Bevægelseslære,

udarbejdet til Brug for

tekniske Skoler, Maskinister og Konstruktører

af

H. J. Hannover,
Docent ved polyt. Læreanstalt.

Udgivet med Understøttelse af det Reiersenske Fond.

KJØBENHAVN.
P. G. PHILIPSENS FORLAG.
Trykt hos J. Jørgensen & Co., (M. A. Hannover).
1888.

11

Ved Undervisningen i Maskinlære og Maskinkonstruktion ved det tekniske Selskabs Skole i Kjøbenhavn anvendes Docent Borch's fortrinlige Lærebøger i Maskinlære. Undervisningen i dette Fag forudsætter imidlertid hos Eleverne et større Kjendskab til Ligevægtslæren (Statiken) og Bevægelseslæren (Dynamiken), end Physikundervisningen bibringer. Medens der nu ved Skolen gives særlig Undervisning i Statik, maa det nærmere om Dynamiken meddeles som Indledning til Foredraget over Maskinlære. Til en saadan Indledning skulde da denne lille Bog afgive et trykt Grundlag, idet det dog er mit Haab, at den ogsaa udenfor den nævnte Skole maa kunne anvendes med Nytte af Maskinister og Konstruktører.

I Bogen er særlig benyttet fransk Maal og Vægt, men da dette System endnu ikke er indført ved Lov her i Landet, har jeg S. 62—63 gives Anvisning paa, hvorledes de i Bogen nummererede Formler ogsaa kunne anvendes, naar der regnes med Pund og Fod.

Januar 1888.

H. J. Hannover.

I. Bevægelse i Almindelighed.

§ 1. **Hvile og Bevægelse.** Ethvert Legeme indtager i Rummet en vis Plads og er i Hvile, naar dets Plads ikke forandrer sig, medens det er i Bevægelse, naar det efterhaanden indtager en ny Plads.

Et Legemes Hvile eller Bevægelse er enten absolut eller relativ, eftersom man betragter dets Plads i Forhold til et Legeme, der virkelig er i Hvile, eller til et Legeme, der kun tænkes i Hvile, f. Ex. den sig om Solen og om sin egen Axe drejende Jord.

§ 2. **Et Legemes Bane.** Naar et enkelt Punkt bevæger sig, kommer det til at indtage en Række paa hinanden følgende Stillinger, der danne en Linie eller Kurve, Punktets Bane. Naar et Legeme bevæger sig, forstaar man ved dets Bane Banen af et enkelt særligt Punkt i Legemet, f. Ex. dets Midtpunkt eller dets Tyngdepunkt. Banens Længde udmaales i Meter (1 Meter = 1m = 1^m = 3,1862 danske Fod), og Banen kan være retlinet eller krum.

§ 3. **Hastighed og Acceleration.** Er den gjennemløbne Vej ligestor i flere paa hinanden følgende smaa og ligestore Tidsdele, kaldes Bevægelsen jævn, ellers ujævn.

Er Bevægelsen jævn, forstaas ved Legemets Hastighed det Antal Meter, der gjennemløbes i et Sekund, altsaa det Antal Meter, der faas ved at dividere Banens Længde i en vis Tid med Sekundernes Antal.

Er Bevægelsen ujævn, saa forandrer Hastigheden sig, idet man da ved Hastigheden i et bestemt Punkt af Banen, eller i en bestemt meget lille Tidsdel, forstaar den Vej, der vilde tilbagelægges i næste Sekund, hvis Bevægelsen blev jævn pludselig, saa at der i de næste Tidsdele af samme Størrelse som den betragtede blev gjennemløbet ligesaa smaa Veje som i denne.

Af ujævne Bevægelser komme vi i det følgende til væsentlig at beskjæftige os med Bevægelse med jævnt foranderlig Hastighed, hvor til enhver Tid under Bevægelsen Hastigheden er et vist Antal Meter større eller mindre end et Sekund tidligere. Dette Antal Meter kaldes Bevægelsens Grundhastighed eller Acceleration.

§ **4. Jævn Bevægelse.** Kaldes den i t Sekunder gjennemløbne Vej i Meter r, saa er Hastigheden:

$$h = \frac{r}{t}, \qquad (1)$$

altsaa:

$$r = h \,.\, t. \qquad (2)$$

Anv. 1. En Tønde trækkes op af en 400 m dyb Schacht i $4^1/_2$ Minut med jævn Fart. Hvor stor er Hastigheden?

$$(1) \text{ giver: } h = \frac{r}{t} = \frac{400}{270} = 1\tfrac{13}{27}.$$

Anv. 2. Hvor lang Tid bruger en Hest, der bevæger sig med 2m Hastighed til at tilbagelægge en Kilometer?

Man har:

$$t = \frac{r}{h} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ Sekunder} = 8 \text{ Min. } 20 \text{ Sek.}$$

§ 5. **Jævnt tiltagende Bevægelse eller Bevægelse med jævnt tiltagende Hastighed.** Lad os antage, at Hastigheden, naar vi begynde at betragte Bevægelsen, er c (se § 3) og efter et Sekunds Forløb c + G, saa er G Accelerationen, og efter 2 Sekunders Forløb er Hastigheden da c + 2 G, efter t Sekunders Forløb:

$$v = c + t \, . \, G, \qquad (3)$$

hvor t godt kan være en ægte eller uægte Brøk.

Efter $\frac{t}{2}$ Sekunders Forløb var Hastigheden $c + \frac{t}{2} G$, som vi ville kalde Bevægelsens Middelhastighed, thi f. Ex. 4 Sekunder efter Begyndelsen af Bevægelsen var Hastigheden netop ligesaa meget mindre end Middelhastigheden, som den 4 Sekunder før dens Ophør var større. Den i t Sekunder gjennemløbne Vej bliver da saa lang, som hvis Legemet stadig var løbet med en jævn Hastighed saa stor som Middelhastigheden. Løber f. Ex. et Lokomotiv i t Sekunder med jævnt tiltagende Fart, naar det netop saa langt frem, som hvis det stadig var løbet med samme Fart, nemlig Middelhastigheden.

Ved den omtalte jævnt tiltagende Bevægelse gjennemløbes altsaa i t Sekunder den samme Vej s, som vilde gjennemløbes i samme Tid ved en jævn Bevægelse med Hastigheden $c + \frac{t}{2} G$, altsaa er ifølge (2):

$$s = (c + \frac{t}{2} G) \cdot t = ct + \tfrac{1}{2} Gt^2. \tag{4}$$

Af (3) og (4) faas ved Elimination af t:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2\,G}. \tag{5}$$

For $c = 0$ gaa Formlerne (3), (4) og (5) over til:

$$v = Gt. \tag{6}$$

$$s = \tfrac{1}{2} Gt^2. \tag{7}$$

$$s = \frac{v^2}{2G}, \tag{8}$$

idet (8) ogsaa kan skrives:

$$v = \sqrt{2Gs}. \tag{9}$$

§ 6. **Jævnt aftagende Bevægelse**. Hvis Hastigheden efter hvert Sekunds Forløb aftager med G, vil Slutningshastigheden efter t Sekunders Forløb blive:

$$v = c - t.G, \tag{10}$$

og Middelhastigheden $c - \frac{1}{2} t.G$, og man faar da, at den i t Sekunder gjennemløbne Vej er:

$$s = (c - \frac{t}{2} G).\, t = ct - \tfrac{1}{2} Gt^2. \tag{11}$$

Af (10) og (11) faas ved Elimination af t:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2\,G}. \tag{12}$$

Af de hidtil udviklede Formler ses, at den jævne Bevægelse kan betragtes som en jævnt tiltagende med

Accelerationen 0, og den jævnt aftagende Bevægelse som en jævnt tiltagende med negativ Acceleration.

Anv. 3. Det lader sig paavise ved physiske Forsøg, at i det lufttomme Rum falde Legemerne her paa Jorden lige hurtigt og med jævnt tiltagende Hastighed, og at Accelerationen er $9^m,81$ ($31,25'$). Hvor langt falder et Legeme da i $3\frac{1}{3}$ Sekund? Da Begyndelseshastigheden c er 0, faas af (7):

$$s = \tfrac{1}{2}Gt^2 = \tfrac{1}{2} . 9^m,81 . \frac{100}{9} = 54^m,5,$$

$$\text{eller } s = \tfrac{1}{2}Gt^2 = \tfrac{1}{2} . 31,25' . \frac{100}{9} = \text{c. } 174'.$$

Flere Exempler paa Anvendelsen af Formlerne i det foregaaende ville findes f. Ex. i Afsnittet om Faldbevægelsen.

§ 7. **Kraft.** Et Legeme i Hvile kan ikke give sig til at bevæge sig, og et Legeme i Bevægelse kan ikke skifte Hastighed eller Retning uden Tilstedeværelse af Paavirkning udefra (Inertiens Lov). De ydre Paavirkninger, der forandre et Legemes Bevægelsestilstand, kaldes Kræfter. (Som det læres i Statikken kunne imidlertid ofte Kræfter virke uden at frembringe nogen Forandring i et Legemes Bevægelsestilstand; de siges da at holde hinanden i Ligevægt). Naar saaledes et Legeme falder her paa Jorden, er det Tyngdekraften, der trækker det nedad. Kastes et Legeme lodret opad med en vis Begyndelseshastighed, er det Tyngdekraften, der stadig forandrer denne Hastighed, nemlig formindsker den, lader den blive 0, og dernæst lader Legemet skifte Retning og falde ned igjen.

§ **8**. Et Legeme, der bevæger sig i en krum Bane, vil, naar pludselig alle ydre Kræfter ophøre at virke, gaa videre efter Tangenten til det Punkt af Banen, hvor Legemet just da befinder sig, thi Tangenten er netop den Retning, som Legemets Bevægelse havde i det betragtede Øjeblik. Et Exempel herpaa gives i § 31.

§ **9. Kraftens Maaling**. Den paa et Legeme virkende Tyngdekraft foraarsager et Tryk af Legemet mod dets Understøtning (eller et Træk i dets Ophængning), som kaldes Legemets Vægt, og maales i Kilogram, idet 1 Kilogram = 1^{kg} = 2 danske Pund er Vægten af en Kubikdecimeter Vand af største Tæthed, altsaa det Tryk, som en Kubikdecimeter Vand af største Tæthed udøver paa sin Understøtning.

Andre Kræfter (dog ikke Stødkræfter, der omtales særlig i § 20 og i Afsnittet om Stødet) maales ogsaa i Kilogram. Virker nemlig paa Legemet L (Fig. 1) en Kraft i Pilen B's Retning, kan dens Virkning altid i hvert Øjeblik tænkes erstattet af Trækket af en vis Vægt P (Fig. 2), der er ophængt i en over en Tridse gaaende Snor, saaledes at Snorens anden Ende trækker i Legemet L med samme Styrke og i samme Retning som den omtalte Kraft. Dennes Størrelse siges da at være P Kilogram.

Kraften er fuldstændig bestemt, naar man kjender dens Angrebspunkt, Retning og Størrelse. Opløsning og Sammensætning af Kræfter antages bekjendt fra Statikken.

§ **10. Et Legemes Masse**. Virker en stadig uforandret (konstant) Kraft paa et Legeme, der bevæger sig i Kraftens Retning, vil Kraften i hvert Sekund frembringe den samme Acceleration (Bevægelsen bliver jævnt foranderlig), den dobbelte Kraft vil frembringe paa samme Legeme den dobbelte Acceleration, en n Gange saa stor Kraft en n-dobbelt Acceleration. Er Kraften, der virker paa Legemet, P Kilogram, Accelerationen, den fremkalder, G Meter, — en anden Kraft p Kilogram, og den Acceleration, som den fremkalder paa samme Legeme, g Meter, saa er altsaa:

$$\frac{G}{g} = \frac{P}{p}, \text{ altsaa ogsaa } \frac{P}{G} = \frac{p}{g}, \text{ eller:}$$

Forholdet mellem den paa et Legeme virkende konstante Kraft og den deraf frembragte Acceleration i Kraftens Retning er konstant. Dette konstante Forhold kaldes Legemets Masse og betegnes sædvanlig ved M (eller m), saa at man altsaa faar:

$$\frac{P}{G} = \frac{p}{g} = M. \tag{13}$$

Ved det frie Fald i det lufttomme Rum er p Legemets Vægt, $g = 9^m,81$ (se Anv. 3), saa at man har:

$$p = g \, . \, M, \tag{14}$$

eller: Et Legemes Masse faas ved at dividere dets Vægt med Accelerationen, som Tyngden frembringer. Denne Acceleration betegnes sædvanlig ved Bogstavet g.

Af (14) faas, at naar $p = g$, er $M = 1$, altsaa er en Masseenheds Vægt g Kilogram, eller en Masseenhed er saamegen Masse, som der findes i g Kubikdecimeter Vand af største Tæthed.

For $M = 1$ er ifølge (13) ogsaa $P = G$, eller Accelerationen i Meter lig den Del af den hele paa Legemet virkende Kraft (den bevægende

Kraft), der virker paa hver Masseenhed af Legemet. Denne Del af Kraften kaldes derfor den accelererende Kraft.

Anv. 4. Som Exempel paa en konstant Kraft kan tjene Tyngdekraften. Den hidrører som bekjendt her paa Jorden fra Jordens Tiltrækning, men da Maanen formedelst sin Lidenhed i Forhold til Jorden tiltrækker med mindre Kraft, er altsaa et Legemes Vægt paa Maanen mindre end her, og Tyngdeaccelerationen paa Maanen bliver da ligesaamange Gange mindre end Tyngdeaccelerationen her paa Jorden, medens netop derfor Legemets Masse er den samme, enten det findes paa Jorden eller paa Maanen.

§ II. **Arbejdets Maaling**. I det følgende betragtes kun Bevægelser og Kræfter her paa Jorden.

Naar en Kraft virker paa et Legeme og frembringer, forandrer eller standser Bevægelse i Kraftens Retning, siger man, at den udfører et vist Arbejde, der dels afhænger af Kraftens Størrelse i Kilogram, dels af, paa hvor lang en Vej af Legemets Bane Kraften har været virksom. Arbejdet voxer proportionalt med Kraftens Størrelse og Vejens Længde, idet f. Ex. Arbejdet fordobles, naar Kraftens Størrelse eller omtalte Vejlængde fordobles. Man maaler derfor det udførte Arbejde A ved at multiplicere Kraften P med den gjennemløbne Vej s, forsaavidt denne er tilbagelagt i Kraftens Retning, og har altsaa:

$$A = P.s. \tag{15}$$

Det Arbejde, der udføres ved at løfte 1^{kg} 1 Meter højt, kaldes 1 Kilogrammeter (1^{km}).

Det Arbejde, der udføres ved at løfte 1 ℔ 1 Fod højt, kaldes 1 Pundfod (1℔').

Anv. 5. En Tønde, der vejer 10^{kg}, trækkes op af en 400^{m} dyb Schacht. Hvor stort er det udførte Arbejde?

(15) giver:

$$A = 10 \,.\, 400 = 4000^{km.}$$

Anv. 6. En Hest trækker med en vandret Kraft af 65^{kg} en Vogn 10^{m} fremad. Hvor stort er det udførte Arbejde?

(15) giver:

$$A = 65 \,.\, 10 = 650^{km.}$$

§ 12. Virker Kraften ikke i Bevægelsens Retning, bliver Arbejdet at udmaale paa anden Maade, hvilket bedst ses ved et Par Exempler.

Ex. 1. Trækker der i Legemet L (Fig. 3) en konstant Kraft P skraat opad under en Vinkel β med den horizontale Linie, men Legemet af en eller anden Grund er tvunget til kun at bevæge sig vandret fremad, saa virker af Kraften P, der kan opløses i de to Komposanter $P\sin\beta$ og $P\cos\beta$, kun sidstnævnte til Bevægelsen, og bevæges L et Stykke s fremad, er derfor det udførte Arbejde kun:

$$A = P\cos\beta \,.\, s = P \,.\, s\cos\beta, \tag{16}$$

eller det udførte Arbejde er lig Kraften gange Vejens Projektion paa Kraftens Retning, eller Vejen gange Kraftens Projektion paa Vejens Retning. (16) maa f. Ex. anvendes til at finde Arbejdet, der udvikles, naar en Vogn trækkes fremad ved et Træk i skraat opadgaaende Vognstænger.

Ex. 2. Virker en konstant Kraft P paa Punktet 0 (Fig. 4), — der ved en Styring er tvunget til at bevæge sig i Kurven OB, — stadig i hvert Punkt af Kurven i Retning af denne Kurves Tangent, saa er det udførte Arbejde, naar en Vejlængde s er tilbagelagt, lig P. s.

Ex. 3. Havde P i hvert Øieblik dannet Vinklen β med Tangenten, var det udførte Arbejde blevet P. s cos β.

§ 13. **Grafisk Fremstilling af det udførte Arbejde.** Er Bevægelsen retlinet paa Vejen BC (Fig. 5), og Kraften stadig virkende i Bevægelsens Retning, men af variabel Størrelse, nemlig i hvert Punkt af Banen af en Størrelse, som repræsenteres ved den i Punktet oprejste vinkelrette (f. Ex. i Punktet D af Størrelse DE), saa er det udførte Arbejde, naar de oprejste vinkelrette (saakaldte Ordinater) ligge tæt ved hinanden, meget nær lig Arealet, der ligger imellem BC og en Kurve gjennem Ordinaternes Endepunkter, idet dette Areal meget nær er lig Summen af en Masse Rektangler, af hvilke ét er tegnet, nemlig DEFH, der meget nær repræsenterer det Arbejde, der er udført paa Vejen DF.

Ved Hjælp heraf og af Ex. 2 og Ex. 3 i § 12 er det nu ikke vanskeligt at finde grafisk det Arbejde, der er udført ved en krumlinet Bevægelse, naar man kjender Banen og Kraftens Størrelse og Retning i tæt paa hinanden følgende Punkter af denne.

§ 14. **Et Areals Beregning.** Ved grafiske Beregninger er det ofte af Vigtighed at kunne finde med Tilnærmelse Størrelsen af et Areal af uregelmæssig Form. Hertil anvendes Simpsons Formel. Skulle vi saaledes finde Størrelsen A af det lukkede Areal i Fig 6, trækkes en ret Linie L tværs over, og dernæst de to yderste Tangenter B og C til dette Areal, som kunne lægges vinkelrette paa L. Stykket bc deles dernæst i et lige Antal ligestore Dele, jo flere des bedre for Resultatets Nøjagtighed. I Fig. 6 er bc tænkt delt i 2n ligestore Dele, og i Delingspunkterne ere oprejste vinkelrette paa L. Lad Længderne af de Korder, der afskæres af disse vinkelrette indenfor Arealet, være y_0, y_1, y_2 . . . . . y_{2n}, hvor $y_0 = y_{2n} = 0$, saa lader det sig ved højere Mathematik paavise, at:

$$A = (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + .. + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_{2n})\frac{h}{3}, \quad (17)$$

hvor h er Afstanden mellem to paa hinanden følgende vinkelrette. (17) kaldes Simpsons Formel.

§ 15. **Hestekraft**. I Maskinvæsenet kommer det ikke blot an paa det udførte Arbejdes Størrelse, men ogsaa paa, i hvor lang Tid det har ladet sig udføre.

Ved det Antal Hestekraft, en Maskine præsterer, forstaas det Antal Gange, den i Sekundet udfører et Arbejde paa 75^{km} (c. 480 ℔').

§ 16. **Levende Kraft**. Som det fremgaar af § 10 vil en konstant Kraft i hvert Sekund give et Legeme, der bevæger sig i Kraftens Retning, den samme Hastighedsforandring. Antages denne at være G og at være en Hastighedstilvæxt, gjælde Formlerne i § 5, og man faar, naar Legemet bevæger sig et Stykke Vej s, paa hvilken Hastigheden tiltager fra c til v, at der ifølge (5) er tilført Legemet et Arbejde A, som Kraften har udført, nemlig:

$$A = P \,.\, s = P. \frac{v^2 - c^2}{2\,G} = \frac{P}{G} \cdot \frac{v^2 - c^2}{2}$$

for at frembringe Hastighedstilvæxten.

Kaldes Legemets Masse M, bliver ifølge (13)

$$A = \frac{P}{G} \cdot \frac{v^2 - c^2}{2} = \tfrac{1}{2} M (v^2 - c^2) = \tfrac{1}{2} (Mv^2 - Mc^2). \quad (18)$$

For et Legeme i Bevægelse forstaas i et givet Øjeblik ved dets levende Kraft Produktet af dets Masse og Kvadratet paa dets Hastighed i det givne Øieblik. (18) kan derfor udtrykkes saaledes:

Ved den jævnt voxende retlinede Bevægelse er det Arbejde, som er tilført Legemet for at frembringe Hastighedsforøgelsen, i hvert Øjeblik lig den halve Tilvæxt i levende Kraft, som Legemet har opnaaet. Benævnelsen „levende Kraft“ maa ikke forlede til at tro, at dette Begreb har noget med Begrebet „Kraft“ at gjøre.

§ 17. Det Arbejde, der behøves for at give et Legeme en Hastighed v, naar det har en Hastighed c, og Bevægelsen er retlinet, er imidlertid ligestort, enten Overgangen fra den ene Hastighed til den anden sker jævnt eller ej. Hvis f. Ex. Overgangen først skete jævnt til en Hastighed V med en vis Acceleration, dernæst atter jævnt, indtil Hastigheden v naaedes, men med en anden Acceleration, vilde det tilførte Arbejde have været det samme, som hvis den var sket ganske jævnt fra først af, og til Hastigheden blev v, idet det nemlig var blevet en Sum af to Arbejder:

$$\tfrac{1}{2} (MV^2 \div Mc^2) + \tfrac{1}{2} (Mv^2 - MV^2) = \tfrac{1}{2} (Mv^2 - Mc^2).$$

En ujævn retlinet Bevægelse kan nu altid betragtes som sammensat af paa hinanden følgende meget korte Bevægelser med hver sin jævne Hastighed, saa Sætningen i § 16 gjælder i Almindelighed for et Legeme med retlinet Bevægelse, hvis Hastighed tiltager paa én eller anden Maade.

§ **18**. Lader man et Legemes Hastighed og dermed altsaa dets levende Kraft aftage, saa kan man omvendt derved faa udført et Arbejde. Kjører saaledes et Lokomotiv med Sneplov foran gjennem et jævnt Snelag, og der pludselig lukkes for Damptilstrømningen til Lokomotivets Dampmaskiner, vil der kunne udføres det Arbejde at faa Sne skudt til Side, samtidig med at Lokomotivet taber i Hastighed, og dette Arbejde vil netop blive lig den halve Formindskelse i levende Kraft, som Lokomotivet lider, naar vi forudsætte, at kun Sneen virker hindrende paa Lokomotivets Bevægelse; thi antages Sneen at gjøre stadig samme Modstand, vil Lokomotivets Fart aftage jævnt, og Rigtigheden indses da af (12) ligesom (18) af (5), men paa samme Maade som i § 17 indses ogsaa Sætningens Rigtighed, hvis Lokomotivets Fart ikke aftager jævnt.

§ **19**. Paavirkes et Legeme, der bevæger sig retlinet, af en Kraft, der tvinger det ud af dets Bane og til at gaa videre i en krum Bane, gjælder Sætningen i § 16 dog. Beviset herfor vil blive givet i § 23, Anv. 18.

§ **20**. Ved at sammenholde §§ 17, 18 og 19 indses „Princippet for den levende Kraft“, der lyder saaledes:

Naar et Legeme tvinges til at forandre Hastighed, saaat den snart tiltager, snart aftager, vil dets halve Tilvæxt (Formindskelse) i levende Kraft være lig Forskjellen mellem det Arbejde, som er Legemet tilført, og det, som Legemet har udført i hele den betragtede Tid.

Principippet gjælder ogsaa, naar Legemets Hastighedsforandringer ere frembragte ved at støde til det (se § 9), men det kan da ikke benyttes til Beregninger (det samme er Tilfældet under enkelte særlige Omstændigheder, se Jul. Petersens Dynamik, S. 70 øverst), idet en Stødkrafts Arbejde kun kan bestemmes ved dens Virkning, men ikke kan maales ved Produktet af Kraften (som er næsten uendelig stor) og den Vej, som den har tilbagelagt (en Vej, der meget nær er 0), idet dette Produkt bliver af ubestemt Størrelse.

Endvidere forudsættes, at samtlige virkende Kræfter ere anvendte til at frembringe Hastighedsforandringer og ikke f. Ex. til at frembringe en blivende Sammentrykning eller en Opvarmning af Legemet (jvnfr. § 37).

II. Forskjellige Arter af Bevægelse.

A. Faldbevægelsen.

§ **21. Det lodrette Fald.** Vi betragte her et Legemes Bevægelse, naar det falder frit eller kastes lodret op, og man kan bortse fra Luftmodstand. Vi have da kun én konstant Kraft virkende, nemlig Tyngdekraften (se § 10, Anv. 4), og tilmed i Bevægelsens Retning. Den giver en Acceleration $g = 9^m,81 = 31,25'$ (se § 10). Da Accelerationen er konstant, bliver Hastigheden jævnt tiltagende eller aftagende, saa Formlerne i § 5 og § 6 gjælde, naar g indsættes i Stedet for G. Af (7) faas, at i første Sekund falder et Legeme ved det frie Fald igjennem en Længde $s = \frac{1}{2} g = 4^m,905 = 15,67'$. Forøvrigt vil disse Formlers Brug lettest ses af nogle Anvendelser:

Anv. 7. Hvor længe er et Legeme om at falde $54^m,5$ (jvnfr. Anv. 3)?

(7) giver:

$$54,5 = \tfrac{1}{2}.\ 9,81.\ t^2, \text{ eller:}$$

$$t^2 = \frac{109}{9,81} = \frac{100}{9}, \text{ altsaa } t = 3\tfrac{1}{3} \text{ Sekund.}$$

Anv. 8. Hvor stor bliver Slutningshastigheden?

(9) giver:

$$v = \sqrt{2gs} = \sqrt{2.\ 9,81.\ 54,5} = 32^m,7$$

Anv. 9. Hvor højt naar et Legeme, naar det kastes opad med en Begyndelseshastighed af $32^m,7$?

Bevægelsen vil blive med jævnt aftagende Hastighed; naar Legemet altsaa er højst oppe, er $v = 0$. (12) giver da:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2g} = \frac{32,7^2}{2.\ 9,81} = 54^m,5.$$

Derpaa vender Legemet og falder ned igjen. Af Anv. 8 ses, at naar det er faldet $54^m,5$ ned igjen, har det atter opnaaet sin Begyndelseshastighed.

Anv. 10. Hvor længe brugte Legemet i Anv. 9 til at stige?

(10) anvendes til at finde t, naar $v = 0$. Man faar da:

$$t = \frac{c}{g} = \frac{32,7}{9,81} = 3\tfrac{1}{3} \text{ Sekund,}$$

eller ved Sammenligning med Anv. 7 ses, at Legemet har brugt lige lang Tid til at stige og til at falde de $54^m,5$.

Anv. 11. Hvor stort er det Arbejde, der maa anvendes for at faa kastet Legemet $54^{m},5$ op, naar det vejer 2^{kg}?

Det anvendte Arbejde har været saa stort som det, der behøves til at overvinde en Kraft paa 2^{kg} paa en Vejlængde af $54^{m},5$. Ifølge (15) er dette Arbejde:

$$A = P \,.\, s = 2 \,.\, 54{,}5 = 109^{km}.$$

Anv. 12. Hvor stor er Legemets levende Kraft, naar det er faldet gjennem $54^{m},5$?

Ifølge Anv. 8 opnaas en Hastighed af $32^{m},7$. Da Legemets Masse ifølge (14) er $\frac{p}{g} = \frac{2}{9{,}81}$, bliver den hele Tilvæxt i levende Kraft:

$$\frac{p}{g} \,.\, v^2 = \left(\frac{2}{9{,}81}\right) \,.\, 32{,}7^2 = 218.$$

Den halve Tilvæxt i levende Kraft ved Faldet ses da at være lig Arbejdet, der maa tilføres, for at faa Legemet kastet $54^{m},5$ opad (se Anv. 11), eller lig det Arbejde, som Legemet udvikler ved at falde ligesaa langt, hvilket er i Overensstemmelse med Princippet for den levende Kraft.

Anv. 13. Ophænges i en Snor over en Tridse to Lodder, der hver veje Q Kilogram (Fig. 7), og sættes de i Bevægelse ved at lægge en Overvægt P paa det ene, samt bortses fra Tridsens Friktion, Snorens Bøjningsmodstand etc., vil man faa Bevægelse af alle 3 Lodder, idet de to ville synke og hæve det tredie. Den bevægende Kraft er de P Kilogram; Masserne, som skulle bevæges, ere samtlige tre Lodders Masser, som, da deres Vægt er $P + 2\,Q$, er $\frac{P + 2\,Q}{g}$; Accelerationen G, som fremkaldes, faas da af (13) at være:

$$G = P: \frac{P + 2Q}{g} = \frac{g \,.\, P}{P + 2Q},$$

hvorefter (6) — (9) kunne benyttes til Undersøgelse af Bevægelsen.

§ **22. Faldet paa Skraaplanet.** Antages et Legeme, hvis Vægt er p, liggende paa et Skraaplan, der helder Vinklen α, kan p (Fig. 8) opløses i to Kræfter, nemlig $P = p \sin \alpha$ parallel med Skraaplanets Længde og $p \cos \alpha$ vinkelret derimod. Bortses fra Gnidningsmodstand, vil $P = p \sin \alpha$ være den Kraft, der virker i Bevægelsens Retning. Ifølge (13) er nu den deraf frembragte Acceleration: $G = \frac{P}{M} = \frac{p \sin \alpha}{M}$, hvor M er Legemets Masse, altsaa ifølge (14): $M = \frac{p}{g}$, og $G = \frac{p \sin \alpha}{M} = g \sin \alpha$.

Da den bevægende Kraft P er konstant, gjælde nu Formlerne for jævnt foranderlig Bevægelse, naar der i disse sættes $G = g \sin \alpha$.

Er Skraaplanets Længde l, dets Højde h, og lader man Legemet falde ned ad hele Skraaplanet, opnaar det en Hastighed, der ifølge (9) bliver:

$$v = \sqrt{2Gs} = \sqrt{2 .\, g \sin \alpha \,.\, l} = \sqrt{2gh},$$

eller samme Hastighed, som det vilde have faaet ved at falde lodret gjennem Skraaplanets Højde (jvnfr. Anv. 8), men bruger hertil en anden Tid, nemlig ifølge (7) en Tid:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{G}} = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}},$$

medens der til et lodret Fald gjennem Skraaplanets Højde ifølge (7) vilde behøves en Tid:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2l \sin \alpha}{g}}.$$

Kastes omvendt et Legeme op langs Skraaplanet, maa Begyndelseshastigheden være $\sqrt{2gh}$, for at det skal naa helt op.

Løber et Legeme L ned ad en krum Flade (Fig. 9), kan denne betragtes som bestaaende af en Række paa hinanden følgende smaa Skraaplaner med forskjellig Heldning, og Legemets Hastighed under Faldet er da i et vist Øjeblik $\sqrt{2gh}$, naar h er det Stykke, som Legemet i det betragtede Øjeblik er sunket i lodret Retning. Naar Legemet er naaet saa dybt som mulig, har det netop opnaaet Hastighed nok til at løbe videre opad til samme vandrette Højde som den, hvorfra Legemet begyndte at løbe, og har i en hvilkensomhelst vandret Plan, det passerer, samme Hastighed under den opadløbende som under den nedadløbende Bevægelse.

B. Kastebevægelsen.

§ **23**. Vi ville her undersøge den Bevægelse, som et Legeme faar, naar det fra et Punkt O (Fig. 10) kastes skraat opad under en Vinkel α med en Hastighed a. Tænkes denne opløst i en vandret Komposant $a\cos\alpha$ og en lodret $a\sin\alpha$, da vil Legemet i Virkeligheden bevæge sig, som om det var kastet lodret opad med en Hastighed $a\sin\alpha$, men under sin Bevægelse opad og nedad igjen blev skubbet tilhøjre med en jævn Hastighed $a\cos\alpha$.

Vi ville antage, at Legemet i Virkeligheden faar en Bane OEBCD, hvor B er Banens højeste Punkt, og C det Punkt af Banen, som ligger i samme vandrette Plan som O, og ville da undersøge, hvor langt et Stykke x, Legemet er naaet tilhøjre for O, og hvor langt et Stykke y, det er naaet op over OC, naar det efter en vilkaarlig Tid t's Forløb befinder sig i E.

Ifølge (2) faas:

$$x = h \,.\, t = a\cos\alpha \,.\, t,$$

og ifølge (11):

$$y = a\sin\alpha \,.\, t - \tfrac{1}{2} g \,.\, t^2.$$

Elimineres t af disse Ligninger, faas:

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2a^2\cos^2\alpha}. \tag{19}$$

Af denne Ligning lader sig nu let bestemme, i hvilken Højde y over OC Legemet er, naar det er naaet et vist Stykke x tilhøjre for O, og omvendt. Banen kaldes en Parabel, og (19) kaldes Parablens Ligning.

Anv. 14. Hvor lang er OC?

Naar y = 0, hvilket er Tilfældet, naar Legemet er i O eller i C, giver (19), at x enten er 0, eller at:

$$x = OC = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Anv. 15. I hvilken Højde ligger B?

Legemet vil naa ligesaa højt, som hvis det var kastet lodret opad med en Hastighed $a\sin\alpha$, thi det, at Legemet samtidig skubbes til Siden, forandrer ikke dets Højde over O. Paa lignende Maade som i Anv. 9, faas:

$$OL = s = \frac{a^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

hvoraf ses, at udkastes flere Legemer fra O skraat opad med samme Hastighed men under forskj. Heldning, vil det naa højst, der kastes lodret opad, thi ved lodret Kast er $\sin \alpha = 1$, altsaa OL saa stor som mulig, nemlig lig $\frac{a^2}{2g}$, hvilket stemmer med (8).

Anv. 16. Hvor langt ligger B tilhøjre for O?

Da man, naar Legemet er i B, ifølge Anv. 15 har $y = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, faas ved Indsættelse heraf i (19) den tilsvarende Værdi af x at være:

$$x = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

hvoraf ved Sammenligning med Anv. 14 ses, at B ligger lige langt fra O og C.

Anv. 17. Bevis, at Parablen OBC er symetrisk omkring den lodrette gjennem B.

Af Anv. 16 saa vi, at B laa lige langt fra O og C og et Stykke $a^2 \sin 2\alpha$ tilhøjre for O. — Sættes nu x dels lig med $\frac{a^2 \sin 2\alpha}{2g} + m$, dels lig $\frac{a^2 \sin 2\alpha}{g} - m$, hvor m er en vilkaarlig Linie, og indsættes disse to Værdier for x i (19), faas samme Værdi for y, hvilket er det ønskede Bevis.

Anv. 18. Bevis (se § 19), at Princippet for den levende Kraft ogsaa gjælder for den betragtede krumlinede Bevægelse.

Antages Legemet efter t Sekunders Forløb at være i E, er dets Hastigked dér v lig Resultanten af den oprindelige Hastighed a og den Hastighed gt, som Tyngden alene (6) vilde have givet det. Altsaa er:

$$v^2 = a^2 + g^2 t^2 - 2agt \sin \alpha.$$

Men $y = a \sin \alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g t^2$, altsaa er:

$$v^2 = a^2 - 2gy, \text{ hvoraf: } a^2 - v^2 = 2gy,$$

og altsaa:

$$\tfrac{1}{2}(ma^2 - mv^2) = mg \cdot y = p \cdot y,$$

naar m er Legemets Masse, p dets Vægt.

Heraf ses just, at det halve Tab i levende Kraft er lig Arbejdet ved at løfte Legemet gjennem Højden y, men til samtidig at faa Legemet flyttet til Siden behøves intet Arbcjde, da der ingen Modstand er at overvinde, altsaa er det halve Tab i levende Kraft netop lig Arbejdet ved at flytte Legemet fra O til E.

Af Udtrykket $v^2 = a^2 \div 2gy$ ses endvidere, at v afhænger af y og a, men ikke af α, eller kaster man fra O Legemer skraat opad med samme Hastighed men under forskjellig Heldning, faa de i samme vandrette Plan samme Hastighed.

§ **24.** Kastes Legemet med en Hastighed a skraat nedad fra O under en Vinkel α med OC, forholder det sig, som om det dels var kastet lodret nedad med en Begyndelseshastighed a sin α, dels under Faldet bevægede sig tilhøjre med en jævn Fart $a\cos\alpha$. Banen bliver da kongruent med Stykket CD af Fig. 10, idet det i § 23 betragtede Legeme just passerede C med en Hastighed a skraat nedad under en Vinkel α med OC. For ethvert Punkt af Banen er y negativ, da ethvert Punkt deraf ligger under OC. Hastigheden v i et Punkt i Dybden y under OC, bliver derfor (jvnfr. § 23, Anv. 18) bestemt af:

$$v^2 = a^2 + 2gy.$$

C. Rotations- eller Omdrejningsbevægelsen.

§ **25.** Ved et Legemes Rotation eller Omdrejningsbevægelse forstaas dets Drejning om en

Axe. Herved beskrive alle Legemets Punkter Cirkelbuer, undtagen de, der ligge i Axen, hvilke ikke forandre Plads.

§ **26. Vinkelhastighed.** Den Hastighed, som Punkter i et roterende Legeme i en Meters Afstand fra Axen faar ved Rotationen, kaldes Legemets Vinkelhastighed. Punkter i r Meters Afstand fra Axen faa en Hastighed, der er r Gange Vinkelhastigheden. Vi antage her Omdrejningen jævn, altsaa Vinkelhastigheden konstant.

§ **27. Et roterende Legemes levende Kraft, Inertimomentet.** Vi ville nu undersøge, hvor stor en levende Kraft, der indeholdes i et Legeme L, der roterer med en Vinkelhastighed ω om Axen A, som er vinkelret paa Papirets Plan (Fig. 11). Legemet tænkes delt i en Mængde meget smaa Massedele m_1, m_2, m_3 . . . ., der ligge i Afstande r_1, r_2, r_3 . . . . fra Axen. Disse Deles Hastigheder blive ωr_1, ωr_2, ωr_3 . . . . Den hele levende Kraft i samtlige Massedele bliver:

$$L = m_1 \omega^2 r_1{}^2 + m_2 \omega^2 r_2{}^2 + \ldots = \omega^2 (m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + \ldots).$$

I Parenthesen staar her en Sum af alle Legemets Massedele, hver multipliceret med Kvadratet paa sin Afstand fra Axen. Denne Sum kaldes Legemets Inertimoment med Hensyn til Axen, og betegnes dette ved I, bliver:

$$L = \omega^2 . I.$$

§ **28.** Det Arbejde A, der behøves tilført for at give et hvilende Legeme Rotation med en Vinkelhastighed ω, er ifølge (20) lig den halve Tilvæxt i levende Kraft, altsaa haves:

$$A = \tfrac{1}{2} \omega^2 . I. \qquad (20)$$

§ **29**. Inertimomenterne af en Del Legemer lade sig finde ved Hjælp af højere Mathematik. Vi ville ved m betegne Legemets Masse:

For et retvinklet Parallelepipedum med Kanterne k, h og l er Inertimomentet med Hensyn til Midtlinien parallel med l lig med:

$$\tfrac{1}{12}\, m\,.\,(h^2 + k^2).$$

For en ret cirkulær Cylinder med Radius r er det med Hensyn til Axen:

$$I = \tfrac{1}{2}\, m\,.\,r^2.$$

For en ret hul Cylinder med udvendig Radius R, indvendig Radius r, er det:

$$I = \tfrac{1}{2}\, m\,.(R^2 - r^2).$$

For en Kugle med Radius r, er det med Hensyn til en Diameter:

$$I = \tfrac{2}{5}\, m\,.\,r^2.$$

Kjender man Inertimomentet I af et Legeme med Hensyn til en Axe, der gaar gjennem Legemets Tyngdepunkt, saa kan man finde Inertimomentet I_1 med Hensyn til en dermed parallel Axe i Afstanden k fra den nævnte, idet højere Beregning giver:

$$I_1 = I + mk^2. \qquad (21)$$

§ **30**. **Reduktion af Masser.** Vi ville nu undersøge, hvor stor en Masse m_2 maa være, naar den ligger i en Afstand r_2 fra en Axe, for at der skal samme Arbejde til for at give den en Vinkelhastighed ω, som der behøves for at give en Masse m_1 i Afstanden r_1 fra Axen samme Vinkelhastighed.

Ifølge (20) maa man have:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega\, m_1 r_1{}^2 = \tfrac{1}{2}\,\omega\, m_2 r_2{}^2, \text{ hvoraf:}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1{}^2}{r_2{}^2}. \qquad (22)$$

For at altsaa en Masse med samme Vinkelhastighed som en anden m_1 i en anden Afstand fra Axen skal være i Stand til at udføre samme Arbejde (skal indeholde samme Arbejdsmængde) som denne, maa den have en anden Størrelse m_2, der bestemmes af (22). Man siger da, naar f. Ex. r_2 er mindre end r_1, at m_1 kan reduceres ind paa Radius r_2, naar dens Størrelse forøges til m_2.

Et Støbejærns Svinghjul, hvis Rings Middelradius er $1^m,5$, kan saaledes med en vis Lethed overvinde visse Hindringer mod Bevægelsen af den Axel, hvorpaa det sidder, naar det har en vis Vinkelhastighed. Vi ville erstatte det med et andet Støbejærns Svinghjul, hvis Rings Middelradius kun er 1^m, og ønske, at det lige saa let og med samme Vinkelhastighed skal overvinde de samme Hindringer. Det nye Svinghjuls Ring maa da gjøres sværere; bortses fra Vægten af Nav og Arme, giver (22):

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1{}^2}{r_2{}^2} = \frac{(\frac{3}{2})^2}{1^2} = \frac{9}{4},$$ eller Ringen maa gjøres $2\frac{1}{4}$ Gange saa svær. Da indeholde de to Svinghjulsringe med samme Vinkelhastighed samme Arbejdsmængde.

Som bekjendt maa ved Beregning af et Svinghjuls Dimensioner imidlertid ogsaa tages Hensyn til Ringens og Armenes Styrke. Ved Omdrejningsbevægelse opstaar nemlig Spændinger i Materialet. Vi ville nu nærmere oplyse Aarsagen hertil.

§ 31. **Centripetalkraft.** Naar et Legeme bevæger sig i en krumlinet Bane, og pludselig alle ydre Kræfter ophøre at virke derpaa, vil det bevæge sig videre efter Banens Tangent (§ 8). Hvis det altsaa ikke skal gaa videre efter Banens Tangent, maa en ydre Kraft tvinge det ind i Banen.

Er Banen saaledes en Cirkel med Radius r, og Legemet befinder sig i A (Fig. 12), vil det efter t Sekunders Forløb (hvor t er en lille ægte Brøk) befinde sig i B, medens det, hvis alle ydre Kræfter havde ophørt at virke, vilde have været i D. De ydre Kræfter have altsaa, samtidig med at Legemet af sig selv gik fra A til D (ifølge Inertiens Lov, § 7), draget det ind imod Centrum et Stykke lig AC. Naar nu Banen er en Cirkel, er Kraften, der holder Legemet i Banen, stadig rettet mod Centrum, og naar Hastigheden i Banen stadig er den samme, maa denne Kraft ogsaa være konstant, eller: For at holde et Legeme i jævn Rotation behøves der stadig et bestemt Træk fra Rotationscentret eller Axen. Dette Træk kaldes Centripetalkraften.

Vi ville nu finde denne Krafts Acceleration. Da Kraften er konstant, gjælder (7), og den Vej AC, som Kraften drog Legemet i t Sekunder, er altsaa: $AC = \frac{1}{2} G . t^2$, hvor G er den ubekjendte Acceleration. Kaldes Legemets Hastighed i Banen v (Vinkelhastigheden ω er da $\frac{v}{r}$), saa er:

$AB = v . t$, og da: $AB^2 = AC . 2r$, faas:

$$G = \frac{2 . AC}{t^2} = \frac{2 . AB^2}{2r . t^2} = \frac{v^2 . t^2}{r . t^2} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \qquad (23)$$

Er Legemets Masse m, vil altsaa en Centripetalkraft $m . \omega^2 r$ ifølge (13) være nødvendig for at holde Legemet i dets Bane. Centripetalkraften ses at voxe med Vinkelhastigheden og Banens Radius.

Fastgjør man en Sten til en Snor og svinger den rundt med Haanden, opstaar der et føleligt Træk i Snoren. Haanden maa stadig trække Stenen ind imod Centrum. Brister Snoren, fordi den ikke kan modstaa Haandens Træk, saa kan Haanden ikke mere udøve den til Stenens Cirkelbevægelse nødvendige Centripetalkraft, og Stenen gaar da bort efter en Cirkeltangent.

Naar Haanden trækker i Stenen, trækker Stenen selvfølgelig ogsaa i Haanden, idet et Tryk eller Træk imellem to Legemer altid er gjensidigt, og Stenens Træk i Haanden betegnes da ofte som dens Centrifugalkraft, der i Størrelse er lig Centripetalkraften. I Virkeligheden burde man altid tale om Centripetalkraft, da denne Kraft er den oprindelige, som Haanden udvikler, og som tvinger Stenen ind i dens Bane. Naar f. Ex. et Legeme hviler paa et Bord, siger man altid, at Legemet ligger og trykker paa Bordet, da Legemets Vægt er Aarsag til Trykket, og ikke at Bordet staar og trykker op imod Legemet.

Naar en Svinghjulsring sprænges formedelst for hurtig Omdrejning, siger man i Reglen, at det er Centrifugalkraften, der har sprængt Ringen. Det vilde være heldigere, om man sagde, at det var Centripetalkraften, der var Aarsag til Sprængningen. Er f. Ex. en Arm sprunget, har den ikke kunnet taale Centripetalkraftens Træk, og er et Stykke af Ringen sprungen bort efter Tangenten, saa er det, fordi de nærmeste Dele af Ringen, som vare i fast Forbindelse med Navet, ikke have kunnet udøve en tilstrækkelig stærk Centripetalkraft paa det bortsprængte Stykke uden at gaa i Stykker selv.

III. Stødet.

§ **32**. Naar et Legeme (det stødende) under sin Bevægelse i Rummet søger at fortrænge et andet (det stødte), sker der et Stød. Retningen, hvori det stødende Legeme bevæger sig, er Stødets Retning. Stødet er centralt, naar dets Retning gaar gjennem begge Legemers Tyngdepunkter, ellers er det excentrisk. Stødet er lige, naar dets Retning er vinkelret paa den fælles Tangentplan til Røringspunktet, ellers er det skævt. Vi behandle her kun lige og centrale Stød.

§ **33**. **Bevægelsesmængde**. Tiden, der medgaar til Stødet, er meget kort (sammenlign § 20), og kan antages at bestaa af 2 Perioder. I den første sammentrykke Legemerne hinanden, i den anden udvide de sig igjen. Trykkene imellem Legemerne blive efterhaanden P_1, P_2, P_3, o. s. v. Vi antage nu, at disse Tryk hver virke som konstante Kræfter i en meget lille Tid t. Kaldes da det stødende og det stødte Legemes Masser henholdsvis M_1 og M_2, bliver M_2 paaskyndet, idet Kræfterne P_1, P_2, P_3, o. s. v. ifølge (13) fremkalde Accelerationerne:

$$\frac{P_1}{M_2}, \frac{P_2}{M_2}, \frac{P_3}{M_2}, \text{ o. s. v.,}$$

saaledes at M_2 i Tiderne t efterhaanden faar Hastighedstilvæxterne:

$$\frac{P_1}{M_2}.t, \frac{P_2}{M_2}.t, \frac{P_3}{M_2}.t, \text{ o. s. v.,}$$

idet det maa erindres, at Accelerationerne (§ 3) ere Hastighedstilvæxterne pr. Sekund.

Kræfterne P_1, P_2 og P_3 ville derimod forsinke M_1 og efterhaanden, hvilket indses paa analog Maade, bibringe M_1 Hastighedstabene:

$$\frac{P_1}{M_1}.t, \ \frac{P_2}{M_1}.t, \ \frac{P_3}{M_1}.t, \text{ o. s. v.}$$

Ere det stødende og det stødte Legemes oprindelige Hastigheder henholdsvis c_1 og c_2, deres Hastigheder efter Stødet henholdsvis v_1 og v_2, bliver:

$$c_1 - v_1 = \frac{P_1}{M_1}.t + \frac{P_2}{M_1}.t + \frac{P_3}{M_1}.t + \ldots = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots).\frac{t}{M_1},$$

og:

$$v_2 - c_2 = \frac{P_1}{M_2}.t + \frac{P_2}{M_2}.t + \frac{P_3}{M_2}.t + \ldots = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots).\frac{t}{M_2},$$

hvoraf faas:

$M_1.(c_1 - v_1) = M_2.(v_2 \div c_2)$, hvilket kan skrives:

$$M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2. \tag{24}$$

Produktet af et Legemes Masse og dets Hastighed kaldes dets B e v æ g e l s e s m æ n g d e. Ifølge (24) er altsaa S u m m e n a f B e v æ g e l s e s m æ n g d e r n e e f t e r S t ø d e t l i g S u m m e n a f B e v æ g e l s e s m æ n g d e r n e f ø r S t ø d e t, og tænkes Stødet afbrudt i et eller andet Øjeblik, ses den let at være lig Summen af Bevægelsesmængderne til enhver Tid under Stødet.

S t ø d e t s V i r k n i n g m a a l e s v e d d e n B e v æ g e l s e s m æ n g d e, d e r o v e r f ø r e s f r a d e t s t ø d e n d e t i l d e t s t ø d t e L e g e m e.

§ **34**. **Elasticitet**. Som omtalt finder der ved Stødet først en Sammentrykning Sted, dernæst en Udvidelse. Naar Udvidelsen er fuldstændig, kaldes Legemerne f u l d s t æ n d i g e l a s t i s k e, ellers u f u l dstændig elastiske. Ved Jærn og Træ ere Udvidelserne næsten umærkelige, saaat disse Stoffer kunne betragtes som uelastiske, men i Virkeligheden ere ingen Legemer fuldstændig elastiske eller uelastiske, men alle mere eller mindre elastiske.

§ **35. Uelastisk Stød.** Tænke vi os, at vi havde to fuldstændig uelastiske Legemer, der stødte sammen, vilde de faa samme Hastighed v efter Stødet, hvilket man kan slutte sig til af fysiske Forsøg med næsten uelastiske Legemer. I saa Fald bliver: $v_1 = v_2 = v$, og (24) giver da:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}. \tag{25}$$

§ **36.** Bevæge Legemerne sig inden Stødet i samme Retning, maa i (25) c_1 og c_2 regnes positive, og vi faa da kun Stød, naar $c_1 > c_2$. Bevæge de sig imod hinanden, maa c_1 eller c_2 regnes negative. Er M_2 i Hvile inden Stødet, er $c_2 = 0$.

Anv. 19. Er $M_1 = M_2$, bliver $v = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

Anv. 20. Hvis det stødte Legeme er urokkeligt, forholder det sig, som om dets Masse er uendelig stor; altsaa bør man da sætte $c_2 = 0$ og $M_2 = \infty$. (25) bliver da til:

$$v = \frac{\frac{M_1}{M_2} c_1 + c_2}{\frac{M_1}{M_2} + 1} = c_1 = 0,$$

hvad der jo ogsaa kan indses umiddelbart.

§ **37. Tab i levende Kraft.** Ved et uelastisk Stød sker et Tab i levende Kraft. For begge Legemer tilsammen var nemlig den levende Kraft før Stødet: $M_1 c_1{}^2 + M_2 c_2{}^2$, og efter Stødet: $(M_1 + M_2) v^2$. Forskjellen er Tabet:

$$T = M_1 c_1{}^2 + M_2 c_2{}^2 - (M_1 + M_2) v^2 =$$

$$M_1 c_1{}^2 + M_2 c_2{}^2 - \frac{(M_1 c_1 + M_2 c_2)^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)^2}{M_1 + M_2} =$$

$$\frac{M_1 (c_1 - c_2)^2}{\frac{M_1}{M_2} + 1} = \frac{M_2 (c_1 - c_2)^2}{1 + \frac{M_2}{M_1}}. \qquad (26).$$

Der er altsaa sket et Tab i levende Kraft, altsaa i Arbejde ved Stødet, og dette Arbejde er medgaaet til Sammentrykningen, til Legemernes Opvarmning og til Frembringelse af Lyd (jvnfr. § 20).

Anv. 21. Ønsker man ved Stødet netop en stor Sammentrykning (f. Ex. naar man smeder, altsaa støder Hammeren mod det glødende Jærn, der ligger paa Ambolten), maa man sørge for at faa T stor. Dette opnaas ved at gjøre Tællerne i (26) store og Nævnerne smaa, altsaa M_1, M_2 og c_1 store, c_2 lille; ɔ: man skal have en stor Ambolt (en Masse, der kun giver lidt efter), en stor og hurtig ført Hammer. Ved Smedningen er jo $c_2 = 0$.

Anv. 22. Er $c_2 = 0$, faas af (25):

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{c_1}{1 + \frac{M_2}{M_1}}.$$

Skal man altsaa nedramme en Pæl med en Ramklods, eller slaa et Søm i med en Hammer, gjælder det at faa dette Udtryk stort, nemlig Pælen eller Sømmet til at bevæge sig med stor Hastighed. Dette naas, idet M_2 sædvanlig er givet, ved at gjøre M_1 og c_1 store. Forholdet mellem den tilførte og den tabte levende Kraft bliver:

$$M_1 c_1{}^2 : \frac{M_1 c_1{}^2}{\frac{M_1}{M_2} + 1} = \frac{M_1}{M_2} + 1.$$

Gjøres altsaa M_1 stor, ses en forholdsvis lille Del af den levende Kraft at gaa tabt, men da den tabte levende Kraft vilde blive anvendt til Sammentrykning af Pælens eller Sømmets Hoved, vilde dens Virkning jo her ikke være nogen Nytte til, og det er derfor rigtigt, at den bliver forholdsvis lille.

§ 38. **Vandmassers Stød.** Er M_2 meget stor i Sammenligning med M_1, saa at man kan sætte $\frac{M_1}{M_2} = 0$, bliver (26) ændret til:

$$T = M_1 (c_1 - c_2)^2. \tag{27}$$

Støder en enkelt Vandpartikel med Massen M_1 og med en Hastighed c_1 mod en Plan, der bevæger sig i Straalens Retning med en Hastighed c_2, men som ikke lader sig paaskynde, mister Partiklen en levende Kraft: $M_1 (c_1^2 - c_2^2)$, idet den oprindelig havde den levende Kraft $M_1 c_1^2$, men efter Stødet maa følge Planen med den mindre Hastighed c_2. Da der imidlertid ved Stødet, der kan betragtes som uelastisk, sker et Tab i levende Kraft, som ifølge (27) er $M_1 (c_1 - c_2)^2$, naar Planens Masse er meget stor i Sammenligning med Vandpartiklens, saa bliver der kun tilført Planen en levende Kraft, der er Forskjellen herimellem, altsaa lig:

$$M_1 (c_1^2 - c_2^2) - M_1 (c_1 - c_2)^2 = 2 M_1 c_2 (c_1 - c_2),$$

eller Planen modtager en Arbejdsmængde;

$$A = M_1 c_2 (c_1 - c_2). \tag{28}$$

Er Planen en Skovle i et Vandhjul, vil (28) udtrykke det Vandhjulet af Vandmassen M_1 tilførte Arbejde, og paa (28) grunder sig derfor Beregning af Vandets Stødvirkning paa et vertikalt Vandhjul.

§ **39**. Vi antage nu, at der støder en hel Række Vandpartikler imod Planen, saa at der kommer en hel Vandstraale med et Tværsnit paa f Kvadratmeter til Stød. I Sekundet støder da en Vandmængde, hvis Masse er:

$\frac{1000 f . (c_1 - c_2)}{g}$, idet 1 Kubikmeter Vand vejer 1000^{kg}. Antages denne Vandmængdes Virkning at være den samme som af et konstant Tryk P paa Planen, bestemmes dette ifølge (28) af:

$$P . c_2 = \frac{1000 f . (c_1 - c_2)}{g} . c_2 (c_1 - c_2),$$

hvoraf:

$$P = \frac{1000 f}{g} . (c_1 - c_2)^2. \qquad (29)$$

Dette Udtryk for P gjælder egentlig kun i Begyndelsesøjeblikket. Senere ville Vandpartiklerne ikke bevæge sig vinkelret mod Planen og støde, men ville glide af i krumme Baner, der svinge ned til at gaa parallele med Planen bort ved dens Rande som vist i Fig. 13, og Trykket vil da ved højere Beregning kunne vises at blive mindre, altsaa en vis Brøkdel af Udtrykket i (29).

Anv. 23. En Vandstraale med Hastighed c_1 støder imod en Plan under en Vinkel α med den vinkelrette paa Planen, som bevæger sig med konstant Hastighed c_2 bort efter Normalen. Der spørges om Virkningen paa Planen.

Vi opløse c_2 i to Komposanter (Fig. 14), af hvilke den ene vil bevæge Planen i sig selv (i sin egen Plan), hvilket ikke vedkommer Straalens Tryk mod Planen, hvorimod den anden $\frac{c_2}{\cos\alpha}$ vil bevægePlanen bort i Straalens Retning. Straalens Virkning bliver da, som om dens Hastighed var $c_1 - \frac{c_2}{\cos\alpha}$, og som om den traf en stillestaaende Plan under en Vinkel α med dennes Normal (Fig. 15). Nu kan imidlertid Hastigheden $c_1 - \frac{c_2}{\cos\alpha}$ opløses i en Hastighed $c_1 \cos\alpha - c_2$ vinkelret mod Planen og en anden parallel med Planen, hvilken sidste ikke vil foraarsage noget Tryk paa Planen. Kaldes Straalens Tværsnit parallelt med Planen for f, giver da (29), at Straalens Virkning bliver som af et konstant Tryk:

$$P = \frac{1000\ f}{g} . (c_1 \cos\alpha - c_2 - 0)^2 = \frac{1000\ f}{g} . (c_1 \cos\alpha - c_2)^2$$

i Begyndelsesøjeblikket, men senere mindre ligesom i det foregaaende Tilfælde.

§ **40**. Er Legemet nedsænket i Vand, og dette bevæger sig derimod, eller bevæger Legemet sig gjennem Vandet, finder Stødvirkninger Sted, der gjøre Modstand imod Bevægelsen og ligesom i § 39 kunne anses som ensgjældende med et konstant Tryks eller rettere Modtryks Virkning. For dette Modtryk P faas Udtryk af Form som (29) blot med en ved Forsøg bestemt Koefficient foran. Ofte er $c_2 = 0$.

§ **41. Luftmodstand og Vindtryk.** For et Legemes Bevægelse i Luft, eller Lufts Bevægelse imod et Legeme faas lignende Udtryk for P, henholdsvis Luftmodstand og Vindtryk. Et saadant Udtryk maa f. Ex. lægges til Grund for Beregningen af Møllevingers rette Form.

Angaaende de ved Forsøg bestemte Koefficienters Størrelse kan f. Ex. henvises til: Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch.

Forøvrigt er Luften snarest et elastisk Legeme, og omtales kun her sammen med uelastiske Legemers

Stød formedelst Overensstemmelsen mellem Udtrykkene for Stødvirkningen ved Legemers Bevægelse i Vand og Luft eller Vands og Lufts Bevægelse imod faste Legemer.

§ **42. Elastisk Stød.** Naar fuldstændig elastiske Legemer, som i Virkeligheden ikke existere, støde imod hinanden, sker intet Tab i levende Kraft (jvnfr. § 37), idet der vel sker et Tab ved Sammentrykningen, som Legemerne lide, men det dertil brugte Arbejde udvikles igjen fuldstændigt ved Udvidelsen, der følger efter. Derfor bestemmes her v_1 og v_2 af (24) i Forbindelse med:

$$M_1 c_1{}^2 + M_2 c_2{}^2 = M_1 v_1{}^2 + M_2 v_2{}^2, \qquad (30)$$

idet (30) udtrykker, at den levende Kraft før og efter Stødet er den samme.

Forøvrigt gjælde Bemærkningerne i § 36 ogsaa her.

IV. Modstande imod Bevægelse.

§ **43.** Bliver der gjort en vis Modstand imod, at et hvilende Legeme begynder at bevæge sig, saa fordres, for at Bevægelsen skal begynde, en Kraft, der er større end Modstanden, og baade kan overvinde denne og desuden frembringe en Hastighedstilvæxt, idet jo Begyndelseshastigheden er 0 (jvnfr. § 7). Bliver denne Kraft, naar en vis Hastighed er naaet, mindre og lig Modstanden, fortsættes Bevægelsen jævnt med den opnaaede Hastighed. Til en Bevægelses Fortsættelse fordres altsaa kun, at Kraften er lig Modstanden, men til en Bevægelses Begyndelse, at Kraften er større end Modstanden.

Til at sætte en Maskine igang behøves saaledes paa et vist Sted i Maskinen en Kraft, der kan overvinde Modstandene imod Bevægelsen, men dernæst behøves for at vedligeholde den opnaaede Fart kun en Kraft, der i hvert Øjeblik er lig Modstandene.

Disse kunne enten være nyttige Modstande, hvis Overvindelse netop er Maskinens Øjemed, eller skadelige Modstande, som det ikke er Maskinens Øjemed at overvinde, men som altid findes og hidrøre fra Maskinens Ufuldkommenhed. De skadelige Modstande, som Gnidningsmodstand, Bøjningsmodstand, Luftmodstand m. fl. ville blive omtalte i det følgende.

§ **44. Gnidningsmodstand eller Friktion.** Naar et Legeme bevæger sig paa Overfladen af et andet, vil dette yde Modstand imod Bevægelsen, den saakaldte Gnidningsmodstand. De to Legemers Overflader have nemlig altid større eller mindre Ujævnheder, der gribe ind i hinanden og modvirke Bevægelsen. Ved de Forsøg, man har anstillet angaaende Gnidningsmodstanden, har man fundet den kjendelig forskjellig, eftersom den fremkommer ved Overgangen fra Hvile til Bevægelse eller under selve Bevægelsen. Den første er i Almindelighed størst. Ligeledes er den Modstand, der ytrer sig imod Bevægelsen af et Legeme, der ruller paa et andet, af anden Størrelse, og altid mindre, end den, der virker imod Bevægelsen af det samme Legeme, naar det glider paa det andet, idet Ujævnhederne ved den rullende Bevægelse ligesom løfte sig ud af hinanden.

§ **45. Den glidende Friktion.** Gnidningsmodstandens Størrelse er uafhængig af Berøringsfladernes Areal og Bevægelsens Hastighed, men er afhængig af og proportional med det bevægede Legemes Tryk imod det hvilende. Forholdet mellem Gnidningsmodstand og Tryk er altsaa konstant, naar to Legemer glide paa hinanden, og kaldes Friktionskoeffienten for Glidning imellem de to betragtede Legemer. Dens Størrelse varierer med Legemernes og deres Berøringsfladers Beskaffenhed.

Er Trykket N, Friktionskoeffienten μ, bliver altsaa Gnidningsmodstanden:

$$F = \mu \,.\, N, \tag{31}$$

og er en Kraft, der i hvert Øjeblik virker i Berøringsfladernes fælles Tangentplan imod Bevægelsen.

Efterstaaende Tavle giver en Oversigt over μ's Størrelse for forskjellige Tilfælde. Betydningen af β i Tavlen vil findes forklaret i § 46.

	Overfladernes Tilstand.	For Overgang fra Hvile til Bev.		For Bevægelse.	
		μ	$90-\beta$	μ	$90\div\beta$
Støbejærn paa Støbejærn eller Bronce..........	noget fedtede	0,16	9°	0,15	8½°
Smedejærn paa Støbejærn eller Bronce	tørre	0,19	10¾°	0,18	10¼°
Smedejærn paa Smedejærn	tørre	—	—	0,44	23¾°
Smedejærn paa Smedejærn	noget fedtede	0,13	7½°	—	—
Støbejærn paa Eg.....	tørre	—	—	0,49	26°
Støbejærn paa Eg......	fugtede med Vand	0,65	33°	0,22	12½°
Hampetoug paa Eg....	tørre	0,80	38¾°	0,52	27½°
Remmme paa drejede Støbejærnsskiver	alm. Tiltand	0,28	15¾°	—	—
Mursten paa Mursten...	tørre	0,67	33¾°	—	—
Mursten paa frisk Mørtel		0,47	25½°	—	—
Jord paa Jord		0,25 à 1,0	14° à 45°	— —	— —

§ 46. Gnidningsmodstand paa en vandret Plan. Skal et Legeme L bringes til at glide henad en vandret Plan L, og kun er paavirket af Tyngden, behøves blot en vis Kraft til at overvinde Friktionen. Er Legemets Vægt p, Friktionskoefficienten for Glidning imellem L og Planen lig μ, vil en vandret Kraft μp ifølge (31) kunne bevæge Legemet henad Planen

Skal L bevæges ved Hjælp af den skraa Kraft P, der skubber Legemet nedad under Vinklen β med den vandrette Plan, kan P (Fig. 16) opløses i Komposanterne $P\cos\beta$ og $P\sin\beta$, af hvilke $P\cos\beta$ virker til Bevægelsen, hvorimod $P\sin\beta$ trykker Legemet imod Understøtningen, saa at det hele Tryk imellem Legemerne bliver $P\sin\beta + p$, der fremkalder en Friktion $\mu(P\sin\beta + p)$. For at altsaa $P\cos\beta$ skal kunne overvinde Friktionen, maa man have i det mindste:

$$P\cos\beta = \mu(P\sin\beta + p), \text{ eller mindst:}$$

$$P = \frac{\mu p}{\cos\beta - \mu\sin\beta}.$$

Naar β voxer, tiltager ogsaa P og bliver ∞, naar:

$$\cos\beta = \mu\sin\beta, \text{ eller: } \operatorname{tg}\beta = \mu.$$

Komplementvinklen til

Den heraf bestemte Værdi af β kaldes **Friktionsvinklen** (jvfr. § 52, Anv. 35). Bliver (90 ÷ β) ~~større~~ mindre end Friktionsvinklen, vil en selv nok saa stor Værdi af P ikke kunne tilvejebringe Bevægelse. Tavlen i § 45 giver ogsaa Friktionsvinklens Værdier for forskjellige Tilfælde af Glidning.

Skal L bevæges af P virkende skraat opad under Vinklen β med den vandrette Plan (Fig. 3), opløses P som i forrige Tilfælde i $P\cos\beta$ og $P\sin\beta$. Nu formindsker $P\sin\beta$ Legemets Tryk mod Planen, saa at det kun bliver $p - P\sin\beta$, og for at faa Bevægelse behøver man kun at have:

$$P\cos\beta = \mu(p - P\sin\beta), \text{ eller:}$$

$$P = \frac{\mu p}{\cos\beta + \mu\sin\beta}.$$

L kunde her f. Ex. tænkes at være en Slæde.

§ **47. Gnidningsmodstand paa Skraaplanet.** Vi ville antage, at Legemet L, der vejer p Kilogram, skal bevæges opad et Skraaplan med Heldningen α (Fig. 17) ved Hjælp af Kraften P, der danner Vinklen β med Skraaplanet. Vi opløse da P i $P\cos\beta$ og $P\sin\beta$, og p i $p\cos\alpha$ og $p\sin\alpha$.

Normaltrykket imellem L og Skraaplanet bliver da: $p\cos\alpha - P\sin\beta$, der fremkalder Friktionen $\mu(p\cos\beta - P\sin\beta)$ imodBevægelse opad Skraaplanet, som Kraften $P\cos\beta - p\sin\alpha$ søger at fremkalde. Sættes:

$$P\cos\beta - p\sin\alpha = \mu(p\cos\alpha - P\sin\beta),$$

faas:

$$P = p \cdot \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \tag{32}$$

at være den Værdi af P, ved hvis mindste Overskridelse Legemet bevæger sig opad.

Her virkede Gnidningsmodstanden nedad, nemlig til at hindre Bevægelse opad. Hvis P derimod blot skal hindre Nedglidning af L, saa virker Gnidningsmodstanden opad, nemlig til at hindre Bevægelse nedad, og Betingelsen, for at Nedglidning netop ikke finder Sted, bliver:

$$p \sin\alpha = P \cos\beta + \mu\,(p \cos\alpha - P \sin\beta), \text{ eller}$$

$$P = p \cdot \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta}. \qquad (33).$$

For en mindre Værdi af P glider Legemet nedad.

Anv. 24. Specielt bliver for $\beta = 0$:

(32) til: $P = p\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$,

(33) til: $P = p\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Indsættes $P = 0$ i (33) faas, at den af $\operatorname{tg}\alpha = \mu$ bestemte Vinkel α, Friktionsvinklen, er den største, hvorunder et Skraaplan tør helde, uden at Legemet af sig selv glider ned. Herved haves et Middel til at bestemme Friktionsvinklen for forskjellige Legemers Glidning paa hinanden, og derigjennem til Bestemmelse af Friktionskoefficienten.

Anv. 25. Er der over en fast Kegle med vandret Axe (Fig. 18) lagt et Toug, der i hver Ende bærer en Vægt p, vil Touget glide tilhøjre, naar Keglens halve Topvinkel er større end Friktionsvinklen.

Anv. 26: $\beta = 360 - \alpha$, eller rettere $\beta = -\alpha$ giver, naar det indsættes i (32) og (33), at Legemet bevæges opad for større Værdier af P end:

$$p \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha},$$

men at Nedglidning hindres for større Værdier end:

$$p \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha}.$$

Anv. 27. For horizontal Plan er $\alpha = 0$, og vi faa Bevægelse, naar P overskrider Værdien:

$$\frac{\mu \, p}{\cos\beta + \mu \sin\beta},$$

hvilket stemmer med det sidste Udtryk for P i § 46.

Anv. 28. Ere baade β og α lig 0, faas Bevægelse, naar P overskrider $\mu\,p$, hvilket stemmer med (31).

Anv. 29. Til at løfte Byrden p med Donkraften i Fig. 19 ved at dreje Skruen, behøves Overvindelse af Skruens Friktion i Møtriken. Tænkes Skruen hvilende i Møtriken blot med et lille Punkt af en Gænges Underside (og Friktionen er jo ifølge § 45 uafhængig af Berøringsfladernes Areal), ses det, at det her i Virkeligheden kun drejer sig om at finde Friktionen, der fremkommer ved at skyde dette Punkt af Skruen, idet det tænkes at veje p, et Stykke opad det Skraaplan, som dannes af Overfladen af en Gænge i Møtriken.

Til at skyde dette Punkt opad Gængen behøves ifølge Anv. 26 en vandret Kraft:

$$P = p \, . \, \frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg}\alpha}.$$

Tager man fat i Haandtaget H i Stedet for i Punktet, vil Skruen kunne drejes, altsaa det omtalte Punkt glide opad Møtrikgængen, ved Hjælp af en saameget mindre Kraft, som H's Afstand fra Axen er større end Punktets. Punktet antages rigtigst beliggende i Afstanden $\frac{R + r}{2}$ fra Axen, naar R er Skruens ydre, r dens Spindels Radius.

§ **48. Gnidningsmodstand af en roterende Cylinder (Sportap) paa dens Basis.** Er Trykket paa den cirkulære Basis P, og deles den i n ligestore Sektorer, da er Trykket paa hver lig $\frac{P}{n}$. Hvert af disse Tryk maa tænkes virkende i Sektorens Tyngdepunkt, altsaa i Afstanden $\frac{2}{3}$r fra Axen, naar Cylinderens Radius er r, og det vil der fremkalde en Friktion $\mu . \frac{P}{n}$, der virker hindrende paa Rotationen med et Moment $\frac{2}{3} r . \mu . \frac{P}{n}$; ialt virker da Friktionen hindrende med et Moment $\frac{2}{3} r . \mu . P$, eller som om der imod Bevægelsen virkede en Friktion paa Cylinderens Omkreds af Størrelse $\frac{2}{3} \mu . P$. Denne Værdi, som vi ville betegne ved K, kaldes Friktionen reduceret ud paa Radius r, og man har altsaa:

$$K = \frac{2}{3} \mu . P. \tag{34}$$

§ **49. Tapfriktion.** Trykkes en Endetap ned i sit Leje med en Kraft P, lader Friktionen, som virker tangentielt paa Tappen imod Bevægelsen, sig udtrykke ved μ_1P, hvor Værdierne af μ_1 ere mindre end i foranstaaende Tavle. Saaledes haves almindeligvis $\mu_1 = 0{,}07$, naar en Støbejærns- eller Smedejærnstap bevæger sig i Bronce- eller Støbejærnspander og er vel smurt paa sædvanlig Maade. For Pokkenholtspander er μ_1 noget større.

§ **50. Touges Gnidningsmodstand.** Er et Toug fuldkomment bøjeligt og viklet om en fast Cylinder A (Fig. 20), samt Byrden Q ophængt i den ene Ende, vil der til Q's Løftning kunne anvendes et Træk P i Tougets anden Ende, hvilket Træk da maa være tilstrækkeligt til at overvinde saavel Q som Tougets Gnidningsmodstand. Ved højere Beregning findes det nødvendige Træk P at være:

$$P = Q . e^{\mu\alpha}, \tag{35}$$

hvor $e = 2{,}71828$, μ Friktionskoefficienten imellem Toug og Cylinder, og α den paa Cylinderen omviklede Bue, maalt paa Periferien af en Cirkel med Radius lig 1. Skal P blot forhindre Q i at glide ned, behøver den ikke at være saa stor, som (35) giver. Det bliver nemlig da Q, som trækker i P, saa at man faar, at Q ifølge (35) vil overvinde P, naar:

$$Q = P . e^{\mu\alpha}, \text{ ɔ: naar: } P = \frac{Q}{e^{\mu\alpha}}. \tag{36}$$

Anv. 30. Man vil ved Brugen af en Pullert paa et Skib se et Exempel paa Anvendelsen af (36), idet man ved at lægge Touget flere Gange om Pullerten kan opnaa saa stor Friktion, at man kan holde igjen i Tougets ene Ende med en lille Kraft, medens en betydelig Kraft trækker i Tougets anden Ende.

Anv. 31. I Fig. 21 ses en saakaldet Sænkebremse, der bruges som Redningsapparat i Ildebrandstilfælde. Touget er viklet i Skruegang om en Spole. Dets øvre Ende befæstes til en Vinduessprosse, medens den nedre hænger frit ned. Naar nu den Person, der vil redde sig, hænger sig i et Bælte, der er fastgjort til den nedre Krog, saa maa ved Apparatets Nedfiring Touget glide om Spolen. Spændingen i Tougparten A bliver lig Mandens Vægt + Apparatets Vægt. Kaldes denne Spænding P, kan Manden sinke Nedglidningen ved at holde igjen i Tougparten B, saaledes at Nedglidningen helt vil gaa istaa, naar han holder igjen med en Kraft, der er større end Q bestemt af (35).

Q bliver kun en lille Brøkdel af Mandens Vægt, naar blot Touget snoes nogle faa Gange om Spolen, ligegyldigt, hvor stor Spolens Diameter er. Vil Manden standse Nedfiringen paa et bestemt Sted, kan han vikle B om Knasterne D.

§ **51. Bøjningsmodstand.** Den Modstand, som Touge og Kjæder gjøre mod at bøjes, hidrører henholdsvis tildels eller alene fra Gnidningsmodstand. I forrige Paragraf forudsattes det benyttede Toug aldeles bøjeligt, men i Virkeligheden vil ethvert Toug gjøre Modstand mod at bøjes, eller naar det er bøjet, mod at rettes ud igjen. Dette vil f. Ex. foraarsage, at Udtrykket for P i (35) ikke vil være tilstrækkeligt til at overvinde Modstanden Q.

Ligger saaledes et Toug om en Tridse (Fig. 22), og P er en Kraft, der overvinder Modstanden Q, saa at Tridsen drejer sig, saa vil Touget ved a ikke strax rette sig ud og ved b ikke strax kunne krumme sig tilstrækkeligt, saa at Touget faar et Udseende omtrent som vist paa Figuren. Da her P virker paa en mindre Momentarm end Q til Omdrejning af Tridsen, maa P være større end Q, for at Omdrejningen skal begynde, nemlig:

$$P = Q + R, \tag{37}$$

hvor for et nyt Hampetoug: $R = 0{,}2 \frac{\delta^2}{r} Q$, idet δ er Tougtykkelsen og r Tridsens Radius begge i Centimeter. Ved brugte Hampetouge er Bøjningsmodstanden R omtrent halv saa stor, ved et tjæret Toug omtrent $\frac{1}{6}$ og ved et vaadt Toug omtrent $\frac{1}{12}$ større end for et nyt Hampetoug.

Da Bøjningsmodstanden ved Kjæder hidrører fra Friktion imellem Kjædeleddene, lader den sig ligefrem beregne, saaledes som det vises i Maskinlæren.

§ 52. **Den rullende Friktion.** Naar en Rulle triller henad et Underlag, løfte Ujævnhederne i dens Overflade sig som omtalt i § 44 tildels ud af Ujævnhederne i Underlaget. Rullen synker i Virkeligheden alene formedelst sin Vægt noget ned i Underlaget, som vist overdrevent i Fig. 23, saa at Rullen for at komme videre maa dreje sig om Punktet a (eller rettere om en Frembringer), der da efterhaanden synker ned i Underlaget til samme Dybde som b. Men til at dreje Rullen om a, hvorved jo dens Tyngdepunkt løftes, behøves der en vis Kraft F, trækkende i Gaflen H, idet vi bortse fra, at samtidig nødvendigvis Tapfriktion i Gaflens Øjne maa overvindes.

Da F virker til Drejning om a med et Moment, der meget nær er F . r, naar Rullens Radius er r, og Rullens Vægt p virker med et Moment p . ac til Hindring af denne Drejning, maa F bestemmes af:

$$F \cdot r = p \cdot ac.$$

Sættes $ac = f$, faas:

$$F = \frac{f}{r} \cdot p. \tag{38}$$

F kaldes den rullende Gnidningsmodstand.

f kaldes Friktionskoefficienten for Rulning, og dens Størrelse afhænger af Legemernes Beskaffenhed. For Jærn paa Jærn eller haardt Træ paa haardt Træ kan under Bevægelsen gjennemsnitlig sættes $f = 0^m,0005$. Det ses af (38), at F ikke er proportional med Trykket p, men varierer med Rullens Radius.

Anv. 32. Ved at gjøre Vognhjul store formindskes ifølge (38) den rullende Gnidningsmodstand under Kjørselen.

Anv. 33. Virkede F i Rullens Top, blev dens Moment med Hensyn til a dobbelt saa stort, saa man fik: $F = \frac{f}{2r} \cdot p$.

Anv. 34. Skal Byrden p (Fig. 24) skaffes bort paa Ruller, behøves hertil en Kraft F, der baade kan overvinde Friktionen mellem Rullerne og Underlaget og imellem Lasten og Rullerne. Kaldes Friktionskoefficienterne henholdsvis f og f′, bliver ifølge Anv. 33:

$$F = \frac{f}{2r} \cdot p + \frac{f'}{2r} \cdot p = \frac{f + f'}{2r} \cdot p.$$

Det vil let ses, at Rullerne ikke ville bevæge sig mere end halvt saa hurtigt frem som Lasten p, saa at der efterhaanden fortil maa indskydes nye Ruller.

Anv. 35. Hviler en Rulle paa et Skraaplan, ses den (Fig. 25) formedelst sin Nedsynkning i Underlaget netop at ville blive liggende, naar Skraaplanets Heldning α er saa stor, at Rullens Centrum er lodret over a. I dette Tilfælde haves:

$$\sin \alpha = \frac{ac}{r} = \frac{f}{r}.$$

Den heraf bestemte Værdi af α kaldes Friktionsvinklen for rullende Gnidning (jvnfr. § 46); den ses at variere med r.

Anv. 36. Tænkes Tridsen i Anv. 13 erstattet af en Rulle, hvilende paa et vandret Underlag, ses det, at P vil kunne overvinde den rullende Gnidning og faa Rullen til at trille, naar:

$$P = \frac{f}{r} (P + 2Q + p),$$ idet p er Rullens Vægt, r dens Radius. Dette faas ved samme Betragtning som (38).

§ **53. Modstand mod Legemers Bevægelse i Vand og Luft.** Denne Modstand kan ifølge §§ 40 og 41 antages som ensgjældende med et vist Modtryk, der, naar Vandet eller Luften er i Hvile, bliver proportionalt med Kvadratet paa det bevægede Legemes Hastighed.

§ **54. Modstand mod Vands og Lufts Bevægelse.** Ved Vands og Lufts Udstrømning af Beholdere eller Bevægelse i Ledninger opstaa Modstande, som nærmere ville blive omtalte i det følgende.

V. Vands Udløb af Beholdere.

§ **35. Trykhøjde.** Hvis der i et Kar med Vand er et Hul i Bunden eller i en Sidevæg under Vandspejlet, vil Vand strømme ud deraf formedelst Trykket af det ovenstaaende Vand. Da dette Tryk bliver større, i jo større Dybde under Vandspejlet Udstrømningen foregaar, spiller denne Dybde, den saakaldte Trykhøjde, en Rolle af væsentlig Betydning.

Man kan have konstant, synkende eller stigende Vandspejl, eftersom der fyldes i Karret ligesaameget, mindre eller mere Vand, end der strømmer bort.

I Begyndelsen voxer Udstrømningsvandets Hastighed fra Værdien 0, men hvis der efterfyldes ligesaameget Vand, som der strømmer bort, saa at altsaa Trykhøjden holdes konstant, indtræder snart en konstant Hastighed, altsaa en regelmæssig Udstrømning. Vi antage i det følgende en saadan konstant Udløbshastighed for indtraadt.

§ **56. Straalens Form.** Den udtrædende Vandmasses Form er ikke netop et Prisme med Tværsnit lig Udstrømningsaabningen. Da Trykket i en Vædske er ligestort i alle Retninger, strømmer der f. Ex. ud af en Bundaabning ikke blot de Vandpartikler, der ligge lige over Aabningen, men andre nærliggende Partikler trykkes ogsaa henimod Aabningen og bevæge sig i krumlinede Baner for at slippe derhen og ud. Fra alle Sider løbe altsaa Partikler henimod Aabningen (forsaavidt der findes Partikler til alle Sider omkring denne) i Retninger, der gaa skævt i Forhold til det omtalte Prisme. Disse Partikler fortsætte deres Bevægelse med en vis Fart ud gjennem Aabningen, støde derved imod hinanden og tvinge hinanden ud af deres Bevægelsesretning og til at følge omtrent parallele Baner, hvilket indkniber Tværsnittet lige udenfor Aabningen. Indknibningen sker lidt efter lidt, men bliver stærkest i en vis Afstand fra Aabningen, f. Ex., hvis Aabningen er cirkulær, i en Afstand omtrent lig Aabningens Radius. Denne Indknibning kaldes Straalens Sammentrækning (Kontraktion). Kaldes Straalens mindste Tværsnit f' (dér, hvor Indknibningen er stærkest), og Aabningenes Areal f, saa er:

$$\frac{f'}{f} = \beta, \qquad (39)$$

den saakaldte Kontraktionskoefficient, et Maal for Sammentrækningens Størrelse. Man har altid $1 > \beta > \frac{1}{2}$. β voxer, naar Aabningen og Trykhøjden blive mindre. Ere Aabningens Rande tynde, haves: $\frac{2}{3} > \beta > \frac{5}{8}$, men ere Randene tykke og indadtil afrundede (Fig. 26), nærmer β sig til 1. Ere Randene tykke og ikke afrundede, faar Straalen Udseende som i Fig. 27. Nærmer Aabningen sig en Sidevæg som i Fig. 28, bliver Kontraktionen formindsket (β større), og falder den helt op ad en Sidevæg som i Fig. 29, bliver den endnu mindre, da henholdsvis færre eller slet ingen Partikler strømme til fra højre Side. Dette foraarsager ogsaa, at Straalen bliver skæv.

Hvis paa et Sted i Straalen dens Tværsnit er F og dens Hastighed v, saa er Vandmængden, der udstrømmer pr. Sekund:

$$Q = F \, . \, v. \qquad (40)$$

§ 57. Udstrømning gjennem en fri Aabning, idet Vandspejlet holdes konstant ved Efterfyldning.

a) Bundaabninger:

Vi bortse foreløbig fra Modstande, Kontraktioner etc.

Løbe Q Kubikmeter Vand bort med en Hastighed v, er deres Masse ifølge (14) lig: $\frac{1000\ Q}{g}$, og de indeholde følgelig en levende Kraft: $\frac{1000\ Q}{g} \, . \, v^2$, altsaa ifølge Princippet for den levende Kraft en Arbejdsmængde: $\frac{500\ Q}{g} \, . \, v^2$. Denne maa dels hidrøre fra, at der er udviklet et Arbejde 1000 Q . h, ved at Vandmængden Q er sunket gjennem Højden h, som er Vandspejlets Højde over Bunden, dels fra, at der er tilført en vis levende Kraft ved Efterfyldningen. Er Vandspejlets Areal F, maa det tilgydte Vand siges at være kommet løbende med samme Hastighed $\frac{f}{F} \, . \, v$, som den, hvormed Vandspejlet vilde synke, hvis der ikke blev fyldt efter, idet Aabningens Areal er f. Hvis imidlertid F er stor i Forhold til f, vil Hastigheden $\frac{f}{F} \, . \, v$ være lille, og derved ogsaa den ved Efterfyldningen tilførte levende Kraft, saa at man da tilnærmelsesvis faar:

$$1000\,Q\,.\,h = 500\,.\,\frac{Q}{g}\,.\,v^2, \text{ hvoraf:}$$

$$v = \sqrt{2gh}, \tag{41}$$

eller Hastigheden v saa stor som den, der naaes ved et frit Fald gjennem en Højde h (Anv. 8).

Rigtigheden heraf kan tildels indses ved Hjælp af § 22, sidste Stykke. Det udløbende Vand vil nemlig ved et krumt Underlag U (Fig. 30), kunne bringes til, ved Hjælp af den Fart, det har, at løbe opad igjen næsten til en Højde h over Udløbsaabningen i første Øjeblik, og vilde uden Tvivl, hvis ikke Luftmodstand, Gnidningsmodstand og tilbagefaldende Vand hindrede det, naa Højden h, hvortil vilde kræves i Udløbet en Hastighed $\sqrt{2gh}$ (§ 22).

Var der ingen Gnidningsmodstand, Luftmodstand etc., vilde man formedelst den ved Efterfyldningen tilførte levende Kraft kunne faa det til at løbe endnu højere end til Højden h.

Hvis F ikke er stor i Forhold til f, maa Hensyn tages til den ved Efterfyldningen tilførte levende Kraft: $\frac{1000\,Q}{g}\,.\,\left(\frac{f}{F}\,.\,v\right)^2$, saa at man da faar:

$$\frac{500\,Q}{g}\,.\,\left(\frac{f}{F}\,.\,v\right)^2 + 1000\,Q\,.\,h = 500\,.\,\frac{Q}{g}\,.\,v^2,$$

hvoraf:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{f}{F}\right)^2}}, \tag{42}$$

der for $\frac{f}{F} = \frac{1}{\infty}$ gaar over til (41), og for $f = F$ giver:

$v = \infty$, eller at det er umuligt tilstrækkelig hurtigt at efterfylde et bundløst Kar.

Sker Udstrømningen under Vand, — Aabningen siges da at være dykket, — lader det sig vise (§ 60), at Trykhøjden, som skal indføres for h i (41) og (42), bliver lig med den Højde, hvori Karrets Vandspejl ligger over det Vands Overflade, hvori Udstrømningen sker.

I Virkeligheden gjælde ikke de Ligninger, ved hvilke vi ere komne til (41) og (42), thi en Del Arbejde gaar tabt til at overvinde Vanddelenes Gnidningsmodstand mod hinanden og mod Udløbets Begrænsning. Derfor bliver Udløbshastigheden i Virkeligheden ikke v, men kun

$$v' = \alpha v, \qquad (43)$$

hvor α er en ægte Brøk, der kaldes Hastighedskoefficienten. De omtalte Gnidningsmodstande forsinke altsaa Vanddelene, hvis Hastighed bliver størst midt i Straalen. v′ er da Middelhastigheden, ɔ: den Hastighed man som Gjennemsnit tør paaregne for samtlige Partikler. For tynde Rande i Udløbet er: $\alpha = 0{,}97$, ligesaa for indadtil afrundede tykke Rande. Ere derimod Randene tykke og uafrundede, eller paasættes en længere Tud, kan α synke til 0,82.

Udstrømningsmængden i et Sekund bliver:

$$M = v'.f' = \alpha v.\beta f = \alpha\beta.fv = \mu.fv, \qquad (44)$$

hvor μ kaldes Udløbskoefficienten og er lig $\alpha\beta$,
For $\alpha = 0{,}97$, $\beta = 0{,}64$, bliver $\mu = 0{,}97 . 0{,}64 = 0{,}62$.
For $\alpha = 0{,}82$, $\beta = 1$, bliver $\mu = 0{,}82 . 1 = 0{,}82$.

b) **Sideaabninger:**

Vi bortse foreløbig fra Modstande, Kontraktioner etc.

I Fig. 31 ses en rektangulær Sideaabning, hvis Højde er a og Brede b. Karret tænkes stadig holdt fyldt til AB. Paa den skraverede Strimmel af Aabningen er Trykket det samme, som hvis Strimlen laa vandret (som Bundspalte) i samme Dybde. Udstrømningshastigheden gjennem Strimlen bliver da ifølge (41) $\sqrt{2gx}$. I en højere liggende Strimmel af Aabningen bliver Hastigheden mindre, i en dybere liggende større. Den hele Mængde Vand, der strømmer ud i et Sekund, faar da et Volumen, der kan tænkes lig Produktet af Aabningens Areal ab og en vis Middeludstrømningshastighed $\sqrt{2gh}$, hvor h kaldes Middeltrykhøjden. Højere Beregninger give:

$$h = \frac{4}{9} \cdot \frac{\left(H^{\frac{3}{2}} - (H-a)^{\frac{3}{2}}\right)^2}{a^2}. \tag{45}$$

For højt liggende Aabninger vil Middeltrykhøjden blive mindre end Dybden af Aabningens Tyngdepunkt. For H = a haves saaledes en Overfaldsaabning (saaledes kaldes Aabningen, naar Vandspejlet deltager i Udstrømningen), og da giver (45):

$$h = \tfrac{4}{9} a,$$

og Udløbsmængden i et Sekund bliver, naar intet Hensyn tages til Kontraktion, Gnidningen i Udløbet etc.:

$$M = ab.\sqrt{2g.\tfrac{4}{9}a} = \tfrac{2}{3} ab\sqrt{2ga},$$

men i Virkeligheden, naar Hensyn tages dertil, mindre, nemlig:

$$M = \mu.\tfrac{2}{3} ab\sqrt{2ga} = \mu_1 . ab\sqrt{2ga}, \tag{46}$$

hvor $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu$ ved direkte Forsøg er funden at være omtrent 0,41, naar Sammentrækningen sker paa alle

Sider, men større, naar Overfaldsaabningen f. Ex. har sine Sider i Flugt med Karrets Vægge, hvorved jo Kontraktionen paa Siderne ophører (jvnfr. Fig. 29). μ_1 kan da voxe indtil 0,48.

I en Overfaldsaabning sænker Vandspejlet sig henad mod Aabningen, saa at Vandhøjden over Aabningens nederste Kant er mindre end a, nemlig lig 0,9a à 0,75a. Den i (46) indgaaende Størrelse a er derfor den Dybde, hvori omtalte Kant ligger under Vandspejlet i Karret, maalt i 1^m Afstand fra Aabningen, thi saalangt fra Aabningen er Sænkningen umærkelig.

For rektangulære Underfaldsaabninger (saaledes kaldes Aabninger, hvor Vandspejlet ikke deltager i Udstrømningen) gjælder (45), men er Aabningens Dybde stor, kan man tilnærmelsesvis sætte:

$$h = H - \tfrac{1}{2}a,$$

der ogsaa gjælder for dybtliggende Aabninger af anden Form, som have Tyngdepunktet i Midtpunktet, f. Ex. cirkulære og elliptiske Aabninger. For rektangulære Underfaldsaabninger i stor Dybde er da Udløbsmængden:

$$M = \mu . ab . \sqrt{2g\,(H - \tfrac{1}{2}a)}, \tag{47}$$

hvor omtrent $\mu = 0{,}61$ for fuldstændig Kontraktion, men omtrent 0,8, naar Kontraktionen er ophævet. Saasnart Aabningens Kanter blot nærme sig Sidevæggene eller Bunden, voxer μ betydelig, men altsaa navnlig, naar dens Kanter falde i Sidevæggene eller i Flugt med Bunden. Ligesom ved Overfaldsaabninger sænker Vandspejlet sig over Aabningen, saa at Trykhøjden bør maales i nogen Afstand fra denne.

Sker Udstrømningen gjennem en dykket Sideaabning, er Forholdet ganske som ved Udstrømning gjennem en dykket Bundaabning (se desuden § 60).

§ **58. Vandstue**. Foran visse Vandhjul, ligesom i andre Tilfælde, hvor det som ved Vandhjulene er af Vigtighed at holde Vandstanden i en Tilløbskanal nogenlunde konstant, bruges en saakaldet Vandstue, ɔ: en prismatisk Beholder, der samtidig modtager og afgiver Vand.

Lad O (Fig. 32) være det Tilløb, hvorfra vi skulle tage Vand til Vandstuen V, som skal forsyne f. Ex. et Vandhjul, der findes tilhøjre for Figuren, med Vand gjennem Aabningen f. Skal da Reguleringen være aldeles fuldstændig, saa skal Vandet altid strømme ud af f med samme Hastighed, eller Middelhøjden h maa da være konstant. Dette vil være Tilfældet, naar vi gjennem den dykkede Aabning f' stadig lade Vandstuen tilflyde ligesaameget Vand, som der strømmer bort gjennem f. Er H Vandstanden i O maalt fra samme vandrette Dybde som h, vil dette kræve, at:

$$\mu f' . \sqrt{2g(H-h)} = \mu f . \sqrt{2gh},$$

idet μ er tænkt ens for de to Aabninger.

Heraf faas:

$$f' = \sqrt{\frac{h}{H-h}} \cdot f; \tag{48}$$

eller naar f holdes uforandret, maa f' forandres (f. Ex. ved at et Stigbord trækkes op eller ned), naar H forandrer sig, og altsaa gjøres mindre, naar H voxer. Af (48) ses, at f' er kun reel for H > h, hvilket derfor altid er Tilfældet, eller der lides altid et Trykhøjdetab ved at benytte Vandstue.

§ **59. Bestemmelse af Banen for en Vandpartikel, der udstrømmer af en Sideaabning.** Haves et Kar som i Fig. 33, og staar Vandspejlet i en Højde H over Aabningen O i den skraa Væg, der danner en Vinkel α med Lodlinien, vil Vand udstrømme af O vinkelret paa den skraa Væg, altsaa under en Vinkel α med en vandret Linie, og med en Hastighed $\sqrt{2gH}$. Da en udstrømmende Vandpartikel kun er paavirket af Tyngden, vil dens Bane blive et Stykke af en Parabel (hvoraf en Del er vist punkteret) ganske som CD i Fig. 10, idet man blot har $a = \sqrt{2gH}$. Vandpartiklens Hastighed v i et Punkt F i Dybden y under O bestemmes ifølge Formlen i § 24 af:

$$v^2 = a^2 + 2gy = 2gH + 2gy = 2g\,(H + y),$$

og er altsaa uafhængig af Aabningens Dybde under Vandspejlet og den skraa Vægs Hældning, men kun afhængig af F's Dybde under Vandspejlet og ligesaa stor, som hvis Vandpartiklen var falden frit gjennem en Højde H + y (jvnfr. Anv. 8).

VI. Vands Bevægelse i Ledninger.

§ **60.** Igjennem Ledningen C, der forbinder Karret A (Fig. 34) med Karret B, vil der gaa en Strøm af Vand, saafremt der i A staar Vand over Ledningens Munding og højere end i B. Tænke vi os paa C en Hane D, som kan lukkes, vil Bevægelsen standse, og et Vandtværsnit i C af Areal f vil da, naar det ligger tilvenstre for D foruden Atmosfærens Tryk være underkastet et Tryk $\dfrac{1000\,.\,H\,.\,f}{g}$ svarende til Trykhøjden H, men hvis det ligger tilhøjre for D kun et Tryk $\frac{1000.h.f}{g}$, idet en Kubikmeter Vand vejer $1000^{kg.}$ Tilstedeværelsen af disse saakaldte hydrostatiske Tryk kan man overbevise sig om ved i de betragtede Vandtværsnit at nedstikke lufttæt lodrette foroven aabne Rør, idet Vandet i disse da vil stige henholdsvis til Højderne H og h. Aabnes D, vil Forskjellen mellem disse Tryk bevirke Bevægelsen af Vandet i C henimod B. Naar Bevægelsen er begyndt, vil Trykforskjellen efterhaanden virke dels til at sætte nye Vanddele i Bevægelse gjennem Ledningen, dels til at forøge deres Hastighed, som alt ere i Bevægelse. Tilsidst naas en Hastighed v, der forbliver uforandret, saalænge H og h kunne anses for uforandrede, og naar den er naaet, medgaar Trykforskjellen ene til at give nye Vanddele Bevægelse med denne Hastighed. I hvert Sekund ville da Vanddele, hvis Volumen er f.v (deres Masse altsaa $\frac{1000.f.v}{g}$), blive satte i Bevægelse og drives et Stykke v fremad. Herved udvikles Arbejdet:

$$\frac{1000.(H-h)}{g}.v,$$

som skal være lig den halve tilvejebragte levende Kraft $\frac{1000.f.v}{g}.v^2$, altsaa:

$$\frac{1000.(H-h).f}{g}.v = \frac{1}{2}.\frac{1000.f.v}{g}.v^2,$$

der giver:

$$v = \sqrt{2g(H-h)}. \qquad (49)$$

Da vi her have bortset fra Kontraktion i Munddingen mod A, Gnidningsmodstande etc., bliver v i Virkeligheden ikke saa stor, men mindre, saaledes som det vil blive vist i det følgende. (49) giver tillige Bevis for, hvad der er sagt i § 57 om dykkede Aabninger.

§ **61**. Samtidig med at D aabnes, vil Vandet ikke længere i de nedstukne Rør staa til Højderne H og h, eller Vanddelene udøve under Bevægelsen et andet Tryk imod hinanden indbyrdes og mod Ledningens Vægge end tidligere. Det Tryk, der nu udøves, kaldes det hydrauliske Tryk i Modsætning til det tidligere hydrostatiske.

Hvis det til venstre for D nedstukne Rør fik sin nedre Ende inden i C bøjet henimod A, vilde Vandet i det atter stige til Højden H, naar Hastigheden v var naaet, og f er saa lille, at H og h kunne anses konstante i nogen Tid. Ifølge § 22 vilde Vandet formedelst den Hastighed, hvormed det strømmede imod Rørets nedre Ende, naa op i Røret til en Højde $\frac{v^2}{2g}$, men det hydrauliske Tryk vil altsaa hjælpe det yderligere et Stykke $H - \frac{v^2}{2g}$ op i Røret, og saa høj en Vandsøjle + Atmosfærens Tryk svarer altsaa til det hydrauliske Tryk, og til en saa stor Højde $H - \frac{v^2}{2g}$ vil altsaa Vandet stige i et lodret nedstukket Rør uden Ombøjning forneden. Det hydrauliske Tryk er altsaa mindre end det hydrostatiske, idet en Del af dette er medgaaet til at give Vandet Hastigheden v. Vandet i C tilvenstre for D trykkes altsaa mindre, efter at D er aabnet, idet der da er givet det Lejlighed til at vige ud for Trykket og løbe bort tilhøjre. Kan man faa v meget stor, vil man kunne faa $H - \frac{v^2}{2g}$ negativ, altsaa det hydrauliske Tryk mindre end Atmosfærens (mindre end 0 kan det aldrig blive), eller Vandet vil slet ikke stige i det nedstukne lodrette Rør, men der vil tværtimod suges Luft ind i Ledningen, og hvis det lodrette Rør gaar fra C ned i en Vandbeholder, vil man kunne faa suget Vand op i Ledningen. Det lader sig nu virkelig gjøre at faa v saa stor, at en slig Sugning indtræder. Suger man Luft ind i Ledningen, har man Princippet for Christiansens Luftpumpe. Suger man Vand ind i Ledningen, men lader det i denne løbende Vand erstattes af en Dampstrøm, har man en Del af Princippet for en Injektør.

Ligesom i forrige Paragraf er her bortset fra Kontraktioner, Gnidningsmodstande etc.

§ **62**. Til Frembringelse af Middelhastigheden v i en Ledning medgaar altsaa en Trykhøjde $\frac{v^2}{2g}$, naar der bortses fra Kontraktion, Gnidningsmodstande etc., men i Virkeligheden medgaar der altsaa en større Trykhøjde, idet der nemlig kræves extra Trykhøjde til Overvindelse af disse Hindringer. Saaledes sker der, naar Mundingens Rande ikke ere afrundede ind imod A, en Sammentrækning af Straalen, ligesom det er vist paa Fig. 27, og derefter atter en Udvidelse, saa at Ledningen udfyldes. For at opnaa en Hastighed v i Ledningen maa alene af den Grund den nødvendige Trykhøjde være større end $\frac{v^2}{2g}$, nemlig, som det lader sig vise: $\frac{v^2}{2g} + \zeta . \frac{v^2}{2g}$, hvor ζ kan bringes ned til en forsvindende Værdi, naar Ledningens Munding jævnt udvides mod A, men ellers kan anslaaes til 0,5.

Men den maa være endnu større af Hensyn til Vandets Gnidning mod Ledningens Vægge, hvorved foraarsages en Modstand, den saakaldte Ledningsmodstand, til hvis Overvindelse der ved et cirkulært Tværsnit, som det er vist ved Forsøg, kræves en extra Trykhøjde

$$\eta . \frac{l}{d} . \frac{v^2}{2g},$$

naar Ledningens Længde er l, dens Diameter d, altsaa en extra Trykhøjde, der er ligefrem proportional med Ledningens Længde, omvendt med dens Diameter. Her er η ved Forsøg fundet at være:

$$\eta = 0{,}01439 + \frac{0{,}00947}{\sqrt{v}}, \tag{50}$$

altsaa at være ikke ganske uafhængig af v; saaledes faas for $v = 3^m$, at $\eta = 0{,}02$, der kan betragtes som en Middelværdi, der benyttes, som det skal vises i Anv. 37.

Formel (50) gjælder nærmest Metalrør (nye Jærnrør), Glasrør, eller i det hele indvendig glatte Rør-For Trærør bliver η næsten at regne dobbelt saa stor, ligesaa for Jærnrør, der ere bedækkede med et Bundfald af Rust.

Den hele nødvendige Trykhøjde til Frembringelse af en Hastighed v i Ledningen bliver altsaa ifølge det foregaaende:

$$h = \left(1 + \zeta + \eta \cdot \frac{l}{d}\right) \cdot \frac{v^2}{2g}, \qquad (51)$$

og saameget maa altsaa Vandet staa højere i et Kar end i et andet for at opnaa Hastigheden v i en Ledning, der forbinder dem. Hvis h er givet, bestemmes v af (51).

Anv. 37. Er $h = 1^m$, $l = 100^m$, $d = 0^m,2$, $\zeta = 0,5$, saa indsættes først Middelværdien $\eta = 0,02$ i (51), hvorved faas $v = 1^m,3$. Indsættes denne Værdi i (50), faas η i Virkeligheden at være nærmere 0,0227, og indsættes denne rigtigere Værdi i (51), faas den nøjagtigere Værdi $v = 1^m,236$. Gjentages denne Berigtigelse endnu engang, faas $v = 1^m,231$. I hvert Sekund flyder der da gjennem Ledningen en Vandmasse:

$$M = \tfrac{1}{4}\pi d^2 . v = 0,03867 \text{ Kubikmeter.}$$

Da Cirklen begrænser et givet Areal med den mindste Omkreds, maa Ledninger med cirkulært Tværsnit give mindre Ledningsmodstand end andre med samme Tværsnitsareal; de bruges derfor hyppigst, og alene disse betragtes i det følgende.

Er l stor, f. Ex. $l > 1000\,d$, kan $1 + \zeta$ regnes for forsvindende, saa (51) da simplificeres til:

$$h = \eta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ eller } v = \sqrt{\frac{2gh}{\eta \cdot \frac{l}{d}}}. \qquad (52)$$

§ **63**. Har Ledningen Bøjninger, kræves en yderligere større Trykhøjde, end (51) giver, hvis Hastigheden dog skal være v. Man skælner imellem skarpe og krumme Bøjninger. Trykhøjdeforøgelsen, der kræves ved en skarp Bøjning (Fig. 35), er:

$$h_1 = \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ hvor}$$

$$\zeta_1 = 0{,}946 \cdot \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + 2{,}047 \cdot \sin^4\left(\frac{\delta}{2}\right), \qquad (53)$$

men ved en jævn Bøjning (Fig. 36):

$$h_2 = \zeta_2 \cdot \frac{\beta}{90} \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ hvor } \zeta_2 = 0{,}131 + 1{,}848 \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{7}{2}}. \qquad (54)$$

(53) giver for $\delta = 90^0$, at $h_1 = 0{,}985 \cdot \frac{v^2}{2g}$, eller at h_1 næsten er saa stor som den til Hastigheden svarende Trykhøjde.

§ **64**. Har Ledningen Tværsnitsforandringer, behøves yderligere Trykhøjdeforøgelser.

Gaar Vandet fra et Tværsnit f pludselig over til et videre f' (begge cirkulære), hvorved Hastigheden fra at være v bliver v', saa er:

$$v = \frac{f'}{f} \cdot v', \text{ hvor } v' < v.$$

En Vandmasse med Masse M og Hastighed v støder da imod den store Vandmasse, der er forud, og som kun har Hastigheden v', og herved sker et Tab i levende Kraft, der ifølge (27) er:

$$M\,(v - v')^2 = M\left(\frac{f'}{f} - 1\right) \cdot v'^2,$$

eller saa stort et Tab, som om der til ingen Nytte var bibragt Massen M, der støder, en Hastighedsforøgelse $\sqrt{\frac{f'}{f} - 1} \, . \, v'$, men hertil kræves en Trykhøjde:

$$h' = \frac{\left(\sqrt{\frac{f'}{f} - 1} \, . \, v'\right)^2}{2g} = \left(\frac{f'}{f} - 1\right) \frac{v^2}{2g}. \qquad (55).$$

Gaar Vandet fra et Tværsnit f, hvor Hastigheden er v, pludselig over til et snævrere Tværsnit f'', hvor Hastigheden er v'', saa er Forholdet som ved Udstrømning gjennem en Bundaabning, der er mindre end Karrets Tværsnit. Der indtræder altsaa en Kontraktion (som i Fig. 27), ved hvilken Strømmens Tværsnit ifølge (39) bliver $\beta f''$, og derefter en Udvidelse til Tværsnittet f'', hvorved Ledningen atter udfyldes. Ved denne Udvidelse sker et Stød, altsaa et Tab i levende Kraft, der kræver en Trykhøjde, som findes af (55) at være:

$$h'' = \left(\frac{f''}{\beta f''} - 1\right)^2 . \frac{v''^2}{2g} = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2 . \frac{v''^2}{2g}$$

$$= \zeta'' . \frac{v''^2}{2g}. \qquad (56)$$

§ **65**. Hvis nu en Ledning har baade Krumninger og Tværsnitsforandringer (f. Ex., hvor Hanestykker findes indskudte), maa man opskrive alle de Trykhøjder, der kræves saavel til at tilvejebringe en vis Slutningshastighed (Udløbshastighed) v_n, som til at overvinde Modstanden ved Indløbet i Ledningen, Ledningsmodstanden, Modstanden i Bøjningerne og i Udvidelserne og Indsnevringerne, idet alle Hastighederne i de forskjellige Tværsnit maa udtrykkes ved v_n. Til at overvinde Modstanden i en skarp Bøjning med Tværsnit f behøves saaledes, naar Udløbets Tværsnit er f_n, en Trykhøjde, der ifølge (53) bliver:

$$h_1 = \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} = \zeta_1 \left(\frac{f_n}{f}\right)^2 \cdot \frac{v_n{}^2}{2g}, \text{ idet}$$

$$f \cdot v = f_n \cdot v_n.$$

Efter at have opskrevet alle de nødvendige Trykhøjder paa denne Maade, sættes deres Sum lig hele den Trykhøjde, som haves disponibel til at drive Vandet gjennem Ledningen, og af den derved fremkomne Ligning kan da først v_n bestemmes, og dernæst Vandføringen pr. Sekund, som bliver:

$$M = v_n \cdot f_n. \tag{57}$$

Her er Ledningens hele Udseende forudsat bekjendt. Ønsker man v_n af en vis Størrelse, og er M bekjendt, kan passende Dimensioner af Ledningens Tværsnit bestemmes af (57) og den omtalte Ligning.

VII. Formlernes Anvendelse ved Benyttelse af dansk Maal og Vægt.

Da Benyttelsen af Meter og Kilogram endnu ikke ved Lov er indført her i Landet, anvendes ved Beregninger af Maskiner endnu ofte Fod i Stedet for Meter, Pund i Stedet for Kilogram, og man forstaar da ved et Legemes Hastighed (§ 3) det Antal Fod, det gjennemløber i et Sekund, ved dets Acceleration (§ 3) Hastighedsforandringen i Fod pr. Sekund, ved Vinkelhastighed (§ 26) den Hastighed i Fod, som Punkter i et roterende Legeme i en Fods Afstand fra

Axen have, ved en Masseenhed (§ 10) den Mængde Masse, der findes i 31,25 ℔ af et Legeme, o. s. v.

Ikke desto mindre gjælde samtlige her i Bogen nummererede Formler ogsaa, naar man lader de deri forekommende Bogstaver betegne Længder, Hastigheder, Accelerationer og Vinkelhastigheder maalte i Fod, Arealer i Qvadratfod, Kræfter og Vægte maalte i Pund og Arbejder maalte i Pundfod, kun med følgende Undtagelser:

(29) forandres til:

$$P = \frac{61{,}8.f}{g}(c_1 - c_2)^2,$$

hvor 61,8 er Vægten i Pund af en Kubikfod Vand.

I (37) er $R = 0{,}54.\frac{\delta^2}{r} Q$ ℔, naar δ og r maales i Tommer.

og endelig:

(50) ændres til:

$$\eta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0535}{\sqrt{v}},$$ hvor v da maa udtrykkes i Fod.

Indhold.

P. G. Philipsens Forlag

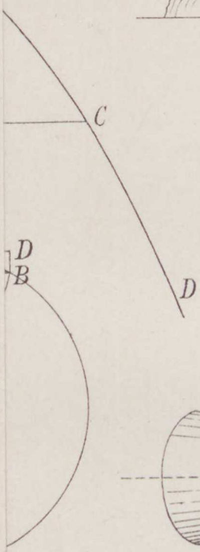


Fig. 16.

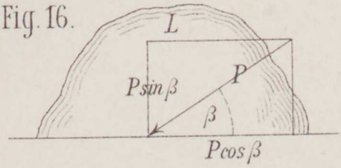
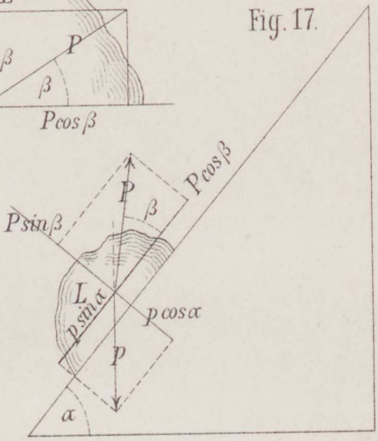


Fig. 17.



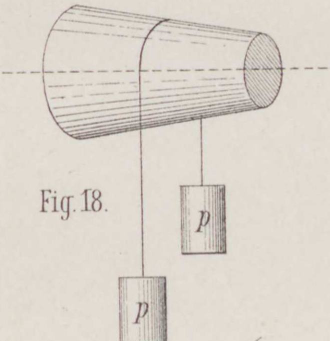


Fig. 18.

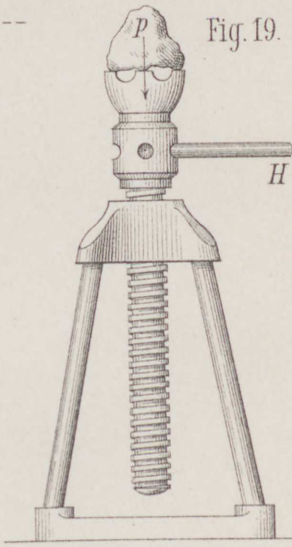


Fig. 19.

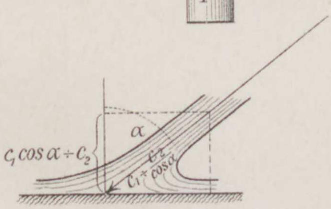
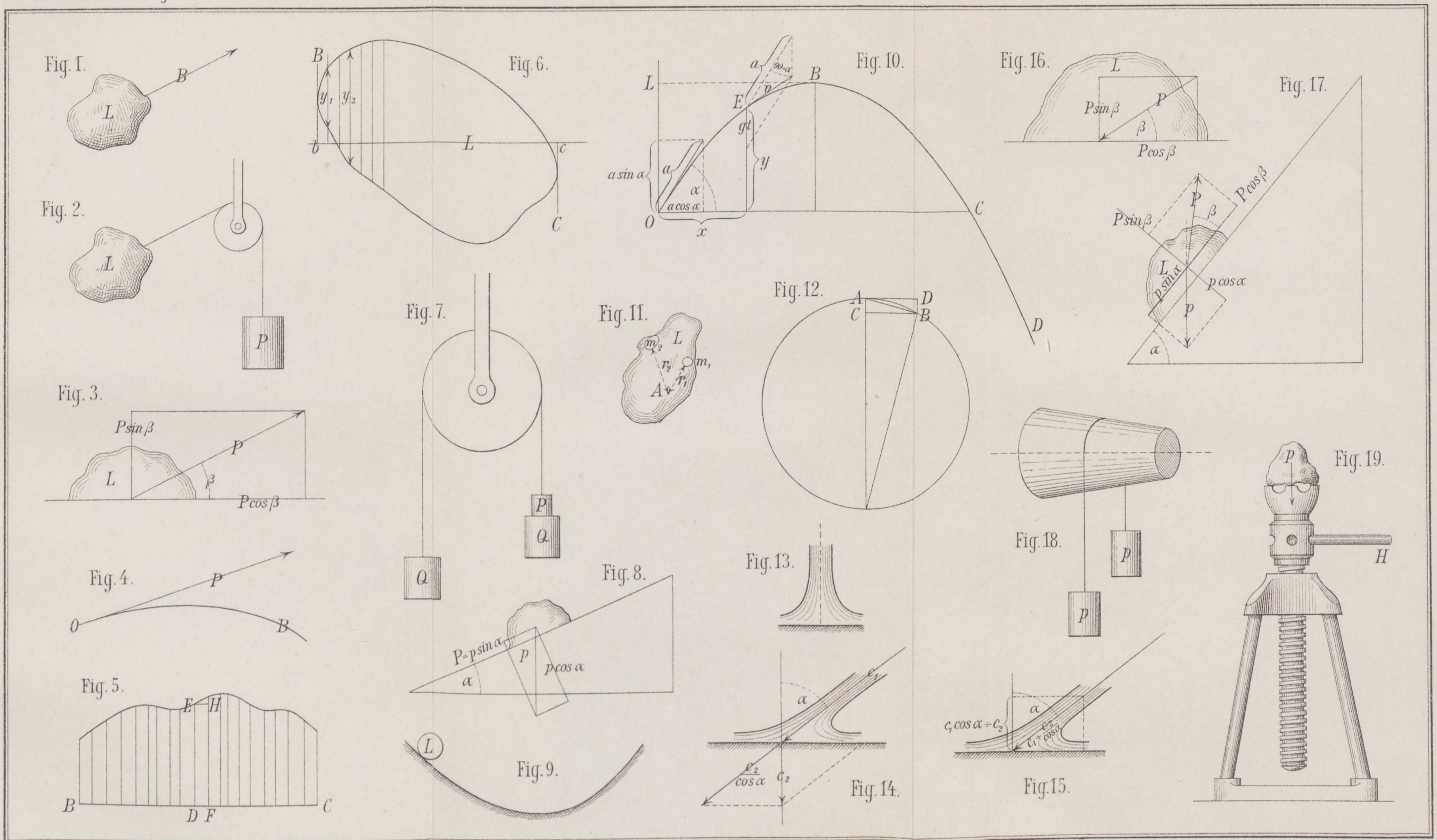


Fig. 15.

GALLE & AAGAARD LITH.

Indhold.



GALLE & AAGAARD LITH.

P. G. Philipsens Forlag

Fig. 33.

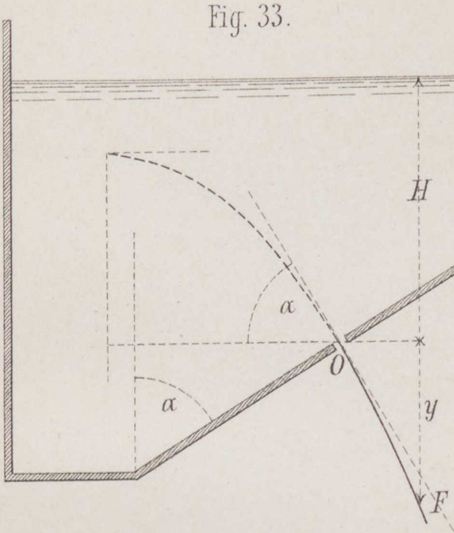


Fig. 34.

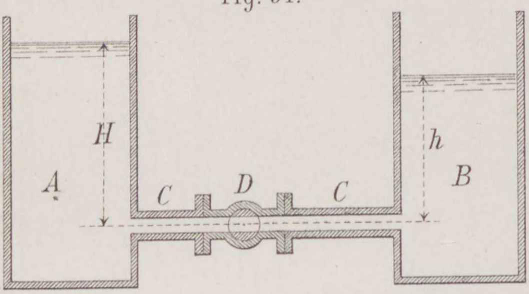
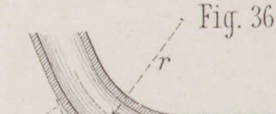


Fig. 35.

Fig. 36.



GALLE & AAGAARD LITH.

II

Fig. 20.

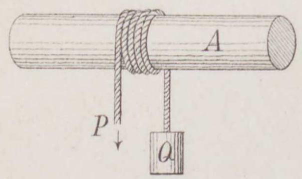
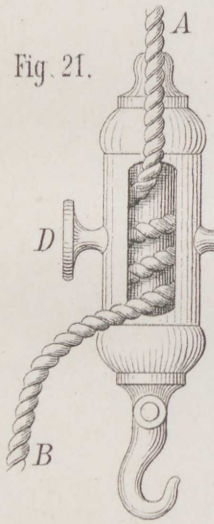


Fig. 21.



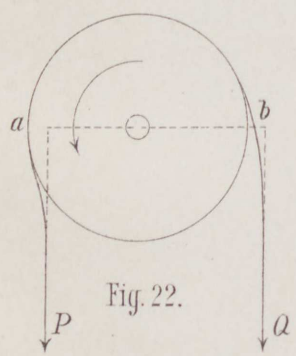


Fig. 22.

Fig. 23.

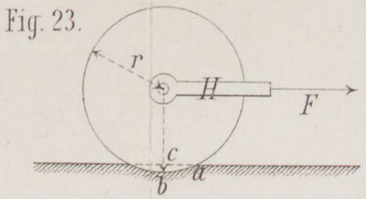


Fig. 24.

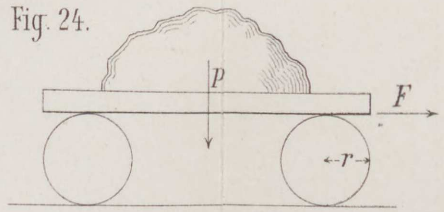


Fig. 25.

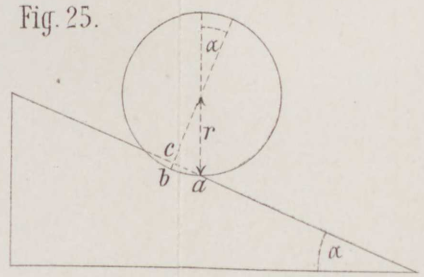


Fig. 26.

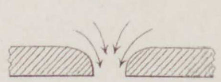


Fig. 27.

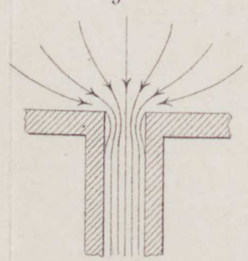


Fig. 28.

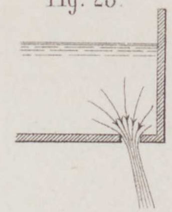


Fig. 29.

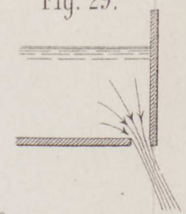


Fig. 30.

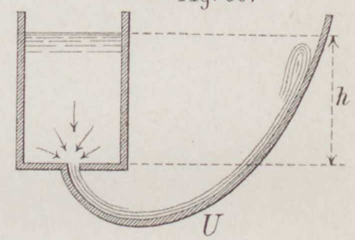


Fig. 31.

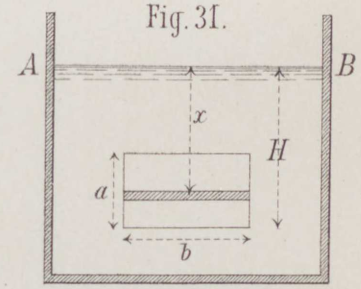


Fig. 32.

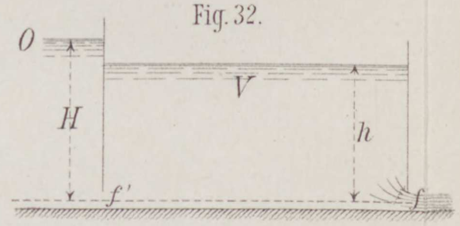


Fig. 33.

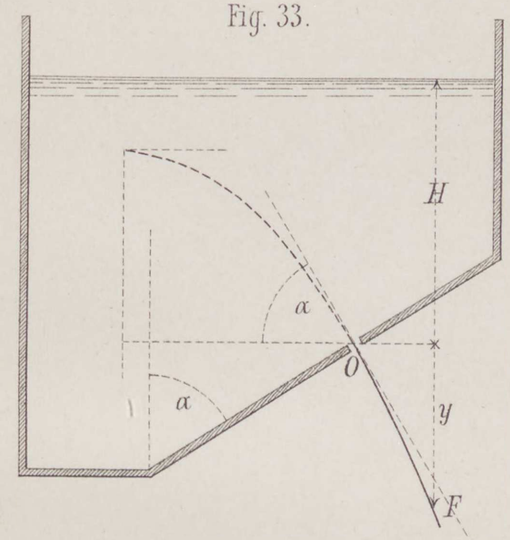


Fig. 34.

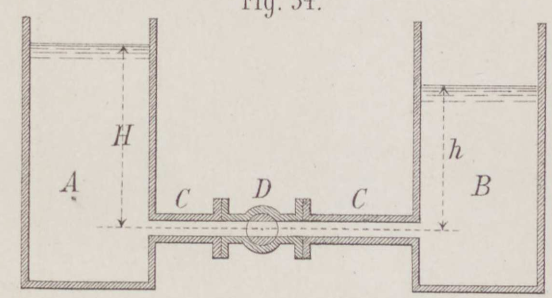


Fig. 35.

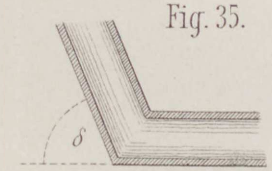
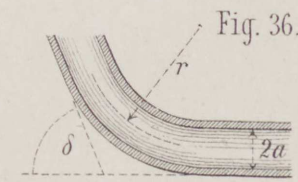


Fig. 36.



GALLE & AAGAARD LITH.