

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

73 0



513.

1880



GEOMETRISKE EKSPERIMENTER

AF

J. HJELMSLEV



KØBENHAVN
JUL. GJELLERUPS FORLAG
1913

Denne Bog handler om geometrisk Konstruktion, i videste Forstand.

Den handler ikke om Approximationer, men om eksakte Konstruktioner.

Den handler samtidig om den praktiske Udførelse, idet den søger at forme Konstruktionen med den simplest mulige Realisering for Øje.

Og gennem en naturlig Forening af disse Formaal stræber den at bane Vej for et lidt videre Syn end det, som paa delle Omraade har hersket siden Platons Dage.

1. Konstruktion og Eksperiment.

V^{ED} geometrisk Konstruktion forstaar man sædvanligvis »Konstruktion ved Passer og Lineal«. Herved er det for det første forudsat, at man ved Tegningens Udførelse ikke bruger andre Apparater end Passer og Lineal; men dette er ikke det eneste Forbehold, der tages. Hvis man f. Eks. vil bestemme en ret Linie parallel med en given og i en given Afstand fra samme og i dette Øjemed tegner 2 Cirkler med Centrer paa den givne Linie og med den givne Afstand til Radius, for derpaa ved Hjælp af Linealen umiddelbart at drage en ydre Fællestangent til Cirklerne, da er Opgaven ganske vist derved løst uden Brug af andre Apparater end Passer og Lineal, men enhver, der har lært lidt Geometri, vil straks være paa det rene med, at vi her er gaaet uden for de »lovlige« Grænser for disse Apparaters Anvendelse. Hvilke Operationer er da lovlige?

Svaret lyder saaledes: For det første er det tilladt ved Hjælp af Linealen at tegne en ret Linie gennem 2 bekendte Punkter og for det andet ved Passeren at tegne en Cirkel med givet Centrum og Radius. Hertil kommer endnu én Operation, nemlig den, ved Hjælp af Øjet at opsøge Skæringspunkter (mellem tegnede rette Linier og Cirkler).

Den nævnte Gruppe af Operationer omfatter alt, hvad man kan drage ind under det klassiske Begreb: Konstruktion ved Passer og Lineal. Alle andre Handlinger, som foretages for at naa til Realiseringen af en eller anden Figur med

foreskrevne Egenskaber, betegner vi som Eksperimenter; hertil hører altsaa f. Eks. den ovennævnte Bestemmelse af en ret Linie parallel med en given i en given Afstand. Skønt den klassiske Konstruktion i Virkeligheden bør opfattes som et specielt Tilfælde af det almindelige geometriske Eksperiment, og dette paa den anden Side ikke er noget som helst andet end Konstruktion i videre Forstand, vil vi dog i det følgende af Hensyn til almindelig Sprogbrug skelne imellem »sædvanlig Konstruktion« og »Eksperiment«.

Eksperimentet faar man Brug for i to Tilfælde:

1) Naar den foreliggende Opgave vel lader sig løse ved sædvanlig Konstruktion, men løses lettere og nøjagtigere ved hel eller delvis Anvendelse af Eksperiment, og

2) naar Opgaven ikke lader sig løse ved sædvanlig Konstruktion.

Eksempler kender enhver praktisk Tegner. Man behøver jo blot at henvise til Anvendelsen af Hovedlineal, Tegnetrekant og andre praktiske Hjælpemidler; men selv om vi begrænser os til saadanne Operationer, som udføres alene ved Hjælp af Passer og Lineal, kan vi nævne mange nærliggende Eksempler:

Opg. 1. *At maale Afstanden fra et Punkt A til en ret Linie l.*

Denne Operation udføres direkte ved Haandpasseren (Maalepasseren^{*)}), idet man ved Prøve bestemmer en saadan Passeraabning, at den ene Passerspids kan anbringes i A, samtidig med, at den anden kan føres ind i Linien *l*, men aldrig kan komme over paa den Side af *l*, der er modsat A. Operationen udføres altsaa uden at man tegner nogen Hjælpe-linie.

^{*)} Herved forstaas en Passer med to Spidser; den tjener væsentlig til Maaling og Flytning af Liniestykker. Naar der i de følgende Eksempler er Tale om at udføre en eller anden Operation med Passeren, er det som Regel Haandpasseren, vi mener.

Opg. 2. *At maale den største eller mindste Afstand fra et Punkt til en Cirkel.*

Udføres paa ganske lignende Maade som den foregaaende Maaling. Opgaven udvides let til den mere almindelige, at maale Afstanden fra et Punkt til en Kurve, der foreligger tegnet.

I Forbindelse hermed skal nævnes, at man straks kan maale Diameteren i en Cirkel, der foreligger tegnet, uden at man behøver at drage nogen Diameter; man sætter blot den ene Passerspids i et Punkt af Periferien og maaler den største Afstand fra dette Punkt over til Periferien. Flytter man derefter Passeren med den fundne Passeraabning, saaledes at den ene Spids anbringes i Centrum, medens den anden sættes til Papiret i et Punkt P , og man derpaa direkte maa-ler den største Afstand fra P over til Periferien, har man et Stykke i Passeren, der er 3 Gange Cirkelns Radius, og det vil være let at gaa videre paa samme Maade.

Har man et Stykke a i Passeren, og der foreligger tegnet en Cirkel med Radius r , da kan man ved at anbringe den ene Passerspids i Centrum og sætte den anden til Papiret i et eller andet Punkt P og derpaa maale den største eller mindste Afstand fra P til Periferien skaffe sig en Afstand, der er henholdsvis $a + r$ eller $a - r$ (numerisk bestemt).

Den Slags Maalinger kan være nyttige ved Kontrolprøver eller ved sammensatte Eksperimenter.

Opg. 3. *At dele et Liniestykke i to eller flere lige store Dele.*

Man vælger en Passeraabning, der skønnes nogenlunde at ville svare til Størrelsen af det søgte Stykke, og prøver, om den passer; viser den sig at være valgt for stor eller for lille, retter man paa den, indtil den faar den rigtige Størrelse.

Det simpleste Tilfælde er Halvering; her vil Forsøget hurtigt lykkes, og det er sikkert, at det Resultat, man finder

ad denne Vej, er bedre end det Resultat, som man vil komme til ved en hvilken som helst anden Metode, idet det udførte Eksperiment i sig selv indeholder en umiddelbar Kontrol af Resultatet.

Deling i 3 Dele vil ogsaa hurtigt lykkes, og Deling i 4 Dele opløses naturligvis i 2 Halveringer, ligesom man i det hele ved sammensatte Tal opløser dem i Primfaktorer. Ved større Antal kan Forsøget lettes ved Brug af Maalestok eller ved en passende Anvendelse af kvadreret Papir (smlg. den elementærgeometriske Konstruktion ved Hjælp af parallelle Linier).

Opg. 4. *Paa en ret Linie eller Cirkel at finde et Punkt, der har en given Afstand fra en anden ret Linie eller Cirkel.*

Man tager den givne Afstand i Passeren og prøver sig frem, under Anvendelse af den samme lagttagelse som i Opg. 1 og 2, indtil man finder det søgte Punkt.

Den samme Metode anvendes umiddelbart til Løsning af den mere almindelige Opgave, paa en vilkaarlig tegnet Kurve at finde et Punkt, der har en given største eller mindste Afstand fra en anden Kurve, der ogsaa foreligger tegnet.

Opg. 5. *Paa en given ret Linie eller Cirkel (eller i Almindelighed en vilkaarlig tegnet Kurve) at finde et Punkt, der har lige store Afstande fra to givne Punkter.*

Opgaven løses ved, at man paa Skøn vælger et Punkt paa den givne Kurve og prøver, om det ligger lige langt fra de to givne Punkter; i modsat Fald flytter man Punktet i Overensstemmelse med Udfaldet af Forsøget, indtil man finder et Punkt, der passer.

Det er klart, at den samme Metode kan anvendes, naar man paa en given Kurve skal finde et Punkt, hvis Afstande 1) fra 2 givne Linier, eller 2) fra et givet Punkt og en given Linie, eller 3) fra et givet Punkt og en given Kurve, eller 4) fra to givne Kurver, er indbyrdes lige store.

Og denne Metode rummer en stor Mængde Anvendelser. Vi nævner foreløbig følgende:

Opg. 6. *Tegn en Cirkel, der gaar gennem 2 givne Punkter A og B og rører en given Cirkel (eller ret Linie).*

Man oprejser først den vinkelrette m paa Midten af AB . Paa m opsøges derefter ved direkte Forsøg et Punkt O , hvis Afstand fra A er lige saa stor som dets største eller mindste Afstand fra den givne Cirkel (eller den givne rette Linie). De herved fundne Punkter O er Centrerne for de søgte Cirkler.

Paa ganske lignende Maade løses den Opgave at tegne en Cirkel, der rører 2 givne rette Linier samt en given Cirkel.

2. Skæring mellem Cirkel og Keglesnit.

Opg. 7. *At finde Skæringspunkterne mellem en Cirkel c og en Parabel, givet ved Brændpunkt F og Ledelinie l .*

Ved Hjælp af Passeren opsøger man umiddelbart paa c de Punkter, hvis Afstande fra F og l er lige store. Har man valgt et Punkt M paa c , og det viser sig, at det ligger nærmere ved F end ved l , da betyder dette, at M ligger inden for Parablen (d. v. s. paa den Side af Kurven, hvor Brændpunktet er beliggende); viser det sig derimod, at M ligger nærmest ved Ledelinien, betyder det, at M ligger uden for Parablen. Ved Iagttagelse af disse Regler vil det være let at fuldføre Forsøget, og det Resultat, man finder ad denne Vej, er det bedst mulige, idet Metoden kontrollerer sig selv; en hvilken som helst anden Fremgangsmaade maatte bag efter kontrolleres ved selve det nævnte Eksperiment.

Det er indlysende, at det samme Forsøg vil kunne bruges, naar man skal finde Skæringspunkterne mellem en Parabel og en vilkaarlig tegnet Kurve; ogsaa i det specielle Tilfælde, hvor Kurven er en ret Linie, vil det nævnte Forsøg være at foretrække, idet det baade er hurtigere og nøjagtigere end sædvanlig Konstruktion.

Opg. 8. At finde Skæringspunkterne mellem en Cirkel c og en Ellipse, der er givet ved Brændpunkterne F og F_1 og den store Akses Længde $2a$. (Fig. 1.)

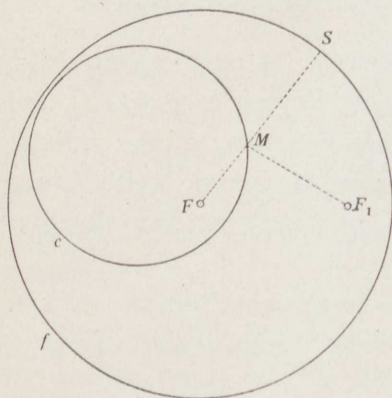


Fig. 1.

Det gælder om paa Cirklen c at finde et Punkt M , hvis Afstande fra F og F_1 har Summen $2a$. Tænkes FM forlænget ud over M til et Punkt S , saaledes at $MS = F_1M$, da vil FS være $= 2a$; tegnes altsaa en Cirkel f med Centrum F og Radius $2a$, da vil det søgte Punkt M ligge saaledes, at dets korteste Afstand MS til Cirklen er lig dets Afstand

over til F_1 . Omvendt vil denne Betingelse være tilstrækkelig. Den nævnte Cirkel, der kaldes Ledecirklen om F , vil omslutte F_1 ($FF_1 < 2a$).

Opgaven løses derfor ved, at man gennem direkte Prøve med Passeren opsøger et Punkt paa c , hvis Afstand fra F_1 er lig dets korteste Afstand fra Ledecirklen.

Ved Udførelsen af dette Forsøg maa man lægge Mærke til, at dersom det Punkt M , man først prøver med, viser sig at ligge nærmere ved F_1 end ved Ledecirklen, da betyder dette, at Punktet falder inden for Ellipsen; ligger derimod M nærmere ved Ledecirklen end ved F_1 , falder det uden for Ellipsen.

Den samme Metode anvendes almindelig til at finde Skæringspunkter mellem Ellipsen og en vilkaarlig tegnet Kurve, f. Eks. ogsaa naar denne Kurve er en ret Linie.

Opg. 9. At finde Skæringspunkterne mellem en Cirkel c og en Hyperbel givet ved Brændpunkter F og F_1 og Hovedaksens Længde $2a$. (Fig. 2.)

Man gaar frem som i den foregaaende Opgave: Man tegner en Cirkel f (Ledecirkel) med Centrum F og Radius $2a$

og benytter, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at et Punkt M ligger paa Hyperblen, er den, at dets Afstand fra F_1 er lig den største eller mindste Afstand MS fra M til Ledecirklen (eftersom M hører til den Hyperbelgren, der omslutter F , eller til den, der omslutter F_1). Man opsøger da blot paa c de Punkter, der opfylder den nævnte Betingelse.

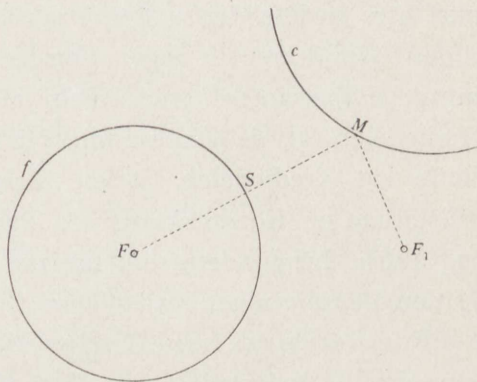


Fig. 2.

Viser det sig ved det første Forsøg, at det Punkt M , man faar fat paa, ligger saaledes, at en Cirkel med Centrum M og gaaende gennem F_1 vil komme til at skære Ledecirklen, da betyder dette, at M ligger uden for Hyperblen (d. v. s. i den sammenhængende Del af Planen, der begrænses af begge Hyperbelgrene); dersom derimod Cirklen med Centrum M og gaaende gennem F_1 intet Punkt har fælles med Ledecirklen, da vil M ligge inden for Hyperblen (d. e. inden for en af Hyperbelgrenene).

Den angivne Metode anvendes uforandret til at finde Skæringspunkter mellem Hyperblen og en vilkaarlig tegnet Kurve, ogsaa i det Tilfælde, da denne Kurve er en ret Linie.

Opgave 7—9 giver os ganske overordentlige simple Midler til Bestemmelse af Skæringspunkter mellem en tegnet Kurve og et vilkaarligt forelagt Keglesnit. Det er ikke nødvendigt at tegne Keglesnittet; et simpelt Forsøg med Haandpasseren vil være tilstrækkeligt. Og ved Indførelse af disse Hjælpe-midler vil, som vi skal se i det følgende, vort Konstruktions-omraade være væsentlig udvidet ud over det elementære.

3. Vinklens Tredeling.

Det er en velkendt Sag, at man ved sædvanlig Konstruktion nok kan halvere en Vinkel, men at man derimod ikke kan tredele den. Men Praktikeren vil naturligvis ikke af den Grund være i nogen Forlegenhed. Han vil bruge det samme Eksperiment, ved Hjælp af hvilket han bestemmer Tredjedelen af et Liniestykke, til med samme Lethed at skaffe sig Tredjedelen af en Cirkelbue, og selv om der eksisterede en Konstruktion ved Passer og Lineal, vilde han dog aldrig bruge den; det nævnte Eksperiment giver nemlig den bedst mulige Nøjagtighed.

For den praktiske Udførelse har det altsaa ingen som helst Interesse, om der eksisterer en Løsning af Vinklens Tredeling ved sædvanlig Konstruktion eller ikke.

Derimod har det naturligvis videnskabelig Interesse at faa Klarhed over dette Spørgsmaal, og af Hensyn hertil samt af Hensyn til den store Rolle, Problemet har spillet i Matematikkens Historie, skal vi da i det følgende give et Bevis for den Sætning, at der ikke eksisterer nogen sædvanlig Konstruktion til Deling af en vilkaarlig forelagt Vinkel i 3 lige store Dele.

For at kunne føre dette Bevis maa vi imidlertid først orientere os lidt nærmere med Hensyn til den sædvanlige Konstruktions Indhold og Omfang. Vi har nævnt de Operationer, hvoraf en sædvanlig Konstruktion maa være sammensat, men vi maa føre Undersøgelsen lidt videre.

Lad os tænke os en eller anden Konstruktionsopgave; den kan altid formuleres saaledes: Der er givet visse Punkter $A, B, C, \dots$ (i endeligt Antal); man skal konstruere visse andre Punkter, der staar i en opgiven geometrisk Afhængighed til de givne.

Vi tegner ved Passer og Lineal et retvinklet Koordinatsystem (X, Y) og projicerer vore Punkter $A, B, C, \dots$ paa X -Aksen i $A_1, B_1, C_1, \dots$, paa Y -Aksen i $A_2, B_2, C_2, \dots$.

I Stedet for det forelagte Punktsystem kan vi derefter sætte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \dots$, da vi ved Konstruktion med Passer og Lineal kan udlede de to Systemer af hinanden. Resultatet heraf bliver da, at man ved at tage de givne Punkters Koordinater faar en Samling af bekendte Størrelser som Udtryk for alt, hvad der er givet. De Punkter, der søges, kan ligeledes tænkes bestemt ved Koordinater, og man faar derved en Samling af ubekendte Størrelser som Udtryk for det, der skal findes.

De opgivne geometriske Afhængigheder kan nu efter den analytiske Geometri udtrykkes ved Ligninger mellem de bekendte og de ubekendte Størrelser, hvorefter Opgaven er omskrevet til at finde de ubekendte Størrelser af disse Ligninger.

Dersom nu Opgaven har en Løsning ved sædvanlig Konstruktion, kan man ved at følge de forskellige Operationer i Konstruktionen komme fra de bekendte Størrelser til de ubekendte. Lad os se paa den analytiske Formulering af disse Operationer:

1) En ret Linie gennem 2 Punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) fremstilles ved en Ligning af første Grad:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

hvis Konstanter er rationale Udtryk i de 2 Punkters Koordinater.

2) En Cirkel med Centrum (m, n) og Radius r fremstilles ved Ligningen

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0.$$

Er Radien givet som Afstand mellem 2 Punkter (p_1, q_1) og (p_2, q_2) , har man

$$r^2 = (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2.$$

Cirkelns Ligning indeholder altsaa kun Konstanter, der udtrykkes rationalt ved de givne.

3) 2 rette Liniers Skæringspunkt fremstilles ved Koordinater, der udtrykkes ved rationale Funktioner af Ligningernes Konstanter.

4) Skæringspunkter mellem ret Linie og Cirkel eller mellem to Cirkler fremstilles derimod ved Koordinater, som ved deres Beregning kræver Udførelse af en Kvadratrodsuddragning.

Ved Sammensætning af de nævnte Operationer kan man altsaa ud fra de givne Størrelser aldrig naa til andre Udtryk end saadanne, som man føres til gennem et endeligt Antal rationale Operationer og reelle Kvadratrodsuddragninger, udførte efter hinanden. Omvendt kan saadanne Udtryk jo altid konstrueres ved Passer og Lineal. Altsaa:

For at en Opgave skal kunne løses ved sædvanlig Konstruktion, er det nødvendigt og tilstrækkeligt, at de søgte Punkters Koordinater i et vilkaarligt valgt retvinklet Koordinatsystem kan udtrykkes ved saadanne Funktioner af de givne Punkters Koordinater, som kan dannes ved Sammensætning af en endelig Række rationale Operationer og Kvadratrodsuddragninger.

Efter dette Resultat gaar vi nu over til vor specielle Opgave at vise, at der gives Vinkler, som ikke lader sig tredele ved sædvanlig Konstruktion. Vi vælger et simpelt Eksempel, idet vi tager en Vinkel paa 60° og vil bevise, at Tredjedelen, en Vinkel paa 20° , ikke kan konstrueres.

Dette vil jo være tilstrækkeligt, idet enhver eventuelt eksisterende almindelig Konstruktion af Vinklens Tredeling maatte kunne anvendes paa det specielle Tilfælde.

I Formlen

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

sætter vi $\alpha = 20^\circ$ og faar da:

$$\frac{1}{2} = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ,$$

saa at vi til Bestemmelse af

$$x = 2 \cos 20^\circ$$

har Ligningen:

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

For nu at godtgøre, at Vinklen 20° ikke kan konstruieres ved Passer og Lineal, skal vi kun paavise, at den fundne tredje Grads Ligning ikke har nogen Rod, der kan dannes ved, at man udgaaende fra Tallet 1 anvender en endelig Række af rationale Operationer (de 4 Regningsarter) og Kvadratrodsuddragninger efter hinanden.

De Størrelser, man overhovedet kan komme til ved disse Operationer, undersøger vi nu nærmere, idet vi efterhaanden beskæftiger os med følgende Omraader af de frembragte Tal:

- 1). Omraadet R , omfattende alle rationale Tal.
- 2) Omraadet R_1 (enkelt irrationale Tal), omfattende alle de reelle Tal, hvoraf ethvert fremkommer ved paa Tallene i R og disses Kvadratrødder at anvende rationale Operationer; selve Tallene i R regnes dog ikke med til R_1 .
- 3) Omraadet R_2 (dobbelt irrationale Tal), omfattende alle de reelle Tal, hvoraf ethvert fremkommer ved paa Tallene i R og R_1 samt disses Kvadratrødder at anvende rationale Operationer; dog optages de Tal, som i Forvejen findes i R og R_1 , ikke i R_2 .

Paa denne Maade fortsættes nu, og vi klassificerer derved efterhaanden alle de irrationale Størrelser, som overhovedet vil kunne konstrueres ved Passer og Lineal ud fra den valgte Længde 1, saaledes at man er vis paa, at enhver af de Størrelser, der kan konstrueres, maa forekomme i en bestemt af Klasserne $R, R_1, R_2, \dots$

Vi vil nu vise, at ingen af disse Klasser kan indeholde nogen Størrelse, som tilfredsstiller Ligningen

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Vi prøver med den første Klasse R . Findes der noget rationalt Tal, som er Rod i Ligningen?

For det første ser man straks, at x ikke kan være noget helt Tal, da dette i saa Fald vilde gaa op i de to første Led x^3 og $-3x$ og derfor ogsaa i det sidste Led (-1) , hvilket maatte medføre, at $x = \pm 1$; men ingen af disse Værdier til-

fredsstillter Ligningen. For det andet kan $x =$ en uforkortelig Brøk $\frac{p}{q}$ heller ikke tilfredsstille Ligningen, da dette ved Indsættelse vilde give

$$\frac{p^3}{q} - 3pq - q^2 = 0,$$

saa at q maatte gaa op i p^3 .

Intet Tal i Klassen R kan altsaa være Rod i Ligningen.

Derefter prøver vi med Klassen R_1 .

En vilkaarlig Størrelse i denne Klasse maa være rationalt udtrykt ved et endeligt Antal Kvadratrødder $\sqrt{u}, \sqrt{v}, \sqrt{p} \dots$. Disse kan forudsættes uafhængige af hinanden paa den Maade, at ingen af dem kan udtrykkes rationalt ved de øvrige; ellers kunde man nemlig reducere Antallet af indgaaende Kvadratrødder. Lad nu Antallet af Kvadratrødder være r . Den betragtede Størrelse ordnes efter én af de indgaaende Kvadratrødder, f. Eks. $\sqrt{u}$ og faar da Formen

$$\frac{A + B\sqrt{u}}{C + D\sqrt{u}},$$

der ved Multiplikation med $C - D\sqrt{u}$ i Tæller og Nævner reduceres til et Udtryk af Formen

$$m + n\sqrt{u}.$$

Her kan $\sqrt{u}$ ikke udtrykkes rationalt ved m og n (men m og n kan naturligvis indeholde andre Rodstørrelser). Kan nu $m + n\sqrt{u}$ være Rod i Ligningen?

Ved Indsættelse faar man

$$(m + n\sqrt{u})^3 - 3(m + n\sqrt{u}) - 1 = 0,$$

der ordnes med Hensyn til $\sqrt{u}$, saa at man faar

$$M + N\sqrt{u} = 0,$$

hvor M og N er rationale hele Udtryk i m, n og u . Da nu $\sqrt{u}$ ikke kan udtrykkes rationalt ved m og n , maa man altsaa have $N = 0$, altsaa ogsaa $M = 0$, altsaa

$$M - N\sqrt{u} = 0,$$

hvilket imidlertid aabenbart betyder, at $m - n\sqrt{u}$ er Rod i den forelagte 3dje Grads Ligning.

Altsaa: Skal $m + n\sqrt{u}$ være Rod i Ligningen, maa $m - n\sqrt{u}$ ogsaa være det. Da nu Koefficienten til x^2 er Nul, maa Summen af Ligningens 3 Rødder være Nul, og naar de to af Rødderne er $m \pm n\sqrt{u}$ ($n \neq 0$), vil den sidste Rod i Ligningen være $= -2m$; men denne Størrelse indeholder ikke $\sqrt{u}$, altsaa 1 Kvadratrod færre end $m + n\sqrt{u}$.

Altsaa: Dersom 3dje Grads Ligningen har en Rod i Klassen R_1 med r af hinanden uafhængige Kvadratrødder, maa den ogsaa have en Rod med $r-1$ eller færre af hinanden uafhængige Kvadratrødder. Men deraf slutter man straks, at den maatte have en Rod, som slet ingen Kvadratrødder indeholder, altsaa en rational Rod, men dette viste vi ovenfor var umuligt. Ligningen har altsaa heller ikke nogen Rod i R_1 .

Vi kan derefter gaa videre paa samme Maade og vise, at den ikke har nogen Rod i R_2 . Beviset formes ganske som før:

Man tænker sig den betragtede Størrelse i R_2 bragt paa Formen $m + n\sqrt{u}$, hvor $\sqrt{u}$ tilhører R_2 men ikke kan udtrykkes rationalt ved m og n og u (i modsat Fald kunde Udtrykket nemlig reduceres saaledes, at $\sqrt{u}$ forsvandt). Dersom $m + n\sqrt{u}$ er Rod i Ligningen, maa ogsaa $m - n\sqrt{u}$ være det, altsaa ogsaa Størrelsen $-2m$, som ikke indeholder $\sqrt{u}$ o. s. v. Følgen vilde blive, at Ligningen maatte tilfredsstilles af en Størrelse i R_1 , hvilket er umuligt.

Det er klart, at Ræsonnementet kan fortsættes paa lignende Maade gennem de følgende Klasser $R_3, R_4, \dots$, og vi indser da, at ingen af Klasserne kan indeholde noget Tal, som tilfredsstiller Ligningen. Altsaa kan man ikke ved Passer og Lineal konstruere en Vinkel paa 20° , og Umuligheden af en sædvanlig Konstruktion til Vinklens Tredeling er dermed godtgjort.

Man kan naturligvis anvende ganske de samme Betragtninger, som vi her har benyttet, til Behandling af en vilkaarlig 3dje Grads Ligning med rationale Koefficienter og uden rationale Rødder. En saadan Ligning kan altsaa aldrig løses ved Kvadratrod (d. v. s. den har ikke nogen Rod, der henhører til nogen af de ovennævnte Klasser). En irrational Kubikrod af et rationalt Tal kan altsaa aldrig udtrykkes ved Kvadratrod. Hermed er bl. a. bevist, at en anden berømt Konstruktionsopgave, Problemet om Terningens Fordobling, heller ikke kan løses ved sædvanlig Konstruktion, idet Opgavens Løsning beror paa at finde $\sqrt[3]{2}$.

Almindelige Undersøgelser over algebraiske Ligninger, der lader sig opløse ved Kvadratrod, og som altsaa grafisk kan behandles ved sædvanlig Konstruktion, er gennemført af Julius Petersen; herom henvises til hans Doktordisputats: Om Ligninger, der kunne løses ved Kvadratrod, Kjøbenhavn 1871, samt til hans Lærebog: De algebraiske Ligningers Theori, Kjøbenhavn 1877.

4. Kubikrodsuddragning.

Vi har set, at man ikke ved sædvanlig Konstruktion kan bestemme en vilkaarlig Kubikrod. Blandt de forskellige Former, som Opgaven angaaende den almindelige Kubikrodsuddragning har faaet, skal vi først nævne den vigtigste, Bestemmelsen af to sammenhængende Mellemproportionaler x og y mellem to givne Størrelser a og b , d. v. s. Bestemmelsen af x og y ved Ligningerne

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

De tre Brøker har Produktet $\frac{a}{b}$, og hver af dem maa altsaa være $= \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, altsaa

$$x = \sqrt[3]{a^2 b}, y = \sqrt[3]{a b^2}.$$

Disse to Kubikrødder konstrueres altsaa samtidig ved Løsning af ovenstaaende Ligninger, eller hvad der er det samme, ved at søge Skæringspunktet mellem de 2 Parabler, der i et retvinklet Koordinatsystem fremstilles ved Ligningerne

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx.$$

Tænker man sig disse Parabler tegnet, har man derved en Løsning af Opgaven; denne Løsning var allerede kendt af Menaichmos (ca. 300 f. Chr.).

Hvad den praktiske Udførelse angaar, maa det imidlertid straks bemærkes, at selve det Eksperiment at tegne Parablerne paa fri Haand og derpaa tage Skæringspunktet, ikke er nogen synderlig let eller nøjagtig Operation. Opgavens Løsning bliver derimod væsentlig bedre, naar man benytter Descartes' Omskrivning:

De to Ligninger $x^2 = ay, y^2 = bx$, ombyttes med følgende:

$$y^2 = bx, \\ x^2 + y^2 = bx + ay,$$

af hvilke den sidste fremstiller en Cirkel med Centrum $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ og gaaende gennem Begyndelsespunktet, medens den første fremstiller en af de oprindelige Parabler med Brændpunkt $\left(\frac{b}{4}, 0\right)$ og Ledelinie $x = -\frac{b}{4}$. Det gælder nu blot at finde Skæringspunktet mellem Cirklen og Parablen, og dette kan udføres ved det under Opg. 7 omtalte Forsøg, altsaa uden at tegne nogen anden Kurve end Cirklen.

5. Almindelige Opgaver af 3. og 4. Grad.

En Opgave, hvis Løsning kan henføres til Opløsningen af en Ligning af n'te Grad, betegner vi som en Opgave af n'te Grad.

Vinklens Tredeling og den almindelige Kubikrodsuddragning er Opgaver af 3dje Grad. Og enhver Opgave af 3dje Grad kan føres tilbage til disse 2 specielle Opgaver. Dette fremgaar af den Maade, hvorpaa man opløser den almindelige Ligning af 3. Grad:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Indsættes $x = y - \frac{a}{3}$, vil Ligningen faa Formen:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Herefter sættes $y = u + v$, hvorved man faar:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Sættes derpaa

$$uv = -\frac{p}{3},$$

faar man

$$u^3 + v^3 = -q,$$

hvorefter man finder u^3 og v^3 som Rødder i den kvadratiske Ligning:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

altsaa

$$\left. \begin{matrix} u^3 \\ v^3 \end{matrix} \right\} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Bestemmelsen af u og v kræver altsaa foruden Kvadrat-
rodsuddragning ogsaa Kubikrodsuddragning, og den Størrelse,
hvoraf Kubikroden skal uddrages, vil enten være reel eller
imaginær; men i alle Tilfælde uddrages Kubikroden af et
komplext Tal ved, at man uddrager Roden af Modulus og
tredeler Argumentet. Og hermed er det bevist, at den almin-
delige Opgave af 3dje Grad kun kræver de 2 nævnte specielle
Operationer foruden Konstruktion med Passer og Lineal.

Opgaver af 4de Grad kræver ikke med Nødvendighed nye
Eksperimenter, idet enhver Ligning af 4de Grad efter først
at være bragt paa Formen

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

kan føres tilbage til Løsning af en Opgave af 3dje Grad.

Ligningen kan nemlig for det første omskrives til

$$(x^2 + y)^2 = (2y - a)x^2 - bx - c + y^2,$$

hvor y er vilkaarlig; og dernæst kan man bestemme y saa-
ledes, at højre Side bliver et fuldstændigt Kvadrat. Til Be-
stemmelse af y have da:

$$4(2y - a)(y^2 - c) = b^2,$$

altsaa en Ligning af 3dje Grad. Opløser man denne, vil x der-
efter kunne findes ved Opløsning af kvadratiske Ligninger.

En elegant geometrisk Behandling af Ligninger af 3. og 4. Grad er givet af Descartes, som løser Ligningen

$$z^4 = pz^2 + qz + r$$

ved den faste Parabel

$$z^2 = x$$

og Cirklen

$$(z - \frac{1}{2}q)^2 + (x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}q^2 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p)^2 + r.$$

For $r=0$ har man herved specielt en Opløsning af Ligningen af 3. Grad:

$$z^3 = pz + q.$$

Enhver Opgave af 3dje og 4de Grad kan altsaa løses ved udelukkende Anvendelse af Opg. 7 i Forbindelse med Konstruktion ved Passer og Lineal.

Disse analytiske Overvejelser vil nu imidlertid næppe i mange Tilfælde være til direkte Nytte ved den praktiske Behandling af konkrete Opgaver, men de giver en eksakt Besvarelse af et rent teoretisk Spørgsmaal og viser, hvor overmaade simple Operationer der skal til, for at man skal kunne beherske hele det Omraade, som Opgaverne af 3. og 4. Grad omfatter.

Og dette Omraade er særdeles vigtigt; selv tilsyneladende meget simple Opgaver fører derind.

6. Specielle Opgaver af 3. og 4. Grad.

Opg. 10. *Find ved Konstruktion en Vinkel α , som tilfredsstiller Ligningen:*

$$\frac{a}{\cos \alpha} + \frac{b}{\sin \alpha} = c.$$

Man sætter

$$c \cos \alpha = x, \quad c \sin \alpha = y,$$

og har da

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1, \quad x^2 + y^2 = c^2,$$

til Bestemmelse af x og y ; disse Størrelser kan altsaa findes som Koordinater til et Skæringspunkt mellem en ligesidet

Hyperbel og en Cirkel. Hyperblen gaar gennem Begyndelsespunktet, og dens Asymptoter er $x = a$, $y = b$; Toppunkter og Brændpunkter findes da let, og Opg. 9 kan anvendes.

Opg. 11. *At konstruere en ligebenet Trekant, hvis Ben har en given Størrelse a og gaar gennem hvert sit af to givne Punkter P og Q , medens Grundlinien skal falde paa en given Linie l .*

P 's og Q 's Afstande fra l betegnes med p og q , og PQ 's Projektion paa l med r . Vinklen α ved Grundlinien bestemmes da ved Ligningen

$$\frac{p+q}{\sin \alpha} + \frac{r}{\cos \alpha} = 2a,$$

hvorved Opgaven er ført tilbage til den foregaaende.

$$x = a \cos \alpha, \quad y = a \sin \alpha,$$

er henholdsvis den halve Grundlinie og den hele Højde i den søgte Trekant.

Opg. 12. *Bestem α af Ligningen*

$$\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha = a.$$

Sættes

$$\cos \alpha + \sin \alpha = 2 \cos \beta,$$

faar man til Bestemmelse af β

$$\cos 3\beta = -a,$$

hvorved β kan findes, og derefter α .

Opg. 13. *Find Skæringspunkterne mellem Asteroiden*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

og en Linie vinkelret paa en af Kurvens Symmetriakser.

Opgaven løses for en Linie $\perp$ x - eller y -Aksen ved Hjælp af Kubikrods konstruktion, og for en Linie $\perp$ en af de Symmetriakser, som halverer Koordinataksernes Vinkler, føres Opgaven tilbage til den foregaaende.

Hjælpesætning I. Naar 2 Linier gennem faste Punkter A og B drejer sig lige hurtigt til modsat Side, vil deres Skæringspunkt i Almindelighed gennemløbe en ligesidet Hyperbel.

Beviset herfor faar man lettest ved at tage et retvinklet Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i Midtpunktet O af AB og med Akser i saadanne Retninger, som hver for sig danner lige store Vinkler med samtidige Stillinger af Linierne. Idet nu A har Koordinaterne (a, b) og B altsaa Koordinaterne $(-a, -b)$, vil samtidige Stillinger af de to Linier fremstilles ved Ligninger af Formen:

$$\begin{aligned}y - b &= a(x - a), \\ y + b &= -a(x + a).\end{aligned}$$

Skæringspunktet (x, y) vil altsaa stadig tilfredsstille Ligningen

$$xy = ab,$$

der fremstiller en ligesidet Hyperbel med Koordinataksene til Asymptoter. Hyperblens Akser, Toppunkter og Brændpunkter findes let.

De Liniebundter, som gennemløbes af de 2 roterende Linier, er symmetriske (d. e. kongruente med modsatte Om-løb). Sætningen er derfor specielt indbefattet i den almindelige Sætning om et Keglesnits Frembringelse ved projektive Liniebundter*).

Naar i en Trekant ABC Vinkelspidserne A og B ligger fast, og Differensen mellem Vinklerne A og B har en given Størrelse, vil Vinkelspidsen C efter Hjælpesætning I ligge paa en ligesidet Hyperbel. Dette kan finde Anvendelse ved Trekantskonstruktioner, hvor man kender Siden AB og Differensen mellem Vinklerne A og B . Som Eksempel nævnes følgende simple Opgave:

Opg. 14. *Konstruer en Trekant ABC af Siden c , Differensen mellem Vinklerne A og B samt Siden a .**)*

Idet A og B lægges fast, findes C som Skæringspunkt mellem en Cirkel og en ligesidet Hyperbel.

*) Se Forf.'s Deskriptivgeometri S. 67.

**) Opg. 408 i Julius Petersen: *Methoder og Theorier*, 1896. Se endvidere Opg. 410 smst.

Hjælpesætning II. Naar 2 Punkter M og N gennemløber givne koncentriske Cirkler (med Radier m og n) med lige store Vinkelhastigheder til modsat Side, da vil Midtpunktet S af MN gennemløbe en Ellipse, til hvilken Linien MN stadig er Normal. Ellipsens Halvakser bliver $\frac{1}{2}(m+n)$ og $\frac{1}{2}(m-n)$.

Punkterne antages at begynde i M_0 og N_0 (Fig. 3) beliggende paa den positive Del af x -Aksen. Idet M , N og S har Koordinaterne henholdsvis (x_1, y_1) , (x_2, y_2) og (x, y) , og Radien OM danner Vinklen α med x -Aksen, har man:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(m + n)\cos \alpha,$$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(m - n)\sin \alpha.$$

Punktet S gennemløber altsaa en Ellipse med Halvakser $\frac{1}{2}(m+n)$ og $\frac{1}{2}(m-n)$. At Linien MN er Normal til Ellipsen, ses uden videre ved Bestemmelse af dens Retningskoefficient:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(m+n)\sin \alpha}{(n-m)\cos \alpha} = \frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 y}{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 x}.$$

Omvendt ses det, at enhver Ellipse med Halvakserne a og b vil kunne frembringes paa den angivne Maade, idet man sætter

$$m = a + b, \quad n = a - b.$$

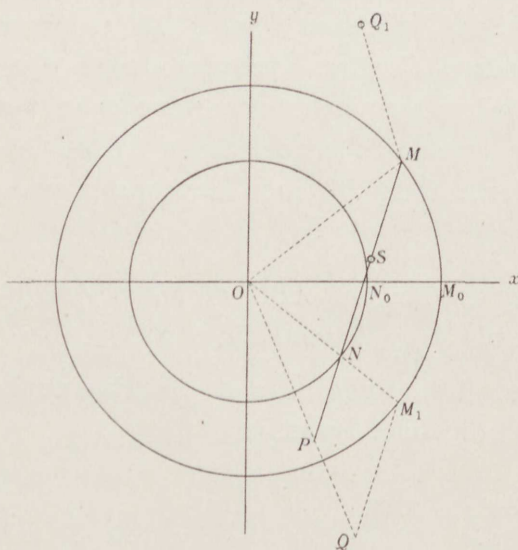


Fig. 3.

Man sættes derved i Stand til at løse følgende Opgave:

Opg. 15. Fra et givet Punkt P skal drages Normaler til en Ellipse.

Efter Hjælpesætning II omskrives Opgaven straks til denne: Gennem P at drage en Linie, som indeholder sam-

tidige Stillinger M og N af 2 Punkter, der drejer sig om Ellipsens Centrum O med lige store Vinkelhastigheder til modsat Side, udgaaende fra Stillingerne M_0 og N_0 paa den store Akse (Fig. 3).

Man bestemmer først Punktet Q paa Linien OP saaledes, at

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{ON}{OM} = \frac{ON}{OM_1},$$

idet M_1 er symmetrisk med M med Hensyn til x -Aksen. QM_1 skal da være parallel med PM . Idet Q_1 er symmetrisk med Q med Hensyn til x -Aksen, vil Linierne Q_1M og PM danne lige store Vinkler med x -Aksen til modsat Side, og de vil derfor være sammenhørende Linier i 2 symmetriske Liniebundter; efter Hjælpesætning I vil M da være beliggende paa en ligesidet Hyperbel, i hvilken Q_1 og P er diametralt modsatte Punkter, og hvis Asymptoter er $\neq$ Ellipsens Akser. Punktet M kan altsaa findes som Skæringspunkt mellem en Cirkel og en ligesidet Hyperbel.

Opg. 16. Givet 2 Punkter A og B . Find paa en Cirkel med Centrum O et Punkt M , saaledes at Summen $AM + BM$ bliver saa lille som mulig. Det forudsættes, at den rette Linie AB ikke skærer Cirklen.

For tilstrækkelig smaa Værdier k ($> AB$) vil det geometriske Sted for saadanne Punkter M , for hvilke $AM + BM = k$, være en Ellipse, der falder uden for Cirklen. Lader man k vokse, vil Ellipsen vokse, og den mindste Værdi af k , som kan give en Ellipse, der har et Punkt fælles med Cirklen, maa svare til en Ellipse, der berører Cirklen.

Opgaven bliver da den, paa Cirklen at finde et Punkt M saaledes, at Diameteren OM i Cirklen halverer Vinklen AMB .

Man tænker sig nu den søgte Figur $OMAB$ drejet om O til en saadan Stilling, at OM falder ud ad en vilkaarlig valgt Radius i Cirklen; ved denne Drejning vil A og B bevæge sig paa 2 koncentriske Cirkler med lige store Vinkelhastigheder til samme Side; er nu B_1 symmetrisk med B med Hensyn til OM , da vil AB_1 gaa gennem M , og A og B_1 er samtidige Stil-

linger af 2 Punkter, der drejer sig om O med lige store og modsatte Vinkelhastigheder. Opgaven bliver derved reduceret til den samme som den forrige.

Hjælpesætning III. Naar en Trekant ABC har konstant Areal, og Vinkelspidsen C ligger fast, medens de andre Vinkelspidser A og B gennemløber to ikke parallelle rette Linier, vil Midtpunktet af AB gennemløbe en Hyperbel.

Vi betragter først det Tilfælde, da de to Linier, som A og B skal gennemløbe, er vinkelrette paa hinanden, og benytter da disse Linier som Koordinataksler. Idet A , B og C har Koordinaterne henholdsvis $(x, 0)$, $(0, y)$ og (a, b) , og Trekantens konstante Areal har den numeriske Værdi T , har man

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & y & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \pm 2T,$$

altsaa

$$xy - bx - ay = \pm 2T.$$

Punktet (x, y) , altsaa ogsaa $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, og iøvrigt ethvert Punkt, der deler AB i et konstant Forhold, vil da gennemløbe en ligesidet Hyperbel (de to mulige Omløbsretninger for Trekant ABC giver hver sin Hyperbel).

Det Tilfælde, da de to rette Linier, som A og B skal gennemløbe, ikke er vinkelrette paa hinanden, behandles paa ganske lignende Maade, idet man anvender skævvinklede Koordinater.

Opg. 17. At lægge et Liniestykke af given Længde k saaledes, at det tangerer en given Cirkel og har sine Endepunkter A og B paa 2 givne rette Linier x og y .

x og y antages foreløbig vinkelrette paa hinanden. Cirklen har Centrum C og Radius r . Da Liniestykket AB har en given Længde k , og da det tillige har en given Afstand r fra C , er Arealet af $\triangle ABC$ bekendt. Efter Hjælpesætning III vil da Skæringspunktet M mellem $AM \neq y$ og $BM \neq x$ være belig-

gende paa en ligesidet Hyperbel, hvis Asymptoter gaar gennem C og er parallelle med x og y . (Der bliver dog to Muligheder, idet hver Omløbsretning giver sin Hyperbel). Tillige vil Punktet M ligge paa en Cirkel med Centrum i Skæringspunktet mellem x og y og med Radius k . Opgaven er dermed løst.

Er x og y ikke vinkelrette paa hinanden, kan man ud fra deres Skæringspunkt O afsætte $ON \not\parallel AB$. Punktet N bestemmes da som Skæringspunkt mellem en Cirkel og en Hyperbel, som lettest fremstilles ved, at man i det skævvinklede Koordinatsystem (x, y) opstiller Betingelsen for, at Arealet ABC er konstant (de 2 Omløbsretninger giver hvert sit Resultat). I det Tilfælde, da Cirkelns Radius svinder ind til Nul, har vi den Opgave, som man i Oldtiden kaldte Indskydning, og hvis Løsning gav Anledning til, at man opfandt Konkoiden: At lægge et Liniestykke med given Længde saaledes, at det (eller dets Forlængelse) gaar gennem et givet Punkt, medens dets Endepunkter skal falde paa 2 givne rette Linier. Vi kommer senere tilbage til disse Opgaver.

Opg. 18. At bestemme et Liniestykke AB , der gaar gennem et givet Punkt P og har sine Endepunkter paa to givne ikke parallelle Linier a og b , idet Liniestykkets Længde skal være saa lille som muligt. (Fig. 4.)

Lad Normalerne til a og b i A og B skære hinanden i R . Betingelsen for, at Længden AB er saa lille som muligt, vil da være den, at Projektionen af R paa AB netop falder i P . Skæringspunktet O mellem a og b projiceres paa AB i et Punkt Q , der ligger saa-

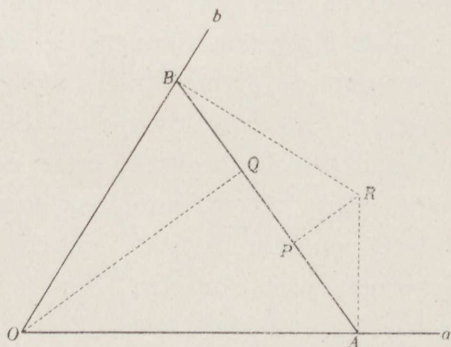


Fig. 4.

ledes, at $QB = AP$, og et geometrisk Sted for Q vil da være en Hyperbel med Asymptoter a og b og gaaende gennem P .

Et andet geometrisk Sted for Q er Cirklen over OP som Diameter, og dermed er Opgaven løst.

Opg. 19. *Konstruer en Trekant ABC af de to Sider a og b samt den indskrevne Cirkels Radius r . (Fig. 5.)*

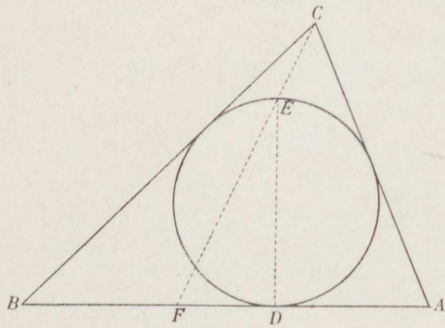


Fig. 5.

Cirklen antages at røre Siden c i D . Diameteren DE drages. Linien CE skærer AB i F , og dette Punkt vil være Røringspunkt for den udvendige Røringscirkel til Siden c . Stykket FD er bekendt, idet

$$FD = a - b.$$

$\triangle FDE$ og Cirklen kan altsaa tegnes, og derefter har man kun tilbage at indskyde Stykket $BC = a$ mellem Linierne DF og FE saaledes, at det tangerer Cirklen. Dermed er Opgaven ført tilbage til Opg. 17.

Opg. 20. *At drage en ret Linie, som rører en given Cirkel i C og skærer 2 givne ikke parallelle Linier i A og B saaledes, at C er Midtpunktet af AB .*

C bestemmes som Skæringspunkt mellem den givne Cirkel og en ligesidet Hyperbel, hvilken sidste fremkommer som geometrisk Sted for Skæringspunktet mellem en bevægelig ret Linie l gennem Cirkelns Centrum O og en variabel Linie l_1 gennem de givne Liniers Skæringspunkt M , saaledes afhængig af l , at den halverer alle Liniestykker, hvis Endepunkter ligger paa de to givne Linier, og hvis Retning er vinkelret paa l . Man vil let analytisk kunne paavise, at Skæringspunktet mellem l og l_1 virkelig frembringer en ligesidet Hyperbel; men for den, der kender Projektivgeometriens Elementer, vil det være tilstrækkeligt at bemærke, at de Liniebundter som beskrives af l og l_1 er projektive, og at det derved frembragte Keglesnit har uendelig fjerne Punkter i de to paa hinanden vinkelrette Retninger, der bestemmes

Den ny Parabel har Toppunkt i F og halvt saa stor Parameter som den givne.

Opg. 23. *Et Keglesnit berører to givne Linier. Find en tredje Tangent til Keglesnittet saaledes, at der paa den mellem de to givne Tangenter afskæres et Stykke af given Længde.*

Opg. 24. *Læg en Fællestangent til 2 Parabler med givne Brændpunkter og Ledelinier.*

Opg. 25. *Konstruer en Trekant ABC af de to Stykker, hvori Siden a deles af Højden paa a , samt Summen af de to andre Højder h_b og h_c .*

Opg. 26. *I et givet Keglesnit skal bestemmes en Korde, som rører et andet givet Keglesnit i et Punkt, der falder midt i Korden.*

7. Den trebenede Passer.

En trebenet Passer bestaar af 3 Stænger, der er sat sammen saaledes, at to af dem danner en sædvanlig Passer, medens den tredje er knyttet til Charnieret paa en saadan Maade, at den faar fri Bevægelighed gennem samtidige Drejninger om 2 paa hinanden vinkelrette Akser. Alle tre Stænger ender i fine Spidser. Passeren kan indstilles saaledes, at Spidserne falder i 3 givne Punkter, og det bliver derved muligt at flytte en given Trekant paa vilkaarlig Maade.

Den Hovedopgave, som kan løses ved Hjælp af den 3-benede Passer, er den, at flytte en given Trekant saaledes, at dens Vinkelspidser falder paa 3 tegnede Kurver.

Man faar derved et nyt simpelt Middel til Løsning af Opgaver af 3dje og 4de Grad. Enhver Ellipse kan nemlig paa uendelig mange Maader tænkes frembragt som geometrisk Sted for den ene Vinkelspids C i en uforanderlig Trekant ABC , der bevæger sig saaledes, at dens 2 andre Vinkelspidser gennemløber rette Linier.

Er Ellipsens Halvakser a og b , kan man lade et Linie-stykke MN (Fig. 7), sammensat af Stykkerne $NC = a$, $CM = b$, glide paa Ellipsens Symmetri-akser x og y , hvorved Punktet C vil gennemløbe Ellipsen.

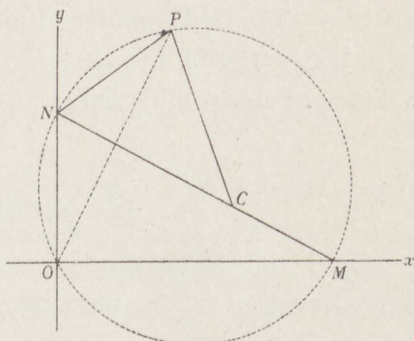


Fig. 7.

Ved den samme Bevægelse vil ethvert Punkt paa Cirklen over MN som Diameter gennemløbe en ret Linie, der gaar gennem Ellipsens Centrum O . Vælges et Punkt P paa denne Cirkel, saaledes at $\triangle NPC$ er spidsvinklet, vil C gennemløbe Ellipsen, naar den uforanderlige $\triangle NPC$ bevæger sig saaledes, at N og P følger de rette Linier ON og OP . Skal man nu finde Ellipsens Skæringspunkter med en forelagt Cirkel c , gælder det altsaa om at flytte $\triangle NPC$ saaledes, at Vinkelspidserne N og P falder paa de nævnte rette Linier ON og OP , medens den tredje Vinkelspids C falder paa den givne Cirkel c . Og denne Opgave kan løses direkte ved Hjælp af den trebenede Passer. Da nu enhver Opgave af 3. Grad kan føres tilbage til Ligninger af Formen:

$$y^2 = px, \quad x^2 + y^2 = ax + \beta y,$$

og da disse Ligninger er ensbetydende med f. Eks.:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= (p + a)x + \beta y, \\ x^2 + y^2 &= ax + \beta y, \end{aligned}$$

der fremstiller henholdsvis en Ellipse og en Cirkel, er det hermed bevist, at man ved Hjælp af en trebenet Passer kan løse alle Opgaver af 3dje og 4de Grad.

En Opgave, som løses temmelig let ad denne Vej, er den at finde Fællestangenterne til 2 Keglesnit. Lad os f. Eks. antage, at vi har en Ellipse med Brændpunkter F og F_1 og de tilsvarende Ledecirkler f og f_1 , samt en Hyperbel med Brændpunkter G og G_1 , samt Ledecirklen g , tegnet om det førstnævnte Brændpunkt.

Den søgte Fællestangent t skal da være saaledes beliggende, at de symmetriske Punkter til F , F_1 og G_1 med Hensyn til t skal falde paa henholdsvis f_1 , f og g . Opgaven er da reduceret til at lægge en Trekant symmetrisk med FF_1G_1 , saaledes at dens Vinkelspidser falder paa de nævnte Cirkler.

8. Skridtforsøg.

De i det foregaaende anvendte Metoder har i Hovedsagen Karakter af Maaleforsøg; alle Prøverne udførtes ved Brug af Passer, efter at bestemte Figurer, som skulde bruges ved Forsøgets Udførelse, forud var tegnet. Vi skal nu beskæftige os med et mere omfattende Eksperiment af denne Art, nemlig det, som gaar ud paa Løsningen af følgende Opgave:

At bestemme en brudt Linie $A_1 A_2 \dots A_n$ med lige store Sider saaledes, at dens Begyndelsespunkt A_1 og Endepunkt A_n faar opgivne Stillinger, medens de øvrige Punkter $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ skal falde paa givne tegnede Kurver.

Denne Opgave løses ved direkte Prøve med Passeren, idet man vælger en bestemt Passeraabning og lader Passeren vandre i Skridt saaledes, at den begynder i A_1 og efterhaanden føres ind i de givne Kurver i den angivne Orden; viser det sig, at man netop derved tilsidst kan naa over til det givne Punkt A_n , er Opgaven løst, i modsat Fald maa man gentage Forsøget med en ny Passeraabning, indtil det lykkes.

Opgaven kan udvides noget, idet man i Stedet for at forlange, at A_1 og A_n skal falde i givne Punkter, stiller den Betingelse, at de skal falde paa givne Kurver a_1 og a_n (f. Eks. rette Linier eller Cirkler; Cirklerne kan specielt svinde ind til Punkter), medens de fra dem udgaaende Sider A_1A_2 og $A_{n-1}A_n$ skal være Normaler til disse Kurver i Punkterne A_1 og A_n . Det er klart, at Forsøget udføres lige saa let under disse almindelige Forudsætninger som under de nævnte specielle: Man vælger en Prøvestilling for Punktet A_2 , maaler

dette Punkts Afstand fra Kurven a_1 , og fører denne Afstand frem i Skridt, idet Passeren føres ind i de givne Kurver i den givne Orden, og tilsidst skal det saa vise sig, at Afstanden fra det Punkt A_{n-1} , man paa denne Maade kommer til, over til Kurven a_n , netop er det Stykke, man har i Passeren.

Alle saadanne Forsøg vil vi betegne som Skridtforsøg. De simpleste Eksempler paa Skridtforsøg kender vi allerede fra det foregaaende, idet de to Hovedopgaver: 1) Deling af et Liniestykke eller en Cirkelbue i n lige store Dele, og 2) Bestemmelse af Skæringspunkter mellem Cirkel og Keglesnit, netop løses ved saadanne Forsøg.

Det er muligt, at det almindelige Skridtforsøg i Forbindelse med Tegning af Cirkler og rette Linier giver Midler til Løsning af alle Opgaver, som kun afhænger af algebraiske Ligninger. Dette skal ikke her undersøges nærmere, men skal kun nævnes som en interessant talteoretisk Opgave, der staar i Forbindelse med disse Undersøgelser.

Vi skal nu gaa over til nogle simple Anvendelser:

Opg. 27. Løs Ligningen

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - c^2} = k,$$

hvor a , b , c og k er givne Længder, og Rodstørrelserne betegner numeriske Værdier.

Man afsætter (Fig. 8) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, i Forlængelsen af hinanden; i B , C , D oprejses vinkelrette b_1 , c_1 , d_1 , og opad den sidste afsættes $DD_1 = k$. Opgaven er nu den at lægge den brudte Linie $AB_1C_1D_1$ med lige store Sider, $AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = x$, saaledes at B_1 og C_1 falder paa b_1 og c_1 , og

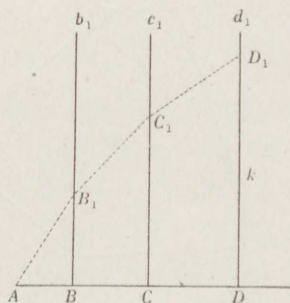


Fig. 8.

denne Opgave løses umiddelbart ved Skridtforsøg. Dette Forsøg er det særlig let at udføre; saafremt nemlig den Passeraabning x , som man vælger ved det første Forsøg,

fører over til et Punkt paa d_1 , hvis Afstand fra D er mindre (resp. større) end k , da betyder dette, at Afstanden x er valgt for lille (resp. stor).

Metoden kan anvendes overfor enhver Ligning af Formen

$$\sqrt{x^2 - a_1^2} + \sqrt{x^2 - a_2^2} + \dots + \sqrt{x^2 - a_n^2} = k.$$

Man ser ogsaa let, hvorledes man skal indrette Forsøget, hvis nogle af Rodstørrelserne skal regnes negative.

Opg. 28. *Ligningen*

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = k,$$

hvor a er den største Værdi blandt de numeriske Længder a, b, c ,

løses ved, at man sætter

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

hvorefter Opgaven er ført tilbage til den foregaaende.

Opg. 29. I Rummet skal man finde et Punkt, hvorfra Siderne i en given ligesidet Trekant ses under givne Vinkler α, β, γ .

Opgaven føres tilbage til den, at skære et givet 3-sidet Hjørne (med Siderne α, β, γ) med en Plan, saaledes at Snit-

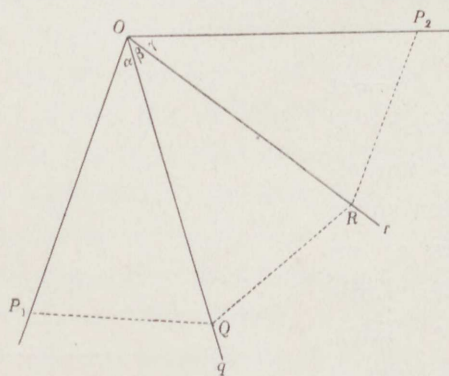


Fig. 9.

tet bliver en ligesidet Trekant. Planen kan lægges gennem et vilkaarligt valgt Punkt P paa en af Hjørnets Kanter p . Tænkes Hjørnet skaaret op langs denne Kant p og udfoldet i Tegneplanen, vil P i Udfoldningen falde i P_1 og P_2 (Fig. 9), de to andre

Kanter i q og r . Det gælder da om fra P_1 til P_2 at lægge en ligesidet brudt Linie P_1QRP_2 , saaledes at Q og R falder paa q og r .

Under Udførelsen af Forsøget maa man have Opmærksomheden henvendt paa alle de Muligheder, der opstaar derved, at hvert Skridt med Passeren kan udføres paa 2 Maader.

Skridtforsøg af en noget anden Art end de hidtil nævnte er saadanne Forsøg, hvor Passeren vel skal føres frem i Skridt, men hvor de forskellige Skridt er af ulige Længde. Man maa da udføre særlige Kunstgreb for at opnaa, at hvert nyt Skridt faar den rigtige Længde. Vi nævner et Eksempel:

Opg. 30. En brudt Linie $ABCD$ skal lægges saaledes, at A og D falder paa de givne Kurver a og d , medens B og C falder paa givne rette Linier b og c ; tillige skal Siderne AB , BC , CD have opgivne Længder α , β , γ , og Linien AD skal være parallel med en given Linie r (Fig. 10).

Man tegner først 2 Linier b_1 og c_1 parallelle med henholdsvis b og c i Afstandene β og γ . Dernæst vælges en Linie $AD \neq r$, og man prøver, om den kan bruges. Forsøget udføres saaledes: α tages i Passeren og føres over i en Stilling AB fra det valgte A

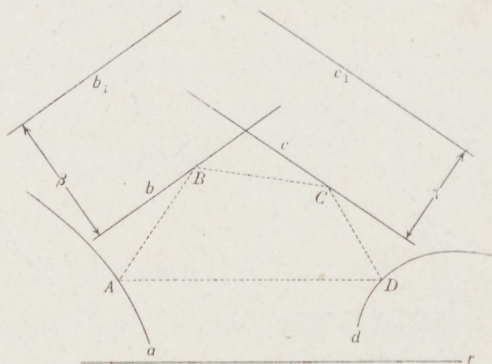


Fig. 10.

til Punktet B i Linien b . Derpaa holdes det ene Passerben fast i B , idet man maaler Afstanden fra B til b_1 , og fører denne Afstand over i en Stilling BC fra B til et Punkt C paa Linien c . Derefter tages Afstanden fra C over til c_1 i Passeren, og det skal da vise sig, at denne Afstand er lig CD . Er denne Betingelse ikke opfyldt, maa Prøvelinien AD føres over i en ny Stilling, indtil det passer.

Vi forudsatte her, at Prøvelinien AD blev tegnet, og en Række Forsøg vil altsaa give Anledning til Indtegning af en Række Hjælpelinier $AD \neq r$; dette kan imidlertid undgaas

ved Brug af en Papirslinéal (d. e. et Stykke Papir, der er skaaret af efter en ret Linie), som kan parallelforskydes til de forskellige Stillinger AD , man vil prøve. Man kan ogsaa benytte, at Afstanden fra D til r skal være lig Afstanden fra A til r , saaledes at man ved en Maaling med Passeren kan sikre sig, at $AD \neq r$.

Som en speciel Anvendelse af Opg. 30 nævnes følgende:

Opg. 31. I Rummet skal man finde et Punkt, hvorfra Siderne i en vilkaarlig given Trekant ses under givne Vinkler α, β, γ .

Det ved Siderne α, β, γ bestemte tresidede Hjørne udfoldes i Planen, saaledes at den ene Kant i Udfoldningen

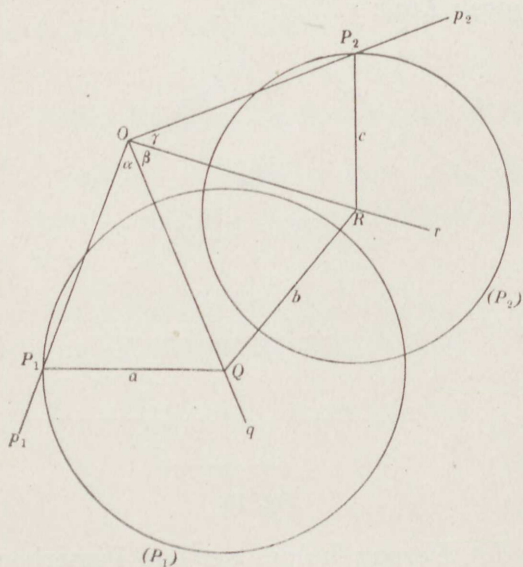


Fig. 11.

viser sig i p_1 og p_2 , de to andre i q og r (Fig. 11). Opgaven er da at lægge en brudt Linie P_1QRP_2 saaledes, at de 4 Punkter P_1, Q, R, P_2 falder paa henholdsvis p_1, q, r, p_2 , og $P_1Q = a, QR = b, RP_2 = c$, har givne Længder (Siderne i den givne Trekant); tillige skal man have $OP_1 = OP_2$, saa at P_1P_2 faar en given Retning.

Men denne Opgave løses netop som nylig beskrevet.

I Stedet for at benytte, at P_1P_2 har bekendt Retning, kan man slutte Forsøget af med en direkte Prøve af Ligestorheden $OP_2 = OP_1$.

Ved Forsøgets Udførelse kan man ogsaa benytte en trebenet Passer, idet man tager en Trekant med Siderne a, b, c i Passeren, hvorved man hurtigt kan komme fra P_1 til P_2 .

Den her behandlede Opgave kan finde Anvendelse i Fotogrammetrien, idet man ved Hjælp deraf kan bestemme det Sted i Marken, hvorfra et forelagt Fotografi er taget, naar man kender den virkelige Beliggenhed af 3 Punkter, der findes paa Fotografiet og tillige kender dettes indre Orientering (det benyttede Kameras Konstanter). Den Ulempe, at Opgaven har flere Løsninger, vil i Praksis ofte kunne hæves ved et Skøn.

Med Hensyn til den analytiske Behandling af Opgaven skal kun henvises til, at man ved at sætte $OP_1 = OP_2 = x$, $OQ = y$, $OR = z$, faar følgende Ligninger til Bestemmelse af x , y , z :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha &= a^2, \\y^2 + z^2 - 2yz \cos \beta &= b^2, \\z^2 + x^2 - 2zx \cos \gamma &= c^2,\end{aligned}$$

hvoraf man let udleder 2 homogene Ligninger af 2. Grad i x , y , z , saa at man kan finde $\frac{x}{z}$ og $\frac{y}{z}$ af 2 Ligninger af 2. Grad. Opgaven ses altsaa at være af 4. Grad.

9. Indskydning.

Som det første Eksempel paa direkte eksperimentel Bestemmelse af en ret Linie, der opfylder visse Betingelser, skal vi nævne de allerede i Oldtiden vel kendte Indskydningsopgaver. Ved en Indskydning forstod man den Opgave at lægge et Liniestykke af given Længde med Endepunkterne paa givne Linier, saaledes at Liniestykket selv eller dets Forlængelse gaar gennem et givet Punkt. Ved Hjælp af en Papirlineal, paa hvilken der er tegnet 2 Linier vinkelrette paa Linealens Kant, og med en indbyrdes Afstand lig den givne Længde, vil man let ved direkte Forsøg kunne løse Opgaven. I Stedet for en Papirlineal kan man ogsaa bruge et Stykke gennemsigtigt Papir, paa hvilket der er tegnet en ret Linie, idet man saa desuden tager Passeren til Hjælp for at prøve de Stillinger, man giver Linien.

Indskydningen synes paa et vist Tidspunkt i Oldtiden at være bleven benyttet som lovligt Konstruktionsmiddel; man kendte baade Konstruktioner til Brug ved Vinklens Tredeling og til Bestemmelse af Kubikrødder. En af de Konstruktioner, som man havde til Vinklens Tredeling, er følgende:

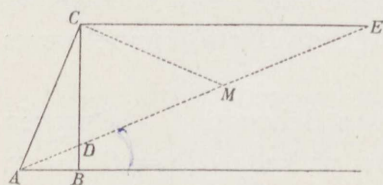


Fig. 12.

Lad A være en spids Vinkel (Fig. 12), der indgaar i den retvinklede Trekant ABC . Parallel med AB drages gennem C en Linie, og Liniestykket $DE = 2AC$ indskydes mellem denne Linie og BC , saaledes at dets Forlængelse gaar gennem A . Er dette gjort, vil $\angle BAD$ være $\frac{1}{3}$ af Vinklen BAC ; dette bevises let, naar man drager Linien CM fra C til Midtpunktet M af DE og betragter de ligebenede Trekanter CME og ACM .

Til Kubikrodsuddragning udfandt Nichomedes en Konstruktion, som han tænkte sig udført ved Anvendelse af et Apparat, der kunde beskrive en Konkoid. En Indskydning, som uden Bevis er angivet af Newton, og som sædvanlig

betegnes som Newtons Metode, er i Virkeligheden kun en ganske ringe Modifikation af Nichomedes Konstruktion. Vi meddeler den her:

Det gælder om at konstruere 2 Stykker x og y saaledes, at

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

idet a og b er givne Længder.

Man afsætter $OA = a$ (Fig. 13)

og tegner en Cirkel med Cen-

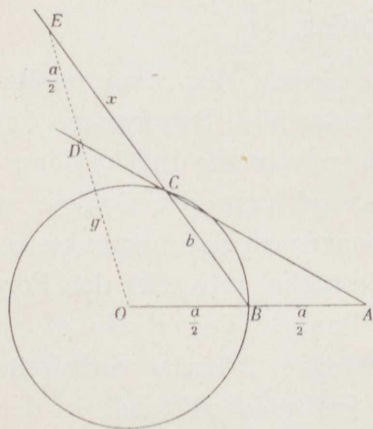


Fig. 13.

trum O og Radius $OB = \frac{a}{2}$. Fra B afsættes Korden $BC = b$ (b antages $< a$). Opgaven løses nu ved, at man gennem O drager en Linie, som skærer AC i D og BC i E , saaledes at

$DE = \frac{a}{2}$. Man vil da have $CE = x$, $OD = y$. Dette vises dels ved Menelaos's Sætning, anvendt paa $\triangle BEO$, skaaret af AD , dels ved Hjælp af E 's Potens med Hensyn til Cirklen. Man faar derved

$$\frac{b}{x} \cdot \frac{a}{y} = 1,$$

$$x(x+b) = y(a+y),$$

altsaa

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} = \frac{a+y}{x+b} = \frac{x}{y},$$

saa at Konstruktionen er rigtigt udført.

Vinklens Tredeling ved Hjælp af Indskydning har naturligvis ingen praktisk Betydning. Men de to nævnte Konstruktioner har særlig Interesse derved, at man ved Hjælp af dem faar bevist, at enhver Opgave af 3. og 4. Grad kan føres tilbage til Indskydning. Man kan altsaa ogsaa sige, at alle Opgaver indtil 4. Grad lader sig løse alene ved Papirlineal.

Vi vil nu give Indskydningen en lidt videre gaaende Form, idet vi udvider Opgaven til følgende:

At lægge et Liniestykke af given Længde med Endepunkter paa givne Kurver (Cirkler eller rette Linier), saaledes at Liniestykket eller dets Forlængelse berører en given Kurve (Cirkel eller Punkt).

Denne Opgave vil man i Praxis løse ved et direkte Forsøg med Papirlineal eller et Stykke gennemsigtigt Papir med en paategnet ret Linie.

Opg. 17 (S. 26) vil man da løse umiddelbart ved en saadan Prøve.

Som Anvendelse af Indskydning vil vi vise endnu en Bestemmelse af de Normaler til en Ellipse, der gaar gennem et givet Punkt (eller rører en given Kurve).

Idet Ellipsens Ligning er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

vil dens Evolut fremstilles ved Ligningen:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

hvor $A = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $B = \frac{a^2 - b^2}{b}$. Ved en affin Transformation, der fører Punktet (x, y) over i (x_1, y_1) , hvor

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= \frac{By_1}{A}, \end{aligned}$$

føres Evoluten over i

$$x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{2}{3}}.$$

Denne Ligning fremstiller en Asteroide, der som bekendt kan dannes som Indhyllingskurve for et Liniestykke af Længde A , som glider paa Koordinataksene.

Skal man nu finde de Normaler til Ellipsen, der gaar gennem et givet Punkt, finder man først dette Punkts tilsvarende Punkt i ovennævnte Transformation og drager derpaa Tangenter fra sidstnævnte Punkt til Asteroiden, idet disse Tangenter findes ved Indskydning af Liniestykket A .

For Hyperblens Vedkommende kan Normalproblemet løses derved, at Hyperblens Evolut ved et Perspektiv kan transformeres til en Ellipseevolut, hvorefter man som før kan komme over til en Asteroide.

Idet Hyperblen har Ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

vil dens Evolut bestemmes ved Ligningen:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$\text{hvor } A = \frac{a^2 + b^2}{a}, \quad B = \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Anvendes nu et harmonisk Perspektiv med Øjepunkt $(-A, 0)$, Homologiakse $x = A$, altsaa Retningslinie paa Y -Aksen, faas følgende Transformationsformler til Overgang fra Punktet (x, y) til det homologe Punkt (x_1, y_1) :

$$xx_1 = A^2; \quad \frac{y}{x + A} = \frac{y_1}{x_1 + A}.$$

Disse omskrives atter til:

$$x = \frac{A^2}{x_1}; \quad y = y_1 \cdot \frac{A}{x_1}.$$

Hyperblens Evolut transformeres altsaa til en Kurve med Ligningen:

$$\left(\frac{x_1}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

der enten fremstiller en Asteroide (for $A=B$, svarende til, at den givne Hyperbel er ligesidet), eller en Ellipseevolut, der ved en affin Transformation kan føres over i en Asteroide.

10. Flytningsforsøg.

Indskydning er et specielt Tilfælde af det almindelige Flytningsforsøg, som bestaar deri, at man ved direkte Eksperiment løser den Opgave at flytte en vis forelagt Figur til en saadan Stilling, at den i denne Stilling kommer til at opfylde visse opgivne Betingelser. Et andet, tidligere nævnt, specielt Tilfælde af Flytningsforsøg er det, som vi udførte ved den trebenede Passer, idet det dér drejede sig om at flytte en given Trekant saaledes, at Vinkelspidserne faldt paa forelagte Kurver.

Til Brug ved almindelige Flytningsforsøg kan man anvende en »Flytteplan«, d. v. s. et gennemsigtigt Stykke Papir, paa hvilket man indtegner den Figur, der skal flyttes, saaledes at man ved Forskydning af Flytteplanen hen over det faste Tegnepapir kan undersøge de forskellige Stillinger af den bevægelige Figur; for den Prøvestilling, som man nu giver denne Figur, skal det saa undersøges, om de Betingelser, der er stillet i Opgaven, er opfyldt. Denne Undersøgelse vil være lettest at udføre, naar den kan gøres ved direkte lagttagelse eller i hvert Fald ved Maaling med Passeren, og vi vil her i det væsentlige holde os til Opgaver af denne Art. I Virkeligheden vil det, som vi senere skal se, være muligt at føre enhver algebraisk Opgave tilbage til et saadant Forsøg.

Vi skal nu nævne nogle forskellige Eksempler.

Opg. 32. Gennem et givet Punkt A at drage en ret Linie, som skærer 3 givne Kurver i saadanne Punkter B, C, D , at $AB=CD$ (med samme eller modsat Retning).

Forsøget udføres direkte ved, at man paa Flytteplanen indtegner en ret Linie, som man derefter flytter til forskellige Prøvestillinger gennem A , indtil den forlangte Betingelse er opfyldt.

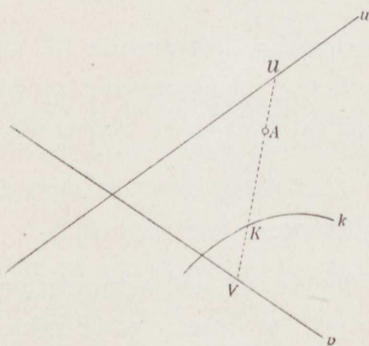


Fig. 14.

Punkter K, U, V , at $VK=AU$, og denne Opgave er specielt indbefattet i ovennævnte.

Opg. 33. Fællestangenter til et Keglesnit og en Cirkel c (Fig. 15).

Keglesnittet har Brændpunkt F , og det geometriske Sted for dette Punkts Projektion paa Keglesnittets Tangenter er

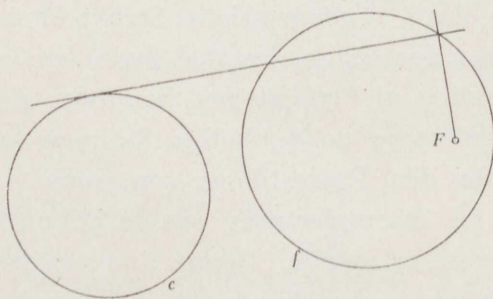


Fig. 15.

Cirklen f , tegnet over Hovedaksen som Diameter (er Keglesnittet en Parabel, bliver Cirklen f til en ret Linie, Toppunktstangenten). Det gælder da kun om at lægge en ret Vinkel med

Toppunktet paa f , saaledes at dens ene Ben gaar gennem F , medens det andet Ben tangerer c . Dette udføres ved direkte Prøve med en Flytteplan, paa hvilken man har tegnet to paa hinanden vinkelrette Linier. Man kan ogsaa klippe en ret

Vinkel ud af Papir og bruge den ved Prøven; undertiden kan ogsaa Tegnerekanten benyttes. Metoden anvendes uforandret til at finde Fællestangenter til et givet Keglesnit og en vilkaarlig tegnet Kurve, noget man f. Eks. faar Brug for, naar man skal lægge Tangentplaner gennem en ret Linie til en Omdrejningsflade.*)

Opg. 34. *Fællestangenter til 2 Keglesnit.*

Opgaven reduceres til at bestemme en ret Linie saaledes, at Projektionerne af 2 givne Punkter F og G (et Brændpunkt i hvert af Keglesnittene) ind paa Linien skal falde paa 2 givne Cirkler f og g (Fig. 16). Man benytter da en Flytteplan med 2 paa hinanden vinkelrette Li-

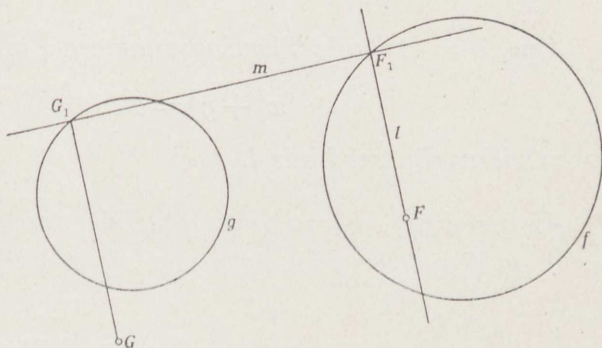


Fig. 16.

nier l og m og lægger den i en Prøvestilling saaledes, at l gaar gennem F , medens Skæringspunktet F_1 mellem l og m falder paa f ; lad nu m skære g i et Punkt G_1 ; man prøver da, om G_1 og G har samme Afstand fra l . Er dette Tilfældet, vil den Stilling, m har, være en af de søgte Fællestangenter. Er det ikke Tilfældet, maa Flytteplanen forskydes, indtil det passer.

Opg. 35. *Til en Parabel med Brændpunkt F og Ledelinie l skal man tegne en Normal, der gaar gennem et givet Punkt P (Fig. 17).*

Lad M være det Punkt paa Parablen, hvis Normal er den søgte, og lad denne Normal skære Parablen Akse i N . Man skal da have:

$$FN = FM = LM.$$

Opgaven løses da ved Hjælp af en

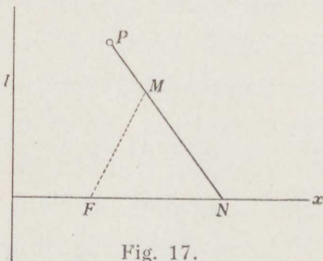


Fig. 17.

*) Se Forf.'s Deskriptivgeometri S. 120.

Flytteplan med en paategnet ret Linie (eller ved Hjælp af en Papirlineal), idet man prøver en paa Skøn valgt Linie PN ved at lade Passeren fatte Stykket FN , svinge dette op i en Stilling FM , saaledes at M ligger paa Prøvelinien, og derpaa ved at svinge Passeren om det nye Punkt M undersøge om Afstanden fra M over til l netop er det Stykke, man har i Passeren. Viser dette sig at passe nøjagtigt, er den Prøvelinie PN , man har, den søgte Normal. Passer det ikke, maa man forandre Prøvelinien, indtil Resultatet bliver godt.

Opg. 36. At finde Skæringspunkterne mellem Asteroiden

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

og en vilkaarlig ret Linie l .

Liniestykket $AB = a$ (Fig. 18) glider med sine Endepunkter A og B paa Koordinatakserne og indhyller derved Asteroiden.

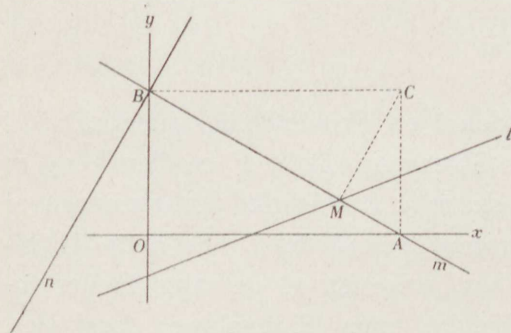


Fig. 18.

Det Punkt M , hvor AB rører Kurven, bestemmes ved, at man fra Vinkelspidsen C i Rektanglet $AOCB$ fælder en vinkelret paa AB . Det gælder nu om at give AB en saadan Stilling, at det dertil svarende

Punkt M vil falde paa l . Oprejser man i B en vinkelret n paa AB , vil O 's Afstand fra n være $= AM$. Opgaven løses da let ved Hjælp af en Flytteplan med de to paa hinanden vinkelrette Linier m og n , saaledes at der paa m ud fra Skæringspunktet med n er afsat Stykket a . Flytteplanen lægges saaledes, at dette Stykke skydes ind mellem x og y og saaledes, at Afstanden On bliver lig Afstanden fra A til Skæringspunktet mellem m og l .

Asteroidens Skæringspunkter med en vilkaarlig tegnet Kurve findes ved det samme Forsøg.

Ved Hjælp af Opg. 36 kan man nu ved Konstruktion finde α af Ligningen:

$$a \cos^3 \alpha + b \sin^3 \alpha = c,$$

hvor a, b og c er vilkaarlige givne Konstanter.

Opg. 37. Givet en Trekant ABC (Fig. 19) og en Kurve k . Paa Kurven skal bestemmes et Punkt M , saaledes at $\triangle AMN$ begrænset af AM , Linien AC og en Linie gennem M parallel med BC , bliver $= \triangle ABP$, idet P er Skæringspunktet mellem AM og BC .

Man har med de paa Figuren angivne Betegnelser:

$$\frac{AP}{AM} = \frac{v}{y}, \quad \frac{AP}{AM} = \frac{y}{u},$$

altsaa

$$y^2 = uv.$$

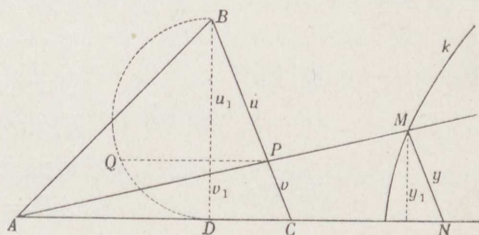


Fig. 19.

Projicerer u og v ind paa $BD \perp AC$, saaledes at man faar Stykkerne u_1 og v_1 , samtidig med, at y projiceres paa den vinkelrette paa AD i y_1 , har man

$$y_1^2 = u_1 v_1,$$

og Konstruktionen udføres da saaledes:

En Papirlineal, eller en Flytteplan med en ret Linie, lægges til langs en Prøvelinie APM . P 's Afstand fra AC tages i Passeren, og man opleder paa Cirklen over BD som Diameter et Punkt Q , hvis Afstand fra AC er saa stor som den, vi har i Passeren. Naar man har fundet dette Punkt Q , tager man straks dets Afstand over til BD , og denne Afstand skal saa være $= M$'s Afstand fra AC . Passer det ikke, maa Prøvelinien flyttes, indtil man finder den rigtige Stilling.

Opg. 38. Til en Konkoid skal drages en Tangent parallel med en given Linie r .

Konkoiden fremkommer (se Fig. 20a paa næste Side) som geometrisk Sted for det ene Endepunkt A af et Liniestykke

AB , hvis Længde k er konstant, og hvis andet Endepunkt B gennemløber en given ret Linie b , medens Liniestykket stadig

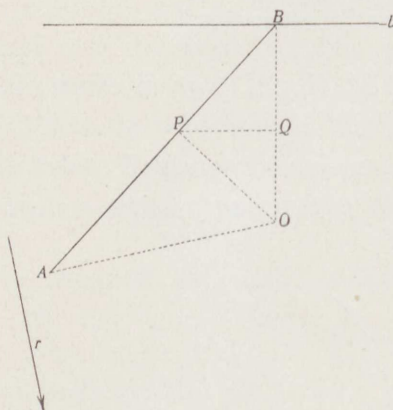


Fig. 20a.

gaar gennem et givet fast Punkt P . Normalerne til b i B og til AB i P skærer hinanden i O ; OA er da Normal til Konkoiden. Denne Normal skal nu være $\perp r$. $\angle AOB$ er altsaa bekendt, og BP 's Projektion BQ paa BO har en given Størrelse ($=$ Afstanden Pb). Derved kan vi konstruere en Figur kongruent med ABO , idet vi først (Fig. 20b) afsætter $AB=k$, og derover tegner en

Bue, der rummer $\angle AOB$; derpaa tegnes en Cirkel (Q), med Centrum B og Radius Pb . Opgaven løses nu ved Hjælp af en Flytteplan med 2 paa hinanden vinkelrette Linier, der

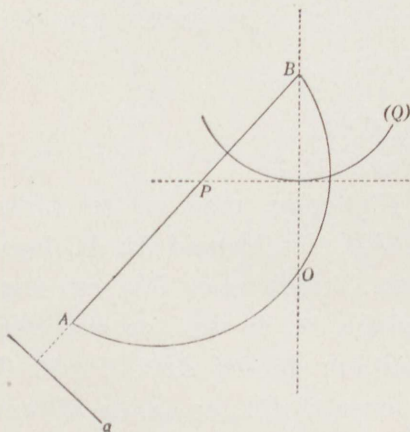


Fig. 20b.

lægges saaledes, at den ene gaar gennem B , medens den anden tangerer Cirklen (Q). Skæringspunkterne O og P skal nu i den rigtige Stilling ligge lige langt fra en vilkaarlig Linie $a \perp AB$. Forsøget kan derved let udføres. I det Tilfælde, da $\angle AOB$ er ret, vil Opgaven, som man let ser, kunne reduceres til en Kubikrodsuddragning.

Opg. 39. Vi vil endnu løse den tidligere behandlede Opgave at finde et Punkt, hvorfra en given Trekants Sider ses under givne Vinkler, idet vi benytter et simpelt Flytningsforsøg.

Vi vil konstruere Figuren OP_1QRP_2 (Fig. 11) paa den Maade, at man lægger QR fast, og tegner 2 Cirkler om Q og

R med Radier a og c som geometriske Steder for P_1 og P_2 . Derpaa indtegner man paa en Flytteplan de tre Vinkler α , β , γ ved Siden af hinanden, saaledes at man faar de 4 Linier p_1 , q , r , p_2 udgaaende fra et Punkt O , og det gælder nu blot om at flytte denne Figur saaledes, at q og r gaar gennem Q og R , medens de to tegnede Cirkler skærer p_1 og p_2 i saadanne Punkter P_1 og P_2 , at $OP_1 = OP_2$.

I øvrigt kan man lægge Mærke til, at da q og r under Prøvefigurens Flytning gaar gennem faste Punkter, vil O stadig ligge paa en bestemt Cirkel, og p_1 og p_2 vil gaa gennem faste Punkter paa denne; derved kunde Prøvefiguren indskrænkes til de to Linier p_1 og p_2 . Men denne Reduktion har ikke nogen praktisk Betydning.

Opg. 40. Vi har tidligere (Opg. 28) set, hvorledes man kan løse *Ligninger af Formen*

$$\sqrt{a_1^2 - x^2} + \sqrt{a_2^2 - x^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 - x^2} = k,$$

idet man indfører en ny ubekendt.

En mere direkte Løsning kan man faa ved et Flytningsforsøg paa følgende Maade: Paa den faste Tegneplan tegnes en Linie l (Fig. 21), og paa den afsættes ud fra samme Punkt P Stykkerne $a_1, a_3, \dots$. I P oprejses $p \perp l$, og i Endepunkterne af nys nævnte Stykker oprejses $p_1, p_3, \dots \perp l$. I Flytteplanen tegnes nu paa lignende Maade en Linie l' , paa

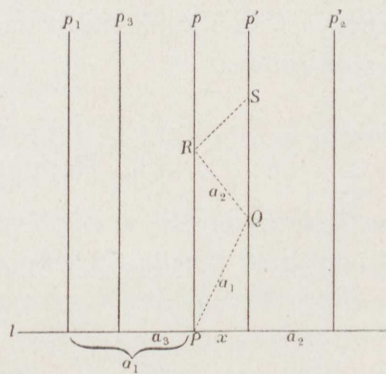


Fig. 21.

hvilken man ud fra et Punkt P' afsætter Stykkerne $a_2, a_4, \dots$ og oprejser de vinkelrette $p', p'_2, p'_4, \dots$ paa l' . Flytteplanen anbringes nu i en saadan Stilling, at l' falder paa l , og Afstanden mellem p og p' antages at være x . Hvorvidt denne Afstand nu virkelig tilfredsstiller den forelagte Ligning, vil man kunne prøve med en Passer paa følgende Maade: Fra

P tages a_1 og svinges om P til PQ , idet Q falder paa p' ; derpaa tages Afstanden fra Q til p'_2 og svinges op i Stillingen QR , idet R ligger paa p . Fra R maales over til p_3 , og Afstanden føres op i Stillingen RS . Paa denne Maade faar man efterhaanden bestemt en Zigzaglinie $PQRS \dots$, der svinger mellem de to Linier p og p' , og hvis Sider er $PQ = a_1$, $QR = a_2$, $RS = a_3$, o. s. v. Det sidste Punkt paa denne Zigzaglinie skal nu ligge i Afstanden k fra l , og naar man altsaa i Forvejen har afsat k op ad p eller p' , vil det være let at prøve, om den valgte Afstand x mellem p og p' virkelig er den rigtige.

Ved Kombination af denne Metode med den tidligere angivne til Løsning af Ligninger af Formen

$$\sqrt{x^2 - a_1^2} + \sqrt{x^2 - a_2^2} + \dots = k,$$

kan man nu let løse Ligninger af Formen

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{x^2 - a_i^2} + \sum_{i=1}^{i=p} \sqrt{b_i^2 - x^2} = k,$$

idet man tillige bemærker, at Metoden kan gennemføres uafhængig af, hvilke Fortegn man vælger for de indgaaende Kvadratrødder.

11. Reduktionsvinkler.

Naar man skal multiplicere en given Længde k med en ægte Brøk $\frac{p}{q}$, udføres det ofte med Fordel ved, at man først

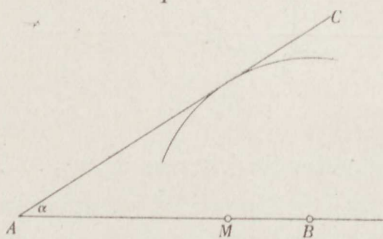


Fig. 22.

tegner en Vinkel α , hvis sinus er $\frac{p}{q}$. Man afsætter (Fig. 22) $AB = q$ og tegner en Cirkel om B med Radius p , hvorefter Tangenten AC fra A til Cirklen bestemmer den søgte Vinkel α ; Tangenten findes naturligvis

ved, at man lægger Linealen lige til Cirklen og Punktet A . Naar Vinklen α er bestemt, har man:

$$x = k \cdot \frac{p}{q} = k \sin \alpha,$$

og denne Størrelse findes da let ved at man tager Stykket k i Passeren, anbringer det i Stillingen AM paa AB og straks maaler Afstanden fra M over til AC .

Saasnart Vinklen α (Reduktionsvinklen) er tegnet, kan man altsaa uden Tegning, blot ved en simpel Maaling, multiplicere vilkaarlige forelagte Længder med $\frac{p}{q}$.

Multiplikation med en uægte Brøk kan man udføre ved at gaa den omvendte Vej, men det bliver lidt besværligere.

Som Eksempler paa Anvendelse af Reduktionsvinkler nævnes foreløbig følgende:

Opg. 41. *I en given Retning at drage en ret Linie, der skærer 4 givne Kurver i saadanne Punkter A, B, C, D , at Stykkerne AB og CD har et givet Forhold $\frac{p}{q}$ ($p < q$).*

Den til Forholdet $\frac{p}{q}$ svarende Reduktionsvinkel α konstrueres. Ved en Flytteplan føres en ret Linie frem saaledes, at den stadig har den givne Retning, og for hver Stilling prøves, om

$$AB = CD \sin \alpha.$$

Naar man har fundet en Stilling af Linien, som tilfredsstiller denne Betingelse, er Opgaven løst.

Forsøget kan udføres saaledes, at man paa Flytteplanen indtegner $\angle \alpha$ og flytter denne saaledes, at det ene Ben stadig har den opgivne Retning, medens dens Toppunkt gennemløber den Kurve, hvorpaa D skal falde. Afstanden fra C over til det andet Ben skal da være $= AB$.

Det er klart, at den Betingelse, at den søgte Linie skal have en given Retning, kan afløses af en hvilken som helst anden (f. Eks. at Linien gaar gennem et givet Punkt, rører en given Kurve, skærer 2 givne Kurver i Punkter med given Afstand o. s. v.), naar blot Prøvelinien let kan føres gennem de Stillinger, der opfylder denne Betingelse. Et specielt Tilfælde, der har særlig Interesse, er følgende:

Opg. 42. Gennem et givet Punkt O skal drages en ret Linie, der skærer 2 givne Kurver (A) og (B) i A og B saaledes, at OA og OB har et givet Forhold (Fig. 23).

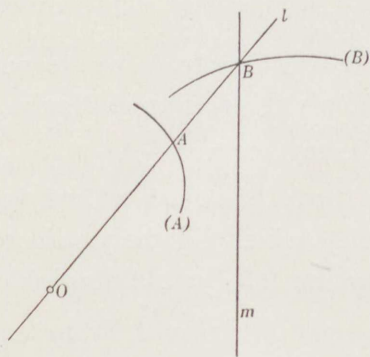


Fig. 23.

Idet OA antages $< OB$ sættes

$$\frac{OA}{OB} = \sin \alpha,$$

og 2 Linier l og m , der danner Vinklen α med hinanden, indtegnes paa en Flytteplan. Man giver nu Flytteplanen en saadan Stilling, at l gaar gennem O , medens Skæringspunktet (lm) falder paa Kurven (B), og Afstanden $Om = OA$.

Opg. 43. At lægge en Trekant af given Form med den ene Vinkelspids i et givet Punkt O og de to andre A og B paa givne Kurver, (A) og (B) (Fig. 24).

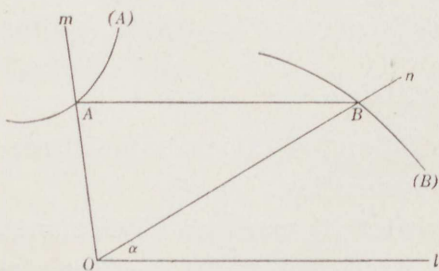


Fig. 24.

Idet OA antages $< OB$, sætter man

$$\frac{OA}{OB} = \sin \alpha,$$

og afsætter $\angle \alpha$ ud fra OB med Toppunktet O ; Vinklens andet Ben er l . Afstanden Bl skal da være $= OA$.

Paa en Flytteplan indtegner man nu gennem samme Punkt de 3 Linier m , n , l , hvor Vinklen $(mn) = \angle AOB$ er givet, $\angle (nl) = \alpha$, og bringer saa ved Anvendelse af den fundne Betingelse $OA = Bl$ Flytteplanen hen i en saadan Stilling, at m og n falder hen ad Siderne OA og OB i den søgte Trekant.

Som et mere specielt Eksempel paa Brug af Reduktionsvinkel nævnes følgende:

Opg. 44. Gennem et givet Punkt P skal drages en Normal til en Hyperbel, hvis Brændpunkter er F og F_1 , og hvis Hovedakse $2a$ er givet (Fig. 25).

Omkring F tegnes Ledecirklen f , og fra F_1 drages Tangenten t til denne. Lad nu M være det Punkt paa Hyperblen, hvis Normal er den søgte, og lad denne Normal skære Hovedaksen FF_1 i N . Man har da:

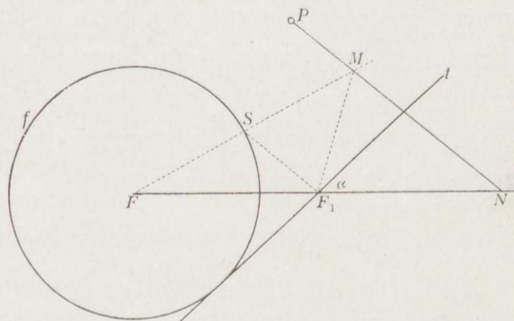


Fig. 25.

$$\frac{F_1M}{F_1N} = \frac{SM}{F_1N} = \frac{2a}{FF_1} = \sin \alpha,$$

idet α er Vinklen mellem FF_1 og t .

Opgaven løses da ved, at man vælger en Prøvelinie PN (ved Papirlineal eller Flytteplan), tager Afstanden fra N til t i Passeren og fører den over i en Stilling F_1M , saaledes at M falder paa Prøvelinien; derefter prøver man straks videre, om det Stykke man har i Passeren er lig det fundne Punkt M 's Afstand over til Ledecirklen. Er dette Tilfældet, vil den valgte Prøvelinie være den søgte Normal; i modsat Fald flytter man den, indtil den nævnte Betingelse er opfyldt.

12. Eksperimentel Fremstilling af Keglesnit.

Skæringspunkter mellem 2 Keglesnit kan bestemmes ved, at man indfører en saadan perspektivisk Transformation, at det ene Keglesnit gaar over til en Cirkel, hvorefter man kan anvende de tidligere angivne Metoder. Det vil dog som oftest vise sig besværligt og derfor upraktisk virkelig at gennemføre dette, og en mere direkte Behandling af Opgaven vilde derfor være ønskelig. Det vil her navnlig komme an paa, at man hurtigt og let paa det ene Keglesnit kan skaffe sig en

Række Punkter, hvis Beliggenhedsforhold til det andet Keglesnit efterhaanden kan prøves. Vi skal i det følgende angive saadanne løbende Punktbestemmelser, som særlig kan finde Anvendelse i det nævnte Øjemed, men som i det hele taget vil være af Betydning, hver Gang man skal finde et Punkt, der ligger paa et givet, ikke tegnet, Keglesnit, og som tillige skal opfylde saadanne Betingelser, hvis Tilstedeværelse maa prøves gennem særlige Forsøg.

Vi betragter efterhaanden hver af de 3 Slags Keglesnit.

1) Ellipsen. Man kan give den sædvanlige Konstruktion, hvor Ellipsens Ordinater dannes ved Reduktion af Ordinaterne til Cirklen over den store Akse, en saadan praktisk Form, at den nogenlunde vil svare til de Fordringer, vi her stiller. Man kan nemlig lade en Flytteplan med 2 paa hinanden vinkelrette Linier glide saaledes, at den ene af disse Linier stadig dækker den store Akse, medens man paa den anden maaler Cirkelns Ordinater, multiplicerer denne med $\frac{b}{a}$ (ved Hjælp af en Reduktionsvinkel) og afsætter det fundne Stykke som Ordinater i Ellipsen. Reduktionsvinklen kan bekvemt afsættes paa Flytteplanen, ud fra Ordinatlين, saaledes at den under Flytningen stadig har sit Toppunkt paa Ellipsens store Akse; Konstruktionen vil da kunne foregaa meget hurtigt.

En lignende praktisk Anordning vil man kunne indrette til Udførelse af den almindelige Konstruktion af en Ellipse ved 2 konjugerede Diametre. Dog vil man i dette Tilfælde

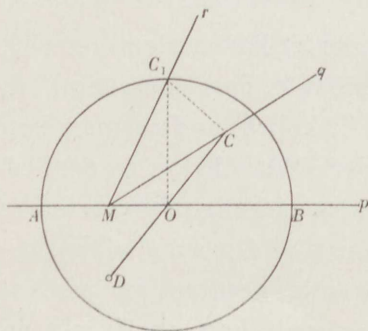


Fig. 26.

ofte kunne have Fordel af en lidt anden Betragtning: Lad AB og CD være de to Diametre (Fig. 26); i Centrum O oprejses $OC_1 \perp OB$, og Punktet M paa AB bestemmes saaledes, at $MC = MC_1$. Tænker man sig nu, at den ligebenede Trekant CMC_1 varierer saaledes, at M

glider hen ad AB , C_1 langs Cirklen over AB som Diameter, medens Trekantens Sider beholder deres Retninger, da vil C gennemløbe Ellipsen. Herved faar man følgende Konstruktion: Paa en Flytteplan indtegner man 3 Linier p, q, r udgaaende fra samme Punkt og med saadanne Retninger, at de ved Flytning vil kunne dække de 3 Linier henholdsvis MB, MC, MC_1 . Flytteplanen bevæges nu saaledes, at den førstnævnte Linie p stadig dækker AB , og for hver Stilling af Flytteplanen fører man ved Passeren det paa r afskaarne Stykke mellem AB og Halvcirklen AC_1B over paa q , hvorved man finder et Punkt af Ellipsen.

En meget simpel Konstruktion af en Ellipse faar man ved Anvendelse af følgende Sætning: Enhver Ellipse kan fremstilles som skævt-symmetrisk Figur til en Cirkel. Lad Ellipsens Halvakser være $OA = a$, $OB = b$ (Fig. 27). Gennem O drages en Linie, som afskærer lige store Stykker AP og BQ af Tangenterne i A og B ; man viser let, at $AP = BQ = \sqrt{ab}$. Den symmetriske Linie til OP med Hensyn til OA er OP_1 .

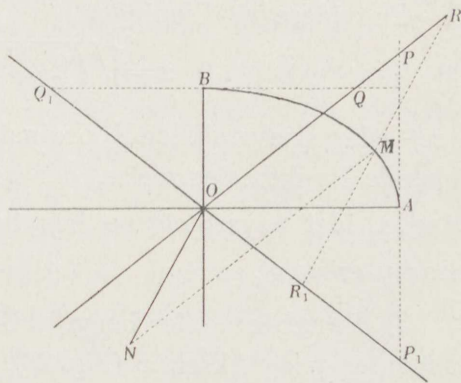


Fig. 27.

Lader man nu Stykket PP_1 med konstant Længde glide med Endepunkterne paa de to Linier OP og OP_1 , vil Midtpunktet af dette Stykke gennemløbe en Ellipse; og denne Ellipse maa falde sammen med den givne; det ses nemlig straks, at den indeholder A , og at OA er Symmetriakse, endvidere, da PP_1 under Bevægelsen en Gang kommer i Stillingen QQ_1 , at B er et Punkt af den beskrevne Ellipse, og at OB er Symmetriakse. Lad nu RR_1 være en vilkaarlig Stilling af det bevægelige Liniestykke; dets Midtpunkt M er da et Punkt af Ellipsen. Det skævt-symmetriske Punkt N til M med Hensyn til OP_1 som Symmetriakse og OP som Symmetriretning har

konstant Afstand $ON = RM = \sqrt{ab}$ fra O og vil derfor gennemløbe en Cirkel. Ellipsen er altsaa skævt-symmetrisk til denne Cirkel.

Denne Konstruktion giver en hurtig og nøjagtig Bestemmelse af Ellipsens Punkter. Hvorledes den udføres ved Hjælp af Flytteplan, er let forstaaeligt.

2) Hyperblen. Ved Hyperblen vil man sædvanlig kunne hjælpe sig med at finde forskellige Punkter ved Anvendelse af Sætningen om de lige store Stykker, som paa en ret Linie afskæres mellem Hyperblen og Asymptoterne. Er Hyperblen givet ved Asymptoterne a og b samt Punktet M , lægger man en Prøvelinie gennem M (ved Papirlineal eller Flytteplan) og bestemmer ved Hjælp af Passeren det andet Skæringspunkt mellem Linien og Hyperblen.

Endvidere vil Ligningen

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{b}y\right)^2 + a^2}$$

i ret- eller skævvinklede Koordinater give et Grundlag for en løbende Punktbestemmelse, der kan udnyttes paa forskellig Maade, idet Asymptoterne benyttes til Bestemmelse af $\frac{a}{b}y$, naar y er valgt.

3) Parablen. Her benyttes Brændpunktet F , Toppunkts-tangenten y og Aksen x (Fig. 28). En Flytteplan med 2 paa

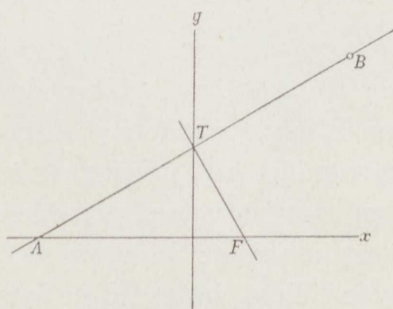


Fig. 28,

hinanden vinkelrette Linier lægges saaledes, at de to Liniers Skæringspunkt T falder paa y , medens den ene Linie gaar gennem F . Den anden, der da vil være Tangent til Parablen, skærer x i Punktet A , og dens Røringspunkt B med Parablen bestemmes

ved $TB = AT$. Herved kan man let finde en Række Punkter paa Parablen.

En Fordel ved denne Metode vil det ofte være, at man

har Tangenten i B med det samme. Som en nærliggende Anvendelse heraf kan nævnes, at en Normal gennem et givet Punkt P straks bestemmes ved, at man prøver om P 's Afstand fra FT er lig AT .

De nævnte Metoder gør ikke Fordring paa at være de eneste brugbare, men de er vel nok de vigtigste. Hvorledes man anvender dem til at finde Skæringspunkter mellem to Keglesnit, skal endnu kort præciseres: Det ene Keglesnit tænkes fremstillet paa en af de her angivne Maader, det andet f. Eks. ved Brændpunkt og tilhørende Ledecirkel; paa det første Keglesnit vælges et Punkt M , og man prøver, om dette Punkt ligger paa det andet Keglesnit, idet man undersøger, om det ligger lige langt fra Brændpunkt og Ledecirkel; i bekræftende Fald har man straks det søgte Punkt, i modsat Fald maa man vælge et nyt Punkt paa det første Keglesnit, indtil man finder det rigtige. Ved Udførelsen af en saadan Række Prøver er det nu netop af Vigtighed, at det, saaledes som det tilstræbes ved de nylig beskrevne Metoder, bliver let at variere Punktet M paa det første Keglesnit.

Dersom et Keglesnit er givet ved 5 vilkaarlige af sine Punkter, vil det ikke lønne sig at føre Bestemmelsen tilbage til nogen af de i det foregaaende angivne Konstruktioner. Det simpleste vil være at benytte Pascal's Sætning til at udtrykke Betingelsen for, at et Punkt M ligger paa Keglesnittet, idet man anvender nævnte Sætning paa en Sekskant, hvis Vinkelspidser falder i M og i de 5 givne Punkter. Skærer de modstaaende Sider i en saadan Sekskant hinanden paa en ret Linie, ligger M paa Keglesnittet, ellers ikke. Ved direkte Brug af dette Kriterium finder man f. Eks. temmelig let Keglesnittets Skæringspunkter med en tegnet Kurve, f. Eks. en Cirkel eller en ret Linie.

Paa lignende Maade kan man anvende Brianchon's Sætning til at prøve, om en ret Linie m rører et Keglesnit, der er givet ved 5 vilkaarlige af sine Tangenter. Man kan ved direkte Brug heraf let finde Fællestangenter til Keglesnittet og en tegnet Kurve, f. Eks. en Cirkel.

Dette Stykke anbringes i Stillingen AP , og man maaler fra P ned til Linien (d) , og har derved

$$(ax^2 + bx + c)x + d = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

i Passeren. Paa denne Maade kan man fortsætte, indtil man har det ønskede Polynomium.

Det er klart, at man ad denne Vej kan faa en simpel eksperimentel Løsning af den almindelige Ligning af n 'te Grad. Opgaven kan nemlig for det første altid omskrives saaledes, at den Rod, der søges, er numerisk mindre end 1; derefter kan Ligningen bringes paa Formen:

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + ix = -k,$$

og man antager x fremstillet ved sinus af en vis Vinkel α . Det ene Ben af denne Vinkel lægges fast, og Linjerne (b) , (c) , (d) tegnes. En Prøvelinie, der ved et foreløbigt Skøn antages at kunne benyttes som det andet Ben, lægges ind, og man prøver den ved, som ovenfor vist, at danne Udtrykket

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + ix$$

og undersøge, om det er $= -k$. I modsat Fald retter man paa Prøvelinien, indtil det passer.

Hermed er i Virkeligheden fundet et Flytningsforsøg, der tilsteder en eksperimentel Løsning af alle algebraiske Problemer.

Naturligvis vil en saadan grafisk Opløsning af Ligninger, som direkte Middel til Behandling af Ligningerne selv, kun have Betydning i de Anvendelser, hvor den grafiske, eller paa anden Maade realiserede, Nøjagtighed er tilstrækkelig. Denne Bemærkning gælder jo iøvrigt al Konstruktion, men der er maaske særlig Grund til at fremhæve den her, fordi man under Paavirkning af det foreliggende Problems Formulering er mere tilbøjelig til at opfatte Konstruktionen som en direkte Erstatning for Regning, altsaa som grafisk Regning, end man vil være det i andre mere rent geometrisk formulerede Opgaver. Den Undersøgelse, vi her har foretaget, har ikke i første Linie til Hensigt at give Midler til

Behandling af algebraiske Ligninger, men er først og fremmest et Middel til at vise, at alle geometriske Opgaver, hvis analytiske Løsning kan føres tilbage til algebraiske Ligninger, kan løses ved Flytningsforsøg. Ved den virkelige Løsning af disse Opgaver vil man derimod sjældent direkte kunne benytte disse Betragtninger.

En anden bekendt Metode (Lill's Metode) til konstruktiv Bestemmelse af et Polynomiums Værdi beror paa, at man sætter $x = tg\theta$, hvorefter man danner hosstaaende Figur (Fig.

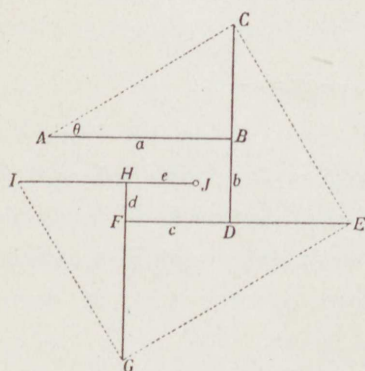


Fig. 30.

30): Først afsættes $a = AB$ som Katete i en retvinklet Trekant, hvor den hosliggende Vinkel er θ . Den anden Katete bliver da

$$BC = atg\theta = ax.$$

Hertil følger man Stykket $BD = b$ (paa Figuren er $x, a, b, c, \dots$ antaget positive), saa at man har

$$CD = ax + b.$$

Oprejses nu i C en vinkelret paa AC til Skæring i E med den vinkelrette paa BD , oprejst i D , faar man

$$DE = (ax + b)tg\theta = ax^2 + bx,$$

hvortil man føjer $DF = c$, saaledes at

$$EF = ax^2 + bx + c.$$

Paa denne Maade kan nu fortsættes; man faar derved den brudte Linie $ABDFH \dots$ med rette Vinkler og Sider $a, b, c, d, \dots$, samt den brudte Linie $ACEGI \dots$, hvor alle Vinkler er rette og hvor Vinkelspidserne er beliggende paa Siderne i den førstnævnte brudte Linie. Derved finder man Værdien af det forelagte Polynomium. Paa Figuren har man:

$$HI = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx.$$

Det er let at se, hvorledes Figuren skal tegnes, naar nogle af Koefficienterne er negative.

Denne Konstruktion giver ogsaa en eksperimentel Løsning af den algebraiske Ligning af n 'te Grad, idet den omskriver Opgaven til den, at lægge en brudt Linie med lutter rette Vinkler saaledes, at den begynder og ender i givne Punkter, medens de øvrige Punkter, der skal danne Vinkelspidserne i den brudte Linie, skal falde paa en Række givne Linier, hvoraf 2 paa hinanden følgende stadig er vinkelrette paa hinanden.

Det er let at se, hvorledes denne Opgave kan løses ved Hjælp af en kvadreret Flytteplan, idet man hurtigt finder en Stilling af denne, der giver den søgte brudte Linie, i hvert Fald med god Tilnærmelse (saa god som Maskevidden i Kvadratnettet tilsteder det), og en Forbedring af den derved fundne Løsning kan man jo let faa.

Imidlertid vil en Flytteplan med blot 2 paa hinanden vinkelrette Linier ogsaa kunne benyttes, idet man lægger den i en saadan Prøvestilling, at den første af Linierne falder f. Eks. i AC (Fig. 30) og den anden i CE . Man tager derefter Afstanden CE i Passeren og finder ved Forsøg Punktet G derved, at det skal have den nævnte Afstand fra Linien AC . Naar man har G , maaler man Afstanden fra dette Punkt til CE og kan derefter ved Forsøg med Passeren finde et Punkt I paa den givne Linie HI og i den nys tagne Afstand fra CE , o. s. v. Man kan altsaa blot ved en sammenhængende Række Maaleforsøg komme hele den til Begyndelsesstillingen AC svarende brudte Linie igennem, og Prøven kan derved føres til Ende uden Tegning. Naturligvis vil det for Ligninger af højere Grad blive besværligt at gennemføre.

For Ligninger af 3. Grad stiller Sagen sig særlig let; Opgaven bliver dør den samme som at finde en fælles Tangent til 2 Parabler (hvis Akser her specielt er vinkelrette paa hinanden). I nær Forbindelse hermed kan nævnes en Metode til Kubikrodsuddragning, som var kendt i Oldtiden og tilskrives Platon, og som fører til den Opgave, at lægge den retvinklede brudte Linie $PQRS$ (Fig. 31) saaledes, at P og S falder i givne Punkter af 2 paa hinanden vinkelrette

Linier, medens Q og R skal falde paa de samme Linier. Man faar med de paa Figuren angivne Betegnelser:

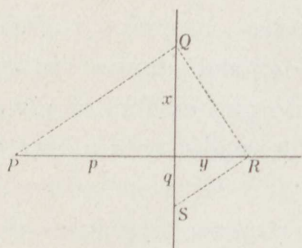


Fig. 31.

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{q},$$

$$x = \sqrt[3]{p^2 q}, \quad y = \sqrt[3]{p q^2}.$$

Man mener, at Platon har angivet en mekanisk Udførelse af Konstruktionen ved Hjælp af en Ramme, hvori den ene Side kunde forskydes

i False, anbragt i de to tilstødende Sider, saa at man kunde fremstille Rektangler, hvori den ene Side var konstant, den anden variabel; det kom da blot an paa at indstille denne Ramme saaledes, at de givne Punkter P og S laa paa 2 modstaaende Sider, medens 2 Vinkelspidser i Rammen faldt (i Q og R) paa de givne Linier. Platon var ellers en Modstander af saadanne mekaniske Løsninger af Geometriens Opgaver, og man mener, at hvis han virkelig selv har udtænkt et saadant Apparat, som det her beskrevne, da maa det have været for at vise, hvor let det var at finde Løsninger af denne Art.

14. Opgaver i Rummet.

Angaaende de eksperimentelle Metoders Anvendelse til Løsning af Opgaver i Rummet vil vi for det første bemærke, at en virkelig Udførelse af rumlige Konstruktioner sædvanlig vil foregaa paa den Maade, at Opgaven overføres til Tegneplanen. I det følgende nævner vi nogle simple Eksempler angaaende Omdrejningsflader.

Opg. 45. Find Skæringspunkterne mellem en Omdrejningsflade og en ret Linie (Fig. 32).

Omdrejningsfladen har lodret Akse a (fremstillet i lodret og vandret Projektion ved a_L og a_V), og Hovedmeridianen (d. e. Meridiankurven $\neq$ lodret Billedplan foreligger tegnet.

Den givne Linie er b (Projektioner b_L og b_V). Det gælder om at finde en Parallelcirkel, der skærer b ; lad en saadan Parallelcirkel være lodret afbildet i den vandrette Linie MA . Denne Linie skal da skære b_L i et Punkt B_L , som føres ned i et Punkt B_V paa b_V , saaledes at $MA = a_V B_V$.

Opgaven løses derfor ved Hjælp af en Flytteplan med to paa hinanden vinkelrette Linier, hvoraf den ene lægges paa a_L , medens den anden indtager en Prøvestilling MA ; for denne Stilling tager man Stykket MA i Passeren og anbringer det i en Stilling $a_V B_V$, hvor B_V falder paa b_V . Fra B_V tages Afstanden over til den rette Linie a_L (forlænget ned igennem a_V), og man undersøger, om denne Afstand vil være lig Afstanden fra A til Skæringspunktet B_L mellem b_L og MA (idet tillige B_V og B_L skal ligge paa samme Side af a_L).

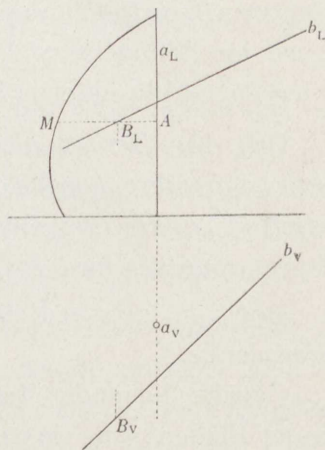


Fig. 32.

Er denne Betingelse opfyldt, fremstiller Prøvelinien MA den søgte Parallelcirkel, og B_L og B_V er Billeder af det søgte Skæringspunkt. Er Betingelsen ikke opfyldt, flytter man Prøvelinien, indtil man finder den rigtige Stilling.

Forsøget kan ogsaa udføres i den omvendte Orden, idet man begynder med at tage Skæringspunktet B_L mellem Prøvelinien MA og b_L og maaler dets Afstand fra A ; dernæst opledes paa b_V et Punkt B_V saaledes, at $a_L B_V = AB_L$, og Afstanden $B_V a_V$ tages i Passeren og afsættes paa Prøvelinien AM ud fra A ; den skal derved naa ud til M paa Meridiankurven. Denne Anordning af Forsøget vil navnlig have Interesse, naar den givne Meridiankurve ikke foreligger tegnet, men kun saaledes bestemt, at man har et simpelt eksperimentelt Kriterium for, at et Punkt ligger paa Kurven. Som Eksempel kan nævnes det, hvor Meridiankurven er et Keglesnit, givet ved et Brændpunkt med tilhørende Ledecirkel.

Ved Opgaver i dobbelt Projektion vil det, saaledes som vi her har haft Lejlighed til at vise, ofte være bekvemt at udtrykke, at 2 Punkter B_L og B_V kan være sammenhørende Billeder af et Punkt B , ved den Betingelse, at Afstandene fra en fast Linie $\perp$ Grundlinien over til Punkterne B_L og B_V er lige store (og ensrettede).

Opg. 46. Der er givet en Omdrejningsflade med lodret Akse og frembragt ved Drejning af en Kurve, hvis Billeder i lodret og vandret Projektion foreligger tegnede. Find Fladens Skæringspunkter med en anden Kurve med givne Billeder.

Opgaven løses ved et ganske lignende Forsøg som den foregaaende.

Ganske lignende Metoder vil kunne anvendes for saadanne Flader, som skæres af alle vandrette Planer i Cirkler.

Opg. 47. Find Skæringspunkterne mellem en Omdrejningsflade, hvis Akse a og Meridiankurve m er givne i Tegneplanen, og en Kurve k , der ligger i en Plan $\perp$ Tegneplanen (Fig. 33).

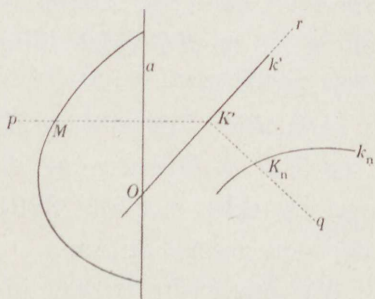


Fig. 33.

Kurvens Plan skærer Tegneplanen i den rette Linie k' , og Kurvens Nedlægning k_n foreligger tegnet. Det gælder om at finde en Parallelcirkel, der skærer k . Lad denne Parallelcirkel være projiceret paa Tegneplanen i Linien MK' . Det Punkt K paa Kurven k , som er projiceret i K' , er nedlagt i K_n ($K'K_n \perp k'$). Idet Skæringspunktet mellem k' og a betegnes med O , har man $OK_n = OM$, som Betingelse for, at Punktet K er det søgte Punkt.

Man løser derfor Opgaven ved følgende Forsøg: Paa en Flytteplan indtegnes 3 Linier p , q , r , udgaaende fra samme Punkt og med saadanne Retninger, at de ved Flytning vil kunne lægges saaledes, at $p \perp a$, $q \perp k'$, medens r dækker k' . Flytteplanen lægges i en Prøvestilling, hvor p falder i en Stilling MK' , q i $K'K_n$, og man prøver nu, om $OM = OK_n$; naar dette er naaet, er Opgaven løst.

Man indretter nu en Flytteplan med 3 rette Linier p, q, r udgaaende fra samme Punkt saaledes, at naar r lægges paa k_1 , vil p stadig antage en Retning $\perp a$, medens q vil faa den kendte Retning K_1K_n . Idet denne Flytteplan dernæst føres saaledes, at r stadig dækker k_1 , finder man let en saadan Stilling, at $OK_n = OM$, og dermed er Opgaven løst.

Denne Konstruktion giver vigtige Hjælpemidler til Bestemmelse af Skæringskurver mellem Omdrejningsflader og andre Flader, navnlig saadanne som kan fremstilles ved en Række simple parallelle plane Snit.

Som Eksempler paa andre nærliggende Opgaver i Rummet nævnes endnu følgende:

Opg. 51. *Find Skæringspunkter mellem en cirkulær Kegleflade og en vilkaarlig Cirkel.*

Opg. 52. *Find den korteste Afstand mellem en given Cirkels Periferi og en Omdrejningscylinders krumme Overflade.*

Opg. 53. *En Omdrejningscylinder (eller Omdrejningskegle), som staar paa den vandrette Billedplan, skal væltes om en given Tangent til Grundfladen over i en saadan Stilling, at den kommer til at berøre en given ret Linie.*

Opg. 54. *En ret Linie skal drejes om en anden ret Linie saaledes, at den bliver Tangent til en given Kugle, eller til en given cirkulær Cylinder eller Kegle.*

Opg. 55. *Find i dobbelt Projektion en vandret Linie, der skærer en given lodret Linie samt 2 Kurver, hvis Billeder foreligger tegnet.*

Det vandrette Billede vælges i en Prøvestilling (ved en Flytteplan eller Papirslinial), der skærer de givne Kurvers vandrette Billeder i P_V og Q_V .

Ved Hjælp af Passeren føres P_V op til P_L (paa den første Kurves lodrette Billede), og ved at benytte P_L 's Afstand fra Grundlinien opsøger man et Punkt Q_L paa den anden Kurves lodrette Billede i samme Højde som P_L . Derefter slutter Prøven med en Undersøgelse af (stadig ved Hjælp af Passe-

ren), om Q_L og Q_V er sammenhørende Billeder af et Punkt Q .

Opg. 56. *Find Skæringspunkter mellem en ret Konoide og en vilkaarlig Kurve.*

Opgaven føres straks tilbage til den foregaaende.

Opg. 57. *Angiv en Metode til at finde vilkaarlig mange Fællestangenter til 3 givne Kugler.*

Opg. 58. *Find den korteste Afstand mellem 2 vilkaarlige Cirkler i Rummet.*

Opg. 59. *Find den korteste Afstand mellem en vilkaarlig ret Linie i Rummet og en Kurve, der foreligger tegnet i Tegneplanen.*

Opg. 60. *Find den korteste Afstand fra en ret Linie til en Omdrejningsflade.*

15. Rumforsøg.

Opgaver i Rummet føres sædvanligvis tilbage til Opgaver i Planen, og direkte Forsøg i Rummet (Fremstilling af rumlige Modeller) til Besvarelse af geometriske Spørgsmaal vil næppe kunne faa nogen udstrakt Anvendelse, i hvert Fald ikke inden for det mere elementære Omraade. Men man kan dog nævne enkelte Eksempler, som frembyder særlig Interesse.

Opg. 61. *At konstruere en i en Cirkel indskrivelig konveks n -Kant, naar man kender alle Siderne.*

Det er nødvendigt, at den største af de n givne Sider er mindre end Summen af de øvrige, og denne Betingelse vil ogsaa vise sig at være tilstrækkelig (findes der to eller flere indbyrdes lige store Sider, hvis Længde er større end enhver af de øvrige, eller alle Siderne er lige store, er Opgaven altid mulig).

I det følgende forudsættes for Nemheds Skyld, at $n=5$; Betragtningerne kan umiddelbart overføres paa andre Til-

fælde. De 5 givne Sider betegnes med a, b, c, d og e , og a antages at være den største blandt disse Værdier.

Man begynder med at tegne en Cirkel med Centrum O (Fig. 35) saa stor, at Korderne $AB = a, BC = b, CD = c,$

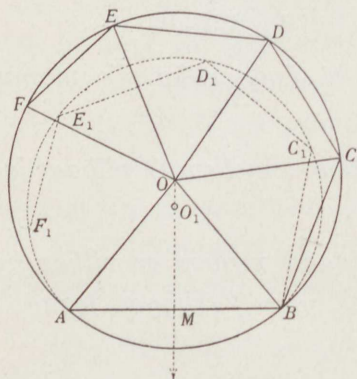


Fig. 35.

$DE = d, EF = e$ kan afsættes deri saaledes, at Punkterne $ABCDEF$ følger efter hinanden paa Periferien i et bestemt Omløb, og den tilsvarende Bue $ABCDEF$ i dette Omløb er mindre end Cirkelns Periferi; man kan let paa Skøn vælge en saa stor Radius, at disse Betingelser er opfyldt, og man kan i hvert Fald opstille den Regel, at Cirklen vælges saa

stor, at den indskrevne regulære Femkants Side er større end a .

Derefter tænker man sig, at A og B ligger fast, medens Cirklen varierer kontinuert saaledes, at den stadig gaar gennem A og B , medens Centrum med uforandret Bevægelsesretning gennemløber den Halvlinie, der udgaar fra O og indeholder Midtpunktet M af Korden AB . For hver Stilling af den variable Cirkel konstrueres en brudt Linie med de givne Sider, indskreven i Cirklen og med uforandret Omløbsretning, saaledes som Figuren viser det for een Cirkel med Centrum i O_1 , idet den indskrevne brudte Linie for denne Stilling af Cirklen er $ABC_1D_1E_1F_1$. Det gælder nu blot om at finde en saadan Stilling af den variable Cirkel, at F_1 vil falde i A .

Først vil vi bevise, at denne Stilling eksisterer. Betragter man en vilkaarlig Stilling af den variable Cirkel med Centrum O_1 , og det for denne Stilling gælder, at Buen $BC_1D_1E_1F_1$ er mindre end Buen BC_1A , da kan det bevises, at den analoge Ulighed har været gældende for enhver af de foregaaende Stillinger γ af den variable Cirkel; Radierne $O_1C_1, O_1D_1, O_1E_1, O_1F_1$ vil nemlig ved Forlængelse ud over Periferien træffe γ i Punkter C', D', E', F' saaledes at Korderne BC' ,

$C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ er større end henholdsvis b , c , d , e ; men heraf følger netop, at den omtalte Ulighed ogsaa gælder for Cirklen γ . Alle Cirkler γ , for hvilke denne Ulighed gælder, maa altsaa have deres Centrer liggende paa en sammenhængende Del af den rette Linie OM , og da man let kan finde en Stilling af Cirklen, for hvilken Uligheden ikke gælder (man kan f. Eks. sikre sig, at Buelængden BC_1A bliver mindre end $b + c + d + e$), maa der altsaa paa denne Linie findes et Punkt P saaledes, at ethvert Punkt mellem O og P er Centrum for en Cirkel γ , der tilfredsstiller den nævnte Ulighed, medens ethvert Punkt paa Forlængelsen af OP ud over P ikke giver nogen saadan Cirkel. P maa da være Centrum for den søgte Cirkel. Og man ser samtidig, at der kun er én Løsning.

Dette Eksistensbevis giver nu ikke nogen anden Løsning af Opgaven end den, at man ved at prøve en Række Cirkler γ til sidst kan skaffe sig én der passer. Dette er ikke uoverkommeligt, men tager Tid. En elegantere Løsning faar man ved følgende Rumforsøg:

Man udskærer Figuren $OABCDEFO$ af Karton, skærer Kartonen halvt igennem langs OB , OC , OD , OE , bøjer Figuren langs disse Kanter, saa at OA og OF støder sammen, og klistrer sammen, saaledes at der dannes et bevægeligt Hjørne begrænset af en vindskæv Femkant. Sættes nu Hjørnet paa et Bord, saaledes at denne Femkant bliver plan, er Opgaven løst.

Opg. 62. At konstruere en n -sidet konveks Pyramide af alle Kanterne.

Pyramidens Sidetrekanten er bekendte, og man kan da let danne Pyramiden af Karton paa samme Maade som i den foregaaende Opgave.

En plangeometrisk Løsning af Opgaven vil være ret besværlig; paa Fig. 36 (se næste Side) er antydnet, hvorledes man kunde formulere Opgaven. Udfoldningen $O-ABCDE$ tegnes, og Højderne OP , OQ , OR , OS i Sidetrekanten teg-

nes. Idet nu den søgte Pyramide antages konveks, og Højden i Pyramiden antages at falde indenfor Grundfladen, kan vi anstille følgende Betragtning: Projektionerne af Højdens Fodpunkt ind paa Grundfladens Sider er de Punkter, som i Udfoldningen viser sig i P, Q, R, S , og dersom man med Højdefodpunktet som Udgangspunkt deler Grundfladen i Central-

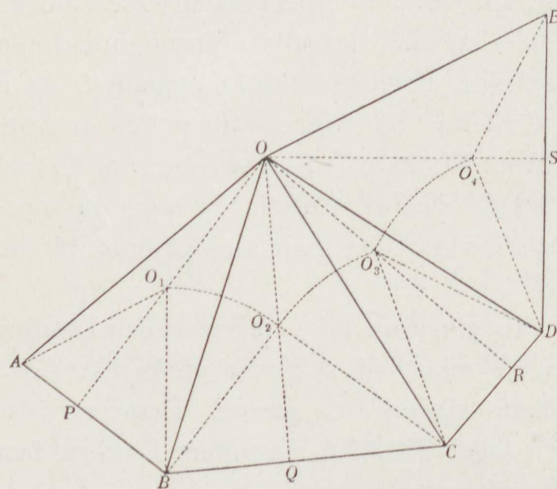


Fig. 36.

trekanter og derpaa tænker sig disse anbragt i Udfoldningen med Siderne AB, BC, CD, DE , vil de falde i saadanne Stillinger $O_1AB, O_2BC, O_3CD, O_4DE$, at O_1, O_2, O_3, O_4 falder paa OP, OQ, OR, OS , og Vinklerne ved O_1, O_2, O_3, O_4 tilsammen

er 360° . Da $O_1B = O_2B, O_2C = O_3C, O_3D = O_4D$, hvorefter $O_4E = O_1A$, vil man derved have et Grundlag for ved Prøve i Planen at kunne finde Punkterne O_1, O_2, O_3, O_4 . Men Rumforsøget er jo lettere.

En fuldstændig Diskussion af Opg. 62 vil frembyde adskillig Interesse og anbefales Læseren til videre Under søgelse.

Opg. 63. I Planen er der givet n parallelle Linier. Man skal lægge en konveks n -Kant med Vinkelspidserne paa disse Linier, saaledes at Siderne faar opgivne Forhold.

Opgaven reduceres til at konstruere en konveks n -Kant med givne Sider saaledes, at de Punkter, der deler $n-1$ af Siderne i givne Forhold, falder paa en ret Linie. Og denne Opgave kan atter føres tilbage til den, at konstruere et konvekst Prisme, naar man kender dets Sideflader

i Udfoldning (men derimod ikke kender Endefladerne), hvilket direkte lader sig udføre ved, at man danner en Model af Prismet.

16. Transcendente Opgaver.

De i det foregaaende nævnte eksperimentelle Hjælpe-midler, Skridtforsøg og Flytningsforsøg i Forbindelse med Tegning af rette Linier og Cirkler, kan kun realisere saadanne Afhængigheder, som bestemmes ved algebraiske Ligninger. De geometriske Betingelser, som kan bringes i Stand ved saadanne Forsøg, vil nemlig altid kunne udtrykkes ved en endelig Række algebraiske Ligninger mellem Koordina-terne til de Punkter, som indgaar i Prøvefiguren. Omvendt ved vi, at enhver algebraisk Opgave maa kunne løses ved de nævnte Hjælpe-midler.

Man kunde nu spørge, om der overhovedet kan forefalde andre Opgaver, om der eksisterer ikke-algebraiske, saakaldte transcendent Opgaver. Dette Spørgsmaal besvarer vi her gennem et simpelt Eksempel: Vi betragter Kurven $y = tg x$, og prøver, om der paa denne Kurve, svarende til et eller andet lille Interval ($x_1 < x < x_2$) paa x -Aksen, kunde være en Bue A_1A_2 , som tilhører en usammensat algebraisk Kurve $f(x, y) = 0$. Lad det betragtede Interval have Størrelsen $x_2 - x_1 = 2h$, og lad os undersøge Intervallet fra $x_1 + h$ til $x_2 + h$ og den dertil svarende Bue B_1B_2 paa den forelagte Tangenskurve. Til hvert Punkt (x, y) paa Buen A_1A_2 svarer et bestemt Punkt (x', y') paa Buen B_1B_2 , saaledes at $x' = x + h$, og man har da:

$$x = x' - h,$$

$$y = tg(x' - h) = \frac{tg x' - tg h}{1 + tg h tg x'} = \frac{y' - tg h}{1 + y' tg h}.$$

Skal nu ethvert Punkt (x, y) paa Buen A_1A_2 ligge paa den usammensatte algebraiske Kurve $f(x, y) = 0$, da maa ethvert Punkt (x', y') paa Buen B_1B_2 tilfredsstille Ligningen

$$f\left(x' - h, \frac{y' - tg h}{1 + y' tg h}\right) = 0,$$

altsaa ogsaa ligge paa en usammensat algebraisk Kurve. Men denne Kurve og Kurven $f(x, y) = 0$ har et sammenhængende Buestykke $B_1 A_2$ fælles, og de maa derfor falde helt sammen; Kurven $f(x, y) = 0$ maa altsaa indeholde hele Buen $A_1 B_2$ af Tangenskurven, og man slutter da straks videre, at den maa indeholde alle de øvrige Buer af Tangenskurven, svarende til de følgende og foregaaende Intervaller af Størrelsen h , d. v. s. den algebraiske Kurve $f(x, y) = 0$ maatte indeholde hele den reelle Kurve $y = tg x$; dette er imidlertid umuligt, da Ligningen $tg x = 0$ har uendelig mange Rødder.

Altsaa:

Tangenskurven kan ikke i noget selv nok saa lille Interval være algebraisk.

Det samme gælder da naturligvis Sinuskurven $y = \sin x$.

Alle trigonometriske og cirkulære Funktioner er altsaa transcendent.

Heraf følger nu, at *arc sin x*, Længden af en Bue, hvis sinus er x , ikke i noget Interval er en algebraisk Funktion af x , saa at der ikke kan eksistere noget Eksperiment ved Passer og Lineal, ved Hjælp af hvilket man kan rektificere en vilkaarlig forelagt Cirkelbue.

Dette udelukker jo nu imidlertid ikke, at der maaske kunde konstrueres nogle specielle Cirkelbuer, som tilsteder algebraisk Rektifikation, at f. Eks. hele Cirkelperiferien kunde rektificeres ved et algebraisk Eksperiment; men selv dette specielle Spørgsmaal maa, efter hvad Lindemann viste i 1882, besvares derhen, at hverken hele Cirkelperiferien eller nogen Del deraf, som kan konstrueres algebraisk, tilsteder nogen algebraisk Rektifikation.

For nu at kunne løse Konstruktionsopgaver, der afhænger af transcendent Funktioner, bliver det altsaa nødvendigt at indføre nye Hjælpemidler. Og det Hjælpemiddel vi vælger, er simpelthen det, at vi tegner en Kurve, der paa én eller anden Maade giver en grafisk Fremstilling af den Funk-

tion, der er Tale om. Dette har indenfor vort Omraade en ganske lignende Betydning, som Opstilling af en Tabel vil have indenfor den beregnende Matematik.

Opgaver angaaende trigonometriske Funktioner vil saaledes kunne behandles ved, at man tegner en Sinuskurve, en Tangenskurve, en Archimedes' Spiral eller en Cirkelafvikler. Her vil vi holde os til den sidstnævnte Kurve. For at kunne tegne en Cirkelafvikler, maa man have en Metode til at finde Længden af en forelagt Cirkelbue. Blandt de mange bekendte herhen hørende Konstruktioner skal vi nævne følgende:

I. Eksakte Konstruktioner, d. v. s. saadanne, som i Henseende til Resultatets Nøjagtighed kan føres saa vidt, som vedkommende praktiske Anvendelse tilsteder. Her kan allerførst nævnes den, som kan anvendes til Rektifikation af enhver forelagt Bue, og som bestaar deri, at Delepasseren med en nøjagtig fastholdt lille Passeraabning føres frem i Skridt paa Buen fra det ene Endepunkt til det andet, hvorpaa den føres lige saa mange Skridt frem paa en ret Linie. I Reglen vil man ikke faa Buen tilbagelagt i et helt Antal Skridt af den valgte Størrelse; den lille Bue, der bliver tilovers, maa da føjes til bagefter.

Dernæst nævner vi Euler's Metode, som er vist paa Fig. 37.

Til Buen AB drages Tangenten AC i A , og man konstruerer efterhaanden de retvinklede Trekkanter ABB_1 , AB_1B_2 , $\dots$, hvis Hypotenusen AB_1 , AB_2 , $\dots$ halverer Vinklerne henholdsvis BAC , B_1AC , B_2AC , $\dots$. Liniestykket AB_n vil da for en tilstrækkelig stor Værdi af n give Længden af Buen AB med fornøden Nøjagtighed. Det

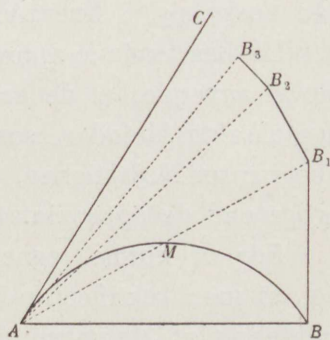


Fig. 37.

ses nemlig let, at for det første AB_1 er Længden af en brudt Linie AMB , som er indskreven i Cirkelbuen og er sammen-

sat af 2 lige store Korder, og dernæst, at AB_2 vil angive Længden af en indskreven brudt Linie med 4 lige store Sider o. s. v., saaledes at AB_n vil angive Længden af en indskreven brudt Linie med 2^n lige store Sider.

II. Approximative Konstruktioner, d. v. s. saadanne, hvor Nøjagtigheden ogsaa er teoretisk begrænset. Her kan for det første nævnes den bekendte Rektifikation af Halvcirkler, der beror paa, at π med stor Nøjagtighed kan findes som Hypotenuse i en retvinklet Trekant, hvis Kateter er 2 og $3 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ *). Den relative Fejl paa den herved fundne Værdi af Halvperiferien er 0,00002.

Dernæst en vigtig Konstruktion (Fig. 38), som er angivet af d'Ocagne**), og som beror paa, at en Linie fra Cirkelns

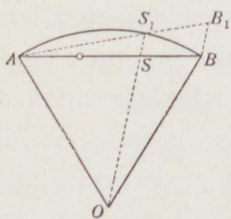


Fig. 38.

Centrum O gennem det Punkt S , der deler Korden AB i Forholdet 2:1, skærer Cirkelbuen i et Punkt S_1 , saaledes at Korden AS_1 med stor Nøjagtighed er $\frac{2}{3}$ af den søgte Buelængde, saaledes at denne kan sættes $= AB_1$, hvor B_1 er Skæringspunkt mellem Linien AS_1 og Linien $BB_1 \neq OS$.

For Buer under 35° kan den relative Fejl højst være 0,0001 og for Buer i Nærheden af 65° vil den omtrent være 0,001. En Kombination af denne Metode og den ovennævnte for Halvcirklen vil altsaa give saa stor Nøjagtighed, som man kan ønske sig, i hvert Fald indenfor det grafiske Omraade.

De her angivne approximative Metoder er tillige saa simple at anvende, at de er langt at foretrække for de besværlige eksakte Metoder, som ganske vist teoretisk talt tilsteder ubegrænset Nøjagtighed, men praktisk talt er mindre nøjagtige end de approximative.

For at kunne tegne Cirkelafvikleren er det tilstrækkeligt, at man rektificerer Halvcirklen, idet man derefter ved Inddeling af Halvperiferien i et passende Antal lige store

*) Se Forf.'s Deskriptivgeometri, 105.

**) Atti del IV congresso internazionale dei matematici. Vol. III. Roma 1909. 351—355.

to Endepunkter A og D af Buen vil Tangenterne dog have samme Retning.

Heraf følger:

Afvikleren $ABCD$ kan ikke skæres af nogen ret Linie mere end 2 Gange.

Var der nemlig en ret Linie l , som havde 3 adskilte Punkter T , U , V (i den nævnte Orden) fælles med Kurven, maatte dette medføre, at der var 2 Tangenter, én til Buen TU , og en anden til Buen UV , som begge var parallelle med l , og dette er umuligt.

Man viser ligeledes let, at Afvikleren ligger helt paa den ene Side af enhver af sine Tangenter. En saadan Bue siges at være konveks.

Hjælpesætning: Naar en konveks Bue k , som i ethvert af sine Punkter har en bestemt Tangent, har 2 af sine Punkter A og B beliggende paa en Cirkel med Centrum O , da vil Buen AB paa k indeholde mindst et Punkt M , hvis Normal gaar gennem O .

Beviset for denne Sætning føres paa følgende Maade:

Dersom Buen AB (Fig. 40) har Punkter inden for Cirklen, maa der være mindst et af disse Punkter, hvis Afstand

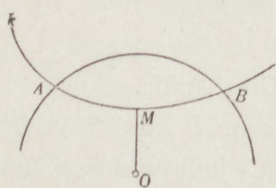


Fig. 40.

fra O antager en minimal Værdi. Er M et saadant Punkt, vil Cirklen om O og med Radius OM berøre Buen AB i M , idet denne Bue har Punktet M fælles med Cirklen, men ikke har noget Punkt inden for Cirklen. OM er da

Normal til den givne Kurve k . Dersom Buen AB ikke har Punkter inden for Cirklen, men derimod Punkter uden for Cirklen, maa den indeholde et Punkt M , hvis Afstand fra O er Maximum, og OM vil da være Normal.

Ved Anvendelse af denne Hjælpesætning kan man nu vise, at Afvikleren AD skæres højst 3 Gange af en vilkaarlig Cirkel.

Var der nemlig 4 adskilte Skæringspunkter T , U , V , X (i den nævnte Orden), vilde man fra Cirkelns Centrum

kunne fælde 3 Normaler til Afvikleren, een til hver af Buerne TU , UV , VX , og dette er umuligt, da disse Normaler skulde være Tangenter til Halvcirklen $AMNP$.

Tænker vi os nu paa Buen BC (se Fig. 39) valgt 3 Punkter X , Y og Z , og en Cirkel lagt igennem disse Punkter, da maa man gennem Centrum O for denne Cirkel kunne drage 2 Normaler til Buen BC , nemlig en til Buen XY og en anden til Buen YZ ; men disse Normaler skal jo være Tangenter til Cirkelbuen MN , og Punktet O maa derfor være beliggende i det Areal, som begrænses af Cirkelbuen MN og Tangenterne MS og NS i denne Bues Endepunkter. Altsaa:

Enhver Cirkel, som har 3 adskilte Punkter fælles med Buen BC af Afvikleren, maa have sit Centrum beliggende i Arealet MNS begrænset af Cirkelbuen MN og Tangenterne i dens Endepunkter.

Herved kan man nu se, at dersom 3 Punkter X , Y , Z af Afvikleren kommer nær til samme Punkt C , vil Centrum for den ved de 3 Punkter bestemte Cirkel komme nær til Punktet N , og det hvad enten X , Y , Z ligger paa samme paa samme Side af C eller ikke. Ligesaa ses det, at enhver Cirkel, som rører Afvikleren i X og gaar gennem Y , vil komme nær til den samme Stilling (med Centrum N og Radius NC), naar X og Y kommer nær til C (ét af dem kan specielt ligge i C , medens det andet nærmer sig dette Punkt).

Cirklen med Centrum N og Radius NC kaldes Krumningscirklen til Afvikleren i Punktet C . I ethvert Punkt C af Cirkelafvikleren findes altsaa en saadan Krumningscirkel, med Centrum i det Punkt N , hvor Afviklerens Normal rører den givne Cirkel; dens Beliggenhedsforhold til Afvikleren skal nu nærmere undersøges.

Vi fandt ovenfor, at

$$NC > NB,$$

og da denne Ulighed stadig vil gælde, naar C ligger fast, medens B gennemløber Buen AC , slutter man heraf, at Krumningscirklen i C maa omslutte hele Buen AC af Afvikleren.

Da nu endvidere

$$PD < \neg PN + ND,$$

$$\neg PN = PD - NC,$$

altsaa

$$NC < ND,$$

vil Punktet D og dermed hele Buen CD falde uden for den nævnte Krumningscirkel. Altsaa:

Krumningscirklen i et vilkaarligt Punkt C af Afvikleren AD vil berøre Afvikleren i C samtidig med, at den gennem C passerer fra den ene Side af Kurven over paa den anden.

Buen AC ligger inden for Krumningscirklen, og Buen CD falder uden for samme.

Med Hensyn til andre Cirklers Stilling til Kurven skal vi vise følgende Sætning:

Naar Afvikleren AD skæres af en Cirkel i 3 adskilte Punkter U, V, X , saaledes at de nævnte Punkter følger efter hinanden i Ordenen $AUVXD$, da vil Buerne AU, UV, VX, XD falde afvekslende inden for og uden for Cirklen.

Gennem Cirkelns Centrum S kan man nemlig fælde 2 Normaler, lad os antage SB og SC , til Buerne henholdsvis UV og VX , og da, som tidligere vist, $SB > SC$, maa heraf følge, at Punktet B falder uden for og C inden for Cirklen, altsaa at Buerne UV og VX falder henholdsvis uden for og inden for Cirklen, og heraf følger atter, at Buerne AU og XD falder henholdsvis inden for og uden for Cirklen.

Ligeledes indser man let, at naar B og C er vilkaarlig givne Punkter paa Afvikleren i den paa Fig. 39 angivne Orden paa Buen, da vil en Cirkel, der rører Afvikleren i B og gaar gennem C , omslutte Buerne AB og BC , medens Buen CD falder uden for Cirklen; derimod vil en Cirkel, der rører i C og gaar gennem B kun omslutte Buen AB , medens Resten af Afvikleren falder uden for Cirklen. De 2 nævnte Cirkler vil afgrænse et seglformet Areal, der omslutter Buen BC paa Afvikleren. Cirklerne har deres Cen-

trer beliggende paa Liniestykkerne henholdsvis MS og NS , samt paa den vinkelrette paa Midten af BC . Den vinkelrette paa Midten af BC skærer altsaa Arealet MSN , men vil ikke kunne skære Cirkelbuen MN ; fra hvert Punkt af Linien skal der nemlig gaa mindst én Normal til Buen BC .

Skal man tegne en Cirkelafvikler, kan man benytte Krumningscirklerne i en Række tilstrækkelig tæt efter hinanden følgende Punkter. Inddeles Halvcirklen i et passende Antal lige store Dele, og bestemmes Halvperiferiens Længde efter den tidligere nævnte Regel, og tegner man de til Delingspunkterne hørende Krumningscirkler, vil man ligefrem kunne benytte Buer af disse Cirkler som Buer af den søgte Kurve. Lad 2 paa hinanden følgende Delingspunkter paa den givne Cirkel være betegnede ved M og N , og lad de tilhørende rectificerede Buer MB og NC være afsat ud ad Tangenterne. De to Krumningscirkler med Centrér M og N og Radier MB og NC vil omslutte hinanden (Centerlinien MN er mindre end Radiernes Differens, $\smile MN$), og Buen BC af Afvikleren ligger imellem dem. Idet vi nu af Krumningscirklerne tegner de smaa Buer BB_1 og CC_1 , som fører fra B og C hen til den rette Linie MN , vil det være muligt at benytte disse Buer som Dele af Cirkelafvikleren, saafremt den teoretiske Værdi af Afstanden B_1C_1 er uden Betydning i den foreliggende Fremstilling.

Man har nu:

$$B_1C_1 = NC - MB - MN = \smile MN - MN,$$

og idet Radius i den givne Cirkel er r , Vinkelmaalet for MN , angivet i rent Tal, θ :

$$B_1C_1 = 2r \left(\frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) < r \cdot \frac{\theta^3}{24}.$$

Hermed har man et Kriterium for, hvor lille Vinklen θ skal tages, for at man paa den angivne Maade kan benytte Krumningscirklerne til Fremstilling af Afvikleren.

Er Cirkelns Radius f. Eks. 100 mm og Halvperiferien inddeles i 16 lige store Dele, saa at $\theta = \frac{\pi}{16}$, vil Afvigelsen

omtrent være $\frac{1}{30}$ mm, saa at den herved opnaaede Nøjagtighed i Almindelighed vil være tilstrækkelig.

I Stedet for at bruge Krumningscirklerne i *B* og *C* kunde man ogsaa bruge de 2 Cirkler, hvoraf den ene rører i *B* og gaar gennem *C*, medens den anden rører i *C* og gaar gennem *B*; Centrerne for disse Cirkler maa da først opledes paa de to Normaler *MB* og *NC*. Disse Cirkler bestemmer jo et seglformet Areal, hvori Buen *BC* paa Afvikleren skal ligge. Afgivelsen vil her, som en let Undersøgelse, i Analogi med den ovenfor, viser, være noget mindre, saa at disse Cirkler for den samme Inddeling af den afviklede Cirkel giver større Nøjagtighed end Krumningscirklerne.

De i det foregaaende fremsatte Udviklinger og Resultater angaaende Afvikleren af en Halvcirkel (eller en Cirkelbue mindre end 180°), vil, som man ser, omtrent ordret kunne overføres paa Afvikleren af en vilkaarlig konveks Bue, naar blot dennes Totalkrumning (d. e. den Vinkel, som Tangentens Retning gennemløber, medens Røringspunktet bevæger sig fremad paa Buen fra det ene Endepunkt til det andet) ikke overskrider 180° .

Vi skal endnu tilføje et Par Bemærkninger om den fuldstændige Cirkelafvikler. Det er for det første klart, at Buen *AD* vil fortsættes ud over *D* i uendelig mange Vindinger, der lægger sig spiralformigt uden om hinanden, og som alle er sammensat af Buer, der har lignende Egenskaber som Buen *AD*. Om hver Vinding, svarende til Afvikling af en hel Periferi, vil det gælde, at den højst har 3 Punkter fælles med en vilkaarlig Cirkel; Beviset føres ganske som for Halvcirkelns Afvikler.

Dernæst maa Cirkelafvikleren fortsættes ud over *A* i en Spiral, symmetrisk med den førstnævnte med Hensyn til *PA*. I *A* vil der da dannes en Spids, og der, hvor de 2 Spiraler mødes paa Symmetriaksen, vil der opstaa Dobbelpunkter.

Imidlertid vil det være tilstrækkeligt, at man tegner Buen *AD*. Opgaver angaaende de øvrige Buer føres nemlig

let tilbage til den. Skal man f. Eks. finde et Skæringspunkt S mellem en ret Linie l og Buen AD 's Forlængelse ud over D , svarende til Afvikling af den følgende Halvcirkel, finder man først den Linie l_1 , der er symmetrisk med l med Hensyn til Cirkelns Centrum, og paa l_1 opsøges med Passeren et Punkt S_1 , hvis mindste Afstand over til Buen AD er lig Halvperiferiens Længde PD . S_1 vil da være symmetrisk med S med Hensyn til Cirkelns Centrum. Paa lignende Maade kan man alene ved Brug af Buen AD finde Skæringspunkter mellem en vilkaarlig tegnet Kurve og en vilkaarlig Bue af Cirkelafvikleren. Som Eksempler nævnes følgende:

Opg. 64. *Find Afviklerens Dobbelpunkter.*

Opg. 65. *Find Skæringspunkter mellem Afvikleren og et ved Brændpunkt og Ledecirkel givet Keglesnit.*

Opg. 66. *Fra et givet Punkt drages Tangenter til Afvikleren.*

Opg. 67. *Bestem Fællestangenterne til Cirkelafvikleren og en vilkaarlig Cirkel.*

Opg. 68. *Find Fællestangenter til Cirkelafvikleren og et ved Brændpunkt og Ledecirkel givet Keglesnit.*

Opg. 69. *Find paa en given ret Linie Punkter, hvorfra der kan drages 2 paa hinanden vinkelrette Tangenter til Cirkelafvikleren.*

Opg. 70. *En Cirkelafvikler skal bestemmes ved 2 af sine Punkter B og C samt Centrum O i den tilhørende Cirkel.*

Opgaven løses ved, at man tegner en vilkaarlig Cirkel med Centrum O og en Afvikler til denne; derpaa lægges efter en tidligere angiven Metode (Opg. 43) en Trekant $OB_1C_1 \sim OBC$ med Vinkelspidserne B_1 og C_1 paa den tegnede Afvikler, og den søgte Afvikler bestemmes da ved Lighedannedhed.

Saaframt det er givet, at B og C skal falde paa en Bue af Afvikleren, hvis Totalkrumning er mindre end 360° , og som ikke indeholder Spidsen, har Opgaven kun een Løsning,

valgte Stilling skærer henholdsvis Cirklen (a) og Afvikleren AD i M og N , saaledes at $ML = RN$, da er Vinklen x fundet $= AOR$.

En Diskussion af Ligningen (ogsaa for negative Værdier af a eller b og for x beliggende i højere Kvadranter) kan let gennemføres i Tilslutning til denne Konstruktion.

Opg. 73. Løs Ligningen

$$x = a \sin^n x + b \sin^{n-1} x + \dots + k \sin x + l.$$

Man anvender en ganske lignende Metode som ved den foregaaende Opgave, idet man benytter Culmann's Metode til Fremstilling af Polynomiet paa højre Side.

Opg. 74. Find x af Ligningen

$$x = a \sin x + b \cos x + c.$$

Opg. 75. Løs Ligningen

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = \sqrt{k^2 - c^2 \sin^2 x},$$

hvor a, b, c, k er givne Længder.

Opg. 76. Find Skæringspunkter mellem en Cykloide og en ret Linie l .

Cykloiden beskrives af Punktet C (Fig. 42), naar Cirklen c ruller paa den rette Linie a . Under denne Rulning vil den fra C udgaaende Afvikler af c gaa gennem et fast Punkt D af a , saaledes at $\sphericalangle CA = DA$. Man kan derfor formulere Opgaven saaledes: Den af l, a, D dannede uforanderlige Figur skal flyttes saaledes, at a stadig rører c , D ligger paa Afvikleren, medens l skal gaa gennem C . Denne Flytning udføres let, naar den nævnte uforanderlige Figur indtegnes paa en Flytteplan. Det er klart, at Opgaven kan løses ved en vilkaarlig tegnet Cirkel-afvikler, idet man benytter Lighedannethed.

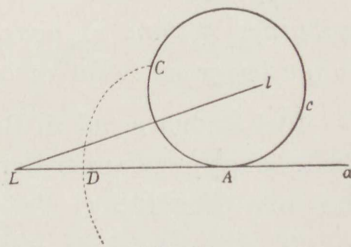


Fig. 42.

Opg. 77. Find Skæringspunkter mellem en Cykloide og et Keglesnit givet ved Brændpunkt og Ledecirkel.

Man anvender en ganske lignende Metode som i den foregaaende Opgave.

Opg. 78. Bestem en Cykloide ved 2 af dens Punkter og Basis (d. e. den rette Linie, hvorpaa Cirklen ruller).

Vis, at Opgaven kun kan have én Løsning, naar det er opgivet, at de givne Punkter skal ligge paa en Bue, der ikke indeholder nogen Spids af Cykliden.

Opg. 79. Til en Omgang af en Skruelinie lægges Oskulationsplaner gennem et givet Punkt. Hvor mange Løsninger vil der i det højeste kunne blive?

Opg. 80. Find Skæringspunkter mellem en Skruelinie og en Plan eller en Kugle, idet man kun betragter en enkelt Omgang af Kurven. Hvor mange Løsninger kan der komme?

Opg. 81. Find Skæringspunkter mellem en Skrueflade og en ret Linie.

Opg. 82. Find x af Ligningen

$$\sin \sin x = \frac{2}{3}x.$$

Opg. 83. At angive en Metode til at finde forskellige Sæt sammenhørende Værdier af Radierne R og r i to Hjul, der skal ligge i samme Plan og anbringes paa faste Akser med indbyrdes Afstand c , naar man om disse Hjul stadig skal kunne lægge en Drivrem af konstant Længde $2l$.

Idet Radierne ud til Røringspunkterne for Hjulenenes ydre Fællestangenter danner den spidse Vinkel θ med Centerlinien, har man (idet $R > r$):

$$\begin{aligned} R - r &= c \cos \theta, \\ R(\pi - \theta) + r\theta + c \sin \theta &= l, \end{aligned}$$

altsaa

$$\begin{aligned} R &= \frac{l}{\pi} - \frac{c}{\pi} (\operatorname{tg} \theta - \theta) \cos \theta, \\ r &= R - c \cos \theta. \end{aligned}$$

Ved Hjælp af disse Udtryk kan man til forskellige Værdier af θ finde de tilsvarende Værdier af R og r . Ved Konstruktion gøres det paa følgende Maade (Fig. 43): Man tegner en Cirkel med Radius $\frac{c}{\pi}$; i denne drages Diameteren AOP , og man tegner Afvikleren AD . Derpaa drages en Linie $a \neq AP$ i Afstanden $\frac{l}{\pi}$ fra denne, saaledes som Figuren viser.

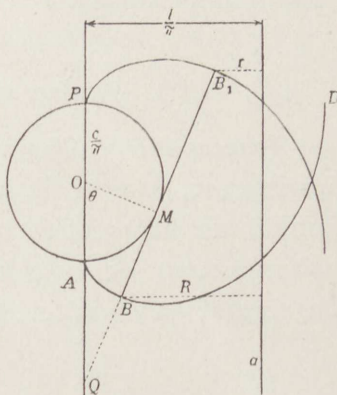


Fig. 43.

Afsættes nu den spidse Vinkel $AOM = \theta$, og drages Tangenten MB til Cirklen i M til Skæring med Afvikleren i B og med Linien PA i Q , da vil man have

$$BQ = \frac{c}{\pi}(\operatorname{tg} \theta - \theta),$$

og heraf udledes, at Afstanden fra B til Linien AP bliver

$$\frac{c}{\pi}(\operatorname{tg} \theta - \theta) \cos \theta,$$

saa at Afstanden fra B til Linien a vil være

$$Ba = \frac{l}{\pi} - \frac{c}{\pi}(\operatorname{tg} \theta - \theta) \cos \theta,$$

hvilket Udtryk, som vi saa ovenfor, netop angiver Værdien af R .

Afsættes $BB_1 = c$ paa Tangenten BM , faar man

$$B_1a = R - c \cos \theta = r.$$

Herved er da Konstruktionen fundet: Naar Liniestykket BB_1 af konstant Længde c ruller paa Cirklen, idet B følger Afvikleren AD (og B_1 som Følge deraf vil beskrive en anden Afvikler, udgaaende fra P), da vil samtidige Stillinger B og B_1 have saadanne Afstande fra den faste Linie a , som netop fremstiller sammenhørende Værdier af R og r . Tegner man begge Afviklere, vil man ved at drage forskellige Tangenter til Cirklen let kunne tage saa mange sammenhørende

Værdisæt af R og r , som man ønsker. Men det er let forståeligt, at man (ved Brug af Flytteplan eller Papirslinéal) kan nøjes med en eneste Cirkelafvikler.

19. Andre transcendente Opgaver.

Transcendente Opgaver, som afhænger af andre Funktionsklasser, kræver Tegning af nye Kurver, hvorved disse Funktioner kan grafisk bestemmes. Saaledes vil Eksponentialfunktionen og Logaritmen f. Eks. kunne behandles ved Tegning af en logaritmisk Spiral med Ligningen

$$r = ae^{\theta}$$

i polære Koordinater. Til Bestemmelse af Spiralen benyttes de to Punkter, der svarer til $\theta = 0$ og $\theta = 1$; den første af disse Værdier for θ giver $r = a$, den anden $r = ea$. Den sidste konstrueres med saa stor Nøjagtighed, som Fremstillingen tillader; i Regelen vil det være tilstrækkeligt at sætte

$$e = 3 - \frac{20}{71} = 3 - \frac{1}{4 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{5})}.$$

Efter at have afsat de to radii vectores $OA = a$, $OB = ae$, saaledes at Vinklen $AOB = 1$, kan man let finde flere Punkter af Spiralen.

Man halverer Vinklen mellem OA og OB og ud ad Halveringslinien afsættes $OC = \sqrt{OA \cdot OB}$; C vil da være et nyt Punkt af Spiralen, og paa lignende Maade kan man finde flere Punkter.

Punktet C findes lettest ved, at man halverer Nabovinklen til AOB , og paa den fundne Halveringslinie opsøger et Punkt P lige langt fra A og B ; man har da $PC = PA = PB$, saa at C derved hurtigt bestemmes.

I Forbindelse med den logaritmiske Spiral kan man benytte en Archimedes' Spiral, hvorved man kan omsætte Vinkeltal til Længdetal.

Derefter vil man ved Flytningsforsøg kunne løse saadanne Opgaver, som analytisk kan føres tilbage til Ligninger, der udtrykkes under endelig Form ved algebraiske Funktioner, trigonometriske Funktioner, Exponentialfunktioner, samt de hertil svarende omvendte Funktioner.

