

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

H. G. Zeuthen.
Om den
historiske Udvikling
af Mathematiken
som exakt Videnskab
indtil Udgangen
af det 18^{de} Aarh.

~~12~~
1

51 (09)



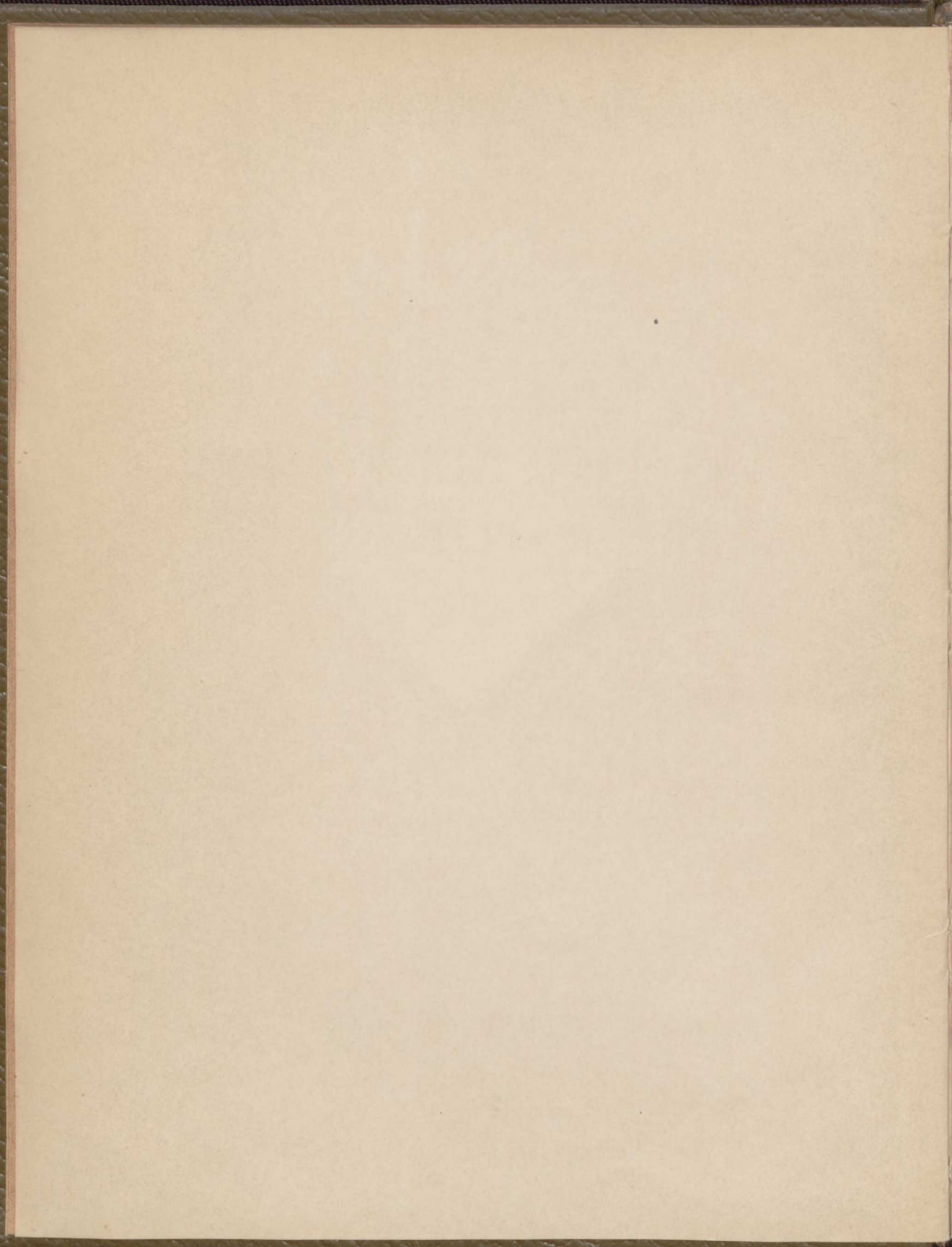
TB Gd.

510 Zen

Ex. 2

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

17/2/13.



175

INDBYDELSESSKRIFT

TIL

KJØBENHAVNS UNIVERSITETS AARSFEST

I ANLEDNING AF

HANS MAJESTÆT KONGENS FØDSELSDAG

den 8^{de} April 1896.

Heri:

Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab
indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede.

Af

H. G. Zeuthen,
Universitetets Rektor.

KJØBENHAVN.

TRYKT HOS J. H. SCHULTZ.

1896.

Om
den historiske Udvikling
af
Mathematiken som exakt Videnskab
indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede.

Af
H. G. Zeuthen.

den historiske Udvikling

Matematikken som eksakte Videnskabs

Indhold

K. S. Leth

Den Læser, som er bekendt med mine tidligere, større og mindre Arbejder om Matematikens Historie og dens Standpunkt paa forskellige Tider, vil i nærværende Skrift gjenfinde Tanker og Resultater, for hvilke jeg alt har gjort Rede, og hvilke jeg har givet en Begrundelse, som der ikke er Plads til her. Han vil imidlertid her finde en Udskillelse og Sammendragning af det, som særlig knytter sig til en enkelt Side af Matematikens Historie, nemlig dens Udvikling som den exakte Videnskab, og denne Udvikling vil, om end i al Korthed, blive fulgt ogsaa gennem Tider, som jeg ikke før har haft Lejlighed til at behandle. Derved vil ogsaa kastes noget nyt Lys paa de Tider, med hvilke jeg før har beskæftiget mig.

Samtidig har jeg søgt at gjøre mit Arbejde tilgængeligt ogsaa for andre end Matematikere. Ganske vist egner den principielle og logiske Side af Matematiken, hvis Historie jeg her betragter, sig næsten mindst af alt til en egentlig populær Behandling. Da dog Fremstillingen for en meget stor Del har kunnet holdes fri for de særlig matematiske Betegnelsesmaader og forudsætter meget lidet Specialkjendskab, haaber jeg at have gjort den tilgængelig navnlig for de Videnskabsdyrkere, som i deres eget Fag eller i dets Historie finde Berøringspunkter med de i nærværende Skrift omhandlede matematiske Grundprinciper og disses historiske Udvikling.

Løvrigt skal jeg bemærke, at jeg maa forbigaa meget ogsaa af det, som netop vedkommer Matematikens logiske Side. Jeg har imidlertid stræbt at fremdrage de Synsmaader, som forekomme mig mest karakteristiske for de forskellige Tider, og hvis Omdannelse og Udvikling fra den ene Tid til den anden give en

Ramme, hvori ogsaa de Sider af Udviklingen, som jeg ikke faar med, ville kunne passes ind. De Synsmaader, som jeg fremdrager, skildres fortrinsvis i de Skikkelser, hvori de møde os hos deres betydeligste Repræsentanter, skjønt ogsaa mangfoldige andre Mathematikere kunne have ydet væsentlige Bidrag til deres Udvikling.

Indledning.

Paa sit allerførste Trin vil en begyndende Mathematik i Reglen lade sig nøje med at fastholde visse mathematiske Kjendsgjerninger. Saadanne kunne være indvundne ved en Erfaring, der er gjentagen saa hyppig, at dens Resultater ere blevne siddende i Bevidstheden. De kunne muligvis ogsaa være vundne ved en vis Kombination af disse Resultater. Saalænge denne Kombination er foretagen ubevidst, paa samme Maade, som vi have opbygget alle vore Forestillinger ved en Forbindelse af Enkeltindtryk, som vi først ved et vist Arbejde kunne skille fra hverandre, kan der ikke være Tale om en videnskabelig Behandling af Mathematiken. Til en saadan kræves netop, at man bliver sig Forbindelsen mellem de enkelte Resultater bevidst, at man altsaa ikke bliver staaende ved, at de ere rigtige hvert for sig, men gjør Rede for, i hvilken Grad de medføre hverandre. Den saaledes opnaaede Udledning af de Resultater, som følge af andre, maa dog ikke ske ved Hjælp af en rent mekanisk Fremgangsmaade, ved en Regning, som man har lært af andre, eller som man efterhaanden kan have dannet sig ved ubevidst Kombination af Fremgangsmaader, hvis Rigtighed Erfaringen efterhaanden har godtgjort. For at have noget videnskabeligt ved sig maa den være en virkelig Begrundelse, som lader den Sammenhæng mellem de forskjellige Result-

tater, i Kraft af hvilken det ene medfører det andet, træde frem for Bevidstheden.

Et andet Kjendetegn paa videnskabelig Mathematik er dens Evne til at voxe og udvikle sig. Som den knytter de Kjendsgjæringer, der oprindelig havde paastrængt sig ad ukjendte Veje, til hverandre gennem Begrundelser, saaledes arbejder den videre og finder da, at helt nye Kjendsgjæringer knytte sig til de alt kjendte paa lignende Maade, som disse alt vare forbundne indbyrdes.

Vore to Kjendetegn paa en videnskabelig Behandling af Mathematiken ere altsaa Begrundelse og Væxt. At have opstillet to Kjendetegn for et vil ikke bringe os i nogen Forlegenhed; thi paa de Steder i Mathematikens Historie, hvor det ene helt savnes, vil det ogsaa vise sig, at det andet heller ikke har haft nogen Betydning. Det forholder sig dog ikke saaledes med disse Kjendetegn, at de til alle de Tider, da den mathematiske Videnskab har blomstret, ere fremtraadte med lige Styrke. Der har tvertimod baade været Tider, hvor navnlig de nye Sandheder have knyttet sig rask til de ældre, og saadanne, hvor der især har været arbejdet paa at uddybe Forstaaelsen af dem, man allerede besad, og af deres indbyrdes Forbindelse. De største Matematikere have dog forbundet begge Sider af Sagen. Ved Indtrængen i Sammenhængen mellem det, de allerede vidste, have de fundet Fremgangsmaader, som førte dem selv langt videre. Disse Fremgangsmaader, ofte i en ændret og for de mindre betydelige Matematikere bekvemmere Skikkelse, have dernæst sat ogsaa disse sidste i Stand til at yde Bidrag til Mathematikens Væxt.

En Mathematik, som tilfredsstiller de her opstillede Fordringer til videnskabelig Behandling, ere vi indenfor Historien først istand til at følge hos de gamle Grækere. Der foreligger dog langt ældre Vidnesbyrd om Kjendskab til saadanne mathematiske Sandheder og til saadanne Anvendelser, som ikke synes at kunne være erhvervede ved en

ubevidst Indsamling af Erfaringer og en blot instinktmæssig Sammenstilling af disse. Det vigtigste af disse er den ægyptiske Regnebog, som findes i det saakaldte *Papyrus Rhind* i *British Museum*, og som i 1877 blev oversat og forklaret af *Eisenlohr*. Dets Alder sættes af den sagkyndige Forsker, som sidst har beskæftiget sig dermed¹⁾, til omtrent 1700 før Christus. Det er ikke ubetydeligt, hvad det indeholder af Beregningsmidler, anvendte paa en stor Mængde Opgaver. Flere af disse røbe ogsaa nogen geometrisk Viden, der iøvrigt lige saa lidt som en vis Regnekunst kunde savnes hos et Folk, der har efterladt os saadanne Bygninger som Ægypterne. Noget af dets Indhold kan endog, som den nys anførte Afhandling er et Exempel paa, give Anledning til videnskabelige Undersøgelser, ej blot af historisk men ogsaa af mathematisk Natur. Dette gjælder saaledes om en mærkelig Deling af Brøker i Summer af saakaldte Stambroker, det er saadanne, som alle have 1 til Tæller. Man kan nemlig baade spørge om, hvorledes man har baaret sig ad med at foretage denne Deling, der i hvert Fald maa have beroet paa nogen Indsigt i Tals Delelighed, og man kan spørge, hvilken Hensigt man har haft med selve Brøkernes Deling. Til Besvarelse af disse Spørgsmaal kan man vejledes ved de talrige Exempler, som Bogen indeholder, og man kan maaske derved komme paa Spor efter en endnu ældre videnskabelig Udvikling af Mathematiken; men om selve denne Udvikling bringer den gamle Regnebog intet umiddelbart Vidnesbyrd, idet den om denne Sag kun meddeler som Kjendsgjerning, at de og de Regninger føre til Brøker sammensatte af de og de Stambroker. Nærmest en videnskabelig Behandling kommer en tabellarisk Sammenstilling af Opløsningen af Brøker med Tælleren 2 op til $\frac{2}{99}$ i Stambroker; thi det er

1) *F. Hultsch*: Die Elemente der Ägyptischen Theilungsrechnung, Erste Abhandlung. — Abh. der phil. hist. Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. XVII Bd. 1895.

netop saadanne Sammenstillinger, som give det rette Overblik, ja som ere direkte Hjælpemidler til den videre Behandling.

Hvad man nu end vil dømme om dette ældgamle Skrift, saa savne vi i den senere ægyptiske Mathematik vort andet Kjendetegn paa en videnskabelig Behandling, nemlig en fortsat Væxt; thi se vi paa saadanne Levninger af den egentlige ægyptiske Mathematik, som skrive sig fra langt yngre Tider, saa opdager man slet ikke nogen Udvikling ud over, hvad der findes i den gamle Regnebog.

Spor af ældgammel Mathematik findes ogsaa i nogle Tavler med Kileskrift, som i 1854 ere fundne ved Senkereh ved Eufrat, og som menes at skrive sig fra Tiden mellem 2300 og 1600 før Christus. I 60-Talsystemet, det samme System, som vi den Dag i Dag bruge til Fremstilling af Tidslængder og Vinkelstørrelser, angive de Værdierne af samtlige Kvadrattal op indtil 60^2 og af samtlige Kubiktal op indtil 32^3 . Der siges saaledes, at Kvadratet af ~~58~~ er 58.1, det vil sige $58.60 + 1$ o. s. v. Her foreligge forskellige Kjendetegn paa videnskabelig Interesse og videnskabelig Behandling. Allerede Valget af Grundtallet 60 maa skyldes Hensynet til, at dette Tal som $2^2.3.5$ er deleligt med et stort Antal lavere Tal; men endnu vigtigere er det, at Dannelsen af disse Tavler tyder paa Forstaaelse af det, hvortil saadanne Tavler naturligt bruges, nemlig Kvadrat- og Kubikrodsuddragning. Vi vide intet om, hvorvidt man iøvrigt var kommen, da disse Tavler udarbejdedes, eller hvor længe den daværende matematiske Udvikling fortsattes. Værd at lægge Mærke til er det dog, at Grækerne, da deres Mathematik ellers næsten havde naaet sit højeste Maal, og da man tilfulde besad den theoretiske Indsigt i de Sætninger som behøves til Kvadratrodsuddragninger, indskrænkede disse til temmelig grove Tilnærmelser, og at de derefter, da Astro-
59. nomien krævede større Nøjagtighed, netop naaede denne gjennem Brug af en saadan Sexagesimaldeling som den,

hine gamle Tavler benytte. Dette System og med det Evnen til paa en overkommelig Maade at behandle større Tal optræder først efter Alexanders Tog og synes tilligemed adskillige astronomiske Fremskridt at være tilført de indsigtfulde Grækere fra det fjerne Østen.

Medens denne Paavirkning først naaede Grækerne, da de allerede havde en udviklet Mathematik, er det anderledes med Paavirkningen fra ægyptisk Side. Vi høre om den ene af de ældste græske Matematikere efter den anden, at han drog til Ægypten og lærte af det derværende Præsteskab. Hvad de der have lært, synes mest at have været bestemte Regler til at udføre den og den Konstruktion, foretage den og den Beregning, f. Ex. af Højder ved Hjælp af Skyggelængder. Disse Reglers Rækkevidde har maaske ikke været saa ganske ringe; men hele deres Indordning under en videnskabelig Behandling tilhører Grækerne. Den fremkom af disses Drift til at forstaa, hvorfor Reglerne førte til rigtige Resultater, og til at opfatte den indbyrdes Sammenhæng mellem de matematiske Sandheder, som man efterhaanden lærte at kjende. Den lagde sig dernæst for Dagen i den raske Væxt af den matematiske Viden, der hos Ægypterne igjennem saa lange Tider var bleven staaende paa samme Standpunkt. Den førte endelig i forholdsvis kort Tid til et saa fuldstændigt Hele som det, hvori den elementære Mathematik foreligger i *Euklids* Elementer, og til videregaende Arbejder, der ved deres hele Behandlingsmaade og omfattende Resultater til alle Tider maa kunne fastholde Matematikernes Interesse.

Opdagelsen af irrationale Størrelser.

Fra Tiden før Euklid (omtrent 300 før Chr.) foreligger der vel kun et enkelt matematisk Brudstykke (Hippokrates' Kvadratur af Halvmaanerne), tilmed omdannet ved senere Bearbejdelser. Selve Udviklingen kjender man dog ret godt af historiske Meddelelser, hvis rette Forstaaelse sikres ved deres Sammenhæng med, hvad der forefindes hos Euklid, og de ere benyttede med stor Omhu af vor Tids Matematik-historikere. Det Lys, som derved kastes paa Udviklingens første Aarhundrede, fra *Thales* (omtrent 600) til *Pythagoras* (henimod 500), i hvilket man begyndte at ordne og bruge de efterhaanden fra Ægypterne modtagne Lærdomme, er vel endnu ikke meget klart. Hvad der meddeles om Pythagoras og Pythagoræerne, knytter sig derimod saa inderlig til de Synsmaader, som senere fik Herredømmet hos Grækerne, at det giver en levende Forstaaelse af, hvorledes den græske Matematik er bleven til og efterhaanden har antaget den Form, som vi finde hos de senere Forfattere. Denne Forstaaelse har sit Værd, selv om ikke alle de foreliggende Oplysninger have fuld historisk Paalidelighed, om de f. Ex. tilskrive Pythagoras selv, hvad der først tilhører hans Disciple, eller endog tillægge Betragtninger eller Fremgangsmaader, som mere tilfældig ere opstaaede hos Pythagoræerne, en Vægt og Betydning, som de først efterhaanden naaede senere. Saadanne Oplysninger, hvis Hovedbetydning maaske ligger i deres Paapegen af, hvad man senere paa de store Matematikeres Tid lagde særlig Vægt paa, kunne godt give en rigtig Forestilling om, hvorledes Udviklingen er foregaaet, uden at være fuldt paalidelige med Hensyn til de Tidspunkter, da hvert enkelt Trin er naaet.

Her, hvor vi nærmest skulle se, hvorledes Mathematiken er bleven til den exakte Videnskab, skulle vi af det, som

meddeles om Pythagoræerne, navnlig lægge Vægt paa Kjendskabet til Løsningen af Ligninger af 2den Grad, hvilket tillægges dem i den geometriske Form, som Grækerne i det mindste senere gav denne Løsning, samt deres Opdagelse af irrationale Størrelser. I Forbindelse med det første staar Konstruktionen af regulære Femkanter, som netop afhænger af Ligninger af 2den Grad, og tildels Konstruktionen af de regulære Polyedre, som Pythagoræerne ogsaa siges at have kjendt. Sammenhængen mellem Ligninger af 2den Grad og Kjendskabet til irrationale Størrelser er aabenbar, da Ligninger af 2den Grad i Almindelighed føre til saadanne Størrelser. Grækerne lode sig ikke, som Inderne senere gjorde, nøje med at regne Rødderne ud med en Tilnærmelse, som man kunde gjøre saa god, som hvert enkelt Spørgsmaals Natur krævede. Dertil besade de, som alt berørt, heller ikke gode Midler. Derimod gave de sig til at anstille Betragtninger over, hvorvidt man overhovedet kunde naa Maalet ved saadan Tilnærmelse. De lagde deres Sands for absolut mathematisk Nøjagtighed for Dagen ved at indse, at denne ikke naas, hvor længe man end bliver ved med saadanne Tilnærmelsesprocesser.

Der eksisterer saaledes et gammelt Bevis, som maaske skriver sig fra Pythagoræerne, for, at Diagonalen i et Kvadrat ikke kan have noget fælles Maal med Siderne, et Bevis, som er den græske geometriske Form for følgende Bevis for, at $\sqrt{2}$ er irrational, eller at der ikke eksisterer nogen Brøk, som, multipliceret med sig selv, giver 2. Kalde vi, idet vi bruge moderne Tegn, en saadan Brøk $\frac{m}{n}$, og antage vi, at den er forkortet saa meget som muligt, skulde vi have

$$m^2 = 2 n^2.$$

Var dette Tilfældet, blev m^2 og følgelig m et lige Tal, altsaa, da Brøken er uforkortelig, n et ulige Tal. Idet m er et lige Tal, maa m^2 være delelig med 4, altsaa $\frac{m^2}{2}$, eller n^2

med 2. Altsaa er n^2 og følgelig ogsaa n et lige Tal. Nu kan n ikke baade være et lige og et ulige Tal. Forudsætningen, at $\sqrt{2}$ skal kunne fremstilles som en Brøk, er altsaa urigtig.

Denne Vanskelighed komme vi nu ud over ved en Udvidelse af Talbegrebet, idet vi i dette Begreb ej blot indbefatte hele Tal og Brøker, men ogsaa de saakaldte irrationale Tal, hvortil $\sqrt{2}$ netop hører. Grækerne fastholdt derimod det oprindelige, ved Tælling opstaaede Talbegreb, ifølge hvilket Tal kun er, hvad vi kalde hele Tal. Ved Hjælp af disse kunde de dog ogsaa fremstille Brøker, idet disse et helt Antal Gange indbefatte saadanne Dele af Enheden, som selv indbefattes et helt Antal Gange i denne; men vore irrationale Tal kunne ikke paa denne Maade nøjagtig udtrykkes ved hele Tal.

Ved saaledes at holde det oprindelige Talbegreb fast undgik Grækerne den Fare, som er forbunden med de successive Udvidelser af det oprindelige Begreb, den nemlig, at man samtidig uden nogen tilsvarende Udvidelse af Beviset udvider de Sætninger, som man har fundet at gjælde for det oprindelige snævrere Begreb. Den Finhed i Tanken, som Grækerne derved lagde for Dagen, vil maaske bedst blive forstaaelig ved en Henvisning til den moderne Undervisning i Mathematik og særlig i Læren om Proportioner, som den idetmindste gaves for ikke lang Tid tilbage. I Geometrien, hvor den græske Mathematiks Principer for en stor Del bevares, fastholdes det, at man ikke kan nøjes med at betragte saadanne Tilfælde, hvor Forholdene finde Sted mellem Størrelser, som have et endeligt fælles Maal eller ere kommensurable; i Arithmetiken derimod udvikles Proportionslæren, førend der har været Tale om irrationale Tal, og anvendes dog senere ogsaa paa saadanne Tal uden nye Beviser.

Det var ikke nogen Mangel paa Evne til at se Overensstemmelsen mellem Regninger med Tal og de tilsvarende Operationer med inkommensurable Størrelser, som bevarede

Grækerne for denne sidste logiske Fejl. Vare end de numeriske Tilnærmelser, hvormed de kunde udtrykke sidstnævnte Størrelser, tarvelige, vare de gode nok til at lade denne Overensstemmelse træde frem, og den har sikkert ogsaa været vejledende for de Operationer, som de satte i Stedet for Regningerne. Det var Hensynet til Logikens strenge Fordringer, som tvang dem til at sætte noget andet i Stedet. At finde og udvikle noget saadant, er imidlertid en vanskelig Opgave, hvis fuldstændige Løsning ikke kunde naas lige saa snart, som man havde begyndt at forstaa Fordringen.

Geometrisk Behandling af Mathematiken.

Det gjaldt først om at faa en Fremstilling af Størrelser, som lige godt kan anvendes paa kommensurable og inkommensurable Størrelser. Dertil bruge vi et vilkaarlig valgt Bogstav. Grækerne fremstillede Størrelserne ved rette Liniers Længder. Det er en Fremstilling af Størrelser af vilkaarlig Art ved en bestemt Art af Størrelser; men den har den Almengyldighed, hvorpaa det her kommer an, idet Længden kan være fuldkommen vilkaarlig. Ved denne geometriske Behandling er den tegnede Figur iøvrigt kun et Fremstillingsmiddel, hvor de tegnede Linier vel have bestemte Længder, men skulle fremstille Linier af aldeles vilkaarlig Længde, for saa vidt der ikke udtrykkelig opstilles Afhængigheder mellem dem, eller saadanne lade sig udlede af Figurens opgivne Egenskaber. Dette sidste maa udtrykkes i geometriske Sætninger, hvis Tolkning da atter giver Sætninger af den almindelige Størrelseslære, altsaa saadanne, som man nu vilde udtrykke algebraisk og udlede ved Operationer med algebraiske Formler. De geometriske Operationer, der paa

denne Maade svare til algebraiske Operationer, danne den saakaldte geometriske Algebra. De indbefatte som specielt Tilfælde Fremstillingen af de arithmetiske Regninger med rationale Tal.

Det gjaldt først om at opstille saadanne geometriske Operationer, som kunde indeholde Almindeliggjørelsen af de simple Regningsarter. Addition og Subtraktion af Linier udføres ved at afsætte dem paa hinandens Forlængelse eller ud ad hinanden. I Stedet for Multiplikationen af to Størrelser a og b træder dernæst Dannelsen af et Rektangel med Siderne a og b . Dette var en ganske naturlig Udvidelse, da man godt vidste, at Rektanglets Areal fremstilles ved Produktet ab , naar a og b ere hele Tal eller Brøker, og Fladeenheden er Kvadratet med Længdeenheden til Side; men da man overhovedet ikke kunde fremstille inkommensurable Størrelser a og b ved det, som man anerkjendte for Tal, talte man i saa Fald ikke om Produktet ab , men kun om det af a og b dannede Rektangel. Dette skulde vi dog i det følgende ogsaa betegne ved ab , ligesaa Kvadratet med Siden a ved a^2 .

Man fik rigtignok paa denne Maade to forskellige geometriske Fremstillinger af Størrelserne, nemlig ved Længder og Rektangler; men disse kunne føres over til hinanden, naar en Side i Rektanglet faar Størrelsen 1. Rigtignok medfører den geometriske Fremstillingsform, at man ikke paa denne Maade tillægger nogen Linie bestemte Talværdier, altsaa heller ikke 1; men Grækerne vide overalt at opnaa det samme ved blot at omdanne givne Rektangler til Rektangler med en given Side. Derved sættes de ogsaa i Stand til at addere og subtrahere Størrelser, fremstillede ved Rektangler. Den nævnte Omdannelse træder i den antike geometriske Algebra ogsaa i Stedet for Division.

Nu forstaa vi Betydningen af den geometriske Løsning af Ligninger af 2den Grad, som under Navn af Fladeanlæg allerede tillægges Pythagoræerne. Man løser nu Ligningen

$$x^2 - ax + b = 0,$$

eller som vi, for at faa større Overensstemmelse med de Gamle, ville skrive den,

$$ax - x^2 = b \quad (1)$$

ved at behandle begge Sider saaledes, at vi finde, at anden Potens af en Størrelse, indeholdende x , faar en given Værdi.

Det kan ske ved at trække begge Sider fra $\frac{a^2}{4}$, hvorved faas

$$\frac{a^2}{4} - ax + x^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b; \quad (2)$$

derefter giver en Kvadratrodsuddragning, at

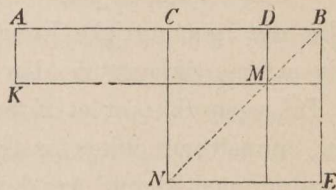
$$\frac{a}{2} - x = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (3)$$

eller

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad (4)$$

idet vi for at faa tydeligere Overensstemmelse med de Gamle kun opstille den ene Rod.

For at give vor Ligning (1) en geometrisk Form bør vi antage, at a er en given Linie, b et givet Rektangel, x en søgt Linie. Opgaven lyder da saaledes: langs en given ret Linie a (AB paa hystaaende Figur) at lægge et Rektangel (KD) med givet Areal b , saaledes at der mangler et Kvadrat x^2 (MB). Rektanglet KD , som fremstiller $ax - x^2$, subtraheres (som i



Formel (2)) fra Kvadratet CE paa $\frac{a}{2}$, derved at Rektanglet KC , som er $= \frac{a}{2}x$, lægges hen i Stillingen DE . Da er Vinkelfiguren $CM + DE$ netop $2 \cdot \frac{a}{2}x - x^2$. Ved Subtraktionen faas Kvadratet MN . Dette skal altsaa have den bekjendte Værdi $\frac{a^2}{4} - b$. Kan man nu bestemme Siden i dette

Kvadrat, skal den være CD , og ved at trække den fra CB eller $\frac{a}{2}$ faas den ubekjendte Størrelse x , Siden i det Kvadrat (MB), som bliver tilbage ved Anlægget af b langs a .

Det kommer altsaa blot an paa at bestemme Siden i et Kvadrat, der skal have et givet Areal. Vi løse nu denne Opgave ved Kvadratrodsuddragning. Da det af flere Ting hos Euklid kan sluttes, at man paa hans Tid og længe før har kjendt numerisk Løsning af Ligninger af anden Grad, kan man af den nøjagtige Overensstemmelse mellem vor algebraiske Udledning og de Gamles geometriske Udledning se, at de Gamle løste saadanne Ligninger, som det gjøres nu. Den Figur, vi have benyttet, var imidlertid for de Gamle ikke blot et Anskuelsesmiddel, tjenende til at indprente de Operationer, som føre til Løsningen, i Hukommelsen. Det var den eneste exakte Fremstilling, ej blot naar a og b vare inkommensurable Størrelser, men ogsaa, naar Roden x blev inkommensurabel med dem. I saa Fald kunde der nemlig ikke tales om Produktet ax , Potensen x^2 o. s. v., men kun om Rektanglet ax , Kvadratet x^2 o. s. v.

Men endnu et krævede Grækernes strænge Logik, hvis ikke den geometriske Fremstilling skulde strande paa det selv samme Skjær som den arithmetiske. Kvadratroden af et Tal, som ikke er et Kvadrattal, eksisterede, som vi have set, simpelthen ikke for Grækerne. At sætte Siden i et Kvadrat med kjendt Areal i Stedet for en Kvadratrod vilde ikke hjælpe noget, naar man ikke kunde udføre en saadan Bestemmelse af den, som gav Sikkerhed for, at den eksisterede. Det var dette, man opnaaede ved en geometrisk Konstruktion, og et saadant logisk Formaal har overhovedet Konstruktionen i den græske Geometri, ogsaa saadanne Konstruktioner, som nu nærmere have et praktisk Formaal. Grækerne havde bevist, at der ikke eksisterer noget Tal, som har Værdien $\sqrt{2}$; men at Diagonalen i et Kvadrat med Siden a eksisterer, var utvivlsomt. Den kunde derfor bruges til

Fremstilling af saadanne Størrelser, som vi nu fremstille ved $a\sqrt{2}$ eller ved $\sqrt{2}$, naar vi tage a til Enhed. Paa lignende Maade faas geometriske Fremstillinger af det, vi fremstille ved andre Kvadratrødder. $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$, som vi kom til ved Løsningen af en kvadratisk Ligning, kan, naar b selv er fremstillet som et Kvadrat c^2 , ved Hjælp af den pythagoræiske Læresætning konstrueres som Kathete i en retvinklet Trekant, hvis Hypothenuse er $\frac{a}{2}$, medens den anden Kathete er c .

Overhovedet kan Konstruktionen, naar b er fremstillet som Arealet af en retliniet Figur, føres tilbage til Konstruktion af saadanne Udtryk, som vi fremstille ved $\sqrt{de}$, og disse konstrueres som Mellemproportional mellem d og e . Euklid har en Begrundelse af den samme geometriske Konstruktion, som er uafhængig af Proportionslæren. Dette er for saa vidt af Vigtighed, som Proportionslæren i de ældre Tider, der nu beskjæftige os, og fra hvilke Euklids Konstruktion vistnok skriver sig, ikke var udviklet til den Almengyldighed, som ellers tilstræbtes.

Alt, hvad vi her have omtalt, tillægges Pythagoras og hans Disciple, som vistnok ved Dannelsen af den geometriske Algebra have ladet sig lede af en alt den Gang benyttet geometrisk Fremstilling af hele Tal og deres Forbindelser. I Henhold til denne kaldte man Produktet af to Tal et rektangulært Tal, og man indførte den endnu brugelige Benævnelse Kvadrattal og, ved Udvidelse af de samme Betragtningssmaader til Rummet, Kubiktal. Man dannede ogsaa de saakaldte Trekantstal, og andre Figurtal som i en overskuelig geometrisk Fremstilling indeholdt Summation af Differensrækker. Denne i mange Henseender nyttige geometriske Arithmetik har imidlertid ikke en saadan logisk Betydning som den geometriske Algebra. At Grækerne overhovedet kunde vælge Geometrien til almindeligt mathematisk Fremstillingsmiddel, turde ogsaa bero paa, at de netop i Hen-

seende til geometriske Konstruktioner havde lært en Del af Ægypterne.

At Opfattelsen af Geometrien som Organ for en almindelig og korrekt Størrelseslære virkelig gaar saa langt tilbage som til Pythagoræerne, bekræftes ved de berømte Opgaver, som bekjæftigede Mathematikerne i det 5te Aarhundrede f. Chr., nemlig Terningens Fordobling, Vinklens Tredeling og Cirkelns Kvadratur. Særlig den første følger sig næsten umiddelbart til det, som vi alt have omtalt. Fra den geometriske Plangeometri med dens Fremstilling af Produkter, anden Potenser og Kvadratrødder var det naturligt, at man gik over til den rumlige Fremstilling af Produkter af tre Faktorer, tredie Potenser og Kubikrødder, ved Parallelepipeder, Kuber og Kanten i en Kubus med givet Rumfang. Terningens Fordobling eller Bestemmelsen af Kanten i en Terning, som er dobbelt saa stor som en given, er netop den geometriske Fremstilling af $\sqrt[3]{2}$, der frembyder det simpleste Exempel paa Kubikrødder, ligesom tidligere $\sqrt{2}$ paa Kvadratrødder. I den græske Geometri er den omtalte Opgave ogsaa kun opfattet som et saadant Exempel, idet man i Virkeligheden beskæftiger sig med et vilkaarligt Parallelepipedums Omdannelse til en Terning, hvilket svarer til Bestemmelse af en vilkaarlig Kubikrod. Denne Opgave førte man tilbage til Bestemmelse af to Mellemproportionaler eller af to Størrelser x og y ved Proportionerne

$$a : x = x : y = y : b,$$

hvor a og b ere givne.

At man virkelig ikke særlig tilsigtede en saa let og nøjagtig praktisk Bestemmelse som muligt svarende til vor tilnærmede, numeriske Roduddragning, men en Fremstilling, som sikrede Existensen af den søgte Størrelse, fremgaar af de Løsninger, man opstillede. Da Opgaven, som vi nu vide, ikke kan løses ved ret Linie og Cirkel, tyede man til andre Hjælpemidler, og det, hvorved man ind i det føl-

gende Aarhundrede sluttelig blev staaende, var Bestemmelsen ved Keglesnittene

$$x^2 = a y, x y = a b, y^2 = b x.$$

Optegning af disse Kurver, som Grækerne fra den Tid studerede med en Iver, der har baaret de vigtigste Frugter for de følgende Tiders Mathematik, giver netop ikke nogen god praktisk Bestemmelse. Taaleligst vilde den blive, naar man bestemte Kurverne ved geometrisk Konstruktion af en Række Punkter; men selv dette vilde være en vidtløftig Kubikrodsuddragning, og der foreligger iøvrigt aldeles intet om, at Grækerne skulde have brugt en saadan. Fremhævelsen af, at de paagjældende Kurver ere Snit i cirkulære Kegler, kunde snarere tyde paa, at disse Kegler benyttedes; men at konstruere Keglerne for at faa Kurverne vilde være ganske særlig upraktisk. Naar Konstruktion ved Keglesnit derimod har været det theoretiske Hjælpemiddel, som vi her give det ud for, bliver den Vægt, man lægger paa den omtalte stereometriske Bestemmelse derimod ganske naturlig. Cirkler ere Kurver, hvis Anvendelse til de Konstruktioner, der skulle bruges som Existensbeviser, allerede var hævdet. Existensen af Cirkler medfører umiddelbart Existensen af Kegler med Cirkler til Ledelinier og derved af plane Snit i saadanne Kegler. Den geometriske Existens af den Størrelse, som vi nu fremstille ved $\sqrt[3]{2}$, og af lignende Størrelser er altsaa ikke blot sikret ved nøjagtig definerede Kurver; men at selve disse Kurver existere, at man ej blot kan konstruere en Række Punkter, der have den Egenskab, som karakteriserer dem, men at saadanne Punkter danne en sammenhængende Kurve, var sikret, naar man blot godkjendte Cirkelns Existens og videre Anvendelse paa den her beskrevne Maade.

Opgaven om Vinklens Tredeling har vel ikke en saadan umiddelbar algebraisk Betydning som den, vi her tillægge Terningens Fordobling. Den frembød sig dog naturlig i Geometrien, saasnart man havde set, hvorledes ret Linie og

Cirkel kunne benyttes til at halvere Vinkler. Den indeholder dernæst saa meget, som kan anspore den geometriske Kombinationsevne, at det var naturligt, at den maatte fange Matematikernes Interesse, og denne Interesse formindskedes sikkert ikke ved de mislykkede Forsøg paa at løse den ved Lineal og Passer. Man kom dog allerede i Oldtiden saa vidt i sine Forsøg herpaa, at man ansaa dem for haabløse og slog sig tiltaals med andre Løsninger. Af disse ere nogle som føre til en saakaldt Indskydning (*νεύσις*) meget smukke. Af de alt omtalte theoretiske Hensyn blev det dog snart fordret, at man skulde udføre denne saavel som andre Konstruktioner, der i den nuværende Mathematik løses ved Ligninger af tredie og fjerde Grad og altsaa kunne løses ved Keglesnit, ved Hjælp af disse Kurver. Dette havde den mindre heldige Følge, at man ikke fastholdt Forsøg paa det, som vi nu kalde Løsning af Ligninger af tredie Grad, det vil sige disses Tilbageføring til rent kubiske Ligninger, det er saadanne, som umiddelbart kunne løses ved Kubikrodsuddragning. Archimedes opstiller saadanne Ligninger i geometrisk Form, og i et gammelt Skrift, som man ogsaa har tillagt Archimedes, løses de ved Hjælp af en ligesidet Hyperbel og en Parabel. Da de samme Kurver anvendes til Fremstilling af en simpel Kubikrodsuddragning, maatte den omtalte Tilbageføring derved tabe Interesse.

Der er ogsaa andre Størrelser end dem, som bestemmes ved algebraske Ligninger, hvilke det er nødvendigt at underkaste den exakte Behandling, hvortil Grækerne behøvede en geometrisk Fremstilling. Hertil hører først og fremmest den Størrelse, som vi nu fremstille ved Bogstavet π , naar vi ville underkaste den exakte Undersøgelser, men for hvilken vi tillige kjende vidtgaaende Tilnærmelser.

Der er ingen Grund til at antage, at Grækerne ikke, endog paa et meget tidligt Standpunkt, ogsaa have kjendt Tilnærmelsesværdier for denne Størrelse, altsaa for Cirkelns Forhold til Kvadratet paa dens Radius eller for Periferiens

Forhold til Diameteren, om de end i Overensstemmelse med deres lidet udviklede Regnekunst nøjedes med meget tarvelige Tilnærmelser. Saadanne have de haft Brug for i Haandværk og Bygningskunst, og saadanne kunde de lære af Ægypterne. Uden at formindske Archimedes' Fortjeneste i denne Henseende, som bestod i nøjagtig at bevise, at det omtalte Forhold ligger imellem $3\frac{1}{7}$ og $3\frac{1}{11}$, kan man endog antage, at man længe før hans Tid kjendte den første af disse Tilnærmelsesværdier, men at man tidligere blot ikke havde nogen sikker Dom om dens Værd.

Det er da heller ikke det, man lagde an paa i den Tid, som beskjæftiger os. Man vilde have et geometrisk Udgangspunkt for herhenhørende Undersøgelser. Først prøvede man ved Lineal og Passer at kvadrere Cirklen eller at konstruere en retliniet Figur af samme Areal som den. Da det mislykkedes, forsøgte man andre Hjælpemidler, maaske ogsaa Brug af Keglesnit. Nu vide vi, at ogsaa dette maatte mislykkes. Der var da ikke andet for at gjøre end at indføre nye Kurver ved Siden af ret Linie og Cirkel og de af denne sidste afledte Keglesnit. Allerede i det 5te og 4de Aarhundrede møde vi den saakaldte Kvadratrix, og senere indførte Archimedes den efter ham opkaldte Spiral. Her skal ikke dvæles ved Beskrivelsen af den første Kurve; den sidste gennemløbes af et Punkt, der bevæger sig med jævn Hastighed ud ad en ret Linie, samtidig med at denne med jævn Hastighed drejer sig om et fast Punkt. Til disse Kurver knyttede sig saadanne Undersøgelser, som nu foretages med Hensyn til eller ved Hjælp af trigonometriske og cirkulære Funktioner. Saaledes viser selve den velstuderede Figur af Kvadratrix de Sætninger, som vi nu vilde udtrykke saaledes: $\frac{\sin x}{x}$ aftager og $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ voxer, naar Vinklen x voxer i første Kvadrant, Sætninger, som senere fik fundamental Betydning i den græske Trigonometri, og som allerede spille en Rolle i de tidligste astronomiske Undersøgelser af trigonometrisk

Natur, hvilke skyldes Aristarch fra Samos. Archimedes' Spiral viser umiddelbart den periodiske Væxt af de nu saakaldte cirkulære Funktioner. Ved hans Tangent- og Arealbestemmelser sættes disse Funktioner i Forbindelse med Operationer svarende til vor Differentiation og Integration.

Disse sidste Bemærkninger gaa vel langt ud over den Tid, vi her nærmest omtale, men som Fortsættelser af det 5te Aarhundredes Undersøgelser over Cirkelns Kvadratur oplyse de disse Undersøgelsers theoretiske Formaal og Værd. Det gjaldt om at drage alt det, man vilde undersøge exakt, ind under geometriske Bestemmelser. Ligesom man nu fordrer en fuldstændig aritmetisk-algebraisk Redegjørelse for Dannelsen af en Størrelse, som man vil give et vist Symbol og dernæst underkaste exakte Undersøgelser, saaledes fordrede man den Gang en klar geometrisk Redegjørelse for dens Tilbliven. De grafiske Fremstillinger, man fandt af π , fik saaledes videregaaende theoretisk Interesse.

Bestræbelserne efter at opnaa en saa ensartet og simpel Fremstilling som muligt førte tillige til en Inddeling af Opgaverne efter Graden af Simpelhed af de Hjælpemidler, som bruges til deres Løsning, en Inddeling, der jo ogsaa maa kunne anvendes paa de Størrelser, som Konstruktionerne skulde fremstille. En Kvadratrod, som konstrueres ved Lineal og Passer, bliver derved af simplere Natur end en Kubikrod, hvis Bestemmelse kræver Brug af Keglesnit. Denne sidste kommer derimod i Klasse med Størrelser, der bero paa Tredelingen af Vinklen, som ogsaa udføres ved Keglesnit. Cirkelns Kvadratur eller den geometriske Fremstilling af π kræver Brug af Kurver af en helt anden Beskaffenhed. Det kunde vel ikke i Oldtiden lykkes exakt at bevise, at Løsningen af Opgaver af den ene af disse Klasser ikke lader sig føre tilbage til en anden, at man f. Ex. umulig kan bestemme Kubikroden af et Tal, som ikke er et Kubiktal, ved Lineal og Passer; men selve den Vægt, som lagdes paa Klasseinddelingen, viser den sikre Følelse, man havde

deraf, en Følelse, der maatte styrkes ved den Overensstemmelse, man fandt mellem Opgaver af samme Klasse, som for en stor Del kunde føres tilbage til hverandre.

Proportionslære og infinitesimale Undersøgelser.

Omdannelsen af den almindelige Størrelseslære til Geometri kunde dog ikke yde alt, hvad en exakt Matematik maa kræve. Denne kan nemlig dog, naar det gjælder om at gaa tilbunds i Størrelsers indbyrdes Sammenligning, ikke undvære Tallene. Man kan ved at afsætte en Størrelse a fremstillet som Linie ud ad en anden b afgjøre, om $a \geq b$, og det samme kan man ved geometriske Slutninger ofte komme til, naar de ere forbundne ved en nøjagtig angiven geometrisk Konstruktion. Endog blot Angivelsen af mere kræver Brugen af Tal. Et Forhold mellem hele Tal kan bruges, naar a og b ere kommensurable. Ere de ikke det, kan man afsætte den mindste b et vist Antal Gange ud ad a og faa et Stykke $c < b$ tilovers, dernæst c ud ad b et vist Antal Gange o. s. v. Denne Sammenligningsmaade kjendte Grækerne godt. De anvendte den til at finde største fælles Maal for a og b , naar de ere kommensurable, hvorimod den ikke kan føres til Ende, naar a og b ere inkommensurable. Heri saa de netop Kjendetegnet paa inkommensurable Størrelser. Dette er imidlertid af rent negativ Natur, medens selve Forholdet mellem a og b fundet ad denne Vej maatte karakteriseres ved den uendelige Kjædebrøk — som vi nu sige —, der dannes ved den uendelige Række paa hinanden følgende, geometrisk udførte Divisioner. Da denne Be-

stemmelse afhænger af en ubegrænset Række af Tal, synes den umulig at opnaa. Det vilde dog kunne ske, hvis man havde en bestemt Lov, hvorefter denne uendelige Række af Tal dannes. I modsat Fald giver et begrænset Antal af Kvotienter en Tilnærmelse, der bliver des større, jo flere man tager med.

Som vi skulle se, fik Grækerne vel meget tidlig en afgjort Frygt for saadanne Uendelighedsbestemmelser; men der foreligger Kjendetegn paa, at selve denne Frygt er fremkaldt ved en endnu tidligere Brug, forbunden med Misbrug, af denne Art Bestemmelser. Der er en meget paa-faldende Modsigelse i, hvad der berettes om Pythagoras, at han paa den ene Side skal have lært, at „Tingene ere Tal“, paa den anden have opdaget de inkommensurable Størrelser; thi disse ere netop saadanne, som i det mindste efter det senere græske Talbegreb ikke kunne fremstilles ved Tal. Han og hans Disciple kunne ikke have forliget denne Modsigelse paa anden Maade end ved, hvor det var nødvendigt, at bruge uendelige Tilnærmelser i Tal. Bestemmelser af Størrelser ved uendelig Deling maatte dernæst ganske passe ind i den atomistiske Skoles Principer; ja, de geometriske Resultater, som derved opnaas, have maaske været vejledende for de fysiske Anvendelser, som man forsøgte at gjøre. En Beretning om, at Demokrit har undersøgt, om to uendelig nærliggende parallelle Snit i en Kegle maa betragtes som lige eller ulige store, peger endog ligefrem hen paa, at allerede han har anvendt en saadan Deling til Undersøgelse af Keglens Rumfang, maaske blot til at bevise, at Kegler med samme Højde og lige store Grundflader ere lige store. At man tidlig har kjendt Summation af uendelige Kvotientrækker, hvilke Archimedes senere i anden Form anvender, lære vi endog udtrykkelig af den, der netop vil bekæmpe denne Fremgangsmaade, nemlig Zenon fra Elea. Han fører bl. a. følgende Bevis for, at man ikke kan bevæge sig fra et Sted til et andet. Man

maatte, siger han, først gjennemløbe Halvvejen, men forud for dette Halvvejen af Halvvejen o. s. v. i det uendelige; men dette er uopnaaeligt. Med Undtagelse af denne sidste Slutning falder hans Bevis sammen med Beviset for, at

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots,$$

og hans Bevis for, at Achilles ikke kan naa Skildpadden, med Summationen af en anden uendelig Kvotientrække.

Zenons Kritik rammer ikke blot, som vi strax skulle se, en uklar Brug af Uendelighedsbegrebet, men tillige selve det Grundlag, man ved den geometriske Fremstilling mente at have faaet for Matematiken. Denne Fremstillings Uafhængighed af, om Størrelserne numerisk kunne fremstilles ved rationale Tal eller ikke, beror nemlig netop paa, at den umiddelbart anerkjender Størrelsernes Kontinuitet. Det er denne, som Zenon angriber. I hans Beviser for, at Bevægelse er umulig, gaar han netop løs paa den Kontinuitet i Bevægelsen, som ikke springer noget Punkt eller Stykke af Banen over. Ogsaa fra andre Sider angriber han Kontinuiteten. Denne kunde Matematikerne imidlertid ikke give Slip paa, og Zenons Paapegen af, at man ikke kan faa fat paa den ved at lade de diskrete Størrelser følge paa hinanden med mindre og mindre Mellemrum, maatte netop bringe dem til at holde des fastere paa den geometriske Fremstilling, hvorved Kontinuiteten postuleres eller forlanges anerkjendt paa Forhaand.

Mere satte Zenon igjennem, for saa vidt hans Beviser indeholde en Protest mod en positiv Brug af det rent negative Uendelighedsbegreb. I denne Protest kunne vi, der vide, hvortil dette Begreb kan misbruges, ikke just give ham Uret. Exempler paa saadanne Misbrug fremkom ogsaa hos Grækerne, naar f. Ex Sophisten Antifon — som det i det mindste berettes — sluttede, at Cirklen kan kvadreres geometrisk ved Hjælp af Lineal og Passer, deraf, at enhver regulær Polygon med et endeligt Antal Sider kan det.

Hvorom al Ting er, saa sejrede paa dette Punkt den af Zenon forfægtede Anskuelse, og den Mathematiker, der vilde hævde sine Paastande overfor Sofister, virkelige Filosofer og hans egne Fagfæller, maatte ubetinget undgaa at bruge Begrebet uendelig i anden Betydning end den negative, som selve Ordet angiver, altsaa i Betydning af det, som ikke kan naas. Man turde altsaa vel sige, at Talrækken er uendelig eller Primalrækken er uendelig, da der ikke lader sig bestemme noget saadant Primal, efter hvilket der ikke følger andre Primal; men man turde ikke sige, at den og den uendelige Række har en vis bestemt endelig Sum.

Herved sættes længe Grænser for den mathematiske Undersøgelse, som vare vanskelige at overskride, men som maatte overskrides, naar man vilde løse vigtige Klasser af Opgaver, som frembyde sig. Manglen af en klar Værdiangivelse af Forholdet mellem inkommensurable Størrelser synes endog at gjøre Brud paa den fulde Sikkerhed, man havde tilstræbt ved den geometriske Fremstilling. Tilbageførelsen af Kubikrodsuddragning til Bestemmelse af to Mellemproportionaler vilde jo nemlig tabe i Betydning, naar man heller ikke havde noget klart Udtryk for Betydningen af den Proportionalitet, som ligger til Grund for denne Bestemmelse. Et egentligt Brud paa Exaktheden behøvede dog ikke at finde Sted, forsaavidt man ogsaa kan have tænkt sig de hertil nødvendige Proportioner karakteriserede ved den geometriske Sammenhæng mellem de Linier, der fremstille deres enkelte Led, medens Brugen af Ordet Mellemproportional kun skulde antyde, at denne Bestemmelse er en Almindeliggjørelse af den, der umiddelbart betegnes ved dette Ord, naar Mellemproportionalen er kommensurabel med de tilsvarende Yderled. Hvor klart man nu i hin tidlige Tid har gjort sig dette, vide vi ikke; men i hvert Fald maatte det betragtes som en stor Vinding at faa et almengyldigt og fuldt færdigt Proportionsbegreb at gaa ud fra, og

først bagefter vise Overensstemmelsen mellem dette og den geometriske Fremstilling.

Hvad det gjaldt om, var at faa et saadant Udtryk for den uendelige Tilnærmelse, — til Forhold mellem inkommensurable Størrelser, til Summer af uendelige Rækker eller til Summer af uendelig mange, uendelig smaa Dele (Integraler) — som paa den ene Side undgaar enhver Misbrug af Uendelighedsbegrebet, altsaa deraf kun benytter den Negation, som selve Ordet udtrykker, og paa den anden Side giver fyldestgørende Grunde for de positive Resultater, som man havde ment at kunne uddrage af et mindre vel afklaret Uendelighedsbegreb. Disse Resultaters Rigtighed var nemlig i det mindste i de simpleste Tilfælde øjensynlig nok, til at man turde antage, at de Slutninger, som mere eller mindre bevidst have ført dertil, kun mangle en exakt Formulering for at blive fuldt exakte.

En saadan Formulering fandt endelig Platons Samtidige, den store Astronom og Mathematiker Eudoxos fra Cnidos (omtr. 408—355). Vi lære den at kjende i de talrige Anvendelser, som gjøres deraf i 5te og 12te Bog af Euklids Elementer og rundt omkring i Archimedes' Skrifter. Skjønt den kommer til at lyde forskjellig ved de forskjellige Anvendelser, gjenkjender man dog overalt nøjagtig den samme Tanke, og jeg tør derfor ogsaa her give den i en kort og for alle disse Tilfælde fælles Form. Jeg maa dog saa strax tilføje, at jeg vel mener, at denne virkelige Overensstemmelse var klar og vejledende for dem, der i Oldtiden anvendte den omtalte Slutningsmaade, men at dog den fælles Form, som man nu kan give den, er et Fremskridt, der tilhører Nutiden, og som ikke maa agtes for ringe.

Slutningsmaaden er da denne: Naar to Størrelser u og v begge ere større end de stedse voxende Størrelser

$$u_1 < u_2 < u_3 \dots < u_m < \dots,$$

og stedse mindre end de stedse aftagende Størrelser

$$v_1 > v_2 > v_3 \dots > v_n > \dots,$$

og naar man kan gjøre m og n saa store, at

$$v_n - u_m < \varepsilon,$$

hvor ε er en forud opgiven Størrelse, der skal kunne antages saa lille, som man vil, bliver $u = v$; thi hvis f. Ex. $v > u$, kunde man sætte $v - u = \varepsilon$ og maatte da have

$$v = u + \varepsilon > u_m + \varepsilon > v_n,$$

hvilket er i Strid med de gjorte Antagelser. Faktisk indeholder denne Slutningsmaade tillige Kjendetegn paa, at de to Tilnærmelsesrækker hver for sig have en fuldkommen bestemt Grænseværdi. Herpaa lagdes dog i Reglen mindre Vægt af de græske Matematikere, da Grænsernes Existens betragtedes som forud sikret ved den geometriske Bestemmelse, som ikke afløstes, men suppleredes af de her nævnte Betragtningssmaader. Dette kunde ogsaa give Anledning til Modifikationer i Formen for den her nævnte Slutningsmaade. Naar man saaledes skulde bevise, at to Cirklers Arealer forholde sig som Radiernes Kvadrater, betragtedes Arealerne som Størrelser, hvis Existens forud var sikret. Det var derfor tilstrækkeligt som Tilnærmelsesværdier til Cirklen u at betragte indskrevne regulære Polygoner $u_1, u_2, u_3 \dots$ med stedse voxende Sidetal, naar man blot sikrede sig, at u kunde gjøres saa stor, at $u - u_n < \varepsilon$ en vilkaarlig opgiven Størrelse.

Til Kjendetegnene paa Ligestorhed knyttede sig ligesaa paalidelige Kjendetegn paa Uligestorhed, naar der var Brug for det, f. Ex. i Proportionslæren.

Skjønt Anvendelsen af denne Bevisførelse paa de forskjellige Tilfælde kunde være noget vidtløftig, og skjønt man ikke naaede ret langt i Opstilling af almindelige Konvergenzkriterier, blev den Exakthed, som man tilstræbte, naaet i hvert enkelt Tilfælde. Et positivt Uendelighedsbegreb er ganske undgaaet; thi at $u_1, u_2 \dots u_m \dots$ og $v_1, v_2 \dots v_n \dots$ give en uendelig Tilnærmelse til hinanden og til den derimellem liggende Størrelse u , er udtrykt ved, at man ikke kan tage en Størrelse ε saa lille, at man jo ved at gaa videre i Rækkerne kan faa $v_n - u_m$ eller $u - u_m$ mindre end ε . Man har

faaet fuldkommen fat paa, at denne Forudsætning netop er den, som det kommer an paa. Med fuld Ret lægges den hele Vægt paa at sikre sig dette i hver enkelt Anvendelse af Slutningsmaaden. Denne Sikring kan i nogle Tilfælde opnaas ved Benyttelse af det, som man allerede har forudsat om de paagjældende Størrelser. I andre have disse ikke været tilstrækkelig vel definerede til at faa ogsaa den her nødvendige Størrelsesbestemmelse med, og da har man ikke forsømt udtrykkelig at medtage de nye Forudsætninger, som blive nødvendige.

Hvor nøje man tog det i denne Henseende, se vi, naar Euklid finder det nødvendigt udtrykkelig at opstille den Forudsætning om Størrelser, som skulle danne et Forhold, at man skal kunne tage et saa stort Mangefold af den ene, at det overgaar den anden. Denne almindelige Forudsætning, som ogsaa baade Euklid og senere Archimedes lægge til Grund for deres infinitesimale Undersøgelser, synes at være Eudoxos' eget Udgangspunkt. Dertil følger Archimedes særegne Forudsætninger, passende til de særegne Anvendelser. Ved sine Undersøgelser af krumme Liniers Længde lader han sig saaledes ikke nøje med at opfatte dette Begreb som tilstrækkelig kjendt til ikke at behøve nærmere Bestemmelser, men han karakteriserer det nøjere ved følgende Forudsætninger: 1) at den rette Linie er den korteste Vej mellem to Punkter (hvad man med stor Uret har brugt som Definition paa den rette Linie, der netop maa forudsættes bekjendt, før der bliver Tale om Længder), og 2) at af to Linier mellem samme Punkter, som vende Konvexiteten til samme Side, den yderste er den største. Han opstiller tilsvarende Forudsætninger om krumme Fladers Arealer, og i den infinitesimale Behandling af Spørgsmaal henhørende til Ligevægtslæren finder han det nødvendigt udtrykkelig at opstille den Forudsætning, at Tyngdepunktet i et plant Areal eller et Legeme, der overalt vender Konvexiteten udad, ligger indenfor Omkredsen eller Overfladen.

Den af Eudoxos indførte almindelige Slutningsmaade gjælder Størrelser i al Almindelighed og vedkommer i og for sig ikke særlig den geometriske Fremstilling. Som allerede sagt knyttedes den dog til Geometrien, der alt forud var Bærer for den exakte Mathematik. Den blev derfor af Grækerne og deres Disciple til ind i den nyere Tid betragtet som hørende til Geometrien, og Geometrien kom til at danne en Modsætning til saadanne Undersøgelser, som kun vedrørte diskrete Størrelser, eller hvis Rigtighed kun var godtgjort, naar de paagjældende Størrelser kunde udtrykkes ved Tal, altsaa vare kommensurable. Denne Forskel udtrykker endnu Regiomontanus (f. 1436): „Mathematiken er Læren om Størrelser, og den bestaar af to Dele, Geometrien og Arithmetiken, eftersom den behandlede Størrelse er kontinuert eller en Talstørrelse.“

Mathematisk System.

Hensynet til, at Størrelserne variere kontinuert og altsaa ikke alle med Nøjagtighed kunne udtrykkes ved hele Tal eller endelige Brøker, eller under endelig Form sammensættes af de simple Størrelser, rette Linier og retliniede Figurer, hvortil Maalbestemmelserne ere knyttede, havde altsaa dels givet Anledning til den geometriske Fremstilling, dels til Eudoxos' exakte Behandling af de infinitesimale Bestemmelser. Jeg har særlig fremhævet dette paa den ene Side som det tydeligste Vidnesbyrd om, hvor strengt man tog Fordringen om exakt Bevisførelse, og hvor fuldstændig man opfyldte denne Fordring, paa den anden Side som den bedste Prøve paa ejendommelige Behandlingsmaader, der i flere Henseender afvige fra de nu brugelige. Det vil derefter forstaas, at man ikke var mindre nøjagtig i Behand-

lingen af andre Spørgsmaal, hvorved man meget jævnlig førte ganske de samme Beviser, som nu bruges. Med saadanne var man paa Euklids Tid kommen saa vidt, at hans Elementer omfattede det meste af, hvad der nu medtages i den elementære Geometri og Stereometri (dog endnu ikke Bestemmelsen af Kuglens Overflade og Rumfang, som først skyldes Archimedes), samt under geometrisk Form noget af vor elementære Algebra, endelig en Del af den elementære Arithmetik. Dog mangler i denne Bog alt, hvad der vedrører numerisk Udregning. Det er saa systematisk udelukket, at man ser, at det ikke hørte til Euklids Plan, som kun skulde omfatte den absolut exakte Mathematik, medens Regning ofte maa nøjes med Tilnærmelser. Denne Betragtning af Regning og dens Resultater som noget lavere var selvfølgelig uheldig for Regnekunstens Udvikling og i Længden heller ikke gunstig for selve Mathematiken. Ved Siden af den elementære Mathematik havde der paa Euklids Tid i Tilslutning til Undersøgelser, som vi alt have omtalt, dannet sig en højere Geometri, i hvilken navnlig Keglesnitlæren var ifærd med at indtage en meget fremragende Plads.

Til at udforme og beherske et saa stort Stof behøvedes imidlertid ikke blot den Sikkerhed i de enkelte Slutninger, som Grækerne havde bragt til en saa stor Fuldkommenhed og Finhed som den, vi have set den vigtigste Prøve paa. Efterhaanden som Stoffet voxer, behøver det en Ordning. Denne kan ved Sammenstilling af ensartede Ting lette Opbevaringen af det hele i Hukommelsen og gjøre det lettere at gjenfinde, hvad der maatte være blevet borte. Dette Hensyn traadte dog for Grækerne i anden Række og maatte gjøre det i en Behandling af Mathematiken, som fremfor alt skulde være exakt. Slutningerne drages altid fra noget, som alt er sikkert, til noget, som skal sikres. Ordningen maa altsaa være en saadan, at man paa hvert Punkt af Arbejdet har alt det til sin Raadighed, som skal bruges for at gaa videre. Det samlede Stof indordnes da i et System, i hvilket

der efterhaanden skrider frem fra det, som fra først af antages for bekjendt eller i det mindste forudsættes, til nye og atter nye Sandheder, hvis Rigtighed stadig følger af de foregaaende. En saadan synthetisk Ordning findes hos Euklid, og Sammenføjningernes Paalidelighed er paa hvert Punkt sikret derved, at Udsigelsen og Behandlingen af hver enkelt Opgave eller Sætning med tilhørende Løsning eller Bevis bestaar af ens formede Led, som lade Slutningens Paalidelighed træde tydelig frem.

Et saa udarbejdet System har krævet betydelige Forarbejder. Dels have disse været af formel logisk Art og gaaet ud paa Frembringelsen af de Former, som frembyde størst Sikkerhed for, at man ikke tog fejl i sine Slutninger. Dels have de været af mathematisk Art, for saa vidt som man paa mange Steder maatte opsøge mellemliggende Sætninger, der bedre og sikrere føre til de Hovedsætninger, som skulle fremstilles, end de Slutninger, hvorved Opdagelsen først havde fundet dem. Udfindelsen af Mellemsætninger, der danne Forbindelsen mellem bekjendte Ting og en ny Sætning, hvis Rigtighed man maaske endnu kun formoder, eller en ny Konstruktion, hvis Mulighed først vil blive sikret derved, at man ser, hvorledes den skal udføres, foretages ved den saakaldte analytiske Methode. Ved denne gaar man ud fra den nye Sætning eller Løsning som bekjendt og forsøger fra den at gaa over til andre, indtil man tilsidst kommer til saadanne, som virkelig ere bekjendte.

Lykkes denne Analyse, ser man derved, hvorledes Sætningen skal bevises, hvis den virkelig er rigtig, Konstruktionen udføres, hvis den er mulig; men for denne Rigtighed og Mulighed har man endnu ikke faaet fuld Sikkerhed. Denne faar man først gennem den Synthese, som derfor maa følge efter Analysen, og ved hvilken man gaar den samme Vej i modsat Retning fra det bekjendte og sikrede til det, som skal bevises eller udføres. I en rent synthetisk Fremstilling som Euklids kan man nøjes med at fremsætte denne

Synthese, som i sig selv giver fuld Sikkerhed, og udelade den Analyse, som har ført dertil.

Gjør Analysen derimod den Sætning, for hvilken man søger et Bevis, eller den Konstruktion, som man ønsker udført, afhængig af noget vitterlig falskt eller umuligt, er det derved umiddelbart godtgjort, at den undersøgte Sætning eller Konstruktion selv er urigtig eller umulig. Derved faas de saakaldte antithetiske Beviser, som, da de skjønt analytiske i sig selv ere fyldestgørende, indgaa i Euklids ellers syntetiske Fremstilling.

Det er klart, at den her omtalte Analyse og Synthese har kunnet gøres til Gjenstand for mange logiske Undersøgelser. Deres hensigtsmæssige Forening har spillet en vigtig Rolle ved en mathematisk Undersøgelse, som var af stor Betydning for Grækerne. Vi have fremhævet, at den geometriske Konstruktion for dem særlig tilsigtede at sikre Existensen eller Muligheden af det konstruerede ved direkte at tilvejebringe det eller, for saa vidt Konstruktionen kun beskrives, men ikke praktisk gennemføres, ved at vise, at det kan tilvejebringes. Naar da en Opgave stilledes, kom det særlig an paa at angive Grænserne for dens Mulighed. Det var Analysens Sag at vise dens Umulighed, naar Grænserne overskrides, altsaa at vise, at de ved Grænserne satte Betingelser ere nødvendige. Dette skete ved et antithetisk Bevis. Derefter fulgte Opgaven med en udtrykkelig Angivelse af Grænserne, i den saakaldte *Diorisme*, og Løsningen af den saaledes begrænsede Opgave viste, at Betingelserne vare tilstrækkelige. Paa den Maade viser, for at nævne det simpleste Exempel, Euklid først, at en Side i en Trekant nødvendigvis er mindre end Summen af de to andre; at Størrelserne af Siderne i en Trekant ikke ere underkastede andre Betingelser end disse, viser han dernæst ved virkelig at konstruere en Trekant med Sider, der tilfredsstille dem.

Den Nøjagtighed, hvormed allerede Euklid følger de her antydede Regler og faar Stoffet, saavel det ældre som

det, der paa hans Tid var mere nyt, indpasset i de derved bestemte Rammer, viser, hvor vel udarbejdede disse maa have været ogsaa før hans Tid. En senere Tradition tillægger i den Henseende Platon Hovedæren, idet den gjør ham til Opfinder af den analytiske Methode, hvorved netop maa tænkes paa hele den formelle Udvikling. En saadan Tradition fra Nyplatonikerne siger i sig selv ikke meget. Noget styrkes den ganske vist ved Platons vitterlige Indsigt i og Interesse for Mathematiken. Denne lægger han for Dagen ved sine Dialoger, som ofte forudsætte ret vidtgaaende mathematisk Indsigt hos Læseren. Naar han saaledes forudsætter Kjendskab til de regulære Polyedre, som man i den Anledning har kaldt de platoniske Legemer, maa man antage, at hans filosofiske Disciples mathematiske Forkundskaber i visse Henseender ere gaaede videre end de, som hos os den større Klasse af Studenter faar Lejlighed til at naa. Blandt hans Disciple var der iøvrigt ogsaa flere fremragende Mathematikere, og det kan maaske tildels være under Platons Samarbejde med disse og, som Nyplatonikerne berette, under hans ledende Paavirkning af disse, at Formerne for de mathematiske Slutninger ere udviklede. Herved er dog at bemærke, at flere af de samme Disciple ogsaa vare Disciple af den før nævnte store Mathematiker Eudoxos, den Mand, der, som vi have set, løste den største af de formelle Vanskeligheder, idet han gav en Størrelses Bestemmelse som Grænseværdi for en uendelig Tilnærmelse et exakt og uangribeligt Udtryk. Det tør vel antages, at hans Andel i Mathematikens formelle Bearbejdelse og hans Paavirkning af sine Disciple strakte sig videre end til dette Hovedpunkt. Der bliver dog Plads nok ogsaa for Platons Indflydelse. Hvis Beretningerne herom have nogen Paalidelighed, vil der her have vist sig den første Prøve paa en Art af samtidigt Arbejde af en af de største Mathematikere og en af de største Filosofer, hvorpaa vi i det følgende endnu skulle se to lige saa betydelige Exempler. Mathematikeren gjør ikke blot de be-

tydeligste Opdagelser af nye mathematiske Sandheder; men han finder tillige de fineste og nøjagtigste Udtryk for de vanskeligste Slutninger. Filosoffen gaar ikke saa dybt i den strengt logiske Behandling af de mathematiske Spørgsmaal; men han skaber de Former, som derefter komme i almindelig Brug, og som fortjene det derved, at de kunne anvendes ogsaa af mindre betydelige Mathematikere, og tillade disse paa en fuldt ud betryggende Maade ej blot at bruge den alt udarbejdede Mathematik, men selv at bygge videre.

Have vi nu end ikke for Eudoxos' og Platons Vedkommende Midler til at udskille, hvad vi skyldte den ene og hvad den anden af de to store Mænd og deres Disciple, foreligger der udtrykkelige Meddelelser om indbyrdes Forhandlinger mellem deres Disciple om flere vigtige herhenhørende Spørgsmaal. At den formelle Bearbejdelse af Mathematiken ogsaa har staaet i Forbindelse med Udarbejdelsen af Reglerne for den almindelige, formelle Logik, som vi finde den hos Aristoteles, er aabenbart. En stor Del af disse Regler turde være bygget over deres simpleste Anvendelser, nemlig dem paa mathematiske Slutninger; det er ved disse, at Forudsætningerne optræde saa rent og ublandet, at Reglerne aldeles umiddelbart kunne anvendes.

Det Samarbejde mellem Mathematikere og Filosofer, som havde fundet Sted den Gang, da Athen var Hovedsæde eller i hvert Fald Midtpunktet for det videnskabelige Arbejde, fortsattes ikke paa den Maade, da Alexandria blev Datidens Universitetsby, et Navn, som baade dens Institutioner, Lærernes ret betryggede Stilling og Lærlingenes Tilstrømning tillade os at give den. I den alexandrinske Periode, denne Mathematikens glimrende Tid, som begynder med Euklid, blev Mathematiken et Fag for sig selv. Belært af utidig Indblanding fra Filosofer og Sofister, der sikkert er gaaet ved Siden af det gavnlige Samarbejde, som vi have omtalt, stræbte man endog at holde det, som tilhører Filosofien og Mathematiken, skarpt ude fra hinanden.

Dette træder frem i den Maade, hvorpaa baade Euklid og følgende Matematikere begynde deres Systemer. Efter den Vis, hvorpaa den analytiske Methode arbejder og det synthetiske System opføres, skulle de nye Sandheder stadig gjøres afhængige af Aerkjendelsen af ældre Sandheder. Det er imidlertid indlysende, at der da maa være visse simpleste Sandheder, som man maa begynde med at fastslaa. Hvorfra vi have dem, Redegjørelsen for de Erfaringer eller maaske medfødte Evner, som have ført os til dem, henhører under Erkjendelsestheorien og bliver saaledes Filosoffernes Sag. Euklid — saavel som Archimedes, hvor denne fører ind paa nye Omraader — sætter en skarp Grænse overfor saadanne Spørgsmaal ved kort og godt at forlange Aerkjendelsen af visse Forudsætninger. Den, der anerkjender dem, skal dernæst nok blive overbevist om Rigtigheden af alt det følgende. Matematikerens Sag er det med Hensyn til Forudsætninger kun at faa alt det med, som han har Brug for, og ikke at medtage for meget. Dette sidste vilde han gjøre, naar han enten gjorde to Forudsætninger, som vare i Strid indbyrdes, eller en saadan, som følger af de alt gjorte Forudsætninger, og som altsaa burde udledes af disse og ikke forudsættes.

I disse Henseender kan man godt betegne Euklids og Archimedes' Opstilling af Forudsætninger som sande Mesterværker, selv om de ikke ere uangribelige. I Maaden, hvorpaa de udtrykkes, frembyde Euklids derimod store Svagheder. Adskillige af Definitionerne, f. Ex. Definitionen af en ret Linie, give saaledes slet ingen Oplysning om det, der skal defineres, og i Postulater og Axiomer ere flere Forudsætninger saa kort angivne, at man først ret forstaar, hvad der menes, naar man senere ser, hvorledes Forudsætningerne anvendes. Denne Korthed, som danner en Modsætning til den omstændelige Nøjagtighed, hvormed senere Sætninger og Konstruktioner fremsættes og Beviser føres, forklares maaske netop derved, at Euklid vil fastholde en skarp Grænse

overfor alt, hvad der kunde tilhøre Filosofien. Paa dette Punkt vilde enhver nærmere Forklaring af Forudsætningerne tillige indeholde en Begrundelse af saadanne Forudsætningers Berettigelse, og en saadan Begrundelse kunde ikke faa den for Mathematikeren nødvendige Fuldstændighed. Han foretrækker derfor helt at udelade den og undgaar saaledes en Forhandling med Filosoferne paa deres Grund. I sine Definitioner nøjes han derfor med at underrette dem, der videre ville følge ham, om, at han har Brug for Begreberne ret Linie o. s. v. Han forudsætter da, at hans Læsere have et tilstrækkelig godt, foreløbigt Begreb om den rette Linie, til at forstaa, hvad han videre siger om denne; men den Abstraktion, der fører til dette foreløbige Begreb, er det ikke hans Sag at gjøre Rede for.

Derimod glemmer Euklid ingenlunde at udstyre den rette Linie og alle de øvrige Begreber med de Egenskaber, som han har Brug for i den paafølgende Lærebygning. Det sker dog ikke, som en moderne Læser nærmest vilde vente, i Definitionen, men i de paafølgende Postulater og Axiomer. I dem erfarer man saaledes, at en ret Linie er fuldkommen bestemt ved to af sine Punkter, at den kan forlænges i det uendelige, at to rette Linier i samme Plan skjære hinanden, naar blot de Vinkler, som den danner med en overskjærende Linie, ikke tilfredsstille en vis aldeles bestemt Betingelse, og at man kan sammenligne rette Liniers Længde ved at lægge dem over paa hinanden. Den her omtalte Afvigelse fra den moderne Maade at definere paa er aabenbart kun en Forskel i Form uden nogen indgribende logisk Betydning. De Gamles Form bliver endog lettere i sin Bygning og ved den tydelige Adskillelse af de forskellige Led bedre at overskue end en moderne Definition, der sædvanlig skal skrues sammen i en enkelt Sætning. Man sammenligne saaledes den Definition paa Begrebet Størrelse, som faktisk gives i Euklids Axiomer til 1ste Bog, med de Begrebsbestemmelser,

som man nu undertiden danner ved en Sammenføjning af alle de samme *Attributer* i en enkelt formel *Definition*.

For ret at forstaa de Gamles *Postulater* og *Axiomer* og den *Adskillelse*, som de gjøre mellem disse, maa man erindre den alt omtalte *Adskillelse* mellem *Læresætninger* (*Theoremer*), som skulle bevises, og *Opgaver* (*Problemer*), som skulle løses ved geometrisk *Konstruktion*. Man maa heller ikke glemme den logiske *Betydning*, som denne sidste havde, nemlig som *Middel* til at tilvejebringe det, som man konstruerer, eller da *Konstruktionen* kun theoretisk angives og bevises, som *Bevis* for, at dette eksisterer. I *Spidsen* for disse maa gaa *Existenspaastande* eller *Fordringer* af *Anerkjendelse* af, at man kan tilvejebringe, eller tænke tilvejebragt, visse matematiske, sædvanlig geometriske *Objekter* med bestemte *Egenskaber*. Disse findes i *Postulaterne*. Man siger sædvanlig, at disse indeholde *Fordringen* om, at de elementær-geometriske *Konstruktioner* skulle kunne udføres ved *Lineal* og *Passer*. En saadan *Udtalelse* er urigtig, idet de omtalte *Instrumenter* slet ikke nævnes, og den er vildledende, idet den fører *Tanken* bort fra *Konstruktionens* logiske *Betydning*. Det er *Existensen* af ret *Linie* og *Cirkel*, bestemte ved to *Punkter*, eller ved *Centrum* og *Radius*, som postuleres, og er denne *Existens* anerkjendt, vil man vise *Muligheden* af ved deres *Hjælp* at tilvejebringe bl. a. ogsaa de *Figurer*, som — i den elementære *Mathematik* — fremstille *Kvadratrod*der og andre almindelige *Størrelser*. Saaledes forstaar man, at ogsaa den nys omtalte *Bestemmelse* af *Skjæringspunktet* mellem rette *Linier* i samme *Plan* bliver et nødvendigt *Postulat* (det 5te); thi man kommer ikke langt i sine *Konstruktioner*, naar man skal nøjes med at trække rette *Linier* gennem givne *Punkter* og ikke tillige tør bruge de derved bestemte *Skjæringspunkter*. Disses *Existens* kræver et *Postulat*, som dog maa indskrænkes saaledes, at det *Tilfælde*, hvor *Linierne* ere parallelle, karakteriseres og undtages. Den ensidige *Vægt*, som man har lagt paa *Undtagelsen*, har i *Tidernes Løb* medført megen

Forvirring og bragt til, i Strid med de paalideligste Haandskrifter, at stille dette Postulat mellem Axiomerne som det 11te. Den har til Tider fremkaldt ubillig Kritik af Euklid, i vort Aarhundrede snarere en vis overdreven Beundring af, at han har gennemskuet Nødvendigheden af særlig at opstille denne Forudsætning, naar han vilde have den med. Den maatte simpelthen fremtræde som uundværlig i hans System, og da han — af gode Grunde, som vi nu vide det — ikke kunde udlede den af de andre, maatte han tage den særskilt med.

Som Postulaterne vare de Existenspaastande, som maatte gaa forud for de i Konstruktioner indeholdte Existensbeviser, saaledes vare Axiomerne ubeviste Læresætninger, der gik forud for de egentlige Læresætninger. Som Grundlag for disse tjente dog tillige Postulater og Konstruktioner; thi før man beviste noget om et matematisk Objekt, maatte man ved Konstruktion sikre sig dets Væren. Euklid, der vel i Definitionerne har sagt, hvad en ligesidet Trekant er, beviser i Sætning 1 dens Væren ved at konstruere den, og end ikke Midtpunktet mellem to givne Punkter tør han benytte, før han har vist, hvorledes det tilvejebringes ved Konstruktion.

Den græske Mathematiks Blomstring og Forfald.

I Euklids Elementer er Mathematiken naaet til en logisk Stringens, der indtil vore Dage indenfor sit Omraade har staaet og maa staa som en mønsterværdig Tilnærmelse til den absolute Fuldkommenhed, som selv Mathematiken, der maa tage sine Begreber og sit Sprog fra de daglige Erfaringer og det daglige Sprogs Tilfældigheder — for ikke at

Apollonios' Keglesnit saa vanskelig at læse, at det er mig ret forstaaeligt, at nu til Dags faa Matematikere, ja faa Mathematikhistorikere trænge tilbunds i den; men ved Studiet af disse Bøger kommer man dog til at forstaa, at der kan være givet en ypperlig mundtlig Undervisning i Matematik i Alexandria. Den geometriske Anskuelse kan være benyttet og udviklet ved Foredrag, under hvilke Tilhørerne saa Figurerne blive til, og de Studerende, som ad denne Vej tilegnede sig Stoffet, modnedes derved til at forstaa de i Skrifterne opførte Systemer, hvori det fremstilledes paa en ofte besværlig, men uangribelig Maade.

At nu dette virkelig maa have været Tilfældet, kunne vi se af de opbevarede Sturværker af Euklid, Archimedes († 212) og Apollonios (omtrent 200) og af Beretningerne om, hvad disse og deres Samtidige ellers have behandlet. Ganske vist vare Apollonios, der i Oldtiden kaldtes den store Geometrer, og Archimedes, med hvem man kun tør sammenligne den nyere Tids allerypperste Matematikere, Mænd, der personlig bør have en Hovedandel i Æren for, hvad der ved dem er udrettet; men Form og Indhold af deres Værker vise dog, at de helt og holdent staa i den Skole, hvis logiske Principer vi her have udviklet. Fra Apollonios' Haand have vi endog, gennem arabisk Oversættelse, et Skrift (Om Forholdssnittet), hvor han med trættende Udførlighed fører Diskussionen af en enkelt Opgave saaledes igjennem i alle Enkeltheder, at vi maaske deri have det bedste Exempel paa de Fordringer, man i Alexandria stillede til et i alle Henseender uangribeligt Skolearbejde. I hans *Keglesnit* nøder Stoffets Rigdom ham vel til at gaa langt raskere frem; men her gjælder det samme som om Euklids Elementer, at en saa mægtig og sikkert sammenføjet Bygning ikke bliver til, uden at forud mange have arbejdet paa de enkelte Sten og have forsøgt andre Sammenføjninger af disse og vel ogsaa forsøgt at bruge andet Materiale end det, der netop har passet ind i hans Plan. Vi vide ogsaa af hans

Fortaler og andre Beretninger, at dette har været Tilfældet. Archimedes kunde ikke have givet de kortere Meddelelser om mere begrænsede Emner — Afhandlinger, som vi nu vilde kalde dem —, hvilke han sendte fra Syrakus til Alexandria, en paa en Gang saa simpel og naturlig og tillige med Skolens Principer saa vel stemmende Form, han kunde ikke overføre disse Principer paa de nye Omraader, som han først betraadte, hvis han ikke selv havde tilegnet sig disse Principer saaledes, at han bevægede sig deri med fuld Frihed og deri fandt det naturligste Udtryk for Tanker og Slutninger, naar de skulde have fuldt Krav paa Paalidelighed. Archimedes' og Apollonios' Værker vise ogsaa deres Samtidiges høje Udvikling ved de Forudsætninger, de stille, ikke saa meget til Læserens Forkundskaber som til hans Evner til at følge vidtgaaende Udviklinger. Saa omhyggelig udarbejder man ikke sine Arbejder, uden at man tør vente at finde Læsere, som baade forstaa Indholdet og vide at skatte den vel overvejede Form.

Det matematiske Indhold af disse Mænds Arbejde er det ikke her Stedet at fremdrage. Kun bør jeg omtale en enkelt Klasse af de mest betydningsfulde Undersøgelser, som netop ere fremkaldte af Hensyn til de logiske Principer, hvilke her have beskæftiget os. De Gamles geometriske Konstruktioner ved ret Linie, Cirkel og Keglesnit maa vel fængsle enhver, som har Sands for, hvad der er smukt og elegant i Geometrien; men i og for sig have de mindre Betydning for os, der ikke føle Trang til denne Form for Existensbeviser. Ved at være Organer for en almindelig Størrelseslære førte de imidlertid videre til Undersøgelser af en almindeligere Natur og Resultater, som ogsaa bevare deres Interesse, naar man affører dem det geometriske Klædebon. I den Henseende maa navnlig erindres, at Konstruktionens Formaal gjorde det nødvendigt i *Diorismen* nøjagtig at angive Grænserne for dens Mulighed. Disse Angivelser blive

Maximums- og Minimumsbestemmelser for de Størrelser, der i Konstruktionen skulle behandles som givne.

Herhen høre ikke blot saadanne elementære Bestemmelser som den af Maximum for Produktet af Størrelser med given Sum eller omvendt Minimum af Summen af Størrelser med givet Produkt. Disse udledes hos Euklid af den geometriske Løsning af Ligninger af anden Grad og benyttes flittig af de græske Matematikere. I et Manuskript, som man i Reglen er tilbøjelig til at tillægge Archimedes, benyttes Løsningen af Ligninger af tredie Grad ved Keglesnit paa lignende Måade til at bestemme Maximum af en Størrelse af Formen $x^2(a - x)$, hvor a er given, eller, om man vil, Betingelsen for, at en Ligning af tredie Grad faar lige Rødder. Nogle vidtgaaende Undersøgelser af lignende Natur i Apollonios' 5te Bog, som faktisk falde sammen med Huygens' Bestemmelse af Keglesnittenes Evoluter, og som derfor ofte omtales som Tegn paa, hvor langt Apollonios i visse Henseender naaede ud over sin Tid, ere i Virkeligheden efter græsk Opfattelse uundværlige Led i den Opgave, han behandlede, nemlig at konstruere Normalerne til et Keglesnit. At han formaaede at gennemføre denne Behandling, geraader ham dog ganske vist ogsaa til stor personlig Ære.

Den logiske Rustning, hvorved de Gamle sikrede de indvundne mathematiske Resultater, forekommer os tung nu, da vi anvende andre Dækningsformer og ere øvede i en anden Kampmaade. Den blev ogsaa for tung for de græske Geometrere den Gang, da den Øvelse i dens rette Brug, som især var holdt vedlige i Alexandria, blev afbrudt, og da man væsentlig kun havde den skriftlige Overlevering at holde sig til. Rustningen blev dog ikke kastet bort. Tværtimod, den holdtes i Ære og oppudsedes med Omhu, ofte rigtignok mest de Dele, som ikke spillede den største Rolle for Dækningen eller dog let kunde ombyttes med det, som umiddelbart vilde frembyde sig under hvert enkelt Spørgsmaals Behandling. Med Rustningen bevaredes ogsaa de vigtigste Resul-

tater, som de store Mathematikere havde indvundet, og som dækkedes af denne Rustning. Paa enkelte Punkter fandt man vel ogsaa lidt nyt i Ly af denne; men bevæge sig i den med den rette Frihed formaaede man ikke, og gaa ud paa saadanne nye Omraader, hvor man ikke alt forud i den havde fornøden Dækning, vovede man ikke.

Der indtraadte saaledes en Standsning i Mathematikens Udvikling, som begyndte paa den Tid, da Romerne bleve Herrer i Alexandria og samtidig udbredte eller havde udbredt deres Magt over de andre Lande, hvor den græske Kultur havde sit Sæde. Her gik det nemlig ikke saaledes som ofte ellers, naar et mindre civiliseret Folk undertvinger et gammelt Kulturfolk, nemlig at det første ikke blot lægger sig efter og selv bliver Medarbejder i det sidstes Videnskab og Kunst, men endog efterhaanden ved sin friske Kraft giver dem en ny Flugt. At dette ikke skete nu, forklares vistnok bedst ved, at Romerne stode for højt — og vidste, at de gjorde det — til uden videre at blive Grækernes Lærlinge. Besad Grækerne Kunst, Filosofi, Mathematik og en begyndende Naturvidenskab, som rigtignok hemmedes ved den altfor abstrakte Retning, Filosofien og Mathematiken havde taget, saa besade Romerne foruden den store Dygtighed i al Krigens Gjerning en udviklet privat og offentlig Ret. De undlode naturligvis ikke, efterhaanden som de bleve mægtige og rige og overdaadige, at tage ogsaa saadanne ædlere Nydelser med, som den græske Kunst kunde bringe. De optog ogsaa det af den græske Filosofi, som ikke var for vanskelig tilgængeligt, og de blandede det efterhaanden ind i al den Tro og Overtro, som samlede sig fra de Lande, Romerne havde erobret, og som gik forud for Kristendommens Udbredelse; men til et saadant Arbejde, som en virkelig sammenhængende Tilegnelse af den græske Mathematik vilde kræve, dertil agtede de ikke denne Gren af den græske Kultur værdig. Vi se det paa de romerske Landmaalere, som helst lode sig nøje med gamle ægyptiske Regler, og

naar de optog et og andet Resultat fra den græske Mathematik, ofte fik noget helt galt ud af det. Vi se det paa enkelte theoretiske Forfattere henimod Folkevandringen, som visselig ikke skulde give de nye indtrængende Folk nogen fornuftig Forestilling om Mathematiken.

Som allerede berørt bevarede de græske Folk deres vigtigste mathematiske Skatte, men uden at komme synderlig langt udenfor det Omraade, der allerede var naaet. Og dog var der netop i den sidste Del af den græske Blomstrings-tid kommet et nyt Moment ind, som ved videre at dyrkes vilde have medført en vigtig Udvidelse af det geometrisk-mathematiske System, nemlig den videre Udvikling af den praktiske Beregningskunst, som Astronomien krævede, og hvortil det fra Østerland hentede Sexagesimalsystem gav Hjælpemidler. Denne Udvikling har sat betydningsfulde Frugter under Ly af den gamle græske Geometri; men til at øve en væsentlig Tilbagevirkning paa denne kom den for sent.

Iøvrigt blev de senere græske Mathematikers Hovedgjerning den at skrive Kommentarer og Hjælpesætninger til de gamle. Disse ere jævnlig af den Beskaffenhed, at man er de ældre Mathematikere taknemmelig for ikke i deres Værker at have taget de Forklaringer med, som Hjælpesætningerne indeholde; thi disse ere ofte overflødige og vilde ved deres Bredde blot skade Overblikket. Ja, de kunne endnu skade, naar man med Forglemmelse af den lange Tid, som ofte ligger imellem dem og de Skrifter, de angaa, vil opfatte dem som autentiske Fortolkninger, der kunne træde i Stedet for et umiddelbart Studium af de store Forfattere og den Maade, hvorpaa disse selv benytte de kommenterede Sandheder. Dog have disse Skrifter, ganske afset fra den ringe mathematiske Værdi af Kommentatorernes selvstændige Bidrag, en meget stor Betydning for vort Kjendskab til den gamle Mathematik, ikke blot ved de Oplysninger, vi derigjennem indirekte faa om tabte Arbejder fra

den bedste Tid, men ogsaa ved de deri indeholdte Meddelelser om det logiske Formaal for de enkelte Led i Systemet. Meget af dette har ogsaa været bestemmende for vore foregaaende Udtalelser om den store græske Mathematik.

Paa en enkelt Forfatter fra denne lange Nedgangsperiode passer det, som vi have sagt, dog ikke. Det er Diofantos (omtr. 300 efter Chr.). Han er ikke smaalig nøjagtig med Formen. Naar han f. Ex. efter græsk Skik bruger geometriske Fremstillinger af Tal, overholder han ikke den geometriske Homogeneitet, men taler f. Ex. om Summen af en Trekant og en af dens Sider i Betydning af Summen af de derved fremstillede Tal. Indholdet fortjener stor Opmærksomhed ved sit eget Værd og ved sin Afvigelse fra, hvad der findes i den gamle og i den fra hans egen Tid opbevarede græske Mathematik. En Nyskabning af ham selv kan det paa den anden Side ikke godt være; en saa betydelig Exempelsamling som den, der findes hos ham, kan nemlig ikke godt være en enkelt Mands eller Tids Gjerning.

I Anledning heraf har man for 20—30 Aar siden været tilbøjelig til at søge hans Forbilleder hos Inderne, med hvis senere Arbejder hans ere beslægtede. Efter nyere Undersøgelser er Paavirkningen dog snarere gaaet den modsatte Vej, med Undtagelse af, at Diofant og andre samtidige Grækere i Alexandria ved Handelsforbindelserne med Indien kunne have vundet den større Regnefærdighed, han lægger for Dagen. Man maa altsaa nærmest i ham se en for sin Tid betydelig Repræsentant for en Retning, hvis ældre Repræsentanter ere gaaede tabt.

Nogen Sammenhæng med ældre græske Arbejder lader sig dog paavise, endog med saadanne, som vedkomme os her. Det er fortrinsvis ubestemte Ligninger af anden Grad, som han behandler, og af dem søger han rationale Løsninger. Saadanne Opgaver opstaa, naar man vil give en Opgave, der afhænger af en sædvanlig, numerisk Ligning af anden Grad, en saadan Bestemmelse, at Opløsningerne blive ratio-

nale. Herpaa kom til at ligge særlig stor Vægt for Grækerne, for hvem Opgaven, som vi have set, ophørte at være numerisk i det Øjeblik, den ubekjendte blev irrational. En allerede fra Pythagoræernes Tid bekjendt Opgave af denne Art er den at bestemme en retvinklet Trekant, hvis Sider ere kommensurable.

Endnu skulle vi nævne, at Diofant er den første os bekjendte Forfatter, som fremstiller den ubekjendte ved et Tegn og anvender et begyndende Tegnsprog. Dette vedkommer dog kun for saa vidt Udviklingen af den exakte Mathematik, som Tegnsproget senere er blevet et Middel til præcis og utvetydig Fremstilling. Diofant tjener det kun til en Afkortning i Fremstillingen, hvormed tillige følger et lettere Overblik over denne. Diofants Tegn for den ubekjendte er udelukkende bestemt til at fremstille et ubekjendt Tal, det vil sige rationalt Tal.

Indisk og arabisk Mathematik.

Vi kunne ikke strax gaa over til det Folk, som i Behandlingen af Mathematiken blev Grækernes umiddelbare Arvtagere, nemlig Araberne, men maa først vende os til det Sted, hvorfra andre Sider af Mathematiken end de, der skyldes Grækerne, fik deres første Udvikling, nemlig Indien. Her fandtes en ældgammel Lyst til og Færdighed i at fremstille store Tal, og i Forbindelse hermed blev ogsaa Regnekunsten tidlig dyrket. Efter at man dertil forud havde anvendt forskellige Talbenævnelser, der, som de fleste andre Folks Talsystemer, vare dannede som Titalsystemer, var det her, at man fandt paa ogsaa at skrive Tallene saaledes ved Hjælp af de 9 betydende Cifre og Nul, som vi gjøre det nu, og i det væsentlige at anvende de nu brugelige Regneregler paa samme Maade, som det nu sker. Hvor langt tilbage denne

Opfindelse gaar, lader sig ikke bestemt paavise. Kun vides det, at det særlige Tegn for 0, som tillod at undvære forud inddelte Tavler, og som danner Slutstenen paa den nævnte Opfindelse, findes i et Skrift fra det 4de eller 5te Aarhundrede efter Chr.

Det er paa dette Punkt, at Indernes Hovedfortjeneste ligger, en Fortjeneste, hvis kolossale Betydning man ikke behøver at være Mathematiker for at vurdere. Færdigheden og Øvelsen i at regne og den derved vundne Vane til at behandle Tal, Talanskuelsen, gav et vidt Omraade for de Erfaringer og Induktioner, hvormed mathematisk Udvikling begynder, og at man ogsaa forstod at tænke over Aarsagsforbindelserne, viser sig allerede i Dannelsen af selve Regningsreglerne. I den ræsonnerende Behandling af Mathematiken stode Inderne imidlertid saa langt tilbage for Grækerne, at den, som kjender dissers exakte Slutningsmaader og præcise Fremstilling, i saa Henseende vil have ondt ved at lade sig tilfredsstille af Inderne. Tilmed er den indiske Mathematik saa tidlig paavirket af den græske, at adskillige af de Begrundelser, man forefinder, kunne hidrøre fra Grækerne, hvis Form dog er langt fra at være bibeholdt. Den indiske Mathematiker nøjes saaledes ofte med at tegne den Figur, ved hvilken Beviset føres, og opfordre Læseren til paa denne at se Paastandens Rigtighed.

Inderne forstode dog ved deres Regnefærdighed paa mange Punkter at bringe mere ud af Mathematiken end det, som de havde faaet af Grækerne. Den nøjagtige Undersøgelse af Rigtigheden af en mathematisk Regel laa dem da af den Grund mindre paa Sinde end Grækerne, at de havde meget lettere ved at regne efter, om den passede i saa mange Tilfælde, at dette kunde overbevise dem om Rigtigheden af Reglen.

Af exakt Mathematik kunne vi saaledes ikke lære meget nyt af dem. Dog maa vi nævne nogle Synsmaader, hvorved, netop fordi Inderne ikke tænkte paa at gjøre sig de samme videnskabelige Skrupler som Grækerne, deres Be-

handling ganske af sig selv kom til at række over et videre Omraade end en tilsvarende græsk Behandling. Inderne havde saaledes aldeles ingen Betænkelse ved at anvende de sædvanlige Regneregler ogsaa paa irrationale Tal. Disse selv kunde de jo regne ud med saa stor Nøjagtighed, som hver Opgave maatte kræve. Naar derfor Inderne brugte et Tegnsprog, ja gaa noget videre end Diofant, idet de indføre samtidige Betegnelser for flere ubekjendte, falder det dem ikke ind som Diofant at kræve, at disse ubekjendte Tal skulle være rationale. —

Folkevandringerne, saavel den tidligere, der fra Nord udbredte sig over hele den vestlige Del af det romerske Rige, som den, der senere fra Arabien med rivende Hast udbredte Muhamedanismen og det arabiske Herredømme til alle Sider, bragte nye Kaar for Videnskaben. Ved dem begge fulgte paa den Strøm, der stræbte at bortskylle den gamle Kultur, alvorlige Forsøg paa at tilegne sig denne. Ved dem begge varede det ikke længe, inden de nyankomne med større Kraft og Friskhed selv begyndte at forarbejde det modtagne eller dog i det mindste at tilegne sig det paa en anden og bedre Maade end de sene Slægter, fra hvilke de umiddelbart modtog det.

Det var dog kun Araberne, der paa denne Maade kom i nogen frugtbar Berøring med den græske Mathematik, som jo alt længe havde haft sit Midtpunkt i Alexandrien, men sikkert ogsaa har haft Udbredelse adskillige andre Steder i de Lande, hvor Muhamedanismen trængte frem. Megen Mathematik kunde man vel ikke lære af de Grækere, som da boede i disse Lande, og af Bøger fik man ikke fat paa mange flere end dem, som vi have endnu. Nogen Vejledning forefandtes dog til at begynde at læse disse, og den Iver, hvormed arabiske Lærde toge fat, navnlig opmuntrede af Abassiderne i Bagdad, satte dem i Stand til at forstaa mere og mere af disse Bøger og deri efterhaanden finde nye Impulser til at gaa videre i Studiet.

Det er ganske naturligt, at de da ogsaa paa enkelte Punkter maatte komme til at overgaa deres Lærere. I den Henseende har man dog undertiden tillagt dem for meget. Dette gjælder navnlig paa Algebraens Omraade, som senere Europæerne dels paa nærmere Hold have modtaget gennem Araberne, dels have haft lettere ved at forstaa i disses ved numeriske Anvendelser oplyste Skrifter end i den paa Uangribelighed beregnede geometriske Fremstilling, som bruges i de opbevarede græske Arbejder. Man har heller ikke altid bemærket, at de videst gaaende algebraiske Undersøgelser, hvortil Araberne som Grækerne bruge Keglesnit, angaa og ere fremkaldte ved Spørgsmaal, som ere behandlede af græske Geometrere.

De vigtigste Fremskridt i den arabiske Mathematik staa i Forbindelse med, at de foruden græsk Geometri efterhaanden ogsaa optog den indiske Regnekunst. Dette satte dem i Stand til at give de af Grækerne kjendte Sætninger videregaaende numerisk Anvendelse end disse. Det er derfor ganske naturligt, at særlig Trigonometrien maatte gjøre vigtige Fremskridt hos dem.

Hvad nu angaar det logiske Grundlag for Arabernes Mathematik, er det naturligt, at de, efter en Gang at have givet sig ind under Grækernes Førerskab, maatte følge dem ogsaa i denne Henseende og anse den græske Opfattelse som den eneste fuldt ud exakte. Denne tilegnedes saa godt, at man ikke blot antog og bøjede sig for de græske Former som noget en Gang bestaaende, men paa en grundigere Maade end de senere Grækere trængte ind til Slutningsmaadernes Kjerne. Arabiske Forfattere opfatte saaledes Bestemmelsen ved geometrisk Konstruktion eller — i Henhold til den Eudoxos-Euklidiske Proportionslære — ved sammenhængende Proportioner som den eneste exakte Fremstilling af Potenser og Rødder af irrationale Størrelser. Samtidig var man dog gennem indisk Regnekunst langt fortroligere end Grækerne med den tilsvarende numeriske Beregning af de irrationale

Størrelser, og for ikke at hemmes for stærkt i den videre Behandling af disse Størrelser, maatte man i Praxis ofte lade de tilnærmelsesvis beregnede Tal træde i Stedet for selve Størrelserne. Dette førte til en faktisk, men ikke fuldt anerkjendt Betragtning af disse Størrelser som Tal.

Hermed begynder en Dualisme, som vi skulde have Lejlighed til at følge næsten lige til vore Dage. Araberne, hos hvem den synes at have givet Anledning til Modsætninger mellem Skoler, en mere exakt græsk og en regnende indisk, ydede ikke selv noget væsentligt Bidrag til at komme ud over den. De bragte blot saa meget som muligt af de theoretiske eller praktisk regnende Undersøgelser, som de foretog, i Ly af Grækernes faste Bygning; men at udvide denne, saaledes at den kunde omfatte alle deres flittige og dygtige Arbejder, formaaede de ikke. Det er ogsaa først efterhaanden naaet af den nyere Tids Matematikere.

Mathematikens Gjenopvaagnen i Europa.

I Europa var den kristelige Kultur undergaaet en Udbredelse og en Væxt, der ved sin Langsomhed danner en stærk Modsætning til den Pludselighed, hvormed Muhamedanismen havde oversvømmet uhyre Strækninger, og den Hurtighed, hvormed den under Muhamedanismen udviklede Kultur naaede sit Højdepunkt. Ved denne Langsomhed naaedes imidlertid et bredere og solidere Grundlag, der ogsaa skulde komme de Fag til Gode, som man fra først af slet ikke havde kjendt noget til. Fra Romerne modtog Folkevandringens Folk ved Siden af Christendommen ogsaa den særlige romerske Kultur, derunder navnlig en udviklet Retsvidenskab, samt enkelte Dele af den græske Filosofi. Dette forarbejdedes trolig videre og bragtes af Kirkens Mænd i

Forbindelse med Christendommen og de religiøse Begreber. Den Smule daarlig og forvansket Mathematik og Regning, som man modtog fra Romerne, forsømtes heller ikke ganske, og at der længe kom meget lidt ud deraf, skyldes lige saa meget det fra Romerne givne daarlige Sædekorn som den endnu raa og ubearbejdede Jordbund. Væksten tog større Fart, da man modtog ny Sæd fra Araberne gennem Korstogene, Berøringerne i Spanien og de Berøringer, som fandt Sted tvers over Middelhavet. Denne Sæd spirede og begyndte at udfolde sig under omhyggelig Pleje hos de Munkeordener, som udgjorde den Tids lærde Stand; den kunde til Tider skyde raskere op i de italienske Handelskredse, hvor den faldt rigeligere, ja endog tilsattes med ren græsk Sæd opbevaret i Konstantinopel. Saaledes se vi allerede omtrent Aar 1200 Leonardo fra Pisa i den elementære Mathematik og Regning indtage et Standpunkt, som først flere Aarhundreder senere blev almindeligt hos europæiske Mathematikere.

Hvad man i Europa først tilegnede sig gennem Araberne, var den indiske Talregning, Algorithmen, som man kaldte den. Dertil føjedes saa nogen Algebra og lidt Geometri. Gennem Araberne lærte man derefter nogle af de betydeligste og lettest tilgængelige græske Forfattere at kjende. Først senere begyndte man at gjøre et mere direkte Bekjendtskab med dem. I disse Henseender deler Mathematiken Skjæbne med andre Videnskaber og Kunster, og den derved indtrædende Renæssance var ogsaa for dens Vedkommende kraftigst i — men dog ikke begrænset til — Norditalien.

Denne Gjenfødelse var dog længe kun en Gjenopstaaen af det, som Grækerne eller Inderne langt mere havde været Herrer over, og som Araberne havde forenet. Man kunde i enkelte Henseender give det nye Former, der senere skulde faa Betydning; men væsentlig var man blot modtagende og maatte i de fleste Tilfælde erkjende, at man stod tilbage for sine Lærere. Der behøvedes i Mathematiken et Gjennem-

brud som de, der i andre Henseender skete ved de store geografiske Opdagelser og ved Reformationen. Ogsaa det mathematiske Gjennembrud befordredes i høj og kjendelig Grad ved Bogtrykkerkunsten, og det stod i nær Forbindelse med de andre aandelige Rørelser. Det er saaledes indlysende, at de geografiske Opdagelser maatte bidrage til at fremkalde Anerkjendelsen af det kopernikanske System, som atter har givet Naturvidenskab og Mathematik mægtige Impulser. Reformationens Indførelse træder frem derigjennem, at adskillige af de betydeligste Mathematikere enten vare knyttede til denne eller til de tilsvarende aandelige Bevægelser, som, uden Brud med Fortiden, i intellektuel Henseende bragte den katholske Verden paa den Højde, som andetsteds naaedes ved Reformationen. Flere af de faa Navne, som vi i dette korte Overblik faa Lejlighed til at nævne, ville vise sig at tilhøre Mænd, hvis mathematiske Fortjenester ledsagede lignende Fortjenester paa andre aandelige Omraader.

Hvad der indenfor selve Mathematiken fremkaldte et saadant Gjennembrud, var Overvindelsen af Vanskeligheder, som endog de lysende og beundrede græske og arabiske Forbilleder havde maattet lade ligge. Tyskeren Regiomontanus (1436—1476) naaede langt videre i Trigonometrien end Araberne; men dette Fremskridt stod dog i saa god Sammenhæng med foregaaende og efterfølgende Skridt paa samme Bane, at det kun tildels kan betegnes som et Gjennembrud. Et saadant knyttede sig derimod til den algebraiske Løsning af Ligninger af tredie Grad ved Kubik- og Kvadratrødder. Denne havde Araberne gennem lange Tider forgjæves stræbt at opnaa, og det samme har sikkert været Tilfældet med Grækerne før den Tid, da man slog sig til Ro med at kunne løse en Ligning af tredie Grad geometrisk ved Keglesnit, altsaa ved de samme Hjælpemidler, som man alligevel maatte benytte, naar man førte den tilbage til Brug af Rodstørrelser.

Det var derfor blevet almindelig antaget, endog fast-

slaaet i den første trykte mathematiske Bog, at Ligninger af tredie Grad ikke kunne løses algebraisk. Stor Opsigt blandt Mathematikerne maatte det da vække, at Scipione del Ferro (Professor i Bologna 1496—1526) havde løst denne Opgave i et vigtigt Tilfælde. Han holdt vel sin Løsning hemmelig, men den synes at have været rigtig og kan da ikke afvige synderlig fra den, som i 1535 gjenfandtes af Tartaglia og kan anvendes paa alle Ligninger af tredie Grad med kun en reel Rod. Idet ogsaa Tartaglia først holdt den Methode, som han ved en videnskabelig Turnering havde vist sig i Besiddelse af, hemmelig, opstod der først stærke Bestræbelser for at komme i Besiddelse af hans Hemmelighed, dernæst Stridigheder, der endnu give Gjenklang i vore Dage, om, hvem Opdagelsen nærmest tilhører, Stridigheder, hvori den Gang videnskabelige Argumenter ledsagedes af de bitreste personlige Beskyldninger og Angreb. Under disse søgte man dog stedse ved nye Anvendelser af det fundne og ved nye Opdagelser at hævde sin Ret til at tale med i Laget. Det blev derfor en frugtbar Tid for Videnskaben; Algebraen bragte den endnu Løsningen af Ligninger af 4de Grad.

Algebra med geometrisk Baggrund.

Den videnskabelige Side af Bevægelsen forplantede sig fra Italien til andre Lande, saaledes til Frankrig, hvor Vieta (1540—1603) satte Slutstenen paa de her berørte algebraiske Fremskridt ved ogsaa at løse Ligninger af tredie Grad i det Tilfælde, hvor alle tre Rødder ere reelle. Idet Vieta var sin Tids største Mathematiker, og han tillige var fortrolig med de Gamles Skrifter og Tankegang, vil det være rigtigt at dvæle lidt ved hans Skrifter for at se, hvorledes

han stiller sig til Matematikens logiske Side. Først skulle vi blot om hans Forgængere bemærke, at de vel i det hele bygge paa de Gamles logiske Forudsætninger, men under Iveren for at gjøre Fremskridt ikke faa Tid til at beskjaeftige sig videre med denne Side af Sagen.

Vietas Fremadskriden er ikke mindre; man skylder ham endog paa det algebraiske Tegnsprogs Omraade Nyheder, som have bragt til at betragte ham som Fader til Algebraen i snævrere Forstand, den, som er bygget paa Bogstavregning; men paa samme Tid kjendte han de Gamles Principer nøje og bøjede sig for dem som eneste Bærere af en fuldstændig Bevisførelse. De Hensyn, han tager til dem, saavel som hans Tilbøjelighed til at bruge dristig dannede græske Kunstord tjene dog just ikke til at gjøre hans Fremstilling let at følge.

Allerede i hans Behandling af Ligninger af tredie Grad se vi hans Respekt for de Gamles Geometri og hans Kjendskab til denne. Det Fremskridt, der er gjort ved Løsningen af disse Ligninger, er vel et helt andet end de, som de Gamle søge at give Udtryk. Ved at føre Løsningen tilbage til Roduddragning gjør man den afhængig af mere vel kjendte Regninger, et Fortrin, som Vieta lige saa sikkert havde Øje for som de andre Lærde paa den Tid. Da imidlertid efter de Gamles Fordringer den geometriske Fremstilling var den eneste exakte Fremstilling af de irrationale Størrelser, fremhæver han, at denne Tilbageførelse sætter i Stand til at løse Ligningerne ved den samme Konstruktion, som bruges til at fremstille Rodstørrelser. Som en saadan Konstruktion nævner han dog ikke Konstruktionen ved Keglesnit — maaske fordi en saadan ogsaa uden Løsningen kunde anvendes paa Trediegradsligningen — men en Indskydning, en foran omtalt Art af Konstruktioner, hvortil man i Oldtiden ogsaa havde vidst at føre Kubikrodsbestemmelser tilbage.

Disse Bemærkninger gjælde særlig den allerede af Ita-

lienerne fundne Løsning af Opgaven i det Tilfælde, hvor kun een Rod er reel. Naar de alle ere reelle, kan Tilbageførelsen til Rodstørrelser ikke ske under reel Form. Vieta fandt derimod, at Løsningen af Opgaven i dette Tilfælde kan føres tilbage til en Tredeling af Vinklen, og at denne kan udføres ved en Indskydning, den samme, som man har nogen Grund til at tillægge Archimedes. I dette Tilfælde har Indskydningen dog for Vieta tillige spillet en langt væsentligere Rolle end den at være en Oversættelse paa det geometriske Sprog, foretagen af theoretiske Hensyn. Nej, det er paa selve den geometriske Figur, som fremstiller Indskydningen, at man aflæser Ligningens Tilbageførelse til Vinklens Tredeling. Det praktiske Resultat, som er naaet, er heller ikke Ligningens Løsning ved en Indskydning, men den Omstændighed, at Tilbageførelsen til Tredelingen sætter i Stand til at beregne Rødderne ved Hjælp af trigonometriske Tabeller. Ligningen er nemlig først reduceret til Formen

$$x^3 - 3r^2x = ar^2,$$

hvor $r > \frac{a}{2}$, og en umiddelbar Omskrivning af den ved Figuren udtrykte Forbindelse paa Trigonometriens nuværende Sprog giver dernæst, at naar $a = 2r \cos v$, bliver $x = 2r \cos \frac{v}{3}$.

Vietas Løsning var den første Anvendelse af Trigonometrien til at løse visse algebraiske Ligninger, en Vej, hvorpaa allerede han selv gik betydelig videre. Her viser sig saaledes en smuk Sammenhæng mellem saadanne geometriske Konstruktioner, som de Gamle væsentlig foretog af theoretiske Grunde, og virkelige Fremskridt af rent moderne Art. Værd er det ogsaa at lægge Mærke til, at det netop er de to gamle, berømte Opgaver, Terningens Multiplikation (Kubikrodsuddragning) og Vinklens Tredeling, som atter komme til Ære. Til den ene føres den ene Hovedklasse af Trediegradsligninger tilbage, den anden til den anden.

Naar Vieta her efterligner de Gamle i at betragte en

geometrisk Konstruktion som den fuldkomneste Form for en Opgaves Løsning, kan man ganske vist ikke vide, hvorvidt han var sig den derved opnaaede logiske Fordel fuldt bevidst; men, bortset fra, at han foretrækker en Indskydning for Løsning ved Keglesnit, gjør han i hvert Fald, hvad der behøves, for at faa fast Stæde paa det af de Gamle givne geometriske Grundlag. Det samme gjør han i de saakaldte geometriske Beviser, hvilke han undertiden føjer til de Løsninger af Opgaver, som han finder ved sit Tegnsprog. De tekniske Fremskridt, som han gjorde i dette, er der her lige saa lidt Lejlighed til at omtale som dem, hvorved hans Forgængere i Østerland og Europa efterhaanden vare komne saa vidt. Kun følgende to Ting vedkomme os her nærmere. Medens tidligere Forfattere, paa et enkelt Tilløb nær, kun anvendte Bogstaver til at fremstille Ligningernes ubekjendte Størrelser, anvender Vieta dem baade til at fremstille ubekjendte Størrelser og saadanne Størrelser, som i Opgaverne skulle betragtes som bekjendte, men i Virkeligheden skulle kunne være vilkaarlige. De første betegnes ved Vokaler, de sidste ved Konsonanter. Derved blive fra ham af Løsninger af Ligninger i Tegnsproget almengyldige Angivelser af, hvorledes Ligningerne skulle løses. Vor anden Bemærkning gjør dog en Indskrænkning i denne Almengyldighed. Vietas Bogstaver ere nærmest kun bestemte til at fremstille Tal, det vil endnu bestandig sige rationale og positive Tal. Dette er Tilfældet, skjønt han giver de forskellige Potenser o. s. v. geometriske og hypergeometriske Navne.

Hvad nu Rationaliteten angaar, saa nærer Vieta vistnok ingen virkelig Tvivl om, at de Resultater, han udleder ved Brug af Tegnsproget, ere gyldige ogsaa da, naar de fremstillede Størrelser, bekjendte og ubekjendte, ere eller blive irrationale; men han betragter ikke Udledelsen som tilstrækkelig exakt. Derfor tilføjer han de nys nævnte geometriske Beviser, der rigtignok for en moderne Opfattelse ere alt andet end geometriske. De faas nærmest ved at føre

alle Sammenhæng tilbage til Proportioner. Potenser bestemmes da som hos de Gamle som Led i sammenhængende Proportioner. Derved bringes Undersøgelsen i Ly af den hos Euklid efter Eudoxos fremstillede exakte Proportionslære, der, som vi have omtalt, trods sin almindelige Natur, betragtedes som hørende særlig til Geometrien.

Før vi omtale det Hensyn, Vieta tog til, at de ved Bogstaver fremstillede Størrelser skulde være positive, maa vi gaa tilbage i Tiden. Negative Størrelser var et for de Gamle fuldstændig ubekendt Begreb. Det vilde heller ikke være dem til saa stor Nytte, som det er nu. Vi bruge det bl. a., naar vi skulle oversætte en geometrisk Figurs Egenskaber paa Tegnsproget, til at udtrykke, om f. Ex. et Punkt af en ret Linie falder paa den ene eller anden Side af et andet; men dette udtrykker allerede Figuren, der selv var de Gamles Fremstilling af Sagen. Ganske vist maatte det kunne hælde, naar man forsøgte at løse en tilfældig forelagt Ligning med givne Talkoefficienter, at dette kun kan ske ved det, som vi kalde et negativt Tal. I saa Fald vilde en dygtig græsk Mathematiker naturligvis nok forstaa, hvorledes Sagen hang sammen; men han vilde ikke anse sig logisk berettiget til da uden videre at forklare den sig frembydende negative Rod som „Gjæld“ eller en anden Modsætning til det, som der umiddelbart spørges om. En saadan Forudsætning havde han nemlig ikke gjort, medens han løste Opgaven, og Løsningen kunde ikke anvendes ud over de gjorte Forudsætninger. Umuligheden af at faa en positiv Rod vilde blot vise ham, at han havde stillet Opgaven galt. Han vilde da ombytte den med den rigtig stillede Opgave og derpaa løse denne forfra.

Indernes Frihed for logiske Skrupler førte dem ogsaa her til at omfatte mere i en enkelt Fremstilling. Hos dem træffe vi rigtige Forklaringer af Betydningen af indtrædende negative Rødder. Lignende Forklaringer træffe vi ofte senere, ogsaa hos de Italienere, der vare Vietas nærmeste

Forgængere i Algebraen. Hvor det gjælder om en fuldstændig og korrekt Fremstilling, bære de sig dog ad som Vieta. Efter dennes Fremstillingsmaade har Ligningen

$$x^3 - 3r^2x = ar^2$$

egentlig ikke, som vi have sagt, tre Rødder, nemlig den, hvis Værdi vi umiddelbart have angivet, og to andre, som ere negative. Det er derimod disses tilsvarende positive Værdier

$$y = r \cos \frac{v}{3} \pm \sqrt{3r^2 \sin^2 \frac{v}{3}},$$

hvilke Vieta bestemmer som

Rødder i den Ligning, der fremkommer ved at ombytte x med y , altsaa i Ligningen

$$y^3 = 3r^2y - ar^2.$$

Den hele Behandling viser imidlertid, at Vieta fuldstændig forstaaer Sammenhængen mellem de to Ligninger.

For ikke senere at vende tilbage til Spørgsmaalet om den algebraiske Behandling af negative Størrelser, skulle vi strax her bemærke, at medens man saaledes godt vidste at hjælpe sig i de Tilfælde, hvor en Ligning fører til negative Værdier af den ubekjendte, er det først Newton, der paa Forhaand forudsætter, at Tegnene saavel for bekjendte som for ubekjendte skulle kunne betegne negative Størrelser. Derved simplificeres Fremstillingen betydelig, og derved faar man umiddelbar logisk Hjemmel for ogsaa at benytte negative Opløsninger.

Vi skulle endnu her bemærke, at der under Italienernes forgjæves Forsøg paa at løse den Art Ligninger af tredie Grad, som først Vieta fuldstændig magtede, ogsaa opstilles Kubikrødder af imaginære Størrelser. Dette Forsøg paa at anvende Regninger paa et Omraade, for hvis Vedkommende Regningernes Gyldighed slet ikke var godtgjort, førte den Gang ikke til noget Resultat, medens senere netop saadanne logisk slet begrundede Forsøg have vist sig yderst frugtbare.

De andre, fremragende Matematikere, som paa Vietas og i den nærmest følgende Tid gjorde nye Fremskridt og

for en Del brøde nye Baner i Mathematiken, stode i det væsentlige paa samme logiske Grundlag som han, altsaa paa det, som skyldtes de Gamle. Til Held for Læseren give de dog i Reglen ikke de logiske Hensyn i den til dette Grundlag svarende vidtløftige Form; men de Fremstillingsmidler, som de bruge, ere bestandig saadanne, at man let kan overskue, at fuldstændige Beviser i denne Form lade sig gennemføre.

Dette sker navnlig ved at benytte geometrisk Fremstilling af kontinuert varierende Størrelse. Saaledes se vi Galilei (1564—1642) fremstille den jævnt voxende Hastighed (gt) ved Ordinaterne til en ret Linie ($y = gt$) svarende til Abscisser fremstillende Tiden (t), hvorved den gennemløbne Vej bliver Arealet ($\frac{1}{2}gt^2$) af den af den rette Linie, Abscisseaxen og Endeordinaten (gt) begrænsede Trekant. Den Mand, som man trods betydelige Forgængere med Rette betegner som Logarithmernes egentlige Opfinder, Neper (1550—1617) opnaaede ved den geometriske Fremstilling at give dem en almengyldig Definition. Det er den samme, som man nu vilde udtrykke ved Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{a},$$

hvilken, idet Neper tillige forudsætter, at til $x = 0$ skal svare $y = a$, giver $x = -al\left(\frac{y}{a}\right)$, naar l betegner det, som vi nu kalde den naturlige Logarithme. Differentialligningen fremstilles ved den Fordring, at et Punkt (med Abscissen x) skal bevæge sig paa en ret Linie med konstant Hastighed, medens paa en anden Linie et Punkt nærmer sig til et fast Punkt, hvorfra det oprindeligt har Afstanden a , med en Hastighed, der i hvert Øjeblik er proportional med den øjeblikkelige Afstand (y) og til Begyndelsesværdi har det første Punkts konstante Hastighed. I denne Bestemmelse indgaar vel Tiden, men — som senere hos Newton — kun for at be-

tegne, hvilke Værdier af x og y der svare til hinanden, og at x skal være, hvad vi nu kalde uafhængig Variabel.

Man skylder Pascal (1623—1662) et Fragment om den geometriske Bevisførelse, hvilken han tillægger stor Fuldkommenhed, og som han ønsker overført ogsaa paa andre Omraader. Til det, han deri stærkest fremhæver, hører Fordringen om, at man, hver Gang man bruger et defineret Ord, i Tanken skal fastholde Definitionen for ikke at overføre det, som er indrømmet om det definerede Begreb, paa andre, som Sproget tilfældigvis betegner med samme Ord. Mærkelig nok skulde selve Mathematiken, som vi ville faa at se, snart i sin Brug af Tegnsproget komme til paa en næsten systematisk Maade at synde mod en med Pascals nær beslægtet Regel. Pascal, hvem den matematiske Logik endvidere skylder det saakaldte fuldstændige Induktionsbevis, søgte for sine egne matematiske Arbejder den samme sikre Grundvold, som var nedarvet fra de Gamle. Det samme gjaldt, for kun at nævne de allerstørste Matematikere, om Fermat, ja endnu om Huygens, hvem der ellers ikke bliver Lejlighed til her at omtale, og, som vi senere skulle se, om Newton.

Fermat (1601—1663) lod sig endog af ydre Hjælpe-midler nøje med den antike geometriske Fremstilling og det endnu lidet udviklede Tegnsprog, som allerede Vieta havde brugt. Hans infinitesimale Undersøgelser skulle vi snart nærmere omtale. I Taltheorien har han opstillet Resultater, som først ere beviste i langt senere Tider, ja tildels endnu vente paa Bevis. Disse Resultater, som maaske have bidraget mest til hans Berømmelse, vedkomme os dog mindre her, netop paa Grund af, at han ikke har efterladt Beviser. Nogle ere maaske endog blot opstillede hypothetisk ved en ufuldstændig Induktion, ja et enkelt er endog urigtigt. Endelig har Fermat i Tilknytning til geometriske Sætninger navnlig om geometriske Steder, som uden Beviser ere opbevarede fra Oldtiden, udviklet en analytisk Geometri, som paa den ene Side maa have staaet de Gamles Udledelse af de samme

Sætninger nær, paa den anden i egentlig mathematisk Værd og Anvendelighed kan maale sig med den, som uafhængig af ham samtidig grundlagdes af Descartes (1596—1650).

Algebraens Arithmetisering.

Og dog har Descartes' analytiske Geometri faaet en langt større Betydning end Fermats, om end denne sikkert var en dybere mathematisk Tænkere. Det var vel netop Klarheden i Fermats Tanker, som tillod ham at fastholde og anvende dem uden noget udviklet Apparat. Uden et saadant var han iøvrigt ogsaa i Stand til at fremsætte dem saaledes, at en opmærksom Læser kan følge ham og føle sig tryk ved hans Begrundelse. Descartes derimod gav Matematikken et Organ, som sætter ogsaa mindre sikkert tænkende Matematikere i Stand til uden Fare for at fejle selv at udføre lignende Undersøgelser. Han og Fermat staa derfor overfor hinanden paa en lignende Maade som i sin Tid Plato og Eudoxos.

Det Organ, jeg tænker paa, er Tegnsproget. Vi have allerede af og til berørt dettes Udvikling, særlig da vi talte om Vieta. Efter hans Tid var det uddannet videre, og navnlig var Descartes' Indførelse af Potensbetegnelsen en væsentlig Forbedring. Det var imidlertid nærmest kun et Udtryk for Regninger, og disse strakte efter den endnu da fastholdte Opfattelse ikke til, hvor det gjaldt om at gjøre saadanne almengyldige Slutninger, som ogsaa skulde finde betrygget Anvendelse paa inkommensurable Størrelser. Ved den jævnlige Brug har der imidlertid været rig Lejlighed til at bemærke, at det ogsaa for disse Størrelses Vedkommende førte til rigtige Resultater. Samtidig maa man have faaet Øje for en Fordel ved Tegnsproget, som netop kommer

Fremstillingens Exakthed til Gode, nemlig den Utvetydighed og Præcision, hvormed det udtrykker hvert Resultat, hvortil man efterhaanden er naaet, og hvorpaa det følgende skal bygges. En saadan maatte de Gamle opnaa ved Brug af det sædvanlige Sprog. Da nu dette ikke fra først af er udviklet hertil, kunde dets tilfældige Former give Anledning til Misforstaaelse, naar man ikke anvendte den største Forsigtighed. Og da blev Udtryksmaaden som hos de Gamle meget vidtløftig, ikke at tale om, at det krævede stor Øvelse og Sikkerhed at vise denne Forsigtighed. Ved Brugen af Tegnsproget gjælder det derimod kun om en Gang for alle at kjende Operationstegnene og at vide, hvad Størrelsestegnene i hver enkelt Undersøgelse skulle betyde — samt være vis paa, at de ved de første betegnede Operationer virkelig kunne anvendes paa de ved de sidste betegnede Størrelser.

Denne sidste Fordring var det netop, der før Descartes hindrede Tegnsproget i virkelig at være et almengyldigt Organ for den exakte Mathematik. Man maatte først give Begrebet om de arithmetiske Regninger, som Tegnsproget fremstiller, en saadan Udvidelse, at Operationerne blive anvendelige paa alle Slags Størrelser. Foreløbig maatte man navnlig se at faa dem med, der havde voldt de største Skrupler i Oldtiden, nemlig de irrationale.

Dette er det, som Descartes opnaar paa den simplest mulige Maade strax paa den første Side af sin Geometri (først udgiven paa Fransk 1637). Han *kalder* der Bestemmelsen af Fjerdeproportional til Enheden og to Linier Multiplikation, *kalder* Bestemmelsen af Fjerdeproportional til en vilkaarlig Linie, Enheden og en tredie Linie Division, og *kalder* Bestemmelsen af en eller flere Mellemproportionaler Roduddragning. *Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.* Naar man nu erindrer, at den her anførte geometriske Fremstilling gav det ved de opstillede Forudsætninger og

ved Eudoxos' Proportionslære betryggede Udtryk for Operationer med almindelige Størrelser, ses det, at de arithmetiske Benævnelser sættes i Tjeneste hos selve den almindelige Størrelseslære, og at denne derved ogsaa faar Raadighed over det Tegnsprog, som oprindeligt kun havde en arithmetisk Betydning. Tegnsprogets Betydning faar altsaa en saadan Udvidelse, at det bliver Organ for den almindelige Størrelseslære.

En Udvidelse af denne Art er altid forbunden med en vis Fare, nemlig den, at der paa Tegnsprogets oprindelige snævrere Omraade ogsaa kunde være gjort saadanne enkelte Anvendelser deraf, som ikke uden videre lade sig overføre. Tegnsproget var dog saa simpelt, at det let kunde overskues, at noget saadant ikke var at befrygte saa længe, som man holdt sig til den af Descartes betegnede Udvidelse. Man befrygtede det iøvrigt saa meget mindre, som man omtrent saa længe, som man havde haft Tegnsprog, faktisk uden Skade havde anvendt det ogsaa paa de Regninger med irrationale Størrelser, for hvis Vedkommende der var Tvivl om denne Fremgangsmaades Exakthed.

Der lader sig saaledes ikke gjøre nogen Indvending mod den logiske Tilladelighed af Descartes' saa overordentlig frugtbare Begrebsudvidelse; men den var bygget paa en Cirkel, som vel ikke var en *circulus vitiosus*, men dog rummede store Farer. Geometrien havde faaet et arithmetisk Udtryk; de arithmetiske Operationer bleve derved ogsaa anvendelige paa almindelige, kontinuert varierende Størrelser. Men de bleve det ogsaa kun derved; thi det var Geometrien, der alt i Oldtiden havde naaet en saadan Udvikling, at den rummede den almindelige Behandling af Størrelser. Geometriens Fremstilling blev altsaa arithmetisk; men det var bestandigt Geometrien, der indeholdt det, som gjorde denne arithmetiske Fremstilling almengyldig.

Man kunde være kommen ud over disse Vanskeligheder ved paa Arithmetiken at overføre ogsaa de Forudsætninger og de Theorier, hvorved Almengyldigheden opnaas i Geo-

metrien. Dette kunde allerede den Gang forholdsvis let være sket; thi hvad det især kom an paa, var i Arithmetiken at faa indført den exakte Størrelsesbestemmelse, som indeholdes i Eudoxos' Proportionslære, og om denne have vi allerede sagt, at det kun var de historiske Forhold, der gave den sin Plads indenfor Geometrien. Ved først at anvende denne Proportionslære til at sikre Gyldigheden af de simpleste Størrelsesoperationer vilde man dernæst lære at søge en lignende Sikkerhed ved enhver følgende ny Udvidelse, f. Ex. naar man lod Exponenter, der efter deres Natur ere hele og positive Tal, blive negative, brudne eller irrationale.

I lange Tider gjorde man, paa enkelte Undtagelser nær, lige det modsatte. De Betænkkeligheder, man havde haft ved at betragte de i Arithmetiken og ved dens nye og bekvemme Hjælpemidler opnaaede Resultater som lige saa sikre som dem, der vindes i Geometrien, vare fjernede ved Descartes' Bog. Disse Betænkkeligheder havde i det mindste de mindre fremragende Matematikere vel ogsaa tidligere kun respekteret som en Gang eksisterende uden ret at forstaa deres Grund. Nu kunde man uden Bekymring arbejde videre med de udvidede arithmetiske Begreber og med det i Arithmetiken udviklede Tegnsprog. Rigdommen af vundne Resultater, der alle viste sig gode og paalidelige, lokkede videre og videre, saa man uden Skrupler og uden den nødvendige Prøvelse ogsaa foretog andre Udvidelser i Anvendelsen af Tegnsproget end dem, der alt vare hjemlede ved den gamle Geometri og Descartes' Anvisning paa denne. Foruden med positive Tal regnede man ikke blot med negative, noget, hvorfor man i det mindste i de simpleste Tilfælde skaffede sig Hjemmel, men snart ogsaa med imaginære, uden at give nogen Forklaring af, hvad Regningerne da betyde. Man blev tillige mindre nøjeregnende med andre Overførelser af de for hele og positive Tal hjemlede Operationer paa alle Slags Tal end dem, der vare sikrede ved Descartes' Anvisning paa Geometrien. Ad saadanne Veje, som man vedblev

at følge til ind i vort Aarhundrede, opnaaede man ej blot store, nye og vidtrækkende, men ogsaa rigtige Resultater, dels naturligvis fordi man anvendte mathematisk Takt der, hvor de strænge Ræsonnementer manglede, dels fordi det mathematiske Tegnsprog er saa godt, at det har kunnet taale den Slags Udvidelser.

Alt dette skete vel først efterhaanden. En meget nær Efterfølger af Descartes, Englænderen Wallis (1616—1703), havde dog allerede et aabent Øje for, hvor meget der kan naas ved denne Art af Udvidelser af Sætninger og Formler ud over det Omraade, som Beviserne egentlig gjælde, og selv besad han netop den omtalte mathematiske Takt, som fører til rigtige Resultater ogsaa der, hvor de nøjagtige Begrundelser mangle. I hin Tid, da man endnu var oplært i Oldtidens strænge Skole, og da Tilliden til Rigtigheden af saadanne Udvidelser endnu ikke kunde støtte sig til en Sædvane og til mange paafaldende gunstige Erfaringer, saaledes som 100 Aar senere, krævede virkelig mange af hans Udvidelser betydeligt Mod. Intet Under derfor, at han aldeles ikke ænsede Oldtidens Skrupler ved den mere beskedne Udvidelse fra det for rationale Tal beviste til kontinuert varierende Størrelser, som hidtil har beskæftiget os. Han giver i den Henseende helt Afkald paa den Anvisning paa de Gamles Geometri, som Descartes udstedte i Begyndelsen af sin Geometri. Han gjør det, idet han i sin *Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum* giver den hele Mathematik et arithmetisk Grundlag. Heri ere ikke blot de Operationer, af hvilke de Gamle krævede en saadan geometrisk Fremstilling som den, der findes i Euklids 2den Bog, fremstillede som Regninger med rationale Tal; men han giver endog en lignende Fremstilling af Proportionslæren. Deri følger han Sætningerne i Euklids 5te Bog; men Beviserne ere byggede paa Regninger med rationale Tal, og de savne alt det, som skulde tjene til at gjøre Sætningerne almengyldige, altsaa netop det, for hvis Skyld hele denne Bog oprindelig

er skreven. Wallis har saaledes allerede arithmetiseret Mathematikens Grundlag, men paa Bekostning af Exaktheden.

Endnu større Dristighed i Udvidelsen af det oprindelige Omraade for matematiske Formler viser han dog paa andre Punkter, naar han f. Ex. ved i Formlen $\frac{1}{m} < \frac{1}{m-1}$ at sætte $m = 0$ slutter, at de negative Størrelser ere større end uendelig. Gode Frugter har dog en lignende Dristighed bragt ham paa de infinitesimale Undersøgelser Omraade. At han ogsaa her vil gaa tilværks paa denne Maade, betegner han ved at kalde sin Bog herom *Arithmetica infinitorum*. Angaaende denne Art Undersøgelser, der gjennemgik en lignende Bevægelse som den, vi nu have fulgt for de algebraiske Operationers Vedkommende, maa vi dog først gaa lidt tilbage.

Infinitesimalundersøgelser i logisk Tilslutning til de Gamle.

Ved Optagelsen af infinitesimale Undersøgelser sluttede man sig som i andre Henseender til de Gamle, i dette Tilfælde særlig til Archimedes' Kvadraturer og Kubaturer. For at komme saa vidt maatte man ikke blot lære de paa-gjældende Skrifter at kjende, men ogsaa vinde en tilstrækkelig Modenhed til at trænge igjennem de Former, ved Hjælp af hvilke Archimedes opnaar en fuldt exakt Begrundelse af Resultaterne. Man maatte af hans færdige Tankebygninger lære selv at tænke saadanne Tanker, som have været i Bevægelse under deres Opførelse. Disse Tanker kunde man da ikke strax ikklæde saa betryggende Former; men med desto større Friskhed kunde de arbejde, og Resultaterne vare

i Reglen gode nok. Paa denne Maade naar Kepler (1571—1630), som har Æren af først med Kraft at have gjenoptaget denne Slags Undersøgelser, en stor Frihed i Valget af de Midler, han bruger. Det er saaledes med stor Interesse, at man ser ham til en af sine Kvadraturer anvende den samme induktive Fremgangsmaade, som har ført ham til de Keplerske Love. Han gjør det ved Beregningen af det Areal, som fremstiller, hvad vi nu vilde kalde det bestemte

Integral $\int_0^{\varphi} \sin \varphi \, d\varphi$. Han beregner nemlig for et Par Værdier

af φ dette med Tilnærmelse, idet han ombytter det med en Sum af endelige Elementer, hvori $d\varphi$ er ombyttet med Differenser paa 1° ; han finder da de samme Værdier som af $1 - \cos \varphi$ og slutter deraf, at Integralet i Almindelighed har denne Værdi. Cavalieri (1591(?)—1647), der ogsaa faar fat paa de bevægende Tanker hos Archimedes og dernæst selvstændig bruger dem i videregaaende Undersøgelser, udtrykker Beviser og Resultater paa en lidet exakt Maade, idet han kalder Summen af uendelig smalle Strimler af en plan Figur, liggende ved Siden af hinanden, for Summen af alle Linier af en given Retning i denne Figur.

Først hos Fermat naas den fulde Tilslutning til de Gamles exakte Fremstillingsmaade. Selv hvor han udtrykker sig kort, føler man, at det er ham om at gjøre i det mindste at have Midlerne i Hænde til fuldstændige Exhaustionsbeviser. Og han bevæger sig saa let i den exakte Behandling, at den ikke lægger noget Baand paa hans skabende Evne. I Tilslutning til de Bestemmelser hos Archimedes, som i det moderne Sprog kunde gjengives som Udtryk for $\int x dx$ og $\int x^2 dx$, beregner han — som vi nu vilde sige — $\int x^m dx$ for positive og negative, hele og brudne Værdier m og angiver Veje til exakt at bevise disse saavel som andre videregaaende Resultater. Beviserne kunde dog, som hos de Gamle

og med den Tids Fremstillingsmidler, kun gennemføres for eksempelvis valgte Værdier af m , men dog saaledes, at man fuldkommen indser deres almindelige Gyldighed. Ikke mindst nøje slutter han sig ved Beregning af Buelængder til de Archimediske Principer.

Den samme logiske Sikkerhed viser Fermat, hvor han udfører en helt ny infinitesimal Operation, den, der senere fik Navnet Differentiation. Han anvender den baade til Tangentbestemmelser og Maximums- og Minimumsbestemmelser og oplyser særlig disse Bestemmelser ved de Opgaver, som de Gamle havde løst ved Brug af deres Diorismer. Der er herved ikke Tale om den Værdi, Forholdet mellem to Størrelser faar, naar de begge blive *uendelig smaa* — hvilket først vilde være nøjagtigt, naar det forklares, hvad man mener med denne Betegnelse —. Han angiver derimod nøjagtig den Operation, som derved er at udføre, og ved denne sættes Tilvæksten efter fornøden Bortforkortning $= 0$, uden at der bliver Tale om uendelig smaa Størrelser.

Blandt de andre betydelige Matematikere, som samtidig beskjæftigede sig med Kvadraturer og andre saadanne Undersøgelser, som nu henføres til Integrationer, maatte Wallis danne den største Modsætning til Fermat i de Henseender, som her beskjæftige os. Wallis viste nemlig ogsaa her en saadan Tillid til Overensstemmelsen mellem de Tilfælde, som i hans arithmetiserede Mathematik udtrykkes paa ensartet Maade, at han ligefrem overførte de Bestemmelser af $\int x^m dx$, som han kun havde fundet for m hel og positiv paa dem, hvor m er bruden eller negativ. Vel var det først Newton, som indførte saadanne Exponenter i Tegnsproget; men Wallis sad netop inde med den arithmetiske Opfattelse, som har gjort denne Udvidelse naturlig. Hans berømte Bestemmelse af π er funden ved at overføre Bestemmelsen af $\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{l}{2}} dx$ fra saadanne Tilfælde, hvor han kunde ud-

fore den, paa det, hvor $m = l = 1$, en Induktion saa dristig, at man vel knap turde vove den nu, da man dog er bleven langt fortroligere med Sammenhængen mellem ensartet udtrykte Forhold. Denne Dristighed belønnedes med et nyt og rigtigt Resultat.

Hvor høj Anseelse Wallis end med Rette nød blandt sine Landsmænd, fulgte disse ham dog ikke i at betragte saadanne induktive Fremgangsmaader som Beviser. Med Newton (1643—1727) i Spidsen vedbleve de derimod længere end de fleste Fagfæller paa Fastlandet at holde fast ved de fra Oldtiden nedarvede Fordringer til exakt Behandling. Derfor gav Newton dog ingenlunde Afkald hverken paa den ved saadanne Induktioner givne nyttige Vejledning eller overhovedet paa de Fordele, som Tegnsproget medfører. Han brugte det netop med større Konsekvens end tidligere, saaledes at et Bogstav ikke blot som hos Descartes kan betegne en vilkaarlig given positiv Størrelse, men ogsaa en negativ, og at, som nys berørt, ogsaa Exponenter kunde være negative eller brudne. For ham vare de nye Overblik, han derved fik over en Række storartede Udvidelser af bekjendte Sætninger, blot ikke Beviser.

Hvor samvittighedsfuldt Newton gik tilværks, og hvilke Vanskeligheder han derved maatte møde, have vi et godt Exempel paa i Binomialformlen. De Regler, hvorefter de forskjellige Koefficienter i Udtrykket for $(a + b)^m$ dannes i det Tilfælde, hvor m er positiv og hel, vare den Gang forlængst bekjendte og anvendte til Uddragning af den m 'te Rod. Naar den samme Dannelse af Koefficienter anvendes paa de Tilfælde, hvor m er negativ eller bruden, faas en Lov, hvorefter en uendelig Række kan dannes. Denne uendelige Række er dog kun brugelig, naar den er konvergent, og selv da maa det bevises, at den virkelig fremstiller $(a + b)^m$.

Til nøjagtig og i fuld Almindelighed at angive, naar disse Betingelser ere opfyldte, havde man ingenlunde tilstrækkelige Hjælpemidler paa denne Tid, da kun faa andre

samtidig med Newton begyndte paa en langt mere begrænset Anvendelse af uendelige Rækker. Newton forstod imidlertid at omdanne de Forudsætninger, som ere opstillede i Begyndelsen af Euklids 10de Bog, og som ligge til Grund for de Gamles Exhaustionsbevis, saaledes, at det derved kunde paavises, hvad der for ham maatte være Hovedsagen, at $\frac{b}{a}$ i denne Række, og den tilsvarende Størrelse x i de Rækker, vi snart skulle omtale, kan være en saa lille endelig Værdi, at man ved at tage tilstrækkelig mange Led med i Rækken kan bringe Afvigelsen fra $(a + b)^m$, eller fra den søgte Funktion af x , ned under en nok saa lille Grænse. Selv dette kunde han dog af Mangel paa tilstrækkelig almindelige Fremstillingsmidler, navnlig af det, vi nu kalde Rækkens almindelige Led, sædvanligvis ikke godtgjøre i al Almindelighed; men han kunde angive en Methode, der i hvert enkelt Tilfælde kan bruges til at paavise den Tilnærmelse, der opnaas ved et hvilket som helst bestemt Antal Led.

Det er vistnok Hensynet til denne Begrænsning af Beviset, der har bevæget Newton til i det første Arbejde, hvori han gjør Brug af Rækker dannede ved Binomialformlen, slet ikke at nævne denne almindelige Formel. Han meddeler den først i et af sine Breve til Leibniz med Angivelse af, at den ogsaa laa til Grund for hans tidligere Arbejde. Den Resignation, han derved viste, belønnes ved, at den Fremgangsmaade, som han altsaa maatte anvende for hver enkelt Værdi af m , ligeledes lader sig anvende til Rækkeudvikling af en Størrelse y , der ved en forelagt Ligning afhænger af en Størrelse x . Derved er Grunden lagt til Begrebet Funktion, skjønt Newton endnu ikke bruger Navnet. En Afhængighed mellem to Størrelser x og y fremtraadte i den tidligere geometriske Fremstilling som den Kurve, hvis Punkters Koordinater ere forbundne paa den ved Ligningen udtrykte Maade. Nu kom Rækken til at give en af Kurven

uafhængig Fremstilling af, hvorledes y varierer som afhængig af x .

Naar Ligningen mellem x og y var algebraisk, fandt Newton saaledes et almindeligt Middel til at fremstille en algebraisk Funktion. En tilsvarende Fremstilling af transcendent Funktioner fik han derved, at Formaalet med hans Rækkeudviklinger netop var at udføre Kvadraturer, hvilket her betyder det samme som at integrere de udviklede Funktioner. Herved fik han ogsaa Rækkeudviklinger for transcendent Funktioner, foreløbig særlig for cirkulære og logaritmiske. Da hans Rækkeudviklingsmethode ogsaa kunde anvendes, naar Ligningen mellem x og y selv allerede indeholder en uendelig Række, kunde han vende de fundne Rækker om og foreløbig finde Udviklinger for trigonometriske og cirkulære Funktioner. Ja ved Hjælp af de ubestemte Koefficienters Methode dannede han endog Rækkeudviklinger for Funktioner fremstillede ved Differentialligninger, og disse Rækkeudviklinger give saadanne Funktioner en af Differentialligningen uafhængig Existens.

Logisk set, beviste han vel ingenlunde det samme som i vort Aarhundrede Cauchy, at en Differentialligning i x og y i Almindelighed har et Integral; men han gav Fremgangsmaader, ved Hjælp af hvilke man for en vilkaarlig given Differentialligning, som ikke frembyder for store tekniske Vanskeligheder, kan bestemme Integralet med saa stor Nøjagtighed, som man vil. Newton nøjedes dog i de fleste af de her omtalte Tilfælde med at vise, hvorledes Rækken dannes; men de Oplysninger, han paa flere Steder giver, vise en rigtig Opfattelse af Konvergensspørgsmaalet.

Brugen af de uendelige Rækker udgjorde det ene af de store ledende Principer i Newtons Infinitesimalregning. Den anden ledende Tanke var den, at de Operationer, som Leibniz snart efter kaldte Differentiation og Integration, ere indbyrdes omvendte Operationer. Af disse havde man, som alt omtalt, længe udøvet den sidste under Navn af Kvadra-

tur. Den var lykkedes i enkelte bestemte Tilfælde, men i de fleste syntes den at møde uoverstigelige Vanskeligheder; først Newton havde vist, hvorledes man, naar den ikke kan udføres under endelig Form, kan fremstille Integralet ved en uendelig Række. Differentiation var derimod i et Skrift af Fermat, som dog ikke endnu var trykt, henført til saadanne Bestemmelser, som give umiddelbar Anvisning paa Udførelsen, og var dernæst anvendt til visse bestemte Undersøgelser. For disse havde ogsaa andre givet Regler af mere begrænset Omfang. Newton angiver en almindelig Differentiationsregel med lige saa stor Bestemthed som Fermat, og næsten den samme som denne. Naar to Størrelser x og y ere forbundne ved en Ligning, og naar tillige $x + o$ giver $y + ov$, er den Grænseværdi, som v faar for $o = 0$, det, som Newton kalder Forholdet mellem Fluxionerne, $\dot{y}$ og $\dot{x}$, af y og x . Den er ganske det samme, som Leibniz snart efter kaldte Forholdet mellem Differentialerne, og som vi nu kalde Differentialkvotienten. Første Gang Newton gjør Brug af denne Fremstilling, uden dog endnu at bruge Ordet Fluxion, viser han, at naar y er det Areal, som vi nu fremstille ved $\int_a^x u dx$, bliver $v = u$. Paa Grundlag heraf er det, at han ved den nye Operation kan finde kvadrerlige Kurver eller, som vi nu udtrykke det, ved Differentiation kan finde de Funktioner, som kunne integreres under endelig Form.

Newtons Fluxioner ere altsaa klart bestemte ved de Operationer, som føre til Dannelsen af deres Forhold (hvorpaa det ene kommer an). Han har imidlertid i Beskrivelsen af dem og deres Dannelse jævnlig talt om dem som de Hastigheder, hvormed x og y forandre sig, hvilket i den geometriske Fremstilling bliver de Hastigheder, hvormed det ene Endepunkt af Linier af Længden x og y bevæger sig. Flere have derved faaet Indtryk af, at Fluxionsbegrebet er laant fra Mekaniken, saaledes at Vanskeligheden blot er flyttet over paa et andet Omraade, thi ogsaa Hastighed i en ujævn

Bevægelse kræver en nøjagtig Definition. Denne Indvending maa bortfalde over for hans bestemte Beskrivelse af Fluxionernes Dannelselse. I Virkeligheden gjør han ikke noget andet Laan fra Matematikens Kombination af Tid og Rum end det, vi endnu maa gjøre eller dog maatte gjøre, hvis vi fastholdt den nedarvede rumlige Fremstilling af Størrelserne x og y . Vi kalde nemlig $\frac{dy}{dx}$ Grænsen for Forholdet mellem de samtidige Tilvækster af x og y , naar begge svinde ind til 0, og bruge derved Tiden ganske som Newton, nemlig som en foreløbig uafhængig Variabel. At den ogsaa for Newton kun er foreløbig, viser han ved at kunne tage hvilken som helst af de andre Størrelser, f. Ex. x , til uafhængig Variabel, hvad han gjør, idet han fordrer, at den skal forandre sig jævnt, saaledes at Fluxionen $\dot{x} = 1$. Dette kommer ham aabenbart særlig til Gode, naar der skal dannes højere Fluxioner, idet da Fluxionen $\ddot{x}$ af $\dot{x}$ bliver 0. Begrebet uafhængig Variabel bliver ved Newtons Fremstilling fuldt saa klart som i moderne Lærebøger.

At iøvrigt Fluxionsbegrebet for Newton stedse beholdt en nær Sammenhæng med Fluxionens mekaniske Anvendelse som Hastighed, hænger nøje sammen med, at hans infinitesimale Undersøgelser tildels gik Haand i Haand med dem, han har fremstillet i *Principia*, selv om han der ikke ligefrem gjør Brug af den af andre endnu ukjendte Fluxionsregning. Han kunde i alt Fald ikke endnu i den finde et saa solidt og anerkjendt Grundlag som det, der havdes i den gamle Geometri. Til denne knytter han altsaa sin Fremstilling; men den maa dog for at bruges suppleres med en Række forudskikkede infinitesimale Principer. Disse, som han forstaar at passe sammen med den gamle Geometris Fordringer, navnlig ved at undgaa den rent negative Bestemmelse uendelig, give de infinitesimale Bestemmelser under Form af nøjagtig forklarede Grænseværdier. Dette stemmer fuldkommen med hans Bestemmelse af Fluxionerne.

Netop Newtons strænge Fordringer til Exakthed og det Besvær, han kunde underkaste sig for at tilfredsstille disse Fordringer, turde have deres Andel i, at det ikke blev den af ham grundlagte Form for Infinitesimalregningen, som er trængt igjennem og har bevaret sig til vore Dage. De have endog foraaarsaget dette paa rent udvortes Maade, da det tør antages, at Hovedgrunden til, at han lod sine vigtigste Arbejder om Infinitesimalmethoderne henligge uudgivne til lang Tid efter, at hans yngre Medbejler Leibniz var kommen ham i Forkjøbet med sine, har været den, at han ikke overalt havde naaet at tilfredsstille sine egne Fordringer; men selv i de offentliggjorte Arbejder bliver Fremstillingen — der iøvrigt ikke altid faar alt det med, som behøves for at gjøre den lige saa klar som hans Tanke — besværet af de mange logiske Hensyn, han mener at burde tage. Naar han saaledes har Brug for (det, vi nu kalde) Differentialkvotienten af en irrational Funktion, bringer han først den Ligning, der bestemmer den, paa rational Form, og differentierer saa Ligningen, medens Leibniz strax giver udtrykkelige Differentiationsregler for explicite Funktioner, deriblandt ogsaa for Differentiation af Rodstørrelser. Det lader sig paa-vise, at Newton kjendte og brugte denne Regel før Leibniz, der endog først opstillede den, efter at han ved Newtons Breve havde lært den i denne Henseende saa vigtige Binomialformel at kjende. Newton har imidlertid ogsaa paa dette Punkt undgaaet at benytte denne Formel, hvis Bevis han ikke besad i almenlydig Form.

Indførelsen af uendelige (smaa og store) Størrelser.

Leibniz (1646—1716), der indtager en Plads over for Newton svarende til den, som Descartes indtog over for Fermat, Plato over for Eudoxos, havde i det hele en overordentlig Sands for Matematikens formelle Side. De samme Tegn for Differentialer og Integraler, som vi bruge den Dag i Dag, brugte han allerede paa en Tid, da han endnu ikke kunde gjøre synderlig udstrakte Anvendelser deraf, og førend han endnu vidste noget om, hvor meget videre Newton allerede var kommen paa det samme Omraade. Han saa tidlig, at disse Tegn vare vel skikkede til almindelig Brug, medens Newton i lang Tid nærmest anvendte sine i og for sig lige saa gode Fluxionsbetegnelser i sine personlige Undersøgelser. Leibniz saa ogsaa strax, at det var en Hovedsag at have bestemte og færdige Regler endog for de simpleste Operationer. Efter selv at have dannet Regler for Differentiation af Produkt og Kvotient, tog han strax af Newtons nys berørte Meddelelse Anledning til ogsaa at opstille en bestemt Regel for Differentiation af Rodstørrelser, en Regel, som han trods den — for dennes Vedkommende — øjensynlige Paavirkning fra Newton gjør sig til af. Ved saadanne Midler gjør han Anvendelsen af Infinitesimalmetoderne til en Regning, som man kan vinde Sikkerhed i at anvende, uden at man behøver til enhver Tid at holde sig de til Grund liggende Principer umiddelbart for Øje.

Hvad nu selve disse Principer angaar, giver Leibniz Signalet til en lignende Frontforandring som den, Descartes foretager i Begyndelsen af sin Geometri. Descartes brød med den fra de Gamle nedarvede Fordring, at den af Arithmetik og Regning fremgaaede Form for Algebraen ikke maa

anvendes paa almindelige Størrelser, eftersom disse i Almindelighed ikke kunne fremstilles ved Forhold mellem hele Tal, Leibniz med den, at man ikke i sine Beviser maa benytte uendelige — smaa eller store — Størrelser, eftersom *uendelig* er en rent negativ Bestemmelse. Begge Dele havde man vistnok baade i den tidligere Oldtid og ganske vist i den nyere Tid før henholdsvis Descartes og Leibniz gjort med stort Held. Men i exakte Beviser krævedes en fuldstændig Overensstemmelse med de Gamle, altsaa en Henførelse af Algebraen til det, som findes i de Gamles Geometri, deri indbefattet Proportionslæren, og af de infinitesimale Bestemmelser til saadanne Grænsebestemmelser, for hvilke der kan føres et Exhaustionsbevis. Descartes støtter sin Ret til at bruge den arithmetisk opførte Algebra i Geometrien, det er i den almindelige Størrelseslære, derpaa, at han ved en blot Navneforandring kan drage selve de Gamles Geometri ind i denne arithmetiske Algebra. Leibniz søger Sikkerheden for, at det samme, som hans Venner og Lærlinge udtrykke, idet de tale om uendelig smaa Størrelser, ogsaa, men blot i en mere besværlig Form, kan udtrykkes som exakte Grænsebestemmelser. I det første Skrift, hvori han forelægger Differentialregningen for Offentligheden, undgaar han endog ved en direkte Brug af Grænsemethoden de uendelig smaa Størrelser og giver en Definition paa Differentialer, der ikke afviger væsentlig fra den, vi nu skylder Cauchy. Senere hen giver han i det mindste Anvisning paa, hvorledes de uendelig smaa Størrelser skulle forstaas, naar de skulle kunne anvendes i exakte Beviser. Han fremhæver nemlig, at derved skal menes Størrelser, som kunne gøres saa smaa, at det ved dem vises, at Afvigelsen fra det Resultat, som skal bruges, maa være mindre end enhver nok saa lille Størrelse; men da er denne Afvigelse 0.

Han forsømmer dog at indlægge disse sidste Betragtninger i en udtrykkelig Definition, som vedblivende kunde lægges til Grund for Brugen af de uendelig smaa Størrelser,

og den, han, som nys nævnt, først havde givet af Differentialer, holdt sig ikke. Efter ham gik det altsaa omtrent som med den arithmetiske Algebra efter Descartes. Man fastholdt de Egenskaber ved uendelig smaa Størrelser, som komme til Anvendelse, naar de skulle bruges, navnlig dem, at en uendelig lille Størrelse selv kan bortkastes, naar den skal lægges til eller trækkes fra en endelig Størrelse, ligesaa Potenser af uendelig smaa Størrelser, naar de skulle lægges til eller trækkes fra Potenser med lavere Exponent. Man vænnede sig saa godt til at bruge disse Regler og til derved at vinde nye og rigtige Resultater, at man glemte at spørge om deres logiske Berettigelse, ja endog at gjøre Rede for den logiske Betydning af de Ord, man brugte.

En saadan Uklarhed kunde endog synes at ligge i en enkelt Ytring af Leibniz. Naar han f. Ex. vil oplyse det uendelig smaa ved at sammenligne Jordens Størrelse med Afstanden fra Fixstjernerne eller en Boldt med Jorden, og uendelig smaa Størrelser af anden Orden ved at sammenligne Boldten med Afstanden fra Fixstjernerne, kunde derved synes at være given en urigtig Anvisning. Størrelser af den anførte Art kunne nemlig kun bruges til at bevise, at en Sætning ikke afviger meget fra at være rigtig, ikke at den er ganske rigtig. Leibniz' Slutningsord paa samme Sted vise imidlertid, at det slet ikke er hans Mening at sætte disse meget smaa Størrelser i Stedet for de uendelig smaa, men kun paa en anskuelig Maade at vise Vejen til at gjøre Størrelserne saa smaa, at *Fejlen* bliver mindre end den *givne Fejl* (o: end en vilkaarlig opgiven Størrelse). Dette stemmer, som han med Rette siger, med Archimedes' Behandling. Han finder kun Brugen af de uendelig smaa Størrelser, hvilke han andetsteds betegner som *toleranter vera*, mere *conforme à l'art d'inventer*.

Denne Forsigtighed deltes ikke af hans Venner og Lærlinge, der endog kunde bebrejde ham, at han paa dette Punkt gjorde Tilhængerne af den gammeldags Grænsemethode for

store Indrømmelser og *forraadte* de uendelig smaa Størrelsers Sag. Det forekom dem vistnok, at noget af den Lethed i Opfindelseskunsten, som ogsaa Leibniz fremdrager, vilde gaa tabt, naar man skulde underlægge de anskuelige og let haandterlige uendelig smaa Størrelser en nærmere Forklaring. En saadan udelod de derfor ganske. Den Mand, der har høstet nogle af de betydeligste Frugter af Leibniz' Differential- og Integralregning og ved Siden af Leibniz bidraget mest til disse Regningers første Udvikling, Johan Bernoulli, kan endog komme med en saa uforstaaelig Bemærkning som følgende: Man kan hverken bevise, at uendelig smaa Størrelser ere til, eller at de ikke ere det; men sandsynligvis ere de til. Det synes, som om der forud for dette Spørgsmaal maatte gaa det, hvad uendelig smaa Størrelser ere. En Forklaring herpaa mangler ogsaa ganske i den første Lærebog i Differentialregning, nemlig L'Hospitals *Analyse des infiniment petits* (1696). Differenser (det, vi nu kalde Differentialer) siges at være de *portions infiniment petites*, som o. s. v., men der siges ikke, hvad der menes med *infiniment petit*. I en senere Kommentar bruger Varignon i sin Forklaring heraf Betegnelsen *indéfiniment petit*; men om end denne Omskrivning peger i den rigtige Retning, er den dog ikke egnet til strax at gjøre Begrebet forstaaeligt for andre.

Det 18de Aarhundrede blev altsaa, for saa vidt det ikke med Maclaurin fulgte Newtons omstændeligere Methode, oplært til at bruge Differential- og Integralregning og at bruge dem godt, men det fik ikke fuld Forklaring paa deres Grundprinciper. Tænkende Folk søgte da paa egen Haand at forstaa, hvad disse uendelig smaa Størrelser, som ere saa nyttige, egentlig ere. Exempelvis skal jeg omtale et Par saadanne Forsøg i den dansk-norske Litteratur.

Den bekjendte Forfatter af Regnebøger C. Cramer udgav 1748 et lille Skrift paa 6 Sider*) med Titlen: Algebraisk

*) I det mindste betegner *Bibliotheca danica* Cramer som Forf. til dette lille anonyme Skrift.

Null-Regning eller Tydelig Differentialregning. I dette søger han, som vi have set med god logisk Grund, at undgaa de uendelig smaa Størrelser. Han opnaar det ved en Fremgangsmaade, der næsten er den samme som den, Newton anvendte til Bestemmelsen af en Differentialkvotient. Den ligner endog Newtons deri, at han ved at give den Størrelse, som først skal være vilkaarlig, men i Grænsetilfældet skal blive Nul, Tegnet n , udtrykkelig betegner, at den er bestemt til at antage denne Værdi. Newton bruger et o , som jo ligner 0. Mærkelig nok slutter den skarpsindige Cramer med at udtale den Overbevisning, at de, der have grundlagt Infinitesimalregningen, fra først af maa have baaret sig saaledes ad, førend man fandt *den behændige Differentialregning* med dens regelbundne Fremgangsmaader. Der er dog ikke Grund til at tro, at han véd dette gennem direkte Kjendskab til Newtons (eller Fermats) Arbejder.

Mindre heldig har den norske Rektor Arentz været i sin Bestemmelse af, hvad Matematikens uendelig smaa Størrelser ere. Han faar nemlig ud, at de maa have en fra Nul forskjellig Værdi og altsaa være, hvad man kalder relativt uendelige. Heraf vilde, som alt berørt, følge, at heller ikke Sætningernes absolute Rigtighed bevises ved disse Størrelser. Det er imidlertid gennem fuldkommen rigtige Slutninger, at Arentz kommer til det Resultat, at *det er umuligt, at nogen matematisk Størrelse kan være virkelig uendelig*, og derfor er det, at han fortjener at nævnes. Den daværende Differentialregning omtalte nemlig de uendelig smaa Størrelser uden nogen anden Forklaring end den, som ligger i Navnet. Arentz maatte derfor gaa ud fra det almindelige Størrelsesbegreb. Størrelser maa altid have en vis Værdi, og de kunne ikke paa en Gang være Nul og forskjellige fra Nul. Det var saaledes i Virkeligheden den logiske Uholdbarhed af den da brugelige Infinitesimalregnings Udgangspunkt, Arentz viste.

Lignende Forklaringer findes vistnok i andre Landes

Litteraturer, deriblandt ogsaa saadanne, der ere lige saa nøjagtige som Cramers og samtidig komme den eksisterende Differentialregning nærmere. Saadanne findes f. Ex. hos den store Mathematiker Euler. Det var imidlertid bestandig kun Forklaringer af de uendelige (smaa eller store) Størrelser, man nu en Gang brugte i Mathematiken, ikke en saadan Definition, som fra først af kunde give disse Størrelser den Hjemmel, som de hverken faa ved at kaldes uendelige eller Størrelser.

Derfor se vi endnu den store franske Mathematiker Lagrange (1736—1813) gjøre et Forsøg af ny Art paa at undgaa dem. Taylor havde knyttet Funktionernes Udvikling i Række til Dannelsen af Differentialkvotienter. Lagrange gik den omvendte Vej og knyttede Dannelsen af Differentialkvotienter eller, som han kaldte dem, afledede Funktioner til Funktionernes Fremstilling ved Rækkerne. De til denne Dannelse nødvendige Operationer og Betragtningssmaader blive dog væsentlig de samme, hvad enten de komme paa det ene eller paa det andet Punkt, og derved bliver Lagranges Bestemmelse i Virkeligheden ikke saa meget forskjellig fra Newtons. Kun naar Funktionerne fra først af ere forelagte som Potensrækker, fører Lagranges Fremgangsmaade umiddelbart til Maalet. I udtrykkelig at tage saadanne Rækker til Udgangspunkt for Funktionernes Bestemmelse bestaar Lagranges Hovedfortjeneste paa dette Punkt, om end den forudsatte Fremstilling ikke er mulig for alle Funktioners Vedkommende.

Det 18de Aarhundrede.

Ved Begyndelsen af det 18de Aarhundrede var Mathematiken væsentlig løsreven fra de Grundlag, hvorpaa man siden Oldtiden havde søgt at bygge dens logiske Sikkerhed. For det første var den almindelige Størrelseslære efterhaanden

bleven bygget paa Arithmetik eller paa Regning med rationale Tal, og dog anvendte man den uden Betænkelighed paa kontinuert varierende Størrelser. Ej blot den Proportionslære, hvorigjennem saadan Anvendelse logisk sikredes, men ogsaa den geometriske Formulering, hvori disse Størrelsers Begreber i det mindste postuleredes, vare opgivne, om end den geometriske Fremstilling bestandig benyttedes som et velkomment Middel til at anskue den kontinuerte Variation. Dette brugtes ikke mindst i de infinitesimale Undersøgelser. For disses Vedkommende havde man gjort det andet store Brud med Traditionen, som vi nu lige have omtalt.

I begge disse Retninger gik man videre i Aarhundredets Løb, navnlig ved uden videre at anvende den paa Arithmetik grundede Algebra ogsaa paa imaginære Størrelser og ved at anvende den paa uendelige Rækker uden at spørge om disses Konvergens. Det, som bestyrkede i denne Dristighed, var de store Fremskridt, som man ad denne Vej gjorde trods de logiske Svagheder ved Fremgangsmaaden. Naar vi nu se hen til disse Fremskridt, maa de ogsaa for os staa som saa betydelige, at det var forstaaeligt, at man ikke ret fandt Tid til at uddybe Begrundelsen. Ganske vist udsatte man sig uden denne for at begaa Fejl; disse eller snarere Resultater uden nogen forstaaelig Mening skulde heller ikke udeblive og have da netop bragt Mathematikerne til at søge tilbage til sikrere Synsmaader; men i det hele og store maatte den fornuftige Sammenhæng, som viste sig i det store Udbytte af Undersøgelserne, indgyde Tillid til dette Udbyttes og dermed til Methodernes Paalidelighed.

Hvad det her tilkommer os at fremhæve, er, at meget af det store Arbejde, som man udførte, ogsaa kom Mathematikens exakte Behandling til Gode. Man udrettede store Ting i Udviklingen af de matematiske Former. Svagheden bestod i, at man ikke altid trængte til Bunds i, hvad Formerne egentlig indeholde; men sikre og klare Former ere dog altid et meget vigtigt Moment i Behandlingens Sikker-

hed og Klarhed. De kunne gjøre uimodsigeligt, hvad der ellers kun er et Skjøn, om end et Skjøn, om hvis Berettigelse ingen tvivler. Ved Omtalen af Fermat have vi saaledes

sagt, at han for at bestemme, hvad vi kalde $\int x^{\frac{m}{n}} dx$, for vilkaarlige hele Tal m og n , ligesom Oldtidens Forfattere i lignende Spørgsmaal strax tillagde disse Tal bestemte Værdier, men gennemførte Undersøgelsen saaledes, at man kunde se, at den lige saa godt gjælder andre Værdier af m og n . Vi have endvidere bemærket, at det, som hindrede Newton i at føre sine fuldt ud rigtige Konvergensprinciper igjennem i sin Behandling af uendelige Rækker, var tekniske Mangler, navnlig Mangel paa Midler til at udtrykke og behandle det almindelige, det n te Led. Saadanne Mangler afhjælp man efter meget stor Maalestok i det 18de Aarhundrede.

Herved spiller den allerede af Pascal benyttede fuldstændige Induktion — som for at bevise, at et Resultat er rigtigt for alle Værdier af n , dels i Almindelighed beviser, at det er rigtigt for $n + 1$, naar det er det for n , dels særlig efterviser, at det er det for en vis lav Værdi af n — en vigtig Rolle. Iøvrigt har Leibniz Hovedfortjenesten i Henseende til Indførelsen af den Formelteknik, som er nødvendig baade ved Gjennemførelsen af vanskelige Beviser af denne Art og til en klar Fremstilling af Resultaterne. Vi skulle i den Henseende blot minde om hans Brug af Mærketal og andre Dobbeltbetegnelser og derom, at hans Differentialbetegnelser f. Ex. tillod ham at give et almindeligt Udtryk for n 'te Differential af et Produkt. Udviklingen fremmedes iøvrigt baade af Leibniz' Efterfølgere paa Fastlandet og af de engelske Matematikere, blandt hvilke vi skyldte Moivre Begrebet rekurrente Rækker og Taylor hans bekjendte Række. Størst Fuldkommenhed naaede dog baade denne Side af Mathematiken og Aarhundredets øvrige analytiske Arbejder hos Leonard Euler (1707—1783). Bestemmelsen af det n 'te Led i en Udvikling indskrænker han saaledes ikke til det Omraade, hvorpaa der

oprindelig tænktes, nemlig hvor n er hel; men han søger Udtryk, der ere brugelige for alle Værdier af n , ogsaa brudne og irrationale. Jeg skal saaledes minde om hans Fremstilling af Produktet $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ved et bestemt Integral (Gammafunktionen).

I og for sig ere saadanne Udvidelser som denne logisk fuldt berettigede; men den Fare, som allerede har vist sig ved Algebraens tidligere mere beskedne Udvidelser, bliver selvfølgelig ikke mindre her, hvor det endog maa henstaa tvivlsomt, om ikke andre Former for Udvidelsen kunde være lige saa berettigede, og hvor man maa kjende de Grænser, indenfor hvilke Udvidelsen overhovedet giver nogen Mening. At følge den af Wallis rejste Fane blev saaledes forbundet med større og større Fare, jo større og mere mangeartede de Udvidelser bleve, som Sammenfatningen i det stærkt udviklede tekniske Sprog kunde føre til. Samtidig var man saa stærkt optagen af denne Udvikling og saa tilfreds med dens Resultater, at Begjærligheden efter at benytte dem i rigest muligt Maal gjorde blind for Farerne.

Mest og tydeligst syndedes der ved Brugen af de uendelige Rækker*). Den rigtige Forstaaelse af Konvergensbegrebet, som vi have set hos Newton, og som saa naturlig slutter sig til den antike Opfattelse, tabtes vel ikke, mindst af Mænd som Leibniz og Euler; men i sin Iver for at faa et rigt Udbytte af sine Rækkeudviklinger indskrænkede man sig ikke til at opstille og anvende de konvergente Rækker. Vel kunde man ikke støtte Retten til at bruge divergente eller oscillerende Rækker paa matematiske Grunde, men saa tyede man til metafysiske.

Leibniz har fuldkommen rigtig opstillet den almindelige Sætning om Konvergens af Rækker, hvis Led have vexlende Fortegn, aftage og have Grænseværdien 0. I Beviset begaar han dog den Fejl at tale om Differensen mellem

*) Smlgn. Reiff: Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.

de Almindelighed divergente Rækker, som dannes af de positive og negative Led tagne for sig. I en ganske lignende Fejl gjør Johan Bernoulli sig skyldig. Herpaa vilde det dog ikke være vanskeligt at raade Bod, og navnlig Leibniz' Undersøgelse viser, at han ingenlunde forvexler Rækkens Konvergens med Leddenes Aftagen til Nul. Væsentligere Indvendinger kan der gøres mod, at Leibniz godkjender Udvidelsen af Læren om konvergente Kvotientrækker

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots,$$

som gjælder for $-1 < \alpha < 1$, til Grænsetilfældene og derfor vil forklare Resultatet

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

i Stedet for simpelt hen at forkaste det. For Leibniz' Vedkommende turde dette nærmest hænge sammen med hans Kontinuitetsbegreb, ifølge hvilket Størrelser, der ere lige store med hinanden, hvor meget α nærmer sig til -1 , ogsaa maa være det i selve Grænsetilfældet. Hans metafysiske Forklaring vedrører imidlertid den færdige Række $1 - 1 + 1 - 1 \dots$ og giver ikke nogen matematisk Indsigt i Grænseovergangen.

Euler gaar for saa vidt videre end Leibniz, som han ikke holder sig til de oscillerende eller divergente Rækker, som man faar i Grænsetilfældene, men i Almindelighed vil hævde Betydningen af en divergent Række. Naar man har villet forklare Ligningen

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 \dots,$$

som faas ved i den nys nævnte Række at sætte $\alpha = 2$, derved, at Rækken er mere end det, som faas ved at sætte $\alpha = 1$, altsaa mere end uendelig, hvad der efter Wallis netop er Tilfældet med de negative Størrelser, saa godkjender Euler ganske vist ikke denne Forklaring. Han ved sikkert lige saa godt som adskillige Forgængere, at Urimeligheden her saa vel som i de Tilfælde, hvor Binomialformlen fremstiller

imaginære Udtryk ved Rækker med lutter reelle Led, hæves, naar man standser Rækken og medtager Restledet. Euler indrømmer endog fuldstændig, at en uendelig og divergent Række ikke har nogen endelig Sum. Han betragter imidlertid selve Udviklingen af Rækken som saa karakteristisk for den Størrelse, der skal udvikles, at denne og Rækken kunne træde i Stedet for hverandre. Hvis han nu skarpt havde udpeget og begrænset de Tilfælde, hvor saadan Ombytning med Nytte kan finde Sted, og bevist, at det kan ske uden at ændre Resultatet, vilde Regningen med de uendelige Rækker kun være en ny symbolsk Regning, der kunde have sin Berettigelse. Han opfylder imidlertid i ingen Maade de nævnte Forudsætninger og udtaler saaledes kun sin egen Tro paa, at disse Rækker kunne faa en god Anvendelse. Man opdager snart hans subjektive Grund til denne Tro, nemlig den store Interesse og det store Arbejde, han sætter ind paa at udvikle Rækkerne og, hvad der er vanskeligere, omvendt at finde Udtryk, hvis Udvikling giver bestemte Rækker. Man ser det af den Iver, hvormed han strax efter de anførte Bemærkninger kaster sig over Summationen af en divergent hypergeometrisk Række, det vil sige Bestemmelse af et Udtryk, hvis Udvikling giver denne.

Med saadanne Principer kan man forstaa, at det blev særlig farligt for Euler at komme ind paa Rækker, udviklede efter trigonometriske Funktioner af multiplicerede Buer. Saa længe Rækkerne ere konvergente, kunde de være gode nok; men Euler opstillede ogsaa andre, navnlig oscillerende, saasom

$$\cos \varphi + \cos 2 \varphi + \cos 3 \varphi + \dots = -\frac{1}{2},$$

Summationer, hvis egentlige Betydning er vanskelig at forstaa, da $\cos n \varphi$ jo vedbliver at faa en endelig Værdi ogsaa for $n = \infty$. Hans Arbejde med saadanne Rækkeudviklinger har desuagtet faaet sin Betydning, efter at man i vort Aarhundrede

har lært at bringe det vundne Udbytte indenfor de rigtige Grænser.

I denne Forbindelse kan endnu nævnes, at først Johan Bernoulli og senere Euler efter langt større Maalestok overførte paa transcendent Ligninger med uendelig mange Led, hvad der vides om endelige algebraiske Ligninger. Ad denne Vej fandtes mange vigtige Summationer af uendelige Rækker og Opløsninger i uendelige Produkter. Leverer den anvendte Betragtningssmaade end ikke fuldstændige Beviser, lade saadanne sig dog her forholdsvis let knytte dertil.

Den her omtalte Brug af divergente Rækker gik dog heller ikke den Gang upaataalt hen. De Anskuelser, som vi nu hyld, fastholdtes i Aarhundredets Begyndelse af Varignon og paa Eulers Tid af Nicolaus Bernoulli og d'Alembert. Den Sejr, de have vundet i vort Aarhundrede, forberedtes endelig af Lagrange. Han var vel tidligere gaaet i Eulersk Retning. I sin *Théorie des fonctions* tager han i Reglen heller ikke Hensyn til Rækkernes Konvergens, der for saa vidt er ham mindre magtpaaliggende, som han ligesom Newton væsentlig bruger dem for tilstrækkelig smaa Værdier af den uafhængige Variable. At han dog har de nødvendige Hjælpemidler rede, viser hans Diskussion af Restleddet i Taylors Række og Anvendelse deraf til at prøve, om Rækken konvergerer og fremstiller den Funktion, som ønskes fremstillet.

I Sammenligning med Operationerne med uendelige Rækker maa det forrige Aarhundredes Benyttelse af imaginære Størrelser betragtes som mere uskyldige. Det var en umiddelbar Overførelse af de sædvanlige algebraiske Regninger paa saadanne Størrelser, som indeholde $\sqrt{-1}$, idet man blot karakteriserede denne Størrelse ved, at dens Kvadrat er -1 . Saadanne Regninger udførtes med rigt Udbytte lige fra Leibniz' Tilløb til ad denne Vej at integrere Brøker, hvis Nævner ikke indeholde lutter reelle Faktorer af første Grad, til Eulers bekjendte Formler til Overgang mellem ex-

ponentielle og trigonometriske Funktioner og hans Anvendelser deraf f. Ex. til at forklare Betydningen af Logarithmer til negative Tal. Der behøvedes endnu kun en Forklaring af selve Betydningen af Regningerne med imaginære Tal og en derpaa grundet Paavisning af disse Regningers Gyldighed for fuldstændig at sikre alle de Resultater, som vare vundne ad denne Vej. En Gjennemførelse af denne Forklaring tilhører vel først det 19de Aarhundrede; men den blev ej blot for saa vidt forberedt i det forrige, som Gauss' personlige Arbejder i den Retning rimeligvis gaa saa langt tilbage. En tydelig og bestemt Forklaring i samme geometriske Form, i hvilken den senere fremkom fra Gauss, Armand og Cauchy, forelaa allerede inden Aarhundredets Udgang trykt i det kongelige danske Videnskabernes Selskabs Skrifter i den norskfødte Landmaaler Wessels Afhandling: *Om Direktionens analytiske Betegning.*

Slutning.

Med Begyndelsen af det 19de Aarhundrede afslutter jeg nærværende Overblik. Selv i den meget beskedne Maalestok, som jeg har kunnet give mit Arbejde, vilde det nu snart forløbne Aarhundrede behøve en lige saa stor Plads som alle de foregaaende. Dets Arbejde er iøvrigt ikke ladet upaaagtet, for saa vidt som jeg har bedømt de tidligere Standpunkter ud fra dem, som nu ere vundne, og Matematikere af Fag ville selv kunne have haft Lejlighed til at se, hvorledes disse ere forberedte af hine. Dels af Hensyn til andre Læsere, dels for Sammenhængens Skyld skal jeg dog lige pege paa de Afslutninger, som de foran berørte Bevægelser have faaet.

Ad den Vej, som Wessel først havde betraadt, fik de imaginære Størrelser, der oprindeligt kun vare vilkaarlig ind-

førte Betegnelser for Rødder i Ligninger uden reelle Rødder, en positiv Existens. De vandt i Betydning ved Gauss' Paavisning af, at Rødderne i algebraiske Ligninger alle have Formen $a + b\sqrt{-1}$. Cauchy udstrakte Læren om Funktioner samt Differential- og Integralregning til varierende imaginære eller, som man siger, komplexe Størrelser. Senere har man i Læren om Kvaternioner og om n Dimensioner yderligere udvidet dette Omraade. Ved disse og ved andre Udvidelser af de algebraiske Operationer til Omraader, for hvilke de oprindelig ikke vare bestemte, f. Ex. symbolsk Differentiation og Integration, har man anvendt stor Omhu paa det, som tidligere forsømtes, nemlig at klare sig, i hvilket Omfang disse Operationer kunne anvendes paa de enkelte Omraader. Undersøgelsen heraf har været forbunden med et abstrakt Studium af de ved Tegnsproget udførlige Operationer og deres logiske Rækkevidde.

Den ved Lagrange begyndte mere exakte Behandling af uendelige Rækker er fortsat af Gauss og af ham navnlig anvendt paa den hypergeometriske Række. I større Omfang og end mere indgaaende er dernæst ogsaa dette Spørgsmaal optaget af Cauchy, som ikke blot har undersøgt de almindelige Betingelser for Konvergens af Rækker med reelle eller komplexe Led, men ogsaa givet almindelige og exakte Regler for Regning med disse Rækker. Medens Newton fremstillede Integralet i forelagte Differentialligninger ved Rækker, var Cauchy i Stand til exakt at bevise, at en saadan Række altid eksisterer, og at altsaa en Differentialregning altid har et Integral. Cauchy har desuden givet de uendelige, smaa og store, Størrelser en saadan Definition, at de blive virkelige Redskaber for exakte Grænsebestemmelser, uden at den anskuelige Behandlingsmaade, som forrige Aarhundrede anvendte med saa stor Lethed, men ikke altid med god Samvittighed, derved tabes. Det opnaas derved, at man *siger*, at Størrelser, som i et undersøgt Grænsetilfælde *blive* uendelige, *ere* det, og at det tillige paavises, at man da i Grænse-

bestemmelsen er fuldt berettiget til at tage sig just de Friheder, som man ogsaa tidligere med saa stort Held havde benyttet.

De af Cauchy opstillede Principer paa de komplexe Størrelsers og uendelige Rækkers Omraade bearbejdedes videre af Abel og lagdes til Grund for hans banebrydende Arbejder. Disse og mange af Cauchys egne vise, at den mere kritiske Retning ikke behøver at være mindre frugtbare, at tvertimod den finere Undersøgelse netop kan medtage saadanne Momenter til vidtrækkende Fremskridt, som ellers vare blevne oversete. Et kritisk Arbejde af anden Art har Abel leveret i sit Bevis for, at Femtegradsligningen ikke kan løses algebraisk.

Endelig har Weierstrass paa exakt Maade gennemført Matematikens Arithmetisering. Det er sket paa Grundlag af de samme Principer, som hævdedes af Eudoxos, Euklid og Archimedes, og som endnu Newton og tildels Leibniz fastholdt i egentlige infinitesimale Undersøgelser. De vare vel traadte tilbage i det 18de Aarhundrede, men atter med Styrke gjorde gjældende af Cauchy, dog nu løsrevne fra den antike Forbindelse med Geometrien, ligesom Tilknytningen til de Gamle i Reglen ikke mere blev gjort gjældende. Det Omraade, hvorover disse Principer, der i Oldtiden kun skulde rumme temmelig begrænsede Undersøgelser, nu skulde spænde, var imidlertid udvidet saaledes, at man vel forstaar, at den nye og af ethvert geometrisk Postulat uafhængige Gjennemførelse af Principerne har krævet et overordentligt Arbejde. Værdierne af irrationale Størrelser kunde man vel definere omtrent som i de Gamlers Proportionslære. Nu maatte man paa lignende Maade definere Funktioner ved uendelige konvergente Rækker, og vel at mærke man holdt sig under den videre Behandling udelukkende til de derved udtrykte Egenskaber. Man maatte saaledes direkte prøve de definerede Funktioners Kontinuitet og ikke laane Begrebet herom fra en postuleret geometrisk Fremstilling. Ligeledes maatte man direkte prøve, om Funktionerne have en Differential-

kvotient, hvad der viste sig ikke altid at være Tilfældet med saaledes definerede Funktioner. Man maatte endelig logisk frigjøre sig for de nye Laan fra den geometriske Anskuelse, hvorigjennem de imaginære Størrelsers reelle Betydning var sikret.

Dog maa det siges, at Weierstrass' Retning, naar den prøver Kontinuiteten af de enkelte, nøjagtig definerede Funktioner, gaar ud fra Begrebet om Størrelsernes Kontinuitet som noget eksisterende. Kronecker gaar et Skridt videre og indskrænker Mathematiken til Bestemmelser ved hele Tal, deriblandt ogsaa dem, hvorved man i det uendelige nærmer sig til at udtrykke de irrationale Størrelser, men han medtager ikke selve disse ad indirekte Vej bestemte Størrelser. Han indtager saaledes et Standpunkt, der maatte tilfredsstille endog Zenon fra Elea.

Medens jeg forbigaar de mange nye logiske Spørgsmaal, som selve de nye Retninger i vort Aarhundrede have fremkaldt, skal jeg endnu til ovenstaaende almindelige Afslutning af de behandlede Hovedspørgsmaal føje et Par Bemærkninger om Resultater, hvortil man er kommen med Hensyn til Ting, der have været berørte i det foregaaende. Det kan da navnlig have Interesse at vide, hvilken Plads i logisk Henseende Geometrien, den tidligere Bærer af den exakte og almindelige Størrelseslære, har faaet efter i den Henseende at være afløst af den arithmetiske Algebra. Den har navnlig i vort Aarhundredes første Halvdel udviklet sig med en siden Oldtiden ukjendt Frodighed. Idet denne Udvikling fornemmelig var rettet imod Udvidelsen af Geometrien til at omfatte større og større Omraader og at vinde nye Resultater, har den i lang Tid slet ikke lagt an paa Ensartethed i Methoderne, men kombineret den geometriske Figurbehandling med Ræsonnementer og Resultater laante fra Algebraen. Herunder er navnlig kommen en udstrakt Benyttelse af saakaldte imaginære Figurdele, som i og for sig slet ikke have nogen geometrisk Existens. Om disse

Fiktioner kan siges det samme som om de Laan, den arithmetiske Algebra i sin Tid gjorde fra den da mere udviklede Geometri. De ere logisk fuldt berettigede, naar blot, hvad man ikke altid har gjort, Laanet udtrykkelig anerkjendes, og man overalt sikrer sig, at Overførelsen ikke gjør noget Brud paa de Forudsætninger, hvorunder det, som man laaner, er bevist i Algebraen. Nyttens og derved Berettigelsen af Laanene er da godtgjort ved Resultaternes store Omfang og Betydningsfuldhed.

Det er dog naturligt, at der ogsaa her maatte fremkomme Bestræbelser efter at gjøre Methoderne ensartede, saa Geometrien kunde bygge paa sit eget. Paa samme Tid, som man derved faar Øje for, hvor meget der kan naas ved de rent geometriske Forudsætninger, bringer disses Ensartethed en større logisk Fasthed. Man har endog gennem heldige Definitioner sikret de imaginære Figurdéle en rent geometrisk Existens.

Medens man ad denne Vej lærte de geometriske Forudsætningers Rækkevidde at kjende, ere andre Studier gaaet ud paa at finde deres indbyrdes Forhold, deres indbyrdes Uafhængighed, deres erkjendelsestheoretiske Oprindelse og endelig de nye Forbindelser, hvori de maatte træde med den paa arithmetiske Forhold grundede Størrelseslære. Udgangspunktet for disse Undersøgelser maatte være de Gamles omhyggelige Valg af Forudsætningerne, som findes hos Euklid og tildels hos Archimedes. Saadanne Undersøgelser ere i Virkeligheden fortsatte gennem de Aarhundreder, vi i det foregaaende have betragtet. Jeg har dog ladet dem ligge, dels fordi de især ere komne til Udvikling i vort Aarhundrede, dels fordi andre for nylig have gjort omhyggelig Rede for deres ældre Udviklingsgang*).

Endelig skal det nævnes, at Spørgsmaalene om Terningens Fordobling, Vinklens Tredeling og Cirkelns Kva-

*) Se Engel u. Stäckel: Die Theorie der Parallellinien. Leipzig 1895.

dratur, hvis væsentlig theoretiske Betydning i den tidlige Oldtid vi have lært at kjende, have fundet deres Afslutning i vort Aarhundrede. Allerede i Oldtiden betragtede man det som afgjort, at disse og de med de første to beslægtede Opgaver, som nu udtrykkes ved Ligninger af tredie og fjerde Grad, ikke kunne løses ved ret Linie og Cirkel. Formodningen herom maatte vinde i Styrke, da man i den nyere Tid løste saadanne Ligninger uden dog at føre dem tilbage til Udtryk, der kunne konstrueres ved de nævnte Hjælpe-midler. Da Formodningen imidlertid ikke støttedes ved afgjørende Beviser, er det ikke underligt, at nye Forsøg dukkede op. Endog en Mand som den danske Astronom Longomontanus paastod og vedblev at paastaa at have løst Opgaven om Cirkelns Kvadratur, idet han angav en rational Værdi af π . Det er først i vort Aarhundrede lykkedes nøjagtig at bevise, at de omtalte Konstruktioner ikke kunne udføres ved ret Linie og Cirkel. Samtidig er opnaaet en Inddeling af irrationale Tal i algebraiske, der kunne fremstilles som Rødder i algebraiske Ligninger med rationale Koefficienter, og transcendente, der ikke kunne det. De første deles igjen efter de irreduktible Ligninger, hvorved de bestemmes. Til de sidste hører baade π og Grundtallet e for de naturlige Logarithmer.

Prisafhandlingerne

for Aaret 1894—95.

Af de for Aaret 1894—95 udsatte Prisopgaver have 7 fremkaldt 12 Besvarelser, nemlig den theologiske 4, den statsvidenskabelige 1, den filosofiske 2, den historiske 2, den nordisk-filologiske 1, den tysk-filologiske 1 og den fysiske 1, hvorhos der er indkommet en Besvarelse af den i 1893 udsatte Prisopgave i Naturhistorie.

Bedømmelserne over de indkomne Afhandlinger lyde saaledes:

I. De theologiske Afhandlinger.

Som Besvarelse af den for 1894—95 udsatte theologiske Prisopgave: „En Drøftelse af Grundene for og imod Ægt-heden af Peters andet Brev“, er der indkommet fire Afhandlinger.

Den første af disse med Motto: *πάντα δοκιμάζετε, τὸ καλὸν κατέχετε* (331 Kvartsider) er en meget tilfredsstillende Behandling af det opgivne Æmne. Uheldig er ganske vist den lange Indledning om Apostelen Peters Liv og Virksomhed, som optager næsten en Trediedel af Afhandlingen og utvivlsomt har berøvet Forfatteren en Del baade af hans Tid og af hans Kraft, thi den maa betegnes som væsentlig liggende udenfor Æmnet. Men iøvrigt er Afhandlingen

skreven med Modenhed og videnskabelig Dygtighed; Forfatteren har samlet et betydeligt Materiale, over hvilket han viser et godt Overblik, og han bevæger sig med Frihed i det rige Stof uden at overvældes af det. Fakultetet maa derfor erklære denne Afhandling for værdig til Prisen.

Den anden Afhandling med Motto af 2 Kor. 13, 8 (304 Kvartsider) vidner om stor Flid; Forfatteren besidder godt Kjendskab til den herhen hørende Literatur, han er fortrolig med den moderne Kritiks Methode og udøver den med Skarpsindighed. Men Stoffet splittes i altfor mange Enkeltheder, og Brevet selv, som dog er og bliver Hovedsagen, træder i Baggrunden overfor Fortolkernes og Theologernes mange Meninger og Hypoteser. Afhandlingens gode Egenskaber ere dog saa fremtrædende, at ogsaa den utvivlsomt fortjener Prisen.

Den tredie Afhandling, ligeledes med Motto af 2 Kor. 13, 8 (300 Kvartsider) er et flittigt Arbejde, der vidner om, at Forfatteren har sat sig godt ind i det foreliggende Spørgsmaal. Hovedpunkterne ere i det Hele ret omhyggelig behandlede, og Behandlingen viser kritisk Begavelse. Men Arbejdet lider af væsentlige Mangler. Den Litteratur, Forfatteren har benyttet, er stærkt begrændset; man savner Henviisning til nyere Undersøgelser, som burde være medtagne; Citaterne ere unøjagtigt angivne uden Angivelse af Sidetal. Afhandlingen skæmmes desuden ved en umotiveret Overlegenhed overfor det omhandlede Brev og ved umodne og ubegrundede Domme over andre nytestamentlige Skrifter. Paa Grund af disse Mangler kan Fakultetet kun tilkjende dette Arbejde et Accessit.

Den fjerde Afhandling med Motto: *πάντα δι' δοκίμης* (167 Sider) er den svageste af de fire indsendte Prisafhandlinger. Forfatteren har sikkert gjort sig Flid med at indsamle det Materiale, som han har kunnet overkomme, men han mangler kritisk Evne og dermed en Hovedbetingelse for Opgavens Løsning. Hans Hu staar nærmest til at for-

svare Brevets Ægthed, men han formaar ikke med tilstrækkelig Kraft at tilbagevise Modstandernes Indvendinger. Det „non liquet“, hvormed hans Undersøgelser ende, fremgaar ikke som Resultat af en methodisk gennemført Prøvelse af Grundene for og imod Brevets Ægthed, men er snarere et Udtryk for hans egen Usikkerhed og vaklende Holdning. Med Anerkjendelse af Forfatterens redelige Stræben og Interesse for Æmnet kan Fakultetet derfor ikke kjende Afhandlingen værdig til nogen Belønning.

Kjøbenhavn, i Marts 1896.

C. Henrik Scharling. P. Madsen. Fredrik Nielsen.

L. W. Schat Petersen. J. C. Jacobsen.

Ved Navnesedlernes Aabning fandtes Forfatterne at være: af den første Afhandling Stud. theol. Ove Vald. Ammundsen, af den anden Afhandling Cand. theol. A. G. S. Prior og af den tredie Afhandling Stud. theol. J. V. Vad.

Ved Kirke- og Undervisningsministeriets Skrivelse af 18de Marts 1896 er der blevet meddelt Tilladelse til, at der uddeles Prisedaille for de 2 Afhandlinger, der ere kjendte værdige til Prisen.

II. Den statsvidenskabelige Afhandling.

Som Besvarelse af den statsvidenskabelige Prisopgave for Aaret 1894—95: „Der ønskes en kritisk Fremstilling af den engelske videnskabelige Nationaløkonomis Udvikling efter Stuart Mill“ er der indsendt en Afhandling med Motto: „natura non facit saltus“.

Forfatteren til den ret omfangsrige Afhandling synes at være gaaet for lidet forberedt til sit Arbejde og først under selve Udarbejdelsen at have vundet det Standpunkt, der skulde have været Udgangspunktet for samme. Af-

handlingen bærer i vel høj Grad Spor heraf. Formen er temmelig forsømt, Sproget frastødende ved sin unødige Indblanding af fremmede Ord, ved udanske Vendinger og uheldige Gjengivelser af de citerede Udtalelser. Derhos er Afhandlingen ufuldstændig, idet den dels altfor udelukkende behandler de større Systemværker med Forbigaaelse af Tids-skriftlitteraturen, dels ganske forbigaar væsentlige Afsnit af Økonomiens Theori. Ogsaa den Overlegenhed, hvormed Forfatteren bedømmer de forskjellige fremragende Økonomers Opfattelser og som oftere staar i Misforhold til selve Dommens Rigtighed og Sikkerhed, virker noget frastødende, og vi skjønne derfor ikke, at der kan være Tale om at tilkjende Arbejdet Prisen.

Men bortset fra disse ret iøjnefaldende Mangler maa det erkjendes, at Afhandlingen dels i sin samlede Hovedbetragtning af den engelske Økonomis Udvikling i dette Aarhundrede, dels ogsaa i flere af de enkelte Afsnit giver en indgaaende og, om ikke altid fuldt forstaaende, saa dog som oftest rigtig Fremstilling og Vurdering af de successive gjorte Fremskridt. Tiltrods for de fremhævede Mangler mene vi derfor at kunne tilkjende Afhandlingen et Accessit.

Kjøbenhavn, den 29de Februar 1896.

Will. Scharling. V. Falbe Hansen. Harald Westergaard.

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren at være Cand. juris & polit. Frantz Emil Pio.

III. De filosofiske Afhandlinger.

Til Besvarelse af den for 1894—1895 udsatte Prisopgave i Filosofi: „Fremstilling og Vurdering af John Locke's Filosofi med særligt Hensyn til dens Indflydelse paa den følgende Tids Tænkning“ er der indkommet to Afhandlinger.

Den ene af disse, der har til Motto: „Sapere aude!“ vidner allerede ved sin Korthed om, at Forfatteren ikke er trængt tilstrækkeligt ind i Emnet. Fremstillingen af Locke's Filosofi er meget lidt indgaaende, og om hans Betydning fremføres kun nogle faa, ufyldestgjørende Bemærkninger. Vi kunne derfor ikke foreslaa, at der tilkendes Forfatteren nogen Belønning.

Derimod giver den anden Afhandling, som har Mærket „Philanthropus B.“ (Locke's Pseudonym), en meget udførlig og om grundigt Studium vidnende Analyse af Locke's Værker og en fyldig Skildring af hans alsidige Virksomhed. I en Række af Noter tilføjer Forfatteren de historiske, karakteriserende eller kritiserende Bemærkninger, han har at gøre over for Locke's Fremstillinger. Der er her gjort et betydeligt Arbejde, som vidner ikke blot om Forfatterens Lærdom paa den ældre engelske Filosofis Omraade, men ogsaa om selvstændig Opfattelse og sund Kritik. Disse sidste Egenskaber vilde have faaet bedre Lejlighed til at lægge sig for Dagen, hvis Forfatteren ikke havde valgt den uheldige, men meget beskedne Form af Noter til at fremsætte sine Bemærkninger i. Af de enkelte Afsnit maa især det om Locke's Opdragelseslære nævnes, med dets Paa-visning af Locke's Indflydelse paa Rousseau, skønt Forfatteren over Ligheden i det Enkelte har undervurderet det egentlige Nye hos Rousseau. Uagtet vi mene, at Forfatteren burde have givet sin Karakteristik og Kritik en større Plads, og uagtet Afhandlingen har sine svage Partier, navnlig de, der handle om Locke's Indflydelse paa den følgende Filosofi, finde vi dog, at Medaillen bør tilkendes Forfatteren for det dygtige Arbejde, han har ydet.

Kjøbenhavn, den 4de Marts 1896.

H. Høffding.

K. Kroman.

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren af den sidste Afhandling at være Cand. theol. Bertel C. C. Fuglsang.

IV. De historiske Afhandlinger.

Som Besvarelse af den historiske Prisopgave for 1894 — 95: „en Fremstilling og kritisk Undersøgelse af Herulerfolkets Vandringer og Optræden i det nordlige Europa og Middelhavslandene“ er der indkommet to Afhandlinger. Den ene af disse med Motto: „det Sete afhænger af Øinene, der se“ er i sit Anlæg uklar, og den fremtræder i en skjødesløs Form, baade hvad Stil og Sprog angaar — Navnene ere gjennemgaaende feilagtig skrevne — hvilke Mangler ikke kunne undskyldes ved, at Forfatteren har ladet Afhandlingen afskrive. Forfatteren har ikke stræbt efter at blive bekendt med de bedste Udgaver af Kilderne til Herulernes Historie, ligesom han synes i Stedet for de græske Texter som Regel kun at have benyttet latinske Oversættelser; han har ikke anvendt fornøden Kritik paa Behandlingen af Kilderne og ikke med tilstrækkelig Grundighed raadspurgt de videnskabelige Undersøgelser over Folkets Historie. Som Følge heraf ere mange vigtige Oplysninger og væsentlige Synspunkter undgaaede hans Opmærksomhed. Skjøndt hans Arbeide viser en Del Flid og paa sine Steder er ret tilfredsstillende, anse vi det i sin Helhed for saa mangelfuldt, at det ikke kan komme i Betragtning ved Prisuddelingen.

Den anden Afhandling med Motto: „Om ikke Andet, saa Erfaring“ udmærker sig i Modsætning hertil ved en Klarhed i Plan, Bevisførelse og Fremstilling, som virker i høi Grad tiltalende. Forfatteren er overalt gaaet direkte til de græske og latinske Kilder, han har benyttet de nyeste og bedste Udgaver og er fulgt godt med i den nyere Litteratur om Herulernes Vandringer, selv om enkelte Undersøgelser ere undgaaede hans Opmærksomhed. Uagtet han jævnlig

træder i tidligere Forskeres Spor, føler man dog, at han selvstændig er trængt ind i Opgaven, og paa flere Steder bringer han Synspunkter frem, som ikke blot ere nye, men fortjene al Opmærksomhed. Vi kunne ikke billige alle Forfatterens Resultater, og til Ex. er hans Behandling af Jordanes' Efterretninger afgjort utilfredsstillende, men vi ere ikke i Tvivl om, at Afhandlingen paa Grund af Forfatterens klare Tankegang, hans omhyggelige og flittige Studium af Kilderne og hans indgaaende og skarpsindige Undersøgelser af dem, er fuldt værdig til Prisen.

Kjøbenhavn, i Marts 1896.

E. Holm.

Johannes Steenstrup.

Kr. Erslev.

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren af den sidste Afhandling at være Stud. mag. Louis B. Stade.

V. Den nordisk-filologiske Afhandling.

Som Besvarelse af Universitetets Prisopgave i nordisk Filologi for Aaret 1894—95:

„Under Hensyn til nyere tyske og svenske Undersøgelser ønskes det paavist, om og hvor vidt Stavelse-tælling har været benyttet som Grundlag for dansk Versbygning i Tiden mellem Reformationen og Arrebo“ er der indkommet en Afhandling med Motto: „Cum ratio quantitatis syllabarum in carminibus Danicis componendis vix ac ne vix haberi potest, ejus loco certum numerum syllabarum retinere videtur operepretium.“

I en klar og velordnet Fremstilling har Forfatteren paa en i det hele fyldestgørende Maade gjort Rede for et i alt Fald paa Tryk saa godt som uberørt Punkt i vor Litteraturs Udvikling. Han besidder god Kundskab til og Sans for metriske Forhold, og har omhyggelig gennemgaaet Tidens Litteratur, ogsaa den utrykte, saa at han kan støtte sin Frem-

stilling paa et tilstrækkeligt Bevismateriale, ligesom det blandt andet er lykkedes ham at fremdrage en hidtil ubemærket, men for Spørgsmaalets Løsning betydningsfuld Udtalelse af Kansler Jens Bielke, hvilken han med Rette har benyttet som Motto for sin Afhandling. Lejlighedsvis kommer han ogsaa ind paa metriske Forhold, der staa Spørgsmaalet noget fjærnere, men give Anledning til ret interessante Iagttagelser.

Det svage Punkt i Undersøgelsen turde være, at Forfatteren vel meget betragter vor Versbygning Historie i og for sig, uden Hensyn til Indflydelser fra fremmede, især tyske Forbilleder. Uagtet han synes at være i Besiddelse af Betingelser for at inddrage ogsaa dette Forhold under sine Iagttagelser, nøjes han med en almindelig Antydning af Metrikens Udvikling i Tyskland og fremhæver gentagende, at en Redegørelse for fremmed Paavirkning i Enkeltheder ligger uden for Spørgsmaalets Grænser. Skønt vi ikke kunne være enige med Forfatteren heri, og skønt, som han selv bemærker, Afsnittet om Salmedigtningens Metrik er noget løsere behandlet end Resten, finde vi ellers i hans Arbejde et modent og grundigt Bidrag til Oplysning om Fædrelandets ældre Litteratur, som fuldt fortjener at belønnes med Prisedaillen.

Kjøbenhavn, den 27de Februar 1896.

Ludv. F. A. Wimmer.

J. Paludan.

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren at være Cand. mag. Karl Mortensen.

VI. Den tysk-flologiske Afhandling.

Som Besvarelse af Opgaven i tysk Filologi for 1894—95:

„En Fremstilling og Undersøgelse af de indtil c. 1630 i Danmark med Hertugdømmerne samt i Hamborg og Lübeck trykte højtyske Bøgers Sprog og Skrivemaade“, er indkommet

en Afhandling med Motto: „Auch zwischen den Wörtern herrscht ein Kampf ums Dasein“ (Scherer).

Forfatteren af denne Afhandling har set sig nødsaget til at indskrænke Opgaven noget, da det viste sig, at den vilde blive af for stort Omfang til, at den kunde gøres færdig i Løbet af et Aar. Han har derfor begrænset sig til at medtage alt hvad der af højtyske Bøger i Danmark med Hertugdømmerne, Hamborg og Lübeck var trykt før 1600, forsaavidt som det fandtes paa det Store Kgl. Bibliothek, derimod for Tiden fra 1600—1632 kun at medtage et Mindretal af Bøger, som han allerede havde gennemgaaet lige i Begyndelsen af sine Forarbejder. Forfatteren antager dog, og sikkert med Rette, at der ikke er sket stor Skade ved denne Begrænsning, da de Forandringer, som det højtyske Sprog udviser i det 17de Aarhundredes første Trediedel, allerede for en stor Del findes i Bøgerne fra det 16de Aarhundredes sidste Tiaar.

Forfatteren har, hvad der er meget rosværdigt, ikke indskrænket sig til en Fremstilling af Lyd- og Skriftlæren og Bøjningslæren, forsaavidt som Datidens Sprogformer og Skrivemaader vare forskellige fra det nuværende højtyske Sprogs, men han undersøger ogsaa Ordforraadet, behandler Orddannelsen og giver en udførlig Fremstilling af Ordføjningen. Indenfor den af ham behandlede Litteratur skelner han mellem tre Klasser af Bøger, der især i Henseende til Ordforraadet og Ordføjningen viser et delvis forskelligt Sprog: theologiske Skrifter, Forordninger, Piecer. Hvad angaar de forskellige Trykkesteder, er det lykkedes Forfatteren, ved Siden af Overensstemmelserne at paavise enkelte Forskelligheder mellem det højtyske Sprog som det tryktes i Hamborg og Lübeck paa den ene, Slesvig og Kjøbenhavn paa den anden Side, medens Slesvig i enkelte andre Punkter gaar med de neder-tyske Trykkesteder og afviger fra Kjøbenhavn.

Den foreliggende Afhandling er i enhver Henseende et methodisk, grundigt og overordentlig flittigt Arbejde. Vel findes i Forfatterens Fremstilling, især i Afsnittet „Lyd- og

Skriftlære“ enkelte Forseelser, Fejl og Unøjagtigheder, dog ere disse baade i og for sig mindre væsentlige og have ikke nogensomhelst Betydning for Hovedsagen. I Henseende til Benyttelsen af den nyeste videnskabelige Litteratur savnes intet. Vi indstille uden Betænkning Forfatteren til at belønnes med Universitetets Guldmedaille.

Kjøbenhavn, den 8de Marts 1896.

H. Møller.

K. Verner.

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren at være Stud. mag. Johan Marius Sørensen.

VII. Den fysiske Afhandling.

Som Besvarelse af Universitetets Prisopgave i Fysik for 1894—95: „Der ønskes en Undersøgelse over den elektriske Gnists Evne til at rive Stoffer med sig, dels fra Elektroderne selv, dels fra det Medium, den slaar over i“, er der indkommen en Afhandling med Motto: Quidquid agas, prudenter agas et suspice finem.

Som Opgaven fordrer, er Arbejdet i Hovedsagen experimentalt. Der dannes en Gnist ved Hjælp af Ruhmkorffs Maskine mellem Poler af forskelligt Stof, og det undersøges ved Hjælp af et roterende Spejl og ved Spektroskopet, hvorledes Gnistens Udseende varierer. Det viser sig herved, at den egentlige Gnist ikke indeholder kjendelige Spor af Elektrodernes Stof. Udladningen har i Virkeligheden varet nogen Tid, inden Metallet bringes ud i Gnisten i lysende Tilstand, og den er følgelig ikke betinget af Metaldampene. De fra Metallerne hidrørende Spektrallinier skyldes altsaa sekundære Virkninger af Udladningen, som Opvarmning eller mekaniske Kræfter. Som Forfatteren meget rigtigt bemærker, er det hermed ikke absolut udelukket, at Metallet kan spille en Rolle ved Elektricitetens Overgang; vi vide nemlig, at et Metal kan existere i Dampform uden at give Spektrallinier.

Efter en Række Forsøg over Gnistens Udseende i Kvælstof, Kulsyre og Brint, der vel i sig selv have Interesse, men dog ikke bidrage meget til Opgavens Besvarelse, omtales Udladningens Forhold, naar den ene Pol er Saltopløsning, navnlig af Chlornatrium. Ogsaa her gjenfindes de ovenomtalte Forhold, idet Chlornatrium ikke primært deltager i Udladningen, saa vidt man kan dømme derom af Spektret, til lige iagttages en udpræget Unipolaritet, der bevirker, at Natriumlyset kun optræder, naar Opløsningen er negativ Pol.

Forfatteren har dernæst maalt, hvor langt man kan forfølge Metallinierne ind i Gnisten for 12 Metaller Vedkommende. Det viser sig herved, at disse Vejlængder paa det nærmeste ere de samme, enten Metallet danner den positive eller den negative Pol, samt at der ved Udladning mellem to forskellige Metaller er et konstant Forhold mellem de nævnte Vejlængder.

Til Slutning gives en Række Iagttagelser over Dissociation af Ammoniak ved elektriske Gnister.

Forfatteren har forsøgt at behandle Opgaven saavel for de faste som for de draabeffyldende og luftformige Legemer. Det vilde vistnok have været heldigere, om han havde holdt sig til et enkelt af disse Tilfælde. Da vi imidlertid næsten staa uden al Forstaaelse af det paagjældende Fænomen, er det naturligt, at Forfatteren har villet prøve sig frem paa forskellige Omraader, for maaske at finde et Udgangspunkt, en bestemt Opfattelse af Sagen, der kunde føre videre. Dette har ikke villet lykkes ham, og det kan heller ikke have været Meningen med Opgaven at kræve en fuldstændig Løsning af en af de vanskeligste Opgaver i Fysikken.

I Betragtning heraf, og eftersom Arbeidet baade vidner om experimental Dygtighed og om Modenhed til Behandling af videnskabelige Opgaver, mene vi at burde indstille Forfatteren til at belønnes med Universitetets Prisedaille.

Kjøbenhavn, i Marts 1896.

Julius Thomsen. S. M. Jørgensen. C. Christiansen.

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren at være
Cand. mag. Martin H. Chr. Knudsen.

VIII. Den naturhistoriske Afhandling.

Som Besvarelse af den udsatte naturhistoriske Prisopgave, saalydende: „Af den danske Ferskvandsfauna er der endnu adskillige Afsnit, som ikke ere tilstrækkelig oplyste. Dette gjælder saaledes om det ferske Vands Mideformer, Kopepoder og Ostrakoder, om dets Bryozoeer, Hjuldyr og Spongazoeer. Der ønskes derfor en paa selvstændige Indsamlinger og Studier grundet tidssvarende Redegjørelse, saavel i faunistisk som i biologisk Henseende, for en Del af det danske Ferskvands Dyreliv, omfattende efter eget Valg enten de 3 første eller de 3 sidste af de nævnte Dyregrupper. Med Besvarelsen maa følge de til Dokumentation nødvendige Præparater og Tegninger“, — er der indkommet et ret omfangsrigt Arbeide med Motto: „C'est dans les livres de la nature qu'on doit lire, quand on veut travailler sur l'histoire naturelle“ (Réaumur), ledsaget af et stort Antal dels makroskopiske, dels mikroskopiske Præparater. Forfatteren har valgt vore ferske Vandes Hjuldyr (Rotatorier), Mosdyr (Bryozoeerne) og Svampe (Spongiller). Det er altsaa egentlig 3 Emner, for hvilke der søges gjort Rede, og som hvert for sig kunde have været gjort til Gjenstand for en særlig Opgave. I saa Tilfælde vilde man vel have krævet en større Fordybelse i Emnet og en mere gennemført Behandling, end man, som Opgaven nu er stillet, kan være berettiget til. En vis Forbindelse er der dog mellem de 3 behandlede Emner; den, der samler Materiale til det ene af dem, vil ganske naturligt komme til at beskæftige sig med de andre, og det er netop derfor, at Opgaven er stillet som den er, i det Haab, at derved kunde fremkaldes frugtbringende Forstudier, i enkelte Retninger mere, og dette Haab er da heller ikke blevet skuffet.

Det om Hjuldyrene handlende Afsnit kan bedst betegnes, ikke som en udtømmende Fremstilling af de danske Hjuldyrs Naturhistorie, men som et indholdsrigt Forstudie dertil. Forfatteren nævner 80—90 danske af ham selv fundne og iagttagne Arter, som han omtaler i den ved Hudsons og Gosses bekjendte Rotatorieværk givne Rækkefølge, ledsagende Omtalen af de enkelte Arter med vejledende Bemærkninger og lærerige Oplysninger om Forekomst, Habitus, Levemaade, Varieteter indenfor Arterne og særligt om Forplantningsforholdene, i hvilken sidste Henseende der er givet mangt et Vink, der vil kunne faa Betydning for fremtidige Forskninger. Flere artrige Slægter afhandles ikke i det enkelte, tildels vistnok fordi Artsbegrebet i dem er forstyrret ved andre Forfatteres altfor vidt drevne Opstilling af Arter paa ubetydelige Variationer. I særlige Afsnit behandler han de mange lidet tilfredsstillende systematiske Forsøg, der ere fremkomne, udkaster i al Fald Grundtrækkene til en mere naturlig Systematik, og gjør dernæst Rede for Otto Frederik Müllers Arbejder over Hjuldyrene, fremhævende, hvor langt denne ypperlige Forsker allerede var naaet for omtrent halvet hundred Aar siden. De allerfleste af Müllers Arter har han kunnet gjenfinde og bestemme, og han er i det hele af den Mening, at hans egen Hjuldyrfortegnelse er temmelig udtømmende. Det vilde være særdeles ønskeligt, om Forfatteren kunde se sig istand til at fortsætte sine Hjuldyrundersøgelser, der sikkert ville give smukke og værdifulde Resultater og allerede i deres nuværende Skikkelse ville være et meget kjærkomment orienterende Bidrag til Kundskaben om denne hos os saa lidet dyrkede mikroskopiske Dyregruppe.

Ferskvandsbryozoen er det af Forfatteren udførligst behandlede Afsnit; det er tydeligt, at det fra Forfatterens Side er behandlet med særlig Forkjærlighed eller at Omstændighederne have været ham særlig gunstige. Af samtlige europæiske Arter eller Former er der kun 2, der mangle

paa den af Forfatteren meddelte Liste over en Dyregruppe, om hvis Rigdom og Forekomst i vore forskellige Vande vi hidtil vidste saa godt som intet, og hine to Arter ere endda overmaade sjældne andetsteds i Europa, den ene findes kun i Brakvand, medens der paa den anden Side er paavist Arter i stor Mængde i vore Vande, der andetsteds aldeles ikke ere hyppige. Denne Dyregruppe er i de sidste Aar andetsteds gjort til Gjenstand for meget indtrængende Studier, og det kunde derfor ventes, at Forfatteren kun havde meget lidt at tilføje til den i disse Arbejder allerede nedlagte videnskabelige Skat. Dette er dog ikke Tilfældet. Af supplerende, bekræftende og berigtigende biologiske Iagttagelser meddeles der mange, der kaste nyt Lys over disse Mosdyrs almindelige og særlige Livsforhold, deres Livsvarighed o. s. v. Af Arternes og Varieteternes Forhold indenfor Slægten *Plumatella* giver Forfatteren en paa hans egne Studier støttet ny Fremstilling; Bevægelsesfænomenerne hos disse Dyr undersøger han en særlig Behandling i et eget Afsnit, hvorved dette Spørgsmaal kommer til at staa i et mindre gaadefuldt Lys; og den kønnede Formering belyses i Modsætning til den kønsløse paa en tiltalende Maade, skjøndt det vel nok tør siges, — hvis Forfatteren ikke er bleven misforstaaet — ligesom ved det tilsvarende Afsnit hos Hjuldyrene, at det vilde været heldigere, om Forfatteren havde været fuldstændigere orienteret med Hensyn til disse Forplantningsforhold i deres Helhed hos lavere Dyr; men Iagttagelserne beholde deres Værd, selv om Theorierne maaske maa modificeres.

Ferskvandssvampene (Spongillerne) vilde Forfatteren være mest tilbøjelig til at samle under et enkelt eller højst dobbelt Artsbegreb, da han hverken i Litteraturen eller Naturen har kunnet finde fuldt paalidelige Karakterer. Han omtaler dog særligt hver af de almindelig antagne (3) Slægter eller Underslægter og Arter eller Afarter (4) og meddeler ogsaa om deres Livsforhold biologiske Iagttagelser, for hvilke man maa være ham taknemlig, selv om man (med For-

fatteren) ikke kan betragte dem som afsluttede, men maa ønske dem førte til et mere endeligt Resultat. Korte særlige Afsnit handle om Spongillernes Levevis, deres Larver, den Alder, de opnaa, deres Farver og disses Afhængighed af Lyset, om deres Snyltere samt om Analogien i Livsforholdene mellem Ferskvandsbryzoer og Svampe.

Ved Besvarelsens formelle Mangler ville vi ikke dvæle, da de ere uden Betydning ved Siden af dens gode Sider og væsentlig skyldes den Hast, hvormed Forfatteren har maattet nedskrive Redaktionen af sine lagttagelser. Vi anbefale den under særligt Hensyn til, hvad ovenfor er bemærket om Opgavens store Omfang, ubetinget til at hædres med Universitetets Guldmedaille.

Kjøbenhavn, den 20de Februar 1896.

Chr. Lütken. Eug. Warming. N. V. Ussing.

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren at være Assistent ved den kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, Cand. mag. C. J. Wesenberg Lund.

Universitetets Pris-Spørgsmaal

for Aaret 1895—96.

1. THEOLOGI.

Efter en Fremstilling af Grundtrækkene i den profetiske Skildring af Messiasriget undersøges, hvilken Omdannelse dette har modtaget i den nytestamentlige Lære om Gudsriget.

2. LOVKYNDIGHED.

Der ønskes en Fremstilling, Begrundelse og Kritik af de nordiske og de vigtigste fremmede Lovgivningers Regler om, hvorvidt Udstederen af et Konnossement ved særlige Forbehold, som paategnes dette, kan begrænse Rederens Ansvar overfor Konnossementets Indehaver.

3. STATSVIDENSKAB.

En Fremstilling af Forsikringsvæsenets Udvikling i Danmark.

4. LÆGEVIDENSKAB.

Der ønskes en Fremstilling af de forskellige operative Behandlingsmetoder, som ere anvendte mod Prostatahypertrofi, og af de Resultater, som derved ere opnaaede.

5. FILOSOFI.

En Sammenligning mellem den Opfattelse af Statens Væsen og Betydning, som den moderne Socialisme hylder, og den, der hyldes af det 17de og 18de Aarhundredes Naturret.

6. HISTORIE.

Slesvigs og Holstens sociale og økonomiske Forhold i Tiden fra 1773 til Christian den Syvendes Død.

7. KLASSISK FILOLOGI.

Vestigia sermonis Latini in titulis Græcis usque ad Flaviorum ætatem compositis indagentur.

Hvilke Spor af latinsk Sprog findes der i de græske Indskrifter indtil Flaviernes Tronbestigelse?

8. ØSTERLANDSK FILOLOGI.

Der ønskes en Fremstilling af den indiske Kosmogoni efter Rigveda med Oversættelse af de anførte Bevissteder.

9. NORDISK FILOLOGI.

Fremstilling og kritisk Vurdering af de nyere Undersøgelser om Eddadigtenes Alder og Oprindelse.

10. ROMANSK FILOLOGI.

Den franske Farcedigtning før det 17de Aarhundrede, litterært og kulturhistorisk belyst.

11. ÆSTHETIK.

At eftervise Forholdet mellem den engelske sensualistiske Æsthetik i forrige Aarhundrede og vore Dages fysiologiske og experimentale Æsthetik.

12. MATHEMATIK og ASTRONOMI.

Den i Göttinger Nachrichten for 20de Februar 1878 foretagne Undersøgelse af Sammenhængen mellem Integralregningens Transcendenter søges udvidet til Differentialligninger af anden Orden eller til særlige Klasser af saadanne Ligninger.

13. KEMI og FYSIK.

Der ønskes en experimentel Undersøgelse af Salpeterundersyringen og dens Forbindelser saavel med Hensyn til Dannelse, Fremstillingsmaade og Analyse som til Metamorphoser.

14. NATURHISTORIE.

Der gives en Sammenstilling og Vurdering af de hidtil fremsatte Theorier for Dannelsen af Bakker og Bakkedrag, hvis Indre bestaar af lagdelte Sandmasser fra Istiden, belyst ved et begrænset Udvalg af saavel ældre som originale Iagttagelser fra Danmark over den geologiske Bygning af saadanne Bakker.

Anmærkn. Besvarelserne af Opgaven i den klassiske Filologi skulle affattes paa Latin; til alle de øvrige benyttes enten det danske eller det latinske Sprog, efter Forfatterens frie Valg. Afhandlingerne, der kun maa betegnes med Motto eller Mærke, medens Forfatterens Navn, Fødselsdag og -aar angives i en vedlagt lukket Konvolut, der er betegnet med samme Motto eller Mærke som Afhandlingen, indsendes til Universitetets Rektor inden den 1ste December 1896 med Undtagelse af Besvarelserne af den naturhistoriske Opgave, til hvis Indlevering Tiden staar aaben indtil 1ste December 1897. Adgangen til at vinde Prismaedaille er ikke indskrænket til akademiske Borgere, men staar aaben for enhver, som paa den Tid, Prisopgaven besvares, ikke er over 30 Aar og heller ikke har opnaaet fast kongelig Ansættelse.

De indleverede Exemplarer af Besvarelserne indlemmes i Universitetets Arkiv.

Dette Skrift udgaar som Indbydelse til Universitetets Højtidelighed i Anledning af Hans Majestæt Kongens Fødselsdag. Festen er bestemt til at holdes Tirsdagen den 14de April Kl. 12 i Universitetets Festsal. Universitetets Rektor, Professor, Dr. phil. H. G. Zeuthen holder Talen. Før og efter Talen afsynges af Studentersangforeningen den ved Festen i Anledning af Hans Majestæt Kongens 70-Aars Fødselsdag forfattede, senere omarbejdede Kantate af Dr. phil. E. v. d. Recke med Musik, komponeret af Professor, Dr. phil. J. P. E. Hartmann.

Videnskabens og Universitetets Venner og Velyndere indbydes til i Forening med Universitetets Lærere og Studenter at deltage i Festen og hædre den med deres Nærværelse.

Kjøbenhavn, den 1ste April 1896.

Under Universitetets Segl.

