næsten umiddelbart kan benyttes som Maaleobjekt, rummer ikke desto mindre alligevel den her betragtede Fejlkilde. Klipningen eller Udstansningen af Strimlerne i Jærnprøverne ændrer Blikkets magnetiske Egenskaber langs Strimlens Kanter, hvorfor man maa anvende saa brede Strimler, at Virkningen bliver relativt forsvindende, Prøven for Ledningsevne kræver i Almindelighed, at Traadmaterialet rettes ud med en vis Kraft. Om denne Behandling ændrer Ledningsevnen, kan man og bør man prøve f. Eks. ved at forøge Spændingen til noget i Retning af det dobbelte. Som Maal for Spændingen kan herved den udstrammede Traads Tone tjene. Hvis Virkningen af den forøgede Spænding er uvæsentlig, tør man med nogen Sikkerhed slutte, at Virkningen af den normale Spænding ogsaa er det.

Den her belyste Fejlkilde er af overordentlig almindelig Karakter. Nedenfor skal antydes forskellige Metoder til Undersøgelse af Jærns magnetiske Egenskaber. En principielt ideal Metode er den saakaldte Ringmetode, i hvilken Maaleobjektet maa have Form af en Ring. Naar denne Metode ikke har vundet almindelig Udbredelse i den praktiske Materialprøvning, ligger det for en Del deri, at det i Almindelighed er forbundet med for store Vanskeligheder at give Materialet den antydede Form. Ved Blikmateriale kan Ringene stanses ud, og her anvendes Metoden ogsaa i Praksis, men ved massivt Materiale

maa Ringen i Almindelighed drejes ud af en større Klods. Det lader sig ikke gøre at svejse den af en Stang, thi ved Svejsningen forandres de magnetiske Egenskaber paa Svejsningsstedet.

Vi har i forrige Kapitel antydet de betydelige Komplikationer, Mangel paa Homogenitet i Materialet ved magnetiske Prøver kan give Anledning til. Man har udført talrige Undersøgelser for at naa til Klarhed over, om man ikke ved Udglødning skulde kunne fjerne Uregelmæssighederne. Det lader sig næppe altid gøre og selv om saa var, staar man i Fare for ved Behandlingen at ændre Materialets Egenskaber væsenligt. — I Virkeligheden gør man det jo allerede ved at forvandle Jærnet fra et inhomogent til et mere homogent Materiale. — Ved Forsøg med homogent Transformatorjærn fandt C. W. Burrows følgende Værdier for Ændringen i Induktionen ved Udglødning.

H	B_g	B_n	$B_g - B_n$	$\frac{B_g - B_n}{B_g}$
0,5	478	289	186	0,39
1,0	3332	1078	2254	0,67
2,0	8830	4660	4170	0,47
3,0	11580	7220	4360	0,38
5,0	14340	10290	4050	0,28
10,0	16440	13930	2510	0,15
15,0	17150	15630	1520	0,09

H betegner den magnetiske Kraft, B_g Induktionen af det udglødede, B_n Induktionen af det ikke udglødede Materiale.

B. Ændringer i Maaleobjektet ved Processer, nødvendige for selve Maalingen. En Kilde til Fejl, hvorfra Forfalskning i Resultatet i overordentlig mange Tilfælde stammer, er de for Maalingen nødvendige Processer. Ved en Modstandsmaaling er det nødvendigt at sende Strøm gennem

Maaleobjektet, og denne Strøm giver Anledning til en Temperaturstigning, altsaa til ensidig Ændring af en ofte væsentlig Egenskab ved Maaleobjektet. Vurderingen af den Opvarmning, Strømmen fremkalder, vil ofte være overordentlig vanskelig eller ganske umulig. Derfor maa Bestræbelserne i første Linie rettes mod at gøre Opvarmningen saa ringe, at den bliver betydningsløs. Om den i et givet Tilfælde er det, maa prøves ved et Forsøg, hvorved man ændrer Strømmens Styrke. Tænker vi os denne f. Eks. sat 50 % op, og iagttager vi ved samme Strømslutningstid ingen Ændring i Resultatet, betyder det, at den først anvendte Maalestrøm ikke har været for stærk.

Foruden dette Eksempel kan talrige andre fremdrages. Vi skal anføre et Par af betydelig praktisk Interesse.

Bestemmelsen af Elektrolyters Ledningsevne og af galvaniske Elementers indre Modstand vanskeliggøres, som det vil vides, ofte ved den Polarisation, der optræder ved Elektroderne, naar Maalestrømmen sendes gennem Cellen. Almindelig kendt er Kohlrausch' Vekselstrømsmetode, ved hvilken Polarisationen praktisk set kan elimineres. Kohlrausch' Undersøgelser over Betingelserne for denne Metode er klassiske. Dens Teknik er fremstillet i Kohlrausch og Holborn: »Leitvermögen der Elektrolyte«. Ogsaa ved Vekselstrøm optræder Polarisationsfænomener, men ved passende hurtig Vekslen af Strømretning — f. Eks. over 200 pr. Sekund — og passende stor Overflade af Platinelektroderne vil Virkningen af Strømmen kunne gøres praktisk set forsvindende. En relativt stor Overflade opnaas ved Udfældning af Platinsort paa Elektroderne. Kohlrausch angiver, at det tilstrækkelige Areal for saadanne Elektroder er fra $\frac{50}{w}$ til $\frac{100}{w}$ cm², naar w er Modstanden i den Elektrolyt, der danner Maaleobjektet. Jo større w er, des mindre behøver følgeligt Arealet at være. Ved overordentlig store Modstande, som de forekommer ved Bestemmelse f. Eks. af »rent Vands« Ledningsevne, kan man svarende hertil benytte blanke Elektroder og gør ofte vel deri. Platin-

sort vil nemlig let okkludere noget af den Opløsning, i hvilken det henstaar. Fyldes nu en ny og f. Eks. svagere ledende Væske i Cellen, diffunderer den okkluderede Opløsning ud i Væsken og bevirker derved en Forøgelse af dennes Ledningsevne.

En bekendt Metode til Bestemmelse af vandige Opløsningers Frysepunkt er Underafkølingsmetoden. En vis Mængde af Væsken afkøles et Par Grader ned under Opløsningens Frysepunkt og bringes derefter til at udfryse ved, at en Iskrystal bringes ned i Opløsningen. Dennes Temperatur stiger derved, hvis tilstrækkelig Is udkrystalliserer, til Frysepunktet, men, som det ses, ikke til Frysepunktet for den oprindelige Opløsning derimod til Frysepunktet for den mere koncentrerede, der bliver tilbage efter Udskillelsen af Iskrystallerne. Vurderingen af Ændringen i Koncentration vil sikkert som oftest være vanskelig. Fejlkilden undgaas i den af K. Prytz uddannede Metode, ved hvilken der tilvejebringes og vedligeholdes en Blanding af Is og den Opløsning, der ønskes undersøgt, og netop denne, altsaa ikke en ved Udkrystallisation eller nogen anden Proces ændret.

C. Ændringer, der skyldes Maaleapparatet. Vi skal endelig paa dette Sted pege paa den Kilde til Forfalskning, Indbringelsen af Maaleapparatet i (eller Fjærnelse fra) det System, vi maaler paa, kan betyde. Ogsaa denne Fejlkilde er af en overordentlig almindelig Karakter og giver ofte Anledning til betydelige Vanskeligheder.

Den elektriske Maaleteknik frembyder et Par anskuelige Eksempler.

Ved Maaling af et Spændingsfald ved et Voltmeter kræver Voltmetret, saa længe det er indskudt, en stadig Tilførsel af Energi, og denne Energi maa afgives af Maaleobjektet. Det betyder, at det Spændingsfald, der skulde maales, faktisk ikke længere er til Stede, naar Maalingen foretages. Indbringelsen af Voltmetret har ændret den Størrelse, der skulde bestemmes. Det samme vil Indbringelsen af Ampéremetret i

en Strømkres gøre, idet Maaleapparatets Modstand forandrer Kresens Modstand og dermed dens Strøm. I begge de her betragtede Tilfælde er Fejlkilden dog i Almindelighed af mindre alvorlig Natur. Energiforbruget af moderne Systemer er nemlig ofte at betragte som forsvindende, og selv om det ikke er Tilfældet, vil det i Almindelighed være en let Sag at holde Regnskab med Fejlkildens Indflydelse. I andre Tilfælde betyder det energiforbrugende System en langt alvorligere Fejlkilde, netop fordi det bliver vanskeligt om ikke umuligt at holde Regnskab med Virkningen.

Talrige Eksempler herpaa kan anføres. Ved Bestemmelse af Strømningshastigheden i et Vandløb eller en Flod, kan man betjene sig af et Apparat bestaaende af et vinkelformet Stigerør, hvis vandrette Gren befinder sig nede i Vandet med Mundingen vendt mod Strømmen. Apparatet er, som det ses, det simplest mulige, og man skulde maaske paa Forhaand vente, at det lod sig gøre ud fra de simpleste Forudsætninger at beregne Strømningshastigheden af Stighøjden. Det lader sig nu næppe i Almindelighed gøre, thi Indbringelsen af Maaleapparatet vil ændre Strømningsforholdene omkring Røret og det paa ret uoverskuelig Maade. Alligevel kan Apparatet benyttes til Maaling af Strømningshastigheden, fordi Afhængigheden mellem Stighøjden og Hastigheden er entydig. Blot maa Afhængigheden i Forvejen gøres til Genstand for en empirisk Undersøgelse, d. v. s. hvert Apparat maa justeres empirisk, og der maa for dets Brug gives Specifikationer, der maa overholdes med en vis Tolerans. Det samme gælder iøvrigt de fleste Strømningsmaalere foruden talrige andre Systemer af samme Karakter.

Principielt staar vel den her betragtede Forholdsregel — den empiriske Justering — altid til Raadighed som et Middel mod Indflydelsen af Maaleapparatet paa Maaleobjektet. I visse Tilfælde maa Anvendelsen dog betegnes som praktisk set umulig. Ved Undersøgelsen af ukonstante Elementers elektromotoriske Kraft lader det sig saaledes i Almindelighed overhovedet ikke gøre at bruge et Voltmeter som Spændings-

maaler. Den Energiafgivelse, Voltmetret kræver, vil nemlig have en Indflydelse, der i altfor høj Grad afhænger af Elementets Beskaffenhed, saaledes at det ikke er til at tænke paa at holde Regnskab med denne Indflydelse, naar Talen er om Maalinger paa forskelligartede Elementer. Noget anderledes stiller Sagen sig, saafremt det kun er en enkelt Type, Maalingen arbejder med. I dette Tilfælde kunde der maaske være Tale om en Gang for alle at undersøge Indflydelsen af Energiafgivningen ved den her betragtede Maaling og andre af beslægtet Art (Maaling af indre Modstand).

Langt at foretrække er det dog i Tilfælde som de her antydede at ombytte den ofte tvivlsomme Voltmeterbestemmelse med en Maaling, der principielt ikke rummer Voltmetermaalingens Fejlkilde. Som det vil være bekendt, haves i det statiske Voltmeter og i Kompensatoren Systemer for Spændingsmaaling, som ifølge deres Natur ingen Energiafgivning kræver, i ethvert Fald kun en saa ringe, at den i de fleste Tilfælde kan betragtes som uvæsentlig.

Den Fejlkilde, vi her undersøger, falder ganske bort, naar det lader sig gøre at indbygge Maaleredskabet permanent i det System, der maales paa, saaledes at det paa en Maade udgør en Del af dette. Det her antydede radikale Middel mod Fejlkilden benyttes i Virkeligheden i særdeles mange Tilfælde. Saaledes undgaar man enhver Ændring hidrørende fra Ampéremetret ved at bygge dette ind i Strømkresen og paa samme Maade undgaar man f. Eks. en Forfalskning af Resultatet hidrørende fra Omdrejningstælleren ved et roterende System ved at bygge Tælleren ind i Systemet. I Virkeligheden indses det, at det i næstsidste Eksempel ikke er strængt nødvendigt at lade Ampéremetret forblive i Kresen. Det kan meget vel udtages og benyttes andet Steds, naar man blot til Gengæld indskyder en Modstand lig Strømmaalerens.

Opgaver.

Opg. 1. For at bestemme Korrektionen for den Fejl, Vekselvirkningen mellem Felt og Maaleobjekt i magnetisk

Materialprøvning kan give Anledning til, kan man gaa frem paa følgende Maade: Magnetiseringskurven optages først med den normale stangformede Prøve, hvorpaa denne afdrejes til en Rotationsellipsoide, der tillader Optagelse af den korrekte Kurve. Hvilken Indvending kunde man rejse mod denne Metode?

Opg. 2. Ved Bestemmelse af Modstandsevnen for pladeformet Isolationsmateriale klistrer man undertiden to rektangulære Elektroder af Staniol paa Pladen ligeoverfor hinanden paa dennes to Sider. Er der noget betænkeligt herved?

Opg. 3. Det ligger nær at forsøge at maale en Induktors Afbrydningstal ved Tælling af Gnisterne. Saadan Gnisttælling kunde man tænke sig gennemført ved i Gnistbanen at indskyde et Stykke Papir og iagttage det Antal Huller, Gnisterne slaar i Papiret. — Hvilke Fejl udsætter man sig imidlertid derved for? Angiv en Metode, der ikke er udsat for disse Fejl.

Opg. 4. Man kan som bekendt bestemme en Stemmegaffels Svingningstal ved paa en Gren af den at anbringe en lille Stift og lade denne tegne en Bølgelinie paa en roterende Tromle: Hvilke Fejlkilder rummer denne Metode, og hvorledes skulde Metoden ændres for at befries for Fejlkilderne?

KAP. IV.

MAALEOBJEKTET.
EFTERVIRKNING OG HYSTERESIS SOM VÆSENTLIGE FORHOLD VED MAALEOBJEKTET UNDER EN MATERIALPRØVNING.
SPECIFIKATIONER FOR FORUDGAAENDE BEHANDLING AF MAALEOBJEKTET OG FOR PRØVENS UDFØRELSE.

Eftervirkning og Hysteresis. Nødvendigheden af Specifikationer for forudgaaende Behandling af Maaleobjektet. Fra Fysik og Teknik vil man kende talrige Eksempler paa, at et Materiales eller et Systems Egenskaber afhænger af dets Forhistorie. Gøres nu et saadant Materiale til Maaleobjekt

for en Materialprøvning, kan den antydede Afhængighed give Anledning til betydelige Vanskeligheder, idet den forudgaaende Behandling bliver et væsentligt Forhold, der ligesom alle væsentlige Forhold maa karakteriseres. I Virkeligheden maa det i Praksis mere end karakteriseres. Materialet maa efter særlige Specifikationer underkastes en bestemt Forbehandling for at bringe det i en entydig bestemt Tilstand.

Jærnet under den magnetiske Prøve afgiver et udmærket Eksempel til Belysning af de her antydede Forholdsregler. Vi vælger da dette Eksempel og kan derved i vor Fremstilling støtte os til et Arbejde. udført ved den amerikanske Statsprøveanstalt, nemlig C. W. Burrows' Undersøgelse: »The best method of demagnetizing iron in magnetic testing.« Tilstanden, man maa gaa ud fra i den magnetiske Undersøgelse, er den magnetisk neutrale Tilstand. Burrows viser, hvad der karakteriserer denne Tilstand, fastslaar et praktisk Kriterium for Tilstanden og viser, hvordan den kan tilvejebringes.

C. W. Burrows Undersøgelser over Maaleobjektets Tilstand ved magnetisk Materialprøvning. Det vil for Forstaaelsen af de Resultater, Burrows kommer til, være nødvendigt at erindre det fysiske Grundlag for den magnetiske Maaleteknik og de Begreber, hvormed denne Teknik arbejder.

Haves et Stykke neutralt Jærn og dette udsættes for en voksende, magnetiserende Kraft, vil den magnetiske Induktion stige efter Kurven *o a b* Fig. 39. Vender vi Kraften i *b*, forandres Induktionen efter *b c d*, vendes Kraften atter, gaar Induktionen tilbage langs Vejen *d e b*. Den beskrevne, lukkede Kurve vil være symmetrisk om Punktet *o*. Kurven kaldes den normale

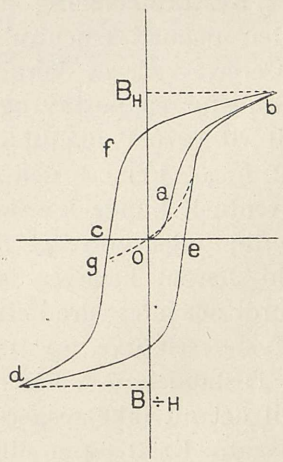

Fig. 39.

Hysteresiskurve, og $\frac{1}{2}(B_H - B_{-H})$ eller den halve Forandring i Induktion ved Kommutering af Kraften H er det, vi forstaar ved den til H svarende Induktion.

Er nu Jærnet ikke fra først af bragt i den neutrale Tilstand, men polariseret, vil det have den Indflydelse, at den lukkede Kurve, der faas ved gentagen Kommutering af en bestemt Kraft H, ikke længere er symmetrisk m. H. t. Begyndelsespunktet. For smaa Kræfter kan det ske, at Induktionen overhovedet ikke skifter Tegn med H, saaledes som det er vist i Fig. 40. Den lukkede Kurve kunde nu kaldes en Quasi-Hysteresissløjfe, og $\frac{1}{2}(B_H - B_{-H})$ vil vi efter Burrows kalde den tilsyneladende Induktion. Differensen mellem den normale og den tilsyneladende Induktion er Polarisationseffekten, Virkningen af Polarisationen.

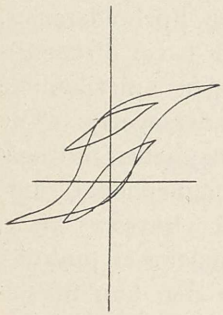

Fig. 40.

Karakterisering af den magnetisk neutrale Tilstand. Den magnetisk neutrale Tilstand er i Følge det anførte karaktisereret ved, at Jærnet i denne reagerer numerisk i samme Grad for en positiv og en negativ magnetiserende Kraft. Dertil vil Jærnet udadtil være neutralt altsaa ikke være omgivet af noget Felt. I den sidste Egenskab, hvis Tilstedeværelse eventuelt kunde konstateres ved en Magnetnaal, haves imidlertid intet entydigt Kendetegn paa den neutrale Tilstand, thi Jærnet behøver ikke at være i den neutrale Tilstand, fordi det intet ydre Felt har. Lad $b\,d$ Fig. 39 være den normale Hysteresiskurve, og lad os tænke os, at Jærnet er bragt i Tilstanden o f. Eks. ved Tilstandsforandringen $b\,f\,g\,o$, saa vil det nu ikke reagere paa samme Maade for en positiv og negativ Kraft og er altsaa ikke neutralt, til Trods for at det intet Felt udviser.

Burrows viser derimod ved et Forsøg, at den neutrale Tilstand entydigt er karakteriseret derved, at den tilsyneladende Induktion i denne er Maximum, Fig. 41 belyser dette Kendetegn. Har Jærnet en vis stærk Polarisation, faas efter gentagen Kommutering af Kraften H en Sløjfe I, der ligger temmeligt fladt mod Abscisseaksen. Ved mindre Polarisering faas en noget stejlere Sløjfe II, og ved slet ingen Polarisering, naar Jærnet altsaa er magnetisk neutralt, faas den stejleste Sløjfe III og altsaa ogsaa det største Tal for Induktion $\frac{1}{2}(B_H - B_{-H})$.

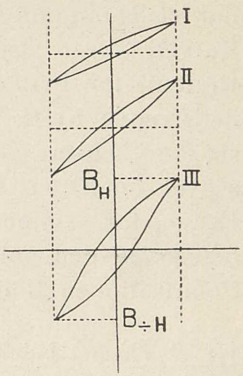

Fig. 41.

Tilvejebringelse af den magnetisk neutrale Tilstand. Den kritiske afmagnetiserende Kraft. Burrows Arbejde er i det væsentlige et experimentalt Studium af de to almindelige Metoder for Afmagnetisering: Afmagnetisering gennem Kommutering af en stadigt aftagende Strøm og Afmagnetisering ved aftagende Vekselstrøm.

Det fremgaar af Burrows Forsøg, at der er en vis Kraft, den kritiske afmagnetiserende Kraft, der spiller en væsentlig Rolle ved Afmagnetiseringen. Betydningen af denne Kraft kan belyses ved Fig. 42. Her er N den normale Induktionskurve altsaa den, der faas for i Forvejen afmagnetiseret Jærn. Optages Induktionskurven for Jærn, der er polariseret, faas en lavere Kurve. Differenserne er tegnede ind i Kurven P, der altsaa gengiver Polarisationseffekten. Ordinatmaale-

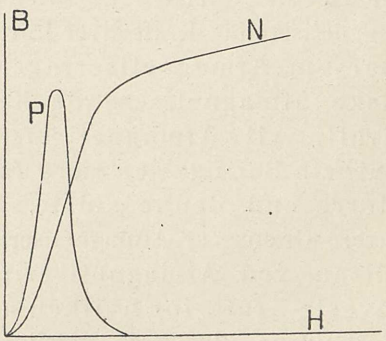

Fig. 42.

stokken for *P* er ca. 10 Gange Maalestokken for *N*. *P*-Kurven har et Maximum omtrent svarende til den Kraft, hvor *N*-Kurven stiger stejlest i Vejret. Den aftager derpaa til Nul. Kraften, for hvilken den bliver Nul, er den kritiske afmagnetiserende Kraft. Over den gør Virkningen af Polarisationen sig ikke længere gældende. Den kritiske afmagnetiserende Kraft saavel som Abscissen til Maximumspunktet synes efter Burrows Forsøg for samme Jærnsort at være en Konstant, der ikke afhænger af den polariserende Kraft eller den Maade, hvorpaa Polarisationen finder Sted. Derimod afhænger Polarisationseffektens Størrelse altsaa Kurvens Højde af begge disse Forhold. Fig. 43 viser, hvorledes Induktionen svarende til en vis magnetiserende Kraft meget nær den, for hvilken Polarisationseffekten er Maximum, aftager, naar den polariserende Kraft vokser. Kurvens Afstand fra Linien for normal Induktion giver Polarisationseffekten, der altsaa vokser asymptotisk med den polariserende Kraft til en Maximumsværdi.

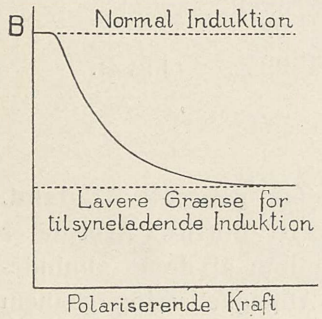

Fig. 43.

Specifikationer for Grænserne for den afmagnetiserende Kraft. Med Hensyn til Grænserne for trinvis aftagende afmagnetiserende Kraft giver Burrows Forsøg nu følgende Regel: Dersom Afmagnetiseringen begynder med den kritiske afmagnetiserende Kraft og ender med en vis Kraft, vil Afmagnetiseringen under de nedenfor anførte Betingelser være fuldstændig for alle Kræfter større end denne sidste. For Kræfter mindre end den lavere Grænse er Afmagnetiseringen ufuldstændig. Man skal altsaa ved Afmagnetiseringen gaa ned under den laveste Kraft, for hvilken man vil maale Induktionen. Forholdene illustreres tydeligt ved Fig. 44. Kurven *a* viser den tilsyneladende Induktions Variation med den øvre Grænse.

Induktionen er maalt for den Kraft H_o, ved hvilken Polarisationseffekten skulde gøre sig stærkest gældende. H_k er den kritiske afmagnetiserende Kraft. Ved Bestemmelsen af a-Kurven er den nederste Grænse praktisk set Nul, b-Kurven viser Variationen af Induktionen med den nederste Grænse.

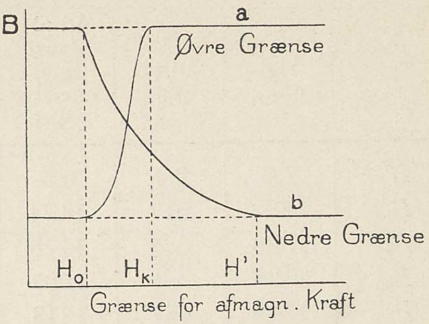

Fig. 44.

Ligger denne under H_o, opnaas Afmagnetiseringen fuldstændigt. Svarende til denne øvre Grænse for den tilsyneladende Induktion — den normale Induktion — har den tilsyneladende Induktion en nedre Grænse, der faas, enten naar den øvre Grænse ligger under H_o eller den nedre under en vis Kraft H'.

Den afmagnetiserende Strøms Frekvens. Det anførte gælder nu kun under visse Betingelser og først og fremmest kun, naar Frekvensen eller Antallet af Strømvendinger pr. Sekund ligger under en vis Grænse. Ved Forsøg dels med kommuteret Jævnstrøm, dels med Vekselstrøm finder Burrows, at en Polarisationseffekt i Virkeligheden altid er til Stede i den Del af Magnetiseringskurven, der ligger under Grænsen givet ved den kritiske afmagnetiserende Kraft. Virkningen er for forskellige Jærnsorter gengivet i Tabellen næste Side.

Grafisk er den gengivet for blødt Transformatorjærn i Fig. 45. Den er her (og i Tabellen) maalt for den Kraft, hvor Polarisationseffekten er størst. Man kan ikke opnaa fuldstændig Afmagnetisering ved at sætte den øvre Grænse op, thi naar denne Grænse er kommen op over en vis Værdi, bliver Polarisationseffekten konstant

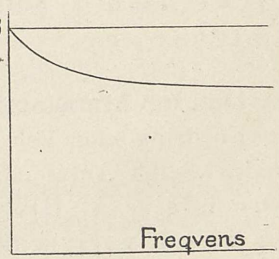

Fig. 45.

	Kulstofrigt Staal	Kulstoffattigt Staal	Blødt Jærn med massive Aag	Blødt Jærn med Aag af samme Tværsnit	Blødt Jærn uden Aag	Frekvens
H	7,0	2,0	0,5	0,5	0,5	
B_{120}	1332	617	1134	1176	1181	120
B_{90}	1336	621	1178	1221	1229	90
B_{60}	1338	630	1207	1240	1246	60
B_{30}	1349	647	1243	1265	1270	30
B_{15}	1360	660	1266	1278	1280	15
B_{10}	1365	663	1274	1281	1283	10
B_5	1367	676	1281	1285	1286	5
B_1	1368	680	1290	1290	1290	1
$B_1 - B_{120}$	36	63	156	114	109	
$\frac{B_1 - B_{120}}{B_1}$	0,03	0,09	0,14	0,09	0,08	

ganske uafhængigt af Grænsen og vil, naar teknisk Vekselstrøm anvendes, endnu have en Værdi, der i Almindelighed ikke kan negligeres. Dette fremgaar af nedenfor anførte Tabel (pg. 185).

For at opnaa praktisk set fuldstændig Afmagnetisering maa denne i Overensstemmelse hermed foretages ved en meget lav Frekvens. Burrows foreslaar Frekvensen 1 som en i Almindelighed passende Værdi.

Den for Afmagnetiseringen nødvendige Tid. Men endnu en Fordring maa der stilles til Afmagnetiseringen, nemlig et tilstrækkeligt Antal Strømvendinger. Burrows finder ved Anvendelse af tilstrækkelig lav Frekvens — ca. 1 — og Strøm varierende indenfor de tidligere bestemte Grænser, at fuldstændig Afmagnetisering kun naas,

Grænser for den afmagnetiserende Kraft		5 — 0,2*)	3,5 — 0,2	2,6 — 0,2	Ingen Af-magneti-sering
Tidsinterval		77	58	34	
Antal af Cykler		4620	3480	2040	
H	Normal Induktion	Polarisations-Virkninger			
0,3	370	20	30	30	240
0,4	670	30	30	40	440
0,5	1290	50	50	70	810
0,6	1680	60	60	90	960
0,7	2570	80	80	100	1190
0,8	3370	70	70	70	860
0,9	4300	60	60	60	600
1,0	5130	50	50	50	380
1,2	6730	40	40	40	240
1,4	6950	20	20	20	90
1,6	7610	10	10	10	30
2,0	8880	0	0	0	0

*) Denne Kolonne gælder ogsaa for de følgende Betingelser.

Grænser for den afmagnetiserende Kraft	5 — 0,2	20 — 0,2	36 — 0,2	159 — 0,2
Tidsinterval	177	40,8	60	52
Antal af Cykler	4620	2448	3600	3120

naar Tiden for Afmagnetiseringen er større end ca. 1 Minut. Burrows finder endvidere, at man bør lade den afmagnetiserende Kraft aftage saaledes, at Induktionen aftager med jævn Hastighed.

Specifikationer for Optagelse af Induktionskurver. Hermed er de tilstrækkelige Anvisninger for fuldstændig Afmagnetisering af Jærnet givne. Men ligesom Resultatet kun vil blive entydigt, hvis Prøven gaar ud fra en entydigt bestemt

Tilstand, vil det kun blive det, hvis selve Prøven udføres paa en i det væsentlige bestemt Maade. Burrows studerer ogsaa Betingelserne for den entydige Optagelse af Induktionskurven og finder herved først og fremmest, at et vist Antal Kommutationer af den Kraft, for hvilken Induktionen skal maales, er nødvendigt for at naa til en

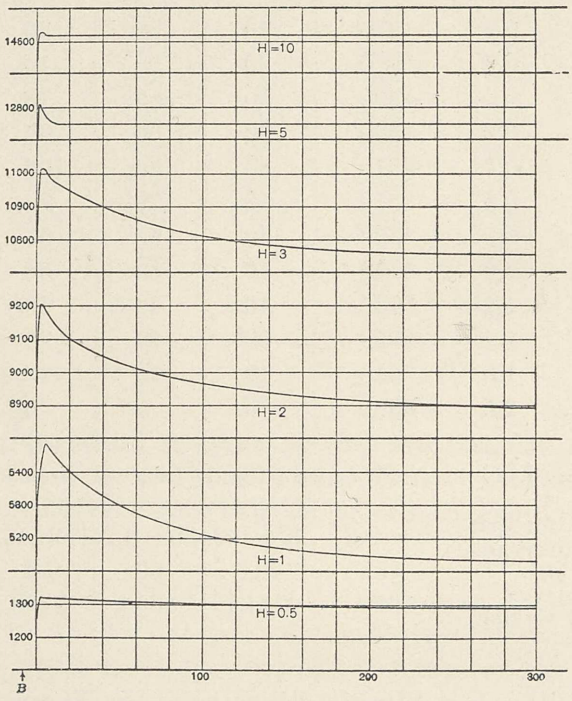

Fig. 46.

endelig entydig Værdi. Fig. 46 viser Maaden hvorpaa denne Værdi naas ved forskellig magnetiserende Kraft. Man maa altsaa fortsætte Kommutationen af Kraften, til to Kommutationer med et passende stort Mellemrum giver samme Værdi. Fig. 46 viser, at det ikke er faa Kommutationer, der fordres, 100 vil i Almindelighed være for faa. Derimod paaviser Burrows, at een Afmagnetisering forud for Prøven

er tilstrækkelig, naar man ved Optagelsen gaar fra mindre til større Kræfter. En Afmagnetisering før Bestemmelsen af hvert nyt Punkt er altsaa under disse Forhold unødvendig.

Andre Tilfælde, hvor Specifikation udkræves. Vi har hermed gjort Rede for de Specifikationer, Burrows Undersøgelser fører til med Hensyn til Maaleobjektets Behandling i den magnetiske Materialprøvning. Denne repræsenterer et, som det vil forstaas, vanskeligt maaleteknisk Tilfælde, men ikke et enestaaende. Den Hysteresis og Eftervirkning, der gør sig i saa høj Grad gældende ved Jærn, og som lægger en entydig Bestemmelse af Jærnets magnetiske Egenskaber saa betydelige Hindringer i Vejen, møder os ogsaa ved andre Maaleobjekter. Ved elastisk Materialprøvning gør elastisk Eftervirkning sig gældende. Entydig Maaling af en Kondensators Kapacitet vanskeliggøres i høj Grad ved den dielektriske Hysteresis og ved de Eftervirkningsfænomener, der optræder i Kondensatorens Dielektricum, naar dette er en fast Isolator. Overordentlig komplicerede Forhold optræder svarende hertil ved Prøve af Isolatorers Modstandsevne. Den Værdi, man faar for Modstandsevnen, afhænger af, om Prøven foretages ved Jævnspænding eller Vekselspænding. Udsat for en relativt svag Spænding vil Materialet staa sig en lang Tid, men dog maaske tilsidst gennembrydes, mens en højere Spænding straks gennembryder det o. s. v. Her er sikkert mange Forhold sammenblandede — Opvarmning ved Maalestrøm, elektrisk Hysteresis o. s. v. Det vil forstaas, at disse indviklede Forhold kan gøre Uddannelsen af en entydig Prøvemetode til en yderst vanskelig, næsten haabløs Sag. Den første Forudsætning for, at det skal lykkes, er et gennemført Studium, der skiller de forskellige Fænomener ud fra hverandre.

Temperaturhysteresis. En Fejlkilde, der hyppigt vil kunne gøre sig gældende, er den, der kan betegnes som Tem-

peraturhysteresis. Der vil være Grund til at skænke den en særlig Omtale paa dette Sted af Fremstillingen.

Naar et Legeme eller et System med en ikke altfor ringe Varmekapacitet befinder sig i et Rum med varierende Temperatur, vil dets Temperatur ogsaa variere; men Variationerne vil i Almindelighed være forskudt i Forhold til Milieuets og naturligvis herved komme bag efter disse.

Faseforskydningen er for et bestemt Tilfælde anskueliggjort i Kurverne *A B* og *C*, Fig. 47. *A* fremstiller her Milieuets

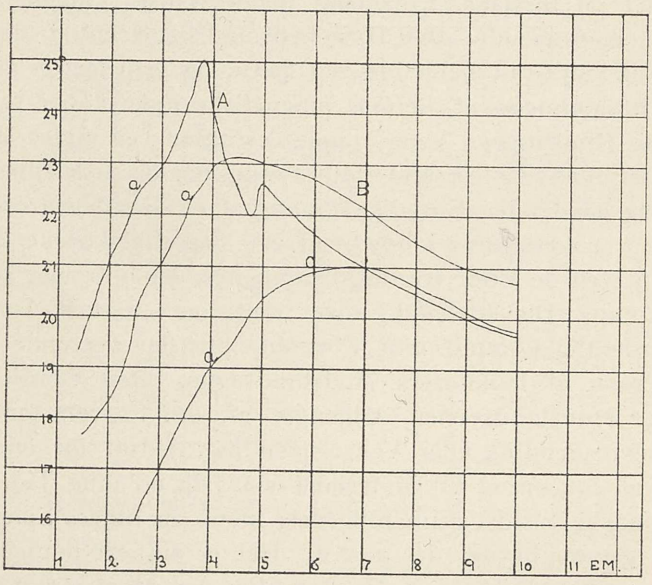

Fig. 47.

Temperaturvariationer i Løbet af ca. $^1/_4$ Døgn i et Laboratorielokale, *B* Variationerne i en Kolbe med 50 cm^3 Vand og *C* Variationerne i en anden Kolbe med 1000 cm^3 Vand, der ligesom den første henstod i det antydede Lokale. Et Maksimum i Lokalets Temperatur indtræder Kl. ca. 3.40. Det tilsvarende Maksimum i Kolbe *A*' Temperatur ca. 4.20. Det ligger ca. 2^0 lavere end Rummets. Kolben *B* naar først sin Maksimumstemperatur Kl. ca. $6^1/_2$, og den er igen ca. 2^0 lavere end *A*'.

Man vil bemærke, at Kurverne til en vis Grad er ligedannede. En Uregelmæssighed som a synes saaledes at gaa igen i alle Kurver. Det ses endvidere, at mens Kolberne først er koldere end Milieuet, ender de med at være varmere.

Det fremgaar da tydeligt af det her anførte, at det i Almindelighed er ganske utilladeligt at antage, at et Legeme har Milieuets Temperatur, blot fordi det i længere Tid eller praktisk set ubegrænset Tid har henstaaet i Milieuet. En Forudsætning for Rigtigheden er, at Milieuets Temperatur i tilstrækkelig lang Tid og i tilstrækkelig høj Grad har været konstant.

Dersom man ikke ved særlige Foranstaltninger bringer Legemets Temperatur til at falde sammen med Milieuets, som vi nu vil antage konstant, følger af det foregaaende, at Legemet i Almindelighed i længere Tid maa henstaa i Milieuet, før det tør antages at have antaget dettes Temperatur, særlig hvis det til en Begyndelse har haft en stærkt afvigende Temperatur. Det sidste indtræder hyppigt ved Arbejdsstykker i Metalbearbejdningstekniken, som man gør til Genstand for Udmaaling. Saadanne Arbejdsstykker vil nemlig hyppigt være opvarmede stærkt ved den forudgaaende Behandling, f. Eks. Afdrejning. De planparallele Glasplader af yderst ringe Fremstillingstolerans, der tilslibes i de optiske Fabriker, udmaales og prøves for Ensartethed ved Interferensmetoder. Før nogen Maaling kan foretages, maa Pladerne imidlertid ofte timevis have henligget i Maaleapparatet, der igen som oftest maa skærmes mod større Temperaturvariationer. I dette Tilfælde er Formaalet med »Lagringen« væsentligst den at give Pladen en ensartet Temperatur. Det samme er Formaalet, naar man henstiller Westonnormalelementet i et Rum med konstante Temperaturforhold i længere Tid før Prøven. Elementets Temperaturkoefficient er overordentlig lille, men dets elektromotoriske Kraft kan afvige meget betydeligt fra den normale, naar Elementets Dele ikke alle har samme Temperatur.

KAP. V.

MAALEAPPARATET. — NORMAL OG SKALA.

A. Normalen. Den nominelle Værdi og den virkelige. Fejl og Korrektion. I Vægtloddet, i Kaliberbolten, i Normalmodstanden o. s. v. har vi Eksempler paa enkle Normaler. Vi taler om Normalens nominelle Værdi og forstaar herved den Værdi, der er opgivet af Fabriken og ofte paaskrevet Normalen, eller eventuelt den Værdi, der er angivet af det Laboratorium, der har kontrolleret Normalen. En blivende eller forbigaaende Afvigelse mellem den nominelle Værdi og Normalens sande Værdi betyder, at vi maaler med en mer eller mindre falsk Enhed. I Overensstemmelse hermed kalder vi den Fejl, Afvigelsen repræsenterer — den eneste Fejl, Normalen forøvrigt kan have — Normalens Enhedsfejl. Dersom Afvigelsen er p % af den nominelle Værdi, vil alle de Maal, vi faar ved Sammenligning med Normalen, være p % for store eller for smaa. Vi siger, at Normalen har en Enhedsfejl paa numerisk p %. Vi retter for den ved at formindske eller forstørre Resultatet med lige saa mange Procent, alt eftersom Afvigelsen gaar til den ene eller den anden Side. For at fjærne Dobbelttydigheden fastslaar vi nu følgende nærmere Definition af Begrebet Fejl: Fejlen er det Beløb, hvormed den nominelle Værdi overskrider den virkelige. Fejlen er altsaa ved Normalen positiv, dersom den virkelige Værdi er mindre end den nominelle, negativ, naar den er større. Korrektionen er i Modsætning til Fejlen det Beløb, der skal føjes til den nominelle Værdi for at faa den virkelige. Den er altsaa Fejlen med modsat Fortegn, positiv, naar Fejlen er negativ og omvendt. De her givne Definitioner paa Fejl og Korrektion er almindelige Definitioner med Gyldighed for alle Tilfælde.

Vi betragter nu Oprindelsen til Normalens Fejl.

a. Fremstillingsusikkerhed. Katalogangivelse af denne. Justering og Justeringscertifikat. Enhedsfejlen kan

for det første hidrøre fra Fremstillingens Usikkerhed. Som Følge af denne vil den færdige Længdenormal, det færdige Vægtlod eller hvilken Normal, der nu er Tale om, i Almindelighed afvige i sin Værdi fra den tilstræbte. I rationel Fremstilling af Normaler [og Instrumenter] vil man holde Afvigelsen under Kontrol og sørge for, at den ikke overskrider en vis Grænse. Denne Grænseafvigelse — Fremstillingens Tolerans — vil man som oftest bestemme efter Normalens Formaal, idet man stræber at gøre den saa lille, at den tilsvarende Fejl bliver uvæsentlig i de Maalinger, Normalen eller Maaleredskabet er bestemt for. For at Brugeren imidlertid selv kan afgøre Spørgsmaalet om væsentligt eller uvæsentligt, anfører man nu hyppigt i Katalogen over Normal eller Instrument Fremstillingstoleransen. Lad os tænke os, at en Modstandsnormal skal anvendes til en Maaling af 1 % Tolerans. I Følge Katalogen er dens Fremstillingstolerans 0,3 %. Fremstillingsusikkerheden er da — under Forudsætning af Katalogens Paalidelighed — her i Almindelighed ikke at opfatte som en Kilde til Fejl, men nærmere som en Kilde til Usikkerhed*). Benyttes Modstanden derimod i en Maaling, der tilstræber en Nøjagtighed paa 1 ‰, er Fremstillingsusikkerheden en væsentlig Kilde til Fejl, idet den kan give Anledning til en Afvigelse fra den sande Værdi tre Gange saa stor som den tilladelige, — hvis der da ikke tages Forholdsregel mod den mulige Fejl paa Normalen.

Den antydede Forholdsregel bestaar i Korrektion paa Grundlag af Kendskab til Fejlen. Dette Kendskab skaffer man sig ved Udmaaling af Normalens sande Værdi. Udmaalingen eller den saakaldte Justering maa foretages med en Tolerans, der er væsentlig mindre end den, der kan tillades ved Brugen, i ethvert Fald mindst lig med denne. I Nutidens Statsprøveanstalter haves Institutioner, der blandt andet paatager sig Justering af indsendte Normaler i de legale Enheder og under

*) Se Indledningen.

Beglaubigungsschein

für den elektrischen Präzisionswiderstand Nr. 5221

von

O. Wolff, Berlin.

(Sollwert 1 Ohm.)

Der Widerstand ist nach Angabe des Verfertigers aus Manganindraht hergestellt, im Februar 1913 gewickelt und vor dem Abgleichen 10 Stunden auf 140° C erwärmt; er befindet sich in einem luftdicht abgeschlossenen, mit Paraffinöl gefüllten Behälter.

Nach dem Ergebnis der hier ausgeführten Prüfung beträgt der Wert des Widerstandes — zwischen den ~~besonderen~~ Potentialklemmen gemessen — zur Zeit

bei 24,9 Grad C 1,00015 int. Ohm

„ 17,3 „ „ 1,00000 „ „

Diese durch Vergleichung mit den Drahtnormalen der Reichsanstalt ermittelten Zahlen werden verbürgt bis auf 0,0001 ihres Wertes.

Aus ihnen berechnet sich der mittlere Temperaturkoeffizient zwischen den obigen Temperaturen zu + 0,00001$_9$

Der Widerstand ist mit dem amtlichen Bleisiegel versehen und mit dem Reichsadler, der Beglaubigungsnummer PTR 34/1913 sowie einem Stern als Präzisionswiderstand gestempelt, da er bei der auf ihm angegebenen Temperatur um weniger als 0,001 seines Betrages von dem Sollwert abweicht.

Charlottenburg, den 5. Mai 1913.

Physikalisch-Technische Reichsanstalt

Abteilung II.

Hagen

PHYSIKALISCH-TECHNISCHE REICHSANSTALT ABTEILUNG II.

Vordruck 91
Juni 12

Scheine ohne Amtsstempel haben keine Gültigkeit.

Fig. 48.

visse Betingelser udsteder Certifikater for de udmaalte Normaler. Et saadant Certifikat udstedt af den tyske Statsprøveanstalt, Physikalisch-Technische Reichsanstalt i Charlottenburg er gengivet i foranstaaende Fig. 48.

Fremstillingsusikkerheden draget ind i Overslaget over Resultatets Usikkerhed. Vurderingen af Fremstillingsusikkerhedens Indflydelse er, som det fremgaar af Eksemplet ovenfor, den simplest tænkelige.

Naar Maaleobjektet direkte sammenlignes med Normalen som den ubekendte Masse med Vægtlodderne ved den almindelige Vægt, føjer Fremstillingsusikkerheden p % til Resultatets teoretiske Usikkerhed, naar Fremstillingstoleransen er p %. Dersom Maaleobjektet sammenlignes med en Samling Normaler, som Tilfældet i Almindelighed er ved Vejning, bliver det den resulterende praktiske Usikkerhed af Summen af de benyttede Enkeltnormaler, der indgaar i Overslaget. Hvorledes denne beregnes, har vi lært ovenfor. Paa dette Sted kan vi derfor indskrænke os til at pege paa et Forhold, som det er af største Vigtighed at lægge Mærke til, naar vi drager den i Virkeligheden ensidige Afvigelse, der hidrører fra Normalens Fremstillingsusikkerhed, ind i Overslaget over Resultatets Usikkerhed. Hvis en og samme Normal indgaar i to »Iagttagelser«, er disse Iagttagelser bundne til hinanden, d. v. s. deres fra den fælles Normal hidrørende Afvigelse er identisk den samme.

Vi belyser Betydningen heraf ved følgende Eksempel: En Metode til nøjagtig Sammenligning af Modstande er Kompensationsmetoden, ved hvilken man efter hinanden kompenserer Spændingsfaldet for en og samme Strøm i de to Modstande X og N ved Spændingsfaldene for en anden Strøm i de to kendte Modstande R_1 og R_2.

Naar Kompensation er tilvejebragt, er

$$I \cdot X = i R_1$$

$$I \cdot N = i R_2$$

altsaa $$F = \frac{X}{N} = \frac{R_1}{R_2}$$

Lad R_1 og R_2 være afpassede med en Tolerans af 0,2 $^0/_{00}$, saa skulde den Nøjagtighed, Afpasningen tillader i Bestemmelsen af F, flygtigt set synes at være givet ved 0,4 $^0/_{00}$ eller rettere $\frac{0{,}4\ ^0/_{00}}{\sqrt{2}}$. Dette vil dog under visse Omstændigheder være ganske forkert. Som oftest sammenlignes nemlig ved denne Metode kun Modstande af meget nær samme Størrelse. De Modstande, hvorved der kompenseres, er da ogsaa meget nær ens, i Virkeligheden i det væsentligste identiske. Naar R_1 er udtaget, skal der f. Eks. kun endnu udtages (eller indskydes) den lille Modstand S, saa at $R_2 = R_1 + S$ og

$$F = \frac{R_1}{R_1 + S}$$

R_2 og R_1 forholder sig altsaa i Virkeligheden som bundne Iagttagelser. De ubundne er R_1 og S. Spørger vi nu om, hvilken Sikkerhed paa Bestemmelsen af F Afpasningsusikkerheden tillader, kommer vi til følgende Resultat

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right)_t = \frac{S}{R_1} \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{S}{R_1} \cdot \frac{\Delta S}{S} = \frac{S}{R_1} \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta S}{S}\right) (S \text{ lille mod } R_1).$$

Er nu de smaa og store Modstande i Kompensatoren afpasset med samme relative Nøjagtighed, hvad hyppigt er Tilfældet, bliver

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right)_t = 2 \cdot \frac{S}{R} \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

Lad

$R =$ ca. 500 Ohm, $S =$ ca. 0,5 Ohm, $\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta R}{R} = \frac{2}{10000}$,

da bliver $\left(\frac{\Delta F}{F}\right)_t = 2 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{2}{10000} = 4 \cdot 10^{-7} =$ ca. $^1/_2$ paa 1 Million.

Som det ses, kan det da ikke være Modstandens Afpasningsusikkerhed, der sætter Grænsen for Sikkerheden eller Nøjagtigheden af en Sammenligning, som den her antydede (og lignende Sammenligninger f. Eks. af Normalelementer, Vægtlodder o. s. v.). Grænsen sættes af Galvanometrets Følsomhed, Temperaturusikkerhed, Termokræfter m. m.

b. Milieuets Variationer. Temperaturafhængighed. Temperaturkoefficient. Temperaturformel. Naar Normalens Værdi afhænger af dens Temperatur, hvad hyppigt i mere eller mindre høj Grad er Tilfældet, maa den Temperatur, ved hvilken den har sin nominelle Værdi, være angivet, og hvis man ikke skal være henvist til kun at benytte Normalen ved denne Temperatur, maa Temperaturafhængigheden yderligere være givet, for at man kan beregne Normalens Værdi ved den forhaandenværende Temperatur. I Almindelighed vil Fabrikanten angive de Data, Temperaturafhængigheden nødvendiggør Kendskabet til; men iøvrigt vil disse ogsaa kunne faas eller efterprøves ved Indsendelse af Normalen til et af de ovenfor antydede Prøvelaboratorier. I Fig. 48 er i Facsimile gengivet et Certifikat fra den tyske Statsprøveanstalt gældende for en Manganinnormal. Certifikatet indeholder en Angivelse af Modstandens Værdi ved

Form. 61. ECO. 6. 09.

Internationales Weston Normal Element No. 5327

Zusammensetzung nach internationaler Vorschrift mit konzentrierter Kadmium-Sulfat-Lösung und Ueberschuss von Kristallen.

E. M. K. bei 10° C. 1.01865 intern. Volt
„ 20° C. 1.01835 „ „
„ 30° C. 1.01785 „ „

Somit beträgt der Durchschnittswert des Temperatur-Koefficienten – 0.00004 per 1° C.

Obige Werte sind bezogen auf den für das Intern. Weston Normal Element angenommenen Durchschnittswert von 1.0183 Volt bei 20° C.

Um die Konstanz des Elementes zu sichern, sollte dasselbe vor längerer Einwirkung von Temperaturen unter 4° und über 40° C. bewahrt werden.

Berlin, den 16. Mai 1913

Weston Instrument Company G. m. b. H.

Für Normal-Elemente, welche mit erbrochenen Siegeln an uns zurückkommen, übernehmen wir keinerlei Verbindlichkeiten.

W. I. Co.

Fig. 49.

to forskellige Temperaturer samt den deraf beregnede Temperaturkoefficient, ved hvilken Modstandens Værdi for en hvilken som helst Temperatur indenfor visse Grænser kan findes.

I Fig. 49 er gengivet et Prøvekort udstedt af Weston Instrument Company for Normalelement Nr. 5327, fremstillet af Firmaet selv. Temperaturafhængigheden er her angivet ved en Tabel og ved den gennemsnitlige Temperaturkoefficient. Det samme Element blev indsendt til den tyske Statsprøveanstalt (P. T. R.), der i sit Certifikat ligeledes angiver den elektromotoriske Kraft ved 20° til 1,01835. Til Beregning af Normalens Værdi ved forskellige Temperaturer anføres i Certifikatet følgende Interpolationsformel:

$$E_t = E_{20} - 0{,}0000406\,(t-20) - 0{,}00000095\,(t-20)^2 + 0{,}00000001\,(t-20)^3 \text{ Volt},$$

en Formel, der kan benyttes for alle normale Westonelementer af den her betragtede internationale Type ved Maalinger af den i Justeringen anvendte Tolerans ($^1/_2$—1 paa 10000).

Naar Temperaturen er at betragte som en væsentlig Egenskab ved Normalen, er det, fordi man er udsat for væsentlige Variationer eller Ændringer i den. Den vigtigste Kilde til saadanne Ændringer er her som ved Maaleobjektet Milieuets Temperaturvariationer, og, som det ses, er de Forholdsregler, som Variationerne kræver, ganske de samme ved de to Elementer af Systemet, nemlig Maaling eller Afpasning af Elementets Temperatur.

Anvendelse af særligt (temperaturuafhængigt) Materiale til Normalens Fremstilling. Man vil imidlertid lægge Mærke til, at Milieuets Temperatursvingninger langt sjældnere gør sig gældende som et væsentligt Forhold ved Normalen end ved Maaleobjektet, og det ligger i den Omstændighed, at man ved Normalens Fremstilling har den Mulighed at kunne vælge et Materiale (eller en Form) med meget ringe Tempera-

turkoefficient, og denne Mulighed har man i flere Tilfælde realiseret til den største Fuldkommenhed. Saaledes ved den elektriske Modstandsnormal. Denne fremstilles nu næsten altid af Legeringen Manganin (84 % Cu, 12 % Mn, 4 % Ni), hvis Temperaturkoefficient for Modstandsevne gerne ligger mellem — 0,01 og + 0,02 ‰. (Kobber 4 ‰). Det er indlysende, at de normale hurtige Temperatursvingninger aldrig kan gøre sig gældende som Kilde til væsentlige Usikkerhedssvingninger i en saadan Normals Værdi. Selv de langsomme Temperaturvariationer vil i Almindelighed være ganske uvæsentlige. Kun ved Maalinger af meget høj Nøjagtighed f. Eks. 1 paa 10000 og derover gør de sig væsentligt gældende og kræver Kontrol med Normalens Temperaturtilstand.

Normalen anbringes da gerne ligesom Maaleobjektet i et Bad, hvis væsentligste Formaal er at sikre en tilstrækkelig nøjagtig Bestemmelse af Temperaturtilstanden, altsaa i Almindelighed ikke det at tilvejebringe en konstantere Temperatur indenfor Normalen. Desuden vil Badet ved Modstandsnormalen hyppigt være et Middel og fortrinsvis et Middel mod en Fejlkilde, som nedenfor skal omtales.

Westonelementet frembyder et andet Eksempel paa en Normal med ringe eller ingen Temperaturafhængighed. Elementet fremstilles i to Udførelser. Ved det ene Element, det internationale Weston Normalelement, indeholdende en mættet Opløsning af Cadmiumsulfat, gør nogen om end kun en meget ringe Temperaturafhængighed sig gældende (0,04 ‰). Den anden Udførelse, Weston Standardelement med umættet Opløsning, er i sin elektromotoriske Kraft næsten fuldkommen uafhængig af Temperaturen, hvad der fremgaar af Tabellen pg. 198.

Paa Længdemaalingsteknikens Omraade har man i Nikkelstaallegeringen Invar med 36 % Nikkel fundet et Materiale, der nogenlunde egner sig for Fremstilling af Længdenormaler, og hvis termiske Udvidelseskoefficient kan bringes ned til $^1/_5$ à $^1/_{10}$ af Staalets. Smeltet Kvarts, der ligeledes er bleven benyttet til Maalestokke (og Penduler), har en endnu mindre Ud-

Temperatur	El. Kr.	Temperatur	El. Kr.
9,57	1,01882	17,66	1,01885
11,47	1,01884	19,71	1,01886
13,30	1,01885	23,46	1,01884
15,87	1,01885	29,95	1,01884

videlseskoefficient. Imidlertid maa det erindres, at Uafhængighed af Temperaturen vel er en i høj Grad ønskelig Egenskab ved en Normal, men at ogsaa andre Egenskaber — som vi straks skal se — maa tilstræbes, ja maaske absolut paakræves. Det kan i saadanne Tilfælde ved Valget af Materialet blive nødvendigt at ofre Temperaturuafhængigheden til Fordel for de antydede mere nødvendige Egenskaber. Hvor Længdenormalens Hovedformaal saaledes er at opbevare Enheden, bliver Uforanderlighed den vigtigste Egenskab, og man vil da foretrække Materialer som Platiniridium, Staal eller Bronce for Invar og Kvarts, fordi disse i Modsætning til de sidste kun udviser meget smaa Længdeændringer i Tidens Løb, Platiniridium maaske overhovedet ingen.

Andre Milieuvariationer som væsentlige Forhold ved Brugen af Normalen. Hefnerlampens Afhængighed af Milieuets Tilstand. Ganske som ved Maaleobjektet kan ogsaa andre svingende Variationer af Milieuets Egenskaber gøre sig gældende som væsentlige Forhold og da navnlig som Kilder til ensidig Afvigelse. Vi kan belyse dette ved den kendte Normal for Fotometrering Hefnerlampen.

I Følge Undersøgelser i Physikalisch-Technische Reichsanstalt afhænger denne Normals Værdi paa følgende Maade af Milieuets Tilstand. Kaldes Indholdet af Vanddamp, maalt i Liter pr. Kubikmeter x, vil Lysstyrken være

$$I = 1{,}049 - 0{,}0055\,x,$$

altsaa 1 ved et Indhold paa 8,8 Liter. Herved forudsættes da, at andre væsentlige Egenskaber har deres Normalværdier.

Af Kulsyreindholdet afhænger Lysstyrken paa en saadan Maade, at

$$\Delta I = -0{,}0072\,\Delta x',$$

d. v. s. en Ændring paa 1 Liter pr. Kubikmeter frembringer en Ændring paa 0,7 %.

En Ændring i Iltindholdet paa 1 Liter pr. Kubikmeter vil give Anledning til 2 % Forandring i Lysstyrke.

Med Lufttrykket ændres Lysstyrken efter Formlen

$$\Delta I = 0{,}00011\,\Delta b,$$

b maalt i mm Kvægsølv.

Med Temperaturen ændres Hefnerlampens Lysstyrke ikke.

Under Hensyntagen til Milieuets normale Tilstand har man herefter opstillet følgende Formel for Hefnerlampens Lysstyrke,

$$I = 1{,}049 - 0{,}0055\,x - 0{,}0072\,(x' - 0{,}75) + 0{,}00011\,(b - 760),$$

d. v. s. Hefnerlampen (fremstillet efter bestemte Forskrifter) har definitionsmæssigt Lysstyrken 1 ved et Fugtighedsindhold paa 8,8 Liter, Kulsyreindhold paa 0,75 Liter og et Tryk paa 760 mm, naar Luften iøvrigt er ren, d. v. s. Iltindholdet ikke abnormt.

Paa Grundlag af de her anførte Data kan de forskellige Milieuvariationers Indflydelse vurderes. Det viser sig, at ingen af de antydede Variationer kan give Anledning til kendelig Usikkerhed under en Enkeltmaaling eller en kortvarig Forsøgsrække. Ved Enkeltmaaling med Hefnerlampen kan naas en Sikkerhed af Størrelsesorden $^1/_2$ — 1 %. Der skal Svingninger i Fugtigheden paa 1 Liter til for at frembringe $^1/_2$ % Svingning i Lysstyrken, og saa store Svingninger forekommer ikke i Løbet af den Tid, en enkelt Iagttagelsesrække normalt tager. Derimod svinger Fugtighedsindholdet i Aarets Løb i Berlin f. Eks. fra 3 til 18 Liter (3 Liter om Vinteren med Østenvind, 18 Liter om Sommeren med Vestenvind). Der maa derfor afgjort en Bestemmelse af Fugtighedsgraden til

for at faa fastslaaet, hvilken Lysstyrke Lampen har ved den Fugtighedsgrad, der netop raader under Maalingen. Hvad Kulsyre- eller Iltindholdet angaar, saa viser Erfaringen, at i et godt ventileret Fotometerrum vil Svingningerne baade indenfor kortere og længere Tidsrum være uvæsentlige, saaledes at en Kontrol af disse Milieuegenskaber bliver unødvendig. Endelig viser Formlen ovenfor, at der skal en Ændring af 40 mm til i Lufttrykket for at frembringe 0,4 % Ændring i Lysstyrke. Normalt vil Lufttrykket derfor ogsaa være en Egenskab, der næppe nok skal holdes Regnskab med.

Indførelse af sekundære væsentlige Egenskaber i Maalingens Teori og i Overslaget over Usikkerheden. En Egenskab ved Maaleobjektet, hvoraf den, vi søger at maale, afhænger, eller en Egenskab ved Normalen, hvoraf dens Hovedegenskab i væsentlig Grad afhænger, kan vi betegne som en sekundær væsentlig Egenskab ved henholdsvis Maaleobjekt og Normal. Temperaturen er da, som vi har set, i mange Tilfælde en sekundær væsentlig Egenskab baade ved Maaleobjekt og Normal. Det er ikke almindeligt at nævne en saadan Egenskab i Maalingens Teori, og heri maa Grunden vistnok søges til, at de Forholdsregler, Egenskaben kræver, saa let glemmes, og at det overses, at den sekundære Egenskabs Iagttagelse principielt i ethvert Fald — ogsaa ofte virkeligt — føjer sit Bidrag til Usikkerheden. Vi vil her vise, hvorledes den sekundære Egenskab kunde tænkes indført i Maalingens Teori og i Overslaget over Usikkerheden.

Lad os antage, at en vis Størrelse R, der afhænger af Temperaturen, ønskes kendt for en vis Temperatur t_o. Dersom Størrelsens Temperaturkoefficient α var given, kunde det i og for sig være ligegyldigt, ved hvilken Temperatur Maalingen blev udført. Foretages den ved Temperaturen t, vilde R_{t_0} være bestemt ved

$$R_t = R_{t_0}\ (1 + \alpha\,(t - t_o\,)) = f(o, p, q) \qquad \text{eller}$$

$$R_{t_0} = f\,(o, p, q)\,(1 - \alpha\,(t - t_o\,))$$

hvor o, p, q er Bestemmelsens øvrige Iagttagelser.

En Fejl Δt i Bestemmelsen af Forsøgstemperaturen t ses her let at give Anledning til en relativ Fejl i R_{t_0} paa $\frac{\alpha \Delta t}{1+\alpha(t-t_0)}$, og en Usikkerhed Δt til en Usikkerhed, der ligeledes maales ved $\frac{\alpha \Delta t}{1+\alpha(t-t_0)}$. Kender vi nu ikke α, maa vi tilvejebringe Temperaturtilstanden $t = t_0$, og Udtrykket for R_{t_0} bliver da

$$R_{t_0} = f(o, p, q),$$

hvori Temperaturiagttagelsen ikke længere findes. Derfor giver en Usikkerhed eller en Fejl Δt i Afpasningen af Temperaturen t alligevel stadig Anledning til Usikkerhed eller Fejl, som nu bliver $\alpha \Delta t$, hvad imidlertid ikke fremgaar af den sædvanligt benyttede Teori, derimod altsaa umiddelbart af den fuldstændigere Teori:

$$R_{t_0} = f(o, p, q)\,(1 - \alpha(t - t_0)).$$

Ved Brugen af den sædvanlige Teori er Temperaturen en skjult Iagttagelse i Lighed med Iagttagelsen af Nulpunktet ved et Udslagssystem. (Se pag. 81).

Vi kan herefter, for ogsaa at vise, hvorledes Normalens sekundære væsentlige Egenskaber kan drages ind i Teorien, tænke paa en Lysmaaling, ved hvilken Normallampen skal have en ganske bestemt Driftspænding e_n, og hvor vi ønsker at maale den ubekendte Lampes Lysstyrke ved Spændingen e_x. Vokser de to Lampers Lysstyrke respektive 100 α_n og 100 α_x % pr. Volt omkring de nævnte Driftspændinger, haves, hvis de faktiske Spændinger er e_n' og e_x' — ved Maalingen tilstræbes $e_n' = e_n$ og $e_x' = e_x$ —

$$\frac{I_x(1+\alpha_x(e_x'-e_x))}{I_n(1+\alpha_n(e_n'-e_n))} = \frac{l^2}{(L-l)^2}$$

hvoraf umiddelbart faas, at den samlede Usikkerhed paa Bestemmelsen af Lysstyrkeforholdet $\frac{I_x}{I_n} = f$ bliver

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2L}{L-l} \cdot \left(\frac{\Delta l}{l}\right) + \alpha_n \Delta e_n + \alpha_x \Delta e_x.$$

Første Led kender vi fra et Eksempel i forrige Afsnit. Vi har nu draget Usikkerheden paa Afpasningen af Driftspændingen med ind i Overslaget. Lad $\Delta l = 0{,}3$ cm, $L = 300$ cm, $l = 100$ cm, $\alpha_n = \alpha_x = \frac{5}{100}$, $\Delta e_n = \Delta e_x = \frac{1}{10}$ Volt, da bliver

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_t = 3 \cdot \frac{3}{1000} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{1000} = \text{ca. } 1{,}9\ \%$$

og

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_p = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\Delta f}{f}\right)_t \sim 1{,}1\ \%.$$

Dersom endelig ved en Maaling med Teorien $R = f(o, p, q) \cdot N$ en eller anden af de i Teorien indgaaende Iagttagelser afhang af en Egenskab som f. Eks. Temperaturen, kunde vi i Almindelighed give Udtryk herfor ved at sætte

$$R = f(o\,(1 + \alpha\,(t' - t)), p, q) \cdot N.$$

Maalingen er her tænkt som en sammenlignende Maaling med Normalen N. I Eksemplet ovenfor er l og L principielt afhængige af Temperaturen, men Afhængigheden er ude af Stand til at gøre sig gældende alene af den Grund, at l og $L - l$ ved en Temperaturstigning vil vokse i samme Forhold.

c. Variationer fra Sted til Sted indenfor Normalen. Vi har ovenfor nærmere diskuteret Indflydelsen af Variationer fra Sted til Sted indenfor Maaleobjektet og paapeget Analogien med Variationerne i Tidens Løb. Den samme Analogi gør sig gældende ved Normalen, og de Betragtninger, som vi anlagde overfor Maaleobjektet, kan i alt væsentligt overføres paa denne. Dersom altsaa den Egenskab, Normalen repræsenterer, varierer fra Sted til Sted indenfor Normalen, maa Stedet, der skal benyttes i Almindelighed (se næste Side), være karakteriseret med en Tolerans, der svarer til Toleransen af den Maaling, for hvilken Normalen er bestemt, og Stedet maa derefter opsøges med den samme Nøjagtighed. Den ovenfor omtalte Glødelampe frembyder et anskueligt Eksempel. Ved

Justeringen er den Maaleobjekt, og Retningen, i hvilken Lysstyrken maales, maa karakteriseres ved et Mærke paa Lampesoklen. Ved den senere Brug af Lampen som Normal maa Lampen stilles ind med en vis Omhu efter dette Mærke, saaledes at det indtager samme Stilling til Fotometret som ved Justeringen. Kun hvis Lysstyrkens Variation omkring Lampen var undersøgt og karakteriseret ved en Kurve, Tabel eller Formel, kunde en Afpasning af en bestemt Stilling undgaas, men til Gengæld vilde der da kræves en Iagttagelse af den vilkaarlige Stilling af Lampen, der benyttedes ved Maalingen. Som det ses, er Forholdsreglerne mod Lysstyrkens Variationer med Retningen i et og alt analoge med Forholdsreglerne mod Modstandsnormalens Variationer i Tidens Løb som Følge af Milieuets Temperaturvariationer. Fødes Lampen fra en Spændingskilde, der af en eller anden Grund varierer, har vi at gøre med en Normal, i hvis Værdi der baade optræder Variationer i Tid og Sted, og disse Variationer kræver da altsaa ganske analoge Forholdsregler.

Ligesom det i visse Tilfælde er Gennemsnitsværdien for en Egenskab ved Maaleobjektet, vi gør til Genstand for Maaling, vil man i andre Tilfælde arbejde med Gennemsnitsværdien af en uregelmæssig Normal. Hver sammenlignende Maaling maa da med visse Undtagelser komme til at bestaa af en Række Gentagelser, ved hvilke efterhaanden forskellige »Punkter« fordelt jævnt over Normalen benyttes. Dersom Glødelampens Gennemsnitslysstyrke i vandret Retning var bestemt ved en Justering, vilde saaledes den samme Gennemsnitslysstyrke senere kunne benyttes til Sammenligning med Anvendelse af en Række Gentagelser fordelt paa væsentlig samme Maade som Gentagelserne ved Justeringen. En Glødelampe bruges vistnok sjældent eller aldrig som her antydet; men Tanken har man alligevel paa en Maade reäliseret — nemlig i Lysmaaling med en roterende Lampe som Normal. Her virker Normalen som en stillestaaende Glødelampe af en Lysstyrke lig den faktiske Lampes Gennemsnitslysstyrke.

Vi kan paa dette Sted passende antyde en særlig Slags

Gennemsnitsnormaler, nemlig dem, der bestaar af en Samling Enkeltnormaler, og hvis karakteriserende Værdi er Gennemsnitsværdien for denne Samling. Saadanne Gennemsnitsnormaler er kommen til at spille en ikke ubetydelig Rolle i de store Statslaboratorier som Middel til Opbevaring af Enheden og forøvrigt ogsaa til Reproduktion af denne ved Justering af andre Normaler. Baade det engelske og det amerikanske Statslaboratorium benytter saaledes en Samling Glødelamper som Normal ved Fremstilling af nye Lampenormaler, og Samlingens Gennemsnitsværdi betragtes faktisk som Repræsentant for Laboratoriernes Lysenhed.

d. Væsentlige sekundære Egenskaber ved Fremstilling af en Normal efter givne Specifikationer. Et af Midlerne, hvorved Maaletekniken sikrer sig Anvendelsen af fælles Enhed, er det at give Anvisninger, hvorefter Brugeren selv kan fremstille en Normal. Ved at fremstille Kogsaltopløsninger af forskellige Koncentrationer kan man saaledes skaffe sig en Række Normaler for Vægtfylde, idet det en Gang for alle er undersøgt, hvorledes Vægtfylden afhænger af Koncentrationen. Paa tilsvarende Maade kan man til Prøve af Hygrometre danne sig en Række Normaler bestaaende af Svovlsyreopløsninger, over hvilke der i et begrænset Rum (ved en bestemt Temperatur) vil komme en bestemt Fugtighedsgrad o. s. v. Ved den Undersøgelse, der maa udføres som Grundlag for Anvisningen paa Fremstillingen, og ved Reproduktionen efter denne Anvisning er Koncentrationen nu frem for alt en væsentlig Egenskab ligesom Driftspændingen ved en Glødelampenormal. Ved Undersøgelsen maa Koncentrationen karakteriseres med en Tolerans svarende til den, Normalen er bestemt for. Ved Reproduktionen maa Koncentrationen afpasses med en Tolerans svarende til den, der er Brug for. For at man skal kunne angive denne Tolerans, maa Afhængigheden mellem den Egenskab, Normalen repræsenterer, og Koncentrationen være kendt — ganske svarende til, at man ved Vurderingen af, hvor nøjagtigt Temperaturen ved Mod-

standsnormalen skal reproduceres, maa kende Temperaturkoefficienten.

Det Princip, de her antydede Normaler repræsenterer, er ogsaa blevet anvendt paa mere sammensatte Systemer. Som Eksempler paa saadanne kan den internationale Kvægsølvnormal, det internationale Westonelement og Sølvvoltametersystemet tjene. Disse tre Systemer er udtænkt som Midler til over alt at sikre fælles elektriske Enheder. De er valgte saa simple som muligt. Ikke desto mindre er paa Grund af den ringe Tolerans, for hvilke de er bestemt, talrige Forhold og Egenskaber af væsentlig Betydning ved deres Fremstilling; disse Egenskaber har man altsaa maatte karakterisere eller give Specifikationer for. For adskilliges Vedkommende og da især de væsentligste er Karakteriseringen selvfølgelig en Talkarakterisering, hvis nødvendige Tolerans er let at vurdere. Det gælder saaledes f. Eks. Længden ved en bestemt Temperatur og Vægtmængden af Kvægsølv ved Kvægsølvnormalen. Det gælder Koncentrationen af Sølvnitratopløsningen ved Sølvvoltametret m. m. Karakteriseringen af andre ogsaa væsentlige Forhold maa derimod ske eller sker i ethvert Fald naturligst ved Ord — saaledes Specifikationen af Glassorten for Røret ved Kvægsølvnormalen — eller den kan ske ved en Tegning — Formen for Sølvvoltameter og Westonelement o. s. v.

e. **Nødvendige Processer som Kilde til Fejl. — Specifikationer for Normalens Brug.** Ganske som ved Maaleobjektet rummer i mange Tilfælde nødvendige Processer eller mer eller mindre uundgaaelige Operationer ved Brugen af Normalen en Kilde til Fejl. Vi kan her nøjes med til Eksempel at antyde, at Maalestrømmen ved Wheatstones Bro naturligvis ligesaavel opvarmer Normalen som Maaleobjektet. Som oftest vil dog den resulterende Ændring i Normalens Værdi blive relativt mindre end ved Maaleobjektet, fordi Normalen næsten altid vil være fremstillet af et Materiale med ringe Temperaturkoefficient nemlig Manganin. Iøvrigt kan det her som ved Maaleobjektet være overordentlig vanskeligt

at vurdere Fejlkildens Indflydelse. I Almindelighed maa den undersøges ved særlige Forsøg i hvert enkelt Tilfælde.

Iøvrigt skal der her peges paa, at den samme Afhængighed af Forhistorie og Maaden, hvorpaa Systemet behandles under Maalingen, som vi har givet et udførligt Eksempel paa ved Omtalen af Maaleobjektet, i visse Tilfælde ogsaa gør sig gældende ved Normalen. Der maa da ganske som ved Maaleobjektet gives Specifikationer for en Forbehandling af Normalen og for Maaden, hvorpaa denne er at benytte. Vi maa her indskrænke os til at antyde et kendt Eksempel fra den elektriske Maaleteknik nemlig Glimmerkondensatoren (Papirkondensatoren) med dens Restladningsfænomener og dielektriske Hysteresis. Betingelserne for Anvendelsen af Glimmerkondensatoren som entydig Normal er særlig gjort til Genstand for Undersøgelse i den amerikanske Statsprøveanstalt, hvor ogsaa de ovenfor refererede Undersøgelser over Jærnets Forhold under den magnetiske Prøve er udført.

f. Ændringer med Tiden. Endnu en almindelig Kilde til Fejl træffer vi hos Normalen nemlig den, der ligger i, at denne som snart sagt ethvert Legeme eller ethvert System ændres med Tiden. Ændringen kan hidrøre fra ydre mekanisk eller kemisk Paavirkning. I saadan Paavirkning maa Aarsagen f. Eks. søges til Forandring i Tidens Løb af et Vægtlods Masse. Meget ofte vil det dog være Forandringer i den indre Bygning af det Materiale, hvoraf Normalen er fremstillet, der ændrer dens Værdi. Herpaa kan der anføres flere Eksempler. Maalestokke af Legeringer, der indeholder Zink, er saaledes praktisk set ubrugelige for Præcisionsmaaling netop paa Grund af molekulære Ændringer i Maalestokkens Indre. Legeringen Invar, der udmærker sig ved saa ringe Temperaturkoefficient, udviser som allerede antydet ikke helt smaa Længdeændringer, der, som det synes, kun delvis kan fjærnes ved en særlig Behandling — »kunstig Ælding« — efter Fremstillingen. En Modstand fremstillet af Manganin vilde efter Viklingen gennem et længere Tidsrum ændre sin Værdi meget betydeligt, om den

ikke underkastedes en kunstig Ælding bestaaende i Opvarmning til 140° i ca. 10 Timer. Ved denne Behandlingsmaade forandres dens Værdi flere Procent, men dens molekylære Bygning vil herefter i det væsentlige være bragt i Ligevægt, saa Modstanden ikke længere ændres i ethvert Fald kun med et relativt meget ringe Beløb. Opvarmning er, som det synes, det almindelige Middel til at fremskynde Indtrædelsen af stationære Forhold i et Materiales Indre. Det er saaledes ogsaa det Middel, man har forsøgt overfor Invar, uden at det der helt er lykkedes at fjærne Længdeændringerne i Tidens Løb.

Uforanderlighed er, som det vil indses, et ganske relativt Begreb. En Normal er uforanderlig overfor en Maaling af en vis Tolerans, men den er det ikke overfor en anden. Imidlertid er der i saa godt som alle Tilfælde Mulighed for væsentlig Forandring om ikke anden saa den, der kan hidføres ved mer eller mindre tilfældig Overlast. Alene for at sikre mod en saadan, der kunde være undgaaet Opmærksomheden, vil en Kontrol fra Tid til anden af Normalen ofte være nødvendig og sjældent kunne betegnes som en overflødig Foranstaltning.

Vi har her tænkt paa de Ændringer, der finder Sted gennem relativt lange Tidsrum efter Fremstillingen. Ved Siden af dem optræder undertiden mere forbigaaende Ændringer, der da afspejler mere forbigaaende Paavirkning af Materialet. Invar har i Baand eller Traadform fundet ikke ringe Anvendelse i Landmaalingstekniken. Alene den Omstændighed, at Baandet eller Traaden vikles op paa en Spole, ændrer den indre Struktur og derved Længden kendeligt. For at fremskynde en Tilbagevenden til den (relativt) endelige Længde slaar man her det udrettede Baand mod et fast Underlag. De mekaniske Rystelser skal da være tilstrækkelige til at fjærne de forbigaaende molekulære Ændringer.

B. Skalaen og dens Fejl. Skalaens Anvendelser og dens forskellige Former. Forbilledet for Skalaen i dens forskellige Former er den almindelige delte Længdemaalestok.

Denne kan betragtes som en variabel Længdenormal i Modsætning til den enkle Længdenormal, Kaliberbolten f. Eks. I Lighed med den almindelige Maalestok har man uddannet mange andre variable Normaler — (variabel Selvinduktionsnormal, variabel Kondensator). I alle disse Normaler er Skalaen et Element. Den er det tillige i Maaleteknikens talrige Udslagssystemer eller Viserinstrumenter, der i Almindelighed ogsaa kan opfattes som variable Normaler. Endelig udgør Skalaen næsten altid et Element ogsaa af Maaleteknikens Nulsystemer — selv dem, hvis kendte Sammenligningsforhold ikke er variabelt (se nedenfor) — idet disse ved Interpolationen benyttes som Udslagssystemer. Som Skala paa et saadant System kan en vilkaarlig ligedelt Maalestok benyttes, da Interpolationen er en relativ Maaling, ved hvilken Skalaens Enhed er ganske ligegyldig. Ogsaa den variable Normal eller et Viserinstrument kan forsynes med en vilkaarlig ligedelt Skala. Aflæsningen paa denne maa da imidlertid omsættes til den Værdi, Aflæsningen repræsenterer, ved en Kurve, en Tabel eller en Formel. Meget hyppigt vil man dog søge at undgaa dette Omsætningsarbejde ved at forsyne Systemet med en direkte visende Skala. I visse Tilfælde kan denne gøres ligedelt, ofte maa den dog nødvendigvis blive uligedelt.

Skalaen afsættes vel hyppigst paa en plan Flade langs en ret Linie, retlinet Skala, eller langs en Del af en Cirkel, cirkulær Skala. Undertiden benyttes dog en retlinet Skala bøjet i Form af en Cylinder*). En særlig Skala af overordentlig Betydning er den helt lukkede cirkulære eller cylindriske Skala for Maaling af Vinkler — Vinkelskalaen.

Efter denne Oversigt betragter vi de for Skalaen karakteristiske Fejlarter.

---

*) I et specielt Tilfælde (Spektroskopet) har man afsat Skalaen langs en Skruelinie paa en Cylinders Overflade. Skalaen maaler Drejningen af en Skrue, naturligvis med samme Stighøjde som Skalaen selv.

Enhedsfejl, Delefejl og Nulpunktsfejl. Den almindelige Maalestok kan som anført betragtes som en variabel Normal, men den kan, om man vil, ogsaa betragtes som en enkelt Normal — repræsenteret ved Maalestokkens hele Længde — i Forbindelse med et Redskab — Delingen — for Sammenligning af den ubekendte Længde med Normalen.

Ser vi saaledes paa Sagen bliver det klart, at Skalaen kan have den samme Fejl som den enkle Normal, vi ovenfor betragtede, altsaa Enhedsfejl. Dersom Skalaens hele Længde skulde betyde A_n Enheder af den Art, Normalen repræsenterer, og den faktisk er A_v, vil $A_n - A_v$ være det, Skalaen viser for meget, naar der aflæses A_n, d. v. s. Fejlen paa A_n. $A_v - A_n$ vil blive Korrektionen paa A_n, idet vi faar den rigtige Betydning af A_n ved at addere $A_v - A_n$ til A_n. En vilkaarlig Aflæsning a paa Skalaen, faar en Korrektion lig $\frac{a}{A_n}$ af Korrektionen paa A_n, altsaa

$$\frac{a}{A_n} \cdot (A_v - A_n) = a \frac{A_v - A_n}{A_n}$$

For Enhedsfejlen rettes der altsaa, ved at forøge enhver Aflæsning i Forholdet

$$\frac{A_v - A_n}{A_n} \quad \text{eller med} \quad \frac{A_v - A_n}{A_n} \cdot 100\ \%.$$

Enhedsfejlen eller Enhedskorrektionen findes i Overensstemmelse med det her anførte i Almindelighed ved Udmaaling af Værdien svarende til den hele Skala. Benyttes Skalaen kun relativt altsaa saaledes, at Resultatet bestemmes ved Forholdet mellem »Udslag« paa Skalaen — Eks. Interpolation — bliver Skalaens Enhed ligegyldig, og der bliver da naturligvis ikke Tale om nogen Enhedsfejl eller Korrektion for denne.

Enhedsfejlen kan være af blivende eller forbigaaende Karakter, ganske som ved den simple Normal. Vi skal nedenfor belyse Oprindelsen til Enhedsfejlen i et Udslagssystem, Westoninstrumentet, af udbredt Anvendelse.

Vi betragter herefter Skalaens Deling. Ogsaa denne kan have Fejl — Delefejl — der da i Almindelighed vil hidrøre fra Fremstillingen. Fejlen vil som oftest variere fra Punkt til Punkt. Den defineres paa følgende Maade.

n-Stregen paa Skalaen skulde, naar Skalaen ialt har N Inddelinger, og dette Antal betyder A, svare til $\frac{n}{N} A$. Svarer n-Stregen faktisk til $\frac{n + \delta n}{N} A$, er δn den til Delefejlen paa n-Stregen hørende Korrektion, som altsaa skal adderes til Aflæsningen for at fjerne Fejlen. (Herved forudsættes det dog, at Skalaen eller vel snarere Systemet ikke er behæftet med den tredie af de her betragtede Fejl — Nulpunktsfejl — eller at denne er elimineret). Delefejlen findes i Overensstemmelse med dens her givne Definition ofte — især ved ligedelt Skala — ved Sammenligning af Skalaens Underafdelinger med den hele Længde. (Justering af en Længdemaalestok, Kalibrering af et Thermometerrør, en Maaletraad, Undersøgelse af en Westphals Vægt o. s. v.)

Mens Enhedsfejlen kunde gives ved et enkelt Tal, maa Delefejlen i Følge sin Natur gives ved en Tabel eller Kurve. (Justeringstabel, Justeringskurve). Paa saadanne skal vi nedenfor se Eksempler.

Nulpunktsfejl har Systemet, hvortil Skalaen hører, endelig, dersom Indeks ikke peger paa Nul, naar den Størrelse, Skalaen maaler, er Nul. Ved en almindelig Maalestok kan man naturligvis ikke tale om Nulpunktsfejl. En saadan kan derimod optræde ved Apparater med fastlagt Nulpunkt, som Mikrometerskruen, Skydelæren og de talrige selvindstillende Viserinstrumenter. Nulpunktsfejlen gør sig gældende paa noget forskellig Maade ved Systemer med ligedelt og ved Systemer med uligedelt Skala, saaledes som vi nu skal se.

Dersom vi ikke paa Skydelærens ligedelte Skala aflæser Nul men δ_0, naar Kæberne er ført helt sammen, betyder det øjensynligt, at Skalaen vil give alle Maal δ_0 for store. For Nulpunktsfejlen δ_0 rettes der altsaa ved at addere Korrek-

tionen $\div \delta_0$ (Nulpunktskorrektionen). Paa samme Maade retter man for et Viserinstruments Nulpunktsfejl, naar Skalaen er ligedelt. Er den uligedelt, skal — som ved den ligedelte Skala — den til δ_0 svarende Skalalængde, trækkes fra enhver Aflæsning, men denne Længde betyder nu noget forskelligt paa de forskellige Punkter af Skalaen. Vi kan belyse Korrektionen for Nulpunktsfejlen ved uligedelt Skala ved hosstaaende Fig. 50, der tillige viser, hvorledes man kan konstruere en uligedelt, direkte visende Maalestok. Vi tænker her nærmest paa et elektrisk Blødtjærnsinstrument. Lad dette først være forsynet med en ligedelt Hjælpeskala, og lad os ved et Normalinstrument undersøge Betydningen af denne Skalas Inddelinger i Ampère, hvis der er Tale om en Strømmaaler. Vi kan afbilde Resultatet af Undersøgelsen ved en Kurve, der har Aflæsningen paa den ligedelte Skala til Abscisse, Strømmen til Ordinat. Kurven vil, tænker vi os, faa det i Figuren ved *o p q* givne Udseende. En Skala for direkte Aflæsning af Ampère faas da ved at trække de punkterede Linier parallele med Abscisseaksen gennem Ordinataksens hele — maaske ogsaa $^1/_{10}$ — Ampèrepunkter. I Projektionen paa Abscisseaksen af disse Liniers Skæringspunkter med Kurven haves den direkte visende Skalas Delepunkter. Det ses, at Skalaen med den i Figuren viste Kurve bliver »aaben« paa Midten, men meget »lukket« ved Nul svarende til de virkelige Forhold ved Blødtjærnsinstrumenter. Lad nu Viseren uden Strøm pege paa *o'*. Instrumentet har da en Nulpunktsfejl *oo'*. For samme Strøm vil det give samme

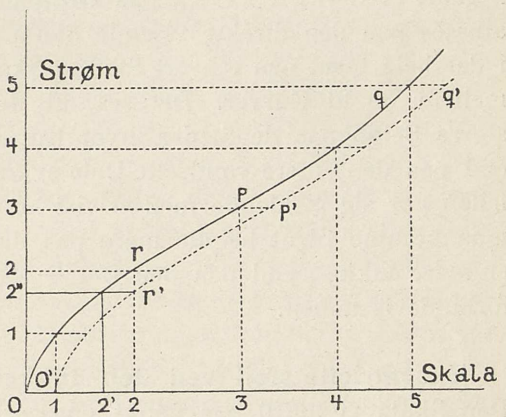

Fig. 50.

Udslag som før blot nu regnet fra o'. I Overensstemmelse hermed faar vi Nulpunktsfejlens Indflydelse paa ethvert Sted af Skalaen ved at parallelforskyde Kurven $o\ p\ q$ i Retning af Abscisseaksen Stykket oo', saa den kommer hen i $o'\ p'\ q'$. Naar Viseren nu staar f. Eks. paa 2 Ampère, haves i Virkeligheden kun den til Punktet r' svarende Strøm. Fejlen, vi begaar, er Stykket $2'' - 2$ paa Ordinataksen, der ogsaa kan aflæses paa den direkte visende Skala som $2' - 2$. Fejlen er i det hele taget paa ethvert Sted af Skalaen Ordinatafstanden mellem de to Kurver. Det ses, at denne Fejl løber op til større Beløb paa de Steder, hvor Kurven gaar stejlt i Vejret, end paa dens mere vandrette Dele svarende til, at Nulpunktsfejlen gør sig gældende med et vist konstant Vinkelbeløb, der maa komme til at betyde mere paa de Steder, hvor Skalaen er mere lukket, end paa den Del — Midten, — hvor den er forholdsvis aaben.

Excentricitetsfejl ved den lukkede cirkulære Skala. Den Skala vi hidtil har tænkt paa, er den aabne retliniede, cirkulære eller cylindriske Skala. Betragter vi nu specielt den lukkede cirkulære eller cylindriske Skala, der benyttes ved Vinkelmaaling eller ved Bestemmelser, der føres tilbage til saadan, indser vi, at der ikke vel kan være Tale om Enhedsfejl paa denne Skala derimod nok om Delefejl og i visse Tilfælde ogsaa om en Nulpunktsfejl.

Benyttes saaledes et Kompas som Magnetometer i en Gauss-Opstilling, vil dette Maaleinstrument have en Nulpunktsfejl, hvis Viseren ikke peger paa Nul, naar ingen Tværkraft paavirker Naalen. For denne Nulpunktsfejl retter man enten paa sædvanlig Maade ved Subtraktion af Fejlen, eller hvor det lader sig gøre, ved at lade den Kraft, man maaler paa, skifte Retning, saa Udslaget gaar til modsat Side. Middeltallet af Udslagene til de to Sider begge regnede fra Skalaens falske Nulpunkt eller blot det halve af Vinkelafstanden mellem de to Yderstillinger vil da være det rigtige Udslag. Denne Iagttagelsesmaade er iøvrigt af almindelig Karakter. Saaledes

gør man sig ved Bestemmelse af Dæmpningsforholdet for et Galvanometer uafhængig af Kendskab til Nulpunktet ved at regne med hele Sving i Stedet for med Udslag fra Nulstillingen.

Til Delefejlen og den eventuelle Nulpunktsfejl kommer nu imidlertid en for den cirkulære Skala karakteristisk Fejl, Excentricitetsfejlen. Den hidrører, som Navnet antyder, fra mangelfuld Centrering af Skalaen i Forhold til den Akse, hvis Drejning skal maales. Excentricitet bevirker i det væsentlige, at Vinkler maales for store paa den ene, for smaa paa den anden Halvdel af Skalaen. Man faar Fejlen elimineret, hvis man forsyner Aksen med to til modsat Side pegende Visere og tager Middeltallet af de Maal for Drejningen, disse to Visere giver. Mikrometerskruer og Sfærometre udstyres, som det vil vides, gerne med en lukket cirkulær eller cylindrisk Maalestok, der dog naturligvis ikke deles i Grader. En Excentricitetsfejl ved en saadan Skrue gør sig periodisk gældende fra Omdrejning til Omdrejning og kan derfor i Almindelighed bestemmes ved Undersøgelse af blot én Omdrejning. Ved en særlig Behandling af Undersøgelsens Resultater kan man herefter let skille Excentricitetsfejlen ud fra de øvrige forekommende Fejl.

Opgaver.

Opg. 1. Den i Eksemplet pag. 146 omtalte Platintraadsmodstand skal anvendes som Normal ved visse Vekselstrømsmaalinger. Den vil dog i Almindelighed i disse Maalinger blive kombineret med en Manganinmodstand, der praktisk set har Temperaturkoefficienten Nul. Hvilken Sikkerhed tillader Modstanden benyttet under lignende Forhold som ved Prøven ovenfor, naar den bruges i Række med en Manganinmodstand paa 100 Ω?

Opg. 2. For en Normal for gensidig Induktion anføres i det af den engelske Statsprøveanstalt (National Physical Laboratory) udstedte Certifikat, at Aflæsningen 1000 ved en Frekvens 100 svarer til 10003,7, ved en Frekvens 1000 til 10016 Micro-

henries. Med hvilken Tolerans skal Frekvensen maales eller afpasses ved Bestemmelser af 0,1 $^0/_{00}$ Nøjagtighed?

Opg. 3. Til Bestemmelse af Elektrolyters Ledningsevne benyttes ofte et Kar forsynet med indslebet Termometer, hvis Beholder befinder sig mellem Elektroderne og fylder en ikke ringe Del af Rummet ud. Hvorledes skulde det undersøges, om Termometrets Orientering i Indslibningen er en væsentlig Egenskab, og hvilke Forholdsregler maatte man tage, dersom den er det?

Opg. 4. Vægtfylden ved 18 ^{0} af Klornatriumopløsninger af Koncentrationerne 10 og 15 $^0/_0$ er henholdsvis 1,0711 og 1,1090. Dersom en Vægtfyldenormal 1,1000 (ved 18 ^{0}) ønskes fremstillet med 0,5 $^0/_{00}$ Tolerans, hvilken Tolerans kan da tillades i Afpasningen af Opløsningens Koncentration?

Opg. 5. Ved Justering af en Glødelampe som Normal er benyttet ren Jævnstrøm maalt, kan vi antage, ved et Westonviserinstrument. Ved Brugen af Normalen afpasses Strømmen til at have den i Justeringscertifikatet angivne Værdi ligeledes ved Hjælp af et Westoninstrument; men Strømmen er nu ikke hel ren Jævnstrøm, idet den er overlejret med svag Vekselstrøm, saaledes at den kan angives ved

$$i = i_1 + i_2 \sin. \omega t.$$

Kan denne sidste Omstændighed faa nogen Indflydelse paa Resultatets Rigtighed?

Opg. 6. Ved Afpasning af Diametren i større Udboringer benyttes stangformede Længdenormaler af Staal. Hvorfor forsynes disse i Almindelighed med et Haandtag af Træ.

Opg. 7. Hvorfor opbevares Normalmagneten ofte i et Jærnhylster, og hvorfor skærmes den saa vidt mulig mod mekaniske Rystelser?

Opg. 8. Af hvad Art er den Fejl, der ved Uret betegnes som dets Stand, af hvad Art den, der betegnes som dets Gang?

KAP. VI.

MAALEAPPARATET.
LÆNGDEMAALINGS- OG VINKELMAALINGSSYSTEMER.

Idet vi nu gaar over til at betragte det egentlige Maaleapparat bygget sammen af de i det Foregaaende omtalte Elementer i Forbindelse med nye, retter vi først vor Opmærksomhed mod den store Gruppe af Maaleredskaber, der kan betegnes som Længdemaalings- og Vinkelmaalingssystemer.

Længdemaalings- og Vinkelmaalingssystemer. Almindelig Karakterisering. Det simpleste Længdemaalingssystem er Længdemaalestokken, det simpleste Vinkelmaalingssystem Vinkelmaalestokken eller Kredsen. Ofte kan disse Systemer ikke direkte bringes til at dække den søgte Længde eller Vinkel. Naar det er Tilfældet, maa der til Maalestokken eller Kredsen knyttes et Kopieringselement. Skydelæren, Kathetometret, Spektrometret, Meridianinstrumentet, Sekstanten o. s. v. er kendte Eksempler paa de primære Systemer, der derved opstaar. Ved Siden heraf benyttes i Maaletekniken talrige Systemer for sammensat Længde- og Vinkelmaaling. Disse Systemer kan baade betragtes som afledede og som primære. Overfor mange af dem bliver den sidste Betragtning afgjort den naturligste, saaledes overfor det System — den optiske Bænk — vi nedenfor vil benytte som Eksempel.

Længdemaalings- og Vinkelmaalingssystemernes Hovedelement er henholdsvis den retliniede Maalestok og Vinkelmaalestokken eller Kredsen. Vi maa altsaa hos Systemerne forudse de Arter af Fejl, der er karakteristiske for disse Elementer. Men hertil kommer nu de Fejl og Fejlkilder, Overføringen af den søgte Længde eller Vinkel paa Skalaen rummer. Det er disse, der her skal belyses ved to typiske Længdemaalingssystemer. Vi vil erfare og kan ogsaa paa Forhaand indse, at Forudsætningerne for den rigtige Overføring er af rent geometrisk Karakter. Derfor antager Diskussionen af

Systemets Fejlkilder ogsaa i Almindelighed en meget simpel Form, og derfor har vi stillet disse Systemer foran i vor Gennemgang af Maaleteknikens primære Maaleredskaber.

a. Kathetometret. Systemets væsentlige Egenskaber og deres eksperimentale Undersøgelse. Kathetometret bestaar, som det vil erindres, af en Maalestok, der kan stilles lodret, og en langs Maalestokken forskydelig, vandret indstillelig Kikkert. Det benyttes til Maaling af Højdeforskelle. Derved stilles Kikkerten f. Eks. først ind paa det øverste af de to Punkter, hvis Højdeforskel ønskes bestemt. Kikkertens Stilling til Maalestokken iagttages, hvorefter man forskyder Kikkerten, til den er stillet ind paa det nederste Punkt. Efter Aflæsning af den nye Stilling haves under visse Forudsætninger Højdeforskellen i Differensen mellem den første og sidste Aflæsning. — Forudsætningerne er, som det vil ses, følgende simple. Naar Indstillingen er naaet, maa Kathetometrets Maalestok være lodret og Kikkertens Sigtelinie, dens optiske Akse, være vandret.

Nu har man, saaledes som Systemet i Almindelighed er bygget, kun Midler til at stille den Akse, om hvilken Støtten kan drejes, lodret. Den Fordring maa altsaa kræves opfyldt af Fabrikatet, at Drejningsaksen med en vis Grad af Nøjagtighed er parallel med Støttens Akse, med hvilken Maalestokken jo paa sin Side utvivlsomt er praktisk set parallel. Dernæst kan vi lægge Mærke til, at Libellen, der er anbragt ovenpaa Kikkertrøret, skal tillade Iagttageren at stille Kikkertens optiske Akse vandret forud for hver Indstilling. Dersom Libellen er i fast Forbindelse med Kikkerten, maa Instrumentet derfor være bygget saaledes, at Kikkertens optiske Akse er vandret, naar Libellen staar paa Nul. Bedst er det imidlertid, naar det direkte kan prøves, om den ogsaa er det. Dersom Libellen er indrettet som en Rytterlibelle, der kan lægges om paa Kikkerten, og dersom den har en Stilleskrue, som muliggør en lille Ændring i Libellerørets Hældning mod dens Underlag, bliver det for det første muligt, hvis det er

nødvendigt, at stille Libellen ind, saa man med Sikkerhed tør slutte, at Kikkertens mekaniske Akse er vandret, naar Libellen staar paa Nul. Det sker paa følgende Maade. Først stilles Libellen paa Nul ved en Drejning paa Kikkertens Hældningsskrue. Derpaa lægges Libellen om. Var den i Orden, skulde den efter Omlægningen atter vise Nul. Gør den det ikke, rettes Afvigelsen halvt ved Drejning paa Kikkertskruen halvt ved Drejning paa Libellens egen Hældningsskrue. Lægges Libellen nu om, vil man maaske finde en lille Afvigelse, der fjærnes paa samme Maade som før. Efter et Par Omlægninger med Indstillinger som de beskrevne vil man da finde, at Libellen viser Nul i begge Stillinger. Kikkertens mekaniske Akse maa da være vandret og vil altid være det, naar Libelleboblen staar paa Nul.

Herefter maa det undersøges, om Kikkertens optiske og mekaniske Akse falder sammen. Det kan ske, dersom man er i Stand til at dreje Kikkerten om den mekaniske Akse. Stilles ind paa et skarpt markeret Punkt, saa det falder i Traadkorspunktet, og drejes Kikkerten i sit Leje, vil Punktet, hvortil der sigtes, gaa ud af Traadkorspunktet, dersom den mekaniske og optiske Akse skærer hinanden. I saa Fald vil det, som det let indses, være muligt at rette Afvigelsen mellem de to Akseretninger, dersom Traadkorset, hvad ofte er Tilfældet, kan forstilles i sit eget Plan. Rettelsen foregaar paa den Maade, at man drejer Kikkerten 180^0. Derved fjærner Punktet, hvortil der sigtes, sig et Stykke fra Traadkorspunktet. Halvdelen af dette Stykke nærmes nu Traadkorset til Punktet. Dersom Stykket netop halveres (og Kikkerten netop er drejet 180^0), vil Afvigelsen være ganske fjærnet. Praktisk set vil den være fjærnet efter et Par Indstillinger og Drejninger.

Talmæssig Vurdering af Fejlkilderne ved Brugen af Kathetometret. Vi har nu set, hvilke Fordringer der maa stilles til Kathetometret og dets Opstilling, og dermed samtidig lært de tilsvarende Kilder til Fejl at kende, som vi er udsat

for ved Brugen. Vi vil nu søge at naa til en talmæssig Vurdering af Fejlkilderne.

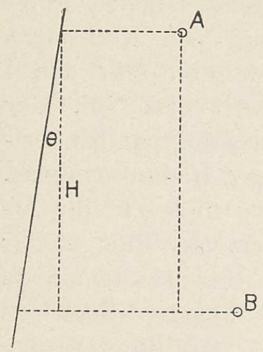

Fig. 51.

Lad Maalestokken afvige fra Lodlinien med en Vinkel Θ, Fig. 51, vil Fejlen paa Maaling af Højdeforskellen mellem to Punkter A og B, hvorledes Punkterne end er beliggende, blive

$$H\left(\frac{1}{\cos\Theta}-1\right)=H\cdot\frac{\Theta^2}{2},\text{ idet }\Theta$$

altid maa være meget lille. Lad os antage, at Støtten er stillet saa skævt op, at en Frembringer foroven afviger 1 cm fra Lodlinien gennem dens nederste Punkt, saa er Θ = ca. $^1/_{100}$, hvis Støtten er ca. 1 m lang, og Fejlen, der begaas bliver $\frac{1}{20000}\cdot H$, altsaa, naar H sættes lig 1000, $^1/_{20}$ mm, en Størrelse der lige netop kan iagttages. En Skævhed, som den her betragtede, i Opstillingen af Støtten vilde let kunne iagttages med blotte Øje. Det indses altsaa, at det ingen Vanskelighed vil kunne volde at faa Støtten stillet op med den fornødne Nøjagtighed, og at Fordringen, der stilles, om Sammenfald mellem Omdrejningsaksen og Støttens Akse ikke kan give Anledning til noget Problem ved Instrumentets Fremstilling.

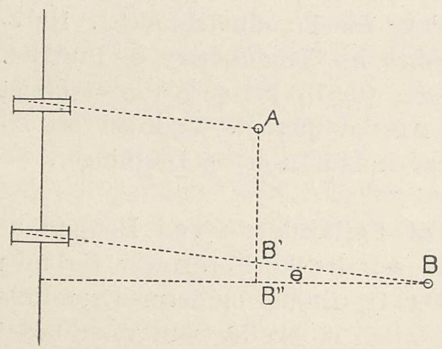

Fig. 52.

Vi betragter dernæst den muligt tilstedeværende Vinkelafvigelse mellem Kikkertens mekaniske og optiske Akse. Lad Vinklens Projektion paa en lodret Plan gennem den mekaniske Akse være Θ. Fig. 52 viser os da, at Afvigelsen ikke giver Anledning til Fejl, hvis vi

maaler Højdeforskellen mellem to Punkter A og B' i samme Afstand fra Kathetometret. Derimod begaas en Fejl

$$B'B'' = B''B \cdot tg\,\Theta = B''B \cdot \Theta$$

dersom vi maaler Højdeforskellen mellem to Punkter A og B i forskellig Afstand. Fejlen kan blive væsentlig. Lad os antage, at Afvigelsen er fremkommet derved, at Traadkorset er anbragt lidt excentrisk i Kikkertens Billedplan f. Eks. $^2/_{10}$ mm for højt. Er nu Afstanden fra Objektiv til Traadkors ca. 200 mm, bliver $\Theta = {}^1/_{1000}$. Lad dernæst $B''B = 500$ mm, bliver

$$B''B' = 500 \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}5 \text{ mm} \quad \text{— d. v. s. } 10\text{—}20$$

Gange større end Aflæsningsusikkerheden ved et almindeligt grovere Kathetometer.

Anm. Helt rigtigt er denne Udledning dog ikke, fordi Vinklen Θ i Virkeligheden ikke er ganske den samme ved Indstilling paa et nærmere og et fjærnere Punkt. Ved et bestemt Kathetometer var Afstanden fra Objektiv til Traadkors henholdsvis 22,5 og 25,5 cm, naar Afstandene fra Objektiv til Objekt var 105 resp. 65 cm. Vi vilde være i Stand til at korrigere for Fejlen som Følge af en lodret Forskydning

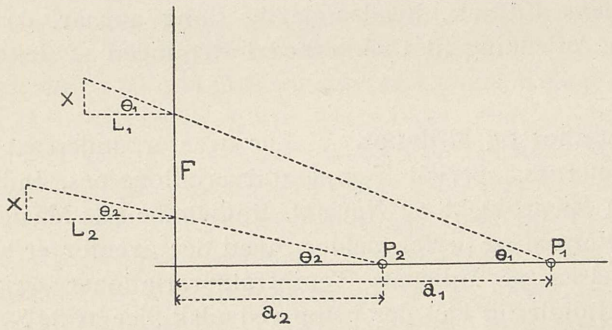

Fig. 53.

af Traadkorset, dersom vi en Gang for alle bestemte denne Forskydning, hvad der kunde ske ved at sigte til to Punkter i samme vandrette Plan, men i forskellig Afstand. Vi vilde

da finde en tilsyneladende Afstand F mellem Punkterne P_1, P_2, Fig. 53, hvor

$$F = a_1 \, tg \, \Theta_1 - a_2 \, tg \, \Theta_2 = \left(\frac{a_1}{L_1} - \frac{a_2}{L_2} \right) . \, x,$$

idet L_1 og L_2 er de to Afstande fra Objektiv til Traadkors, som svarer til de to Indstillinger paa Afstandene a_1 og a_2, og idet x betegner den søgte Forskydning. Naar x var bestemt ved Udmaaling af F, a_1, a_2, L_1, L_2, vilde Udtrykket

$$F = \left(\frac{a_1}{L_1} - \frac{a_2}{L_2} \right) x$$

i Fremtiden kunne tjene til Korrektion for Fejlen.

To Punkter i samme vandrette Plan vilde man kunne skaffe sig ved Hjælp af et Kvægsølvplan, paa hvilket f. Eks. to Sfærometerskruer stilledes ind. Fjærnedes Karret (eller de forbundne Kar) efter Indstillingen, havdes i Skruernes Spidser to Punkter til Brug ved Bestemmelsen af x. Den her beskrevne Maade at fjerne Fejlen F paa forudsætter naturligvis fast monteret Kikkert, saa Metoden beskrevet ovenfor, ikke kan bringes i Anvendelse.

Som det vil ses, maa der stilles betydelige Fordringer til Kikkertens Udtræk, hvad nøjagtig Gang angaar, da »Slør« vil give Anledning til Usikkerhed i Retningen af den optiske Akse.

Systemet og Milieuet. Vi har ovenfor undersøgt Milieuvariationernes, specielt Temperaturvariationernes, Indflydelse gennem Maaleobjekt og Normal. Kathetometrets Maalestok er nu en Normal og derfor gælder, hvad der ovenfor er sagt om Indflydelsen af Milieuets Temperaturvariationer ogsaa paa denne. Imidlertid kan der netop ved adskillige af de Systemer, Kathetometret staar som Repræsentant for, gøre sig særlige Forhold gældende, som vi her noget nærmere vil omtale.

Vi kan tænke paa Kathetometret benyttet til Maaling f. Eks. af Længden af en lodret ophængt Traad. Vokser Milieuets Temperatur, vil baade Kathetometrets Maalestok og Traaden

udvide sig, og dersom Materialet i de to Elementer af Systemet tilfældigvis er det samme, udvider de sig lige meget for samme Temperaturstigning af Elementerne. Systemet har i dette specielle Tilfælde ingen Temperaturafhængighed, til Trods for at maaske baade Maaleobjekt og Normal har det. Maaleredskabet kompenserer, kan man ogsaa sige, Maaleobjektets Ændring ved Opvarmning eller Afkøling. Hvis Materialet ikke er det samme, tør vi ikke vente en fuldstændig Kompensation, men kun en delvis. Systemet har en Temperaturkoefficient lig Differensen mellem Normalens og Maaleobjektets. Saa simpelt stiller Sagen sig altsaa, dersom de to Elementer følges ad i Temperatur. Men — og her er vi ved det Punkt, der særlig skal fremhæves — denne Betingelse tør netop i Almindelighed ikke regnes at være opfyldt i Praksis, og der bliver da ikke andet tilbage end at holde Regnskab med hvert Elements Temperatur for sig. At Maaleobjektet og Normal i Almindelighed ikke vil følges ad, hænger sammen med den Temperaturhysteresis, vi har omtalt ovenfor, pag. 187. Naar de to Elementer ikke har samme Varmekapacitet, eller naar Afkølingsforholdene er væsentligt forskellige, maa den termiske Hysteresis ogsaa blive forskellig. Det vil netop være Tilfældet med Traaden, der udmaales ved Kathetometret. Maaleobjektet vil her meget hurtigt antage en ændret Milieutemperatur, mens Kathetometermaalestokken med dens større Masse bliver relativt langt bag efter. At det iøvrigt i det her betragtede Tilfælde baade vil være meget vanskeligt at bestemme Maalestokkens og Traadens Temperatur, naar der under Maalingen gør sig væsentlige Temperaturvariationer gældende, er indlysende. Ved Præcisionsmaalinger med Kathetometret og mange andre af de her betragtede Redskaber, f. Eks. Komparatoren, maa man derfor ved særlige Foranstaltninger drage Omsorg for konstant Temperatur, og det fuldstændige System maa ofte have henstaaet i denne Temperatur i lang Tid før Maalingens Udførelse.

Anm. Som et Eksempel paa Foranstaltninger i stor Stil med det antydede Formaal, skal her kort beskrives, hvorledes Kompara-

toren for Basisapparater er installeret i det geodætiske Institut i Potsdam. Lokalet befinder sig midt inde i en Bygning, har altsaa ingen Ydervægge. Gulvet bestaar af et dobbelt Gitterværk af Jærn, belagt med tykke Glasplader. Glas er valgt, fordi dette Materiale som bekendt er uigennemtrængeligt for mørke Varmestraaler. Mellemrummet mellem de to Belægninger er 30 cm. Ovenpaa det øverste Glaslag er lagt et tykt Lag Gibs og ovenpaa dette igen Linoleum. Væggene bestaar af 1 m tykke Mure. Disse saavel som Loftet er beklædt med et dobbelt Lag Bølgeblik med et Mellemrum paa $^1/_2$ m. I dette Mellemrum befinder et Gasopvarmningsapparat sig, ved hvilket Lokalets Temperatur i Løbet af 5 Timer kan forhøjes 40°. Lokalet, der indvendig maaler 6,5 × 10 m med en Højde af 5 m, udgør altsaa, som det ses, en Termostat i stor Stil.

Mekaniske Rystelser. Systemets Opstilling. Optiske Rystelser. Under vor Betragtning af Maaleobjektet fik vi Lejlighed til at pege paa Indflydelsen af mekaniske Rystelser. Overfor de Systemer, vi her og i det følgende betragter, gør de mekaniske Rystelser sig ikke sjældent gældende som en væsentlig Kilde til Usikkerhed. Indflydelsen paa Kathetometersystemet bestaar i, at Rystelserne indfører svingende Ændringer i Maaleapparatets Stilling til Maaleobjektet, og denne Stilling forudsættes at være uforandret under Maalingen. Hvor det lader sig gøre, vil man for at modvirke Rystelserne anbringe Maaleredskab og Maaleobjekt paa samme Underlag for at koble de to Elementer i Systemet saa fast til hinanden som muligt. Ofte kan et saadant fælles Underlag dog ikke tilvejebringes, og da maa man stræbe at opstille hvert af de to Elementer saa fast som nødvendigt. Iøvrigt indses det, at Elementerne, selv om de virkelig hviler paa samme Underlag, ikke dermed i alle Tilfælde vil være praktisk set fast koblede til hinanden. Elementernes Elasticitet, om ikke andet, gør dem jo i ethvert Tilfælde til en vis Grad uafhængige af hinanden.

Det faste Underlag kan derfor ogsaa betragtes som et Middel til at isolere Systemet fra Kilden til de mekaniske Rystelser. I Overensstemmelse hermed vil man ofte til Beskyttelse mod Rystelser, der hidrører fra Færdsel eller anden

Virksomhed i selve Laboratoriebygningen, benytte en Pille, som føres op gennem Bygningen fri af Gulvene. Eller man vil som et maaske noget mindre effektivt Middel anvende svære Hylder af Sten eller Beton indsat i Bygningens Hovedmure og saaledes knytte Systemet til Husets store Masse. Hvis Rystelserne imidlertid ikke hidrører fra selve Bygningen, men f. Eks. fra Vognfærdsel udenfor denne, kan de her betragtede Midler naturligvis kun yde en ufuldkommen Beskyttelse, og ofte vil der da ikke være andet at gøre end at fjærne Arbejdsstedet saa langt som muligt fra Kilden til Rystelserne. — Det gælder saaledes Nutidens astronomiske Observatorier, som vel sjældent eller aldrig opføres i Nærheden af Storbyer. Hertil er der imidlertid ogsaa andre Grunde og da ikke mindst den, at der i Atmosfæren over saadanne Byer til Stadighed gør sig optisk Uregelmæssighed og optiske Rystelser gældende hidrørende fra de Strømninger i Lufthavet, der skyldes Storbyens Virksomheder. Denne Uregelmæssighed og Uro bliver ved Brugen af Kikkerten som Sigteinstrument i mange Tilfælde en meget væsentlig Kilde til Forfalskning og Usikkerhed.

Variationer fra Sted til Sted (Uregelmæssighed). Ligesom ved Maaleobjekt og Normal kan Uregelmæssighed ogsaa ved det egentlige Maaleapparat gøre sig gældende som Kilde til Fejl eller Usikkerhed. Vi kan belyse denne Indflydelse ved et System tilhørende den her betragtede Gruppe — nemlig Sfærometret. Ved Brugen af dette Apparat benyttes hyppigt en Glasplade som Underlag for Sfærometrets Trefod. Afviger Glaspladens Overflade nu væsentligt fra den plane Form, bliver Stedet, hvor Sfærometret anbringes, en væsentlig Egenskab ved Systemet. Stedet maa følgelig afmærkes, saaledes at man kan sikre sig, at det ikke er forandret fra Nulpunktsbestemmelsen til Indstillingen paa Maaleobjektet. Afmærkningen eller Karakteriseringen af Stedet kan passende ske ved omkring to af Fødderne at tegne Kredse af saa ringe

Diameter, at man er sikker paa, at Niveauet ikke ændres væsentligt indenfor Omkredsen.

b. Den optiske Bænk. Analyse og Vurdering af dens Fejl. Vi betragter herefter som Eksempel paa et sammensat Længdemaalingssystem den optiske Bænk.

Vi antager at Linsen, hvis Brændvidde p skal bestemmes ved Hjælp af Bænken, er saa tynd, at vi tør regne med den simple Linseformel

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{f}=\frac{1}{p} \text{ eller } \frac{1}{a}+\frac{1}{L-a}=\frac{1}{p}$$

som Teori for vor Maaling.

Til Bestemmelse af Størrelserne a og L tjener Bænkens Maalestok. a og L er henholdsvis Afstanden fra Spalten til Linsens Midtpunkt og fra Spalten til Billedskærmen. En stiltiende Forudsætning for Maalingens Rigtighed er derfor den, at Spaltekanten, Linsens Midtpunkt og Billedskærmens Overflader ligger lodret over Indices paa de Slæder eller Vogne, der bærer de tre Dele.

Der vil nu altid være Mulighed for en Afvigelse fra den rigtige Stilling af de tre Punkter eller Planer. Vi søger at vurdere Indflydelsen af en Sideafvigelse f. Eks. af Linsens Midtpunkt i Forhold til Index. Vi antager, at Linsens Midtpunkt ligger Stykket Δa til Siden for Index, og beregner, hvilken Fejl der herved kommer i vor Maaling af p.

Vi gaar ud fra, at a er maalt Δa for stor (Δa pos.) Vi regner altsaa i vort Udtryk

$$p=a\frac{(L-a)}{L} \text{ med } a+\Delta a \text{ i Stedet for } a.$$

Derved faas en Fejl paa p, Δp, der vil være at beregne paa væsentlig samme Maade som Usikkerheden — altsaa af

$$f=\frac{\Delta p}{p}=\frac{(L-2a)}{L-a}\cdot\frac{\Delta a}{a}$$

Vi undersøger nu, hvorledes Fejlen for en given Linse afhænger af det valgte L. Idet

$$p = \frac{a\,(L-a)}{L} \qquad \text{haves}$$

$$a = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - pL}$$

Dette Udtryk siger, at for en bestemt Linse og et bestemt L vil der, naar $L > 4p$, være to Stillinger af Linsen, som giver et skarpt Billede. Vi eliminerer a af Udtrykket for f og faar

$$f = \frac{\Delta p}{p} = \mp \frac{2\sqrt{\frac{L^2}{4} - pL}}{pL} \cdot \Delta a$$

Det øverste Fortegn svarer til

$$a = \frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4} - pL}$$

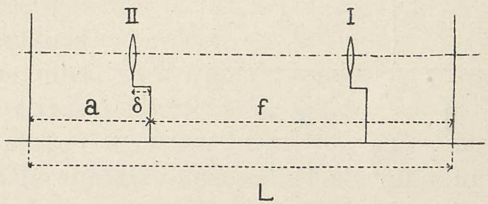

Fig. 54.

eller til Stilling I i Fig. 54 det nederste til Stilling II. Fejlen paa p bliver i begge Tilfælde numerisk den samme. I første Stilling maaler man imidlertid p for lille i sidste for stor. Fejlen

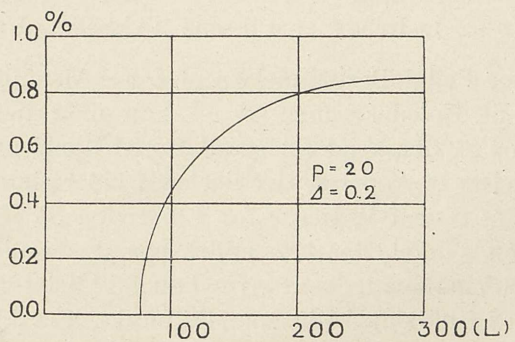

Fig. 55.

kan, som det ses, blive 0, hvis L vælges lig $4p$. Vi kan danne os en Forestilling om, hvorledes den varierer med L, ved at tegne en Kurve, der afbilder p' Afhængighed af L for konstant Δa. Kurven vil have den i Fig. 55 antydede Form, som viser, at Fejlen asymptotisk nærmer sig Værdien $\frac{\Delta a}{p}$. Hvis p er 20 cm og Δa f. Eks. 2 mm, er denne Grænse $^1/_{100} \sim 1\ ^0/_0$ d. v. s. væsentlig i Forhold til den Sikkerhed, Metoden i Almindelighed tillader.

Elimination af Fejlen. Vort Overslag har vist os den her betragtede Fejlkildes eventuelle Indflydelse. Vi kan nu imødegaa Fejlen paa forskellige Maader. Enten kan vi ligefrem udmaale Fejlen og rette Iagttagelserne for den, eller vi kan benytte Metoder, der direkte eliminerer den, — som det ses de almindelige ovenfor paapegede Fremgangsmaader. Vi kan udmaale Fejlen paa følgende Maade. Forskydes Linsen L Fig. 56 hen mod Skærmen med Spalten Sp, til Stangen (Etalonen) E af en given Længde E lige netop kan finde Plads mellem Sp og L, bliver Korrektionen paa a lig $E - (o - o_1)$. Regnes a til Linsens Midtpunkt, bliver Korrektionen $E + \frac{t}{2} - (o - o_1)$, hvis t er Linsens Tykkelse. Frygter man yderligere for Fejl i Bestemmelsen af L — Afstanden mellem Spalten Sp og Billedskærmen Sk — kan man fjerne Linsen og give Sp og Sk den kendte Afstand E ved Hjælp af Etalonen.

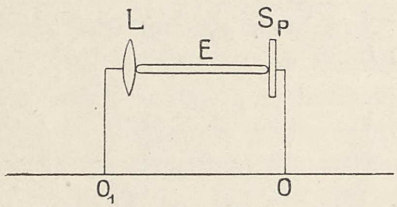

Fig. 56.

Fig. 57 viser et Apparat, der ligeledes lader sig anvende til Udmaaling af Sideafvigelserne for Linsen og Skærmene. Det bestaar af en Vinkel, der kan stilles paa den optiske Bænks Skinne. Paa Vinklens lodrette Arm kan Stykket forstilles, saa det kommer i Højde med Linsens Midtpunkt. Forskydes Apparatet nu, til Spidsen af M netop rører Linseoverfladen, kan

dennes Projektion paa Bænkens Maalestok næsten umiddelbart aflæses. Paa Vinklens Fod er der nemlig afsat et Mærke *I*, hvis Stilling til Maalestokkens Inddelinger aflæses, hvorefter Afstanden fra *m* til *I* trækkes fra. Denne sidste Afstand kan man give en simpel Værdi, f. Eks. 10 cm, idet *M* kan forskydes i den samme Muffe, der tillader Højdeforstillingen af Armen. Muffen har en Udskæring med Indeks, og *M* har nogle faa Delestreger med 1 cm Afstand. Stilles en af disse ind paa Muffens Indeks, er Afstanden $m - I$ lig Stregens paaskrevne Værdi. Ved Apparatet projiceres begge Linsens Overflader ned paa Maalestokken. Finder man derved, at Linsens Midtpunkt ligger over Stedet *o* paa Maalestokken, mens Linseholderens Stilling aflæses som o_1 er Korrektionen paa Aflæsningen $o - o_1$.

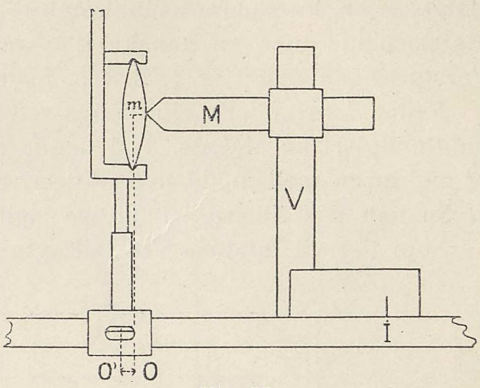

Fig. 57.

Korrektionen kan endelig faas ved at dreje Linseholderens øverste Del med Linsen 180 °. Faas før Drejningen en Indstilling o_1, efter o_2, er $\frac{o_1 + o_2}{2}$ den rigtige Indstilling og

$$\frac{o_1 + o_2}{2} - o_1 = \frac{o_2 - o_1}{2} \text{ Korrektionen paa } o_1.$$

Det forudsættes imidlertid herved, at den Akse, hvorom Linseholderen drejes, ligger i en lodret Plan gennem Slædens Indeks.

Lad os antage, at der praktisk set kun er Mulighed for en Sideafvigelse af Linsens Midtpunkt, saa vil denne Fejlkilde ogsaa kunne elimineres ved Anvendelse af særlig Metoder. Fejlen paa Aflæsningen af Linsens Stilling kommer saaledes

slet ikke ind, naar $L = 4p$. Herpaa har man grundet en Metode, ved hvilken man udmaaler Afstanden mellem Genstand — en transparent Maalestok — og Billedskærm — en Matglasplade med en ganske tilsvarende Maalestok — naar Forstørringen netop er 1, d. v. s. naar $L = 4p$.

Fejlen kan endelig elimineres ved Anvendelse af den saakaldte Besselske Metode. Ved denne iagttages Forskydningen M af Linsen mellem de to Stillinger, der giver skarpe Billeder af Spalten paa Skærmen. Tillige iagttages L.

Som det vil forstaas ved Betragtning af Fig. 58, er Fejlen

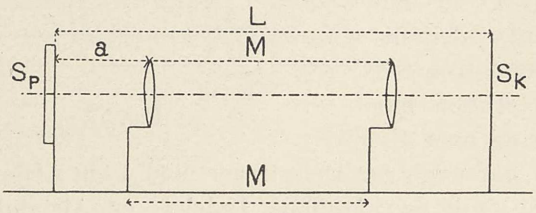

Fig. 58.

i Aflæsningen af Linsens Stilling elimineret i Bestemmelsen af M. Naar L og M er udmaalt, giver Formlen

$$p = \frac{L^2 - M^2}{4L}$$

en Værdi for p, der er befriet for den omtalte Fejl.

Opgaver.

Opg. 1. Ved Undersøgelse af en simpel teknisk Mikrometerskrue fandtes de i Tab. a og b anførte Tal. Tallene i anden Kolonne giver de Aflæsninger, der fandtes ved Indstilling paa Normalmaal af de i første Kolonne anførte Dimensioner.

Forsøg ved en grafisk Analyse at skille de forskellige Arter af Fejl, der gør sig gældende, ud fra hinanden, og gør Dem Oprindelsen til Fejlene klar. Prøv, om den periodisk optrædende Fejl i et polært Koordinatsystem afbildes ved en Cirkel.

Forsøg at udlede Teorien til Bestemmelse af Beliggenheden af det inddelte Hoveds Akse (den cirkulære Skalas Centrum) i Forhold til Skruens Akse.

a				*b*	
Prøve-stykke	Aflæs-ning	Prøve-stykke	Aflæs-ning	Prøve-stykke	Aflæs-ning
0,0	0,002	2,0	2,004	0	0,001
1,0	1,004	2,1	2,104	1	1,005
1,1	1,105	2,2	2,205	2	2,002
1,2	1,208	2,3	2,310	3	3,005
1,3	1,308	2,4	2,415	4	4,007
1,4	1,410	2,5	2,517	5	5,008
1,5	1,510	2,6	2,610	6	6,008
1,6	1,610	2,7	2,710	7	7,010
1,7	1,711	2,8	2,806	8	8,011
1,8	1,805	2,9	2,904	9	9,010
1,9	1,901	3,0	3,005	10	10,010
2,0	2,004				

Ret alle Aflæsninger i Tabellen for en eventuel Nulpunktsfejl, Enhedsfejl og Excentricitetsfejl, og undersøg Restafvigelsens Størrelse. Hvad er Oprindelsen til denne?

Opg. 2. Overvej Temperaturens Indflydelse paa en teknisk Mikrometerskrue (Tykkelsesmaaler) særligt følgende Spørgsmaal. Hvilken Fejl vil en ensidig Opvarmning af Skruens Bøjle — f. Eks. ved at denne holdes i Haanden — give Anledning til? Hvilken Fejl en Opvarmning af hele Maaleapparatet? Lad en Skrue for Maaling af store Dimensioner have en Bøjle paa 20 cm, og lad Udvidelsen af Bøjlens Materiale være 10 μ pr. m pr. Grad. Vil den Omstændighed, at Bøjlen holdes i Haanden, da efter Deres Skøn være betænkelig, naar $^1/_{100}$ mm.' Nøjagtighed tilstræbes.

Opg. 3. Hvorledes skulde det ved Hjælp af en bestemt Diameter i en Cyklekugle prøves, om de to Kontaktflader i en Mikrometerskrue er parallele og plane. Overvej hvilke

Muligheder for Fejl Afvigelser fra Planparallelisme rummer ved Maaling paa forskellige Objekter: Plader, Traad, Kugler.

Opg. 4. Analyser Fejlkilderne ved den almindelige Fotometerbænk med Fotometer og Normallampe. Hvorfor konstrueres Fotometret i Almindelighed saaledes, at det kan »lægges om«?

Opg. 5. Til Maaling med ca. 2 % Nøjagtighed af Stangmagneters Moment efter Gauss' Udslagsmetode kan man benytte en meget simpel Opstilling bestaaende af et Ark Millimeterpapir og et Viserkompas. Millimeterpapirets Hovedretninger orienteres efter Kompasset i magnetisk Nord-Syd resp. Øst-Vest. Det tjener herefter til Orientering af Magneten i første og anden Hovedstilling og samtidigt til Udmaaling af Magnetens Afstand fra Kompasset i disse to Stillinger.

Analyser og vurder Fejlkilderne ved denne Opstilling herunder Kompassets, og angiv Midler for deres Elimination. (Maaleobjektet drages ikke ind under Analysen).

Opg. 6. Analyser og vurder Kilderne til Fejl ved Brugen af Spektrometret til Maaling af et Prismes Brydningsforhold.

Opg. 7. Til teknisk Prøve af Glødelamper benyttes i Almindelighed en Fotometerbænk med direkte Aflæsning. Skalaen er fremstillet svarende til en vis Belysning B af Fotometrets Skærm, og Lysstyrken I_x aflæses paa den direkte visende Skala i Afstanden x cm fra Nulpunktet bestemt ved Ligningen:

$$\frac{I_x}{4\,\pi\,x^2} = B.$$

Bænken bruges paa følgende Maade: en Normallampe I anbringes paa den ubekendte Lampes Plads og Fotometret stilles ind paa det til Normallampens nominelle Lysstyrke svarende Sted paa Skalaen. Derpaa forskydes en Hjælpelampe, anbragt til den anden Side for Fotometret, til dettes to Felter er lige stærkt belyste, hvorefter Hjælpelampen kobles til Fotometret. Erstattes Normallampen nu af den ubekendte Lampe, og forskydes Fotometer-Hjælpelampe, til Lysligevægt er op-

naaet, aflæser man, som det vil forstaas, ud for Fotometret direkte den ubekendte Lampes Lysstyrke.

Undersøg følgende Spørgsmaal:

a. Hvilken Fejl vil en falsk Forestilling om Normallampens Lysstyrke give Anledning til?

b. Hvilken Fejl vil en Afvigelse af Normallampen fra den rigtige Stilling over Fotometerbænkens Nulpunkt indføre?

c. Hvilken Fejl vil en tilsvarende Afvigelse af den ubekendte Lampe medføre?

d. Hvilken Fejl vil en Ændring under Maalingen af Hjælpelampens Lysstyrke medføre?

KAP. VII.

MAALEAPPARATET.
DET SELVINDSTILLENDE UDSLAGSINSTRUMENT*).

Almindelig Karakterisering. Den Egenskab, hvorved man i det selvindstillende Udslagsinstrument maaler den søgte Størrelse, er en Visers Udslag paa en Maalestok. Viseren kan være en materiel Viser eller en Lysstraale (Spejlgalvanometret). Instrumentet stiller sig, som Navnet udsiger, selv ind. I en Række af de mest almindelige Udslagssystemer er Mekanismen herved følgende**). Instrumentet indeholder et

---

*) Karakteriseringen selvindstillende maa føre til den Opfattelse, at ikke alle Udslagsinstrumenter er selvindstillende. Hvis man vil tale om ikke indstillende Udslagsinstrumenter, maa man herved tænke paa Instrumenter som Skydelæren, Mikrometerskruen, Analysatoren ved Polarisationsapparatet o. s. v., der paa en Maade kan siges at maale den søgte Størrelse ved et Udslag, men som før Aflæsningen kræver en Indstilling efter et vist Kriterium. Vi har, som det vil erindres, ovenfor anlagt en noget forskellig Betragtning overfor disse Systemer.

**) Som Forbillede for de her betragtede Systemer kan Fjedervægten eller Brevvægten betragtes. En anden Art selvindstillende Udslagssystemer er af Længdemaalingssystemets Karakter. Som

Motorelement, til hvilket Instrumentets Viser er knyttet. Motorelementet er f. Eks. ved Westoninstrumentet den drejelige Ramme i Forbindelse med Magnetsystemet. Man lader Elementet arbejde imod en Modkraft i Almindelighed Snoningsmomentet i en Fjeder sjældnere mod Tyngdekraften. Den Energi eller det Moment, der hertil er nødvendigt, lader man som oftest Maaleobjektet levere. Motorbevægelsen fortsættes, indtil Modkraften, der vokser med Bevægelsen — Momentet af en Fjeder vokser saaledes proportional med dens Snoning — er bleven lig med det fra Motorelementet hidrørende modsatrettede Moment. Er det nu blot saaledes, at dette sidste afhænger entydigt af den søgte Egenskab ved Maaleobjektet, vil Afhængigheden mellem denne og Motorelementets Bevægelse altsaa Viserens Udslag ogsaa blive entydig, og det sidste kan tjene til Karakterisering og Maaling af Egenskaben. Ved Westonsystemet leverer den søgte Spænding — altsaa Maaleobjektet — den for Motorelementets Drejning nødvendige Energi. Drejningsmomentet bliver paa Grund af det homogene Felt med stor Tilnærmelse proportionalt med Spændingen. Da Fjederkraften er proportional med Rammens resp. Viserens Drejning, bliver Udslaget altsaa ogsaa meget nær proportional med Spændingen. Det betyder, at Systemet kan forsynes med en ligedelt, direkte visende Skala. Ved Blødtjærnsvoltmetret vil Motorelementets Drejningsmoment ikke være proportionalt med Spændingen. Derfor kan en direkte visende Skala her umuligt — i ethvert Fald ved Anvendelse af Fjeder til Levering af Modmomentet eller »Direktionskraften« — blive ligedelt.

Det selvindstillende Udslagsinstrument er til en vis Grad at opfatte som en Normal — eller i ethvert Fald som et Middel til Afpasning af Egenskaber af bestemt Værdi. I et

---

Eksempler paa denne Type kan Libellen, visse Former af Extensometret o. s. v. antydes. En tredie Type »selvindstillende Udslagssystemer« haves endelig i Apparater som Kompasset, Vejrhanen, der stiller sig ind efter den Kraft, hvis Retning de er bestemt til at angive.

Voltmeter, hvor det fulde Udslag betyder 3 Volt, har vi saaledes paa en Maade en 3-Volts Normal. I Virkeligheden repræsenterer Voltmetret en variabel Normal for Omraadet 0—3 Volt. Det selvindstillende Udslagssystems Karakter som Normal afspejler sig stærkt i dets Fejl og Fejlkilder. En Række af disse er, som vi skal se, identiske med dem, vi har lært at kende ved vor Betragtning af Normalen.

Westoninstrumentets Korrektionstabel og Korrektionskurve. Vi vælger til Belysning af det selvindstillende Systems Fejlkilder Jævnstrømsviserinstrumentet eller det saakaldte Westoninstrument. Man prøver et Westoninstrument for dets Visnings Rigtighed og finder den Rettelse, der eventuelt vil være at føje til Aflæsningen, ved at iagttage Udslagene svarende til en Række kendte Strømme eller Spændinger. Paa tilsvarende Maade justeres andre direktevisende Instrumenter. Strømmen eller Spændingen, man bruger ved Justeringen af Westoninstrumentet, maa naturligvis kendes eller maa maales med en Nøjagtighed, der er væsentlig større end den, hvormed Justeringen ønskes udført, altsaa i Almindelighed væsentlig større end Viserinstrumentets Aflæsningsnøjagtighed. Lad nu ved en Prøve en vis Strøm resp. Spænding aflæses ved Udslaget α', medens den skulde aflæses ved Udslaget α, saa betyder α' faktisk α, og til α' — det aflæste — skal altsaa føjes en Korrektion $\alpha - \alpha'$. Naar Korrektionen er funden for en Række Aflæsninger fordelt over Skalaen, kan vi opføre Resultaterne af Justeringen i en Tabel: Instrumentets Korrektionstabel. Afbildes denne grafisk, idet Aflæsningen tages til Abscisse, Korrektionen til Ordinat, faas Instrumentets Korrektionskurve, ved Hjælp af hvilken vi kan rette enhver Aflæsning for dens Fejl. Vi vil noget nærmere betragte denne Kurve. En typisk Form for den er vist i Fig. 59. De mærkede Punkter betegner her Justeringens Iagttagelsessæt. Punkterne er, som det ses, forbundne ved retliniede Stykker. Udjævning er altsaa ikke anvendt. Grunden hertil vil forstaas af det følgende. I Ordinaten af har vi ifølge Kurvens Frem-

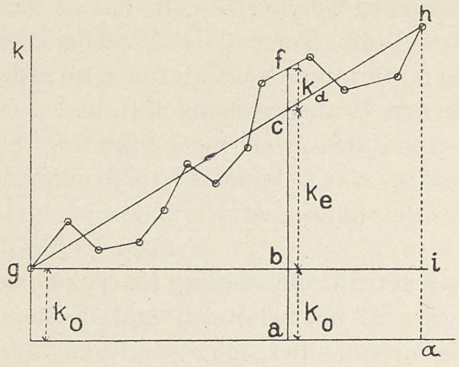

Fig. 59.

stilling Korrektionen paa α. Denne Korrektion deler vi i tre Dele ved de to Linier gh og gi. gh lægges gennem Punkterne, der bestemmer henholdsvis Korrektionen paa Skalaens første og sidste Inddeling. gi trækkes parallel med Abscisseaksen gennem det første af de nævnte Punkter. De to Linier deler af i Stykkerne k_o, k_e og k_d, og i disse Stykker har vi nu Korrektionerne svarende til Skalaens karakteristiske Fejl — Nulpunktsfejlen, Enhedsfejlen og Delefejlen.

Oprindelsen til Westoninstrumentets Skalafejl. Vi betragter nu Oprindelsen til de tre Arter af Fejl.

En Nulpunktsfejl vil i Almindelighed have en forbigaaende Overbelastning til Aarsag. Ved en saadan Overbelastning slaar Instrumentet mer eller mindre voldsomt ud, hvorved Viseren, der gerne er meget let, rammer en Stoppepind for Enden af Skalaen og bøjes. Bøjningen viser sig som en negativ Nulpunktsfejl. Paa de fleste moderne Viserinstrumenter er anbragt en Indretning, hvorved Viseren, naar Nulpunktsfejlen ikke er for stor, kan føres tilbage til Nul, og Fejlen derved mekanisk fjernes, saa at man ikke behøver at rette for den ved Regning. Indretningen bestaar af en Kærvskrue, der drejes fra Instrumentets udvendige Side, og hvis Bevægelse overføres paa Endepunktet af den ene af Instrumentets Fjedre. Ved Drejningen strammes eller slægges Fjedren lidt, hvorved Systemet med Viser bevæger sig tilsvarende. Udelukket er det ikke, at Ændringer i Fjedrene og de Dele, hvortil disse er knyttede, i Tidens Løb kan indføre mindre Nulpunktsfejl,

men i Praksis hidrører Nulpunktsfejlen sikkert hyppigst fra Overlast.

Delefejlen er en praktisk set uforanderlig Størrelse ved et givet Instrument, saalænge dettes System ikke ændres. Men ganske vist skal der kun en yderst ringe Indgriben til for at forandre Karakteren af den brudte Linie i Fig. 59 meget væsentligt. Dette vil man tildels forstaa, naar man gør sig Oprindelsen til Delefejlen klar.

Instrumentets Skala bliver til paa den Maade, at man efterhaanden sender de til hver femte eller hver tiende Inddeling svarende Strømme gennem Systemet og mærker Viserens Stilling af. Efter at de tilsvarende Delestreger er tegnede, deles Mellemrummene i lige store Dele. Paa de empirisk afsatte Inddelinger kan der nu følgelig ikke være større Fejl end Usikkerheden paa Afsætningen; paa de mellemliggende kan der derimod komme større Fejl end de fra Deleusikkerheden hidrørende. Uregelmæssigheder i Magnetfeltet vil bevirke, at Udslaget ikke helt slutter sig til den ligedelte Skala. Afvigelserne, der hidrører fra disse Uregelmæssigheder, er af yderst springende Karakter, saaledes at det egentlig er meget problematisk, om man virkelig kan rette for dem ved en Kurve som den i Fig. 59 viste. Afvigelsen vil dog ogsaa altid i moderne gode Instrumenter være meget lille. Saaledes garanterer Weston Co., at Delefejlen ved deres Laboratorienormaler ligger under 0,1 Inddeling og ved deres praktiske Præcisionsinstrumenter (Model 55) under 0,2 Inddeling, og denne Garanti kan man ogsaa i det væsentlige sætte sin Lid til.

Naar vi herefter undersøger Kilderne til Enhedsfejl hos Westoninstrumentet — vil vi finde, at de i det væsentlige er af samme Art som Kilderne til den tilsvarende Fejl ved en Normal. I denne Lighed gør Viserinstrumentets Egenskab som Normal sig gældende. Men med Hensyn til Fejlens Betydning er der en væsentlig Forskel, der hidrører fra Viserinstrumentets særlige Karakter som en Normal, der kun tillader Maaling eller Afpasning under en vis Tolerans given

ved den Nøjagtighed Skala og Aflæsning tillader. Mens en elektrisk Modstand altsaa en egentlig Normal kan indgaa som Element i Opstillinger for Maaling af højst forskellig Tolerans, er den opnaaelige Nøjagtighed ved Brugen af et Viserinstrument paa Forhaand given. Heraf følger, at en Fejl ved Viserinstrumentet altid er uvæsentlig, naar den blot ligger under den ved Grænsenøjagtigheden bestemte Størrelse, mens man kun kan sige det samme om en Fejl ved en Normal, dersom den er ringe mod Toleransen af den nøjagtigste Maaling, den kan blive brugt til.

I Overensstemmelse med det her anførte kan en Enhedsfejl hos et Westoninstrument hidrøre fra ufuldkommen Afpasning af Systemet for den Enhed, det skal repræsentere. Ved gode Instrumenter vil Afpasningens Nøjagtighed dog sjældent lade noget tilbage at ønske. Der kræves jo heller ikke synderligt af den, f. Eks. kun ca. $^1/_2$ $^0/_{00}$ paa et Viserinstrument med 150 Inddelinger. Det er ligeledes en simpel Sag ved Maaling at bestemme Enheden med den tilstrækkelige Tolerans. Vi kan derfor nøjes med blot at antyde Afpasningen og Justeringen som Kilder til Fejl. Derimod vil vi noget nærmere betragte de øvrige Kilder til Enhedsfejl hos Westoninstrumenter.

Forandring med Tiden i Magnetfelt og Fjedre. Forandringer med Tiden i Fjedre, Magnetsystem eller i Systemet i det hele taget kan give Anledning til en tilsvarende Ændring i Enheden, men det skal straks siges, at Ændringen ved gode Fabrikater nu altid er ringe. Det ligger i at gode Firmaer som oftest raader over særlige Metoder til Fremstilling af Fjedrene og til kunstig Ældning af Instrumenternes Magneter. Moderne Westoninstrumenter kan Aar igennem holde deres Enhed uforandret, hvilket praktisk set betyder, at deres Magneter f. Eks. ikke ændres 1 $^0/_{00}$ i denne Tid. I nogen Grad medvirkende til denne Konstans er dog ogsaa en rigtig Dimensionering af Magnetsystemet. Erfaringen har for denne ført til følgende Regel: Hvis l_m er Magnetens Længde, q_m dens

Tværsnitsareal, l_p det interpolare Luftmellemrum og q_p Tværsnittet af det udnyttede Mellemrum, skal

$$\frac{l_m}{q_m} > \frac{l_p}{q_p} \cdot 100$$

for at opnaa god Konstans. Størrelsen

$$^1/_{100} \cdot \frac{l_m}{q_m} \cdot \frac{q_p}{l_p}$$

kaldes Sikkerhedsfaktoren for Magnetsystemet. For Weston Co.' Instrumenter er den ca. 5, for de fleste andre Fabrikater synes den at ligge omkring 2—3.

Til Trods for kunstig Ældning af Magneten vil et Instruments Følsomhed dog altid vokse noget i Tiden efter Sammenbygningen. Apparatet maa derfor lagres i Uger eller endog i Maaneder før den sidste Afpasning. Efter Reparation kræves ofte en tilsvarende Lagring.

Temperaturindflydelse. Westoninstrumentet er et af de mest sammensatte Viserinstrumenter, og paa alle dets Elementer har Temperaturen utvivlsomt Indflydelse. Ogsaa denne Indflydelse har man imidlertid i moderne Instrumenter forstaaet at gøre praktisk set forsvindende. Den mekaniske og magnetiske Del af Systemet for sig synes i Almindelighed at ændres paa en saadan Maade, at Instruments Følsomhed stiger med voksende Temperatur. Denne Stigning i Følsomhed kompenserer man ved passende Valg af Temperaturkoefficienten for den elektriske Del af Systemet d. v. s. Rammens Vikling og de indbyggede Forlagsmodstande. Rammens Vikling vil enten være af Kobber eller Aluminium, hvis Modstand vil vokse med Temperaturen, saa Instrumentets Spændingsfølsomhed af den Grund vil aftage. Forlagsmodstanden fremstiller man nu helt eller delvis af Manganin eller et andet Materiale med ringe Temperaturkoefficient og opnaar derved, at Instrumentets elektriske Del samlet faar en svag positiv Temperaturkoefficient netop stor nok til at kompensere det øvrige Systems negative. Indbygning af en større Forlagsmodstand

kræves ved Voltmetre for højere Spænding af selve Instrumentets Formaal.

Ved Millivoltmetre var det i lang Tid en vanskelig Sag at undgaa en Temperaturindflydelse, fordi man ikke kunde bygge Systemet strømfølsomt nok til at tillade en tilstrækkelig stor Forlagsmodstand uden altfor stort Tab i Spændingsfølsomhed. I Siemens-Halskes Millivoltmeter med 10 Ohms Modstand er denne Vanskelighed fuldkomment overvunden. Instrumentet har med en 10 Gange saa stor Modstand opnaaet ikke den samme, men en væsentlig forøget Spændingsfølsomhed — sammenlignet med den tidligere 1 Omhs Type — og dertil er Instrumentet som Følge af den store Forlagsmodstand absolut befriet for enhver Afhængighed af Temperaturen.

Magnetisk Paavirkning. De normale Variationer i Milieuets Temperatur giver altsaa lige saa lidt som den Opvarmning, der skyldes selve Maalestrømmen, Anledning til nogen væsentlig Ændring i Apparatets Enhed. En Enhedsfejl kan derimod indføres, naar Instrumentet bruges i et abnormt Magnetfelt, derved, at dette føjer sig til Instrumentets eget Felt og forstærker eller svækker dette. I Virkeligheden er magnetisk Paavirkelighed Westoninstrumentets farligste Fejlkilde, hvad der blandt andet fremgaar af, at de fineste Instrumenter, hvis man fuldtud vil udnytte deres Præcision maa orienteres i Jordfeltet, saaledes at dette bliver parallelt med Magnetsystemets Symmetrilinie. Orienteringen, sker gerne efter en Viser indridset paa Instrumentets Hus. Naturligvis behøver den ikke at foretages med synderlig Omhu, men hvis den helt forsømmes, vil man i Maalingen kunne faa en Fejl paa 0,15 Inddeling, nemlig naar Instrumentet benyttes i en Stilling 90^0 fra den rigtige og med fuldt Udslag. Langt større Fejl vil dog det Spredningsfelt, der omgiver andre tilsvarende Instrumenter kunne give Anledning til, naar man ikke sørger for tilstrækkelig Afstand mellem Apparaterne. To Siemens-Halskes Instrumenter af 1 Ω-Typen vil anbragt umiddelbart op til hinanden kunne ændre hinandens Enhed indtil 1 %.

Fuldstændigt forfalske Maalingen kan endelig de stærke Felter, som optræder i Nærheden af Stærkstrømskabler og elektromagnetiske Maskiner. Undersøgelse af en Række Instrumenter af forskellig Oprindelse viste, at den magnetiske Paavirkning minimalt er ca. $^1/_2$ % pr. Gauss. Nu naar Feltet i elektriske Centraler og lignende Anlæg, altsaa Steder hvor der netop er Brug for Viserinstrumenter, let Værdier paa 10—20 Gauss maaske mere. Hertil vil følgelig svare Fejl paa 5—10 % altsaa Fejl, som selv de groveste Maalinger i Almindelighed ikke kan tolerere.

Det mest radikale Middel mod Fejlkilden er at holde Instrumentet saa vidt fjernet som muligt fra det abnorme Felt, altsaa fra Stærkstrømskabler, elektriske Maskiner, Elektromagneter m. m. Voltmetre kan nu i og for sig ogsaa anbringes i saa stor Afstand fra Spændingskilden, det skal være, forbundne med denne gennem lettere Ledninger, og hvad Strømmaalere angaar, saa lader noget tilsvarende sig gøre derved, at man holder Shunten adskilt fra Instrumentet og bygger den ind i den strømførende Skinne. Man kan da samle alle Instrumenter i et særligt Observations- og Reguleringsrum i passende Afstand fra selve det elektriske Anlæg.

Et andet Middel, man har forsøgt, er nu imidlertid det at omgive Instrumentet med en Jærnkappe for at beskytte det mod det ydere Felt. Derved kan man sætte Paavirkeligheden f. Eks. 5 Gange ned. Imidlertid nærer man nogen Betænkelighed overfor dette Middel, idet Jærnkappen selv kan blive magnetiseret, og saa har man i den en permanent Kilde til Fejl. Mest rationelt, hvor man er nødt til at maale i abnorme Felter, er det utvivlsomt at prøve Enheden paa Arbejdsstedet. Hertil har man indrettet meget simple Apparater efter Kompensatorsystemet — saakaldte tekniske Kompensatorer — og man har yderligere, hvad der kan være meget bekvemt, forsynet Viserinstrumentet med en forstillelig magnetisk Shunt, saaledes at Enheden kan rettes efter Kompensatorens Anvisning. Shunten er blot et Stykke blødt Jærn, der kan forskydes i Forhold til Instrumentets Magnet. Nærmes den til

Polskoene, vil Instrumentfeltet svækkes, fjærnes den, vokser det i Styrke.

Vi har fremstillet det abnorme Felt som en Kilde til Enhedsfejl. I det væsentlige er dette rigtigt. Enheden for-

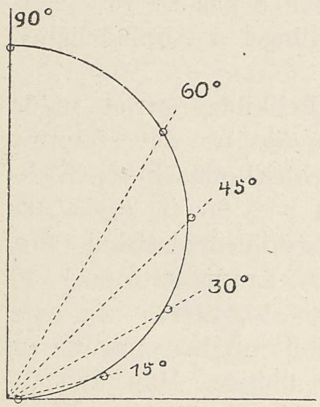

Fig. 60.

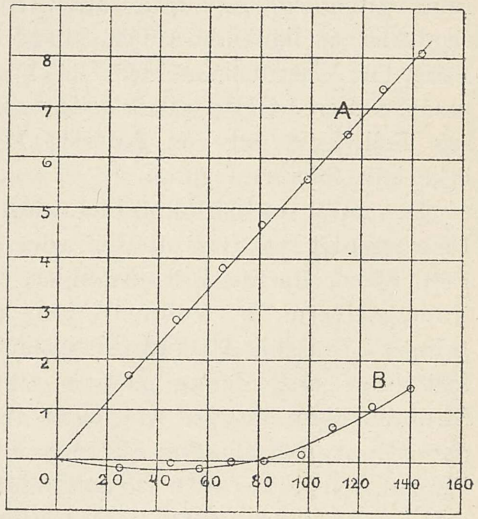

Fig. 61.

andres mest, naar Feltet er rettet vinkelret paa Symmetrilinien for Instrumentets Magnetsystem. Drejes Instrumentet i Forhold til Feltet, forholder Indflydelsen sig meget nær som Sinus til Drejningsvinklen, saaledes som det fremgaar af Fig. 60. Dog bliver Paavirkningen ikke Nul, naar Feltet forløber parallelt med Symmetrilinien, og Virkningen kan ikke længere opfattes som en Forandring af Enheden, hvad Kurven *B* Fig. 61 viser. Denne Kurves Form vil man forstaa, naar man lægger Mærke til, at det fremmede Felts Kraft-

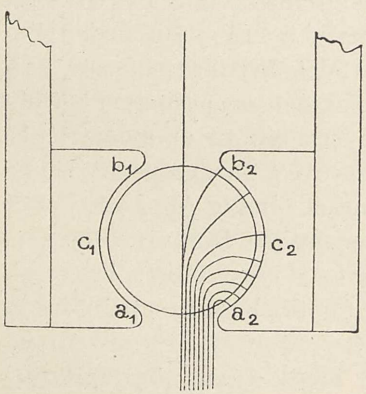

Fig. 62.

linier i den betragtede Stilling ikke fordeler sig jævnt over Systemets Felt, men tættest hen mod Enden af Magneten, altsaa ved *a* i Fig. 62.

Efter nu at have gjort Rede for Kilderne — væsentlige og uvæsentlige — til Fejl i Instrumentets Enhed skal vi pege paa en Række særlige Fejlkilder, der tildels er karakteristiske for det selvindstillende Viserinstrument, og som hidrører fra de for saadanne fælles Elementer. Mens alle de hidtil betragtede Fejlkilder er ganske entydige, er dette ikke Tilfældet med de to første af de Fejl, der nu skal betragtes. Derfor bliver disse, naar de er udpræget til Stede, ogsaa yderst farlige, idet det ofte er praktisk set umuligt at rette for en ikke entydig Fejl.

Elastisk Eftervirkning i Fjedrene. En Ting er de blivende Forandringer, der i Løbet af relativ længere Tid kan finde Sted i Westoninstrumentets Fjedre, en anden de forbigaaende Ændringer, der gaar under Navnet elastisk Eftervirkning, og som vi allerede for Maaleobjektets Vedkommende har antydet ovenfor pg. 187. Gør saadanne Ændringer sig gældende, vil Instrumentets Visning afhænge af dets »Historie« indenfor et vist Tidsrum forud for Maalingen altsaa f. Eks. af, om det har henstaaet ubrugt, eller om det har været benyttet, og da af, hvorledes det har været brugt. Det vil forstaas, at hvis et Viserinstrument udviser væsentlig elastisk Eftervirkning, bliver det værdiløst som Maaleapparat for nøjagtigere Bestemmelser, idet det maa betragtes som praktisk set umuligt at rette for denne Fejl. Fremstillingen af eftervirkningsfri Fjedre betinger derfor det gode Fabrikat, og Fremstillingsmaaden er ofte en væsentlig Fabrikationshemmelighed. En stor Vanskelighed ligger i den Omstændighed, at Staalfjedre ikke tør anvendes. Systemets Fjedre maa være fremstillet af et umagnetisk Materiale og ved Millivoltmetre specielt tillige af et

med ringe Modstandskoefficient. Man prøver et Viserinstruments Fjedre for elastisk Eftervirkning ved i længere Tid f. Eks. 1 Time eller endnu længere at lade Instrumentet henstaa med maximalt Udslag og derpaa iagttage Nulpunktsændringen, som denne Behandling har givet Anledning til. Har Nulpunktet ændret sig kendeligt, kan det være, at Forandringen forholdsvis hurtigt forsvinder, f. Eks. i Løbet af 1 Minut eller saa. Den skyldes da sikkert i Almindelighed Fjedrens Opvarmning. Holder en væsentlig Del af den sig derimod i længere Tid, har man at gøre med egentlig elastisk Eftervirkning. Vi anfører til Eksempel Resultaterne af en Undersøgelse som den antydede. 3 Weston Voltmetre henstod fra Kl. 11,15 Form. til 3,0 Efterm. med fuldt Udslag, derpaa iagttoges Nulpunkterne, der viste sig at være:

	Kl. 3,0,30	Kl. 3,1,30	Kl. 3,14
Weston Laboratorium Normal 736	+ $0{,}2_0$	+ $0{,}1_5$	+ $0{,}1_0$
Weston Model I Nr. 22707.	+ $0{,}2_0$	+ $0{,}1_5$	+ $0{,}0_5$
Weston Model 55 Nr. 1134.	+ $0{,}1_0$	+ $0{,}0_5$	+ $0{,}0_0$

Denne Tabel giver en Forestilling om den Fejl, den elastiske Eftervirkning kan give Anledning til ved et godt System benyttet paa den antydede Maade. Ved kortvarig Indskydelse af Instrumentet vil Fejlen næppe kunne mærkes.

Friktion i Instrumentet. Den mekaniske Sikkerhedsfaktor. Friktionen i Instrumentets Lejer er ved gode Instrumenter saa ringe, at det bevægelige System altid med fuld Paalidelighed stiller sig ind i sin Ligevægtsstilling. Daarlige Fabrikater eller Instrumenter, der har lidt Overlast, udviser derimod ofte en kendelig Friktion, som kan bevirke, at Sy-

stemet indtager en falsk Ligevægtsstilling. Man imødegaar Fejlen ved før Aflæsningen at banke let paa Instrumentet. Som man vil forstaa, er Fejlkilden af højst farlig Art. Glemmer man den Forsigtighedsregel, den kræver anvendt, udsætter man Maalingen for Fejl, der ikke kan drages ind i noget Overslag; den er nemlig ganske »tilfældig« i Størrelse maaske ogsaa i Fortegn. Og den antydede Foranstaltning sikrer endda ikke altid mod Fejlkilden.

Sikkerhed mod Friktionsfejlen er naturligvis i første Linie betinget af en omhyggelig Fremstiling og Samling af Lejer og Pinoldele samt af Valget af Materialet for disse Elementer. Man benytter nu til Dags i Almindelighed Lejer eller Pander af Safir og Pinoler af poleret Staal afdrejet til en temmelig stump Kegle (60^0). Meget væsentligt for Instrumentets Modstandskraft overfor mekanisk Overlast er et rigtigt valgt Forhold mellem Direktionsfjedrenes Stivhed og det bevægelige Systems Vægt. Man regner erfaringsmæssigt, at Fjedrenes Drejningsmoment D udtrykt i gr. cm, naar Udslaget er 90^0, ikke tør tages mindre end $^1/_{20}$ af det bevægelige Systems Vægt q i gr. Forholdet $\frac{D}{q}$ kaldes Systemets mekaniske Sikkerhedsfaktor. For de fleste bedre Fabrikater synes $\frac{D}{q}$ at være ca. 0,3.

Man har forsøgt at sætte Friktionen ned ved at ophænge Rammen paa en Spids, omtrent som Magnetnaalen er ophængt i Kompasset (Pauls Unipivot-System). Understøtningen for Spidsen falder nøjagtigt i den cirkulære Rammes Tyngdepunkt. Den bestaar i en Agatkop anbragt i Centrum af en kugleformet Jærnmasse, der delvis fylder Rummet mellem Feltmagnetens Polsko ud. Strømmen ledes naturligvis paa sædvanlig Maade ind og ud af Rammens Vindinger.

Elektrostatisk Paavirkning. En ejendommelig Fejl, der kan optræde ved Viserinstrumenter af mange forskellige Slags, opstaar paa følgende Maade. Aftørrer man Dækglasset over Instrumentets Skala, bliver dette elektrisk og kan nu drage

Viseren ud af dens Stilling. Man sikre sig mod denne Fejl ved efter Afgnidningen at aande let paa Glasset. En anden Fejl af lignende Oprindelse kan opstaa ved Instrumenter udsat for høj elektrisk Spænding. Er Systemet i saadanne godt isolerede fra Huset, vil Influensvirkningen mellem System og Hus kunne give Anledning til en falsk Ligevægtsstilling — — Særlig kan denne Influensvirkning gøre sig gældende, naar Instrumentet er forsynet med en indstillelig Viser til Markering af et Normaludslag. Tiltrækningen mellem en saadan Pegepind og Systemets Viser kan føre denne sidste flere Inddelinger bort fra den rigtige Stilling.

Tyngdens Indflydelse. Paa mange Laboratorieinstrumenter vil man finde en Paategning om, at Systemet er justeret liggende, (»Liegend geaicht«). Man tilstræber i Almindelighed ved transportable Instrumenter, der baade kan stilles lodret og vandret, ved omhyggelig Afbalancering af det bevægelige System at eliminere Tyngdens Indflydelse. Den ovenfor anførte Paaskrift advarer imidlertid — og det med Rette — mod at stole i for høj Grad paa Afbalanceringen. Hvor stor en Fejl man kan komme til at begaa ved at bruge det liggende justerede Instrument staaende, belyser følgende Eksempel. Weston Voltmeter 1134 Model 55 indstilledes paa 100. Dets Visning var da ikke mere end højest 0,1 Inddeling forskellig fra Visningen paa to andre Westonvoltmetre (et Laboratorie Normalvoltmeter og et Voltmeter Model I), der samtidig var indskudt. Stilledes 1134 nu lodret, viste det 100,5, altsaa 0,5 Inddeling eller $^1/_2$ % falskt. Dertil kom, at mens Instrumentet, naar det laa ned, altid viste samme Udslag, syntes Udslaget i lodret Stilling noget varierende fra Gang til Gang (Friktion). Det paagældende Instrument bør altsaa ubetinget kun benyttes liggende.

Paavisningen af Almindeligheden af de omtalte Fejl og Fejlkilder. Vi retter nu til Slut ved nogle faa Henvisninger Opmærksomheden paa Almindeligheden af de Fejlkilder, vi

har mødt i vort Eksempel. To af disse, Temperaturafhængighed og Ændring med Tiden, lærte vi allerede at kende ved vor Betragtning af Normalen. Karakteristisk for selvindstillende Instrumenter er den ikke entydige Fejlkilde, der ligger i Fjedrenes elastiske Eftervirkning, simpelthen fordi de fleste selvindstillende Instrumenter har et elastisk Element, selv om dette ikke altid er uddannet som en Spiralfjeder. Elastisk Eftervirkning er saaledes den største Kilde til Fejl ved Aneroidbarometre og vel ogsaa nok ved Metalmanometre.

Nær beslægtet med denne Fejlkilde er den termiske Eftervirkning ved Kvægsølvtermometret. Denne Virkning, som man har forstaaet at undertrykke i meget høj Grad ved moderne Glassorter for Termometerfremstilling, giver sig til Kende ved, at Termometrets Nulpunkt efter en Opvarmning ligger lavere end før, svarende til at Termometerbeholderen forbigaaende har beholdt noget af sin Udvidelse. For fuldt at faa Fejlen elimineret benytter man Termometret paa den Maade, at man umiddelbart efter hver Anvendelse bringer Termometret ned i smeltende Is. Falder Termometret derved a Inddelinger, mens det ved først at anbringes i Damp af 100^0 C. og derpaa i smeltende Is falder A Inddelinger, er Temperaturen efter dette Termometer $t = \frac{a}{A} \cdot 100^0$ C. Paa ganske tilsvarende Maade kan man arbejde med et Galvanometer, hvis Ophængningstraad viser elastisk Eftervirkning.

En Fejlkilde, der minder om elastisk eller termisk Eftervirkning er dernæst den magnetiske Hysteresis ved Blødtjærnsinstrumenter, der gør sig gældende, naar disse bruges til Jævnstrømsmaalinger. Den bevirker, at Instrumentets Visning afhænger af Instrumentets Forhistorie, men dog i og for sig ikke — som ved elastisk Eftervirkning — af Tiden, der er hengaaet siden Instrumentets sidste Brug.

En anden Fejlkilde, der ligeledes minder noget om elastisk Eftervirkning, er den, der iagttages i den jævne Vandring af Nulpunktet f. Eks. et Galvanometers. Oprindelsen til denne Bevægelse er sikkert ofte varierende Opvarmning af Galvano-

metret. Den elimineres ved symmetrisk Iagttagelse, et almindeligt Middel mod jævne Forandringer i Maaleapparatets resp. Maaleobjektets Tilstand, der ved Galvanometret bestaar i, at man først iagttager Nulpunktet derpaa Udslag og saa atter Nulpunktet. Man kan da, hvis Tidsintervallerne mellem de paa hinanden følgende Iagttagelser er nogenlunde lige store, regne med, at det til Udslaget svarende Nulpunkt er Gennemsnitsværdien af Iagttagelserne før og efter. Man kan naturligvis ogsaa lægge Iagttagelsen af Nulpunktet midt mellem to Iagttagelser af Udslaget.

At en Fejlkilde som Friktion i Aksellejer o. l. er af meget almindelig Karakter, er indlysende, den gør sig f. Eks. ofte stærkt gældende i den særlige Art Maaleapparater, der gaar under Navn af Tællere — altsaa i Ure, Elektricitetstællere. En Art af disse sidste, Motortællere, forsynes til Modarbejdelse af Gnidningen hyppigt med en Kompensationsvikling, hvis Virkning er afpasset saaledes, at den under visse Forhold netop holder Friktionen i Ligevægt.

Som ved Westoninstrumentet kan Tyngdekraften ogsaa i andre Tilfælde blive en Kilde til Fejl, naar den er i Stand til at virke paa det bevægelige System med et Drejningsmoment, naar Systemet altsaa ikke er fuldstændigt afbalanceret, saa dets Tyngdepunkt falder i Aksen. I Ure med Uro kan Fejlkilden saaledes gøre sig stærkt gældende; tillige er dette Maaleapparat i Almindelighed magnetisk paavirkeligt og bør derfor holdes fjærnt fra alle stærke Magnetfelter.

Mekaniske, termiske og magnetiske Rystelser ved Udslagssystemer. Talrige Udslagssystemer som f. Eks. Spejl-Galvanometret, visse Magnetometre o. s. v., indeholder et ganske let Element, ophængt i et tyndt Baand eller Traad. Det er klart, at saadanne Systemer i Almindelighed maa være i høj Grad følsomme overfor mekaniske Rystelser. Systemet kræver derfor ofte et ret fast Underlag, f. Eks. en Hylde bygget ind i en Grundmur. Dersom selve Bygningens Rystelser er væsentlige, vil man søge at dæmpe dem ved mellem

Hylden og et Brædt, hvorpaa Systemet — f. Eks. et Spejlgalvanometer — staar, at indskyde et Filtlag, eller man vil stille Brædtet paa tre Gummipropper. Man kan endelig ogsaa anbringe Systemet paa en Hylde, hængt op i Spiralfjedre. En saadan rationelt gennemtænkt »rystelsesfri« Ophængning er konstrueret af Julius.

En anden Art mekanisk Paavirkning, de her betragtede og andre lette Systemer maa beskyttes mod, er den, der hidrører fra mekanisk Uro — Luftstrømninger, Træk — i Milieuet. Saadan Uro har ofte sin Oprindelse i Variationer fra Sted til Sted i Milieuets Temperaturtilstand. Man beskytter Systemet imod Paavirkningen ved at bygge det ind i et lukket Hus, (der samtidig vil beskytte mod Støv, Berøring m. m.). Vi vil se lidt nærmere paa Virkningen af dette Beskyttelsesmiddel. Lad en Luftstrøm, medførende Varme, ramme den ene Side af Huset. Denne Side opvarmes da over de andre, og derved vil Betingelserne for, at der inde i Huset kommer en Strømning af Luften i Stand, være skabt. Strømningen fortsætter paa en Maade den ydre Strømning. For at sætte den ned kan man gøre Væggenes Varmekapacitet stor, og, hvad der er meget effektivt, man kan i mange Tilfælde fremstille Væggene af et godt varmeledende Materiale, altsaa af Metal. Den store Kapacitet bevirker en mindre Opvarmning, den store Ledningsevne bevirker, at Opvarmningen bliver mindre ensidig, idet den tilførte Varme hurtigt bredes ud over Husets hele Masse.

Et interessant Eksempel frembyder i denne Forbindelse Termogalvanometret. Dette er et Rammegalvanometer, hvor Rammen med Vikling kun bestaar af en enkelt Vinding af Sølvtraad. Ind i denne er forneden indsat et Termoelement. Under Termoelementets Lodsted er anbragt en saakaldt Varmer, en tynd Traad, gennem hvilken man sender den Strøm, som ønskes maalt. En Del af Strømvarmen overføres da paa Termoelementet og giver Anledning til en Strøm i Rammen. Det siger sig selv, at dette System i allerhøjeste Grad maa være følsomt overfor termisk Uro saavel som overfor de tilsvarende Luftstrømninger. Det kræver derfor ogsaa en over-

ordentlig omhyggelig Beskyttelse. Den hele Ophængning tilligemed Varmeren befinder sig inde i en svær Bronceblok, og udenom denne igen anbringes et svært Panser — Termopanser — af Messing og Bly, 2—3 cm. tykt og af en Vægt paa flere kg.

En Virkning af ganske samme Karakter som den, der udøves af mekaniske og termiske Rystelser, har endelig de magnetiske Forstyrrelser, der skyldes varierende elektriske Strømme, og som i saa høj Grad gør sig gældende i Storbyer med Jævnstrømsdrift af Sporvogne. Disse Milieuforstyrrelser har praktisk set umuliggjort Brugen af tidligere Tiders højt udviklede magnetiske Udslagsinstrumenter og da særlig det højfølsomme Kompasgalvanometer. Man har søgt at beskytte dette sidste Instrument mod de magnetiske Forstyrrelser ved at indbygge det i et Panser eller endog i flere Pansre af blødt Jærn. Teorien for og den praktiske Uddannelse af saadanne magnetiske Pansre skyldes i det væsentlige du Bois. Ved passende Form og Dimensioner kan man ved et enkelt Panser sætte Indflydelsen af Forstyrrelserne 10 Gange ned, ved to Pansre ca. 100 Gange, og ved tre Pansre 1000 Gange ned. Men til Trods herfor kan det dog næppe siges at være lykkedes at beskytte Galvanometret til en saadan Grad, at dets Følsomhed fuldtud kan udnyttes.

Opgaver.

Opg. 1. I hosstaaende Tabel er anført samtidige Aflæsninger af tre Westoninstrumenter. Det førstes Enhedsfejl kunde fjærnes og var fjærnet efter Angivelse af en teknisk Kompensator ved Hjælp af en magnetisk Shunt. Weston Instrument Company paastaar nu, at Delefejlene paa Laboratorienormalen og Model I ikke overskrider 0,1 Inddeling, paa Model 55 ikke 0,2 Inddeling. Bekræfter den i Tabellen gengivne Sammenligning denne Paastand?

Laboratorie-Normal	Model 55	Model I
150,00	150,00	150,20
142,60	142,80	143,00
132,55	132,65	132,80
122,10	122,10	122,40
113,00	113,00	113,25
101,95	102,00	102,25
89,70	89,80	89,95
78,01	78,10	78,15
68,50	68,60	68,65
58,17	58,15	58,35
46,70	46,75	46,75
38,10	38,00	38,10
27,35	27,30	37,35
17,55	17,60	17,60
0,02	0,02	0,05

Opg. 2. Det dynamometriske Udslagssystem for Maaling af Strøm, Spænding og Effekt bestaar, som det vil erindres, i Almindelighed af en fast Spole, inde i hvilken en anden Spole kan dreje sig. Drejningen maaler da Strøm, Spænding eller Effekt. Lad den bevægelige Spole i sin Nulstilling danne Vinklen 45^0 med den faste og lad den ved størst Udslag atter danne en Vinkel paa 45^0 med den faste Spole, men nu til modsat Side. Det skal undersøges, hvorledes et ydre Felt af en bestemt Retning i Forhold til den faste Spole paavirker den bevægelige Spole, naar denne — som den i Almindelighed gør det ved Justering af Systemet — fører Jævnstrøm. Paavirkningens Afhængighed af Systemets Udslag og af det fremmede Felts Retning diskuteres. Paa hvilke Maader kunde man tænke sig at eliminere den fra Paavirkninger hidrørende Fejl?

Opg. 3. Vil et Jævnfelt være en Fejlkilde ved Brugen af det dynamometriske System til Vekselstrømsmaaling? Hvilken

Paavirkning vil et Vekselfelt af samme Periodetal, men ikke af samme Fase som Vekselstrømmen give?

Opg. 4. Et statisk »Voltmeter« (Kvadrantelektrometer) med Spejlaflæsning skal tjene til Justering af Vekselstrømsvoltmetret. Princippet for dets Brug er følgende. Det statiske Voltmeters Udslag iagttages først for to kendte Jævnspændinger hver paa sin Side den Vekselspænding, for hvilken Voltmetret under Prøven skal udsættes. Derpaa iagttages Udslaget paa det statiske Voltmeter for Vekselspændingen, og der regnes nu med, at dennes Effektivværdi er lig den til dette Udslag svarende Jævnspænding, beregnet af den foregaaende Justerings Resultater. En Vanskelighed ved Brugen af det statiske Voltmeter paa den her antydede Maade er nu imidlertid den overordentlige Langsomhed, hvormed det indtager sin Nulstilling og Udslagsstilling. I Ro kommer det først efter mindst 5 Min. Hvorledes lader det sig i Tilfælde som det her antydede gøre ved særlige Specificationer for Justeringens Udførelse at sætte Arbejdstiden ned, uden at Bestemmelsen derved mister sin Entydighed eller lider Tab i Sikkerhed?

KAP. VIII.

MAALEAPPARATET. – NULSYSTEMET. FUNDAMENTALE MAALEMETODER SOM MIDDEL TIL ELIMINATION AF SYSTEMETS FEJL.

Almindelig Karakterisering af Nulsystemet. Naar det selvindstillende Udslagssystem i Almindelighed kan tænkes afledet af Fjedervægten, kan Nulsystemet i Reglen betragtes som en Generalisering af den ligearmede eller uligearmede Stangvægt. Nulsystemet kræver i Almindelighed Indstilling, d. v. s. en Afpasning af Systemet efter et vist Kendetegn, nemlig Ligevægt; heraf Navnet Nulsystem*).

*) Man har fremstillet Nulsystemer med automatisk Indstilling og kan for saa vidt ogsaa tale om selvindstillende Nulsystemer.

Ligheden med de almindelige Vejningssystemer gør sig — tilsyneladende — navnlig stærkt gældende ved de elektriske Brosystemer. Til den lige- eller uligearmede Vægt med konstant Forhold mellem Armene svarer den lige- eller uligearmede Bro med et konstant Modstandsforhold. Til Bismeren med variabelt Forhold mellem Armene svarer Wheatstones Traadbro. I Virkeligheden er denne Analogi dog maaske noget overfladisk. Til en dybere Forstaaelse af det fælles i de mekaniske og elektriske Nulsystemer naar vi ved at se saaledes paa Sagen. Vi har i Vægtstangen og i Galvanometret eller i Almindelighed det elektriske Nulinstrument tilsvarende Redskaber. Det elektriske Nulinstrument er den elektriske Maaletekniks Vægt. Ved den mekaniske Vægtstang konstateres Ligestorhed af Drejningsmomenter, ved Nulinstrumentet, f. Eks. Galvanometret, Ligestorheden af elektriske Spændinger, og ligesom nu en Mængde Maalinger ogsaa elektriske (Strømvægten, Differentialgalvanometret) kan føres tilbage til Afpasning af to lige store Drejningsmomenter (mekanisk Vejning), kan et overordentlig stort Antal elektriske Maalinger føres tilbage til Afpasning af to lige store Spændinger (elektrisk Vejning).

Hvorledes det sker, vil forstaas ved Betragtning af Vægten. De to Momenter, der afpasses, saa de er lige store, er Virkninger af de to Masser vi sammenligner, d. v. s. der bestaar mellem Masserne og Momenterne en entydig Forbindelse, der her er den meget simple $M = m \cdot l_m$ (M Moment, m Masse, l_m Vægtstangsarm). Naar de to Momenter er lige store, haves følgelig med letforstaaelige Betegnelser

$$x \cdot l_x = m \cdot l_m$$

og dersom l_x specielt er lig l_m

$$x = m$$

Vejning er altsaa en Sammenligning gennem ensartede Virkninger. Ved almindelig Vejning sammenlignes endnu ensartede Systemer. Ved Strømvejning d. v. s. Maaling af en

elektrisk Strøm ved Vejning af Kraftvirkningen mellem to Spoler (eller Spolepar), som gennemflydes af Strømmen, haves en Sammenligning af højest uensartede Systemer, men naturligvis stadig gennem ensartet Virkning. Akkurat den samme Forskel mellem mere og mindre direkte Sammenligning gør sig gældende ved de elektriske Brosystemer. I den almindelige Wheatstones Bro sammenlignes Modstandens Virkning med Virkningen af en Modstandsnormal. I visse Vekselstrømsbroer sammenlignes Systemer, der paa forkellig Maade er byggede sammen af Modstande, Kapaciteter og Induktioner. Man vil forstaa, hvor uhyre Vejningsmetodens Anvendelighed udvides ved denne indirekte Brug. Naar Maaletekniken kan nøjes med saa relativt faa Maaleprinciper, ligger det netop i denne indirekte Anvendelse af Grundprinciperne og de primære Systemer.

Afpasningen af Nulsystemet sker efter dettes Art paa den ene eller anden af to Maader, der kan illustreres ved de almindelige Vægttyper. Ved Vægtsystemer med konstant Forhold mellem Armene maa Forholdet mellem Maaleobjekt og Normal afpasses efter det givne Vægtstangsforhold, d. v. s. Normalen maa afpasses. Til Raadighed maa altsaa staa en kontinuert eller trinvis variabel Normal (en Skala af Normaler). Ved Systemer som Bismeren, hvor Vægtstangsforholdet kan varieres kontinuert, afpasses Vægtstangsforholdet, og som Følge heraf behøves ved Bestemmelsen kun en enkelt Normal.

Anm. **Længdemaalingssystemer, Vejningssystemer og Tællere. Almindeligt Synspunkt for Maaleteknikens Systemer.** Vi har peget paa, at Nulsystemerne i Almindelighed kan betragtes som afledede fra Stangvægten (den ligearmede Vægt, den uligearmede Vægt og Bismeren). Paa den anden Side kan som antydet Flertallet af selvindstillende Viserinstrumenter betragtes som en Art Efterligninger af Fjedervægten eller Brevvægten. Nulsystemerne og de antydede selvindstillende Udslagssystemer vil man derfor med nogen Ret kunne betegne som Vejningssystemer. Ved Siden af dem har vi Længdemaalingssystemerne, afledede af den almindelige Maalestok. Vi tør maaske

betragte Forskellen mellem disse Systemer og Vinkelmaalingssystemerne som mindre dybtgaaende og regne de sidste med til Længdemaalingsgruppen. Endnu en tredie Gruppe Maaleredskaber har vi da tilbage, nemlig Tællerne, der har deres fornemste Repræsentant i Uret. Tællerne slutter sig, hvad Fejlkilder angaar, nær til de selvindstillende Udslagssystemer. De omtales derfor ikke særligt i denne Fremstilling. Men ejendommeligt er det nu at lægge Mærke til, at Flertallet af Maaleteknikens Systemer kan betragtes som afledede fra de tre fundamentale Maaleredskaber, Længdemaalestokken, Vægten og Uret, de primære Systemer for Maaling ved de tre fundamentale Normaler eller de tre fundamentale Enheder cm. g. sek. Selvfølgelig findes der Systemer, ofte meget sindrigt udtænkte Systemer, der vanskeligere lader sig indordne under de her antydede Grupper. Imidlertid vil man dog selv i saadanne Tilfælde ofte finde, at Systemerne peger tilbage mod et af de fundamentale Apparater. (Bestemmelse af optiske Glas Styrke ved Opsøgning af Supplementsglasset i en Skala af Normalglas, Segers Kegler for Temperaturmaaling, Tungefrekvensmaaleren).

Paa den anden Side kan nu imidlertid ogsaa Flertallet af Maaleteknikens Systemer bringes ind under et fælles Synspunkt. Systemet — Længdemaalingssystemet, Udslagssystemet eller Nulsystemet — er karakteriseret ved en Række (væsentlige) Egenskaber — de karakteristiske Egenskaber for de Elementer, hvoraf Systemet er bygget op. Ved Maalingen tilvejebringer vi — eller Systemet tilvejebringer automatisk — en vis bestemt Tilstand indenfor Systemet. Naar denne er naaet, maa der mellem Maaleobjektets ubekendte Egenskab og Maaleredskabets kendte eller iagttagelige Egenskaber bestaa en bestemt Sammenhæng. Det er den, der er givet ved Maalingens Teori, som derved tjener til Bestemmelse af den søgte Egenskab. Teorien er ved det selvindstillende, direktevisende Udslagssystem den simple: den søgte Egenskab = Aflæsningen. Ved det ikke direktevisende er den maaske givet ved en Kurve eller en Tabel. Ved de fleste Systemer, der kræver Indstilling, er den givet ved et matematisk Udtryk. Indstillingen af de sidste Systemer sker efter et vist Kriterium. Ved Nulsystemer er dette Udslaget Nul (Galvanometret), Minimum af Lyd (Telefonen). Ved Længdemaalingssystemer benyttes Kriterier som Koincidens af Kikkertens Traadkors med Punktet, hvortil der sigtes, størst optisk Skarphed (optiske Bænk), Minimum af Lys (Polarisatoren), lige stærke Belysning af to Felter (Fotometerbænken, Polarisatoren), alle Kriterier, der kun kræver den simpleste Skelnen eller det simpleste Skøn.

Almindelige Fejl ved Nulsystemet. Tænker vi fremdeles paa sædvanlig Vejning eller paa Modstandsmaaling med en Wheatstones Bro, har vi her at gøre med Sammenligning af to Forhold — det kendte Forhold mellem Armene og det ubekendte Forhold mellem Maaleobjekt og Normal eller rettere sagt disse Elementers ensartede Egenskaber. Ved Maalingen afpasses disse Forhold, saa de bliver lige store. Vægten, resp. Broen, kan i Overensstemmelse med det her anlagte Synspunkt betragtes som en Normal for Forholdet. Denne Normal kan som andre have Afvigelser fra den nominelle Værdi, d. v. s. Enhedsfejl. Er Normalen variabel (Bismeren, Traadbroen), varierer Fejlen i Almindelighed fra Sted til Sted paa Normalens Skala. Til Forholdets Fejl kommer herefter den mulige Enhedsfejl paa den eller de Normaler, hvormed Maaleobjektet sammenlignes. Endelig rummer Forbindelserne mellem Systemets forskellige Dele en Række Fejlkilder. Disse samt Forholdets Fejl er det, vi især skal belyse ved det efterfølgende Eksempel.

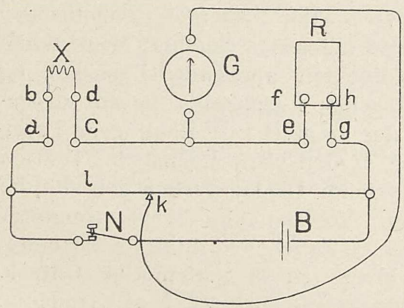

Fig. 63.

Wheatstones Traadbro. Vi vælger til Belysning af Nulsystemets Fejlkilder Wheatstones Bro for Modstandsmaaling. I Wheatstones Traadbro — Fig. 63 — foretages Indstillingen ved Kontakten k, der forskydes langs Maaletraaden, til Galvanometret G intet Udslag gør ved Slutning af Nøglen N. Naar denne Tilstand er naaet, d. v. s. naar Spændingerne er de samme i Galvanometergrenens to Endepunkter, skulde den ubekendte Modstand X være bestemt ved

$$X = R \cdot \frac{l}{L - l}$$

hvor l er Aflæsningen paa Broens (ligedelte Skala), L Traadens Længde maalt paa samme Skala, mens R betegner Normalens Modstand.

Analyse af Brosystemets Fejlkilder. Ser vi bort fra Normalens Fejlkilder, som vi allerede har betragtet, erkender vi let, at Teorien ovenfor forudsætter følgende Egenskaber:

1. Homogenitet i Maaletraaden.
2. Modstanden Nul i Tilledningstraadene for X og R.
3. Fraværelsen af elektromotoriske Kræfter i alle Grene undtagen Batterigrenen.

Ingen af disse Betingelser for den fejlfri Maaling tør paa Forhaand antages at være fuldt tilfredsstillende. — Mangel paa Homogenitet i Traaden eller Afvigelse fra Broforholdets nominelle Værdi, Modstanden i Tilledningstraadene og fremmede elektromotoriske Kræfter betegner altsaa Fejlkilder, hvis Indflydelse maa vurderes eventuelt elimineres.

Traadens Mangel paa Homogenitet, Kalibrering og Kaliberkorrektion. I vort Udtryk for X er l faktisk sat i Stedet for Modstanden i l, L for Modstanden i Traadens hele Længde. Forudsætningen for at dette er tilladeligt er den, at Traaden er homogen, overalt har samme Modstand pr. cm. Tilstræbes, som her forudsat, Metodens Sikkerhed, d. v. s. den ved Aflæsningssikkerheden givne, vil Uregelmæssighederne i de almindelig benyttede Maaletraade nu i Virkeligheden betyde kendelig Fejl, som der maa rettes for ved Kaliberkorrektion, en Korrektion der er defineret paa følgende Maade.

Hvis vi for et bestemt Modstandsforhold f aflæser Kontaktstillingen l, skulde $\frac{l}{L-l}$ være lig f. Er Traaden inhomogen, vil Forholdet $\frac{l}{L-l}$ give en falsk Værdi for f. Kaliberkorrektionen for Aflæsningen l er nu den Rettelse δl, der skal føjes

til l for at $\frac{l}{L-l}$, uregnet for det rettede l, skal give den rigtige Værdi for f. Korrektionen er altsaa defineret ved Ligningen

$$\frac{l+\delta l}{L-(l+\delta l)}=f.$$

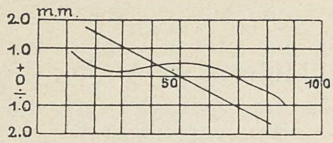

Fig. 64.

I Overensstemmelse med denne Definitionsligning kan δl bestemmes paa flere forskellige Maader. Idet man varierer f, faaes δl for en Række forskellige Punkter paa Skalaen. Man plejer at afbilde Resultatet af Undersøgelsen i en Kurve, der f. Eks. kan have et Forløb som det i Fig. 64 viste. Broen kalibreres i Almindelighed ikke helt ud til Enderne af Traaden, men f. Eks. kun mellem 10 og 90 ved en Traad paa 100. Tæt ved Traadens Indspændinger vokser Korrektionen nemlig i Almindelighed for stærkt i Vejret, saa Maaling her helst maa undgaas. Kaliberkurven har som oftest (ved Traade, der ikke har lidt Overlast) et jævnt Forløb svarende til, at Aarsagen til Kaliberfejlen i Reglen maa søges i Variation i Diametren, en Variation der i Almindelighed vil være jævn. (Traaden f. Eks. svagt konisk). Korrektionen kan paa en 1 m lang Maaletraad naa en Størrelse paa 1—2 mm, altsaa 10—20 Gange Aflæsningsusikkerheden. Fejlen i Maalingen, som Følge af Traadens Uregelmæssigheder, vil altsaa kunne blive 10—20 Gange Metodens Usikkerhed.

I Tab. I er anført Resultaterne af en Kalibrering, udført ved at give Forholdet f en Række kendte Værdier. I Tab. II er dernæst gengivet en Justering ved Hjælp af den kalibrerede Bro.

Tabel I.

Forhold f	Beregnet Aflæsning	Aflæst	Korr.
10 til 100	4,54	4,44	+ 0,10
20 - 100	8,33	8,10	+ 0,23
25 - 100	10,00	9,74	+ 0,26
30 - 100	11,54	11,29	+ 0,25
40 - 100	14,29	14,04	+ 0,25
50 - 100	16,66	16,48	+ 0,18
60 - 100	18,75	18,54	+ 0,21
70 - 100	20,59	20,40	+ 0,19
75 - 100	21,43	21,27	+ 0,16
80 - 100	22,22	22,09	+ 0,13
85 - 100	22,97	22,86	+ 0,11
90 - 100	23,68	23,58	+ 0,10
95 - 100	24,36	24,27	+ 0,09
100 - 100	25,00	24,90	+ 0,10
100 - 90	26,32	26,24	+ 0,08
100 - 80	27,77	27,69	+ 0,08
100 - 70	29,41	29,30	+ 0,11
100 - 60	31,25	31,11	+ 0,14
100 - 50	33,33	33,21	+ 0,12
100 - 40	35,71	35,63	+ 0,08
100 - 30	38,45	38,39	+ 0,07
100 - 20	41,66	41,67	— 0,01
100 - 15	43,48	43,53	— 0,05
100 - 10	45,45	45,56	— 0,09

Tabel II.

Undersøgelse af en teknisk Modstandskasse. Alle Modstande sammenlignede med Normalen 5 Ohm.

Ohm	Aflæsning	Aflæsning korrigeret	Forhold	Modstand korrigeret for Kaliberfejl	Korrigeret for Tilledninger
1	8,100	8,33	0,1999	0,9995	0,998
2	14,035	14,295	0,4004	2,0020	2,001
3	18,515	18,725	0,987	2,9940	2,994
4	22,090	22,22	0,7999	3,9995	3,999
10	33,195	33,315	1,997	9,985	9,985
				Beregnet Sum...	9,992

Differens 0,007 eller ca. 0,7 $^0/_{00}$.

Sidste Kolonne indeholder Resultaterne korrigerede yderligere for Tilledningstraadenes Modstand. (Se nedenfor).

Elimination af Kaliberfejlen ved Ombytning. Kaliberkurven tillader altsaa som vi nu har set en Elimination ad Regningens Vej af Kaliberfejlen. Ved Anvendelse af en særlig Fremgangsmaade kan man i visse Tilfælde nemlig ved Arbejdet med en »ligearmet Bro« (paa Midten af Maaletraaden) eliminere Kaliberfejlen. Fremgangsmaaden vil ved Traadbroen bestaa i en Ombytning af Maaleobjekt R og den ubekendte Modstand X. Med let forstaaelige Betegnelser haves for det vilkaarlige Tilfælde. (Uligearmet Bro).

$$\text{Før Ombytning: } \frac{X}{R} = \frac{l_1 + \delta l_1}{L - (l + \delta l_1)} = \frac{l_1}{L - l_1}\left(1 + \frac{L}{L - l_1} \cdot \frac{\delta l_1}{l_1}\right),$$

$$\text{EfterOmbytning: } \frac{X}{R} = \frac{L - (l_2 + \delta l_2)}{l_2 + \delta l_2} = \frac{L - l_2}{l_2}\left(1 - \frac{L}{L - l_2} \cdot \frac{\delta l_2}{l_2}\right)$$

Udtrykkene tilhøjre er fremkomne ved at udvikle de almindelig anvendte Udtryk i Række.

Af Udtrykkene følger

$$\frac{X}{R} = \frac{1}{2}\left[\frac{l}{L-l_1}\left(1+\frac{l_1}{L-l_1}\cdot\frac{\delta l_1}{l_1}\right)+\frac{L-l_2}{l_2}\left(1-\frac{L}{L-l_2}\cdot\frac{\delta l_2}{l_2}\right)\right]$$

Regner vi med

$$\frac{X}{R} = \frac{1}{2}\left[\frac{l_1}{L-l_1}+\frac{L-l_2}{l_2}\right],$$

begaar vi en Fejl:

$$F = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{l_1}{L-l_1}\cdot\frac{L}{L-l_1}\cdot\frac{\delta l_1}{l_1}-\frac{L-l_2}{l_2}\cdot\frac{L}{L-l_2}\cdot\frac{\delta l_2}{l_2}\right)$$

her tør vi sætte $L-l_2 = l_1, l_2 = L-l_1$ og faar da

$$F = \frac{1}{2}\frac{L}{(L-l_1)^2}\cdot(\delta l_1 - \delta l_2)$$

eller maalt i Forhold til $\frac{X}{R} = \frac{l_1}{L-l_1}$

$$F_{rel} = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{L-l_1}\cdot\frac{(\delta l_1 - \delta l_2}{l_1}$$

Arbejdes paa Midten af Broen er $\delta l_1 = \delta l_2$ altsaa $F_{rel} = 0$, d. v. s. i den ligearmede Bro elimineres Kaliberfejlen ved Ombytningsmetoden. Undertiden træffer man Maaletraade med en Kaliberkurve der er symmetrisk med Hensyn til Midtpunktet — (Skraalinien i Fig. 64).

Ved en saadan Traad er

$$\delta l_1 = -\delta l_2,$$

og Fejlen altsaa

$$\frac{L}{L-l_1}\cdot\frac{\delta l_1}{l_1},$$

d. v. s. netop den samme som ved Enkeltmaalingen, naar Kaliberkorrektionen negligeres. Der vil altsaa ved en saadan Traad intet være opnaaet ved Ombytning.

Ved Præcisionsjustering af Modstande bruges en ligearmet Bro, der i det Væsentlige er gengivet i Fig. 65. *a b c* er en Dobbeltmodstand bestaaende af to lige store Modstandselementer f. Eks. hver paa 10 Ohm, *X* er den ubekendte Modstand, der tør forudsættes at være meget nær lig Normalmodstanden *R*. Den lille Forskel mellem *X* og *R*, som skal maales, findes ved Hjælp af Galvanometret og et Par meget smaa »Interpolationsmodstande« indbyggede i samme Box som *a c b*.

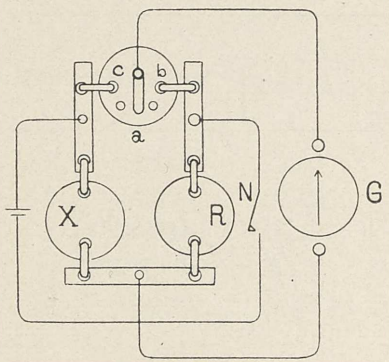

Fig. 65.

En Forudsætning for Maalingens Rigtighed er nu først og fremmest at Broforholdet virkelig er 1, som det giver sig ud for. Imidlertid kan Fejlen hidrørende fra den i Almindelighed tilstedeværende ringe Forskel let elimineres. Man behøver blot at vende Dobbeltmodstanden *a c b* saa *b a* kommer til venstre, hvis den før laa til højre. Denne Ombytning vil, som det let indses, virke ganske som Ombytningen af Maaleobjekt og Modstand ved Traadbroen.

Tilledningstraadenes Indflydelse ved Wheatstones Bro. Ved Wheatstones Bro maa vi anvende Tilledningstraade *a b* — *c d* og *e f* — *g h*, Fig. 63, for at forbinde henholdsvis Maaleobjekt og Normal med Broen. Lad Modstanden i det første Sæt være μ_1 i det andet μ_2. Da har vi, naar den sande Værdi af den ubekendte Modstand er *X*, og den sande Værdi af Sammenligningsmodstand *R*, at

$$\frac{X+\mu_1}{R+\mu_2}=\frac{l}{L-l};$$

heraf faas

$$X+\mu_1=\frac{l}{L-l}\cdot(R+\mu_2)$$

$$X = \frac{l}{L-l} \cdot R + \left(\frac{l}{L-l} \cdot \mu_2 - \mu_1 \right)$$

Tager vi altsaa intet Hensyn til Tilledningstraadens Modstand, begaar vi en Fejl

$$F = -\left(\frac{l}{L-l} \cdot \mu_2 - \mu_1 \right)$$

Dersom Broen nu er en almindelig Traadbro, vil vi som oftest søge at afpasse R saaledes, at vi kommer til at arbejde saa nær Midten som mulig. Vi opnaar da ikke alene at Sikkerheden bliver saa stor som mulig, men ogsaa ofte at F bliver forsvindende. F er nemlig 0, naar

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{l}{L-l},$$

altsaa naar Tilledningstraadenes Modstande forholder sig nogenlunde som de Modstande de hører til. Det ligger nær ved en Bro som den i Fig. 63 antydede, naar det er muligt, at benytte nogenlunde ens Tillidningstraade i Broens to Sider. Gør vi det og er desuden X ikke altfor forskellig fra R, er Betingelsen $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{l}{L-l}$ ogsaa opfyldt og $F = 0$.

Imidlertid lader det sig nu ikke altid gøre at arbejde umiddelbart i Nærheden af Midten. For derfor at danne os et Skøn over Tilledningstraadenes Indflydelse i et delvis vilkaarligt Tilfælde, ser vi paa Udtrykket for Korrektionen

$$K = \frac{l}{L-l} \cdot \mu_2 - \mu_1.$$

Vi antager i vor Undersøgelse at $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Da bliver

$$K = \frac{2l-L}{L-l} \cdot \mu$$

eller maalt i Forhold til X

$$\frac{K}{X} = \frac{2l - L}{l} \cdot \frac{\mu}{R}$$

hvilket Udtryk viser, at Fejlens Indflydelse, naar Samlingsmodstanden holdes konstant, bliver desto kendeligere jo mindre l er, — altsaa jo mindre X er.

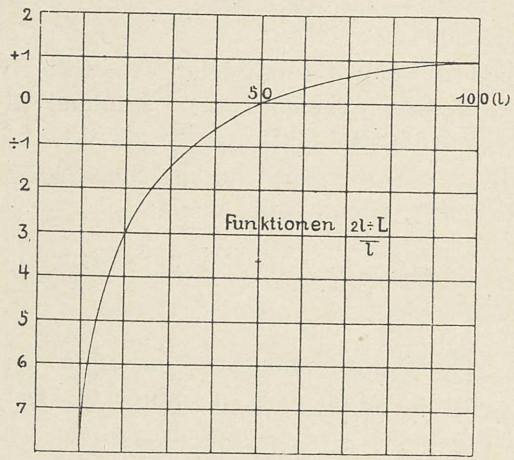

Fig. 66.

Endnu bedre ses dette af Kurven, Fig. 66, der afbilder Funktionen $\frac{2l - L}{l}$ i dens Afhængighed af l, og altsaa giver os det Tal, hvormed vi skal multiplicere Forholdet $\frac{\mu}{R}$, for at faa den relative Korrektion, som Tilledningstraadene kræver. Over 50 er Korrektionen positiv, d. v. s. vi maaler den ubekendte Modstand for lille; Korrektionen nærmer sig til $\frac{\mu}{R}$. Under 50 er Korrektionen negativ og vokser meget stærk hen mod Enden af Traaden.

Tal-Eksempel. Ved en Maaling er $R = 1$ Ohm. Vi benytter to Sæt Tilledningstraade af Kobber, hvert paa 20 cm med 1 mm² Tværsnit. Hvert Sæt har da en Modstand paa ca. 0,003 Ohm, Modstanden i en Kobbertraad 1 m lang og

1 mm² i Tværsnit er nemlig ca. 0,017. Kontakten staar, naar Galvanometret er i Ro ved 27,52. Af vor Kurve ser vi, at Korrektionsfaktoren er ca. — 1,5 d. v. s.

$$\text{Korrektionen} = -1{,}5 \cdot \frac{0{,}003}{1} = -0{,}0045$$

Fejlen vil altsaa beløbe sig til over 4 ‰. Skal den maximale Nøjagtighed opnaas, maa der derfor korrigeres, d. v. s. vi maa formindske den Værdi, der umiddelbart beregnes med ca. 4,5 ‰. Havde Kontakten staaet omkring 70 var Korrektionen bleven paa ca. + 0,002 d. v. s. vi skulde have forhøjet med 2 ‰. Vi spørger nu, med hvilken Sikkerhed Korrektionen paa de 4 ‰ skal bestemmes, Sikkerheden finder vi saaledes. Korrektionen er ca. 4 ‰ af *X*. Skal *X* maales med en Sikkerhed af ca. 0,5 ‰, vil vi i Praksis f. Eks. kunne tillade, at Usikkerheden, der kommer ind ved Bestemmelsen af Korrektionen, er ca. 0,2 ‰. Usikkerheden paa Bestemmelsen af Korrektionen selv bliver da (Korrektionens »Teori« pag. 107)

$$\frac{1000}{4} \cdot \frac{0{,}2}{1000} = \frac{2}{40} \sim 5\ \%$$

Herefter bliver Spørgsmaalet, om denne Korrektion kan beregnes af Traadens Dimensioner og den gennemsnitlige Modstandskoefficient for Kobbertraad 0,017. Antager vi, at vort Kendskab til denne sidste »Konstant« har en Usikkerhed paa 0,001 eller ca. 6 %, kan, som det ses, en Nøjagtighed paa ½ ‰ vanskelig nok opnaas under de givne Forhold. Den søgte Modstand er af Størrelse ca. ½ Ohm. Dersom vor mindste Normal er 1 Ohm, er vi med denne Modstand (½ Ohm) nede paa Grænsen af, hvad der kan maales med en Nøjagtighed, der fuldt udnytter Iagttagelsessikkerheden ved Broen.

Havde *R* været lig 10 Ohm, var Korrektionerne blevne ti Gange saa smaa. Fejlen over 50 havde da altid ligget under Usikkerheden, der er ca. 0,4 ‰. Fejlen under 50 vilde først

i Nærheden af 20 naa op over Usikkerheden. Da man sjældnere arbejder under 20, betyder det, at man i dette Tilfælde eller i ethvert Fald naar $R > 10$ Ohm kan negligere Fejlen, der hidrører fra Tilledningstraade, som de her anvendte.

I et Eksempel nedenfor skal vi lære et System (Thomsons Bro) at kende der i sig selv eliminerer den Fejl Tilledningstraadenes Modstande betegne.

Fremmede elektromotoriske Kræfter i Wheatstones Bro. Teorien for Wheatstones Bro forudsætter, at der ikke optræder elektromotoriske Kræfter andre Steder end i Batterigrenen. Nu kan der opstaa elektromotoriske Kræfter af termoelektrisk (undertiden maaske galvanisk) Art andre Steder f. Eks. i Grenen med Maaleobjektet eller i Galvanometret. Saadanne Kræfter vil da give Anledning til en falsk Ligevægt. Vi vil undersøge den Maade, hvorpaa de virker i Brosystemet. Lad e_1 og e_2 i Fig. 67 antyde to fremmede elektromotoriske Kræfter, den ene i Grenen med den ubekendte Modstand X, den anden i Galvanometerbroen. Naar Galvanometret intet Udslag gør, giver Kirckhoffs Lov

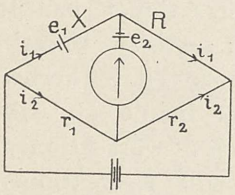

Fig. 67.

$$e_1 + e_2 = i_1 X - i_2 r_1$$

$$- e_2 = i_1 R - i_2 r_2$$

hvoraf, naar $\frac{r_1}{r_2} = f$

$$x = f \cdot R + \frac{1}{i_1}(e_1 + e_2 (1 + f))$$

Vendes nu Strømmen i Broen, faas

$$e_1 + e_2 = - i'_1 X + i'_2 r'_1$$

$$- e_2 = - i'_1 R + i'_2 r'_2$$

Sættes $\frac{r'_1}{r'_2} = f'$ bliver

$$X = f' \cdot R - \frac{1}{i'_1}(e_1 + e_2(1 + f')).$$

Fejlen, der nu begaaes ved at sætte

$$X = R\frac{f + f'}{2}$$

er som det ses den halve Differens mellem de sidste Led paa højre Side i de to Udtryk for X. Denne Differens vil da e_1 og e_2 er smaa og i_1' resp. f' kun meget lidt forskellig fra i_1 resp. f — i alle praktiske Tilfælde være Nul. Indflydelsen af fremmede elektromotoriske Kræfter elimineres altsaa ved at vende Maalestrømmen og tage Middeltallet af de til de to Strømretninger svarende Bestemmelser. Ved en Traadbro faas to lidt forskellige Stillinger af Kontakten l og l' og det rigtige Resultat X vil være bestemt ved

$$X = R \cdot \frac{\left(\frac{l + l'}{2}\right)}{1000 - \left(\frac{l + l'}{2}\right)'}$$

hvis Traaden er 1000 Inddelinger lang. Ved Wheatstones Bro med konstant Modstandsforhold faas to lidt forskellige Værdier R_1 og R_1' for de i Rheostaten udtagne Modstande og

$$X = F \cdot \frac{R_1 + R_1'}{2}$$

hvor F er det konstante Broforhold.

Eksempel paa Elimination af fremmede elektromotoriske Kræfter ved en Thomsons Bro. Thomsons Bro som et System ved hvilket Tilledningernes Indflydelse er (delvis) elimineret. Fig. 68 viser en kendt Thomsons Bro skema-

tisk fremstillet. Den ubekendte Modstand X indskydes i Række med en Normalmodstand N af samme Størrelsesorden i en Strømkres $B\ X\ N$. Enderne af X og N forbindes med Thomsonsbroen paa den Maade, Figuren antyder. Broen selv bestaar af to Sæt Dobbeltmodstande $r_1\ r_1$ og $r_2\ r_2$. $r_2\ r_2$ kan f. Eks. bestaa af to Gange de tre Modstande 25, 50 og 100 Ohm; mens $r_1\ r_1$ bestaar af to Gange Modstandene 0,1 — 1000 i Trin paa 0,1 Ohm.

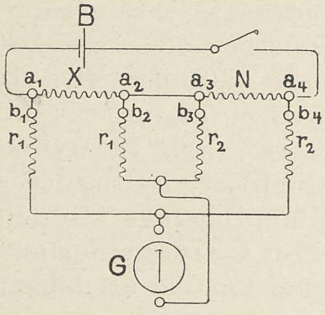

Fig. 68.

I de to Sæt r_2 skal der altid ved Brugen være udtaget den samme Modstand (f. Eks. 100 Ohm). For de to Sæt r_1 gælder, at Modstandene, der er ude, altid automatisk bliver ens. Broen benyttes saaledes. I $r_2\ r_2$ udtages passende valgte Modstande f. Eks. 100 Ohm. Derpaa stilles $r_1\ r_1$ ind, saa der intet Udslag kommer paa Galvanometret G, naar Strømmen sluttes ved den i Figuren viste Nøgle. I saa Fald haves som ved Wheatstones Bro

$$\frac{X}{R} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{100}, \text{ hvis } r_2 = 100$$

Thomsons Bro tillader Maaling af meget smaa Modstande, idet Usikkerheden ved Bestemmelsen af Tilledningstraadene er gjort uskadelig. Tilledningstraadenes Modstand er nemlig her ikke føjet til X og R, men til r_1 og r_2 og disse Modstande er saa store, at Korrektionen for Traadens Modstand falder bort eller i ethvert Fald kan bestemmes med fuld tilstrækkelig Sikkerhed. Broen repræsenterer altsaa et System for Elimination af en af Wheatstones Broes Fejlkilder. Her omtaler vi den desuden for at belyse, hvorledes fremmede elektromotoriske Kræfter kan gøre sig gældende ved det praktiske Arbejde med et Brosystem, — og hvorledes de elimineres. Det vil ofte være saaledes ved Arbejdet med Broen, at det ikke

er muligt at faa Galvanometret helt i Ro. En Modstand som f. Eks. 253,7 udtaget i venstre Side faar Galvanometret til at slaa ud til venstre, mens 253,8 faar det til at slaa ud til højre. Vi maa da om nødvendigt ved Interpolation bestemme den Modstand, for hvilken Galvanometret forbliver i sin Ligevægtsstilling. Dette kan bekvemt og sikkert gøres paa følgende Maade. Man giver efterhaanden r_1 en Række Værdier (3—5 forskellige) og iagttager Galvanometrets Udslag. Resultaterne optegnes paa et Stykke mm Papir med Modstanden til Abscisse, Udslaget til Ordinat. Iagttagelsessættene vil da bestemme en ret Linie, hvis Skæring med Abscisseaksen giver den søgte Modstand. Vil vi nu sikre os mod eventuelle elektromotoriske Kræfter i Brogrenene og i Galvanometret vendes Strømmen. Vi faar da en ny ret Linie, der maaske giver et andet Skæringspunkt med Abscisseaksen altsaa en anden Værdi for den søgte Modstand. Middeltallet mellem de to fundne Modstande vil da i Følge Udledningen ovenfor være den, vi skal regne med. Vil vi til Kontrol have endnu en Bestemmelse, kan vi vende Galvanometrets Poler, og saaledes faa en ny Kombination af elektromotorisk Kraft, hvis Sum ligeledes vil elimineres ved en Strømvending. Fig. 69 gengiver en Elimination, som den her antydede. Kurverne a og a' svarer til den ene Bestemmelse, Kurverne b b' til den anden, ved hvilken Tilledningerne til Galvanometrets Poler er byttede. Den første Bestemmelse giver for Modstanden

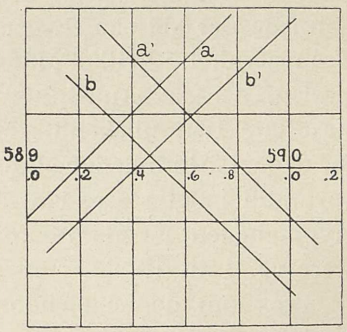

Fig. 69.

$$r_1 = \frac{589{=}19 + 589{=}83}{2} = 589{,}51$$

den anden

$$r_1 = \frac{589 \cdot 53 + 589 \cdot 43}{2} = 589{,}48$$

Dersom vi havde regnet med 589,19 ∾ 589,2, vilde vi have begaaet en Fejl paa 0,3 Ohm eller $^1/_2$ $^0/_{00}$, mens Broen umiddelbart tillader en Nøjagtighed, der er større end $^1/_4$ $^0/_{00}$. Vore Kurver viser tydeligt, at der har været en elektromotorisk Kraft tilstede baade i Galvanometer og i Grenene. De to Kræfter har været ens rettede i $a\,a'$, modsatrettede i $b\,b'$; de har endvidere været omtrent af samme Størrelse.

Opgaver.

Opg. 1. Analyser Fejlkilderne ved den almindelige ligearmede Vægt og angiv Midler mod Fejlene.

Opg. 2. Analyser Fejlkilderne ved Westphals Vægt og undersøg specielt Indflydelsen af Luftens Opdrift ved en Vægtfyldebestemmelse.

Opg. 3. Analyser Fejlkilderne ved den almindelige Traadkompensator for Maaling af elektromotorisk Kraft.

Opg. 4. Den ovenfor beskrevne Thomsons Bro benyttes meget til Bestemmelse af Traadmaterialers Modstandsevne og dennes Temperaturkoefficient.

Ved en Undersøgelse af en Række Aluminiumstraadprøver dannede der sig paa Æggen af de Staalknive, der begrænsede Traadstykket, i hvilket Modstanden maaltes, et daarligt ledende Beslag, der gav Anledning til en Forfalskning af Maalingens Resultat. Den ubekendte Modstand fandtes en sjælden Gang for stor i Almindelighed for lille, og de negative Afvigelser var altid langt større end de faa positive. Forholdet mellem Hyppigheden for de to Fortegn for Afvigelsen skønnedes at være ca. 1 til 10.

Prøv om denne ejendommelige Fordeling i Afvigelsernes Fortegn (og Størrelse) kan forklares ved Teorien for Indflydelsen af det antydede Beslag, naar det antages, at Sandsynligheden for Udvikling af og Udvikling i lige Grad af et Beslag ved de to Knive er lige stor, og naar Broens Modstande (se Fig. 68) havde følgende Værdier:

N: Normalmodstanden = 0,01 Ω

X: Traadstykkets Modstand = 0,002 Ω

m: Modstanden i Forbindelsen mellem Normal og Prøve, ca. 0,002 Ω

r_2: ene Side i Broen = 100 Ω

r_1: anden Side i Broen = ca. 500 Ω

X og N var derved ombyttede.

Opg. 5. En Wheatstones Bro har en Traad, der nominelt er L mm. Lad imidlertid Traadens Indspænding ved Nulenden være forskudt indad til A_0. Hvilken Fejl vil denne Forskydning give Anledning til i Maaling med Broen? (Opstil Udtrykket for Korrektionens Afhængighed af Stedet paa Maalestokken).

Hvorledes stiller Korrektionsudtrykket sig, naar ogsaa Traadens anden Indspænding er forskudt indad?

FUNDAMENTALE MAALEMETODER SOM MIDDEL TIL ELIMINATION AF SYSTEMETS FEJL.

Almindelige Eliminationsmetoder. I Tilknytning til vor Diskussion af Længdemaalingssystemet, Udslagssystemet og Nulsystemets Fejlkilde skal vi nu betragte nogle almindelige Metoder for Elimination af Systemernes Fejl.

Substitutionsmetoder. Alle Wheatstones Broes konstante Fejlkilder vil man faa elimineret ved Brugen af den saakaldte Substitutionsmetode. Ved denne benyttes en Hjælpemodstand helst nogenlunde af samme Størrelse som den søgte. Mod Hjælpemodstanden afbalancerer man Maaleobjektet. Derpaa fjærnes dette og erstattes af en Modstandskasse (Skala af Modstandsnormaler), der afpasses, til Ligevægt igen er bragt til Veje. Naar det er sket, maa den i Modstandskassen udtagne Modstand være lig den søgte ganske uafhængigt af, om Forholdet mellem Broens Arme er det nominelle, om der i Broen findes fremmede elektromotoriske Kræfter og om Tilledningstraadenes Modstand har den ene eller den anden Værdi, naar de blot er de samme ved Maalingens første og

anden Operation. Forudsætningen for Metoden er i det hele taget blot at ingen væsentlig Egenskab ændres fra den første til den anden Afbalancering.

Substitutionsmetoden finder ikke alene Anvendelse ved Nulsystemer, men snart sagt ved alle Maaleteknikens Systemer. Med Anvendelse af Substitution kan man saaledes bruge et Westonmillivoltmeter til Maaling af Modstande. Maaleobjektet indskydes da i en Strømkres sammen med Millivoltmetret og den mindst mulige Ballastmodstand. Man iagttager et vist Udslag paa Millivoltmetret. Derefter erstattes den ubekendte Modstand af en Modstandskasse, af hvilken man udtager Elementer, til det samme Udslag atter er bragt til Veje. Under Forudsætning af, at ingen væsentlige Egenskaber i Systemet har ændret sig og navnlig ikke Kredsens elektromotoriske Kraft, maa den udtagne Modstand da igen være lig den søgte. Om Millivoltmetret har Nulpunkts-, Dele- eller Enhedsfejl, er ganske ligegyldigt. Derimod er altsaa Friktion og elastisk Eftervirkning Fejlkilder, som hverken denne eller nogen anden Metode eliminerer.

Substitutionsmetoden kræver en kontinuert eller trinvis variabel Normal. Anvendes en Skala af Enkeltnormaler, maa Trinene være tilstrækkelig smaa. Hvis det i det sidst antydede Tilfælde ikke er muligt ved den forhaandenværende Skala af Normaler at tilvejebringe netop det tilstræbte Udslag — fordi Trinene er for store — maa Interpolation mellem to Trin anvendes. Derved kommer Delefejlen ind som en Aarsag til Forfalskning. Tillige bliver det nødvendigt at gøre sig klart, hvorvidt Trinene er tilstrækkelig smaa til at tillade simpel Interpolation.

I Almindelighed vil man ved Substitutionsmetoden være henvist til at afpasse Normalen efter Maaleobjektet. I visse Tilfælde lader det sig dog gøre at vende Metoden om, for saa vidt som man afpasser Maaleobjektet efter Normalen (naar kun en enkelt Normal staar til Raadighed). Det kan man saaledes gøre ved Bestemmelse af Traadmateriales Ledningsevne. Traadens Længde forandres da, til dens Modstands-

virkning er lig Virkningen af den til Raadighed staaende Normal.

Mellem Afpasning og Maaling af en Egenskab er der jo ofte næppe nogen Forskel. Ved Afpasning efter en Normal vil man nu netop i mange Tilfælde benytte Substitution. Naar i Metalbearbejdning en Akse eller Cylinder skal afpasses efter et paa Forhaand givet Arbejdsstykke, tjener dette sidste som Normal i en Substitutionsafpasning. Normalen tages i en Skydelære eller Mikrometerskrue, og det nye Arbejdsstykke afdrejes herefter til det netop fylder Normalens Plads ud. Som en Afpasning ved Substitution kan ogsaa den moderne Anvendelse af Kaliberbolt og Kalibrering betragtes. Denne Afpasning er, som det vil vides, ved Benyttelse af Grænselæresystemet endog gjort til en Afpasning af paa Forhaand given (uoverskridelig) Tolerans.

Differensmaaling. Naar kun en enkelt Normal af nogenlunde samme Størrelse som Maaleobjektet staar til Raadighed, vil man ved Anvendelse af saakaldt Differensmaaling undertiden kunne gøre sig praktisk set uafhængig af de samme Fejl som Substitutionsmetoden eliminerer, Udslagssystemets Delefejl undtagen. Navnlig vil man ved denne Metode principielt eliminere enhver Fejl af Nulpunktsfejlens Karakter. Vi kan tænke paa en Længdemaaling ved Mikrometerskrue. En saadan Skrue kan have Nulpunktsfejl, Delefejl og Enhedsfejl ganske som Westonsystemet. Dertil kan det endnu have Excentricitetsfejl foruden Fejl hidrørende fra Mangel paa Parallelisme mellem Kontaktfladerne. Lad os antage, at vi med Skruen vil udmaale Diametren i en nogenlunde tyk Traad og foruden Skruen til Raadighed har en Kaliberbolt, som kun afviger et Par Tiendedele Millimeter fra Traaden. Vi vil da ved Anvendelse af den her betragtede Metode kun benytte Skruen til at maale Differensen $d = D - D_0$ mellem Traaden og Kaliberboltens Diameter. I denne Maaling gaar Skruens Nulpunktsfejl ud — og det samme vil praktisk set gælde for en svag Excentricitetsfejl. Enhedsfejlen vil ende-

lig ogsaa praktisk set elimineres. Det ligger i, at d som en Korrektion kun skal bestemmes med en relativ Nøjagtighed, der er af Størrelsesordenen $\frac{d}{D}$ af den, hvormed Hovedmaalingen ønskes udført. Lad D f. Eks. være ca. 2 mm, d ca. 0,2 mm, da er $\frac{d}{D} = \frac{1}{10}$, og hvis der tilstræbes $1\,^0/_{00}$ i D, vil det i Almindelighed være tilstrækkeligt, at d maales med $1\,^0/_0$ Nøjagtighed. Overfor denne Nøjagtighed vil Skruens Enhedsfejl, der jo gør sig gældende med $p\,^0/_0$ i d, hvis den er $p\,^0/_0$, i Almindelighed være forsvindende. Den naar nemlig selv ved grovere Skruer sjældent op over et Par Promille.

Differensmaaling betegner en almindelig Metode til Elimination af Fejl af Nulpunktsfejlens Karakter. I vort Eksempel er det Maaleredskabets Nulpunktsfejl, der elimineres. I næste Kapitel skal vi se et Eksempel paa Elimination af en Art »Nulpunktsfejl« ved Maaleobjektet.

Forholdsmaaling eller relativ Maaling som Middel til Elimination af Systemets Enhedsfejl. Maaling ved primære Systemer vil i Almindelighed eller vel i Virkeligheden altid kunne betragtes som en Sammenligning af forskelligartede eller ens Systemer gennem ensartede Virkninger*). Simplets

*) Vi vil ikke bryde Fremstillingen ved en i Enkeltheder gaaende Paavisning heraf. Blot skal vi pege paa, at Maalingens Karakter af en Sammenling, der tydeligt træder frem i det nedenfor anførte Eksempel paa en relativ Maaling, til en vis Grad er maskeret i Maaling ved de sædvanlige primære Maaleredskaber. En Sammenligning gennem ensartede Virkninger forudsætter jo nemlig to Iagttagelser: Iagttagelse af Maaleobjektets Virkning og af det kendte Systems Virkning (Normalens Virkning). Ved de almindelige primære Systemer er den ene Iagttagelse, den sidste tilsyneladende faldet bort. I Virkeligheden er den udført en Gang for alle ved Systemets Fremstilling, og hvad mere er, Systemet er ved denne i Almindelighed gjort til Genstand for en Afpasning, hvorved det er bleven til en vis Grad direktevisende. Den manglende Komposant ved Maaling med et Millivoltmeter

stiller Sammenligningen sig, naar Systemerne er ens, d. v. s. naar vi sammenligner Maaleobjektet med en Normal af samme Art som Maaleobjektet, en Modstand med en Modstandsnormal, en Masse med en Massenormal (Vægtlodder) o. s. v. Saadan Sammenligning betegnes som relativ Maaling eller Forholdsmaaling, fordi man ved Bestemmelsen maaler Forholdet mellem Maaleobjektets ubekendte Egenskab og Normalens kendte ved Forholdet mellem Virkningerne af disse Egenskaber. Heraf følger, at Forholdsmaalingen baade vil eliminere enhver Fejl, der gør sig relativt lige stærkt gældende i Maaleobjekt og Normal og tillige enhver, der lige stærkt ændrer Virkningerne. Den første Egenskab ved Metoden skal vi se et Eksempel paa i næste Kapitel. Den anden Egenskab drager vi Fordel af, naar vi benytter Metoden til Elimination af Maaleredskabets Enhedsfejl, en Anvendelse, vi her skal illustrere ved en kendt elektrisk Maaling.

Skal en større Modstand (f. Eks. paa 100—300 Ohm.) bestemmes, kan man indskyde den i en Jævnstrømskreds, der foruden en passende Spændingskilde endnu kun indeholder et Millivoltmeter. Man iagttager paa dette Udslaget α_0. Derpaa indskydes i Stedet for den ubekendte Modstand en Normal R af nogenlunde samme Størrelsesorden. Iagttages nu Udslaget α, haves for den ubekendte Modstand

$$X = R \cdot \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

forudsat blot, at Millivoltmetrets Udslag er proportionalt med Strømmen gennem det. I Virkeligheden er Millivoltmetrets

---

blev saaledes udført, da Systemets Skala blev fremstillet og afpasset, saa 100 Inddelinger f. Eks. kom til at betyde 100 M. V. Kun ved Efterprøvning af Systemets Enhed gentages Iagttagelsen af Virkningen af en kendt Spænding (Spændingsnormal). Det primære System er saaledes at betragte som et tidssparende System, ved hvilket en Iagttagelse og i Almindelighed tillige Udregning af et Forhold er undgaaet.

Modstand indbefattet i X og R. Det er derimod ganske ligegyldigt, om den nominelle Værdi for Systemets Enhed afviger mere eller mindre fra den virkelige. Forholdsmetoden eliminerer altsaa principielt Systemets Enhedsfejl, derimod i Almindelighed ikke fuldt ud en mulig Nulpunktsfejl eller Delefejl. Har Systemet en Nulpunktsfejl δ_0, og ser man bort fra den, begaaes en Fejl, der relativt bliver

$$\frac{\Delta x}{x} = \delta_0 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_0} \right)$$

Fejlen bliver Nul, naar $\alpha = \alpha_0$, d. v. s. naar Normalen er lig Maaleobjektet. Metoden falder da sammen med Substitutionsmetoden. I Virkeligheden maa der dog, som det ses, godt være nogen Forskel paa α og α_0. Metoden eliminerer Fejlen, naar blot $\frac{\Delta x}{x}$ er forsvindende i Forhold til Metodens (uundgaaelige) Usikkerhed. Dersom »Delefejlen« varierede jævnt med α, vilde ogsaa den delvis elimineres. Det er Tilfældet f. Eks. ved Thermometret, men, som vi har set, netop ikke ved Westonsystemet.

Forholdsmaalingen antager ogsaa ofte en anden Form. For at blive ved Eksemplet ovenfor kan man, efter at have iagttaget α_0, lade den ubekendte Modstand forblive i Kredsen, idet man foruden den indskyder en passende Normal. (Se Pag. 123.) Faas nu Udslaget α, gælder

$$\frac{X}{X+R} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

altsaa

$$X = R \cdot \frac{\alpha}{\alpha_0 - \alpha}$$

Eller man kunde først have R indskudt og dertil føje X, hvorved

$$X = R \cdot \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha}.$$

Som antydet kan den direkte Anvendelse af et primært System betragtes som en Forholdsmaaling, hvis ene Kompo-

sant er udført en Gang for alle, eller ved hvilken den ene Komposant kun gentages en Gang imellem til Prøve af Enheden. Mere og mere almindeligt bliver det i Maaletekniken at uddanne Normaler til saadan Prøve af Systemets — navnlig Udslagssystemets — Enhed. Udslagssystemet gaar derved over til at gøre Tjeneste som en Art temporær Normal. Hvor tit man vil efterprøve dens Enhed, altsaa udføre den anden Komposant af Forholdsmaalingen, afhænger da naturligvis af Chancerne for en Ændring. — Som særlige Eksempler paa Normaler for den antydede Kontrol af Udslagssystemer kan her peges paa de Kvartsplader, der benyttes til at prøve Polarisationsapparatet for Sukkerundersøgelse, de Normalstænger, man fremstiller for Prøve af Extensometret i Strækningsmaskinen o. s. v.

Opgave.

Opg. 1. En Stangmagnets Moment kan bestemmes ved en meget simpel Magnetometeropstilling, bestaaende af et Ark mm-Papir — orienteret med sine Hovedlinier i magnetisk Nord-Syd og Øst-Vest — og et Kompas anbragt med sit Midtpunkt over et Hjørne i Kvadratnættet. Dette kan da tjene til at orientere Magneten i første eller anden Hovedstilling og til at maale Afstanden fra Magnetens Midtpunkt til Kompassets. Lad nu en Normalmagnet af samme Størrelse og væsentlig samme Styrke som den ubekendte staa til Raadighed. Hvilke Fejl i Kompas og Opstilling kan da elimineres, naar denne Normal benyttes til Sammenligning ved Forholdsmaaling — og hvorledes bør denne Forholdsmaaling arrangeres?

KAP. IX.

TILBAGEVIRKNING AF MAALEOBJEKTET PAA MAALEAPPARATET.

Vi har ovenfor set, at Indbringelsen af Maaleredskabet i Systemet kunde blive en Kilde til Ændring i væsentlige Egen-

skaber ved Maaleobjektet. Omvendt kan Maaleobjektets Indbringelse ogsaa give Anledning til Ændring af den øvrige Del af Maalesystemet. Herpaa skal vi se et Eksempel i indeværende Kapitel, der desuden vil belyse en Række typiske Metoder til Elimination af Indflydelsen. Der er god Grund til udførligere at gaa ind paa den her betragtede Tilbagevirkning og i det hele paa Vekselvirkningen mellem Systemets Dele, idet denne Vekselvirkning ofte rummer meget betydelige maaletekniske Vanskeligheder.

Tilbagevirkningen af Maaleobjektet paa Feltet ved magnetisk Materialprøvning. Den magnetiske Materialprøvning, som her skal betragtes, har til Formaal at bestemme den til en vis magnetiserende Kraft svarende magnetiske Induktion eller Magnetiseringsintensitet i Jærn. En saadan Prøve kræver et homogent, kendt Magnetfelt af en vis Udstrækning, for hvis Virkning Maaleobjektet kan udsættes. I og for sig volder det ingen Vanskelighed at tilvejebringe et homogent Felt af kendt Styrke. Et saadant vil man have inde i Midten af en tilstrækkelig lang Spole; men Vanskeligheden kommer, naar Maaleobjektet bringes ind i Systemet. Lægges f. Eks. en cylindrisk Jærnprøve ind i Spolen, magnetiseres den, og den fri Magnetisme, der kommer paa og i Stangen, vil forandre det oprindelige Felt saaledes, at det ikke længere er homogent. I Almindelighed vil Kraftfordelingen indenfor det Rum, der optages af Stangen efter dennes Anbringelse i Spolen, være saa kompliceret, at den ikke kan overskues. Et saadant Felt er naturligvis ikke egnet til rationel Maaling. Forandringen i Feltet aftager nu ganske vist med voksende Længde af Stangen, og ved meget lange og tynde Prøver bliver Tilbagevirkningen forsvindende. Imidlertid lader det sig i Praksis sjældent gøre at arbejde med saa lange Prøvestænger, at man kan se bort fra Feltets Ændring, og man har derfor søgt at uddanne Metoder, der paa anden Maade eliminerer den fra Maaleobjektets Tilbagevirkning hidrørende Fejl. Adskillige af disse Eliminationsmetoder frembyder betydelig, al-

mindelig maaleteknisk Interesse, og vi gør dem derfor her til Genstand for en nærmere Omtale.

Elimination af Fejlen ved Korrektion. Hvis man imod Virkeligheden regner med, at det oprindelige Felt bestaar inde i Magnetiseringsspolen, ogsaa efter at Stangen er lagt derind, og man ved et ballistisk Galvanometer maaler Induktionen i Stangens Midte eller ved et Magnetometer Stangens magnetiske Moment, saa føres man naturligvis til en falsk Værdi for Jærnets Induktion eller Magnetiseringsintentitet. Men man har nu prøvet, om man ikke ved Forsøg skulde kunne bestemme Rettelsen, der var at tilføje for at naa til den rigtige Værdi. Rettelsen vil være forskellig efter Prøvestangens Længde og Tværsnit og efter Materialets Karakter. Korrektionsmetoden vil derfor, da man ikke vel kan bestemme Rettelsen for alle mulige Tilfælde, i Praksis kræve, at man arbejder med i det væsentlige ensartede Dimensioner. Dertil maa man have bestemt Korrektionerne svarende til forskellige magnetiserende Kræfter for en Række typiske Jærnsorter, for at man i ethvert Tilfælde kan korrigere ved den for den mest beslægtede Jærnsort fundne Rettelse. Fremgangsmaaden repræsenterer, som det vil ses, et dristigt Forsøg paa at anvende den ene af de to almindelige Metoder til Elimination af Fejlen nemlig den, der bestaar i, at man gør den til Genstand for Maaling. Vi vil til nærmere Belysning af Metoden vise, hvorledes Korrektionen bestemmes.

C. Benedicks har foretaget en saadan Korrektionsbestemmelse for en Cylinder 20 cm lang og 0,8 cm i Diameter af svensk Støbestaal (Elektrostaal). Han optog den fuldstændige (men ukorrigerede) Kurve d. v. s. Kurven, der viser Forbindelsen mellem magnetiserende Kraft og Magnetiseringsintensitet, baade ved Hjælp af ballistisk Galvanometer og ved Magnetometer. Derpaa afdrejedes den benyttede Staalstang til en langstrakt Rotationsellipsoide. Denne Form har den Egenskab, at den vel ændrer Magnetfeltet i det Rum, der optages af Ellipsoiden, men forudsat, at det oprindelige Felts Retning

falder sammen med den ene Akse — og her naturligvis Længdeaksen — i Ellipsoiden, vil Feltet vedblive at være homogent. Formindskelsen kan dertil beregnes. Kaldes den maalte Magnetiseringsintensitet I og Forholdet mellem Længden af Rotationsaksen og Diametren i Ækvatorialsnittet for m, vil Modfeltet, hvormed det oprindelige Felt H_o skal formindskes, være

$$H_i = P \cdot I = \frac{4\pi}{m^2 - 1}\left[\frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\,\text{log.nat.}\,(m + \sqrt{m^2-1}) - 1\right] \cdot I$$

P kaldes Afmagnetiseringsfaktoren. Naar m er stor d. v. s. Rotationsellipsoiden lang og tynd, bliver

$$H_i = \frac{4\pi}{m^2} \cdot (\text{log.nat.}\, 2m - 1) \cdot I$$

Cylinder			Rotationsellipsoide		
H	I ved Magnetometer	I ved ballistiske Metode	H	H korrigeret	I
22,9	165	240	22,9	12,7	236
45,8	466	641	45,8	17,8	649
68,7	712	963	68,7	28,0	943
91,6	866	1131	91,6	44,5	1090
114,6	950	1220	114,6	66,4	1164
137,5	1012	1270	160,4	106,5	1247
160,4	1061	1304	206,2	150,1	1300
183,3	1101	1331	252,0	194,4	1334
206,2	1136	1350	206,2	149,8	1306
183,3	1111	1340	160,4	105,7	1266
160,4	1082	1321	114,6	62,3	1210
137,5	1048	1299	91,6	41,0	1172
114,6	1006	1265	68,7	20,5	1116
91,6	953	1219	45,8	2,4	1004
68,7	876	1141	22,9	— 7,6	707
45,8	734	993	0,0	—10,3	238
22,9	469	658			
	151	224			

I foranstaaende Tabel er nu Benedicks Resultater opførte, og i Kurverne Fig. 70 er de grafisk gengivne.

Kurven mærket I *magn.* er optaget ved Magnetometer, Kurven mærket II *ball.* er den ballistiske Kurve. »Normal« er bestemt ved Rotationsellipsoiden, idet Abscissen er $H_o - H_i$. H_o er beregnet af den gennem Magnetiseringsspolen sendte Strøm og Spolens Vindingstal n ved den simple Formel

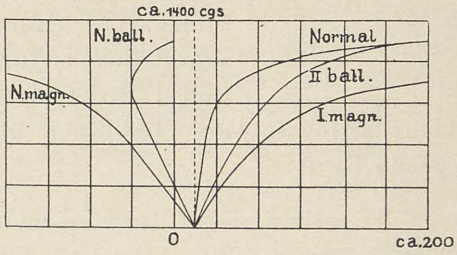

Fig. 70.

$$H_o = \frac{4\pi}{10} \cdot in$$

Det ses, at Magnetometret giver de mest afvigende Værdier for Intensiteten. Ud til venstre er tegnet de to Metoders Korrektionskurver de saakaldte Forskydningskurver. Et Punkt f. Eks. paa den ballistiske Kurve rettes ved at give Punktet en Forskydning til venstre saa stor som angivet ved Afstanden fra den punkterede Linie af Punktet i samme Højde paa Korrektionskurven. Den afbilder altsaa de vandrette Differenser mellem den umiddelbart optagne Kurve og Normalkurven i deres Afhængighed af Intensiteten.

Den lukkede magnetiske Kreds som Middel til Formindskelse af Tilbagevirkningen. Korrektionsmetoden bygger altsaa paa Kendskaben til Forskydningskurverne for Materiale af forskellig Art. Ved Stænger som de i Benedicks Forsøg anvendte og med disse Stænger anbragte simpelthen i en Spole er Korrektionerne, som det ses, mange Procent. Allerede heraf følger, at saadanne Systemer næppe kan ventes at give nogen stor Nøjagtighed. Gunstigere stiller Sagen sig ved Anvendelse af lukkede magnetiske Kredse, ved hvilke Prøvestangens Ender forbindes gennem en svær Bøjle af

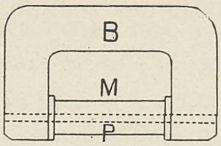

Fig. 71.

blødt Jærn. Fig. 71 viser skematisk en saadan lukket Kreds. P er Prøvestangen, B Jærnbøjlen eller Aaget, M Magnetiseringsspolen. Teorien for magnetiske Kredse giver som Betingelse for, at man faar den Induktion i Prøvestangen, der svarer til den af Magnetiseringsspolens Vindingstal pr. cm. og Strømmen beregnede Kraft:

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot i\, n,$$

at praktisk set al magnetisk Modstand ligger i Stangen. I Almindelighed haves nemlig

$$\frac{4\pi}{10}\, i \cdot A = N \left(\frac{l_P}{\mu_P S_P} + \frac{l_B}{\mu_B S_B} + \frac{l_L}{S_L} \right)$$

Her betegner l_P, l_B og l_L Længderne af Kraftliniernes Gennemsnitsveje henholdsvis i Prøvestangen, i Aaget og i de Luftmellemrum, der kommer mellem Stang og Aag i Boringerne for den første. S_P, S_B og S_L betegner Tværsnittet af de samme Veje og μ_P og μ_B Permeabiliteten henholdsvis for Prøvestykket og for Aagets Materiale. A er endelig det samlede Antal Vindinger paa Spolen. Dersom nu de to sidste Led altsaa Aagets og Luftmellemrummets Modstande kan gøres forsvindende, bliver

$$\frac{4\pi}{10}\, i\, A = N \frac{l_P}{\mu_P \cdot S_P}$$

Heraf faas $\frac{N}{S_P} = B = \mu_P \cdot \frac{4\pi}{10}\, i \frac{A}{l_P} = \mu_P \cdot \frac{4\pi}{10}\, i \cdot n = \mu_P \cdot H,$

idet B er Induktionen.

Under den antydede Forudsætning og tillige, som det ses, under den, at Magnetiseringsspolen fylder hele Rummet mellem Aagets Grene ud — l_p = Spolens Længde — vil altsaa den Induktion, der opstaar i Prøvestangen, kunne bereg-

nes ved Multiplikation af H med Permeabiliteten, hvilket med andre Ord vil sige, at der kommer den til Kraften H svarende Induktion i Prøvestangen. Man har saaledes et System, der umiddelbart tillader rigtig Bestemmelse af sammenhørende Værdier af H og B, idet den sidste Størrelse maales f. Eks. ved et ballitisk Galvanometer i Forbindelse med en Induktionsspole anbragt umiddelbart omkring Prøvestangen. Nu vil Forudsætningen for dette ideale System imidlertid i Almindelighed ikke være opfyldt, og navnlig giver Luftmellemrummet Anledning til Spredning af Kraftlinierne og derved til et Modfelt. Dette vil dog som oftest være væsentligt mindre end ved det aabne System bestaaende af Prøvestangen indeni en Spole. Derfor kan der ogsaa med betydelig større Sikkerhed korrigeres for Modfeltets Indflydelse ved Forskydningskurver. Naar saadanne anvendes kan de forskellige tekniske Apparater af denne Type — du Bois magnetiske Vægt, Siemens—Halskes Magnetometer o. s. v. — der i det væsentligste kun adskiller sig ved Principerne for Maaling af Induktionen, give relativt særdeles paalidelige Bestemmelser af Jærnets Induktion og Permeabilitet.

Bureau of Standards ideale Kreds. Anvendelsen af Aaget er et Skridt i Retning af ad konstruktiv Vej at befri Maalemetoden for den fra Vekselvirkningen mellem Maaleobjekt og Felt hidrørende Fejlkilde. Det amerikanske Statslaboratorium Bureau of Standards i Washington har nu fremstillet et System, ved hvilket Fejlkilden praktisk set helt er fjærnet. Systemet bestaar af en magnetisk Kreds som den i Fig. 72 antydede. P er Prøvestangen, A en Hjælpestang af et Materiale, der vælges saa nær som muligt af samme mag-

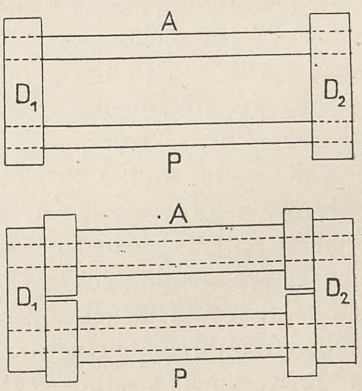

Fig. 72.

netiske Egenskaber som *P*. *A* og *P* forbindes ved Enderne med to forholdsvis svære Jærnstykker D_1 og D_2. Den derved dannede magnetiske Kreds er nu forsynet med seks Magnetiseringsspoler — to ens Hovedspoler om Prøvestang og Hjælpestang og fire saakaldte Kompensationsspoler — anbragt over Stangens Ender lige foran Overgangen mellem Stang og Aag. Den Tanke, der ligger til Grund for dette System, er følgende. Hvis Modstanden i den magnetiske Kreds' forskellige Dele er varierende, vil der i Almindelighed paa de Steder, hvor Modstanden ændres, altsaa ved et Kredsløb som det antydede især i Overgangen mellem Stænger og Aag opstaa fri Magnetisme og derfra hidrørende Spredning af Kraftlinierne. Hvis man imidlertid er i Stand til at fordele Magnetiseringsvindinger eller rettere magnetomotorisk Kraft saaledes over Kredsen, at Forholdet mellem den og Modstanden overalt er konstant, vil Aarsagen til Spredning være fjærnet, og Kredsen vil forholde sig som en homogen Jærnring med en homogen Vikling. I Bureau of Standards System tjener nu de fire Kompensationsspoler til Overvindelse af de fire Modstande, der i det væsentligste er Kilderne til Spredning, nemlig som antydet Modstandene i Overgangen mellem Aag og Stænger. For at kunne opnaa Kompensation i ethvert Tilfælde kan Strømmen gennem Kompensationsspolerne reguleres for sig. For at kunne imødegaa Forskelle mellem Prøvestang og Hjælpestang kan desuden Strømmene i de tilsvarende Magnetiseringsspoler reguleres uafhængigt af hinanden. Ved Brugen afpasser man nu de tre Strømme saaledes, at Kraftliniestrømmen i tre Tværsnit er ens nemlig midt i Prøvestangen, midt i Hjælpestangen og halvvejs mellem Midten af Prøvestangen og dens Ende. Man konstaterer Ligestorheden i Kraftliniestrømmen ved tre Induktionsspoler nemlig en lagt om Midten af Prøvestangen, en om Midten af Hjælpestangen og endelig en delt i to ens Afdelinger, anbragt halvvejs ude mod Aaget paa hver sin Side af Prøvestangens Midte. De tre Spoler kan to og to forbindes i Række saaledes, at Induktionen i dem gaar i mod-

sat Retning. Udviser et ballistisk Galvanometer indskudt i Serie med Spolerne intet Udslag, er det Tegn paa, at Kraftliniestrømmen paa de Steder, hvor Spolerne er anbragt, er ens. Naar det nu ved saadan Prøve er fastslaaet, at Strømmen er ens paa tre Steder i Kredsen, tør den praktisk set regnes at være ens i alle Tværsnit, og den i Prøvestangen maalte Induktion er da lig den, der svarer til den magnetiserende Kraft, beregnet af Strømmen og Vindingsantallet pr. cm. i Prøvestangens Magnetiseringsspole.

Ringmetoden. Bureau of Standards Metode realiserer under praktisk tilgængelig Form en Maalemetode, Ringmetoden, der radikalt fjærner den fra Vekselvirkningen hidrørende Fejl. Er det muligt at give Maaleobjektet Form af en Ring, hvis Tværsnits radiale Dimension ikke er for stor i Forhold til Ringens Radius, og forsynes denne Ring med en jævnt fordelt Vikling, vil den Betingelse, der søges praktisk set opfyldt ved det lige omtalte System, principielt være fyldestgjort, og man vil ved Hjælp af en passende anbragt Induktionsvikling maale den til den beregnede magnetiserende Kraft svarende Induktion. Metoden lader sig i visse Tilfælde realisere i Praksis. Naar den dog kun finder ret begrænset Anvendelse, ligger det i Vanskeligheden ved at give Maaleobjektet Ringform og Vanskeligheden ved at bygge Systemet op.

Elimination af Fejlen ved Forholdsmaaling. I de foregaaende Metoder har vi Eksempler paa mer eller mindre indirekte Maaling (»Absolut Maaling«). Vi skal nu omtale en Række Bestemmelser ved Sammenligning af Maaleobjektet med en Normal af samme Art altsaa ved simpel Forholdsmaaling. Saadan Maaling eliminerer, som fremhævet ovenfor, enhver Fejl, der procentisk gør sig lige stærkt gældende overfor Maaleobjekt og Normal. Heri ligger en Mulighed for ved Forholdsmaaling at imødegaa den Fejlkilde, vi her betragter. For at forstaa hvorledes det skulde ske kunde vi

tænke os Maalingen arrangeret paa en i Praksis næppe benyttet Maade nemlig saaledes, at vi først optog den fejlagtige Magnetiseringskurve — N_f i Fig. 73 — for Normalstangen f. Eks. ved en Solenoide og et Kompasmagnetometer, derpaa den tilsvarende Kurve for Prøven P_f. For Normalen er den korrekte Kurve N_r given. Ved den antydede Sammenligning vilde vi nu beregne den »rigtige Værdi« for Prøvens Magnetiseringsintensitet simpelthen ved at multiplicere Normalens korrekte Intensitet med Forholdet mellem Prøvens og Normalens falske Værdier I'_P og I'_N i Fig. 73 eller vel snarere med Forholdet mellem de tilsvarende Udslag paa Magnetometret. Den heri liggende Forudsætning kan udtrykkes analytisk ved

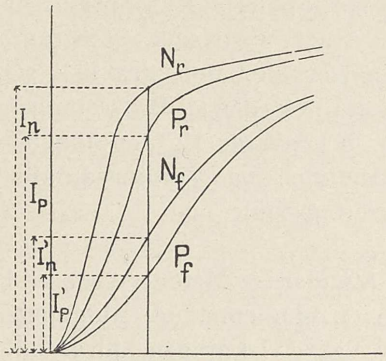

Fig. 73.

$$\frac{I_P - I'_P}{I_P} = \frac{I_N - I'_N}{I_N}$$

altsaa sagt i Ord ved, at Fejlen ved Prøve og Normal er samme Brøkdel af den rigtige Intensitet. Forudsætningen vil i Almindelighed ikke holde Stik, dersom Intensiteterne for samme magnetiserende Kraft er meget forskellige, altsaa naar Normalens Materiale adskiller sig væsentligt fra Prøvens. Den tør heller ikke paaregnes opfyldt, hvis Prøve og Normal er af væsentlig forskellig Form og Dimension. Er derimod Dimensionerne ens, hvad i Almindelighed let realiseres, og er dertil Materialet væsentligt af samme Art i Prøvestang og Normal, maa Forudsætningen med Tilnærmelse være opfyldt og Fejlen kunne elimineres ad den antydede Vej.

Ligesom ved de ovenfor omtalte »absolute« Maalemetoder har man ogsaa i Praksis ved de sammenlignende forladt den aabne magnetiske Kreds. Vi skal antyde et Par Maader,

hvorpaa Sammenligningen er realiseret ved lukkede magnetiske Kredse. Ewing har bygget en Slags magnetisk Wheatstones Bro Fig. 74. Den bestaar af en magnetisk Kreds, dannet af Prøvestangen X og Normalen N forbundne ved to svære Jærnstykker I. Ud fra disse gaar to Horn h, d. v. s. Jærnbøjler. Mellem Enderne af disse er en Magnetnaal K anbragt. Metoden bestaar nu i, at man varierer paa den magnetomotoriske Kraft omkring den ene Halvdel af Systemet, til Magnetnaalen stiller sig paa Nul som Tegn paa, at ingen Kraftlinier gaar ud af Kredsen. Naar det er Tilfældet, maa den magnetomotoriske Kraft i hver Halvdel netop være tilstrækkelig til at drive det tilstedeværende Kraftlinieantal N gennem den paagældende Halvdels Modstand. Denne er først og fremmest at søge i Prøvestang — resp. Normal — dernæst i de to Sammenstødssteder i hver Halvdel og endelig for en yderst ringe Dels Vedkommende i de to Halvdele af II. Sættes den magnetiske Modstand i Prøvestangen lig R_X i Normalen lig R_N, kaldes den resterende Modstand paa X-Siden r_X paa N-Siden r_N og betegnes den magnetomotoriske Kraft paa de to Sider henholdsvis ved M_X og M_N, haves altsaa:

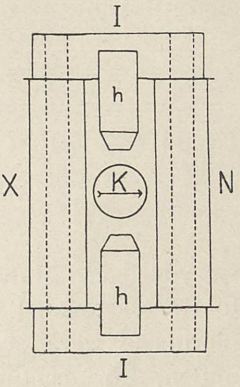

Fig. 74.

$$M_X = N\,(R_X + r_X)$$

$$M_N = N\,(R_N + r_N)$$

idet N er Kraftliniestrømmen. Dersom Magnetiseringsstrømmene betegnes ved i_X og i_N, Vindingsantallene ved v_X og v_N, Permeabiliteterne af Stængerne ved μ_X og μ_N, Længderne ved l_X og l_N samt endelig Tværsnittene ved S_X og S_N, haves:

$$M_X = \frac{4\pi}{10}\, i_X\, v_X,\quad M_N = \frac{4\pi}{10}\, i_N\, v_N$$

$$R_X = \frac{l_X}{\mu_X\, S_X}\quad ,\quad R_N = \frac{l_N}{\mu_N\, S_N}$$

Ved Division af Ligningerne ovenfor faas herefter

$$\frac{l_X}{\mu_X S_X} : \frac{l_N}{\mu_X S_N} = \frac{i_X v_X}{i_N v_N} \cdot \left(1 - \frac{r_X}{R_X} + \frac{r_N}{R_N}\right)$$

Er nu $l_X = l_N$, $S_X = S_N$, hvad man vil tilstræbe, bliver:

$$\frac{\mu_n}{\mu_X} = \frac{i_X v_X}{i_N v_N} \left(1 - \frac{r_X}{R_X} + \frac{r_N}{R_N}\right)$$

Er yderligere Materialerne i X og N nogenlunde ens, vil de to Korrektionsled i højre Side med tilsvarende Grad af Tilnærmelse være ens og følgeligt i det væsentlige hæve hinanden. Forudsætningen for Metoden er, at de praktisk set bliver lige store. Holder dette Stik, bliver:

$$\frac{\mu_X}{\mu_N} = \frac{i_N v_N}{i_X v_X}$$

d. v. s. Permeabiliteterne forholder sig omvendt som Ampèrevindingsantallene. De vil forholde sig som Strømmene, naar v_N er lig v_X. Er i_X lig med i_N, forholder de sig som Vindingsantallene. I Ewings Apparat er det faktisk Vindingsantallet, der reguleres ind.

En anden Maalemetode grundet paa Maxwells Metode for Sammenligning af to gensidig Induktioner er uddannet af Firmaet Siemens & Halske. Normal og Prøve befinder sig

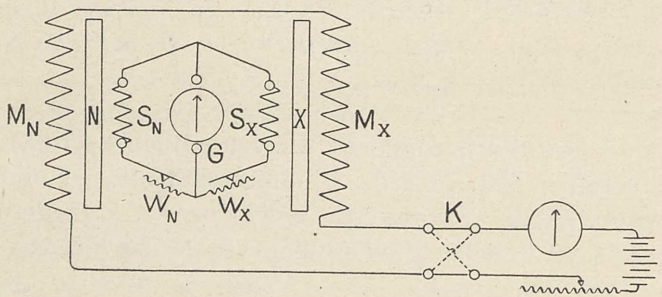

Fig. 75.

her i hver sin af to ens Magnetiseringsspoler M_N og M_X Fig. 75 omgivne henholdsvis af de to ligeledes ens Induktions-

spoler S_N og S_X. Disse indskydes i et Brosystem, der foruden S_N og S_X indeholder de to regulerbare Modstande W_N og W_X samt Galvanometret G. Sendes samme Strøm gennem M_N og M_X og vendes den ved Kommutatoren K, vil Galvanometret forblive i Ro, saafremt Modstandene W_N og W_X forholder sig som Forandringerne i Kraftlinieantallene gennem S_N og S_X. Man tilvejebringer ved Regulering af W_X denne Tilstand og har da

$$\frac{B_N Q_N}{B_X Q_X} = \frac{W_N}{W_X}$$

hvor Q_N og Q_X er Tværsnittene af henholdsvis N og X, og hvor B_N og B_X er de ved Magnetiseringen frembragte Induktioner. Sørger man for, at Q_N er lig med Q_X, faas:

$$B_X = B_N \cdot \frac{W_X}{W_N}$$

B_N faas fra Normalens Certifikat. Modstanden W_N stilles ind paa en Værdi, der, hvad Cifrene angaar er lig B_N. Naar W_X derpaa er reguleret ind angiver Aflæsningens Cifre ligefrem B_X. Metoden er derved, som det ses, gjort direkte visende. Forudsætningen for den er den ovenfor fremsatte, at den fra Vekselvirkningen mellem Jærn og Felt hidrørende Fejl praktisk set udgør samme Brøkdel af Induktionerne ved Prøve og Normal. Siemens & Halske har uddannet Metoden baade for stangformet Prøve og Normal i aabne Spoler og ved Undersøgelse af Jærnblik for Prøve og Normal i Form af Strimler, samlede til den firkantede Ramme i Ebsteins Apparat, d. v. s. til en lukket magnetisk Kreds.

Ewings Differensmetode. En typisk Fremgangsmaade for Elimination af Fejlen er endelig anvendt af Ewing i hans Differensmetode, ved hvilken han skaffer sig Normalstænger til Anvendelse i sin Bro for magnetisk Sammenligning. (Se ovenfor.) To Stænger af det Materiale, der skal undersøges forbindes ved to svære Jærnstykker $I\,I$ i Fig. 76. Afstanden mellem disse gøres lig 4π cm., og Stængerne omgives paa

hele denne Længde af jævnt viklede Spoler, indeholdende hver 100 Vindinger. Den magnetiserende Kraft, hvormed man da har at regne, bliver følgelig

$$H_0 = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{I.\,100}{4\pi} = 10\,I.$$

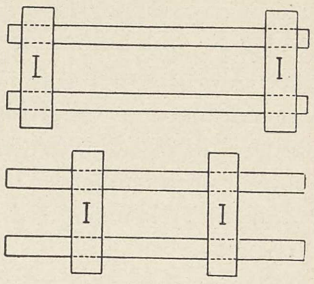

Fig. 76.

Om Stængerne er der endvidere lagt to Spoler, saa at den magnetiske Induktion kan maales ved ballistisk Galvanometer. Først optages nu en Magnetiseringskurve ved det nævnte System. Derpaa forkortes Afstanden mellem *II* til det halve, efter at de først anvendte Magnetiseringsspoler er erstattede med halvt saa lange, men lige saa tæt viklede. En ny Magnetiseringskurve optages herefter. Lad denne være Kurven 2 i Fig. 77, naar 1 er den først optagne, saa faas den rigtige Magnetiseringskurve under visse Forudsætninger ved at forskyde 1 lige saa langt i Vejret, som 2 er forskudt nedad i Forhold til 1. *a* vil altsaa være et Punkt af den rigtige Kurve, naar *ab* er lig med *bc*. Forudsætningerne ligger udtrykt i følgende Teori. Kaldes den magnetomotoriske Kraft ved første Prøve *M*, Kraftlinieantallet, den frembringer, N_1, Modstanden i Jærnstangen *R* og i to af Overgangene *r*, bliver

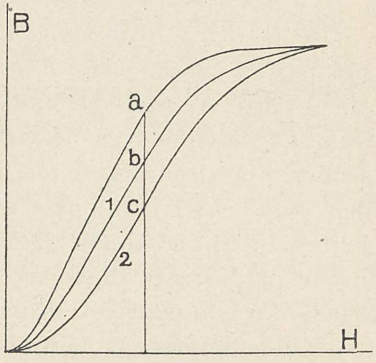

Fig. 77.

$$M = N_1\,(R + r), \text{ hvoraf } N_1 = \frac{M}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

For andet Forsøg faas tilsvarende

$$M = N_2\left(\frac{R}{2} + r\right), \text{ altsaa } N_2 = \frac{M}{R}\left(1 - \frac{2r}{R}\right).$$

Endelig vilde vi for en Kreds, hvor r er lig Nul, have

$$M = N_0 \, R.$$

Heraf faas: $N_0 - N_1 = N_1 - N_2$, og derfor ogsaa $B_0 - B_1 = B_1 - B_2$, naar vi ved B betegner Induktionen.

Som det ses forudsætter dette, dels at Overgangsmodstanden ikke forandres ved Flytning af Jærnstykkerne, dels, at Modstanden i den halve Længde ved det andet Forsøg simpelthen kan sættes lig $\frac{R}{2}$, til trods for at Kraftliniestrømmen ikke er ganske den samme som før.

Opgaver.

Opg. 1. Hvilken Indflydelse har Vægtstangens Belastning ved Maaleobjekt og Normal. Hvilke er de almindelige Forholdsregler mod Indflydelsen? (Tilbagevirkning af Maaleobjektet (og Normalen) paa Systemet).

Opg. 2. Man kunde tænke sig at bestemme et Elektroskops egen Kapacitet C_X ved at give Elektroskopet en vis Ladning og iagttage den tilsvarende Spænding V_1 samt derefter forbinde Systemet med et Legeme med kendt Kapacitet C_n f. Eks. en Kugle — og iagttage den Spænding V_2, Elektroskopet nu viste. C_X skulde da være bestemt ved

$$C_X = C_n \cdot \frac{V_2}{V_1 - V_2}$$

Hvilke Fejlkilder rummer imidlertid denne Metode, og hvorledes modvirkes de? (Vekselvirkning mellem Systemets Dele).

Opg. 3. Hvorfor maa alle Induktionsspoler (med Undtagelse af Koblingsspolerne) holdes fjærnet fra hinanden ved Maalinger med elektriske Svingningskredse? (Vekselvirkning mellem Systemets Dele).

KAP. X.

MAALINGENS TEORI. — IAGTTAGEREN.

Det teoretiske og det faktiske System. Vi vil i dette Kapitel, hvormed vi afslutter vor Fremstilling, rette vor Opmærksomhed paa Maalingens Teori. Derved faar vi Lejlighed til at gøre en Betragtningsmaade gældende, som er egnet til at uddybe vor Forstaaelse af Maalingens Væsen. Ved Maalingen har vi — saaledes kan vi se paa Sagen — at gøre med to Maalesystemer. Det ene er det faktiske System, det andet er det, Teorien afbilder, det teoretiske. Maalingens Fejl og Usikkerhed betegner henholdsvis ensidig og svingende Afvigelse mellem de to Systemer. Da det teoretiske System er et ganske bestemt Idealsystem, indenfor hvilket der ingen Svingninger tænkes at foregaa, er Maalingens Usikkerhed derfor altid at søge i Svingninger i det faktiske Systems Egenskaber. Den ensidige Afvigelse mellem de to Systemer vil man derimod efter Omstændighederne snart tilskrive det faktiske snart det teoretiske System, og man vil fjærne Divergensen enten ved at ændre det ene eller det andet System altsaa enten ved at afpasse det faktiske System efter Teorien eller Teorien efter det faktiske System. Den her udviklede Betragtningsmaade skal nu belyses ved nogle Eksempler.

Spejlaflæsningens Teori. Ved den almindelig objektive Spejlaflæsning bestaar det faktiske System af den retliniede Skala og Lysviseren. Kaldes Udslagsvinklen Θ, Skalaens Afstand fra Viserens Akse (Spejlet) a og er Udslaget aflæst paa Skalaen e benyttes sædvanligvis følgende Teori

$$2\,\Theta = \frac{e}{a}$$

Det System Teorien afbilder adskiller sig fra det virkelige ved at have en cirkulær Skala med Radius a i Stedet for det faktiske Systems retliniede.

Afvigelsen mellem de to Systemer er en Kilde til Fejl ved Maalingen, og denne Fejlkilde vil man i Almindelighed skrive paa Teoriens Regning ikke paa det faktiske Systems. Dette sidste maa nemlig tages som givet og kan ikke vel ændres. Derimod kan Fejlen let fjærnes ved en Ændring af Teorien eller, om man vil, derved at man bringer det teoretiske System til nøjere at falde sammen med det faktiske. Det er det, man gør, naar man til den simple Teori føjer et Korrektionsudtryk, eller naar man retter den direkte Iagttagelse ved en Korrektion.

Den fuldkomne Teori for det faktiske System vilde være

$$tg\, 2\,\Theta' = \frac{e}{a}$$

eller

$$\Theta' = \frac{1}{2}\, arc\, tg\, \frac{e}{a}$$

En tilnærmet Teori, men dog en, der kommer de faktiske Forhold nærmere end $\Theta = \frac{e}{2\,a}$, faas ved at udvikle $arc\, tg\, \frac{e}{a}$ i Række og af Rækken medtage de to første Led. Teorien bliver da

$$\Theta' = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{a} - \frac{e^3}{3\,a^3}\right)$$

og det er denne, der i Praksis benyttes, hvor $\Theta = \frac{e}{2\,a}$ ikke slaar til. Den bruges paa følgende Maade. Man sætter

$$\Theta' = \frac{e + h}{2\,a}$$

hvor h altsaa er $-\frac{e^3}{3\,a^2}$

For h har man herefter beregnet Tabeller, der naturligvis maa have »dobbelt Indgang«, idet a i Almindelighed vil være forskellig fra System til System.

Den talmæssige Korrektion er altsaa efter den Betragtnings-

maade, vi her anlægger, en Afpasning af det teoretiske System efter det faktiske. Den mekaniske Korrektion, vi ovenfor har lært at kende — Nulpunktsrettelsen ved Westoninstrumentet — Indstilling af den optiske Akse i Kathetometrets Kikkert o. s. v. — betegner omvendt en Afpasning af det faktiske System efter Teorien. En saadan Afpasning har man ogsaa bragt i Anvendelse ved Spejlaflæsningen, idet man har benyttet Skalaer bøjede efter en Cirkel af Radius a. Denne Skalaafstand maa da ved Brugen afpasses med en vis Tolerans, som det ikke er vanskeligt at bestemme ved et Overslag.

Afpasning af Maalingens Teori for en given Tolerans ved Benyttelse af Rækkeudvikling. Teorien for den forlængede Wheatstones Bro. I vor Fremstilling gaar vi som paapeget i Indledningen ud fra, at Midlerne er givne. Til Midlerne for Maalingen hører nu ikke alene Maaleredskaberne, men ogsaa Maalingens Teori. Uddannelsen af begge disse Midler er det, vi tænker paa, naar vi taler om Uddannelsen af Maalemetoden. Imidlertid kan Teorien ikke altid gives saaledes, at den saa nøje, som Maalingens Tolerans i og for sig kræver det, slutter om de faktiske Forhold. Nogen Afpasning er ofte nødvendig, og den talmæssige Korrektion kan altsaa betragtes som en saadan Afpasning. I mange Tilfælde giver man nu ved Anvendelse af Rækkeudvikling Teorien en saadan Form, at den blot ved passende Valg af Antallet af Led, der medtages, kan bringes til at slutte sig med hvad Tolerans, det skal være, om det faktiske System. I Virkeligheden kunde Spejlaflæsningsteorien ovenfor tages som et Eksempel paa en saadan Teori. Der vil dog være Grund til at supplere dette Eksempel med et lidt mere sammensat.

For at maale stærke magnetiske Felter kan man i disse indføre en Spiral af Wismuttraad og maale Traadens Modstand W. I Forvejen maa Modstanden W_0 i Feltet 0 være maalt. Af Modstandsforøgelsen $\frac{W-W_0}{W_0}$ findes da det til W

svarende Felt ved Hjælp af en Kurve, der følger med hver Wismutspiral.

I Virkeligheden gælder det altsaa om at maale $\frac{W-W_0}{W_0}$. Dette kan ske ved Hjælp af en Wheatstones Traadbro som den i Fig. 78 viste. I denne Figur betyder W Wismutspiralen, r_0 en Modstand af meget nær samme Størrelse som W_0, r_1 og r_2 endelig to Modstande indskudt for Enderne af Maaletraaden. De bevirker, at Brokombinationen bliver mere følsom, idet Kontakten for en vis Modstandsforøgelse $\frac{W-W_0}{W_0}$ skal forskydes et længere Stykke, end naar ingen Modstande er anbragt for Enderne af Maaletraaden. Dette ses let af Teorien for Maalingen, som vi nu vil udvikle.

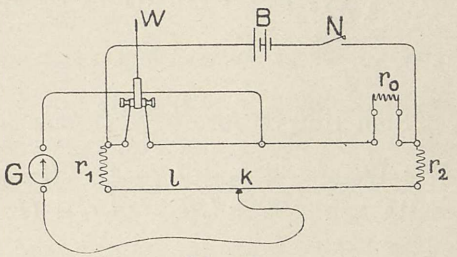

Fig. 78.

Vi har for en vilkaarlig Værdi af W

$$W = \frac{r_1 + lg}{r_2 + (L-l)g} \cdot r_0,$$

idet g er Modstanden pr. Længdeenhed i Maaletraaden. W er altsaa en Funktion af l. Denne Funktion egner sig ikke umiddelbart til Beregning af $\frac{W-W_0}{W_0}$; vi udvikler den derfor i Række. Lad os antage, at Kontakten $W = W_0$, staar ved l_0, da kan vi skrive Rækken som

$$W = W_0 + \frac{\delta W}{\delta l}_0 (l-l_0) + (\frac{\delta^2 W}{\delta l^2})_0 \frac{(l-l_0)^2}{1.2} + (\frac{\delta^3 W}{\delta l^3})_0 \frac{(l-l_0)^3}{1.2.3} +$$

idet vi ved at anbringe et 0 ved Differentialkvotienterne betegner, at vi i Udtrykkene for disse skal give l Værdien l_0. For Differentialkvotienterne faar vi da:

$$W_0 = r_0 \cdot \frac{r_1 + l_0 g}{r_2 + (L-l_0)g}$$

$$\left(\frac{\delta W}{\delta l}\right)_0 = r_0 g (r_1 + r_2 + Lg) \cdot \frac{1}{(r_2 + (L - l_0) g)^2}$$

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta l^2}\right)_0 = 2\, r_0 g^2 (r_1 + r_2 + Lg) \cdot \frac{1}{(r_2 + (L - l_0) g)^3}$$

$$\left(\frac{\delta^3 W}{\delta l^3}\right)_0 = 2 \cdot 3\, r_0 g^3 (r_1 + r_2 + Lg) \cdot \frac{1}{(r_2 + (L - l_0) g)^4}$$

o. s. v.

Som Udtryk for $\frac{W - W_0}{W_0}$ faas altsaa en Rækkeudvikling

$$\frac{W - W_0}{W_0} = \frac{r_1 + r_2 + Lg}{r_1 + l_0 g} \cdot \left[\frac{(l - l_0) g}{r_2 + (L - l_0) g} + \frac{((l - l_0) g)^2}{(r_2 + (L - l_0) g)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{((l - l_0) g)^3}{(r_2 + (L - l_0) g)^3} + \cdots\right] = \frac{r_1 + r_2 + Lg}{r_1 + l_0 g} \cdot \frac{(l - l_0) g}{r_2 + (L - l_0) g}$$

$$\cdot \left[1 + \frac{(l - l_0) g}{r_2 + (L - l_0) g} + \left(\frac{(l - l_0) g}{r_2 + (L - l_0) g}\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

Standser vi i denne Rækkeudvikling, der altid vil være konvergent, ved det n^{te} Led $\left(\frac{(l - l_0) g}{r_2 + (L - l_0) g}\right)^{n-1}$, begaar vi en Fejl, der kan skrives

$$F = y^n + y^{n+1} + y^{n+2} + \cdots\cdots = y^n (1 + y + y^2 + \cdots)$$

naar

$$y = \frac{(l - l_0) g}{r_2 + (L - l_0) g}$$

For F faaes altsaa

$$F = y^n \cdot \frac{1}{1 - y}$$

Fejlen, vi begaar, vil altsaa blive lidt større end det næste Led i Rækken. Ved et Maalesystem stillede Talværdierne sig omtrent saaledes

$$r_1 = 3{,}5,\ r_2 = 4{,}5,\ g = ca.\ 0{,}02\ Ohm$$
$$l_0 = 20,\ l = 80,\ L = 100$$

Altsaa er

$$y = \frac{60 \,.\, 0{,}02}{4{,}5 + 80 \,.\, 0{,}02} = ca. \frac{1}{5}$$

Standser vi ved det andet Led, begaar vi en Fejl, der er 1/20. Standser vi ved det tredie, fjerde, femte Led, bliver Fejlen henholdsvis $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{500}$, $\frac{1}{2500}$. Er den opnaaelige Sikkerhed eller den Sikkerhed, man ønsker, at Maalingen af $\frac{W - W_0}{W_0}$ skal have, 1 %, maa 4de eller i det mindste 3die Led medtages. Derimod vilde det være urimeligt at medtage 5te eller endog flere Led. y er beregnet for den største Værdi, l antager under Maalingen. For mindre Værdier af $l - l_0$ er Rækken endnu stærkere konvergent. Teorien antager altsaa i det her betragtede Tilfælde Formen

$$\frac{W - W_0}{W_0} = \frac{r_1 + r_2 + Lg}{r_1 + l_0 g} \,.\, y(1 + y + y^2 + y^3) \qquad \text{eller}$$

$$\frac{W - W_0}{W_0} = \frac{r_1 + r_2 + Lg}{r_1 + l_0 g} \,.\, \frac{fg}{r_2 + (L - l_0) g} \left[1 + \frac{fg}{r_2 + (L - l_0) g} + \frac{f^2 g^2}{(r_2 + (L - l_0) g)^2} + \frac{f^3 g^3}{(r_2 + (L - l_0) g)^3}\right]$$

naar vi ved f forstaar den iagttagne Forskydning regnet ud fra Begyndelsesstillingen l_0. Som vi ser, kan vi betragte $\frac{W - W_0}{W_0}$ som en Funktion af f, og vi kan for en bestemt Opstilling beregne en Kurve, der til Abscisse har f, til Ordinat $\frac{W - W_0}{W_0}$, og som giver os denne sidste Størrelse, naar f er iagttaget. Vi beregner den ved i højre Side af vort Udtryk at indsætte en Række simple Værdier 10, 20, 30 . . . . 80 for f og finde de tilsvarende Værdier af $\frac{W - W_0}{W_0}$.

Specifikationer for Brugen af en given Teori. Afpasning af Systemet efter Teorien. Teorien for Bestemmel-

sen af Dæmpning ved Resonansforsøg. I mange Tilfælde maa man i den praktiske Maaleteknik tage Teorien som given. Det vil sige, det faktiske System maa, hvis en Divergens bestaar, søges afpasset efter det teoretiske. For at man skal kunne afgøre, om det faktiske System falder sammen med det teoretiske, maa det sidstes Egenskaber naturligvis ligge klart for Dagen eller sagt med andre Ord, Forudsætningerne for Teorien maa være givne. Men dette er i og for sig ogsaa den eneste nødvendige Betingelse for den rationelle Anvendelse af Maalingens Teori. Det er altsaa principielt ikke nødvendigt, at Brugeren har Kendskab til, hvorledes Teorien udledes, selv om dette Kendskab naturligvis er det bedste Middel til at sikre den rigtige Brug. Vi gengiver nu en Teori som den her antydede og gør derved Rede for Betingelserne for Brugen af den eller gengiver, hvad man kunde kalde Specifikationerne for dens Anvendelse.

Den Teori, vi vil betragte, er Bjerkness-Wiens Teori for Bestemmelsen af Dæmpningen i elektriske Svingningskredse ved Resonansforsøg. Vi beskriver først saa kort som muligt en Maaling efter denne Teori og gengiver Teoriens Udtryk for Bestemmelsen af Dæmpningen.

Lad I i Fig. 79 være den Kreds, hvis Dæmpning skal bestemmes. Den tænkes at bestaa af en Gnistbane G, en Kapacitet C_1 og en Selvinduktion L_1. Den undersøges ved Hjælp af en anden elektrisk Svingningskreds II, induktivt og svagt koblet til I, bestaaende af en kendt variabel Kapacitet C_2 samt en kendt Selvinduktion L_2. Tillige indeholder den et Maaleapparat til Bestemmelse af Strømeffekten induceret fra I, bestaaende af et Termoelement T i Forbindelse med et ret følsomt Galvanometer A. Med denne Opstilling udføres et saakaldt Resonansforsøg, sammensat af en Række Iagttagelser af

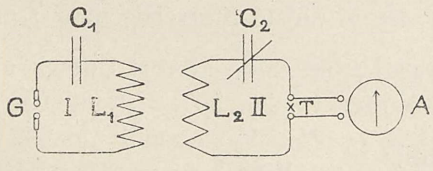

Fig. 79.

Strømeffekten i II eller blot Galvanometrets Udslag α svarende til en Række Værdier af Kapaciteten C_2 omkring den, for hvilken Svingningskredsen II er afstemt efter I, d. v. s. har samme Svingningstal som denne. Afbildes disse Iagttagelser grafisk, idet Kapaciteten C_2 tages til Abscisse Udslaget til Ordinat, faas en Kurve, Resonanskurven, af den regelmæssige, symmetriske Form, der er antydet i Fig. 80. Under visse bestemte Forudsætninger, som det altsaa her er Opgaven at klarlægge og diskutere, skulde Summen af de logaritmiske Decrementer $\delta_1 + \delta_2$ for den primære og sekundære Kreds kunne beregnes af Formlen

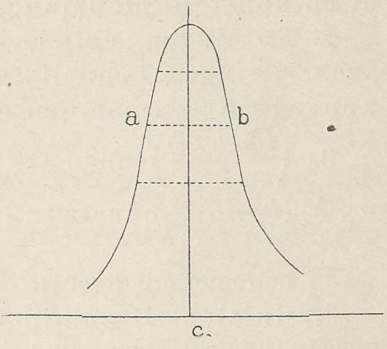

Fig. 80.

$$\delta_1 + \delta_2 = \pi \cdot \frac{C_0 - C}{C_0} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_m - \alpha}}$$

Her er $C_0 - C = 2$ Gange Korden ab med Ordinaten α. Man udmaaler altsaa Længden af Korden i en eller flere tildels vilkaarlige Højder α samt Koordinaterne til Resonanskurvens Toppunkt (Resonanspunktet) og har da $\delta_1 + \delta_2$.

Dersom baade δ_1 og δ_2 ønskes bestemt, foretages herefter endnu et Forsøg, ved hvilket der i den sekundære Kreds indsættes en Modstand R af passende Form og Størrelse (uden Selvinduktion og Kapacitet). Derved faar den sekundære Kreds' Dæmpning en vis Tilvækst δ', der kan beregnes af

$$\delta' = \frac{R}{2n L_2}$$

og Udslaget svarende til C_0 gaar ned til α'_m.

Sættes $\delta_1 + \delta_2 = \delta$, beregnes δ_2 da af Formlen

$$\delta_2 = \delta' \frac{\alpha'_m \left(1 + \frac{\delta'}{\delta}\right)}{\alpha_m - \alpha'_m \left(1 + \frac{\delta'}{\delta}\right)}$$

hvorefter δ_1 faas ved at trække δ_2 fra δ.

Forudsætningerne for Bjerkness' Teori er følgende:

1. Den dæmpende Virkning af Gnisten maa kunne betragtes som adæquat med den dæmpende Virkning af en konstant Modstand.

2. Koblingen mellem de to Kredse maa være saa svag, at ingen kendelig Tilbagevirkning fra den sekundære Kreds paa den primære finder Sted.

3. $\left(\frac{(\delta_1 + \delta_2)}{2}\right)^2$ maa være forsvindende mod $(2\pi)^2$.

4. $(C_0 - C)^2$ maa være lille mod $(2C_0)^2$.

Vi betragter nu hver af disse Forudsætninger for sig.

1. Gnistens Dæmpning. Den første Forudsætning, der angaar Gnistens Dæmpning, betegner paa en Maade en uovervindelig Vanskelighed ved Brugen af Teorien. Thi Gnisten er ikke adæquat med en konstant Modstand, og Gnisten, der udgør en Del af Maaleobjektet, nemlig Svingningskredsen I maa lige saa vel som Teorien tages som givet. Fejlen maa siges at ligge hos Teorien, ind i hvilken det ikke er lykkedes at drage de ret komplicerede Forhold, der gør sig gældende i Gnisten under de elektriske Svingninger. I Virkeligheden er Dæmpningen (δ_1) under disse slet ikke konstant. Heraf følger, at Resonanskurven heller ikke giver samme Værdi for $\delta_1 + \delta_2$, naar forskellige Korder $a\,b$ benyttes, selv om vi holder os indenfor det ved Betingelsen 4 givne Interval. Ved Udmaaling paa en Resonanskurve fandtes saaledes følgende tilsvarende Værdier af Kordens Ordinat α og Dæmpningssummen

$\alpha = 11$	$\delta_1 + \delta_2 =$	0.188
— 9	—	0.175
— 7	—	0.159
	$(\delta_1 + \delta_2)_g =$	0.174

Hvad man da faktisk gør til Genstand for Maaling er Gennemsnitsværdien, som Udmaaling ved Korder fordelt jævnt over Resonanskurvens brugbare Del giver for Størrelsen $\delta_1 + \delta_2$ bestemt ved Bjerkness Udtryk, idet man betragter

denne Korde som et Maal for Gennemsnitsdæmpningen under de elektriske Svingninger. Det skal iøvrigt her antydes, at ogsaa andre Forhold end Gnistens kan give Anledning til en Divergens mellem System og Teori. Det gælder saaledes først og fremmest Dæmpningsaarsager som det dielektriske Energitab i Kondensatoren C_1 og Tabet ved Gnistren f. Eks. langs Randen af de Leydnerflasker, hvoraf C_1 ofte er bygget sammen.

2. Koblingen. Som Maal for Koblingen kan tages Koblingskoefficienten $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, hvor M er den virksomme gensidige Induktionskoeficient mellem de to Kredse, L_1 og L_2 Selvinduktionen henholdsvis i Kreds *I* og *II*.

Bjerkness var klar over, at Koblingen skulde være saa svag, at Tilbagevirkningen paa den primære Kreds fra den sekundære var forsvindende, men han har ikke teoretisk undersøgt, hvor lille k maa være, for at denne Betingelse skal være opfyldt.

Klarlæggelsen af dette Spørgsmaal skyldes W. Wien. Wien kommer til det Resultat, at k^2 maa være forsvindende imod $\frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{\pi^2}$. Er denne Betingelse ikke opfyldt, bliver Resonanskurven for flad, og $\delta_1 + \delta_2$ maales for stor. Hvor stor Fejlen kan blive, giver følgende Tal en Forestilling om. Naar

$$\delta_1 = 0{,}200, \delta_2 = 0{,}010, \text{ giver Teorien for}$$
$$k = 0, \quad 0{,}005, \quad 0{,}010, \quad 0{,}020,$$
$$\delta_1 + \delta_2 = 0{,}210, \quad 0{,}222, \quad 0{,}254, \quad 0{,}328.$$

I sidste Tilfælde vil $\delta_1 + \delta_2$ altsaa maales over $50\,\%$ forkert, men her er rigtignok ogsaa $k^2 = 0{,}0004$, d. v. s. endog større end $\frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{\pi^2}$, som er 0,0002.

Wien har prøvet sin Teori for Koblingsfejlen experimentalt. Ved Forsøg med Kredse uden Gnist finder han den fuldtud bekræftet. For Kredse med Gnistbane gælder, at Fejlen paa Bestemmelsen af $\delta_1 + \delta_2$ ikke naar det Beløb, den skulde

efter Teorien. Wien finder altsaa som venteligt en Deformation af Resonanskurven; ved meget fast Kobling bliver denne særlig ejendommelig, idet Kurven spidser meget stærkt til.

Hvad der er af størst Betydning er imidlertid, at Betingelsen k^2 forsvindende mod $\frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{\pi^2}$ i ethvert Tilfælde kan benyttes som Rettesnor for Bestemmelsen, hvis det da er muligt at maale eller beregne k. I modsat Fald maa det eksperimentalt prøves, om Koblingen er tilstrækkelig løs, hvad der kan ske ved at optage en ny Resonanskurve med væsentligt svagere Kobling end den givne. Den først optagne Resonanskurve maa da ikke i sin Form afvige kendeligt fra den nye. Gør den det, maa svagere Kobling end først anvendt benyttes, det faktiske System altsaa afpasses efter Teorien.

3. Størrelsen af Dæmpningen. Tredie Forudsætning angaar Dæmpningens Størrelse. Bjerkness' Teori gælder kun, naar Dæmpningssummen ligger under Grænsen bestemt ved

$$\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)^2 \text{ forsvindende mod } (2\pi)^2.$$

I Eksemplet ovenfor er $\delta_1 + \delta_2 = 0{,}174 \backsim 0{,}2$ altsaa $\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)^2 = 0{,}01$, hvad der ved den her betragtede Maaling er ganske forsvindende mod $(2\pi)^2$.

4. Den anvendelige Del af Resonanskurven. Bjerkness Teori gengiver kun en vis Del af den faktiske Resonanskurve, og kun denne Del kan derfor anvendes ved Bestemmelsen af Dæmpningssummen. Det brugbare Interval er givet ved Betingelsen

$$(C_0 - C)^2 \text{ forsvindende mod } (2\,C_0)^2.$$

Tilstræbes en Nøjagtighed paa ca. 1 %, maa

$$\left(\frac{C_0 - C}{2\,C_0}\right)^2 < \frac{1}{100}$$

altsaa

$$\frac{C_0 - C}{C_0} < \frac{1}{5}$$

I dette Tilfælde kan altsaa kun den Del af Resonanskurven bruges, der ligger indenfor Abscisseintervallet $\frac{4}{5} C_0 - \frac{6}{5} C_0$. Ved den ovenfor antydede Bestemmelse stillede Forholdene sig ved den mindst gunstige Maaling saaledes:

$$C_0 = 11{,}4 \cdot C = 10{,}7 \text{ altsaa } \frac{C_0 - C}{2 C_0} = \frac{0{,}7}{22{,}8} \text{ og } \left(\frac{C_0 - C}{2 C_0}\right)^2 = \text{ca.} \frac{1}{1000}$$

Den her betragtede Betingelse for Teoriens Anvendelse er altsaa rigeligt fyldestgjort.

Kontrol af Overensstemmelsen mellem det faktiske System og Teorien. Den i det foregaaende betragtede Maaling frembyder Eksempler paa den Prøve af Overensstemmelsen mellem det faktiske System og Teoriens Forudsætninger, som Anvendelsen af en given Teori i næsten alle Tilfælde kræver. Vi vil nu til Slutning noget nærmere belyse denne Prøve. I mange Tilfælde kan den udføres ved et Overslag, i andre kræver den et Forsøg. Vi kan illustrere disse to Hovedtilfælde ved følgende Eksempler.

a. Anvendelsesomraadet for Teorien for den simple Linsemaaling. Ved Maaling af en Linses Brændvidde vil Bestemmelsen meget hyppigt kunne bygges paa den for »tynde Linser« gældende tilnærmede Teori

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{f} = \frac{1}{p}$$

hvor a betegner Afstanden fra »Spalten« til Linsens Midtpunkt, f Afstanden fra dette Punkt til Billedskærmen. Om denne Teori med den her givne Fortolkning er tilstrækkelig, afhænger paa den ene Side af Linsens Tykkelse paa den anden af den Nøjagtighed, der tilsigtes. Om vi i et givet Tilfælde tør anvende den, maa afgøres ved et Overslag over den Fejl, den kan give Anledning til. Vi stiller et saadant Overslag op for den af I afledede Bessels Metode, ved hvilken

man som bekendt fører Maalingen tilbage til Iagttagelse af Afstanden L mellem Spalte og Billedskærm samt af Afstanden M mellem de to Stillinger af Linsen, i hvilke denne giver et skarpt Billede af Spalten.

Den fuldstændigere Teori for Linsen kan, som det vil vides, skrives i samme Form som I, men a betyder da Afstanden fra Spalten (Lyskilden) til første Hovedplan f Afstanden fra anden Hovedplan til Billedskærmen. Betragter vi nu Fig. 81, der ved Hovedplanerne H_1 og H_2 gengiver Linsen i de to Stillinger mellem Spalte Sp og Skærm Sk, vil vi se, at mens den simple Teori, der antager H_1 sammenfaldende med H_2 giver

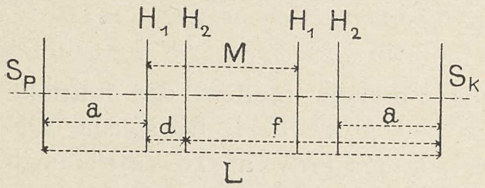

Fig. 81.

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} M &= f - a \\ L &= f + a, \end{aligned}$$

giver den fuldstændigere

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} M &= f - a \\ L &= f + a + d, \end{aligned}$$

hvor d er Afstanden mellem de to Hovedplaner. Fejlen, vi begaar ved Brugen af den simple Teori II i Stedet for III, er altsaa den, at vi regner L for lille. Vi kan let finde, hvor stærkt denne Fejl gør sig gældende i Bestemmelsen af p.

For p faas nemlig $\quad p = \dfrac{L^2 - M^2}{4L},$

hvoraf vi finder

$$\Delta p = \frac{L^2 + M^2}{4L^2} \Delta L, \qquad \text{og}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{L^2 + M^2}{L^2 - M^2} \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

Her skal vi nu sætte $\Delta L = -d$. Vi kan imidlertid først eliminere M^2 for at undersøge Fejlens Afhængighed af det valgte L ved en given Linse. Vi finder

$$M^2 = L^2 - 4Lp$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2L^2 - 4Lp}{4Lp} \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{L - 2p}{2p} \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{1 - 2p/L}{2p} \cdot \Delta L \cdot$$

Denne Ligning viser, at Fejlen teoretisk set altid vil gøre sig gældende. L maa nemlig mindst være 4 p. Den mindste Værdi antager Fejlen, naar $L = 4p$, den bliver da

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{4p} \cdot \Delta L = -\frac{1}{4p} d \cdot$$

Vi betragter som Eksempel en symmetrisk, positiv Linse (Brydningsforhold 1,5). I en saadan er $d = \frac{1}{3} t$, hvor t er Linsens Tykkelse. I hosstaaende Tabel er Fejlen, der begaaes ved Brugen af den simple Teori, angivet for Linser af forskellig Tykkelse, men med samme Brændvidde $p = 250$ mm. Tabellen er beregnet af

$$\frac{\Delta p}{p} = -\frac{1}{4p} d \text{ altsaa for det Tilfælde, at } L = 4p.$$

t	d	$100 \frac{\Delta p}{p} \cdot (-1)$
3 mm	1 mm	0,1 %
9	3	0,3
15	5	0,5
30	10	1,0
60	20	2,0
90	30	3,0

Af denne Tabel ses, at den simple Teori ved Maaling paa Linser op til 3 mm Tykkelse tillader os at udnytte Metodens Sikkerhed. Denne vil nemlig normalt være ca.

1—3 $^0/_{00}$. Dersom der kun kræves en Nøjagtighed af Maalingen paa ca. 1 $^0/_0$, kan vi bruge den simple Teori — og Bessels Metode — overfor Linser af indtil 3 cm' Tykkelse.

Bruger vi umiddelbart Bessels Metode ved Maaling af Linser paa f. Eks. 3 cm' Tykkelse, naar der tilstræbes en Nøjagtighed paa f. Eks. 1 $^0/_{00}$, maa Resultatet korrigeres. Korrektionen kan beregnes af Udtrykket for $\frac{\Delta p}{p}$, naar d kendes.

Er Linsens Brydningsforhold 1,5, bliver d lig $\frac{1}{3}t$. For en vilkaarlig Glassort er $d = t\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, hvor n er Brydningsforholdet. Korrektionen kræver altsaa et vist Kendskab til n og et desto nøjere Kendskab til denne Størrelse, jo tykkere Linsen er. Her opstaar da et nyt Problem: Hvor stor maa t være, naar Korrektionen skal blive sikker nok. Dette Spørgsmaals Besvarelse vil, naar Glassorten kendes (Crownglas, Flintglas), afhænge af, hvor stærkt Brydningsforholdet kan variere for Glas af den paagældende Art.

b. **Prøve af Indspændingen ved Bøjningsmetoden for Bestemmelse af et Materiales Elasticitetskoefficient.** Man kan bestemme et stangformet Materiales Elasticitetskoefficient ved Maaling af Bøjningspilen for en given Belastning. Derved kan man lade Stangen hvile løst paa to parallele Kiler og belaste den midt imellem disse, eller man kan spænde Stangen fast i den ene Ende og belaste den ved den frie Ende. Det er den sidste Metode, vi her vil betragte. Betegner x Afstanden fra Indspændingen til Punktet, hvor Nedbøjningen f maales, L Afstanden fra Indspændingen til Belastningspunktet, I Inertimomentet af Stangens Tværsnitsareal med Hensyn til en vandret Linie gennem Tværsnittets Tyngdepunkt, P Belastningen samt E endelig Elasticitetskoefficienten, er Teorien for Bestemmelsen

$$E = \frac{P \cdot L^3}{2\,I f} \cdot \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

Denne Teori bygger paa visse simplificerende Forudsætninger angaaende de Formforandringer, der finder Sted i Materialet under Prøven. Disse Forudsætninger har dog mindre Interesse, idet det ved Maalemetodens Uddannelse kan betragtes som godtgjort en Gang for alle, at Forudsætningerne er opfyldt i alle normale Tilfælde. Teorien rummer imidlertid ogsaa andre Forudsætninger, der maa prøves i det enkelte konkrete Tilfælde, og den vigtigste er ved den her betragtede Maaling den, der angaar Indspændingen. Teorien gælder naturligvis for absolut fast Indspænding. Spørgsmaalet bliver da, om Indspændingen ved det System, hvormed der netop arbejdes, kan betragtes som praktisk set fast. Dette maa prøves ved et Forsøg, ved hvilket man maaler Nedbøjningen i to eller flere væsentligt forskellige Afstande fra Indspændingspunktet. Gør ingen Forskel i Resultatet sig gældende, tør det sluttes, at Indspændingen er, som den skal være. En Eftergiven vilde nemlig give sig til Kende ved Værdier, der variered systematisk med Afstanden. Vi anfører en Prøve, som den her antydede, og Diskussionen af det Resultat, hvortil den førte.

Den Stang, hvis Elasticitetskoefficient skulde maales, var af Messing. Dens Tværsnit var rektangulært med en Højde 14,96 cm, en Bredde 14,95 cm. Belastningen, der benyttedes, var 1,982 kg. Vi betegner for et Øjeblik den iagttagne Bøjningspil ved f_a og den heraf beregnede Værdi for Elasticitets-

x	f_a	E_a	(x/f_a)
678,2	6,247	10160	108,6
608,5	5,290	10060	115,0
537,7	4,324	9980	124,3
470,6	3,493	9800	134,7
384,1	2,476	9630	155,2
399,1	1,623	9280	184,5
224,3	1,002	8760	223,9

koefficienten ved E_a. Sammenhørende Værdier af x, f_a og E_a vil da findes opført i foranstaaende Tabels tre første Kolonner.

I sidste Kolonne er anført Forholdet x/f_a, og Grunden hertil vil fremgaa af den Diskussion, som nu skal gengives.

Tabellen viser, at Resultatet bliver mindre og mindre, naar x aftager. Den viser i Virkeligheden ogsaa, at Fejlen bliver større og større, thi det maa betragtes som givet, at Elasticitetskoefficienten har en Værdi omkring 10000—12000. Resultatet aftager, som det ses, ikke proportionalt med Ændringen i x, men væsentligt hurtigere. Vi vil prøve, om dette Billede af Anomalierne ved Maalingen ikke skulde kunne forklares ved den simple Antagelse, at Indspændingen giver efter paa en Maade, der vilde svare til en Drejning af Stangen om Indspændingens Kant — ganske som om et Hængsel. Det ses straks, at denne Antagelse kvalitativt forklarer den hurtige Aftagen af Resultatet. Nedbøjningen f_a bestaar nemlig i Følge den af to Dele en, der er proportional med x, og som hidrører fra Stangens Drejning om Indspændingens Kant, og en anden, der er givet ved Teorien ovenfor. Forholdet mellem disse aftager stærkt med voksende x. Relativt bliver Fejlen altsaa mindre og mindre, jo længere vi gaar ud langs Stangen, — netop det, Tabellen viser. Vi vil nu imidlertid kvantitativt prøve denne Forklaring og kan da gøre det paa følgende Maade.

Den forkerte Elasticitetskoefficient E_a er fremkommen ved Formlen:

$$E_a = \frac{P L^3}{2 f_a I}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

Er vor Hypotese — Fejlen angaaende — rigtig, skulde den virkelige Elasticitetskoefficient beregnes ved en Formel, vi kommer til paa følgende Maade. Den iagttagne Nedbøjning er bestemt ved

$$f_a = \frac{P L^3}{2 E I}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] + C_0 x$$

en Formel, vi kan skrive

$$f_a = \frac{P L^3}{2 E I}\left[k\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right],$$

hvoraf

$$E = \frac{P L^3}{2 f_a I}\left[k\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

Mellem E_a og E bestaar da følgende Forbindelse

$$E_a = E - \frac{P L^2}{2 I} k \cdot \left(\frac{x}{f_a}\right)$$

Haves nu til Raadighed et Iagttagelsesmateriale som det ovenfor anførte bestaaende af sammenhørende Værdier for x, f_a og E_a, kan Rigtigheden af denne Formel og derved af Hypotesen prøves, idet man danner Værdierne for $\left(\frac{x}{f_a}\right)$ og derpaa grafisk afbilder E_a' Variation med denne Kvotient.

Iagttagelserne ovenfor blev behandlede paa den her antydede Maade, og det viste sig derved, at de Punkter, hvorved Værdisættene E_a, $\left(\frac{x}{f_a}\right)$ afbildedes, virkelig fordelte sig om en ret Linie, der af Ordinataksen afskar

$$E = 11350$$

Det afskaarne Stykke skulde efter Teorien for Forsøget netop repræsentere den rigtige Elasticitetskoefficient, og at den ovenfor anførte Værdi er den rigtige kan der ikke være Tvivl om. Elasticitetskoefficienten for den samme Stang blev nemlig ogsaa udmaalt ved den anden Bøjningsmetode, ved hvilken Stangen hviler over to Kiler. Denne Metode rummer ikke den her betragtede Fejlkilde, og den gav for E Værdien:

$$E = 11200$$

der ikke afviger mere fra den første, end at Forskellen kan forklares ved Bestemmelsernes Usikkerhed.

Med vort sidste Eksempel nærmer vi os stærkt Rammen, vi har sat for vor Fremstilling. Forsøg og Overvejelser, som de her betragtede, udgør Hovedelementerne i den praktiske Uddannelse af en ny Maalemetode. Imidlertid indses det, at snart enhver Maaling rummer noget nyt. Derfor bliver kontrollerende Forsøg og tilsvarende teoretiske Overvejelser et almindeligt Middel ogsaa for Maalingen med paa Forhaand givne Midler og den Maaling, for hvilken vi her har givet den almindelige Teknik.

Opgaver.

Opg. 1. Teorien for Bestemmelse af en Stangmagnets Moment M ved Hjælp af et Kompas vil under visse Betingelser kunne gives ved

$$M = h\,tg\,\alpha \cdot \frac{(a^2 - l^2)^2}{2a}$$ i første Hovedstilling, og

$$M = h\,tg\,\alpha \cdot (a^2 + l^2)^3$$ i anden Hovedstilling.

Her betegner:

h Jordfeltets Horizontalkomposant.
α Udslaget paa Kompasset.
a Afstanden af Stangmagnetens Midtpunkt fra Kompassets Midtpunkt.
$2l$ Polafstanden i Magneten.

Omform ved Rækkeudvikling Udtrykkene for en Tolerans af $^1/_2$ %, idet a = ca. 30 cm, l = ca. 7 cm.

Opg. 2. Til Bestemmelse af et Magnetometers Konstant kan det være praktisk at anvende en Spole eller Solenoide anbragt i første Hovedstilling i Forhold til Magnetometret. Naar Vindingslagets Tykkelse ikke er for stor i Forhold til Spolens Radius R, gælder for Kraften i Solenoidens Akse Udtrykket

$$K = \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{iN}{2t}\left[\frac{a+t}{\sqrt{R^2 + (a+t)^2}} - \frac{a-t}{\sqrt{R^2 + (a-t)^2}}\right]$$

idet i betyder Strømmen gennem Vindingerne, N disses Antal, $2t$ Spolens Længde og a Afstanden fra Spolens Midtpunkt til

Magnetometret. Dan ved Rækkeudvikling et praktisk Regneudtryk for Maaling med en Tolerans af ca. 1 $^0/_{00}$. $R = 1{,}5$ cm, $2t = 40$ cm, $a = 40$ cm.

Opg. 3. Anvendes et Kompas som Magnetometer ved Bestemmelse af en Stangmagnets Moment, vil Naalens Længde give Anledning til en Række Korrektioner, saafremt den simple Teori ovenfor benyttes. Denne forudsætter nemlig en meget lille Naal, idet Udtrykkene for $h \cdot tg\,\alpha$ giver Kraften i Magnetometrets Midtpunkt, mens Kraften faktisk virker i Kompasnaalens Poler.

Udled ved Rækkeudvikling Korrektionsudtryk for:

a. Den forskellige Afstand af Kompasnaalens Poler fra Magnetens Midtpunkt.
b. Den Kraftkomposant i Retning af Meridianen, som Naalens Længde og Udslaget giver Anledning til.
c. Den tilsvarende Ændring i Kraften vinkelret paa Meridianen.

Udtrykkene udledes under Forudsætning af en Kompasnaal med magnetisk Længde 3 cm og iøvrigt for de samme Forhold som i 1.

Opg. 4. Udtrykkene i Opg. 1 forudsætter, at Magnetens Poler ligger symmetrisk med Hensyn til Magnetens geometriske Midtpunkt. I Almindelighed tør man ikke regne med praktisk set fuldkommen Symmetri. Undersøg hvilken Indflydelse en Dissymmetri vil have, og hvor vidt dens Virkning kan elimineres blot ved at dreje Magneten 180^0 altsaa ved Omlægning af Magneten. Angiv for første og anden Hovedstilling et Korrektionsudtryk for den ved Benyttelse af den simple Teori indløbende Fejl, og angiv en Metode til Elimination af den væsentligste Del af Fejlen i anden Hovedstilling nemlig den, der hidrører fra Kraftkomposanten i Meridianen. (Kraften opløses som før i to Komposanter.) Korrektionsudtrykkene udledes under samme Forudsætninger som ovenfor. For Forskellen mellem Polafstandene fra det geometriske Midtpunkt l_1—l_2 kan regnes med $^1/_2$ cm.

IAGTTAGEREN.

Til Maalesystemet kan man med nogen Ret foruden Maaleobjekt og Maaleredskab regne Iagttageren. Fra denne hidrører den subjektive Usikkerhed, der er af den ejendommelige regelmæssige Karakter, vi har belyst i første Afsnit af vor Fremstilling. Vi vil afslutte vor Fremstilling med kort at pege paa et Par væsentlige Forhold angaaende Iagttagerens Virksomhed under Maalingen. Denne Virksomhed vil i Almindelighed bestaa i at afpasse Systemet og i at aflæse og opskrive Resultatet. Den første Virksomhed falder bort ved de selvindstillende Systemer den sidste (tildels) ved de selvregistrerende Maaleredskaber. Iøvrigt sker Afpasningen, som vi har set, efter visse Kriterier. Disse er i de fleste Tilfælde af den simplest tænkelige Art. Ved Nulmetoderne er Tegnet oftest »Udslaget Nul« eller ingen Bevægelse. Ved Indstilling af Længdemaalingssystemet Koincidens mellem Traadkors og det Punkt, hvortil der sigtes. Eller det er Ligedeling ved Punktet af Afstanden mellem to Paralleltraade. Undertiden benyttes som Kriterium den lige stærke Belysning af to Felter. Ikke sjældent er Kendetegnet Maksimum eller Minimum af Belysning, Lyd eller Skarphed af et Billedes Konturer. Rent undtagelsesvis har man benyttet Indstilling paa en bestemt Farvetone (Polarisatorens Indstilling paa Overgang mellem violet og blaat). De fleste af de her antydede Kendetegn er saa simple, at de næppe kan give Anledning til Fejl eller Fejltagelse fra Iagttagerens Side. Kun ved et Par af de sidst nævnte er der Grund til at nære Betænkelighed. I gentagne Indstillinger af et Mikroskop efter Kriteriet størst Skarphed af Billedet (optisk Kontakt) synes Ændringer i Øjets Akkomodation saaledes at kunne gøre sig gældende som Kilde til tilsvarende Ændringer i Indstillingen. Ejendommelig for denne Art Maaling er jo i Virkeligheden ogsaa den Rolle Øjet spiller. Dettes Linsesystem indgaar, som det ses, paa den mest umiddelbare Maade som et Element i

Maaleredskabet. De Anomalier, Metoden udviser, hidrører fra, at dette Elements væsentligste Egenskab i kendelig Grad er afhængig af andre Egenskaber hos Iagttageren, som ændres ved selve Maalingen. (Træthed).

Ser vi paa den anden Del af Iagttagerens Virksomhed, Aflæsningen, saa er denne ogsaa den simplest tænkelige. Som vi har paapeget, fører det primære System Maalingen tilbage enten til Optælling af Elementer i en Samling af Normaler eller Aflæsning af en Maalestok. Den sidste Operation er i det væsentlige igen en Optælling. Kun Overskuddet over det nærmest mindre Antal Inddelinger maa skønnes. Ved Skønnet kan der som i Almindelighed ved enhver anden Virksomhed baade være Tale om Usikkerhed og Fejl. Med nogen Øvelse kan en relativt meget betydelig Sikkerhed opnaas, f. Eks. en Sikkerhed paa ca. $^1/_{20}$ Inddeling paa en Millimetermaalestok. Imidlertid bliver Værdien af denne Sikkerhed vistnok noget problematisk, idet Skønnet kan have en større Fejl end $^1/_{20}$ eller $^1/_{10}$ Inddeling. Om der i ens Maade at skønne paa optræder saadanne Fejl, kan man prøve, dersom man til Raadighed har et stort Antal — helst flere Hundrede Skøn. — Dersom man indskrænker sig til at skønne $^1/_{10}$-Dele, skulde indenfor en saadan Samling alle 10 Tiendedele i Almindelighed optræde lige hyppigt. Nu vil man imidlertid ofte finde, at en Iagttager sjældent eller aldrig skønner f. Eks. $^6/_{10}$, men til Gengæld særlig hyppigt $^5/_{10}$. En anden skønner ikke $^1/_{10}$ men lægger $^1/_{10}$-Dels-Iagttagelserne over paa $^2/_{10}$ eller $^0/_{10}$ o. s. v. En Del af disse Anomalier kan skyldes den Mangel paa «Symmetri« Delestregernes Bredde indfører. Undertiden kan det se ud som om Iagttagelsen blev hængende ved Delestregen f. Eks., naar man paa et Termometer iagttager et jævnt Temperaturfald. Passagen af Meniskus under Delestregen (ved et Stavtermometer) synes saaledes ofte at tage temmelig lang Tid, fordi man vil læse $^1/_{10}$ Inddeling som $^0/_{10}$ eller $^9/_{10}$ som $^{10}/_{10}$.

Øjet spiller iøvrigt ved Aflæsningen i det hele og store samme Rolle som Sigteinstrumentet ved Længdemaalings-

redskabet f. Eks. ved Kathetometret. Væsentligt er, at Sigtelinien staar vinkelret paa den Skala, ind paa hvilken Indeks (Viseren) skal projiceres. Til en vis Grad kan Iagttageren selv rette Sigtelinien ind; men ved større Afstand mellem Skala og Indeks begaas dog let en Fejl, den saakaldte Parallaksefejl — naar der ikke tages særlige Forholdsregler. Et meget hyppigt anvendt Middel mod Parallaksefejlen er et Planspejl anbragt parallelt med Maalestokken under Viseren. Naar Øjet holdes saaledes, at Viseren halverer Billedet af Pupillen, vil Parallaksefejlen være elimineret.

Vi maa selvfølgelig i denne Diskussion se bort fra al forsætlig og bevidst Forfalskning af Resultatet. Derimod skal her peges paa at »ubevidst Forfalskning« ofte rummer en betydelig Fare ved Maalingen. Den enkelte Iagttagelse bør ved Maalingen være ganske uden al Følelsesbetoning, d. v. s. det bør være Iagttageren ligegyldigt, om Iagttagelsen giver den ene eller anden Værdi. Kan det imidlertid ikke undgaas, at et bestemt Resultat bliver mere ønskeligt end andre, bør man indrette sig saaledes, at ens Ønsker ingen Indflydelse kan faa paa Resultatet, saaledes som det f. Eks. er sket ved Fotometerbænken. Iagttageren vil her ikke kunne se Skalaen under Indstillingen. Maaske vil man ved Fotometreringen ligefrem dele Iagttagerens to Virksomheder mellem to Personer, hvoraf den ene stiller ind, mens den anden aflæser Indstillingen paa en Skala anbragt modsat Indstilleren. Anvendelse af selvregistrerende Systemer er, som det vil forstaas, et radikalt Middel mod al bevidst eller ubevidst Forfalskning af Iagttagelsen.

Der kan endelig paa dette Sted være nogen Grund til at omtale en Anomali, der kan gøre sig gældende ved Bestemmelsen af Grænseusikkerheden, naar denne ikke udføres paa den normale Maade — altsaa ved Gentagelse. Dersom man f. Eks. stiller et Fotometer ind paa ens Belysning af Felterne og herefter prøver, hvor langt Fotometret kan forskydes, inden man mener med Sikkerhed at kunne afgøre, at en Forskel gør sig gældende, vil man paa denne Maade kunne komme

til en væsentlig større Værdi for Grænseafvigelsen end ved Gentagelser. Naturligvis er Gentagelsesmaaden den rigtige Metode for Grænseusikkerhedens Bestemmelse, og den anden Prøve bør kun anvendes, hvor Gentagelserne vilde medføre et urimeligt stort Arbejde f. Eks. ved Undersøgelse af Tegnesikkerheden ved grafisk Udjævning, Afpasningssikkerheden ved Westphals Vægt o. s. v.

RESUMÉ.

RESUMÉ.

Maalesystemet.

Det System, hvormed Maalingen arbejder, kaldes Maalesystemet. Det bestaar af Maaleobjekt og Maaleapparat. I videre Forstand kan man regne Iagttageren med til Systemet. Afgørende for Resultatet er en Række Egenskaber ved Maalesystemet, og disse betegner vi som væsentlige Egenskaber ved Systemet. Maalingen forudsætter til en vis Grad bestemte Værdier for disse Egenskaber.

Maalingens Teori.

Maalingens Teori er det i Almindelighed matematiske Udtryk, der gives Forbindelsen mellem den Egenskab ved Maaleobjektet, vi gør til Genstand for Maaling, og de væsentlige Egenskaber ved Maalesystemet, vi i første Linie gør til Genstand for Iagttagelse. Den lader ofte andre i og for sig væsentlige Egenskaber udenfor Betragtning. (Sekundære væsentlige Egenskaber, skjulte Iagttagelser, Maaleobjektets Temperatur, Tilledningstraadenes Modstand ved Wheatstones Bro.)

Usikkerhed og Fejl.

Vi skelner mellem Resultatets Usikkerhed og dets Fejl. Usikkerheden er Resultatets Svingning, hvis Maalingen gentages, Fejlen Resultatets ensidige Forskydning i Forhold til den sande Værdi. Omstaaende Fig. 1 *a* og *b* anskueliggør Forskellen. *a* betegner en Maaling med en vis Usikkerhed — foreløbig maalt ved Bredden af Usikkerhedsintervallet $\alpha\beta$ — *b* gengiver en Maaling med samme Usikkerhed, men tillige med en Fejl SS'.

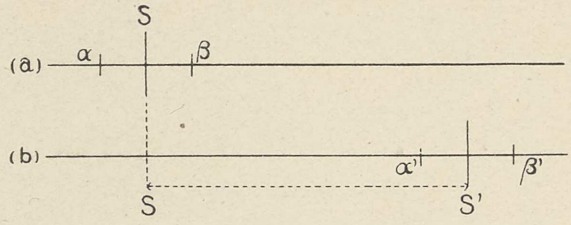

Fig. 1.

Oprindelsen til Usikkerhed og Fejl. — Væsentlige Forhold ved Maalingen.

Maalingens Usikkerhed kan hidrøre fra Iagttageren — subjektiv Usikkerhed —. Vi skelner mellem Aflæsningsusikkerhed og Indstillingsusikkerhed. Men Usikkerheden kan ogsaa være objektiv og afspejler da svingende Afvigelse af en eller flere væsentlige Egenskaber ved Systemet fra de for dem forudsatte Værdier. Tilsvarende afspejler Fejlen i Almindelighed ensidig Afvigelse af væsentlige Egenskaber. Vi skelner mellem den svingende resp. ensidige Afvigelse, som Usikkerheden resp. Fejlen direkte afspejler, og den praktiske Aarsag til den objektive Usikkerhed resp. Fejl. Denne er at søge i mangfoldige Forhold, hvilke vi betegner som henholdsvis Kilder til Usikkerhed og Fejl eller under et som Maalingens væsentlige Forhold.

Toleransbegrebet i Maaletekniken.

At planlægge en Maaling for en given Tolerans vil sige at planlægge den saaledes, at Resultatet ikke kan fjærne sig mere end et vist Beløb »Toleransen« fra den sande Værdi. Toleransen vil man i Almindelighed udtrykke i Procent (Promille) af Resultatets absolute Værdi.

Maaleteknikens Hovedopgave.

Maaleteknikens Hovedopgave er Planlæggelsen af Maalingen med paa Forhaand given Tolerans eller Nøjagtighed. (Reciprokbegrebet af Tolerans.) Vi begrænser i vor Behandling Opgaven ved at forudsætte, at Maalingen udføres med paa Forhaand givne Midler.

Planlæggelsens Hovedtræk.

Planlæggelsen af Maalingen kommer da i det væsentlige til at bestaa af

1. Valg af Redskabet eller Metoden for Maalingen.
2. Undersøgelse af den valgte Metodes væsentlige Forhold.

Hver Metode har sin uundgaaelige Usikkerhed. Uundgaaelig er først og fremmest den subjektive Usikkerhed, men objektiv Usikkerhed kan ogsaa være praktisk set uundgaaelig. Den uundgaaelige Usikkerhed ved Metoden maa, hvis Metoden skal kunne bruges, ikke kunne bringe Resultatet til at fjærne sig mere end Toleransen fra den sande Værdi. I Virkeligheden vælger man i Praksis Metoden saaledes, at den rigeligt tillader den tilstræbte Nøjagtighed, d. v. s. man arbejder med en vis Sikkerhedsfaktor — f. Eks. 2 eller 3.

Naar Metoden er valgt, som her antydet, bliver det næste Skridt at sikre Maalingen, mod at (undgaaelig) objektiv Usikkerhed og Fejl bringer Resultatet til at falde udenfor Toleransgrænsen. D. v. s. vi maa opsøge, vurdere og eventuelt uskadeliggøre Maalingens Kilder til objektiv Usikkerhed og til Fejl.

Maaleteknikens Hovedafsnit.

I Overensstemmelse med det her udviklede bestaar vor Fremstilling af to Afsnit omhandlende

1. Tekniken for den kvantitative Vurdering af en Metodes (uundgaaelige) Usikkerhed.
2. Analysen, Vurderingen og Eliminationen af Maalingens Kilder til (uundgaaelige) Usikkerhed og Fejl.

AFSNIT I.

VURDERING AF MAALINGENS USIKKERHED.

Resultatets Usikkerhed hidrører (i første Linie) fra Iagttagelsernes, maa altsaa være en Funktion af denne. For at naa til en kvantitativ Bestemmelse af Resultatets Usikkerhed maa vi derfor 1) kvantitativt definere, hvad vi vil forstaa ved Iagttagelsernes Usikkerhed, 2) kvantitativt definere, hvad der skal forstaas ved Resultatets Usikkerhed, og 3) udlede et almindeligt Udtryk for Forbindelsen mellem de saaledes definerede Størrelser.

Iagttagelsens Grænseusikkerhed.

Som Maal for Iagttagelsens Usikkerhed vælger vi den største Afvigelse, Usikkerheden kan give Anledning til i Iagttagelsen, og kalder denne Afvigelse Iagttagelsens Grænseusikkerhed. Den kan i Almindelighed bestemmes ved at gentage Iagttagelsen f. Eks. 10 Gange og opsøge den største Afvigelse, der i Rækken af Gentagelser forekommer fra Middeltallet. Den kan dog ogsaa ofte vurderes ved særlige Prøver.

Resultatets Grænseusikkerhed.

Ved Resultatets Grænseusikkerhed forstaar vi den større Afvigelse, Iagttagelsernes Grænseusikkerhed kan give Anledning til i Resultatet. Vi skelner mellem Resultatets teoretiske Grænseusikkerhed (eller blot Usikkerhed) og dets praktiske Usikkerhed. Ved den første forstaaes den absolut største — men ved flere indgaaende Iagttagelser overordentlig usandsynlige Afvigelse — som Iagttagelsernes Usikkerhed kan bevirke; ved den praktiske Usikkerhed forstaaes den, der har samme Sandsynlighed som Grænseafvigelsen for den enkelte Iagttagelse (ca. 1 : 10), d. v. s. en Sandsynlighed, der kan være Grund til at regne med i Praksis.

Udtryk for den teoretiske Grænseusikkerhed.

Ved en enkelt indgaaende Iagttagelse o er Resultatets Grænseusikkerhed bestemt ved

$$\Delta R_t = \Delta R_p = \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right) \Delta o$$

Ved flere Iagttagelser ved

$$\Delta R_t = \left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o + \left(\frac{\delta R}{\delta p}\right)\Delta p + \left(\frac{\delta R}{\delta q}\right)\Delta q \text{ (numerisk Sum)}$$

$$= \Sigma\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)\Delta o$$

Reduktion til den praktiske Grænseusikkerhed.

Af den teoretiske Grænseusikkerhed faaes den praktiske ved Multiplikation med en Reduktionsfaktor F.

$$\Delta R_p = \Delta R_t \cdot F$$

Dersom Resultatet er bestemt ved n Iagttagelser, der alle leverer nogenlunde ligestore Bidrag til Usikkerheden, er

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

I Virkeligheden kan man selv ved stærkt varierende Bidrag (f. Eks. Bidrag, der forholder sig som 5 til 7 til 10,) regne med dette Udtryk. Undtagelsesvis maa det korrekte Udtryk

$$F = \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots}$$

benyttes. (ε_1 ε_2 ε_3 simple encifrede Tal, der forholder sig nogenlunde som Usikkerhedsbidragene.)

Absolut og relativ Usikkerhed.

Udtrykkene ovenfor give Resultatets absolute Usikkerhed, d. v. s. Usikkerheden maalt i samme Enhed som Resultatet. Hyppigst vil man beregne Forholdet mellem den absolute Usikkerhed og Resultatet — dettes relative Usikkerhed. Det sker da ved Formlerne:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \Sigma\left[\frac{o\left(\frac{\delta R}{\delta o}\right)}{R}\right]\left(\frac{\Delta o}{o}\right)$$

og

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t \cdot F$$

hvor F bestemmes ganske som ovenfor, d. v. s. i Almindelighed er at sætte lig $\frac{1}{\sqrt{n}}$. (F er iøvrigt identisk med Reduktionsfaktoren for den absolute Usikkerhed.)

Beregningen af Talværdien for Usikkerheden.

Usikkerheden paa den Størrelse, vi har kaldt Resultatets praktiske Grænseusikkerhed, er i Almindelighed af samme Størrelsesorden som Usikkerheden paa Bestemmelsen af Iagttagelsens Grænseusikkerhed. Denne er 20—30 %. Den talmæssige Beregning af Usikkerheden skal altsaa anlægges for denne Tolerans, d. v. s. Regningen bliver Regning med i Almindelighed afrundede Tal.

Beregningen af Resultatet.

Overslaget over Usikkerheden bestemmer i Almindelighed den Tolerans, hvormed Resultatet skal beregnes, og dermed Regnemidlet. Vi vedtager, at de Ciffre af Resultatet, som ikke berøres af Usikkerheden, plus det, i hvilket Usikkerheden skulde kunne gøre sig gældende, skal beregnes. Regnemidlet skal i Almindelighed vælges saaledes, at Regneprocessen ikke tilføjer yderligere Usikkerhed. En femciffret Logaritmetabel, der giver Resultatet med ca. 0,01 ‰ Nøjagtighed, kan altsaa anvendes til Beregning af 0,1 ‰-Resultater, en fireciffret (0,1 ‰) til 1 ‰-Resultater, en Regnestok (1—2 ‰) til ½ % à 1 %-Resultater.

Resultatet kan passende skrives med Tilføjelse af dets Sikkerhed, f. Eks.

$$3{,}972 \pm 0{,}2\ \% \quad (3{,}972 \pm 2\ ‰), \quad 3{,}972 \pm 8$$

Forbud mod Anvendelse af afledede Iagttagelser.

Det er i Almindelighed ikke tilladeligt i Udtrykket for Resultatet at betragte Funktioner af de indgaaende Iagttagelser som uafhængige Iagttagelser (afledede Iagttagelser), undtagen naar Funktionerne ikke har Iagttagelser fælles, altsaa faktisk er »fri af hinanden«.

Summationsreglen gældende for logaritmiske Udtryk.

Dersom Resultatet udtrykkes logaritmisk ved Iagttagelserne, bliver Resultatets teoretiske (relative) Usikker-

hed lig Summen af Iagttagelsernes relative Usikkerheder, hver multipliceret med Iagttagelsens Potenseksponent

$$\text{Eks. } R = \frac{a\sqrt{b}}{c^m}, \quad \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_t = \frac{\Delta a}{a} + {}^1/_2 \frac{\Delta b}{b} + m\frac{\Delta c}{c}$$

Regnereglen kan ogsaa ofte bringes i Anvendelse paa Funktioner, der ikke er logaritmiske, nemlig naar disse ved en tilladelig Afrundning kan bringes til at være det. (Modstandsmaaling ved Voltmeter og Ampèremeter. $X = \frac{p}{i - \frac{p}{r_v}}$, $\frac{p}{r_v}$ lille mod i derfor $\left(\frac{\Delta x}{x}\right)_t = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta i}{i}$)

Skjulte Iagttagelser

I mange Tilfælde indgaar der i Maalingen Iagttagelser, der ikke nævnes i Udtrykket for Resultatet, men som føjer deres Bidrag til Usikkerheden. (Skjulte Iagttagelser.) — Iagttagelsen af Nulpunktet, naar Udslagssystemet har en Nulpunktsfejl, Iagttagelsen af Temperaturen, naar den maalte Egenskab eller Normalens Værdi afhænger af henholdsvis Maaleobjektets og Normalens Temperatur. — Har den søgte Egenskab Temperaturkoefficienten α ($R = R_0(1 + \alpha t)$), føjer Usikkerheden Δt Bidraget $\alpha \Delta t$ til Resultatets relative Usikkerhed.

Den relative Usikkerheds Uafhængighed af Enheden.

Den relative Usikkerhed paa Maaling af en Modstand, bestemt ved Forholdet mellem Spændingsfald p og Strøm i, er lig Summen af de relative Usikkerheder paa Iagttagelsen af de til p og i svarende Udslag α og β — altsaa ganske uafhængig af Betydningen af Udslagsinstrumenternes Inddelinger (Instrumenternes Enhed).

Usikkerheden, naar Resultatet er bestemt ved Gentagelser. Den bedste Værdi.

1) n simple (lige gode) Gentagelser. Det simple Middeltal er den bedste Værdi.

$$R_m = \frac{r_1 + r_2 + r_n}{n}, \qquad \Delta R_m = \frac{\Delta r}{\sqrt{n}}$$

2) n ulige gode Gentagelser. Vi tillægger hver Bestemmelse en vis Vægt h. Den bedste Værdi bliver

$$R_m = \frac{h_1 r_1 + h_2 r_2 + \cdot \cdot h_n r_n}{h_1 + h_2 + \cdot \cdot h_n}$$

naar Vægtene vælges saaledes, at de forholder sig som Kvadraterne paa Bestemmelsernes Sikkerheder. (Omvendt som Kvadraterne paa Usikkerhederne.) Usikkerheden beregnes paa sædvanlig Maade.

3) Usikkerheden ved grafisk Middeltal.

Vi skelner mellem Usikkerheden paa Tegningen og Usikkerheden paa Udmaalingen.

a. *Udjævningen svag, saa at Usikkerheden paa Tegningen er forsvindende.*

Usikkerheden paa Bestemmelsen af Retningstangens i Fig. 2 er lig $\frac{\Delta O}{O}$, hvor O er Ordinaten, ud-

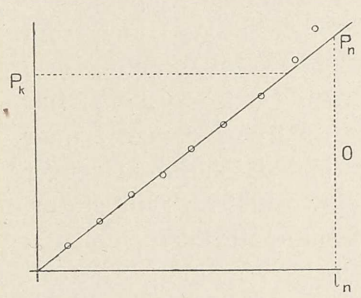

Fig. 2.

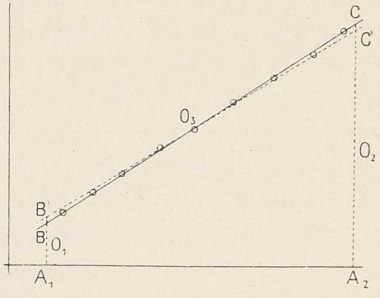

Fig. 3.

maalt paa Millimeterpapiret, ΔO Aflæsningsusikkerheden paa dette. I Fig. 3 bliver den (saafremt Tegneusikkerheden her tør betragtes som forsvindende)

$$\frac{2\Delta O}{\sqrt{2}} : (O_2 - O_1) = 1{,}4\,\frac{\Delta O}{O_2 - O_1}$$

b. *Tegneusikkerheden overvejende.*

Usikkerheden maa bestemmes ved særlige Prøver. I Fig. 3 vil man dreje BC om O_3. Skønnes, at den udjævnende Linie BC kunde tænkes tegnet som $B'C'$, bliver Usikkerheden paa Retningstangens $\frac{BB' + CC'}{O_2 - O_1}$.

1) Naar intet taler derimod, vil man vælge Metoderne for Enkeltbestemmelserne lige nøjagtige. Derved opnaar man nemlig, at det samlede Beløb af Usikkerhed, der staar til Raadighed til Fordeling paa de enkelte Bestemmelser, bliver saa stort som muligt. Indgaar der n Iagttagelser, og er den Tolerans, der kan tillades paa Resultatet af den sammensatte Maaling $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$, bliver der ved lige Fordeling af Usikkerheden $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_p$ til hver Enkeltbestemmelse. **Den sammensatte Maaling.**

2) Naar Forholdene nødvendiggør ulige Fordeling, naar f. Eks. en af Bestemmelserne lægger Beslag paa hele Toleransen, maa det erindres, at et fra en anden Enkeltmaaling hidrørende Usikkerhedsbidrag er Nul (som det altsaa i sidste Tilfælde maa være), naar det blot er 5 à 10 Gange mindre end Hovedbidraget.

Korrektionens Teori

Er Resultatet

$$R = R' + k$$

hvor k er lille mod R' (en Korrektion til R'), bliver

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R'}{R'} + \frac{k}{R'} \cdot \frac{\Delta k}{k}$$

Ved lige Fordeling af Usikkerheden paa Hovedbestemmelse og Korrektionsbestemmelse kan der altsaa paa denne sidste tillades en Usikkerhed, der er lige saa mange Gange større end Hovedbestemmelsens, som denne er større end Korrektionen.

Vurdering af Overensstemmelse.

Lad en og samme Størrelse være bestemt ved to Metoder af forskellig eller ens Sikkerhed. Den ene Metode giver R_a, den anden R_b. Vi spørger om, hvor stor en Forskel der kan forklares ved Usikkerhederne

paa R_a og R_b. Svaret maa blive den praktiske Usikkerhed paa Differensen

$$D = R_a - R_b$$

forudsat, at R_a er uafhængig af R_b.

De gunstigste Betingelser for Maalingen, bestemt ved Udtrykket for Usikkerheden.

Udtrykket for Resultatets Usikkerhed tillader undertiden ved simpel Maksimums- eller Minimumsbestemmelse à priori-Udledelse af de i visse Henseender gunstigste Forhold for Maalingen, nemlig naar Iagttagelsesusikkerhedens Afhængighed af Forholdene er kendt. Ellers kræver Bestemmelsen af de gunstigste Arbejdsbetingelser en Undersøgelse af denne Afhængighed.

Det kan paa Forhaand siges, at Usikkerheden ved Maaling med Wheatstones Traadbro bliver mindst paa Midten af Maaletraaden, naar den eneste væsentlige Usikkerhed er Aflæsningsusikkerhed. Hvorledes derimod Usikkerheden ved Bestemmelse af en Linses Brændvidde afhænger af Afstanden mellem Spalte og Billedskærm, kan først angives, naar Indstillingsusikkerhedens Afhængighed af denne Afstand er undersøgt.

AFSNIT II.

MAALINGENS KILDER TIL USIKKERHED OG FEJL.

Usikkerhedssvingninger i væsentlige Egenskaber.

A. Almindelige Synspunkter. Den objektive Usikkerhed afspejler Svingninger i Tidens Løb i væsentlige Egenskaber ved Systemet. Men det er ikke alle svingende Variationer, der giver sig til Kende som Usikkerhed. Afgørende er her Hastigheden af Svingningerne eller disses Periode. Svingningerne er Usikkerhedssvingninger, naar Perioden er af samme Størrelsesorden (eller noget mindre) end Tiden for Iagttagelsen eller Bestemmelsen, saaledes at vi ved en Række Gentagelser, maa

vente at faa en ny Værdi for hver ny Iagttagelse, hvor hurtigt end Gentagelserne følger paa hinanden.

Almindelige Forholdsregler mod den objektive Usikkerhed.

Kilden til Usikkerheden maa opspores, dens Indflydelse maa vurderes, og Systemet, hvis den er væsentlig, skærmes imod den til en saadan Grad, at Usikkerheden ikke sætter Opnaaelsen af den tilstræbte Tolerans i Fare.

Ensidig Afvigelse af væsentlige Egenskaber.

Ensidig Afvigelse i Resultatet afspejler ensidig Afvigelse af en væsentlig Egenskab fra den for Egenskaben forudsatte Værdi. Vi kan skelne mellem to Arter af ensidig Afvigelse, nemlig ensidig Afvigelse, som ved uforandret System er »absolut« konstant (Tilledningstraadenes Modstand ved Wheatstones Bro) og ensidig Afvigelse, der er Variationer underskastet. (Temperaturafvigelse hidrørende fra Milieuets langsomme Temperaturvariationer.) Er den sidste Afvigelse imidlertid praktisk set konstant i Forhold til den enkelte Bestemmelse (relativt konstant), adskiller den sig i intet væsentligt fra den absolut konstante ensidige Afvigelse.

Analogiforholdet mellem Variationer i Tid og Variationer i Sted, resp. Variationer fra Individ til Individ.

Maaling paa et nyt Sted af et uregelmæssigt Objekt eller Maaling paa et nyt Element af en Samling nominelt ens, men i Virkeligheden noget forskellige Elementer betegner i og for sig Maaling paa et nyt Maaleobjekt. Paa samme Maade betegner en uregelmæssig Normal ikke en men flere Normaler, og en Samling nominelt ens, men i Virkeligheden individuelt prægede Normaler lige saa mange forskellige Normaler, som Samlingen indeholder Elementer. Imidlertid anlægger man i Praksis ikke altid dette konsekvente Synspunkt, men betragter f. Eks. et Maaleobjekt med væsentlig Uregelmæssighed som et enkelt Maaleobjekt. Variationerne fra Sted til Sted og fra Individ til Individ gør sig da gældende ganske som Variationer i Tidens Løb ved uforandret System. I visse Tilfælde bliver disse Variationer at opfatte som en Kilde til Usikkerhed i andre som en Kilde til ensidig Afvigelse eller Fejl af ganske samme Karakter

som den f. Eks. fra langsomme Temperaturvariationer hidrørende.

Almindelige Forholdsregler mod Maalingens Fejlkilder.

Kilderne til Resultatets ensidige Afvigelse maa opspores, deres Indflydelse undersøges og, hvis den er væsentlig, elimineres til en Grad, som først og fremmest afhænger af den tilstræbte Tolerans.

Iøvrigt kan vi bringe de to sidste Forholdsregler ind under et for alle Arter af ensidig Afvigelse fælles Synspunkt.

Enten den ensidige Afvigelse er absolut eller kun relativt konstant, er Forholdsreglen til Elimination af Fejlen ved et givet System og given Iagttagelsesmaade i Almindelighed en af to. Man kan fjærne den ensidige Afvigelse altsaa afpasse den væsentlige Egenskab, saa den har den tilstræbte Værdi, eller man kan gøre den væsentlige Egenskabs forhaandenværende Værdi til Genstand for Maaling og rette for dens Afvigelse fra den forudsatte Værdi (Korrektion). Den sidste Fremgangsmaade kræver i ethvert Fald Kendskab til Afhængigheden mellem Resultatet og den betragtede væsentlige Egenskabs Værdi og i Almindelighed desto nøjere Kendskab, jo længere Forholdene fjærner sig fra de forudsatte. Den første Fremgangsmaade kræver ogsaa nogen Kendskab til Afhængigheden, fordi vi maa kunne afgøre, med hvilken Nøjagtighed Afpasningen skal finde Sted.

Eksempler paa de to almindelige Forholdsregler mod Maalingens Fejl.

1. Lad Opgaven være at bestemme en elektrisk Modstand. Modstandens Værdi afhænger af Temperaturen, der altsaa er en væsentlig Egenskab. Temperaturen, ved hvilken Modstanden ønskes kendt, maa da være fastsat. Lad den være 20 °. Vi kan nu afpasse Temperaturen til netop at være 20 °, hvilket i saa Fald maa ske med en Tolerans, der afhænger: a) af Bestemmelsens tilstræbte Nøjagtighed og b) af Modstandens Temperaturkoefficient. Lad den første være 1 ‰ og den sidste 4 ‰. Temperaturen skal da afpasses med mindst $^1/_4$ ° Nøjagtighed — som oftest med en væsentlig større Nøjagtighed.

Vi kan imidlertid ogsaa maale Modstanden ved en vilkaarlig Temperatur i Nærheden af 20° og korrigere for Temperaturforskellen. Korrektionen kan i Almindelighed skrives

$$k = -R_t \cdot \alpha (t - 20)$$

hvor α er Temperaturkoefficienten. Korrektionen kræver Kendskab til α, d. v. s. denne maa i Almindelighed findes ved en Ekstrabestemmelse foretaget ved en ny Temperatur helst paa den anden Side 20°. Maalingen bliver praktisk set en Dobbeltmaaling.

2. Tilledningstraadenes Modstand μ ved Wheatstones Bro betegner ofte en væsentlig Afvigelse fra den Værdi, Maalingen forudsætter for denne Modstand, nemlig Værdien Nul. Vi kan forsøge at give Modstanden Værdien praktisk set Nul. Hvor stor den da maa være er givet ved Udtrykket for Modstandens relative Indflydelse, som ved ens Tilledningstraade for Normal og ubekent Modstand er

$$\left(\frac{K}{X}\right) = \frac{2l - L}{l} \cdot \frac{\mu}{R} = \frac{f - 1}{f} \cdot \left(\frac{\mu}{R}\right)$$

naar f er Forholdet mellem den ubekendte Modstand og Normalen, R denne sidstes Værdi. Lad den tilstræbte Nøjagtighed være $1\,{}^0/_{00}$, saa maa $\frac{K}{X}$ f. Eks. helst bringes ned til $\frac{1}{5000}$. Dersom nu $f = {}^1/_2$, $R = 1$, bliver

$$\mu = \frac{1}{5000}\ \text{Ohm}.$$

Hvert Sæt Tilledningstraade skal altsaa bringes ned til denne lave Værdi.

Vi kan imidlertid ogsaa forsøge at korrigere for Indflydelsen ved Hjælp af Udtrykket for $\frac{K}{X}$.

Den Tolerans, hvormed Tilledningstraadenes Modstand da skal bestemmes, er givet ved Korrektionens Teori. Under de her betragtede Forhold bliver den naturligvis igen lig $\frac{1}{5000}$ Ohm. Spørgsmaalet bliver da i Almindelighed, om vort Kendskab til Ledningsevnen for Traadenes Materiale tør forudsættes tilstrækkelig nøje til en Beregning af deres Modstand med denne Nøjagtighed.

Mekanisk Elimination af Maaleapparatets Fejl.

En Afpasning af Systemet efter Teoriens Fordringer er realiseret i de »mekaniske« Indretninger til Elimination af Fejl, hvormed mange Maaleredskaber forsynes. (Nulpunktsskruen ved Westoninstrumentet, den magnetiske Shunt til Fjærnelse af Enhedsfejl ved de samme Instrumenter, den forskydelige Kontraflade ved Mikrometerskruen o. s. v.).

Elimination af Fejlen ved særlige Iagttagelsesmaader eller ved særlige Metoder.

Fejlen kan endelig ofte elimineres ved Benyttelse af særlige Iagttagelsesmaader (Eks. Symmetrisk Iagttagelse) eller ved Overgang til særlige Metoder uddannede saaledes, at de udelukker Fejlkildens Indflydelse (Bessels Metode).

Systemets Opbygning.

B. Maaleredskabet og dets Elementer. Den fundamentale Maalemetode. Almindelige Betegnelser og Definitioner. Vi skelner for Maaleapparatets Vedkommende mellem primære og sekundære Systemer. Det primære System fører Maalingen af den søgte Egenskab tilbage til Optælling enten af Inddelinger paa en Maalestok eller af Elementer i en Skala af Normaler (Vægtlodder o. s. v.). Det er altsaa bygget op af disse Grundelementer — i Almindelighed i Forbindelse med andre — og navnlig udgør Maalestokken et Element af saa at sige ethvert primært System. Det sekundære System er paa tilsvarende Maade bygget op eller afledet af primære Systemer. Maaling ved primære Systemer betegner man ofte som direkte, Maaling ved sekundære Systemer som indirekte. Den indirekte Maaling kan

arbejde med et eller flere primære Systemer og saaledes være enkelt eller sammensat.

De primære Systemer kan med nogen Rimelighed deles i følgende Grupper: Klassifikation af de primære Systemer.

a) Længdemaalings- og Vinkelmaalingssystemer (Grundelementer: den retliniede Længdemaalestok og den cirkulære Vinkelmaalestok).

b) Selvindstillende Udslagssystemer (Grundelement: Skalaen).

c) Nulsystemer (Grundelementer: enten Normaler og Sæt af saadanne, Wheatstones Bro bygget op af Normaler, eller Skala og enkelt Normal Bismeren, Wheatstones Traadbro).

Hertil kan føjes:

d) Tællere (Mængdemaalere), (Tidsmaalere, Elektricitetsmaalere o. s. v.).

De selvindstillende Udslagssystemer kan for største Delen betragtes som afledede fra de to Vejningssystemer, Fjedervægten og Brevvægten. (Undtagelser: De selvindstillende Længdemaalingsredskaber, Libellen, Extensometret o. s. v. og de Systemer, der stiller sig ind efter og angiver en Kraftretning, Kompasset, Fløjen, visse elektriske Systemer o. s. v.). Derfor kan de primære Systemer ogsaa deles i tre Hovedgrupper, hvis Forbilleder eller Grundtyper er de tre fundamentale Maaleredskaber, Længdemaalestokken, Vægten og Uret altsaa Redskaberne svarende til de tre Grundenheder i det absolute Maalesystem.

Maalingen er i sit Væsen at opfatte som en Sammenligning gennem ensartede Virkninger. Hvad der sammenlignes er paa den ene Side Maaleobjektet med den ubekendte søgte Egenskab, paa den anden Side et eller andet System med kendte Egenskaber, der har en Virkning, som altsaa maa være af samme Art som Maaleobjektets. Maalingen maa altsaa principielt have to Komposanter, eller bestaa af to Iagttagelser, nemlig: Maalingens Væsen.

1) af Maaleobjektets Virkning, 2) af Normalens Virkning. De primære Maaleredskaber kan betragtes som tidssparende Systemer, ved hvilke den anden Iagttagelse er udført en Gang for alle og som tilmed ofte er afpassede efter en Normal med en rund Værdi, saaledes at de direkte uden Udregning giver Værdien af Maaleobjektet. (Metermaalestokken, den ligearmede Vægt, Millivoltmetret delt i Millivolt o. s. v.).

Forholdsmaaling (Relativ Maaling).

Simplest stiller den Sammenligning, hvori Maalingen bestaar, sig altid, naar Maaleobjektet sammenlignes med en Normal af samme Karakter som Maaleobjektet. Maalingen betegnes da som en Forholdsmaaling eller relativ Maaling. Ved en saadan vil Forholdet mellem Maaleobjekt og Normal i Almindelighed være bestemt ved Forholdet mellem Virkningerne, gennem hvilke Sammenligningen finder Sted. Den relative Maaling eliminerer derfor enhver Fejl, der gør sig i lige Grad gældende i Maaleobjekt og Normal og tillige alle, der gør sig lige stærkt gældende i disses Virkninger. Forholdsmaaling bliver saaledes et Middel til Elimination af enhver Fejl af denne Art.

Entydig Definition af Fejl og Korrektion ved en Normal i vid Forstand.

En Normals Fejl — Betegnelsen Normal er her at tage i videste Betydning, omfattende saaledes den enkelte Normal, den variable Normal og Viserinstrumentet — er det Beløb, hvormed den nominelle Værdi (for den karakteristiske Egenskab) overskrider den virkelige. Korrektionen er det Beløb, der skal adderes til den nominelle Værdi for at faa den virkelige.

Den nominelle Værdi: R_n

Den virkelige Værdi: R_v

Fejlen $= R_n - R_v$

Korrektionen $= R_v - R_n$, fordi $R_n + (R_v - R_n) = R_v$

Korrektionen $= \div$ (Fejlen).

Maaleredskabets Fremstillingsusikkerhed eller Fremstillingstolerans.

Denne bør være anført i Katalogen, idet Kendskab til den er nødvendig ved den rationelle Anvendelse af Redskabet.

Justering og Justeringscertifikat. Statslaboratorier, Statsprøveanstalter.

Vil man anvende Maaleredskabet til Bestemmelser af ringere Tolerans end Fremstillingstoleransen, maa Redskabet justeres, d. v. s. den virkelige Værdis Afvigelse fra den nominelle — altsaa Korrektionen — maa udmaales og det med en til den tilsigtede Anvendelse svarende Tolerans. Justeringen kan man nu til Dags faa udført i de officielle Prøvelaboratorier (Statsprøveanstalter), der findes i de fleste civiliserede Stater. Kendtest er følgende:

Physikalisch-Technische-Reichsanstalt, Berlin-Charlottenburg, National Physical Laboratory, London-Teddington, Bureau of Standards, Washington D. C., og for Længdemaalings- og Vejningsnormalers Vedkommende: Bureau international des Poids et Mesures, Sèvres.

Disse Laboratorier udsteder, naar de indsendte Redskaber, specielt Normaler, opfylder visse Krav, Certifikater, der med Anførelse af Justeringens Tolerans indeholder Angivelse af Redskabets sande Værdi og hyppigt tillige dets Temperaturkoefficient.

Skalaen. Dens forskellige Anvendelser.

Forbilledet for Skalaen er den almindelige delte Længdemaalestok, der kan betragtes som en variabel Længdenormal. I Lighed med den er andre variable Normaler uddannede. Ogsaa i disse bliver Skalaen da i Almindelighed et Hovedelement. Den er det dernæst i Udslagssystemerne. Endelig forsynes næsten alle Nulsystemer med en Skala, fordi disse Systemer ved Interpolationer benyttes som Udslagssystemer. Skalaen bliver derved praktisk set et Element i alle Maaleredskaber.

Skalaens Former.

Man benytter følgende Former for Skalaen: 1) den retliniede Skala, 2) den cirkulære aabne Skala, 3) den cylindriske Skala, 4) Spiralskalaen, 5) den lukkede cirkulære Skala (Vinkelskalaen), 6) den lukkede cylindriske Skala. Man skelner dernæst mellem ligedelt og uligedelt Skala. Den sidste maa ofte anvendes, naar

man stiller det Krav til Skalaen, at den skal være direkte visende.

Skalaens Fejlarter.

Naar Skalaens hele Længde og altsaa ogsaa den enkelte Inddeling repræsenterer en bestemt Enhed, kan Skalaen have Enhedsfejl. Man retter for den ved at forøge alle Iagttagelser med et vist Antal Procent. Har Skalaen fikseret Nulpunkt (Skydelæren, Viserinstrumentet), kan den have Nulpunktsfejl, for hvilken der rettes ved til enhver Iagttagelse at addere Nulpunktskorrektionen. Skalaen kan endelig have Delefejl, hidrørende fra Delingens Fremstilling. Korrektion for Delefejlen kræver Kendskab til Fejlens Variation fra Sted til Sted paa Skalaen — Skalaen maa justeres. Resultatet af Justeringen kan gives i Form af en Justeringstabel eller Justeringskurve. Naar Delefejlen er lille, vil man ofte betragte den som en Kilde til Usikkerhed, hvorved denne Usikkerheds særlige Karakter imidlertid maa erindres i Overslaget. Den lukkede cirkulære Skala (Vinkelskalaen) kan ikke vel have Enhedsfejl, derimod kan den have Excentricitetsfejl, hidrørende fra excentrisk Anbringelse af Skalaen i Forhold til den Akse, hvis Drejning den skal maale.

C. Oversigt over almindelige Kilder til Usikkerhed og Fejl (væsentlige Forhold) og Forholdsregler mod dem. Vi har i Hovedfremstillingen lagt Systemets Art og Arten af dettes Elementer til Grund ved Inddelingen. I denne Oversigt vil vi nu forsøge en Deling efter Arten af de væsentlige Forhold.

a. *Væsentlige Forhold, der er fælles for Maaleobjekt, Normal og Normalredskaber.*

Normal og Maaleobjekt (Normalmodstand og ubekendt Modstand) er i simpel relativ Maaling Legemer eller Systemer af væsentlig samme Art. Heri ligger Forklaringen paa, at Maaleobjektet og Normalen har en Række væsentlige Forhold fælles. Nær beslægtet med den enkle Normal er den variable Normal, og som en variabel Normal kan endelig i Almindelighed det selv-

indstillende Udslagssystem betragtes (f. Eks. Westoninstrumentet). De for den enkle Normal og Maaleobjektet fælles væsentlige Forhold er derfor i Almindelighed ogsaa væsentlige Forhold ved disse Maaleredskaber. De antydede universelle Forhold er i det væsentlige

1. Milieuets Variationer.
2. Uregelmæssighed.
3. Nødvendige Processer ved Maalingen.

Angaaende disse erindrer vi:

Milieuvariationer. (Milieuets Temperetursvingninger.)

Vi maa ofte regne med, at de Variationer, der finder Sted i Milieuet, f. Eks. Milieuets Temperaturvariationer, kan overføres paa Maaleobjekt, Normal eller Normalinstrument og derved i væsentlig Grad ændre en eller flere væsentlige Egenskaber ved disse Elementer. De frembragte Ændringer afspejler naturligvis Milieuets. Svingningerne i Milieuets Temperatur kan derfor baade blive en Kilde til objektiv Usikkerhed og til praktisk set ensidig Afvigelse.

Det kunstige Milieu. – Badet.

Man beskytter Maaleobjektet, Normalen eller endog det fuldstændige System mod Milieuets Variationer, specielt mod dets Temperaturvariationer ved at anbringe det i et kunstigt Milieu. I sidste Tilfælde er dette hyppigt et Bad. Badet er dog sjældent et Middel mod den fra Milieuets Temperatursvingninger hidrørende objektive Usikkerhed, der som Følge af Systemets egen Varmekapacitet i Almindelighed vil være forsvindende. Enten er Badet et Middel for Afpasning af en bestemt Temperaturtilstand eller for den tilstrækkelig sikre og tilstrækkelig nøjagtige Bestemmelse af Maaleobjektets resp. Normalens Temperatur.

Som Eksempler paa fuldstændige Udslagssystemer, byggede ind i kunstige Milieuer, kan nævnes Thermogalvanometret (Thermopanseret), Pansergalvanometret (det magnetiske Panser), Westoninstrumentet i Jærnhus (Foranstaltning mod det magnetiske Felts Variation fra Sted til Sted i Nærheden af Stærkstrømskabler, Elektromagneter m. m.).

Anvendelse af temperaturuafhængigt Materiale ved Normalens Fremstilling. Systemer uden Temperaturkoefficient.

Milieuets Temperaturvariationer er langt sjældnere et væsentligt Forhold overfor Normalen end overfor Maaleobjektet. Det ligger i, at det ofte er lykkedes at fremstille Normalen af særligt temperaturuafhængigt Materiale, eller ved passende Valg af Normalens Elementer at gøre dens Temperaturkoefficient lille eller forsvindende. (Eks. Invar eller smeltet Kvarts som Materiale for Maalestokke eller Penduler, Normalmodstande af Manganin, Weston Standard Element.) Paa tilsvarende Maade har man stræbt at gøre det fuldstændige System temperaturuafhængigt. (Eks. Westoninstrumentets Temperaturkompensation, Kompensationspendulet.)

Uregelmæssighed. 1) Uregelmæssigt Maaleobjekt.

Vi skelner ved Maaling paa uregelmæssigt Maaleobjekt mellem to Opgaver. 1) Maaling af den varierende Egenskabs Værdi paa et — vilkaarligt eller ikke vilkaarligt — Sted af Maaleobjektet. 2) Maaling af Gennemsnitsværdien af den varierende Egenskab.

Ved den første Opgave maa Stedet karakteriseres med en vis Tolerans ligesom Temperaturen, naar den søgte Egenskab afhænger af denne. Maaleobjektet bestaar i Virkeligheden af en Række Maaleobjekter, og det, der maales paa, maa mærkes. (Eks. Maaling af en elektrisk Lampes Lysstyrke i en bestemt Retning.)

Teorien for den anden Bestemmelse og samtidig for Maaling af Gennemsnitsværdien for en i Tidens Løb varierende Størrelse, er, naar den udføres ved Enkeltmaalinger (Gentagelser)

$D_g = \frac{\Sigma D\,\delta l}{b-a} = \frac{\Sigma D}{n}$ ved n lige store Intervaller. $b-a$ Bredden af Intervallet, for hvilket Gennemsnitsværdien for D skal bestemmes.

Bestemmelsens Kilder til Usikkerhed er:

1. Enkeltmaalingens Usikkerhed $\Delta_1 D$

2. Usikkerheden paa Opsøgning af Stedet resp. Tidspunktet for Enkeltmaalingen $\Delta_2 D = \left(\frac{\delta D}{\delta l}\right) \Delta l$
3. Usikkerhedsvariationer resp. Usikkerhedssvingninger $\Delta_3 D$.

Usikkerhederne gør sig ved n Gentagelser gældende med et samlet Beløb

$$\Delta D_g = \frac{\Delta_1 D + \Delta_2 D + \Delta_3 D}{\sqrt{n}} \cdot F$$

hvor F er den sædvanlige Reduktionsfaktor, og hvor $\Delta_2 D$ resp. $\Delta_3 D$ er Gennemsnitsværdier for de tilsvarende Usikkerheder.

Bestemmelsens Kilder til Fejl er:

1. Variationernes Ujævnhed.
2. Maaleredskabets Udstrækning resp. Tiden for Enkeltmaalingen.

Uregelmæssig Normal.

Man benytter Normaler med større Uregelmæssighed (Variationer fra Sted til Sted) end Toleransen paa Maalingen (Glødelampenormalen). I Almindelighed er det da den karakteriserende Egenskabs Værdi paa et bestemt Sted (i en bestemt Retning), der tjener som Repræsentant for Enheden. Stedet maa i saa Fald være karakteriseret og maa opsøges med en til Maalingens Tolerans svarende Nøjagtighed. — Sjældnere benyttes Gennemsnitsværdien af den varierende Egenskab.

Variationer fra Individ til Individ. Gennemsnitsværdien bestemt ved Stikprøver.

Gennemsnitsværdien for en fra Individ til Individ varierende Samling kan bestemmes ved Stikprøver. Udtages n, vil Bestemmelsens teoretiske Usikkerhed bestaa af to Bidrag:

1. det fra Enkeltbestemmelsernes Usikkerhed hidrørende $\frac{\Delta_1 D}{\sqrt{n}}$
2. det fra Variationerne fra Individ til Individ hidrørende $\frac{\Delta_2 D}{\sqrt{n}}$

naar $\Delta_2 D$ betegner Grænseusikkerheden paa Fremstillingen af Samlingen.

Rationel Materialprøvning skal give Maal for

1. Gennemsnitsværdien af den søgte Egenskab indenfor Samlingen, Prøven eller Leveringen
2. Svingningerne i den søgte Egenskab.

Begge Bestemmelser fordrer Maaling paa Stikprøver og desto flere, jo mindre Tolerans der kan tillades paa de to Bestemmelser.

Enheden repræsenteret ved en Samling Normaler.

Man benytter i den moderne Maaleteknik ikke sjældent Gennemsnitsværdien af en Samling Normaler (Normalmodstande, Glødelamper) som Repræsentant for Enheden. (Kollektivnormal.) Men den Gennemsnitsværdi, der her er Tale om, er den ved alle Individer bestemte.

Ændring ved nødvendige Processer.

De for Maalingens Udførelse nødvendige Processer kan ændre Systemets væsentlige Egenskaber væsentligt. Maalestrømmen ved Wheatstones Bro vil saaledes opvarme saavel Normal som Maaleobjekt og derved muligvis forrykke Forholdet mellem dem. (Forholdet mellem de to Traadstykker eller mellem Forholdsmodstandene vil derimod i Almindelighed ikke ændres ved rigtig Anvendelse af Systemet). Westoninstrumentets Enhed kan tilsvarende ændres ved Maalestrømmen, i Almindelighed dog som Følge af Systemets ringe Temperaturkoefficient kun uvæsentligt.

Om Maalestrømmens Indflydelse er væsentlig ovenfor Normal eller Maaleobjekt, maa i Almindelighed prøves ved Forsøg med stærkere Strøm.

Hysteresis og Eftervirkning.

Afhænger den Egenskab ved Maaleobjektet, vi gør til Genstand for Bestemmelse, af Maaleobjektets forudgaaende Behandling eller af Maaden, hvorpaa Bestemmelsen udføres, maa begge Forhold karakteriseres i særlige Specifikationer. (Eks. Bestemmelsen af Jærns magnetiske Induktion.) Afhænger paa samme Maade Normalens karakteristiske Egenskab af forudgaaende Behandling og Maaden, hvorpaa Normalen benyttes, maa

ogsaa disse Forhold karakteriseres, og noget tilsvarende gælder principielt ogsaa for det fuldstændige System. (Eks. Glimmerkondensatorens Forhold, termisk Eftervirkning i Thermometrets Beholder, elastisk Eftervirkning i Galvanometerophængningen m. m.)

b. *Fejlkilder, karakteristiske for det enkelte Element eller System.*

Materialprøvning forudsætter, at Materialet uden væsentlig Bearbejdning kan benyttes som Maaleobjekt, idet Bearbejdning i Almindelighed rummer Mulighed for Ændring af væsentlige Egenskaber. (Udklipning af Strimlerne ved Prøve af Transformatorblik.)

Materialets Bearbejdning ved en Materialprøvning.

En Kilde til Fejl, man særlig ved Normal og Normalsystemer næsten altid maa regne med, er Ændring med Tiden. Ofte afspejler denne molekulære Ændringer i Materialet for Normalen eller Systemets Elementer. Man stræber at tilvejebringe molekulær Ligevægt ved kunstig Ældning, der gerne i det væsentlige bestaar i en mer eller mindre sammensat Opvarmningsproces. (Eks. Kunstig Ældning af Modstandsnormalen, Længdenormalen, Magneten i Weston-instrumentet, Thermometrets Beholder.)

Ændring med Tiden.

Disse er enkle eller sammensatte. Hovedelementet i de enkle Systemer er enten Længdemaalestokken eller Vinkelskalaen (Kredsen). Til Hovedelementet kommer, bortset fra de Tilfælde, hvor dette udgør hele Maaleapparatet, et Kopieringselement, af hvilket en Kikkert eller et Mikroskop ofte udgør den vigtigste Del. — (Eks. Skydelære, Mikrometerskrue, Kathetometer, Komparator, Sekstant, Meridianinstrument, Spektrometer m. m.). De sammensatte Systemer, der fører Bestemmelsen tilbage til flere Længde- eller Vinkelmaalinger eller til kombineret Vinkel- og Længdemaaling, har ofte i Praksis Karakter af primære Systemer og kan i Konsekvens med Definitionen af disse ogsaa betragtes som saadanne. (Den optiske Bænk).

Længde-maalings- og Vinkelmaalings-systemer.

Hovedelementet har naturligvis Skalaens Fejl og Fejlkilder. Til disse kommer nu Kopieringselementets sær-

Længde-maalings- og Vinkelmaalings-

systemernes særlige Fejlkilder.

lige Fejl og i det hele taget de fra Overføringen af den søgte Længde eller den søgte Vinkel paa Skalaen hidrørende. De Betingelser, Maalingen forudsætter opfyldt af Kopieringselementet, er i det væsentlige af rent geometrisk Karakter, hvad der i Almindelighed gør Diskussionen af Fejlkilderne meget simpel. — (Eks. Kathetometret: Maalestokken lodret, Kikkertens optiske Akse vandret. Derfor maa Maalestokken være parallel med Støttens Omdrejningsakse, og Kikkertens optiske Akse parallel med den mekaniske, denne sidste endelig parallel med Libellens »Akse«. — Den optiske Bænk: Spalten, Billedplanen, Linsens optiske Midtpunkt (ved tyndere Linser) skal befinde sig lodret over de tilsvarende Indices).

Det selvindstillende Udslagssystem.

Den søgte Størrelse karakteriseres her i Almindelighed ved Udslaget af en Viser (materiel Viser, eller Lysstraale) paa en Skala. Indstillingen paa det karakteriserende Udslag sker ved et Motorelement, med hvilket Viseren er forbundet. Motorelementet modtager i Almindelighed — ikke altid — den til Indstillingen nødvendige Energi fra Maaleobjektet. Motorens Kraftvirkning eller Drejningsmoment er derved entydigt afhængig af den søgte Egenskab. Kraft eller Moment bevæger Motorelementet mod en med Bevægelsen voksende Modkraft (Direktionskraften), ofte Snomomentet i en Fjeder eller et elastisk Baand, til der er Ligevægt mellem Kraft og Modkraft. Idet den første altsaa entydigt afhænger af den søgte Størrelse, mens Udslaget er entydigt forbundet med Bevægelsen, der atter paa entydig Maade bestemmer Modkraften, vil Forbindelsen mellem Udslaget og den søgte Størrelse blive entydig. Er Motorelementets Kraftvirkning eller Drejningsmoment proportional med den søgte Egenskab, og frembringes Direktionskraften ved en elastisk Fjeder, hvis Spænding er proportional med dens Formforandring, vil Udslaget blive eller meget let kunne gøres proportionalt med den søgte Størrelse. Det

betyder, at en direktevisende Skala vil blive ligedelt (Westonsystemet). Er derimod Motorelementets Kraftvirkning eller Moment ikke proportional med den søgte Egenskab, vil den direktevisende Skala i Almindelighed ikke blive ligedelt.

Det selvindstillende Udslagssystems særlige Fejlkilder.

Det selvindstillende Udslagssystem kan betragtes som en variabel Normal. Den ved Brugen opnaaelige Nøjagtighed er begrænset ved Aflæsningsusikkerheden. Som Normal har det iøvrigt den enkle Normals sædvanlige Fejl og Fejlkilder, men hertil kommer visse specielle Fejl, Motorelementet kan være behæftet med. To saadanne er Friktionen i Motorelementets Lejer og mangelfuld Afbalancering af Elementet. Den første Fejl ophæver den entydige Forbindelse mellem Udslaget og den Egenskab, Systemet er bestemt til at maale, og repræsenterer derfor en af de værste Fejl, Maalesystemet overhovedet kan være behæftet med. Den sidste Fejl gør Systemets Stilling til en væsentlig Egenskab.

Nulsystemet.

Som Forbillede for de forskellige Nulsystemer kan Stangvægtens forskellige Former betragtes. (Tilsvarende kan Fjedervægten betragtes som Forbillede for det selvindstillende Viserinstrument).

Almindelig Vejning kan betragtes som Sammenligning af to Forhold: Vægtstangsarmenes kendte med det ubekendte Forhold mellem Maaleobjekt og Normal (Vægtloddet eller Vægtlodderne). Ved Vejningen afpasses de to Forhold, saa de er lige store. Vægten er da i Ligevægt, d. v. s. dens Viser gør intet Udslag. (Heraf Navnet Nulmetode). Det kendte Forhold kan være konstant. Normalen, hvormed Maaleobjektet sammenlignes, maa da være variabel eller bestaa af en Skala af Enkeltnormaler. Det kendte Forhold kan imidlertid ogsaa være variabelt, og da behøves kun en enkelt Normal (Bismeren).

Nulsystemets særlige Fejlkilder.

Ud fra det anlagte Synspunkt kan Vægten og tilsvarende Maalesystemer betragtes som en Normal for

Forhold. Normalen kan være enkelt og den kan være variabel. Afviger Forholdet fra sin nominelle Værdi, gør denne Afvigelse sig gældende som en Enhedsfejl. Ved Forholdet 1 (ligearmet Vægt) kan Fejlen elimineres ved Ombytning af Maaleobjekt og Normal. I andre Tilfælde maa Justering anvendes. Specielt maa det variable Forholds Skala justeres som en almindelig variabel Normals. (Kalibreringskurven for Maaletraaden ved Wheatstones Bro). Ved Siden af Forholdets Fejl optræder nu Fejl hidrørende fra Afvigelser fra de for Forbindelserne mellem Maaleobjekt og System forudsatte Betingelser og i det hele taget fra de teoretiske Forudsætninger. (Tilledningerne ved Wheatstones Bro, fremmede elektromotoriske Kræfter o. s. v.). Disse sidste i Forbindelse med Forholdets Fejl omfatter de Fejl, der er karakteristiske for Nulsystemet i sig selv. Dertil maa den anvendte Normals Fejl naturligvis drages ind under Kontrol ved Brugen af Systemet.

c. *Vekselvirkning mellem Systemets Dele.* Indbringelse af Maaleredskabet i det System, hvorpaa der maales, kan ændre den søgte Egenskab. (Ampèremetret ændrer Kredsens Modstand og derved den Strøm, som skal maales. Strømningsmaaleren ændrer Strømningsforholdene.) Særlig betegner de energiforbrugende Systemer en Kilde til Fejl (Ændring af Spændingskilden ved det energiforbrugende Voltmeter.)

Omvendt kan Maaleobjektet ændre Maaleredskabet. (Belastningen af en Vægtstang bøjer Stangen. Bøjningen skyldes dog ogsaa Normalen.)

I visse Tilfælde kan Vekselvirkningen mellem Systemets Dele endelig ændre væsentlige Egenskaber saavel ved Maaleobjektet som ved det øvrige System. (Vekselvirkningen mellem Felt og Prøve ved Bestemmelse af Jærns magnetiske Induktion.)

d. *Maalingens Teori. Hovedsynspunkter.* Man kan tale om to Systemer, det teoretiske, der afbildes ved Maalingens Teori, og det faktiske. Disse Systemer skal i alt væsentligt falde sammen eller brin-

ges til at falde sammen. Afpasningen kan ske enten ved Ændring af det faktiske System eller det teoretiske, altsaa ved Afpasning af Teorien. I mekanisk Korrektion haves en Afpasning af det faktiske i talmæssig Rettelse ved et Korrektionsudtryk en Afpasning af det teoretiske System.

Afpasning af Teorien ved Rækkeudvikling.

I Rækkeudvikling haves ofte et Middel til rationel Afpasning af en Teori netop for den Tolerans, der kan tilstedes i det enkelte Tilfælde. Afpasningen sker ved Medtagelse af det nødvendige Antal Led i Rækkeudviklingen. Den kræver en Undersøgelse af Restleddets Størrelse.

Teorien som et paa Forhaand givet Middel for Maalingen.

Ofte maa Teorien tages som paa Forhaand givet. Dens Forudsætninger maa da være opgivne eller, om man vil, Betingelserne for dens Brug maa være specificerede. Specifikationerne maa dernæst overholdes med en til Formaalet svarende Tolerans. Ofte kræves en særlig Undersøgelse for at afgøre, om Systemet opfylder Teoriens udtalte — eller underforstaaede — Betingelser.

REGISTER

Side

Absolut Usikkerhed 43
Afledede Iagttagelser 67
Aflæsningsusikkerhed 15, 19
Afrunding til logaritmisk Udtryk 75

Bearbejdning som Kilde til Fejl ved Maaleobjektet 171
Bessels Eliminationsmetode . 228
Brydningsforholdsbestemmelse ved Spektrometer, Overslag over Usikkerhed. 58
Bureau of Standards magnetiske Kreds 281
Bøjningsmetoden til Bestemmelse af Elasticitetskoefficienten 304

Cifrenes Antal ved Resultatets Beregning 50

Delefejl 209
Differensmaaling 271

Eftervirkning og Hysteresis. 178
Elementerne i det primære Maalesystem 143
Elimination af Maalingens Fejl 142
Ellipsoidemetoden 277
Enhedsfejl: Normalens 190
— Skalaens 209
Ensidig Afvigelse i væsentlige Egenskaber 11, 139
Ewings Differensmetode 287
Ewings Metode til Maaling af den magnetiske Induktion. 285
Excentricitetsfejl 212
Ekstrapolation 122

Fejl, defineret 9
Forholdsregler mod Fejlen .. 141
Forholdet mellem Grænseusikkerhed og Middelusikkerhed 27, 29
Forholdsmaaling, Karakterisering 272
Forholdsmaaling som Middel til Elimination af Systemets Enhedsfejl 273
Forholdsmaaling i magnetisk Materialprøvning 283
Forlængede Wheatstones Bro, Metodens Teori 292
Forlængede Wheatstones Bro, Metodens Usikkerhed 76
Fotometri. Indstillingsmaader 128

Side

Fotometri. Metodens Usikkerhed 55
Fremmede elektromotoriske Kræfter 264
Fremstillingsusikkerhed 190, 193

Gennemsnitsværdien bestemt ved særlige Metoder 168
Gennemsnitsværdien ved uregelmæssigt Maaleobjekt ... 159
Gentagelse som Middel til Bestemmelse af Usikkerheden 17
Gentagelse som Middel til Elimination af Usikkerhed 149
Gentagelse med forskellig Sikkerhed 86
Grafisk Middeltal 94
Grænseusikkerheden paa Iagttagelsen 17, 18
Grænseusikkerheden paa Resultatet 35
Grænseusikkerheden og Middelusikkerhed 27
Grænseusikkerhedens Natur 20
Gunstigste Betingelser for Maalingen 118

Hefnerlampens væsentlige Forhold 198

Iagttagelsen 9
Iagttageren 310
Indstillingsusikkerhed 15
Interpolation 106, 119
Invar 197

Justering 190
Justeringscertifikat 190

Karakterisering og Afpasning 150

Side

Karakteriserende Maaling ... 152
Kalibrering af en Maaletraad 62, 255
Kataloger 191
Katalogangivelse af Fremstillingsusikkerheden 191
Kathetometret, Diskussion af dets Fejlkilder 216
Kontrol af Overensstemmelsen mellem det faktiske System og Teorien 301
Korrektion, defineret 190
Korrektionens Teori 107

Længdemaalings- og Vinkelmaalingssystemer 143
Længdemaalings- og Vinkelmaalingssystemers Karakterisering 215
Længdemaalings- og Vinkelmaalingssystemers Fejlkilder 215

Maaleobjektet 9
— , dets væsentlige Forhold. 145, 156, 171, 178
Maaleredskabet 9
Maalesystemet 9, 143, 252
Maalingen 9
Maalingens Teori 9, 290
Magnetisk Kreds 279
Manganin 197
Materialprøvning ... 168, 171, 178
Maxwell-Siemens Metode 286
Mekaniske Rystelser 153, 222, 246
Middeltallet, dets Usikkerhed 41
Middeltalsbegrebet i udvidet Forstand 86
Middelusikkerhed 27, 39
Milieuvariationer 145, 150, 195, 220
Mindste Kvadraters Metode . 93
Modstandsevne, Bestemmelse ved Thomsons Bro 60

Side

Modstandsmaaling ved Westonsystemet 105

Nominel Værdi 190
Normalen 190
Nulpunktsfejl 209
Nulsystemet 143, 250, 254

Objektiv Usikkerhed . 11, 15, 140
Ohmmetret 123
Optisk Bænk 53, 127, 224
Overensstemmelsens Vurdering 114
Overslag over Grænseusikkerheden 35
Overslag over Indflydelsen af Milieuets Temperaturvariationer 146

Praktiske Grænseusikkerhed 37
Primære Maalesystem 143
Processer, nødvendige for Maalingen, som Kilde til Fejl 173, 205

Reciprokfunktion 82
Reduktion af den teoretiske Usikkerhed til den praktiske 37
Reduktionsfaktor 40, 41
Relativ Usikkerhed 43, 81
Resultatet 9
Ringmetoden til Bestemmelse af den magnetiske Induktion 283
Rum og Tid, Analogiforhold 156
Rystelser, mekaniske ... 153, 222
— , mekaniske, termiske og magnetiske 246
Rystelser, optiske (optisk Uro) 223
Rækkeudvikling 292

Side

Sammensat Maaling 100
Sekundære væsentlige Egenskaber 200
Selvindstillende Udslagssystemer 143, 231
Sikkerhedsfaktor 12, 42
Skalaen 143, 207
Skjulte Iagttagelser 81
Specifikationer for forudgaaende Behandling af Maaleobjektet 178
Specifikationer for Maaleobjektets Behandling under Prøven 185
Specifikationer for Fremstillingen af en Normal 204
Specifikationer for Normalens Brug 205
Specifikationer for Brugen af en given Teori 295
Spejlaflæsningens Teori 290
Statsprøveanstalter 191
Subjektiv Usikkerhed . 11, 15, 31
Substitutionsmetoden 269
Summationsreglen 73
Svingende Afvigelse 11, 137

Talregningen i Overslaget over Usikkerheden 49
Talregningen i Resultatets Beregning 50
Temperaturformel 195
Temperaturhysteresis 187
Temperaturkoefficient 195
Temperatursvingninger 145, 146, 148
Temperaturuafhængigt Materiale 196
Temporær Normal 275
Teorien 9, 290
— , Anvendelsesomraade 301
Teoretisk Grænseusikkerhed . 37

Side

Thomsons Bro 265
Tilbagevirkning af Maaleobjekt paa Maaleapparat .. 275
Tilledningstraadene ved Wheatstones Bro 260

Ubevidst Forfalskning af Iagttagelsen 312
Udslagssystemet 143, 231
Uregelmæssighed ... 19, 156, 223
Usikkerhed, defineret 9
— paa Grænseusikkerhed og Middelusikkerhed 27
Usikkerhed paa Resultatets Usikkerhed 46, 47
Usikkerhed paa Tegningen ved grafisk Udjævning 96

Variation i Rum og Tid 156
Variation fra Individ til Individ 166
Variation fra Sted til Sted indenfor Normalen 202
Voltmetret brugt som Ohmmeter, Metodens Usikkerhed 123
Vægten af Iagttagelsen ved Gentagelse 87
Væsentlige Egenskaber ved Systemet 10
Væsentlige Forhold ved Maalingen 11

Westonelementet 196
Westoninstrumentet, Diskussion af Fejlkilder 233
Westoninstrumentet anvendt til Modstandsmaaling 105
Wheatstones Traadbro, Diskussion af Fejlkilder 254
Wheatstones Traadbro, Diskussion af Usikkerhed 118

Ændring ved Bearbejdning. 171
Ændring ved Maaleapparatets Indbringelse i Systemet 175
Ændring ved nødvendige Processer 173
Ændring med Tiden 206

Trykfejl.

pg. 22, sidste Linie: I Stedet for $^1/_{100}$ skal der som i Tabellen staa 10^{-10}.

pg. 265 i næstsidste Formel skal staa: $\left(\frac{l+l'}{2}\right)$ i Stedet for $\left(\frac{l+l^1}{2}\right)$

pg. 265 i sidste Formel skal staa: $\frac{R+R'}{2}$ i Stedet for $\frac{R+R^1}{2}$

pg. 294 i tredie Linie mangler Lighedstegn efter $\left(\frac{\partial^3 W}{\partial l^3}\right)_0$

Danmarks Tekniske Bibliotek
mm 00702 7230
300002713571

