DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

J. Petersen.

Om Ligninger der
løses ved Kvadratfod.

INDUSTRI-
FORENINGEN.

14

511

TB Gl.
5ll Pet

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

5-6

Om Ligninger, der løses ved Kvadratrod,

med Anvendelse paa

Problemers Løsning ved Passer og Lineal.

Afhandling for den filosofiske Doktorgrad

af

Julius Petersen,
Cand. mag.

INDUSTRI-
FORENINGEN.

Kjøbenhavn.

Trykt og forlagt af C. Ferslew & Co.

1871.

størrelser, mellem hvilke der ikke existerer nogen Ligning af første Grad. Endvidere forekommer enhver Rodstørrelse kun i første Potens, da Rodtegnet falder bort, naar den tages i en Potens med lige Exponent. Heraf følger tillige, at en hvilkensomhelst rational Funktion af x_1 kan skrives som en rational, hel Funktion af første Grad med Hensyn til de i x_1 forekommende Rodstørrelser.

3.

Ved at ombytte den i x_1 forekommende Kombination af Fortegn for de forskjellige Rodstørrelser efterhaanden med alle mulige andre Kombinationer af Fortegn, dannes ny Værdier, som vi ville betegne ved

$$x_2, x_3 \ldots . x_n.$$

Dersom der er p Rodstørrelser, bliver det hele Antal 2^p, men disse ere ikke nødvendigvis alle forskjellige. Dersom den samme Rodstørrelse forekommer flere Gange, maa man erindre, at den kun regnes for een. Den Afhængighed, der da bliver mellem de Fortegn, hvormed den forekommer de forskjellige Steder, udtrykkes ved konstante Faktorer, og er selve Rodstørrelsen uvedkommende. Saaledes er

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

egentlig at læse som

$$\sqrt{a+1\sqrt{b}}+\sqrt{a-1\sqrt{b}},$$

hvor $\sqrt{b}$ kun forekommer med $+$; ved Forandring af Fortegn for $\sqrt{b}$ kan heraf kun dannes

$$\sqrt{a+1(-\sqrt{b})}+\sqrt{a-1(-\sqrt{b})},$$

saa at denne Forandring lader den givne Størrelses Værdi uforandret.

4.

Naar x_1 er Rod i Ligningen $f(x) = 0$, ville alle de af x_1 dannede Størrelser $x_2, x_3 \ldots . x_n$ ogsaa være Rødder i Ligningen.

Vi tænke os nemlig x_1 indsat i $f(x)$, hvorved erholdes et Udtryk af første Grad med Hensyn til de i x_1 forekommende Rodstørrelser (se 2). Da der ikke existerer nogen Ligning af første Grad mellem disse, maa Udtrykket være identisk Nul, saa at Koefficienterne til enhver af de forekommende Rodstørrelser maa være Nul. De derved erholdte Ligninger, som angive Betingelserne for, at x_1 er Rod i (1), kunne imidlertid atter indeholde Rodstørrelser, hvorved enhver af dem deler sig i flere andre, og saaledes videre. De sidste Betingelsesligninger kunne da kun indeholde rationale Størrelser, som dels kunne være de oprindeligt i Ligningen forekommende, dels kunne være komne frem ved Kvadrering af de forekommende Rodstørrelser. I intet af Tilfældene kunne de afhænge af Rodstørrelsernes Fortegn, saa at de maa være tilfredsstillede, hvorledes disse end vælges, naar de ere tilfredsstillede for een Kombination. Altsaa, dersom Ligningen tilfredsstilles af x_1, tilfredsstilles den ogsaa af $x_2, x_3 \ldots . x_n$.

5.

Den Ligning, der har Rødderne

$$x_1,\ x_2 \ldots . x_n,$$

kan, som bekjendt, skrives

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_n) = 0. \qquad (2)$$

Ifølge det Udviklede kan man sætte

$$x_1 = A + B\sqrt{C},$$

idet $\sqrt{C}$ er en af de i x_1 forekommende Rodstørrelser, der ikke atter staar under Rodtegn, medens A, B og C indeholde de andre Rodstørrelser. Forandres Fortegnet for $\sqrt{C}$, medens alle andre Fortegn lades uforandrede, faa vi en anden Rod

$$x_2 = A - B\sqrt{C}.$$

Paa samme Maade kunne de andre Rødder ordnes to og to, saa at to sammenhørende kun ere forskjellige ved Fortegnet for $\sqrt{C}$, og alle Parrene dannes af det første Par, ved at tage de i A, B og C forekommende Rodstørrelser med alle Kombinationer af Fortegn. Da nu

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - A)^2 - B^2 C,$$

kan altsaa venstre Side af (2) skrives som et Produkt af Faktorer af 2den Grad, hvoraf ingen indeholder $\sqrt{C}$, og som alle kunne dannes af en af dem ved Ombytning af Fortegn for de i den forekommende Rodstørrelser. Dersom $n = 2^p$, vil der, idet $\sqrt{C}$ er bortskaffet, i Almindelighed være $p - 1$ Rodstørrelser tilbage, idet venstre Side af (2) paa den angivne Maade er udtrykt som et Produkt af 2^{p-1} Faktorer af anden Grad.

Skrives en af disse Faktorer under Formen

$$A_1 + B_1\sqrt{C_1},$$

hvor A_1 og B_1 foruden Rodstørrelserne kunne indeholde x, maa der være en anden Faktor

$$A_1 - B_1\sqrt{C_1}.$$

Sammentrækkes disse to, faar man

$$A_1^2 - B_1^2 C_1,$$

og heraf dannes de analoge Produkter af to og to af de øvrige Faktorer ved at ombytte Fortegn for de tilbageværende $p - 2$ Rodtegn paa alle mulige Maader. Disse Faktorer blive nødvendigvis af fjerde Grad, da x^4 kun kan forekomme een Gang og ikke kan have Koefficienten Nul, naar x^2 ikke havde den.

Ved at fortsætte paa denne Maade, til alle Multiplikationer ere udførte, det vil sige p Gange, vil man have bortskaffet alle Rodstørrelserne, og altsaa være kommen til en Ligning af Graden 2^p med rationale Koefficienter. Man ser let, at den Methode, der er anvendt til at bortskaffe Rodstørrelserne, falder sammen med den, at isolere een Rodstørrelse ad Gangen og kvadrere.

6.

Det er muligt, at flere Rodstørrelser gaa bort samtidig, saa at man faar rationale Koefficienter, før Ligningen er bleven af Graden 2^p; men vi se, at Graden i ethvert Til-

fælde maa blive en Potens af 2. I dette Tilfælde behøve vi, for at danne alle Rødderne af x_1, kun at tage alle de Rodstørrelser med dobbelt Fortegn, der ere bortskaffede paa den angivne Maade, medens de Rodstørrelser, hvis Bortskaffelse ikke fordrer nogen Sammendragning af Faktorer, kunne tages med enkelt Fortegn. Da dette ingen Indflydelse faar ved Ligningens Dannelse, bliver det ligegyldigt, hvilket vi vælge. Ombytning af Fortegn for disse Rodstørrelser giver ikke x flere Værdier, men kun de samme Værdier flere Gange. Saaledes f. Ex. af

$$x_1 = \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

dannes alle Værdier, ved at tage

$$x = \pm\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}},$$

medens Forandring af Fortegnet for $\sqrt{b}$ ikke vil give ny Værdier. Man tør imidlertid ikke sige, at denne Ombytning vil lade enhver Rod uforandret, thi den kan lade en Rod gaa over til en anden; saaledes af

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

dannes

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} - \sqrt{a+\sqrt{b}},$$

der er en anden Rod. Den tilsvarende Ligning er af fjerde Grad, da Udtrykket, uagtet det skrives med 3 Rodstørrelser, kun har fire Værdier. Ved at bortskaffe en af Rodstørrelserne, faar man

$$x^2 \mp 2x\sqrt{a+\sqrt{b}} + 2\sqrt{b} = 0,$$

eller

$$x^2 \mp 2x\sqrt{a-\sqrt{b}} - 2\sqrt{b} = 0.$$

I begge disse Ligninger vil $\sqrt{b}$ gaa bort, samtidig med at Rodstørrelsen af anden Orden bortskaffes.

7.

Da den Ligning, hvis Rødder ere $x_1, x_2 \ldots$, og som er dannet paa den angivne Maade, har rationale Koefficienter, kan $f(x) = 0$ ikke have andre Rødder end disse, uden at være reduktibel, det vil sige, uden at kunne opløses i et System af Ligninger af lavere Grader, thi da den, som bevist, har alle de i den ny Ligning forekommende Rødder, maatte dennes venstre Side være en Faktor i $f(x)$.

Vi kunne nu udtrykke Resultaterne af denne Undersøgelse i følgende Sætninger:

En irreduktibel Ligning, der kan løses ved Kvadratrod, maa være af Graden 2^p.

Naar en af Rødderne udtrykkes ved Rodstørrelser, mellem hvilke der ikke gives nogen Ligning af første Grad, vil man, ved enhver Ombytning af Rodstørrelsernes Fortegn, atter faa en Rod i Ligningen, og man vil, ved at tage alle Kombinationer af Fortegn, faa alle Ligningens Rødder.

Dersom Udtrykket for en af Rødderne indeholder $p+q$ Rodstørrelser, vil man, ved at tage alle Kombinationer af Fortegn, faa hver Rod 2^q Gange; der vil da altid være q af disse Rodstørrelser, som kun skulle tages med enkelt Fortegn, ligegyldig hvilket, naar man kun vil have hver Rod een Gang.

8.

Vi ville foreløbig antage, at Udtrykket for Roden indeholder $p+1$ Rodstørrelser, saa at den ene af disse, $\sqrt{a}$, kan tages med vilkaarligt Fortegn; vi faa da alle Rødderne paa to Maader, idet vi overalt kunne læse $+\sqrt{a}$ eller overalt $-\sqrt{a}$, medens Fortegnene for de andre p Rodstørrelser ombyttes paa alle Maader. Det er ikke nødvendigt, at de to Udtryk for den samme Rod ere identiske, men ere de identiske for den ene Rod, maa de være det for dem alle, da de samme Ombytninger af Fortegn, anvendt paa identiske Udtryk, atter maa give identiske Udtryk.

Dersom Udtrykkene ikke ere identiske, faa vi, ved at sætte Udtrykkene for den samme Rod lige store, et Antal af 2^p Ligninger mellem de forekommende Rodstørrelser; dette strider ikke nødvendig mod den Forudsætning (se 2), at der ikke er nogen Ligning af første Grad mellem de i een Rod forekommende Rodstørrelser, thi ved Dannelsen af de andre Rødder kan der indkomme ny Rodstørrelser. Findes f. Ex. $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}$ i den første Rod, ville de beslægtede Udtryk

$$\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}},\quad \sqrt{a-\sqrt{b-\sqrt{c}}} \text{ og } \sqrt{a+\sqrt{b-\sqrt{c}}}$$

forekomme i de andre Rødder. En Rodstørrelse, hvori atter $\sqrt{a}$ forekommer, kan i det Højeste være af Ordenen $p+1$, hvortil svarer et Antal af 2^p beslægtede. Disse kunne altsaa alle ved Hjælp af de 2^p Ligninger bortskaffes af Udtrykkene for Rødderne; derved blive enten Ligningerne identiske, eller ogsaa kunne de atter benyttes til at bortskaffe en Gruppe Rodstørrelser o. s. v.

Det samme Ræsonnement kan anvendes, naar der er flere Rodtegn i x_1, der kunne tages med vilkaarligt Fortegn, da Antallet af Ligninger og Antallet af beslægtede Rodstørrelser af den højst mulige Orden, der kan forekomme, altid er det Samme. Vi kunne altsaa i alle Tilfælde antage, at de Udtryk, der paa forskjellig Maade kunne dannes for den samme Rod, ere identiske.

Antage vi nu, at $\sqrt{a}$ er en af de Rodstørrelser, der tages med enkelt Fortegn, og forekommer $+\sqrt{a}$ og $-\sqrt{a}$ symmetrisk, da vil Roden blive uforandret ved Ombytning af de to Værdier for $\sqrt{a}$. I modsat Fald vil Ombytningen lade Roden gaa over til en anden Rod; men denne kan ogsaa faas, idet $\sqrt{a}$ lades uforandret, ved Forandring af Fortegn for en eller flere af de Rodstørrelser, der ere at tage med dobbelt Fortegn. Da saaledes Forandringen af Fortegn for $\sqrt{a}$ kan ophæves ved Forandring af Fortegn for visse andre Rodstørrelser, maa den enten staa multipliceret med et ulige Antal af disse, eller disse

maa være beslægtede og kun forskjellige ved deres Fortegn, og ved at $\sqrt{a}$ forekommer i dem med forskjelligt Fortegn; i det sidste Tilfælde maa altsaa $+\sqrt{a}$ og $-\sqrt{a}$ forekomme symmetrisk i de Rødder, hvor de andre Rodstørrelser, vi have betragtet, staa med ens Fortegn.

9.

Vi komme saaledes til at betragte symmetriske, irrationale Funktioner, hvor visse Kvadratrodsstørrelser forekomme symmetrisk under Kvadratrodstegn, der kun skulle tages med enkelt Fortegn, naar man vil have een Værdi af Funktionen. Vi skulle her først ved et Par Exempler vise, hvorledes man kan formindske Antallet af Rodtegn i et saadant Udtryk, for derpaa at bevise Muligheden af en saadan Reduktion i Almindelighed.

Exempel 1. Vi ville betragte Udtrykket

$$\sqrt{c+\sqrt{b+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{b-\sqrt{a}}},$$

der skrives med 5 Rodstørrelser, men kun har 16 Værdier, naar Fortegnene tages paa alle Maader. Man omskriver det til

$$\sqrt{2c+\sqrt{b+\sqrt{a}}+\sqrt{b-\sqrt{a}}+2\sqrt{c^2+c(\sqrt{b+\sqrt{a}}+\sqrt{b-\sqrt{a}})+\sqrt{b^2-a}}},$$

der atter reduceres til

$$\sqrt{2c+\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-a}}}+2\sqrt{c^2+c\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-a}}+\sqrt{b^2-a}},$$

som kun skrives med 4 Rodstørrelser, der er det mindst mulige Antal. Ved at kombinere Fortegnene paa alle Maader, faa vi de 16 Værdier. Den rationale Ligning af 16de Grad, hvori disse ere Rødder, dannes ligegodt af begge Udtryk, men benytte vi det givne, bliver der kun 4 Rodtegn at skaffe bort, idet $\sqrt{a}$ da vil gaa bort med det sidste.

Exempel 2. Betragte vi Udtrykket

$$\sqrt{c+\sqrt{b+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{b-\sqrt{a}}}+\sqrt{c-\sqrt{b+\sqrt{a}}}+\sqrt{c-\sqrt{b-\sqrt{a}}},$$

der er symmetrisk med Hensyn til alle Værdierne af $\sqrt{b+\sqrt{a}}$, og som kun har 16 Værdier, skjøndt det udtrykkes ved 7 Rodstørrelser, da faa vi

$$\sqrt{c+\sqrt{b+\sqrt{a}}}+\sqrt{c-\sqrt{b+\sqrt{a}}}=\sqrt{2c+2\sqrt{c^2-b-\sqrt{a}}},$$

og ved Ombytning af de to Værdier af $\sqrt{a}$

$$\sqrt{c+\sqrt{b-\sqrt{a}}}+\sqrt{c-\sqrt{b-\sqrt{a}}}=\sqrt{2c+2\sqrt{c^2-b+\sqrt{a}}},$$

hvorpaa paa samme Maade

$$\sqrt{2c+2\sqrt{c^2-b-\sqrt{a}}}+\sqrt{2c+2\sqrt{c^2-b+\sqrt{a}}}=$$
$$\sqrt{4c+2\sqrt{2(c^2-b)+2\sqrt{(c^2-b)^2-a}}+4\sqrt{c^2+c\sqrt{2(c^2-b)+2\sqrt{(c^2-b)^2-a}}+\sqrt{(c^2-b)^2-a}}},$$

der kun indeholder 4 Rodstørrelser.

Exempel 3.

$$\sqrt{b}\sqrt{c} + \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} + \sqrt{b+\sqrt{c}} + \sqrt{b-\sqrt{c}}$$

forandres ikke ved den samtidige Ombytning af Fortegn for $\sqrt{b}$ og $\sqrt{c}$. Det har 32 Værdier og skrives med 5 Rodtegn, naar det første Led skrives som $\sqrt{bc}$, og de andre sammentrækkes 2 og 2 som ovenfor.

Exempel 4. Hvilken er den rationale Ligning af lavest Grad, der har Roden

$$x = a + \sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2-a} + \sqrt{a^2+a}?$$

Mellem de tre Rodstørrelser existerer der en Relation, nemlig

$$\sqrt{a^2-a}\sqrt{a^2+a} = a\sqrt{a^2-1},$$

saa at man faar

$$x = a + \frac{1}{a}\sqrt{a^2+a}\sqrt{a^2-a} + \sqrt{a^2+a} + \sqrt{a^2-a}.$$

For at bortskaffe $\sqrt{a^2+a}$, skrive vi

$$\sqrt{a^2+a}\left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2-a}+1\right) = x - a - \sqrt{a^2-a}$$

og kvadrere; vi faa da

$$(a+1)(2a-1+2\sqrt{a^2-a}) = x^2 - 2ax + 2a^2 - a - 2(x-a)\sqrt{a^2-a},$$

der atter skrives

$$2(x+1)\sqrt{a^2-a} = x^2 - 2ax - 2a + 1,$$

hvor en ny Kvadrering fører til den søgte Ligning.

10.

Roden i en irreduktibel Ligning af Graden 2^p, der kan løses ved Kvadratrod, kan skrives med p Kvadratrødder.

I Ligningen $f(x) = 0$ indsætte vi $\frac{k}{x}$ for x, idet k foreløbig er ubestemt. Efter at have bragt $f\left(\frac{k}{x}\right)$ paa hel Form ved Multiplikation med x^{2^p}, søge vi paa sædvanlig Maade største fælles Faktor for dette Polynomium og $f(x)$, indtil vi faa en Rest af første Grad. Lad denne være

$$Mx + N,$$

medens den sidst brugte Divisor er

$$Ax^2 + Bx + C,$$

hvor M, N, A, B og C indeholde k og bekjendte Størrelser. Dersom nu x_1 og x_2 ere to af Rødderne i $f(x) = 0$, og vi sætte $k = x_1 x_2$, maa x_1 og x_2 ogsaa blive Rødder i Ligningen $f\left(\frac{k}{x}\right) = 0$, saa at de to Polynomier maa have den fælles Faktor

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Denne Værdi af k maa altsaa gjøre Resten til Nul, det vil sige, at de to Ligninger i k

$$M = 0 \text{ og } N = 0$$

ere tilfredsstillede af alle Produkterne af to og to af Rødderne i den givne Ligning, medens

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}$$

er den almindelige Form for alle Faktorer af anden Grad, der ere indeholdte i $f(x)$, udtrykte ved Produktet af de to tilsvarende Rødder. Man maa altsaa have

$$\frac{C}{A} = k,$$

saa at Faktoren kan skrives

$$x^2 + \varphi(k)\, x + k,$$

hvor φ er en rational Funktion.

De to Rødder findes altsaa af k ved en Ligning af anden Grad, og da $\varphi(k)$ ikke kan indeholde andre Rodstørrelser end dem, der findes i k, kunne de altsaa udtrykkes ved een Rodstørrelse flere, end der forekommer i k. Da alle Rødderne kunne dannes af en af dem ved Ombytning af Fortegn, se vi heraf, at Rødderne i Almindelighed kunne skrives med et Rodtegn flere end det mindste Antal, der forekommer i noget Produkt af to af dem.

Dersom den givne Ligning er af Graden 2^p, vil Antallet af Værdier for k være

$$\frac{2^p(2^p - 1)}{2},$$

saa at k bestemmes ved en Ligning af Graden

$$2^{p-1}(2^p - 1).$$

Men denne Ligning kan løses ved Kvadratrod, og maa altsaa dele sig i Ligninger, hvis Grader ere Potenser af 2, og mellem disse maa der, da Udtrykket ikke er deleligt med 2^p, være en, hvis Grad i det Højeste er 2^{p-1}; dersom nu denne kan løses ved p—1 Kvadratrødder, kan den givne Ligning løses ved p saadanne. Sætningen vil altsaa gjælde for Ligninger af Graden 2^p, dersom den gjælder for Ligninger af Graden 2^{p-1}; da den nu gjælder for Ligninger af anden Grad, maa den gjælde almindeligt.

Beviset gjælder ikke for det Tilfælde, hvor den Ligning, der tjener til Bestemmelse af k, har lige Rødder; i dette Tilfælde bliver der andre Rødder i $f(x) = 0$, der ogsaa have Produktet k; disse maa ogsaa blive Rødder i $f\left(\frac{k}{x}\right) = 0$, saa at de to Polynomier faa en fælles Faktor af højere end anden Grad.

I de ligestore Produkter af to og to af Rødderne kan den samme Rod ikke forekomme to Gange, thi af

$$x_\alpha x_\beta = k \text{ og } x_\alpha x_\gamma = k$$

vilde følge

$$x_\beta = x_\gamma,$$

saa at den givne Ligning maatte have lige Rødder, og altsaa ikke kunde være irreduktibel. Vi komme senere til nærmere at undersøge saadanne Ligninger; her kunne vi imidlertid paa en simplere Maade se, at Sætningen ogsaa gjælder i dette Tilfælde. Vi kunde nemlig

ligesaa godt have sat $x_1 + x_2 = k$ og søgt fælles Faktor for $f(x)$ og $f(k—x)$. Beviset vilde da gjælde for alle Tilfælde, hvor den Ligning, der her kom til at bestemme k, ikke havde lige Rødder. Man kan ogsaa danne en ny Ligning af den givne, saaledes at Rødderne skrives med de samme Rodstørrelser, idet man sætter

$$x = \frac{ay + b}{cy + d} \text{ eller blot } y = ax + b.$$

Dersom Sætningen gjælder om denne Ligning, maa den ogsaa gjælde om den givne, og vi kunne da altid vælge de vilkaarlige Størrelser saaledes, at den Ligning, der bestemmer Produkterne af to og to Rødder i den ny Ligning, ikke faar lige Rødder. Af

$$y_1 = ax_1 + b,\ y_2 = ax_2 + b,\ y_3 = ax_3 + b,\ y_4 = ax_4 + b$$

vilde nemlig følge

$$y_1\, y_2 = a^2\, x_1\, x_2 + ab\,(x_1 + x_2) + b^2,\quad y_3\, y_4 = a^2\, x_3\, x_4 + ab\,(x_3 + x_4) + b^2.$$

Skulde man nu for alle Værdier af a og b have

$$y_1\, y_2 = y_3\, y_4,$$

maatte man have

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4,$$
$$x_1\, x_2 = x_3\, x_4,$$

hvilket vilde medføre, at $f(x) = 0$ havde lige Rødder og altsaa ikke var irreduktibel.

II. Rationale Polynomiers Opløsning i rationale Faktorer.

1.

Da den foregaaende Undersøgelse forudsætter, at den givne Ligning er irreduktibel, bliver det nødvendigt at vise, at en hvilkensomhelst rational Ligning altid kan deles i de irreduktible Ligninger, af hvilke den er sammensat, en Opgave, der, som bekjendt, falder sammen med den, at opløse Ligningens venstre Side i dens rationale Faktorer. Dette kan kun gjøres ved efterhaanden at søge Faktorer af første, anden, tredie Grad o. s. v., hvor man kan være nødsaget til at gaa til Faktorer af Ligningens halve Grad. Gjælder det kun om at bestemme saadanne Rødder, der kunne udtrykkes ved Kvadratrod, behøve vi, ifølge det tidligere Udviklede, kun at søge saadanne rationale Faktorer, hvis Grad er en Potens af 2.

2.

Bestemmelsen af en Faktor af første Grad sker som bekjendt ved at undersøge, om nogen af Faktorerne i det Led af Ligningen, der ikke indeholder x, er Rod i Ligningen. Da man maa prøve Faktorerne med begge Fortegn, bliver Arbejdet ofte meget besværligt, selv om man anvender den Lettelse, ved en af de bekjendte lette, men meget

ufuldkomne Bestemmelser af Røddernes Grændser, at formindske Prøvernes Antal. Jeg skal her fremstille to andre Methoder, der ere meget simple; den første findes angivet i flere Lærebøger.

Første Methode. Man dividerer sidste Led med den Værdi af x, som man prøver; til Kvotienten lægges Koefficienten til x, hvorpaa man atter dividerer; til Kvotienten lægges Koefficienten til x^2, og saaledes videre. Dersom man kommer til en brudden Kvotient, er Tallet ikke Rod, men dersom alle Kvotienterne ere hele Tal, og man ved Addition af det første Leds Koefficient til den sidst erholdte Kvotient faar Nul til Sum, er Tallet Rod.

Methodens Rigtighed indses let; da x gaar op i alle de andre Led, maa det ogsaa gaa op i det sidste; divideres x bort, faar man et Polynomium, der er en Grad lavere, og hvor x atter maa gaa op i det Led, der ikke indeholder x, men dette er netop Summen af Koefficienten til x og den ved den forrige Division erholdte Kvotient, og saaledes videre.

Som Exempel ville vi prøve, om 12 er Rod i Ligningen

$$x^5 - 47\,x^4 + 423\,x^3 - 140\,x^2 + 1213\,x + 420 = 0.$$

Man faar efterhaanden

$$\begin{aligned}
&420 : 12 + 1213 = 1248;\\
&1248 : 12 - 140 = -36;\\
&-36 : 12 + 423 = 420;\\
&420 : 12 - 47 = -12;\\
&-12 : 12 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

$x - 12$ er altsaa Faktor i Ligningens venstre Side.

Anden Methode. Dersom a er Rod i $f(x) = 0$, maa man have

$$\frac{f(x)}{x-a} = Q,$$

hvor Q er et helt, rationalt Polynomium. Dette maa ogsaa gjælde for specielle Værdier af x, saa at Udtrykkene

$$\frac{f(1)}{a-1},\quad \frac{f(-1)}{a+1},\quad \frac{f(2)}{a-2},\quad \frac{f(-2)}{a+2}\quad \text{o. s. v.}$$

maa være hele Tal. Man indsætter derfor kun de laveste Faktorer paa sædvanlig Maade, saa at man finder $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ o. s. v. De andre Faktorer prøves da først paa den i den forrige Methode angivne Maade, naar de have vist sig at gjøre de ovenfor angivne Kvotienter til hele Tal. Fordelen er navnlig den, at, naar Faktorerne ere store Tal, vil man enten hurtig se, at de ikke ere Rødder, eller ogsaa er der en stor Sandsynlighed for, at de ere det. Saaledes finder man i Ligningen ovenfor

$$f(-1) = -1404;\ f(1) = 1870;\ f(2) = 4950;\ f(3) = 10656.$$

Ved Hjælp af disse udskydes strax alle Faktorerne i 420 undtagen 12 og 35. De fire Tal ere nemlig henholdsvis delelige med

13, 11, 10, 9

og

36, 34, 33, 32.

Begge de saaledes fundne Tal ere Rødder i Ligningen.

3.

Dersom Polynomiet indeholder en rational Faktor af anden Grad

$$x^2 + ax + k,$$

maa der i $f(x) = 0$ være to Rødder, hvis Produkt er k. k kan derfor bestemmes som rational Rod i den Ligning, hvis Rødder ere Produkterne af to og to af Rødderne i $f(x) = 0$. Dersom denne Ligning ikke har rationale Rødder, har $f(x)$ ikke rationale Faktorer af anden Grad, men fordi der er en rational Rod, behøver der ikke i $f(x)$ at være nogen rational Faktor af anden Grad. For at søge en saadan, danne vi Ligningen

$$f\left(\frac{k}{x}\right) = 0;$$

denne maa nemlig, som tidligere vist, faa de to Rødder, der bestemmes ved

$$x^2 + ax + k = 0,$$

fælles med $f(x) = 0$, saa at den søgte Faktor af anden Grad bliver fælles Faktor for de to Polynomier $f(x)$ og $f\left(\frac{k}{x}\right)$, og altsaa kan bestemmes paa sædvanlig Maade.

Da k maa være Faktor i Ligningens sidste Led, vil det, naar dette kun indeholder faa Faktorer, være lettest at prøve med disse, for at undgaa Bestemmelsen af Ligningen i k. Saaledes f. Ex. i Ligningen

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

kan man strax sætte $\frac{1}{x}$ for x, saa at man faar

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1.$$

Den største fælles Faktor for dette Polynomium og $f(x)$ er $x^2 + 3x + 1$, saa at man faar

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - x - 1).$$

Dersom sidste Led i $f(x)$ indeholder mange Faktorer, kan man ogsaa, i Stedet for først at søge k, strax søge største fælles Faktor for $f(x)$ og $f\left(\frac{k}{x}\right)$, hvor k foreløbig er ubestemt. Selve Regningen er nemlig, som tidligere vist (se 10), et Middel til at danne Ligningen i k, da den Rest af første Grad, man omsider kommer til, netop maa blive Nul, naar k er Produktet af to af Rødderne i $f(x) = 0$. Dersom Resten bliver 0 for flere rationale Værdier af k, ville disse, hver for sig indsatte for k i den sidste Divisor af anden Grad, give forskjellige Faktorer af anden Grad i $f(x)$.

4.

De to Polynomier $f(x)$ og $f\left(\frac{k}{x}\right)$ kunne ogsaa faa en fælles Faktor af første Grad, nemlig i det Tilfælde, hvor k er et Kvadrat, og den givne Ligning har en af Rødderne

$+\sqrt{k}$ eller $-\sqrt{k}$. I dette Tilfælde vil nemlig Ligningen $f\left(\frac{k}{x}\right) = 0$ faa Roden $\frac{k}{\pm\sqrt{k}} = \pm\sqrt{k}$.

Vi ville tænke os den tilsvarende Faktor bortdivideret og ligeledes Ligningen befriet for lige Rødder. Der kan da være flere Systemer af to Rødder, hvis Produkt er k, og alle disse Rødder ville gaa over i den ny Ligning, saa at man faar en fælles Faktor af højere end anden Grad; denne Faktor kan da bortdivideres, og vi maa nu særlig søge at opløse den i Faktorer af anden Grad.

Lad Faktoren være $\varphi(x)$. Ligningen

$$\varphi(x) = 0$$

har da den Egenskab, at dens Rødder to og to have Produktet k. Denne Klasse Ligninger, der indbefatter de almindelige reciproke Ligninger, kunne altid, ligesom disse, reduceres til den halve Grad; man bruger Substitutionen

$$y = x + \frac{k}{x},$$

som let ses kun at give y halv saa mange Værdier som x; er nemlig $x_1 x_2 = k$, ville de to Værdier af y

$$x_1 + \frac{k}{x_1} \text{ og } x_2 + \frac{k}{x_2}$$

falde sammen. Faktorerne af anden Grad i $\varphi(x)$ repræsenteres ved

$$x^2 - yx + k$$

og blive rationale, naar y er rational, saa at Opgaven er reduceret til Bestemmelsen af de rationale Rødder i Ligningen i y. Dannelsen af denne Ligning sker, som ved de almindelige reciproke Ligninger, hvor $k = 1$.

5.

Vi kunde ogsaa, for at bestemme den rationale Faktor i $f(x)$

$$x^2 - ax + k,$$

være gaaede ud fra Bestemmelsen af a, der maa være rational Rod i den Ligning, hvis Rødder ere Summerne af to og to Rødder i den givne Ligning. Den søgte Faktor bliver da fælles for de to Polynomier

$$f(x) \text{ og } f(a - x).$$

I dette Tilfælde komme vi som specielt Tilfælde til at betragte saadanne Ligninger, der blive uforandrede ved denne Substitution, og hvor altsaa Summen af Rødderne to og to er a, dersom Graden er lige, medens $\frac{a}{2}$ desuden maa være Rod, dersom den er ulige. I det sidste Tilfælde tænkes den tilsvarende Faktor bortdivideret, og Ligningen kan da reduceres til den halve Grad ved Substitutionen

$$y = x(a - x).$$

y faar nemlig her kun halv saa mange Værdier som x, thi dersom $x_1 + x_2 = a$, ville de to Værdier af y

$$x_1 (a - x_1) \text{ og } x_2 (a - x_2)$$

falde sammen. Til de forskjellige Værdier af y svare de forskjellige Faktorer af anden Grad

$$x^2 - ax + y,$$

saa at Bestemmelsen af saadanne rationale Faktorer er reduceret til Bestemmelsen af rationale Rødder i Ligningen i y.

Dersom de to første Led i den givne Ligning ere

$$x^{2n} - A x^{2n-1},$$

maa man have

$$n a = A,$$

og Betingelsen for, at Ligningen hører til den angivne Klasse, er da, at den bliver uforandret ved Ombytning af x med $a - x$, da denne Substitution kun frembringer en Ombytning mellem to og to af Rødderne. Ligningen i y dannes ved Elimination af x mellem

$$\varphi(x) = 0 \text{ og } y = ax - x^2.$$

Denne Elimination kan udføres paa sædvanlig Maade, eller ved at sætte $\varphi(x)$ lig et Polynomium i y af den halve Grad og med ubestemte Koefficienter; disse bestemmes da, efter at y er udtrykt ved x, ved de ubestemte Koefficienters Methode. Simplest er maaske følgende Methode, der tillige viser, at Ligningen i y faar den angivne Grad:

Da $\varphi(x)$ er identisk med $\varphi(a - x)$, kan man sætte

$$\varphi(x) + \varphi(a - x) = 0,$$

hvor det almindelige Led faar Formen

$$a_n (x^n + (a - x)^n).$$

Dette Udtryk er symmetrisk med Hensyn til x og $a - x$ og kan altsaa udtrykkes rationalt ved disse Størrelsers Sum og Produkt, det vil sige ved a og y. Betegnes $x^n + (a - x)^n$ ved S_n, have vi

$$S_n = S_1 S_{n-1} - y S_{n-2} = a S_{n-1} - y S_{n-2},$$

idet $S_1 = a$, $S_0 = 2$. Denne Formel giver efterhaanden Udtrykkene i y.

Exempel. $\quad x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 25x^2 + 6x - 4 = 0.$

Man har $9 = 3a$, saa at Ligningen maa blive uforandret ved Ombytning af x med $3 - x$, for at Methoden skal kunne benyttes. Da dette finder Sted, beregne vi efterhaanden

$$\begin{aligned}
S_1 &= a \\
S_2 &= a^2 - 2y \\
S_3 &= a^3 - 3ay \\
S_4 &= a^4 - 4a^2y + 2y^2 \\
S_5 &= a^5 - 5a^3y + 5ay^2 \\
S_6 &= a^6 - 6a^4y + 9a^2y^2 - 2y^3,
\end{aligned}$$

som, indsat i Ligningen

$$S_6 - 9S_5 + 30S_4 - 45S_3 + 25S_2 + 6S_1 - 8 = 0,$$

for $a = 3$ giver

$$y^3 - 3y^2 - 2y + 4 = 0,$$

der har en rational Rod 1 og de to irrationale Rødder $1 \pm \sqrt{5}$. Den givne Ligning kan altsaa skrives

$$(x^2 - 3x + 1)\ (x^2 - 3x + 1 + \sqrt{5})\ (x^2 - 3x + 1 - \sqrt{5}) = 0.$$

6.

Den angivne Methode til Bestemmelse af rationale Faktorer af anden Grad udvides let til Bestemmelse af Faktorer af en hvilkensomhelst Grad. Vi ville for Simpelheds Skyld antage, at vi søge en rational Faktor af fjerde Grad i Polynomiet $f(x)$; hvad vi sige derom, kan da let overføres paa det almindelige Tilfælde.

Lad $f(x) = 0$ være af Graden n og have Rødderne

$$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n.$$

Vi danne da den Ligning, hvis Rødder ere alle Produkterne af fire af disse Rødder. Dersom $f(x)$ har en rational Faktor af fjerde Grad, hvis sidste Led er k, maa k være Rod i den dannede Ligning, og bestemmes altsaa ved at søge de rationale Rødder i denne. Vi danne nu den Ligning, hvis Rødder ere

$$\frac{k}{x_1\, x_2\, x_3}$$

og alle de Udtryk, der kunne dannes heraf, ved at udtage de tre Rødder i Nævneren mellem Rødderne i $f(x) = 0$ paa alle mulige Maader. Denne Lignings Koefficienter ville blive rationale, da de ere symmetriske Funktioner af Rødderne i $f(x) = 0$. Dersom nu

$$x_1\, x_2\, x_3\, x_4 = k,$$

vil man have

$$\frac{k}{x_1\, x_2\, x_3} = x_4, \quad \frac{k}{x_1\, x_2\, x_4} = x_3, \quad \frac{k}{x_1\, x_3\, x_4} = x_2, \quad \frac{k}{x_2\, x_3\, x_4} = x_1,$$

saa at den ny Ligning

$$\Psi(x) = 0$$

maa have Rødderne x_1, x_2, x_3 og x_4 fælles med den givne. Den søgte Faktor af fjerde Grad bliver da fælles for $f(x)$ og $\Psi(x)$ og bestemmes paa sædvanlig Maade.

Hvad Bestemmelsen af k angaar, gjælder her det Samme, som er sagt ved Bestemmelsen af en Faktor af anden Grad, nemlig, at man, ved at beholde Betegnelsen k, i selve den Regning, som udføres, for at bestemme den fælles Faktor, har et Middel til at bestemme k. Da k maa være Faktor i sidste Led af $f(x)$, kan man, naar dette kun indeholder faa Faktorer, prøve med disse; man kan da undertiden vejledes i Valget af den Faktor, man vil prøve, ved Indsættelse af Talværdier for x i $f(x)$ og $\Psi(x)$, og Bestemmelse af deres største fælles Faktor i disse specielle Tilfælde. Denne maa nemlig være lig med eller et Multiplum af den specielle Værdi, som den rationale Faktor har for de indsatte Værdier af x og k, og der er derfor ikke megen Sandsynlighed for en Værdi af k, som for flere Værdier af x giver lave fælles Faktorer.

Dersom den fælles Faktor for $f(x)$ og $\Psi(x)$ bliver af højere end fjerde Grad, maa der være flere end de fire Rødder i $f(x) = 0$, der kunne udtrykkes ved k divideret med

Produktet af tre af Rødderne; da den fundne Faktor gaar op i $f(x)$, kunne vi foreløbig opløse dette Polynomium og behøve altsaa kun at betragte det Tilfælde, hvor $f(x)$ gaar op i $\Psi(x)$.

Ligningen $\Psi(x) = 0$ maa i dette Tilfælde blandt sine Rødder have alle Rødderne i $f(x) = 0$, og hver af disse kan endda forekomme flere Gange; dersom de nu ikke alle forekomme det samme Antal Gange, kunne vi, ved at bortdividere en vis Potens af $f(x)$, faa et Udtryk, der har en Faktor fælles med $f(x)$, og altsaa som forhen kan tjene til Bestemmelse af denne; der bliver altsaa tilbage kun det Tilfælde, da $\Psi(x)$ er delelig med en Potens af $f(x)$, og den derved erholdte Kvotient ikke længer har nogen Faktor fælles med $f(x)$.

7.

Dersom $\Psi(x)$ er delelig med $f(x)$, og Kvotienten ikke har nogen Faktor fælles med $f(x)$, maa Ligningen $f(x) = 0$ være af Graden $4p$ (p et helt Tal), og den kan da løses ved en Ligning af Graden p og p Ligninger af fjerde Grad. Dersom Ligningen af Graden p har rationale Rødder, vil $f(x)$ i Almindelighed have rationale Faktorer af fjerde Grad.

Man har nemlig

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = k,$$

der viser, at disse fire Rødder maa gaa over i Ligningen $\Psi(x) = 0$. Ingen af disse Rødder kan forekomme i noget andet Produkt af fire Rødder, der er k, thi dersom man havde

$$x_1 x_5 x_6 x_7 = k,$$

maatte

$$x_1 = \frac{k}{x_5 x_6 x_7}$$

forekomme flere end een Gang som Rod i $\Psi(x) = 0$, hvilket strider mod det Antagne. Da nu enhver Rod i $f(x) = 0$ skal forekomme i $\Psi(x) = 0$, maa enhver af dem forekomme i eet og kun i eet Produkt af fire Rødder, der er k. Vi se saaledes, at Ligningens Rødder paa een Maade og kun paa een Maade kunne deles i Grupper med fire i hver, saaledes at Rødderne i hver Gruppe have Produktet k.

Vi kunne nu danne to Ligninger med rationale Koefficienter, den ene, hvis Rødder ere alle Værdier af

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + x_\delta,$$

og den anden, hvis Rødder ere alle Værdier af

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + \frac{k}{x_\alpha x_\beta x_\gamma}.$$

Disse to Udtryk kunne kun blive lige store, dersom

$$x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta = k,$$

saa at man, ved at søge en største fælles Faktor, der maa blive af Graden p, faar dannet den Ligning, hvis Rødder ere Summerne af Rødderne i de Grupper med fire i hver, hvor Produktet er k.

Vi have saaledes dannet den Ligning af Graden p, hvis Rødder med modsat Tegn ere Koefficienterne til x^3 i de Ligninger af fjerde Grad, i hvilke den givne Ligning deler sig. De andre Koefficienter kunne udtrykkes rationalt ved disse; sætte vi nemlig

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + x_\delta = a$$

og danne den Ligning, hvis Rødder ere alle Værdier af

$$a - (x_\beta + x_\gamma + x_\delta),$$

da maa disse fire Rødder gaa over i den ny Ligning, og man kan da, ved at søge største fælles Faktor, finde den almindelige Form for en Faktor af fjerde Grad i $f(x)$, saaledes at Koefficienterne ere udtrykte rationalt ved a.

Her kan atter indtræde det Tilfælde, at den fælles Faktor bliver af højere end fjerde Grad; vi skulle imidlertid ikke her gaa nærmere ind derpaa, saalidt som paa det Tilfælde, da $\Psi(x)$ er delelig med højere Potenser af $f(x)$. Disse Tilfælde ville blive behandlede, naar vi komme til Løsningen af irreduktible Ligninger, hvor de navnlig have Betydning; her, hvor det kun kommer os an paa Bestemmelsen af de rationale Faktorer, kunne de altid undgaas, idet man kan gaa ud fra en af de andre Koefficienter i den rationale Faktor, f. Ex.

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = l,$$

eller ogsaa omforme den givne Ligning ved en simpel lineær Substitution

$$x = ay + b.$$

III. Løsning af irreduktible Ligninger, der kunne løses ved Kvadratrod.

1.

Vi have set, at en irreduktibel Ligning, der skal kunne løses ved Kvadratrod, maa være af Graden 2^p. Der gives forskjellige Substitutioner, ved hvilke en saadan Ligning kan reduceres til en af Graden 2^{p-1}, hvor Koefficienterne da komme til at indeholde en Kvadratrod.

Vi kunne saaledes, idet vi for Overskueligheds Skyld holde os til Ligningen af 8de Grad, sætte

$$y_1 = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_5 x_6 x_7 x_8$$

og danne den Ligning, hvis Rødder ere alle de Værdier af y, som vi faa, ved at udtage de paa højre Side af Lighedstegnet forekommende Størrelser

$$x_1 x_2 x_3 \ldots .$$

mellem Rødderne i den givne Ligning paa alle Maader. Denne Ligning i y faar rationale Koefficienter, da disse ere symmetriske Funktioner af Rødderne i den givne Ligning. Da de 4 Rødder i det første Produkt kunne udtages mellem de 8 paa 70 Maader, og da hvert Udtryk paa denne Maade kommer igjen to Gange, maa Ligningen i y blive af 35te Grad. Dersom nu x kan udtrykkes ved Kvadratrod, maa det Samme gjælde om y; Ligningen i y maa da være reduktibel, og, da Graden er ulige, mindst have een rational Rod. Bestemmes denne, vil den, i Forbindelse med det bekjendte Produkt af alle Rødderne i den givne Ligning, give en Ligning af anden Grad til Bestemmelse af de fire Rødders Produkt, der saaledes udtrykkes ved en Kvadratrod. Da nu, som tidligere bevist, de andre symmetriske Funktioner af disse fire Rødder kunne udtrykkes rationalt ved deres Produkt, have vi saaledes bestemt den ene Faktor af fjerde Grad i den givne Lignings venstre Side; give vi den indkomne Kvadratrod overalt modsat Tegn, faa vi den anden Faktor.

Den saaledes fundne Ligning af fjerde Grad behandles nu paa samme Maade, idet vi sætte

$$y = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

der fører os til en ny Hjælpeligning af tredie Grad; da ogsaa denne skal kunne løses ved Kvadratrod, maa den være reduktibel, idet den forekommende Kvadratrod regnes med til de bekjendte Størrelser; den maa altsaa have en Rod, som kan udtrykkes rationalt ved de bekjendte Størrelser, det vil sige, som kun indeholder den ene tidligere indførte Kvadratrod; ved at benytte denne Rod i Forbindelse med de fire Rødders Produkt, komme vi til en ny Ligning af anden Grad, hvorved der indføres en ny Kvadratrod, og saaledes videre. (Se Noterne.)

Da Hjælpeligningen af tredie Grad er den, der sædvanlig benyttes til Løsningen af Ligninger af fjerde Grad, eller ialfald ved en simpel Substitution kan omformes dertil, se vi, at Betingelsen for, at en Ligning af fjerde Grad kan løses ved Kvadratrod, er, at denne under Navn af Resolventen bekjendte Ligning har en rational Rod.

Istedet for den ved Ligningen af 8de Grad anvendte Substitution, kunde man anvende forskjellige andre, f. Ex.

$$y = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\ (x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

eller

$$y = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8)^2.$$

2.

Det her Udviklede anvendes let paa den almindelige Ligning af Graden 2^p; det gjælder blot om at vise, at Hjælpeligningen altid har en rational Rod, eller, hvad der er det Samme, at den bliver af ulige Grad.

Vi have set, at Graden g af Ligningen findes ved at udtage det halve Antal af Rødderne mellem dem alle, og dividere det saaledes fundne Tal med 2. Vi faa da

$$g = \frac{2^p\,(2^p-1)\,(2^p-2)\,\ldots\,(2^{p-1}+1)}{2.\,2.\,3\ldots\;2^{p-1}}$$

eller

$$g = \frac{2^p!}{2\,(2^{p-1}!)^2}.$$

Dividere vi alle de lige Faktorer i $2^p!$ med 2, faa vi netop alle Faktorerne i Produktet $2^{p-1}!$; vi have altsaa, idet u, u_1, u_2 .. betyde ulige Tal,

$$2^p! = 2^{2^{p-1}} \cdot 2^{p-1}!\, u_1$$

og ligeledes

$$2^{p-1}! = 2^{2^{p-2}} \cdot 2^{p-2}!\, u_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

indtil $2! = 2.$

Multiplicere vi alle disse Ligninger, faa vi

$$2^p! = 2^{2^p-1}\, u_1\, u_2 \ldots;$$

Nævneren i g er

$$2\,(2^{p-1}!)^2 = 2^{2^p-1}\, u^2,$$

og altsaa

$$g = \frac{u_1\, u_2 \ldots}{u^2},$$

som er et ulige Tal.

3.

Vi have set, at, naar Ligningen af Graden 2^p kan løses ved Kvadratrod og har rationale Koefficienter, maa den kunne skrives som en Ligning af Graden 2^{p-1}, hvor Koefficienterne indeholde en Kvadratrod, og at denne netop har de samme Rødder som den givne, naar Kvadratroden tages med begge sine Værdier; ved at anvende en af de ovenfor angivne Substitutioner, kommer man til en Ligning af anden Grad, der i Almindelighed bestemmer den søgte Kvadratrod. Det er imidlertid muligt, at den faar lige Rødder, saa at disse blive rationale; i dette Tilfælde er den Koefficient i Ligningen af Graden 2^{p-1}, som man har søgt at bestemme, rational, og man maa da gaa ud fra en af de andre Koefficienter for at finde Kvadratroden; vi skulle ikke opholde os ved at fremsætte de Substitutioner, som i dette Tilfælde kunne anvendes, men vise, hvorledes en saadan Relation mellem Rødderne ofte kan tjene til at reducere Ligningen til andre af lavere Grad.

4.

Vi ville betragte det mere almindelige Tilfælde, at der mellem nogle af Rødderne existerer en Ligning, der er af første Grad med Hensyn til enhver af dem, og hvori de

forekomme symmetrisk. Betegne vi ved s_p Summen af Produkterne af p og p af disse og ved a_0, $a_1 \ldots a_p$ bekjendte Størrelser, kan Relationen skrives

$$a_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 \ldots . a_p s_p = 0.$$

Af denne faas for en af Rødderne

$$x_p = A_p,$$

hvor A_p er en rational, symmetrisk Funktion af de andre i Relationen forekommende Rødder.

Vi danne nu den Ligning

$$\Psi(x) = 0,$$

hvis Rødder ere alle de Værdier, som A antager, naar de deri forekommende Rødder udtages mellem den givne Lignings Rødder paa alle Maader. Da nu $\Psi(x) = 0$ har en Rod fælles med den givne Ligning $f(x) = 0$, maa den, da denne er irreduktibel, have dem alle, og de maa alle forekomme lige mange Gange; vi kunne derfor i Almindelighed antage, at $\Psi(x)$ er delelig med $(f(x))^q$.

Dersom $q = 1$, kan Ligningen, som vi tidligere have bevist det for et specielt Tilfælde, reduceres. Er den nemlig af Graden n, og indeholder den givne Relation p Rødder, lader den sig dele i Ligninger af p^{de} Grad, hvis Koefficienter bestemmes ved Ligninger af Graden $\frac{n}{p}$. Vi kunne nemlig danne den Ligning, der bestemmer en symmetrisk Funktion af disse Rødder, f. Ex.

$$u_1 = x_1 + x_2 + \ldots x_p.$$

Vi have da ogsaa

$$u_1 = A_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_p,$$

saa at u_1 bestemmes ved to Ligninger, der kun kunne faa de Rødder fælles, for hvilke

$$x_p = A_p,$$

det vil sige, de Værdier af u, der udtrykkes ved de samme Rødder, som indgaa i den givne Relation og de analoge. Da hver Rod kun forekommer i een af disse, bliver Antallet af fælles Rødder for de to Ligninger $\frac{n}{p}$. Som tidligere bevist, behøve vi kun at bestemme u, da de andre Koefficienter ere rationale Funktioner af denne.

Omvendt, dersom vi have en Ligning

$$x^p + \varphi_1(y_1)\, x^{p-1} + \varphi_2(y_1)\, x^{p-2} + \ldots = 0,$$

hvor φ_1, $\varphi_2 \ldots$ ere rationale Funktioner, og y_1 en Rod i en Ligning af Graden $\frac{n}{p}$, og vi for y_1 efterhaanden indsætte de andre Rødder i denne Ligning og multiplicere de saaledes erholdte Udtryk, komme vi til en rational Ligning af n^{te} Grad. Koefficienterne i denne blive nemlig symmetriske Funktioner af alle Værdierne af y.

Dersom q ikke er 1, er det ikke sikkert, at Methoden fører til en Reduktion; Sætningen gjælder da kun, dersom vi betragte

$$(f(x))^q = 0,$$

som den givne Ligning, og man faar da denne delt i Ligninger af Graden $\frac{nq}{p}$, hvis Koefficienter bestemmes ved Ligninger af p^{de} Grad.

Dersom $p = 2$, maa man have $q = 1$. Dersom der altsaa gives en Relation

$$a(x_1 + x_2) + b\, x_1 x_2 = c,$$

kan Ligningen altid deles i lutter anden Grads Ligninger ved en Ligning af den halve Grad. Denne findes ved at eliminere x mellem

$$x^2 - xy + \frac{c - ay}{b} = 0$$

og den givne Ligning.

Vi kunne udføre denne Elimination ved at udtrykke x^2 og deraf efterhaanden de højere Potenser af x ved første Potens af x og y, og altsaa give Ligningen Formen

$$Y_1 x + Y = 0,$$

der da, dersom Ligningen hører til den angivne Klasse, maa reducere sig til

$$Y_2 = 0,$$

idet Y_2 er største fælles Faktor for Y_1 og Y.

Exempel. For Ligningen

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = 0$$

gives Relationen

$$x_1 x_2 = x_1 + x_2 + 2,$$

saa at vi sætte

$$x^2 - yx + y + 2 = 0,$$

hvoraf

$$x^2 = yx - y - 2$$
$$x^3 = (y^2 - y - 2)\, x - (y^2 + 2y)$$
$$x^4 = (y^3 - 2y(y + 2))\, x - (y^3 + y^2 - 4y - 4),$$

altsaa

$$Y_1 = y^3 - 4y^2 + 8$$
$$Y = -y^3 + y^2 + 6y + 4,$$

hvoraf

$$Y_2 = y^2 - 2y - 4 = 0$$
$$y = 1 \pm \sqrt{5},$$

saa at Ligningen kan skrives

$$(x^2 - x(1 + \sqrt{5}) + 3 + \sqrt{5})\ (x^2 - x(1 - \sqrt{5}) + 3 - \sqrt{5}) = 0.$$

For at søge, om Methoden er anvendelig paa en given Ligning, bemærke vi, at

$$a(x_1 + x_2) + b\, x_1 x_2 + c = 0$$

giver

$$x_1 = -\frac{ax_2 + c}{bx_2 + a},$$

saa at den givne Ligning ved denne Substitution skal blive uforandret for passende Værdier af a, b og c. Elimineres disse af Betingelsesligningerne, faas de Ligninger, der udtrykke de Relationer mellem de givne Koefficienter, der maa være tilfredsstillede. (Se Noterne.)

5.

Der gives en i Praxis let anvendelig Methode til at søge en Betingelse, som nødvendigvis maa være opfyldt, for at en given Ligning skal kunne løses ved Kvadratrod, og som tillige tjener til at bestemme den første ved Løsningen indkommende Kvadratrod; Methoden, som bevises nedenfor, er følgende:

Man uddrager paa sædvanlig Maade Kvadratroden af Ligningens venstre Side; Betingelsen er da, at Koefficienterne i Resten have en fælles Faktor, og denne maa indeholde de Faktorer, der kunne forekomme under Rodtegnet i den søgte Kvadratrod. Betingelsen er nødvendig, men ikke tilstrækkelig. Da der ved Roduddragningen i Koefficienterne kan komme Brøker med Potenser af 2 i Nævneren, tage vi intet Hensyn til denne Faktor.

Lad den givne Ligning være af Graden $2n$, og kunne skrives som en Ligning af Graden n, hvor Koefficienterne indeholde $\sqrt{\alpha}$. Dersom denne forekommer i Koefficienten til x^{2n}, skaffe vi den bort ved en Multiplikation, og den givne Ligning

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots . = 0 \qquad (3)$$

maa da kunne skrives

$$(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . + a_n)^2 + \alpha (b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots . + b_n)^2 = 0.$$

Ved Kvadratrodsuddragningen give vi derimod (3) Formen

$$(x^n + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \ldots . k_n)^2 + R_{n-1} = 0, \qquad (4)$$

hvor Resten R_{n-1} ikke indeholder x med højere Exponent end $n-1$. Af (3) og (4), der maa være identiske, faar man ligeledes identisk

$$(2x^n + (a_1 + k_1)x^{n-1} + (a_2 + k_2)x^{n-2} \ldots . + a_n + k_n)\,((a_1 - k_1)x^{n-1} + (a_2 - k_2)x^{n-2} + \ldots . (a_n - k_n))$$
$$= -\alpha(b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots . b_n)^2 + R_{n-1}, \qquad (5)$$

og ved Sammenligning af Koefficienterne til x^{2n-1}, $x^{2n-2} \ldots . x^n$, hvor altsaa R_{n-1} er uden Indflydelse

$$2(a_1 - k_1) = 0,$$
$$2(a_2 - k_2) + (a_1 + k_1)(a_1 - k_1) = -\alpha b_1^2,$$
$$\vdots$$
$$2(a_p - k_p) + (a_1 + k_1)(a_{p-1} - k_{p-1}) + (a_2 + k_2)(a_{p-2} - k_{p-2}) \ldots = \alpha A,$$
$$\vdots$$
$$2(a_n - k_n) + (a_1 + k_1)(a_{n-1} - k_{n-1}) + \ldots . (a_{n-1} + k_{n-1})(a_1 - k_1) = \alpha B,$$

hvor αA og αB ere Polynomier, der ere delelige med α.

Den første af disse Ligninger viser, at $a_1 = k_1$, saa at a_1 bestemmes strax ved Roduddragningen; den næste viser, at $a_2 - k_2$ er delelig med α, den næste, at det Samme gjælder om $a_3 - k_3$, og saaledes videre til $a_n - k_n$. Derved bliver hele venstre Side af

(5) delelig med α, saa at det Samme maa gjælde om højre Side og altsaa om R_{n-1}, saa at α som angivet maa være fælles Faktor for alle Koefficienterne i Resten.

Exempel 1.

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Resten bliver $\frac{5}{8}x + \frac{55}{64}$; den første i Roden forekommende Kvadratrod er som bekjendt $\sqrt{5}$.

Exempel 2.

$$x^4 - 4\alpha x^3 + 2x^2(4\alpha^2 - \alpha - 1) - 4x(2\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 1) + 4\alpha^4 - 4\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha = 0.$$

Kvadratrodsuddragning giver Ligningen Formen

$$(x^2 - 2\alpha x + 2\alpha^2 - \alpha - 1)^2 + (\alpha^2 - 1)(4x + 1) = 0.$$

Rødderne i Ligningen ere

$$x = \alpha + (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} + \left[\alpha + (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Andet Afsnit.

Om Løsningen af geometriske Konstruktionsopgaver ved Passer og Lineal.

I. Betingelser for Muligheden.

1.

Naar en Opgave kan løses ved Passer og Lineal, og man søger de ved Konstruktionen bestemte Størrelser udtrykte ved de givne, kan man ikke komme til andre irrationale Udtryk end Kvadratrodsstørrelser.

Enhver Løsning, hvor sammensat den end er, kan nemlig kun bestaa af den gjentagne Udførelse af de to, til de anvendte Apparater svarende, elementære Operationer:

At trække en ret Linie gjennem to givne Punkter, og

at tegne en Cirkel med givet Centrum og given Radius.

Vi kunne nu benytte Formlerne i den analytiske Geometri til at beregne Koordinaterne til de forskjellige Punkter, efterhaanden som vi bestemme dem ved Konstruktionen; vi komme da til at benytte følgende Formler:

Ligningen for en ret Linie gjennem to givne Punkter;

Formlen for Afstanden mellem to givne Punkter;

Ligningen for en Cirkel med givet Centrum og given Radius;

Formlerne til Bestemmelse af Skjæringspunkterne for to givne rette Linier, for en given ret Linie og en given Cirkel og for to givne Cirkler.

Da nu disse Formler ikke indeholde andre irrationale Udtryk end Kvadratrødder, kan der ikke indkomme andre, hvor ofte og i hvilken Orden de end anvendes.

Vi se heraf, at de Ligninger med een Ubekjendt, der tjene til at bestemme Løsningen af et geometrisk Problem, maa, forsaavidt de ere irreduktible, være af en Grad, der er en Potens af to. Da vi nu i det Foregaaende have vist, at reduktible Ligninger altid kunne deles i irreduktible, og at Løsningen af disse altid kan findes, naar de kunne

løses ved Kvadratrod, vil det altsaa altid være muligt at afgjøre, hvorvidt en geometrisk Opgave, der kan stilles i Ligning, kan løses ved Passer og Lineal eller ej, og i det første Tilfælde at finde en Løsning.

2.

Vinklens Tredeling. Vi kunne her, idet den givne Vinkel er v, sætte

$$\cos v = a;\ \cos\frac{v}{3} = x,$$

og have da til Bestemmelse af x Ligningen

$$4x^3 - 3x - a = 0,$$

der, for en vilkaarlig Værdi af a, er irreduktibel, saa at Løsningen af den almindelige Opgave er umulig; derimod kunne specielle Værdier af a gjøre Ligningen reduktibel; saaledes f. Ex. for $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$, deler den sig i de to Ligninger

$$x + \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0 \text{ og } 4x^2 - 2x\sqrt{2} - 1 = 0.$$

3.

Terningens Fordobling afhænger af Ligningen

$$x^3 - 2a^3 = 0,$$

der ligeledes er irreduktibel. Den er et specielt Tilfælde af den ligeledes uløselige Opgave om den dobbelte Mellemproportional, bestemt ved Ligningerne

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

hvoraf

$$x^3 - a^2 b = 0,$$

som strax ses at være irreduktibel, da vi ved Opløsningen i Faktorer ligesaa godt kunne ordne efter a eller b som efter x.

4.

Der gives ingen andre Kurver end Keglesnittene, hvis Skjæringspunkter med en vilkaarlig ret Linie man kan bestemme ved Passer og Lineal.

Lad Ligningen for Kurven være

$$f(x\,y) = 0, \tag{1}$$

medens Ligningen for den rette Linie er

$$y = \alpha x + q, \tag{2}$$

hvor α og q, ifølge den givne Betingelse, ere uafhængige af de i Kurvens Ligning forekommende Konstanter. Abscisserne til Skjæringspunkterne bestemmes ved

$$f(x, \alpha x + q) = 0, \tag{3}$$

der maa være en irreduktibel Ligning, dersom den givne Kurve ikke er sammensat; havde man nemlig

$$f(x, \alpha x + q) = \varphi(x, \alpha, q) . \varphi_1(x, \alpha, q),$$

vilde man, ved i denne identiske Ligning at sætte $\alpha = 0$ og $q = y$, faa

$$f(x, y) = \varphi(x, y) . \varphi_1(x, y),$$

saa at den givne Kurve maatte være sammensat af de to

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ og } \varphi_1(x, y) = 0.$$

Dersom nu et af Skjæringspunkterne for den givne Kurve og den rette Linie kan bestemmes ved Passer og Lineal, maa, som vi have bevist, Ligningen

$$f(x, \alpha x + q) = 0$$

kunne løses ved Kvadratrod, og altsaa, da den er irreduktibel, være af Graden 2^p. En af Rødderne kan da udtrykkes ved p Rodstørrelser, og idet disse alle tages med dobbelt Fortegn, faas alle Rødderne. Omvendt vide vi, at Ligningen kan dannes ved at gaa ud fra Udtrykket for en af Rødderne og efterhaanden bortskaffe alle Rodtegnene, et ad Gangen. Vi ville antage, at vi saaledes have bortskaffet alle Rodtegnene paa eet nær, og altsaa ere komne til en Ligning af Graden 2^{p-1}, der i sine Koefficienter kun indeholder denne ene Rodstørrelse $\sqrt{A}$, og som, naar denne tages med begge sine Værdier, giver alle Rødderne i den oprindelige Ligning, svarende til de 2^p Skjæringspunkter for Kurven og den rette Linie. Idet vi samle alle de Led, der indeholde $\sqrt{A}$, paa den ene Side af Lighedstegnet, kan Ligningen skrives

$$\sqrt{A}\,(a_1 x^{2^{p-1}} + a_2 x^{2^{p-1}-1} + \ldots.) = b_1 x^{2^{p-1}} + b_2 x^{2^{p-1}-1} + \ldots., \qquad (4)$$

hvor A, a_1, $a_2 \ldots b_1$, $b_2 \ldots$ ere hele rationale Funktioner af α og q og de i $f(x, y)$ forekommende bekjendte Størrelser.

Dersom nu A indeholder baade α og q, maa der til ethvert givet α existere mindst een Værdi af q, der gjør A til Nul; for en saadan speciel Stilling af den rette Linie falde Skjæringspunkterne sammen to og to, idet Skjæringspunkterne med den vilkaarlige Linie kunne ordnes parvis, saa at to sammenhørende kun ere forskjellige ved Fortegnet for $\sqrt{A}$. At to Skjæringspunkter falde sammen kan ske ved, at Linien fra Skjæring gaar over til Røring, eller ved, at den gaar gjennem et Dobbeltpunkt af Kurven. Dette kan finde Sted for en Linie i enhver Retning, naar Kurven kun har to Skjæringspunkter med en vilkaarlig ret Linie, men kun i enkelte bestemte Retninger, dersom den har flere. Kurven maa altsaa være et Keglesnit.

Dersom A kun indeholder q, maa der altid være en Værdi af q, der gjør A til Nul; deraf følger, at alle Linier gjennem et vist Punkt af Ordinataxen skjære Kurven i Punkter, der falde sammen to og to; dette er meningsløst, da Ordinataxen kan vælges vilkaarligt.

Dersom A kun indeholder α, maa der være en Værdi af α, der gjør A til Nul, saa at alle Linier i en vis Retning skjære Kurven i to og to sammenfaldende Punkter; dette er ligeledes meningsløst.

Dersom endelig A ikke indeholder α eller q, bliver den en bekjendt Størrelse, og $\sqrt{A}$ hører ikke til de Rodstørrelser, der skulle bortskaffes.

Endnu maa vi betragte det Tilfælde, da $A = 0$ gjør x ubestemt, det vil sige, hvor den Værdi, der gjør A til Nul, ogsaa gjør alle Koefficienterne paa højre Side af Ligheds-tegnet b_1, b_2 ... til Nul. Vi multiplicere da paa begge Sider med $\sqrt{A}$ og faa

$$A\,(a_1\,x^{2^{p-1}} + a_2\,x^{2^{p-1}-1} + \ldots) = \sqrt{A}\,(b_1\,x^{2^{p-1}} + b_2\,x^{2^{p-1}-1} \ldots).$$

$A, b_1, b_2 \ldots$ tænkes ordnede efter Potenser af q. Nu maa alle de Værdier af q, der gjøre A til Nul, ogsaa gjøre $b_1, b_2 \ldots$ til Nul, thi dersom der var en Værdi af q, om hvilken dette ikke gjaldt, kunde man have benyttet den, og ført Beviset som før; men naar alle de Værdier, der gjøre A til Nul, ogsaa gjøre $b_1, b_2 \ldots$ til Nul, maa A gaa op i disse Størrelser, og kan altsaa divideres bort, hvorpaa Beviset bliver som ovenfor. Sætningen er saaledes bevist for alle Tilfælde.

Vi have taget det som umiddelbart indlysende, at der ikke er andre Kurver end Keglesnittene, hvis Skjæringspunkter med uendelig mange rette Linier kunne falde sammen to og to. For Fuldstændigheds Skyld ville vi give et Bevis herfor:

Ingen usammensat, algebraisk Kurve kan have uendelig mange Dobbeltpunkter.

Gjennem et vilkaarlig valgt Punkt trække vi en ret Linie $y - b = \alpha\,(x - a)$ og danne den Ligning, der bestemmer dennes Skjæringspunkter med Kurven; Betingelsen for, at denne Ligning har lige Rødder, er en algebraisk Ligning, der bestemmer de Værdier af α, for hvilke den rette Linie indeholder et Dobbeltpunkt; da enhver saadan ret Linie kun kan gaa gjennem et endeligt Antal Dobbeltpunkter, maatte der til uendelig mange saadanne svare uendelig mange Værdier af α, saa at Ligningen i α maatte være identisk. Ligningen i x havde da i Almindelighed lige Rødder, den var følgelig reduktibel, og den givne Kurve sammensat (se ovenfor).

Ingen usammensat, algebraisk Kurve kan have uendelig mange Dobbelttangenter.

Denne Sætning følger af den forrige, ifølge Theorien om Poler og Polarer.

Af disse to Sætninger følger atter, at ingen anden Kurve end et Keglesnit kan skjæres af uendelig mange rette Linier i Punkter, der falde sammen to og to, da dette maatte medføre, at Kurven havde uendelig mange Dobbeltpunkter eller uendelig mange Dobbelttangenter.

5.

For det Følgendes Skyld skulle vi udtrykke Sætningen paa en anden Maade:

Naar en Ligning af første Grad med to Ubekjendte og vilkaarlige Koefficienter

$$ax + by = c \tag{5}$$

i Forbindelse med en anden irreduktibel Ligning, hvis Koefficienter ere uafhængige af de forrige

$$f(x, y) = 0 \tag{6}$$

skal kunne løses ved Kvadratrod, er den mest almindelige Form for denne

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (7)$$

Ved Hjælp heraf kunne vi, ved at tillægge x og y forskjellige Betydninger, udlede en Mængde ny Sætninger af den ovenfor fundne.

6.

Der gives ingen andre Kurver end Keglesnittene, til hvilke man ved Passer og Lineal kan trække Tangenter fra et vilkaarligt Punkt.

Vi kunne nemlig udtrykke det, at en Linie er Tangent til en Kurve, ved en Ligning mellem Koefficienterne i den rette Linies Ligning; lade vi f. Ex. $\frac{1}{x}$ og $\frac{1}{y}$ betyde de Stykker, Linien afskjærer af Axerne, vil som bekjendt (5) udtrykke, at Linien gaar gjennem et givet Punkt, medens (7) udtrykker, at den er Tangent til et givet Keglesnit. Sætningen følger saaledes af den almindelige, da x og y maa kunne udtrykkes ved Kvadratrod, dersom Tangenten skal kunne trækkes ved Passer og Lineal.

7

At bestemme de Kurver, hvis Skjæringspunkter med en vilkaarlig Cirkel gjennem et givet Punkt kunne findes ved Passer og Lineal.

Tage vi det givne Punkt til Begyndelsespunkt, have vi Ligningen for Cirklen derigjennem

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0. \quad (8)$$

Sætte vi heri

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = u; \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = v, \quad (9)$$

bliver Ligningen til

$$au + bv + 1 = 0. \quad (10)$$

Da denne er den almindelige Ligning af første Grad, og u og v kunne udtrykkes ved Kvadratrod samtidig med x og y, maa den anden Ligning være

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0 \quad (11)$$

eller

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + (Dx + Ey)(x^2 + y^2) + F(x^2 + y^2)^2 = 0, \quad (12)$$

en Kurve af fjerde Orden, der har et Dobbeltpunkt i det givne Punkt, og som desuden skjæres af enhver Cirkel i to uendelig fjerne, imaginære Dobbeltpunkter.

Vi se let den geometriske Betydning af den anvendte Substitution, og hvorledes denne tillige giver os Opgavens Løsning. Betragte vi u og v som Koordinater til et Punkt, vise de to Ligninger

$$\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \text{ og } (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = 1$$

at Punktet (u, v) ligger i Radius vektor til Punktet (x, y), og at Produktet af de to Radii vektores er konstant; medens (x, y) gjennemløber en Cirkel gjennem Begyndelsespunktet, gjennemløber (u, v) en ret Linie, og medens (x, y) gjennemløber den ved (12) be-

stemte Kurve af fjerde Orden, beskriver (u, v) et Keglesnit; den stillede Opgave er da reduceret til Bestemmelsen af Skjæringspunkterne af dette med den rette Linie; ved Hjælp af disse Punkter bestemmes da let de søgte.

I Almindelighed vil den her anvendte Transformation ofte lette Løsningen af geometriske Opgaver, idet man derved faar indført en ret Linie i Opgaven i Stedet for en Cirkel gjennem et givet Punkt. Betegne vi den givne Kurve ved A, den transformerede ved B, ser man let Rigtigheden af følgende Sætninger (Se Forf. Meth. og Theor. til Løsning af geom. Konstruktionsopg.):

Naar A er en ret Linie, er B en Cirkel gjennem det givne Punkt.

Naar A er en Cirkel gjennem det givne Punkt, er B en ret Linie.

Naar A er en Cirkel, der ikke gaar gjennem det givne Punkt, er B en dermed ligedan beliggende Cirkel, idet det givne Punkt er Fællespunkt.

Naar to Kurver A have et Skjæringspunkt, have Kurverne B ogsaa et Skjæringspunkt i det tilsvarende Punkt.

Naar to Kurver A have Røring, have Kurverne B ogsaa Røring i det tilsvarende Punkt.

Som Anvendelser heraf ville vi nævne Følgende:

Konstruktionen af en Cirkel, der gaar gjennem et givet Punkt og rører to givne Cirkler, reduceres til Konstruktionen af den fælles Tangent til to Cirkler; man gjør bedst i at vælge det konstante Produkt saaledes, at den ene Cirkel bliver sin egen transformerede Kurve.

Konstruktionen af en Cirkel, der rører tre givne Cirkler, der gaa gjennem samme Punkt, reduceres til Konstruktionen af en Cirkel, der rører tre givne rette Linier.

Konstruktionen af en Cirkel, der rører tre givne Cirkler, reduceres til Konstruktion af en Cirkel, der rører en given Cirkel og to givne rette Linier, dersom to af Cirklerne have et Punkt fælles.

8.

At bestemme de Kurver, hvis Skjæringspunkter med en vilkaarlig Cirkel, der har sit Centrum paa en given Linie, kunne findes ved Passer og Lineal.

Idet den givne Linie tages til Abscisseaxe, bliver Cirklens Ligning

$$x^2 + y^2 + ax + b = 0, \tag{13}$$

der ved Substitutionen

$$u = x^2 + y^2 \tag{14}$$

antager den almindelige Form

$$u + ax + b = 0. \tag{15}$$

Den søgte Ligning har da Formen

$$Au^2 + (Bx + E)\,u + Cx^2 + Dx + F = 0 \tag{16}$$

eller

$$A\,(x^2 + y^2)^2 + (Bx + E)\,(x^2 + y^2) + Cx^2 + Dx + F = 0, \tag{17}$$

som er en Kurve af fjerde Orden, der deles symmetrisk af den givne Linie.

Under denne Form synes en vilkaarlig Cirkel ikke at være indbefattet, hvilket den dog selvfølgelig maa være; ved en nærmere Betragtning se vi ogsaa dette Tilfælde komme frem, idet Kurven kan dele sig i to Cirkler, der ligge symmetrisk med Hensyn til den givne Linie; omvendt, have vi Ligningerne for to saadanne Cirkler

$$x^2 + y^2 + ax + b + cy = 0$$

og

$$x^2 + y^2 + ax + b - cy = 0,$$

kunne de sammentrækkes til den ene

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(ax + b)(x^2 + y^2) + a^2x^2 + 2abx + b^2 - c^2y^2 = 0$$

eller

$$(x^2 + y^2)^2 + (2ax + 2b - c^2)(x^2 + y^2) + (a^2 + c^2)x^2 + 2abx + b^2 = 0,$$

der falder ind under den angivne Form.

Den her anvendte Substitution svarer ogsaa til Indførelsen af en Hjælpekurve, nemlig den, som gjennemløbes af Punktet (u, x); til ethvert Punkt i den oprindelige Kurve svarer heri et nyt, der har samme Abscisse, men hvis Ordinat er tredie Proportional til en vilkaarlig, konstant Linie og det oprindelige Punkts Afstand fra Begyndelsespunktet.

Til en Kurve, hvis Ligning falder ind under (17), svarer da et Keglesnit, til en Cirkel med Centrum i den givne Linie en ret Linie, medens en Cirkel med Centrum udenfor den givne Linie giver en Del af et Keglesnit, hvis øvrige Del svarer til den, med den givne, symmetrisk liggende Cirkel.

Som Anvendelse heraf ville vi løse følgende Opgave:

Paa to givne Cirkelperiferier at lægge en ret Linie af given Længde, saaledes at den skjærer den ene af Cirkelperiferierne i Centerlinien.

Vi tage dette Skjæringspunkt til Begyndelsespunkt, Centerlinien til Abscisseaxe; lad O være Begyndelsespunktet, A Liniens andet Punkt paa den samme Cirkel, r dennes Radius, B det Punkt af Linien, der falder paa den anden Cirkel og $AB = a$; dersom vi af Opgaven borttage den Betingelse, at B skal falde paa den anden Cirkel, faar B et geometrisk Sted, og Opgavens Løsning bestaar da i Bestemmelsen af dettes Skjæringspunkt med den anden Cirkel; da denne blot skal have sit Centrum paa en given Linie, men forresten er vilkaarlig, kan Opgaven kun løses ved Passer og Lineal, dersom Stedet for B faar en Ligning, der er indbefattet i (17). Dette er her Tilfældet, idet Ligningen let findes at være

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Vi bruge da den angivne Substitution, eller for Homogeneitetens Skyld

$$x^2 + y^2 = 2ur,$$

saa at Ligningen for Hjælpekeglesnittet er

$$2r(u - x)^2 = a^2u.$$

Den anden Cirkel

$$x^2 + y^2 + ax + b = 0$$

giver den rette Linie

$$2ru + ax + b = 0.$$

Naar Skjæringspunkterne for Hjælpekurverne ere bestemte ved en af de sædvanlige Konstruktioner, findes de søgte Punkter let, da de ligge paa den anden Cirkel og have samme Abscisse som de først fundne Punkter.

9.

At bestemme de Kurver, hvis Skjæringspunkter med et vilkaarligt Keglesnit, med Axerne paa givne Linier, man kan bestemme ved Passer og Lineal.

Vi tage de givne Linier til Koordinataxer; Keglesnittets Ligning er da

$$ax^2 + by^2 = c, \tag{18}$$

der ved Substitutionen

$$x^2 = u;\ y^2 = v \tag{19}$$

bliver

$$au + bv = c. \tag{20}$$

Den søgte Ligning er altsaa

$$Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^4 + Dx^2 + Ey^2 + F = 0, \tag{21}$$

der svarer til alle Kurver af fjerde Orden, som have Centrum og Symmetriaxer fælles med Ellipserne.

10.

At bestemme den mest almindelige Form for en Ligning, i hvilken to af Koefficienterne ere vilkaarlige og uafhængige af de andre, og som skal kunne løses ved Kvadratrod.

Ligningen har Formen

$$ax^n + bx^p + \varphi(x) = 0, \tag{22}$$

hvor φ ikke indeholder a eller b. Sætte vi

$$\frac{x^n}{\varphi(x)} = u;\ \frac{x^p}{\varphi(x)} = v, \tag{23}$$

faa vi

$$au + bv + 1 = 0, \tag{24}$$

der i Forbindelse med den Ligning mellem u og v, der faas ved Elimination af x mellem de to Ligninger (23), skal kunne løses ved Kvadratrod. Denne Ligning maa da være af højst anden Grad, og u og v udtrykkes da begge ved en og samme Kvadratrod; vi kunne da sætte

$$u = A + B\sqrt{C};\ v = A_1 + B_1\sqrt{C}. \tag{25}$$

Nu give de to Ligninger (23)

$$x^{n-p} = \frac{u}{v} = A_2 + B_2\sqrt{C}, \tag{26}$$

der viser, at n—p maa være en Potens af 2, dersom x skal kunne udtrykkes ved Kvadratrod, og at n—p maa være Ligningens halve Grad, da x^{n-p} har to Værdier. Bortskaffe vi Rodtegnet af (26), komme vi til den søgte Form

$$x^{2^r} + ax^{2^{r-1}} + b = 0. \tag{27}$$

Mere almindelig kunde den givne Ligning have Formen

$$a\varphi(x) + b\Psi(x) + 1 = 0, \tag{28}$$

hvor $\varphi(x)$ og $\Psi(x)$ ikke indeholde de vilkaarlige Størrelser a og b. Sætte vi

$$\varphi(x) = u;\ \Psi(x) = v, \tag{29}$$

maa Elimination af x føre til en Ligning af Formen

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0,$$

saa at u og v udtrykkes ved een Kvadratrod; naar disse ere fundne, maa endvidere x kunne findes af (29) ved Kvadratrod.

Dersom de to vilkaarlige Størrelser a og b forekomme i Koefficienterne i

$$f(x, a, b) = 0, \tag{30}$$

saaledes at

$$\frac{df}{da} = x\frac{df}{db}, \tag{31}$$

maa (30) være af højst anden Grad, for at kunne løses ved Kvadratrod. (31) er nemlig Betingelsen for, at (30) kan gives Formen

$$f(x, ax + b) = 0, \tag{32}$$

der ved Substitutionen

$$y = ax + b$$

bliver

$$f(x, y) = 0,$$

hvorved Sætningen følger af 5.

11.

Der gives ingen andre Kurver end Cirklen og den rette Linie, hvis Skjæringspunkter med en vilkaarlig Cirkel man kan bestemme ved Passer og Lineal.

Da enhver ret Linie kan betragtes som en Cirkel med uendeligt fjernt Centrum, maa Skjæringspunkterne med alle rette Linier kunne bestemmes, dersom de kunne bestemmes med alle Cirkler; det gjælder altsaa blot om at finde, i hvilke specielle Tilfælde et Keglesnits Skjæringspunkter med en vilkaarlig Cirkel kunne bestemmes, og her kan atter Parametren betragtes som fuldkommen vilkaarlig (blot ikke Nul), da man ved Ligedannethedsmethoden altid kan bringe den til at have en hvilkensomhelst given Størrelse. Endvidere, dersom man kan bestemme Skjæringspunkterne med alle Cirkler, kan man ogsaa bestemme dem med visse vilkaarlig valgte Cirkler, og vi kunne derfor nøjes med at undersøge de to Kurver

$$y^2 = px + qx^2$$

og

$$y^2 + x^2 = px + by,$$

hvor p og b ere ganske vilkaarlige.

Det ene Skjæringspunkt er Begyndelsespunktet, de andre bestemmes ved Ligningen

$$(q+1)^2 x^3 - b^2 qx - b^2 p = 0,$$

der viser, at Skjæringspunkterne kunne bestemmes for $q = -1$ og for $p = 0$, altsaa naar Keglesnittet er en Cirkel eller et System af rette Linier. I alle andre Tilfælde er Ligningen den almindelige Ligning af tredie Grad, og kan ikke løses ved Kvadratrod; man kan nemlig for et opgivet q altid vælge b og p saaledes, at Ligningens Koefficienter blive hvilkesomhelst opgivne Størrelser m og n, idet man sætter

$$\frac{-b^2 q}{(1+q)^2} = m; \quad \frac{-b^2 p}{(1+q)^2} = n,$$

eller

$$b^2 = \frac{-m(1+q)^2}{q}; \quad p = \frac{nq}{m}.$$

Dersom altsaa Ligningen kunde løses ved Kvadratrod, vilde man derved kunne finde en Løsning ved Kvadratrod for den almindelige Ligning af tredie Grad

$$x^3 + mx + n = 0,$$

idet man i Løsningen blot havde at indsætte Værdierne for b og p. Det er forudsat, at q er rational eller kun irrational ved Kvadratrod, det vil sige, at Keglesnittet er et saadant, hvis bestemmende Stykker kunne konstrueres af visse opgivne Størrelser ved Passer og Lineal; denne Forudsætning er tilladelig, da man kunde bestemme saa mange Punkter, som man ønskede, hvis man kunde bestemme Skjæringspunkterne med en vilkaarlig Cirkel.

Det vundne Resultat kan ogsaa udtrykkes saaledes:

Naar en Ligning

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \tag{33}$$

hvor a, b og c ere vilkaarlige, i Forbindelse med en anden irreduktibel Ligning

$$f(x,y) = 0, \tag{34}$$

hvis Koefficienter ere uafhængige af a, b og c, skal kunne løses ved Kvadratrod, er den mest almindelige Form for denne Ligning

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0. \tag{35}$$

Ved her at tillægge x og y forskjellige Betydninger, vil man atter heraf kunne udlede en Mængde ny Sætninger, men vi skulle kun opholde os ved at udvikle dette nærmere for et enkelt Tilfælde.

12.

Lad Ligningen for en ret Linie være

$$ax + by = 1,$$

hvor der mellem Koefficienterne er en Ligning af anden Grad; dersom denne er den

almindelige, genererer den rette Linie et Keglesnit, der er fuldstændig ubestemt. Den Opgave at trække en fælles Tangent til et saadant og en anden given Kurve, kan kun løses, naar denne reduceres til et Punkt; derimod kan man vel finde Systemer af Keglesnit, der opfylde visse Betingelser, og hvor man kan trække de fælles Tangenter til et vilkaarligt Keglesnit i Systemet og en vis anden Kurve. Er saaledes Ligningen mellem a og b

$$a^2 + b^2 + Aa + Bb + C = 0,$$

maa den anden Ligning (se 11), forsaavidt den er irreduktibel, være af samme Form, men denne Form udtrykker som bekjendt, at det af den rette Linie genererede Keglesnit har et Brændpunkt i Begyndelsespunktet, altsaa: Dersom man skal kunne trække en fælles Tangent til et vilkaarligt Keglesnit med et Brændpunkt i et givet Punkt og en anden Kurve, maa denne være et Keglesnit med et Brændpunkt i det samme Punkt. Ved Transformationen reduceres Opgaven til Bestemmelse af Skjæringspunkterne for to Cirkler (Keglesnittenes Fodpunktkurver med Hensyn til Brændpunktet).

13.

Medens vi i den oprindelige Opgave betragtede den rette Linie som fuldstændig vilkaarlig, saa at dens Ligning indeholdt to Størrelser, der kunde tillægges vilkaarlige Værdier, ville vi nu betragte det Tilfælde, at den kun indeholder een saadan Størrelse, og der da navnlig søge Betingelsen for, at man ved Passer og Lineal kan bestemme en Kurves Skjæringspunkter med alle Linier gjennem et vist givet Punkt, som vi antage ikke hører med til Kurven. Tage vi det givne Punkt til Begyndelsespunkt, bliver den rette Linies Ligning

$$y = \alpha x,$$

hvor α er vilkaarlig, medens Ligningen for Kurven er

$$f(x, y) = 0,$$

hvis Koefficienter ere uafhængige af α, og som ikke tør tilfredsstilles af $x = 0$, $y = 0$. Til Bestemmelse af x faa vi da

$$f(x, \alpha x) = 0,$$

der maa være irreduktibel, dersom den givne Kurve er usammensat. Havde man nemlig

$$f(x, \alpha x) = \varphi(\alpha, x) \cdot \varphi_1(\alpha, x),$$

fik man, ved for α at sætte $\frac{y}{x}$,

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}, x\right) \cdot \varphi_1\left(\frac{y}{x}, x\right).$$

Kurvens Orden maa da være en Potens af 2, f. Ex. 2^p, og x maa kunne skrives med p Kvadratrodsstørrelser.

Gives α en Værdi, for hvilken en af de inderste Kvadratrødder bliver Nul, falde de 2^p Skjæringspunkter sammen 2 og 2, og det givne Punkt maa altsaa ligge paa

en Linie, der skjærer Kurven i to og to sammenfaldende Punkter (Røringspunkter eller Dobbeltpunkter). Vi se endvidere, at, dersom der er flere saadanne Værdier af α, eller dersom der er flere forskjellige Kvadratrodstegn, hvorunder der ikke atter staar Kvadratrodstegn, maa Punktet være Skjæringspunkt for flere saadanne Linier; vi tør naturligvis ikke deraf slutte, at Opgaven kan løses, dersom Punktet har en saadan Beliggenhed.

Dersom Punktet ligger paa Kurven, bliver den Ligning, der bestemmer Skjæringspunkterne, n Grader lavere end Kurvens Orden, dersom det er et $n$dobbelt Punkt, og Kurvens Orden maa da være $2^p + n$; dersom nu Punktet ikke tillige ligger i en Linie, hvis øvrige Skjæringspunkter med Kurven falde sammen to og to, ser man som før, at $p = 1$.

Der gives altsaa ingen andre Kurver end Keglesnittene, for hvilke man ved Passer og Lineal kan bestemme Skjæringspunkterne med en vilkaarlig Linie gjennem et bekjendt Punkt, der ikke ligger paa Kurven eller paa en Linie, hvis Skjæringspunkter med denne falde sammen to og to.

14.

Paa samme Maade behandles den mere almindelige Opgave, hvor man i Stedet for Straalebundtet betragter et System af rette Linier, der varierer efter en vis given Lov; vi kunne fremstille Systemet ved Ligningen

$$y = x\,\varphi(\alpha) + \Psi(\alpha),$$

hvor de forskjellige rette Linier svare til forskjellige Værdier af α. Linierne indhylles af en vis Kurve, og vi kunne ved Passer og Lineal konstruere saamange Tangenter til den, som vi ville, idet vi gaa ud fra vilkaarlig valgte Værdier af α.

Skjæringspunkterne for en vilkaarlig af disse Linier og en given Kurve kunne i Almindelighed kun bestemmes, naar denne er et Keglesnit; dersom den ikke er et Keglesnit, maa den være af Ordnen 2^p, og i det givne System af rette Linier maa der være mindst een, der skjærer Kurven i Punkter, der falde sammen to og to. Undtages maa endvidere det Tilfælde, da den givne Kurve selv er den rette Linies Envelop. I dette Tilfælde faar den Ligning, der bestemmer Skjæringspunkterne, et Par lige Rødder og kan altsaa gjøres to Grader lavere. Paa den derved reducerede Ligning kunne da de samme Betragtninger anvendes.

15.

Medens man ikke fra et vilkaarligt Punkt kan trække Tangenter til andre Kurver end Keglesnittene, er det undertiden muligt at løse Opgaven for andre Kurver, naar Punktet ikke tages fuldstændig vilkaarligt, men tænkes beliggende paa en vis given Kurve. Er dennes Ligning

$$b = \varphi(a),$$

bliver Ligningen for en Linie gjennem et af dens Punkter

$$y = \alpha x + q,$$

hvor

$$q = \varphi(a) - \alpha a.$$

At denne Linie er Tangent til en given Kurve, udtrykkes ved en Ligning mellem α og q

$$f(\alpha, q) = 0,$$

saa at Tangenterne bestemmes ved

$$f(\alpha, \varphi(a) - \alpha a) = 0,$$

der skal kunne løses ved Kvadratrod for alle Værdier af a, dersom Opgaven skal kunne løses ved Passer og Lineal; der maa da være mindst een Værdi af a, som gjør venstre Side af denne Ligning til et Kvadrat, det vil sige, at der i Kurven $b = \varphi(a)$ maa være mindst eet Punkt, for hvilket alle Tangenterne falde sammen to og to.

Der gives altsaa ingen andre Kurver end Keglesnittene, til hvilke man ved Passer og Lineal kan trække Tangenter fra alle Punkter i en anden given Kurve, medmindre denne indeholder mindst eet Punkt, for hvilket alle Tangenterne falde sammen to og to.

Som specielle Tilfælde af Sætningerne i 14 og 15 faa vi:

Der gives ingen andre Kurver, hvis Skjæringspunkter med en vilkaarlig Linie i given Retning vi kunne bestemme ved Passer og Lineal, end Keglesnittene og saadanne Kurver af Ordnen 2^p, der skjæres af en vis Linie i den givne Retning i Punkter, der falde sammen to og to.

Undtages maa en saadan Retning, i hvilken Kurven har et uendelig fjernt Punkt.

Der gives ingen andre Kurver, til hvilke man ved Passer og Lineal kan trække Tangenter i en vilkaarlig, given Retning, end Keglesnittene og saadanne Kurver af Klassen 2^p, for hvilke alle Tangenterne i en vis Retning falde sammen to og to.

Undtages maa en saadan Kurve, til hvilken der i enhver Retning kan trækkes en uendelig fjern Tangent.

Vi skulle endnu erindre om, at de angivne Betingelser for Kurver af højere end anden Orden ere nødvendige, men ikke tilstrækkelige. De geometriske Betingelser falde sammen med den tidligere (Pag. 21) angivne Betingelse for, at en Ligning kan løses ved Kvadratrod, idet denne netop forudsætter, at Ligningen kan skrives under Formen

$$A^2 = \alpha B$$

og altsaa, for $\alpha = 0$, faar Rødder, der to og to ere lige store.

II. Almindelig Methode. Geometriske Steder.

1.

Naar en Figur skal bestemmes ved geometrisk Konstruktion, og Opgaven er bestemt, maa der være givet et Antal Betingelser, som Figuren skal tilfredsstille, der netop svarer til Antallet af ubekjendte Størrelser. Borttage vi en af de givne Betingelser, bliver Opgaven ubestemt, idet der da bliver et uendelig stort Antal Løsninger, men disse danne et System, hvor enhver er uendelig lidt forskjellig fra den foregaaende. Betragte vi alle de Stillinger, som et mærkeligt Punkt i Figuren kunne indtage, ville de i Almindelighed danne en vis Kurve, Punktets geometriske Sted, ligesom enhver ret eller krum Linie i Figuren i alle sine Stillinger vil røre en vis Kurve, Enveloppen, som vi kunne kalde Liniens geometriske Sted. Den Methode, man i Almindelighed følger ved Løsningen af en Konstruktionsopgave, bestaar derfor i, at man efterhaanden tænker sig en af de til Figuren stillede Betingelser borte og søger de geometriske Steder for Figurens mærkelige Punkter eller Linier, for at benytte disse til Bestemmelsen, forsaavidt de ere anvendelige ved Konstruktion med Passer og Lineal.

Dersom det nu er givet, at et vist Punkt P skal falde i en vis Linie L, der strax kan afsættes, og hvis Beliggenhed i Forhold til de andre givne Stykker er vilkaarlig, er L selv det ene geometriske Sted. Dersom nu den Betingelse, at P skal falde i L, borttages, faar P et geometrisk Sted, og dettes Skjæringspunkter med L ere de søgte Punkter; dersom man, efter at L er borttaget, kan konstruere saa mange Punkter P, som man vil, faa vi følgende almindelige Methode:

Man finder to Punkter P, og en ret Linie gjennem disse kan da skjære L i det søgte Punkt; findes det søgte Punkt ikke paa denne Maade, søger man endnu et Punkt og lægger en Cirkel gjennem de tre Punkter; dersom de Punkter, hvori denne skjærer L, ikke ere de søgte, søges endnu to Punkter P, og man bestemmer Skjæringspunkterne for L og det ved de 5 Punkter bestemte Keglesnit; dersom disse Punkter ikke ere de søgte, kan Opgaven ikke løses ved Passer og Lineal.

Rigtigheden heraf følger let af Sætningen i 4. Da L er vilkaarlig og ikke anvendes ved Konstruktionen af Punkterne P, maa det geometriske Sted for disse, efter hvad vi der have bevist, være et Keglesnit, for at Opgaven skal kunne løses ved Passer og Lineal.

2.

Dersom vi borttage af Opgaven den Betingelse, at L skal gaa gjennem P, og da kunne finde saa mange Linier L, som vi ville, der tilfredsstille de øvrige Betingelser, uden at vi ved Konstruktionen benytte Punktet P, hvis Beliggenhed tænkes uafhængig af de andre givne Stykker, komme vi til en lignende Methode. Linien L indhylles nemlig af en vis Kurve, og den søgte Linie bliver Tangenten fra P til denne Kurve, som altsaa maa

være et Keglesnit, for at Opgaven skal kunne løses ved Passer og Lineal. Da et saadant er bestemt ved 5 Tangenter, vil altsaa ogsaa i dette Tilfælde 5 Forsøg være tilstrækkelige til at give os Løsningen eller vise dens Umulighed.

3.

De to Methoder reducere Opgaverne til følgende to:

At bestemme Skjæringspunkterne for en given ret Linie og et Keglesnit, der er givet ved 5 af sine Punkter.

At trække en Tangent fra et givet Punkt til et Keglesnit, der er bestemt ved 5 af sine Tangenter.

Af disse to Opgaver reduceres den ene til den anden ifølge Sætningerne om reciproke Polarer, og begge reduceres de ved Pascals og Brianchons Theoremer let til følgende Opgave:

I en given Trekant at indskrive en anden, hvis Sider indeholde hver sit givne Punkt.

Lad den givne Trekant være ABC, den søgte abc, idet a falder i BC, b i AC, c i AB, medens de givne Punkter ere α i bc, β i ac, γ i ab.

Søge vi at tegne den indskrevne Trekant, idet vi i Stedet for det ubekjendte Punkt b begynde med et vilkaarligt Punkt i AC med Abscissen x_1 (Begyndelsespunktet ubestemt), komme vi, naar vi ikke tilfældigvis have valgt det rigtige Punkt b, tilbage til et andet Punkt i AC med Abscissen x_2. Til et Punkt x_1 svarer kun eet Punkt x_2 og omvendt, saa at der mellem disse maa gives en Ligning af Formen

$$x_1 x_2 - kx_1 - lx_2 + d = 0,$$

det vil sige, de to Systemer x_1 og x_2 ere projectiviske (homografiske). $x_1 = \infty$ giver $x_2 = k$, og $x_2 = \infty$ giver $x_1 = l$, saa at k og l blive de Punkter, der svare til de uendelig fjerne Punkter, og derved let bestemmes. Vælges det hidtil ubestemte Begyndelsespunkt midt imellem disse, bliver $l = -k$, og Ligningen altsaa

$$x_1 x_2 - kx_1 + kx_2 + d = 0.$$

Betegne vi det til $x_1 = 0$ svarende x_2 ved m, bliver Ligningen

$$x_1 x_2 + k(x_2 - x_1) - km = 0.$$

For det søgte Punkt b er $x_1 = x_2$, saa at det bestemmes ved

$$x^2 = km,$$

der viser, at man kun har at afsætte Mellemproportionalen mellem k og m til begge Sider fra Begyndelsespunktet, for at faa de to Løsninger, der altid blive reelle, naar k og m faa samme Fortegn.

4.

Dersom Opgaven fordrer, at et vist Punkt P skal falde paa en given Cirkelperiferi S, hvis Centrum og Radius ere vilkaarlige og uafhængige af de andre givne Størrelser,

have vi set, at det geometriske Sted, som P faar, naar vi borttage den Betingelse, at det skal falde paa S, maa være en ret Linie eller en Cirkel, for at Opgaven skal kunne løses ved Passer og Lineal; ved saadanne Opgaver ville altsaa højst tre Forsøg være tilstrækkelige til at bestemme Punktet P eller vise, at Opgaven er umulig.

5.

Exempler paa Opgaver, som løses ved to Forsøg.

1) I en given Trekant at indskrive et Kvadrat.

Vi kunne her borttage den Betingelse, at Kvadratets ene Vinkelspids skal falde i Trekantens ene Side. Vi faa da et System af Kvadrater, der ere ligedan beliggende, saa at ethvert Punkts geometriske Sted er en ret Linie. Systemet har et uendelig lille Kvadrat, der falder i Fællespunktet, saa at vi kun behøve at søge eet Punkt til, for at bestemme det søgte geometriske Sted.

2) At konstruere en Trekant, ligedannet med en given, hvis ene Vinkelspids falder i et givet Punkt, medens den anden falder paa en given ret Linie, og den tredie paa en given ret Linie eller Cirkelperiferi.

Vi borttage den sidste Betingelse, hvorved det geometriske Sted for den tredie Vinkelspids bliver en ret Linie, som bestemmes ved to Forsøg.

3) At trække en ret Linie, hvoraf 4 givne rette Linier afskjære Stykker, der staa i givne Forhold til hverandre. (Newton.)

Vi borttage den ene givne rette Linie og gjøre to Forsøg.

4) I en given Firkant at indskrive en anden, ligedannet med en given. (Newton.)

Vi borttage den ene Side af den givne Firkant og tegne to Firkanter, ligedannede med den givne og med de tre Vinkelspidser paa de tre andre Sider. Det geometriske Sted for den fjerde Vinkelspids er en ret Linie, af hvilken vi da have bestemt to Punkter.

Den forrige Opgave er et specielt Tilfælde af denne.

5) At konstruere en Firkant, ligedannet med en given, og hvis Sider indeholde hver sit givne Punkt.

Borttag det ene af disse. Systemet af Firkanter er da et saadant, hvor hvert Punkt beskriver en Cirkel, og hver ret Linie gaar gjennem et fast Punkt.

Exempler paa Opgaver, som løses ved tre Forsøg.

6) At lægge en Trekant, ligedannet med en given, med den ene Vinkelspids i et givet Punkt og de to andre paa givne Cirkelperiferier.

7) At trække to Linier, naar man kjender Forholdet mellem deres Afstande fra et givet Punkt, Vinklen imellem dem, den enes Afstand fra et givet Punkt og et Punkt i den anden.

Man borttager den Betingelse, at den anden Linie skal indeholde det givne Punkt. Linien genererer da en Cirkel, der bestemmes ved tre Forsøg, som give tre af dens Tangenter.

Opgaver, der løses ved fem Forsøg (specielt 4).

8) Igjennem et givet Punkt at trække en ret Linie saaledes, at Stykkerne fra dens Skjæringspunkter med to givne Linier til givne Punkter i disse Linier staa i et givet Forhold. (Apollonius: sectio rationis.)

Man borttager den Betingelse, at den søgte Linie skal indeholde det givne Punkt.

Lad det givne Punkt være P, de givne Linier skjære hinanden i O og indeholde de givne Punkter A og B, medens de skjæres af den søgte Linie i X og Y. Borttages P, genererer XY en Parabel, og da de givne Linier samt AB selv blive Tangenter til denne, behøver man kun at afsætte to Punkter X_1 og Y_1, saa at AX_1 og BY_1 have det givne Forhold, for at have 4 Tangenter, som her ere tilstrækkelige. En Cirkel gjennem O, A og B og en gjennem O, X_1 og Y_1 skjærer hinanden i et Punkt D, der er Drejningspunkt for alle Stillinger af Linien $X_1 Y_1$. Man har altsaa $\triangle DAB \backsim \triangle DXY$, saa at $< DXP$ er bekjendt, hvorved X let findes.

Hertil reduceres alle de Opgaver, hvor Enveloppen for den rette Linie, der desuden skal gaa gjennem det vilkaarlige Punkt P, er en Parabel; Punktet D bliver dennes Brændpunkt.

9) Gjennem et givet Punkt at trække en Linie, som i Forbindelse med to givne Linier danner en Trekant med givet Areal. (Apollonius: sectio spatii.)

10) I en given Cirkel at indskrive en Trekant, hvis Sider indeholde hver et givet Punkt.

11) I en given Trekant at indskrive en anden, kongruent med en given.

12) I en given Trekant at indskrive en anden, ligedannet med en given, og hvis ene Side gaar gjennem et givet Punkt.

13) I en given Trekant ABC at indskrive en Trekant abc, saa at bc indeholder et givet Punkt, og $ca \neq AC$, $ba \neq AB$.

Opgaver, som ved Methoden vise sig ikke at kunne løses ved Passer og Lineal.

14) Gjennem et givet Punkt at trække en Linie, hvoraf to givne Linier afskjære et Stykke af given Længde.

Borttage vi den ene af de givne Linier, bliver det geometriske Sted for det Punkt, der skal falde i den, en Konchoide. Opgaven kan altsaa ikke løses, da den borttagne Linie er fuldstændig vilkaarlig.

Man kunde ogsaa borttage det givne Punkt, hvorved en ret Linie af given Længde kommer til at glide med sine Endepunkter paa to givne rette Linier; da den ikke derved genererer et Keglesnit, se vi ogsaa paa denne Maade, at Opgaven ikke kan løses ved Passer og Lineal.

Medens Opgaven ikke i Almindelighed kan løses, kan den vel løses i visse specielle Tilfælde, idet man kan bestemme Konchoidens Skjæring med rette Linier, der tilfredsstille en vis Betingelse. Tage vi den givne Linie til Abscisseaxe og lade det givne Punkt være $(0, -b)$, den givne Længde a, bliver Ligningen for Konchoiden

$$x^2 y^2 = (y + b)^2 (a^2 - y^2).$$

Dersom nu det givne Punkt har samme Afstand fra begge de givne Linier, kommer det an paa at bestemme Kurvens Skjæringspunkter med Linien

$$x \cos \alpha + (y + b) \sin \alpha + b = 0,$$

hvor kun α er vilkaarlig, det vil sige, hvor Linien er en Tangent til den Cirkel, der rører Abscisseaxen og har sit Centrum i det givne Punkt. Elimination af x giver

$$y^4 + 2y^3 b (1 + \sin \alpha) + y^2 (2b^2 (1 + \sin \alpha) - a^2 \cos^2 \alpha) - 2bya^2 \cos^2 \alpha - a^2 b^2 \cos^2 \alpha = 0.$$

Kvadratrodsuddragning viser, at Koefficienterne i Resten have til fælles Faktor

$$(1 + \sin \alpha) [b^2 + a^2 + (b^2 - a^2) \sin \alpha].$$

Ligningen kan ogsaa skrives

$$[y^2 + by (1 + \sin \alpha) + b^2 (1 + \sin \alpha)]^2 = (y + b)^2 (1 + \sin \alpha) [b^2 + a^2 + (b^2 - a^2) \sin \alpha],$$

og altsaa løses ved Kvadratrod.

15) At lægge en Trekant, kongruent med en given, med sine Vinkelspidser paa tre givne Cirkelperiferier.

Dersom Opgaven skal kunne løses ved Passer og Lineal, maa det geometriske Sted for den ene Vinkelspids af en given Trekant, der bevæger sig med sine to andre Vinkelspidser paa to givne Cirkelperiferier, være en ret Linie eller en Cirkel, men dette er ikke Tilfældet, da det, i det specielle Tilfælde, hvor Cirklerne gaa over til rette Linier, som bekjendt er et almindeligt Keglesnit.

16) Fra et givet Punkt at trække en Normal til et givet Keglesnit.

Da Opgaven falder sammen med den, at trække en Tangent til Keglesnittets Evolut, der ikke er et Keglesnit, kan den ikke løses ved Passer og Lineal.

6.

Medens vi ovenfor have benyttet vore Sætninger til at udlede Løsningen af givne Konstruktionsopgaver, kunne vi omvendt benytte dem til at bestemme geometriske Steder

ved Hjælp af Opgaver, som ad anden Vej ere løste. Vi kunne ogsaa ved Hjælp af bekjendte geometriske Steder finde ny, idet vi deraf, at et vist geometrisk Sted er et Keglesnit, kunne slutte, at en vis Opgave kan løses, og deraf atter se, at andre geometriske Steder ere Keglesnit. Keglesnittets Natur og Beliggenhed bestemmes i Almindelighed let ved mærkelige Linier og Punkter i det.

Exempel 1) I en given Trekant kan man indskrive en Trekant, ligedannet med en given, saaledes at den ene Side indeholder et givet Punkt. Heraf slutte vi:

Naar en Trekant, ligedannet med en given, bevæger sig med sine Vinkelspidser paa tre givne rette Finier, ville dens Sider generere Keglesnit.

Naar en Trekant, ligedannet med en given, bevæger sig saaledes, at den ene Side indeholder et givet Punkt, medens dens Endepunkter glide paa givne rette Linier, er det geometriske Sted for den tredie Vinkelspids et Keglesnit. Man ser, at det er en Hyperbel, hvis uendelig fjerne Punkter bestemmes ved de Stillinger af Trekanten, hvor Siden gjennem det givne Punkt er parallel med en af de givne Linier.

Naar en Trekant, ligedannet med en given, bevæger sig med Endepunkterne af en af sine Sider paa to givne rette Linier, medens en af de andre Sider indeholder et fast Punkt, vil det geometriske Sted for den tredie Vinkelspids være et Keglesnit.

2) Gjennem et givet Punkt kan man ved Passer og Lineal trække en Linie, hvoraf to givne Cirkler afskjære ligestore Korder. Deraf slutte vi:

Naar en ret Linie bevæger sig saaledes, at to givne Cirkler afskjære ligestore Korder af den, indhylles den af et Keglesnit.

3) I en given Trekant kan man indskrive en anden saaledes, at de to Sider falde i givne Retninger, og den tredie faar en given Længde. Heraf følger:

Naar en Linie af given Længde glider med sine Endepunkter paa to givne Linier, og man fra dens Endepunkter trækker Linier i givne Retninger, er det geometriske Sted for disses Skjæringspunkt et Keglesnit.

Naar en ret Linie AB med given Retning glider paa to givne rette Linier og et Punkt X bestemmes ved, at XA har en given Retning, medens XB har en given Længde, er det geometriske Sted for X et Keglesnit.

4) Fra et givet Punkt kan man trække en Linie, der af to givne Cirkelbuer afskjære ligedannede Stykker, idet disse regnes fra givne Punkter i Buerne; heraf følger:

Naar en ret Linie glider saaledes paa to Cirkelbuer, at dens Endepunkter gjennemløbe ligedannede Buer (med samme Omløbsretning), genererer den et Keglesnit.

5) Naar en Trekant er indskreven i en Cirkel, og de to Sider indeholde faste Punkter, vil den tredie generere et Keglesnit. (Opg. 10).

6) Naar en Trekant, kongruent med en given, glider med sine to Vinkelspidser paa rette Linier, beskriver den tredie et Keglesnit (Opg. 11).

7) Naar man fra et Punkt i den ene Side af en Trekant trækker Paralleler med de to andre Sider og forbinder disses Skjæringspunkter med Siderne ved en ret Linie, genererer denne et Keglesnit (Opg. 13).

8) Naar en ret Linie drejer sig om et fast Punkt og har sine Endepunkter paa to givne rette Linier, og man fra Endepunkterne af den bevægelige Linie trækker Paralleler med de givne Linier, er det geometriske Sted for deres Skjæringspunkt et Keglesnit (Opg. 13).

Noter.

Den foreliggende Afhandling maa ikke betragtes som et afsluttet Hele, men snarere som et Grundlag for en videre Udvikling; jeg haaber, at mange af Sætningerne, navnlig i anden Afdeling, ville vise sig kun at være specielle Tilfælde af andre, der have en langt større Almindelighed.

Vi have i første Afsnit kun undersøgt saadanne Ligninger af Graden 2^p, der kunne løses ved Kvadratrod, da de geometriske Undersøgelser kun give os Brug for saadanne; det er imidlertid ikke vanskeligt at udvide Ræsonnementerne til at gjælde for saadanne Ligninger af Graden p^n (p et Primtal), der kunne løses ved Rodstørrelser med Exponenten p.

De i II. fremsatte Methoder til at søge en rational Rod i en Ligning kunne ikke bruges, naar denne indeholder en Kvadratrod, $\sqrt{a}$, der betragtes som en bekjendt Størrelse; vi kunne da sætte $x = b + c\sqrt{a}$, hvorved Ligningen deler sig i to andre, hvor man da søger de rationale Rødder b og c. Er Ligningens sidste Led $B + C\sqrt{a}$, maa denne Størrelse være delelig med $b + c\sqrt{a}$, og $B^2 - aC^2$ altsaa delelig med $b^2 - ac^2$; man kan benytte dette til at bestemme b og c ved Løsning af den ubestemte Ligning

$$x^2 - ay^2 = f,$$

hvor f er en Faktor i $B^2 - aC^2$; da Ligningen imidlertid kan have uendelig mange Løsninger, naar a er positiv, kan denne Fremgangsmaade kun anvendes, naar a er negativ. Vi tænke her som i det Foregaaende navnlig paa det Tilfælde, da Koefficienterne ere Tal, da dette er det vanskeligste; ere Koefficienterne Bogstaver, har man mange Midler til at lette Undersøgelserne, men disse maa imidlertid rette sig efter de specielle Tilfælde.

Abel har som bekjendt undersøgt de Ligninger, hvor en af Rødderne kan udtrykkes som rational Funktion af en anden. Andre specielle Tilfælde ere behandlede af Galois, Hermite, Kronecker og Andre. Hesse har vist, at en Ligning af 9de Grad, hvor Rødderne falde i tre Grupper, saa at enhver i en af Grupperne kan udtrykkes ved den samme rationale, symmetriske Funktion af de to andre, kan løses algebraisk (Bestemmelse af de 9 Inflexionspunkter ved en Kurve af 3die Grad); man har imidlertid, naar Relationen indeholder flere end to Rødder, kun undersøgt specielle Tilfælde; vi skulle fremsætte et Par Bemærkninger om det almindelige.

Af de bekjendte Relationer mellem en Lignings Rødder og Koefficienter kan man ved Elimination danne andre, der alle gjælde for hvilkesomhelst af Rødderne; vi ville kalde saadanne Forbindelser de naturlige. Er der nu givet en anden rational Ligning mellem Rødderne, tænke vi os denne ved Hjælp af de naturlige Ligninger bragt til at indeholde saa faa af Rødderne som muligt og en af disse ξ, efter hvilken vi ordne Ligningen, skaffet saa lav en Exponent som mulig; vi have da to Ligninger

$$f(x) = 0 \text{ og } \varphi(\xi) = 0.$$

Dividere vi $\varphi(x)$ i $f(x)$, erholde vi en Rest R, der maa være 0 for $x = \xi$; da ξ i Resten er med lavere Exponent end i $\varphi(\xi)$, maa $R = 0$ være en naturlig Ligning, da man ellers havde en simplere Relation. Resten bliver da Nul, hvorledes man end vælger de i Koefficienterne forekommende Rødder, og alle Rødderne i $\varphi(\xi) = 0$ maa i alle Tilfælde være Rødder i $f(x) = 0$.

Sætte vi i Stedet for $f(x) = 0$ en naturlig Ligning mellem de i $\varphi(\xi) = 0$ forekommende Rødder og ræsonnere paa samme Maade, faa vi følgende Sætning:

Dersom der existerer en Relation, foruden de naturlige, mellem Rødderne i en irreduktibel Ligning, maa en af de naturlige Ligninger kunne deles i rationale Ligninger, der da angive disse Forbindelser. Er en af disse

$$\xi^n + A_1 \xi^{n-1} + A_2 \xi^{n-2} \ldots = 0,$$

der er af saa lav Grad som mulig, vil denne Ligning altid bestemme n af Rødderne i $f(x) = 0$, hvorledes vi end udtage de i A_1, $A_2 \ldots$ forekommende Rødder mellem Rødderne i $f(x) = 0$.

Det synes vanskeligt at angive noget Almindeligt om, hvorledes Ombytning af de i A_1, $A_2 \ldots$ forekommende Rødder bringe Værdierne af ξ til at forandres; som nogle specielle Resultater mærkes:

Alle Ombytninger give alle Rødderne i $f(x) = 0$ hver lige mange Gange;

En Ombytning af de i A_1, $A_2 \ldots$ forekommende Rødder giver ξ lutter ny Værdier, dersom de ombyttede Rødder ikke forekomme symmetrisk.

Den af Hesse behandlede Ligning er kun et specielt Tilfælde af en Gruppe, der kan behandles paa den i III. 4. udviklede Maade; Ligningen af 9de Grad deles i tre Ligninger af 3die Grad, hvis Koefficienter bestemmes ved en Ligning af 3die Grad.

Umuligheden af at dele en Vinkel i tre lige store Dele ved Passer og Lineal er først bevist af Wantzel; føjes hertil Cirkelperiferiens Deling af Gauss, er der neppe noget Arbeide af Betydning tilbage, der behandler denne Art Spørgsmaal.

THESES.

1.

Den i Eliminationstheorien fremsatte »Kombinationsmethode« bør aldrig anvendes.

2.

Definitionen af en Vinkel som en Del af den uendelige Plan har ingen videnskabelig Berettigelse.

3.

En Kurves Længde er ubestemt, naar den kun er defineret som geometrisk Sted.

4.

Mange Udviklinger og Methoder i Analysen forudsætte en uafhængig Variabel, der kan variere fra $-\infty$ til $+\infty$, og give mangelfulde Resultater, dersom man bruger en uafhængig Variabel, hvor dette, ifølge Opgavens Natur, ikke kan finde Sted.

5.

I Theorien om Enveloper sammenblandes ofte forskjellige Opgaver, idet man ikke tager Hensyn til den Indflydelse, som Ligningens Form og Valget af Parameter have.

6.

Den Sætning, at Enveloppen og den frembringende Kurve have fælles Tangent, gjælder ikke almindeligt, og derved blive Begreberne Envelop i Geometrien og partikulær Opløsning i Analysen ikke fuldstændig sideordnede.

7.

Newtons Methode til Bestemmelse af en højere Grændse for Rødderne i en numerisk Ligning giver ikke Garanti for nogensomhelst Grad af Tilnærmelse.

8.

Ved de bekjendte Sætninger af Cauchy, Duhamel, Bertrand o. fl. kunne vi undersøge, om en given Række har en endelig Sum, men dersom Rækken er dannet ved Udviklingen af en given Funktion, ifølge de ubestemte Koefficienters Methode, Mac Laurins Formel o. s. v., give de ikke Sikkerhed for, at denne Sum netop er den udviklede Funktion; for at bevise dette, maa man vise, at

$$\text{Lim.}\left(f(x) - \Sigma\varphi(n)\right) = 0,$$

idet $f(x)$ er Funktionen, og $\varphi(n)$ det n^{te} Led i Rækken.

9.

Karakteristisk for den nyere Geometri er den Vedtægt, at den betragter enhver Ligning som et specielt Tilfælde af den almindelige Ligning af samme Grad, for at opnaa almeengyldige Resultater.

10.

I Statiken er det en Grundsætning, at, ved et System af fast forbundne Punkter, er Maaden, paa hvilken de ere forbundne, ligegyldig.

11.

Kræfternes Parallelogram gjælder videre, end det bruges, idet det kun forudsætter, at

1) de Begreber, man behandler, kun have to Sider, der billedlig kunne fremstilles ved en ret Linies Længde og Retning (Svingkræfter, Rotationer, komplexe Tal);
2) at to saadanne kunne erstattes ved et tredie (adderes);
3) at Enheden ved den billedlige Fremstilling er vilkaarlig.

Poinsot behøvede derfor ikke særskilt at undersøge Sammensætningen af Rotationer.