

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

DB

DB

De Marshward
dell om Jordhug og
dets anslutningerne
[1897]



693 1323.

132 3



693 132 3

Lidt om Jordtryk og dets analytiske Form.

Af Ingeniør Wilhelm Marstrand, M. Ing. F.

Det analytiske Udtryk for Jordtrykskonstanten, bestemt efter den sædvanlige Coulomb'ske Teori, som Professor Lütken anfører (»Brobygning« I, S. 162 ff.), nemlig

$$k_v = \left[\frac{\cos(\varepsilon + \varphi_1)}{\cos(\varepsilon + \varphi + \varphi_1)} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi + \varphi_1)} \cdot \frac{1 - \sqrt{n}}{1 - n} \right]^2,$$

hvor

$$n = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi + \varphi_1) - \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi + \varphi_1)},$$

er saa langt, at det afholder de fleste fra ethvert Forsøg paa direkte Beregning af k_v .

Paa sin Vis endnu mindre indbydende er det Udtryk, som findes i »Hütte« (21. Udg. III, S. 201), fyldt, som det er, med Vinkler og Udtryk, man ikke direkte kender.

Langt bedre er det Udtryk, Ingeniør Vedel anførte her i »Ingeniøren« 1908, S. 71:

$$k_v = \cos(\varepsilon + \varphi_1) \cdot \frac{\cos(\varepsilon - \psi) \cos(\varepsilon - \varphi)}{\cos^2 \varepsilon \cdot \cos(\varepsilon - \psi + \varphi + \varphi_1)} \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{\theta}{2} \right),$$

hvor Vinkelen θ er bestemt ved

$$n = \sin^2 \theta = \frac{\sin(\varphi - \psi) \sin(\varphi + \varphi_1)}{\cos(\varepsilon - \psi) \cos(\varepsilon + \varphi_1)} \quad ^1)$$

men det er lidt vanskeligt at huske.

I det følgende skal det vises, at man kan ulede et endnu kortere Udtryk, der tilmed staar i et overmaade simpelt og let huskeligt Forhold til Figurens Linier, ikke alene som tidligere anført (»Ingeniøren« 1908, S. 198) ved Reduktion af det Lütken'ske, men ogsaa direkte af Figuren.

Den almindelige Coulomb'ske Jordtryksteori bygger, som bekendt, paa den ganske vist gale, men dog brugelige Antagelse, at den Del af Jorden, som skrider med, naar en Mur AB giver efter, skiller fra den øvrige Jord, langs en plan Skilleflade, Glideplanet AG, ogsaa kaldet Glidelinien, idet man betragter et Snit i den tænkte, uendelig lange, prismatiske Jordmasse (Fig. 1).

Vægten P af det skridende Jordprisme ABG plus den derpaa hvilende Belastning BB_1G_1G maa holdes i Ligevægt af Modtrykkene fra Glideflade og Mur — Q og — E.

Er Glidefladen AG plan, maa Q i Skridningsøjeblikket danne Friktionsvinkelen φ (lig den naturlige Skrænt) med Normalen til AG, medens Jordtrykket E med Normalen til Murens Bagside danner en Vinkel φ_1 , der maa anses kendt gennem Forsøg, men dog højst kan være

¹⁾ Det havde været rimeligere at gøre dette Udtryk logaritmisk ved Hjælp af en Vinkel θ' bestemt ved $\cos^2 \theta' = n$, hvorved sidste Led i Formelen var kommet til at hedde $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta'}{2}$. Analogien med $\operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)$

— den Værdi, k_v har, naar $\varepsilon = \psi = \varphi_1 = 0$ — er uden praktisk Værdi. Men man bør dog, da n godt kan blive større end 1, hellere benytte en Vinkel θ'' bestemt ved $\operatorname{tg}^2 \theta'' = n$; sidste Led kommer saa til at hedde $\operatorname{tg}^2 (45 - \theta'')$.

lig φ , thi var den større, vilde Muren plus et tyndt Lag Jord virke som en ny Mur, hvor φ_1 var lig φ .

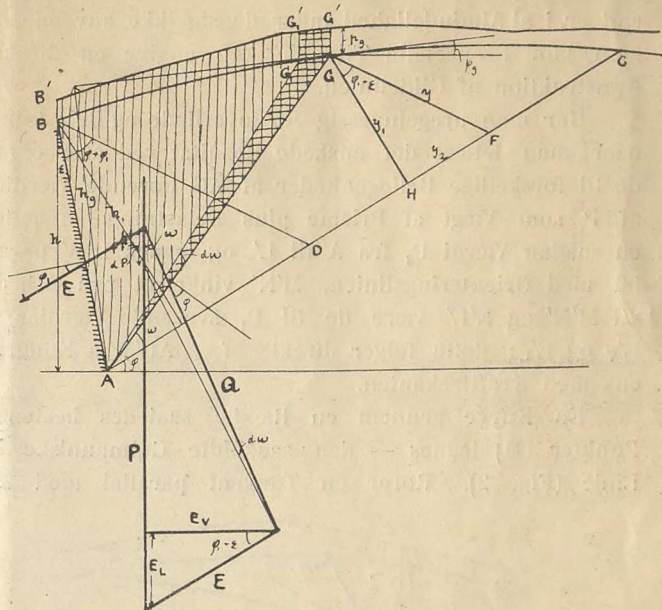


Fig. 1.

P, Q og E danner en Trekant, Krafttrekanten, der let ses at være ligedannet med $\triangle AGF$, idet GF er tegnet parallel med Orienteringslinien BD. Og man har da umiddelbart af Figuren

$$E_v = P \cdot \frac{AG}{AF} \cdot \sin \omega, \quad (1)$$

$$E_L = E_v \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varepsilon). \quad (2)$$

Af alle saaledes sammenhørende Værdier af E og ω har kun den største Værdi, E kan antage, Interesse. Denne kendes paa, at E holder sig uforandret, naar ω faar Tilvæksten $d\omega$. Af Krafttrekanten ses denne Betingelse at være opfyldt, naar

$$-dP = P \cdot \frac{AG}{AF} \cdot \frac{d\omega}{\sin \omega}, \quad (3)$$

medens Prismet $AGG'G_1G_1$ giver det almindelige Udtryk

$$-dP = \gamma \cdot \frac{1}{2} h_g \cdot GG_1 + p_g GG_1 \cos \psi_g, \quad ^1)$$

der kan skrives paa Formen

$$-dP = \gamma' \cdot \frac{1}{2} AG^2 d\omega, \quad (4)$$

hvor

$$\gamma' = \gamma + \frac{2p_g \cos \psi_g}{h_g}, \quad (5)$$

idet Volumenet af Prismet $AGG'G_1$ baade kan skrives $\frac{1}{2} h_g \cdot GG_1 \cdot 1$ og $\frac{1}{2} AG^2 \cdot d\omega \cdot 1$.

Ved at sætte Udtrykkene (3) og (4) lige store faar man den Betingelse, Glidelinien maa opfylde, for at E kan antage sin Maksimumsværdi, den saakaldte Rehbann'ske Sætning

$$P = \gamma' \cdot \triangle AGF. \quad (6)$$

¹⁾ I »Hütte« er Faktoren $\cos \psi_g$ udeladt, idet Belastningen p_g der er maalt vinkelret paa Jordoverfladeelementet, men da en Belastning altid maa tænkes at virke lodret, er det ogsaa naturligt at indføre den som saadan.

Indsættes dette Udtryk under Formen $P = \gamma' \cdot \frac{1}{2} y_1 \cdot AF$ sammen med sin $\omega = y_1 : AG$ i Udtrykket (1) for E_v , faar man, at E_v 's Maksimumsværdi kan skrives paa Formen:

$$E_v = \gamma' \cdot \frac{1}{2} y_1^2 \quad (7)$$

Hvor simple og smukke disse Udtryk (6 og 7) end er, i al Almindelighed lader de sig ikke anvende, da man kun i specielle Tilfælde kan angive en direkte Konstruktion af Glidelinien.

Har man uregelmæssig Jordoverflade og Belastning, naar man lettest det ønskede Resultat ved at beregne de til forskellige Beliggenheder af AG hørende Værdier af P som Vægt af Prisme plus Belastning. Afsættes en saadan Værdi P_1 fra A til L' , og tegnes $L'M'$ parallel med Orienteringslinien, $M'N'$ vinkelret paa AC, da vil $M'N'$ og $N'L'$ være de til P_1 svarende Værdier af E_v og E_L ; dette følger direkte af $\triangle AL'M'$'s Kongruens med Krafttrekanten.

En Kurve gennem en Række saaledes bestemte Punkter (M) tegnes — den saakaldte Culmann'ske E-Linie (Fig. 2). Rører en Tangent parallel med AC

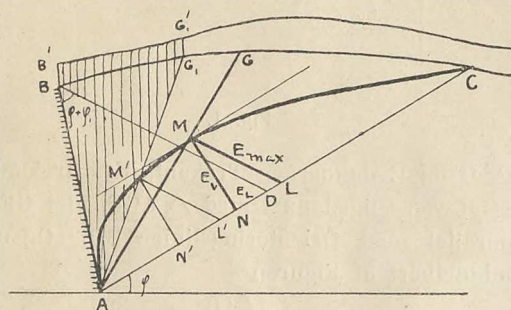


Fig. 2.

denne i M, da er AMG Glidelinien, MN og NL de søgte Maksimumsværdier af E_v og E_L .

Denne Fremgangsmaade kan altid anvendes, men er Jordoverfladen plan og Belastningen samtidig ensformig fordelt — og begge disse Fordringer vil jo som Regel være opfyldte —, saa kan en direkte Konstruktion af Glidelinien angives (Fig. 3)²⁾.

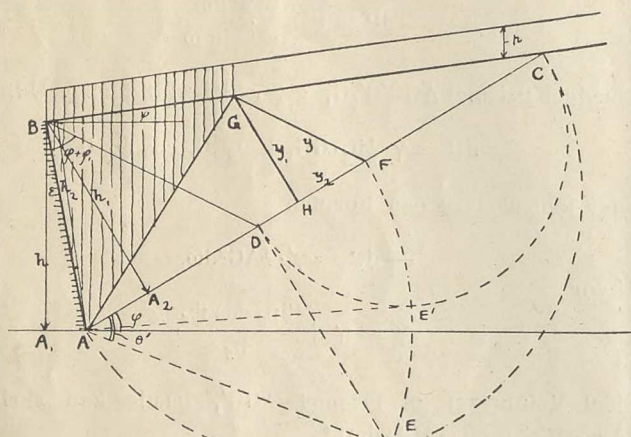


Fig. 3.

1) Og de tilsvarende $E_L = \gamma' \cdot \frac{1}{2} y_1 y_2$ og $E = \gamma' \cdot \frac{1}{2} y y_1$. Man ser, at Udtrykket for E_v er endnu simplere end det kendte Udtryk for E, og det er derfor altid lettest først at beregne E_v , derefter E_L , ikke, som det sædvanlig gøres, først at beregne E og deraf E_v og E_L .

2) I det ogsaa hyppigt forekommende Tilfælde, ubelastet Jord med brudt Overflade, kan en ganske tilsvarende Konstruktion angives.

Her har man nemlig:

$$P = \gamma \cdot \triangle ABG + p \cdot BG \cos \psi,$$

$$P = \left(\gamma + \frac{2p \cos \psi}{h_2} \right) \cdot \triangle ABG.$$

Men første Faktor her er netop lig Størrelsen γ' i Udtryk (6). Glideliniens Beliggenhed er følgelig uafhængig af Belastningen og kun bestemt ved Fordringen

$$\triangle ABG = \triangle AGF, \quad (8)$$

der paa sædvanlig Maade omformes til

$$AF^2 = AC \cdot AD, \quad (9)$$

hvilken Betingelse direkte angiver den almindelige Poncellet'ske Konstruktion.

Varierer h, vil alle Længder variere i samme Forhold; man kan altsaa med Fordel skrive (1) og (2) paa Formen

$$E_v = \frac{1}{2} \gamma' h^2 \cdot k_v, \quad (10)$$

$$E_L = \frac{1}{2} \gamma' h^2 \cdot k_L. \quad (11)$$

Af (10) og (7) ses, at man for Jordtrykskonstanten k_v har Udtrykket

$$k_v = \left(\frac{y_1}{h} \right)^2, \quad (12)$$

der kan omskrives til

$$k_v = \left(\frac{h_1}{h} \cdot \frac{y}{h_1} \right)^2. \quad (13)$$

Af $\triangle ABA_1$ og $\triangle ABA_2$ faas straks

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \quad (14)$$

og af $\triangle CBD$ og $\triangle CGF$

$$\frac{y_1}{h_1} = \frac{CF}{CD} = \frac{1 - \sqrt{n}}{1 - n} = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}, \quad (15)$$

idet man sætter $AD = AC \cdot n$ og da har $AF = AC \cdot \sqrt{n}$.

Af $\triangle ABD$ faas ved Anvendelse af Sinusligningen

$$AD = h \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{\sin(\varphi + \varphi_1)}{\cos(\varepsilon + \varphi_1)} \quad (16)$$

og af $\triangle ABC$ paa samme Maade

$$AC = h \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{\cos(\psi - \varepsilon)}{\sin(\varphi - \psi)}. \quad (17)$$

Heraf

$$n = \frac{AD}{AC} = \frac{\sin(\varphi - \psi) \sin(\varphi + \varphi_1)}{\cos(\varepsilon - \psi) \cos(\varepsilon + \varphi_1)}, \quad (I)$$

altsaa samme Udtryk som det, der indgaar i Ingeniør Vedel's og Prof. Lütken's Formler. Her ser man altsaa dette Udtryks geometriske Betydning.

$$k_v = \left(\frac{\cos(\varphi - \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{n}} \right)^2 \quad (II)$$

hvis geometriske Betydning fremgaar af (13), og som sammen med

$$k_L = k_v \cdot \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varepsilon) \quad (III)$$

og Udtrykkene (10) og (11) for E_v og E_L , der, naar man i Udtrykket for γ' indfører $h_2 = h \cdot \frac{\cos(\varepsilon - \psi)}{\cos \varepsilon}$ og udvikler, antager Formerne

$$E_v = \frac{1}{2} \gamma h^2 \cdot k_v + p \frac{\cos \varepsilon \cos \psi}{\cos(\varepsilon - \psi)} \cdot h \cdot k_v^2 \quad (IV)$$

$$E_L = \frac{1}{2} \gamma h^2 \cdot k_L + p \frac{\cos \varepsilon \cos \psi}{\cos(\varepsilon - \psi)} \cdot h \cdot k_L \quad (V)$$

giver den fuldstændige Bestemmelse af Jordtrykkets Størrelse.

Man gør bedst i at holde hvert Led i IV og V adskilt under Beregningen, thi skal man undersøge Muren med Hensyn til Væltning og Kantspænding i A_0 , har man Brug for Momentet fra Jordtrykket, og for det har man Udtrykkene

$$M_v = \frac{1}{2} \gamma h^2 k_v \cdot \frac{1}{3} h + p \frac{\cos \varepsilon \cos \psi}{\cos(\varepsilon - \psi)} \cdot h \cdot k_L \cdot \frac{1}{2} h, \quad (VI)$$

$$- M_L = \frac{1}{2} \gamma h^2 k_L \cdot (b - \frac{1}{3} h \operatorname{tg} \varepsilon) + p \frac{\cos \varepsilon \cos \psi}{\cos(\varepsilon - \psi)} \cdot h \cdot k_L (b - \frac{1}{2} h \operatorname{tg} \varepsilon). \quad (VII)$$

Betydningen af de i Formlerne I — VII indgaaende Størrelser er, idet alle Udtryk for Kræfter og Momenter gælder for en Mur af Længden 1 (jvnf. Fig. 4):

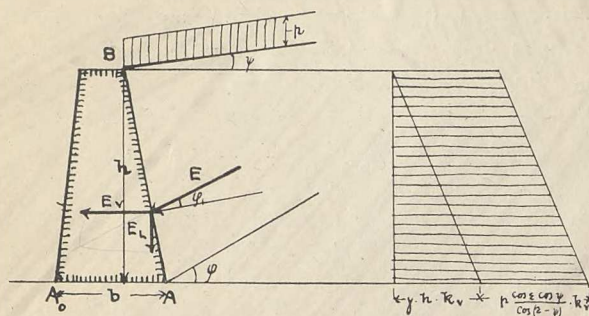


Fig. 4.

h	Murens lodrette Højde,
b	» Bredde i Dybden h ,
φ	Friktionsvinkelen mellem Jord og Jord,
φ_1	» » » » » Mur,
ψ	Vinkelen fra den vandrette til Jordoverfladen,
ε	» » » lodrette » Murens Bagflade,
	begge positive som vist paa Fig. 3 og 4.
γ	Jordens Vægt pr. Rumenhed,
p	Belastningen pr. Fladeenhed,
E_v og E_L	Jordtrykkets vandrette og lodrette Komponent,
M_v og M_L	disse Kræfters Moment med Hensyn til Murens Forkant.

1) Ogsaa dette Udtryk lader sig let gøre logaritmisk. Simplest med Vinkelen θ' ($\cos^2 \theta' = n$, se Note 1) Side 665, venstre Spalte), der let ses at være Vinkelen CAE. Faktoren $\frac{1}{1 + \sqrt{n}}$ bliver da $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta'}{2}$. Vil man, da n godt kan blive større end 1 (hvilket medfører, at man maa tegne Konstruktionscirkelen over AD istedetfor AC), hellere straks indføre θ'' ($\operatorname{tg}^2 \theta'' = n$), bliver Faktoren at omskrive til $\frac{\cos \theta''}{\cos(45^\circ - \theta'') \cdot \sqrt{2}}$; men det er ingen Lettelse at gøre Udtrykket logaritmisk. Har man beregnet $\sqrt{n}$, kan man med tilstrækkelig Nøjagtighed med Størrelsen $1 + \sqrt{n}$ gaa ind i en Taltabel i Kolonnen $\frac{1}{n}$ og vil da i Kolonnen n^2 direkte have Værdien af $\left(\frac{1}{1 + \sqrt{n}} \right)^2$.

2) Indfører man Belastningen som Jordhøjde $h_0 = \frac{p}{\gamma}$, ses det, at denne Højde skal multipliceres med $\frac{\cos \varepsilon \cos \psi}{\cos(\varepsilon - \psi)}$ eller, hvad der er det samme, med $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \psi}$, før den kan indgaa i Formelen. I Prof. Lütken's Udvikling er denne Faktor oversprunget; den er jo ogsaa 1 for $\psi = 0$, men Fejlen er let at finde. I »Brobygning« I, S. 175, Linie 7 for oven, staar der rigtigt nok $P = \gamma \cdot ABC$, men ABC er ikke lig $\frac{1}{2} h \cdot x$, undtagen naar $\psi = 0$. Ingeniør Vedel anfører Faktoren $\frac{\cos \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \psi)}$, men har da regnet med Belastning pr. Enhed af den skraa Overflade, ikke som sædvanlig af dennes vandrette Projektion.

