

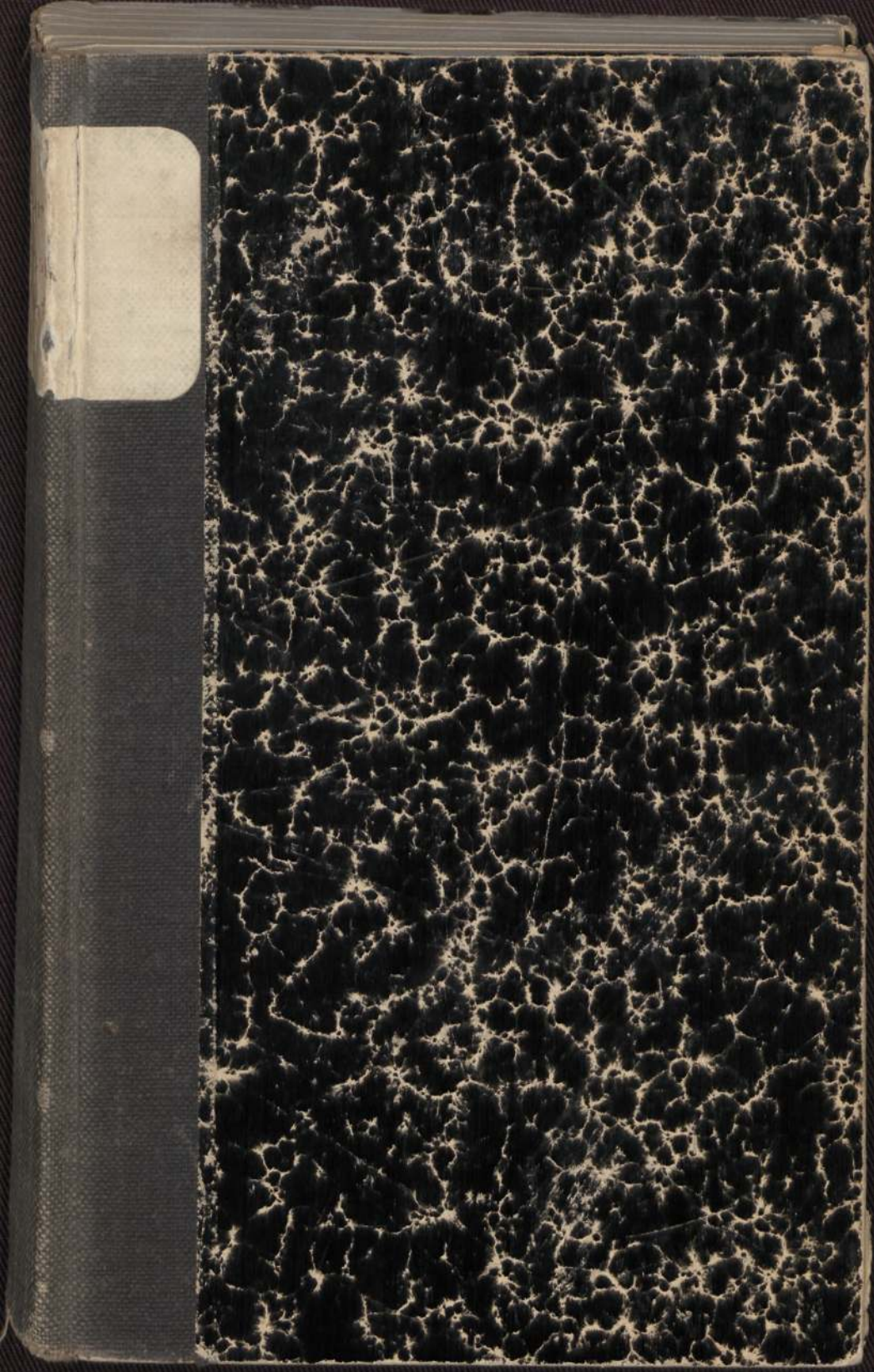
Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

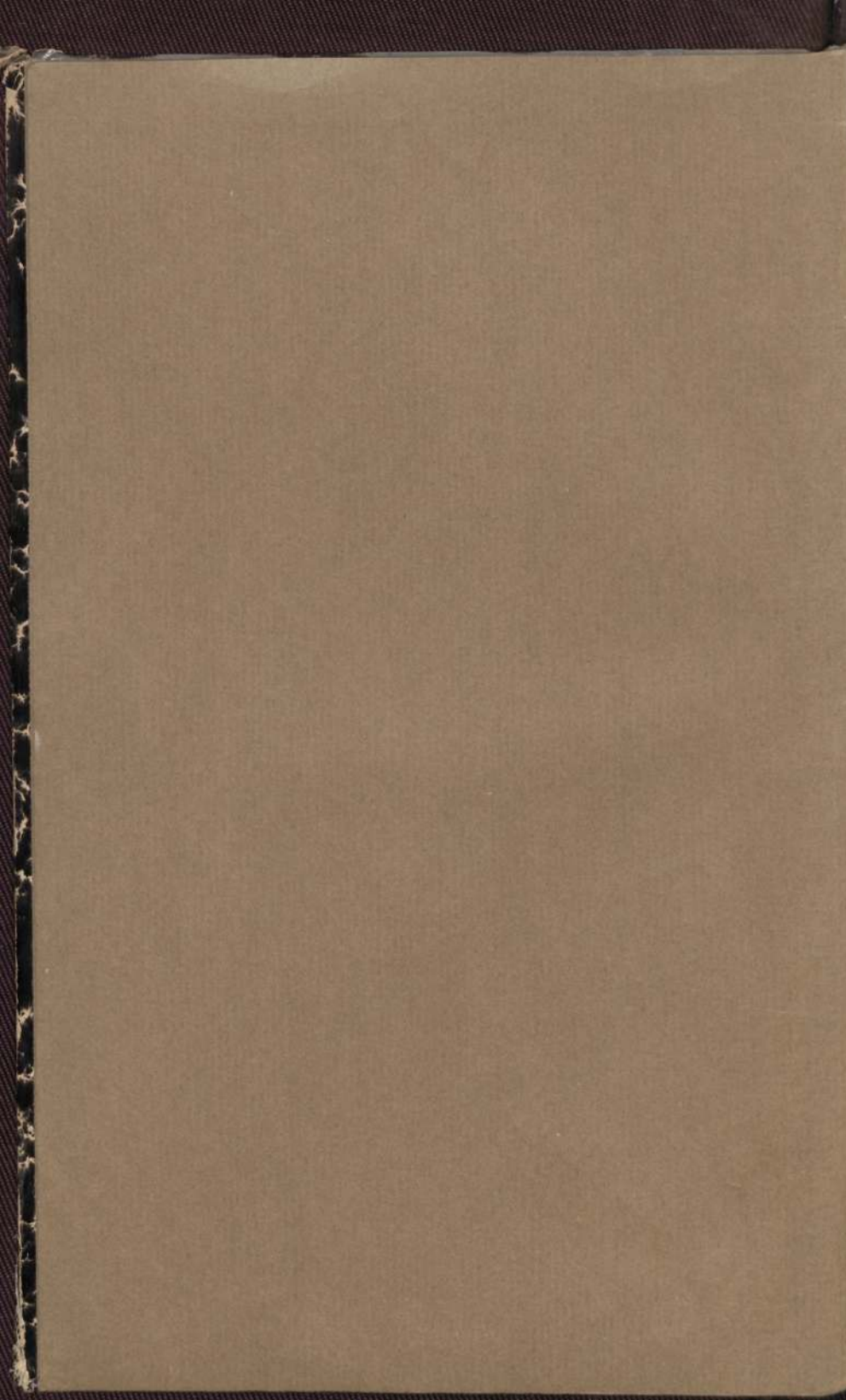


TEKNISK BIBLIOTEK
Danmarks tekniske Højskole

TB
510
La Cour
gl.

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

Ex. 2



POUL LA COUR

HISTORISK MATHEMATIK

ET INDLEDENDE KURSUS

MED 174 TEXTBILLEDER OG EN TAVLE



TEKNISK BIBLIOTEK

Danmarks tekniske Højskole

KJØBENHAVN

P. G. PHILIPSENS FORLAG

TRYKT HOS NIELSEN & LYDICHE

1888

FORORD.

.....
„og han har aldrig levet,
som klog på det er blevet,
han ej først havde kjær.“

N. F. S. Grundteig.

En hinduisk Mathematiker, Bhaskara Akarya, har skrevet et Værk, hvis ene Del han har kaldt Lilavati, o: „den Yndige“, som der siges, for at gjøre sin Datters Navn udødeligt. I Slutningen af denne Del hedder det om Mathematiken: „Glæde og Lykke vil i denne Verden altid voxer for den, der i sit Indre har optaget Lilavati; skønne Forhold ere hendes Lemmers Pryd; rene og fuldendte hendes Løsninger, og smagfuldt på Exempler hendes Sprog“.

At der er noget rigtigt i denne hinduiske Billedtale, vil enhver kunne stadfæste, som er kommen i noget *fortroligt* Forhold til Mathematiken. Når der på den anden Side findes mangfoldige Mennesker, for hvem Mathematiken ligefrem er til Plage, kommer dette blot af, at den fornødne Fortrolighed aldrig er indtrådt for dem.

Grunden hertil, troer jeg, er at søge deri, at man tidt *ikke* levner *Begynderen den nødvendige Ro* til at dvæle i de første Sætninger. Læreren synes, at de ere så overmåde simple, og Eleven finder også, at Talen drejer sig om rene Bagateller; men når man er kommen et lidet Stykke frem, kører man fast, fordi Eleven vel har ladet de spinkle Sætninger passere, har måske også været så flittig, at han eller hun „kan“ dem; men dette er ikke nok i Mathematiken. Man må kunne tale om disse Ting af egen Forståelse og med egne Ord — ikke med lånte Ord eller Remser, hvis Rigtighed man vel har indrømmet, men

som man ikke har tilegnet sig således, at man sætter nogen Pris på at besidde dem — at man føler sig virkelig beriget ved dem ligesom ved anden Kundskabstilegnelse. Det viser sig da, at man må til at begynde forfra, og nu hjælpes måske en og anden på ret Kjø, men for mange andre bliver det endnu mere trivielt end første Gang. Man repeterer nok en Gang o. s. fr., og dog er der dem, som aldrig komme med. Denne Erfaring er bleven gjort ved mange Lejligheder, hvor man har begyndt efter en rent systematisk Lærebog *uden den Forudsætning*, at Elevens Interesse og Spørgsmål var oppe for denne Sag allerede fra hans Hjem eller fra de Kredse, hvori han har færdedes.

Særlig fremtræder denne Vanskelighed ofte i Nutiden, fordi *Formålet* med Mathematikundervisning i vore Dage er mere dobbeltsidig end det nogensinde før har været.

I tidligere Tider var Hovedformålet knyttet til den Omstændighed, at *få eller intet andet Fag er så skikket til at indøve nøjagtig Tænkning og Tale som Mathematiken*. Dette har fra Platos Tid været og vedbliver endnu på sine Steder at være det Motiv, hvorfor dette Fag ikke er bleven udeladt af Timeplanen i nogen vidtgående Skole, om denne end var nok så lidet realistisk anlagt. Så længe dette var et af selve Mathematiklæreren erkendt Hovedmotiv, var Ulæmpen ved at begynde rent systematisk uden at spørge, om der var Forudsætninger tilstede, mindre; thi Læreren vilde da ikke være fristet til at haste med at nå så vidt frem som vel mulig. Han vilde selv sætte sig Målet: „non multa, sed multum“; og dette vilde i alt Fald give Udsigt til, at man tog sig den fornødne Ro i Begyndelsesgrundene, ja at Læreren gjorde sit bedste for at belyse de første simple Sætninger fra forskellige Sider, så at Eleven fik Tid til at betragte dem fra alle Led og Kanter.

I Nutiden spille matematiske Kundskaber imidlertid en såre vigtig Rolle også i andre Henseender. Snart alle Fag, men først og fremmest Naturfagene, have Brug for matematiske Færdigheder. Bedst er det naturligvis, om den, der skal bruge de matematiske Formler er fortrolig med Mathematiken selv; thi da vil han langt sikrere kunne finde sig tilrette i *Anvendelserne*; men her lægges dog gjerne større Vægt på *vidtrækkende* Beregninger og Konstruktioner end på *dybtgående* Forståelse. En nøjagtig *Berisførelse* for den pythagoræiske Læresætning påskønnes

i Anvendelserne ikke nær så meget som Evnen til at bruge en Logarithmetabel, selv om Logarithmernes indre Væsen er Vedkommende fuldstændig fremmed.

En Beredvillighed både hos Forfattere og hos Lærere til at læmpe sig efter dette Tidens Krav bærer vistnok sin Del af Skylden i, at man ikke tager sig tilstrækkelig Ro til at få „vel begyndt“; og dog er måske næppe på noget andet Sted det kjendte Ordsprog om en god Begyndelse så vel anbragt som her. — Det tør derfor anses for et ikke utidigt Spørgsmål, hvorledes den begyndende Mathematikundervisning i vore Dage bør være anlagt.

Selv Lærer er jeg ikke blind for, at det allervigtigste Moment i så Henseende er hos Læreren selv; og jeg tvivler ikke om, at en dygtig Lærer kan forberede, ja be-
 ånde det tørreste System. Men jeg troer også at have bemærket, at Læreren stundom trods sin bedste Villie kan være ude af Stand til at begribe, hvad der egentlig er i Vejen, hvorfor de begyndende Elever ikke kunne tilegne sig de abstrakte Sandheder. Der er måske intet andet Område, hvor der så let danner sig en uoverskridelig Kløft mellem Lærerens og Elevens Standpunkt, så at de ikke en Gang forstår, at de ikke forstå hinanden.

I en omtrent tiårig Virksomhed ved den videregående Folkehøjskole i Askov har jeg gjort Forsøg på at udmønte *Grundtvigs* almene Råd om at anlægge Undervisningen historisk, også i matematisk og fysisk Retning. Jeg har for Førsteårs-Eleverne fremsat de matematiske Enkeltheder under de Synspunkter og de Omstændigheder, hvorom Historien melder ved deres Fremkomst. Jeg har selv fundet en sådan Tilfredsstillelse ved denne Undervisningsmåde, at jeg ved nærværende Bog vover at give Offentligheden et Udkast til den, og det er mit Håb, at Lærere heri både må finde Bidrag til des bedre Forståelse af, at den i Mathematik fuldstændig Ukyndige så at sige bør opses dér, hvor han er, i den konkrete Verden, og at man her vil finde Anvisning på visse Hjælpemidler til at få ham i Tale. — Jeg troer, at også andre Lærere ville finde, at det svarer Regning at ofre nogen Tid til et lignende „indledende Kursus“. Hellere bruge en Del Tid til at tale noget fyldigere (historisk) om de lettere Ting end bruge måske den samme Tid til at repetere de allerførste Begyndelsesgrunde, når der tilmed på hin Måde nåes en dybere Indsigt i, en større Fortrolighed

med det, som er Matematikens inderste Væsen. Dette opnåes bedst, om det lykkes at få *Begynderen til at smage noget af den Opdagelsens Glæde, der har været følt, da de matematiske Fremskridt i sin Tid bleve gjorte, den samme Glæde, som Bhaskara ovenfor sigter til, og som er det egenlige frugtbare Princip, både til åndelig Udvikling og til Opnåelse af de matematiske Færdigheder.* Der gives vel forskellige Midler, hvorved Læreren kan søge at opnå dette, men et sådant, som ikke beroer på tilfældige Indskydelser hos Læreren, men som kan udformes til et solidt pædagogisk Hjælpemiddel, er den historiske Fremgangsmåde. For min Erfaring har det stillet sig således, at, når jeg med andet Års Elever begynder forfra på systematiske Lærebøger (Julius Petersen), så er Elevernes Tankegang så vidt i Orden, at vi kunne skride rask frem, som om det var en Repetition — nu i rent System — af kjendte Sager. Alene i dette andet År nå vi da så vidt, som jeg er overbevist om, at vi ikke vilde nå i to År ved at gå rent systematisk tilværks, så at der end ikke er tabt noget fra det Standpunkt, som sætter Målet i at nå vidt frem. Men for den Lærer, der lægger Vægt på Mathematiken som et åndsdannende Fag vil der endnu mindre kunne tales om Tidsspilde.

Nærværende Arbejde står, som sagt, i Forhold til *Grundtrivs* Skoletanker; men det er min Fortrøstning, at denne Omstændighed ikke skal afholde sådanne Lærere, som ellers ikke hylde disse, fra at overveje og prøve denne Sag nærmere. — Større Vanskelighed vil det måske have, at mange Lærere af Examenshensyn ikke kunne tage sig et År til „Indledningen“, selv om de i de følgende År kunne indhente det forsømte og mere til. Men også her tillader jeg mig at henstille til Overvejelse, om man ikke i den første Del af Året kan „indlede“ med et Stykke Historie svarende til det, som netop skal studeres i samme År.

Skjøndt jeg tidligere har ladet trykke en noget lignende Bog (rigtignok som Manuskript), er Fremgangsmåden dog så ny, at jeg ikke tvivler om, at den endnu kan læmpes og forbedres betydeligt, og enhver indgående Kritik, så vel offentlig som privat, vil fra min Side blive modtaget med stor Påskjønnelse. For dog at forebygge Misforståelser — tillader jeg mig følgende Bemærkning.

Man må ikke gå til denne Bog, som man ellers går til Læsningen af en „Mathematikens Historie“. Ved en

sådan plejer man gjerne at betragte selve Mathematiken for kjendt, og der kan da tages andre Hensyn end de, som her må være de afgjørende, hvor Hensigten er en ganske anden. Jeg vil lære den deri Ukyndige at forstå vore Tals, vore Brøkers, en Vinkels (osv.) egentlige Væsen og vigtigste Egenskaber, og jeg gjør det ved at fortælle om de væsentlige Skridt, Menneskeslægten i det Hele og Store har gjort for at nå fra et endnu lavere Standpunkt end det, hvorpå Eleven måske ellers ståer, og lige til vedkommende Sag er bleven fuldstændig gennemklaret. Således tager jeg Sag for, efter Sag, idet jeg ganske vist ofte ved en ny Sag må begynde helt langt tilbage i Tiden og undertiden kan gå frem næsten imod Nutiden; men når jeg tager hver Sag på det Tidspunkt, da den har skudt sine kraftigste Skud (idet jeg som sagt dog fra dette Tidspunkt går tilbage, og måske derefter frem i Tiden), så falder det i Reglen ikke svært at lade disse Sager følge på sådan Måde efter hinanden, at den kronologiske Gang dog bliver nogenlunde respekteret, hvad der for selve Historien er det heldigste, medens det på den anden Side ikke bliver en usystematisk Undervisning, hvad der vel vilde være enhver alvorlig Mathematiklærer det mest utilfredsstillende af alt.

For nogle År siden, skulde vel et Forsøg som nærværende næsten have vist sig som en Umulighed. Medens man i Renaissancetiden og de følgende År søgte tilbage til de Gamles Guldgruber, har man indtil for få År siden snarere rastløs higet fremad. Nu have imidlertid i flere Lande mathematike Lærde med Bistand af Filologeratter begyndt at udgive Arbejder om „Mathematikens Historie“, hvoraf Stoffet må tages til et Værk som nærværende, hvis det ikke skal komme til at svæve i Luften. Hine Arbejder række naturligvis langt videre. Således giver et Værk, som „Keglesnitslæren i Oldtiden“ af H. G. Zeuthen ikke alene interessante matematiske og kulturhistoriske Bidrag; men det udvider uvilkårlig Synkredsen for endog vidtkomne Matematikere, gennem et sådant Værk at få Fortrolighed med Grækernes storartede og ejendommelige Tankearbejder. — Måtte de nævnte historiske Studier fortsættes, og der er vel ingen Grund til at tvivle derom, vil der også År for År foreligge flere Hjælpe midler til at forbedre et Arbejde som nærværende, der rimeligvis har sine Skrøbeligheder, ja, hvor vel sagtens mangen Enkelt-

hed bør rettes. Et foret og forbedret historisk Materiale vil imidlertid kun bevirke, at en Fremgangsmåde som nærværende des bedre lader sig gennemføre.

At det, som jeg her byder Offentligheden, dog nogenlunde må stemme med Historiens nuværende Standpunkt, derom tør jeg måske have noget Håb, bl. a. knyttet til den Omstændighed, at Hr. Professor *Zeuthen* har vist mig den overordentlige Velvillie at gennemgå mit Arbejde i Manuskript, endog Stykke for Stykke. Jeg påbyrder selvfølgelig ikke Professor *Zeuthen* noget Ansvar for de Fejl, der muligvis kunne findes her. Det var urimeligt at forlange, at han skulde undersøge alle Enkelthederne, og mange Ting lade sig overhovedet slet ikke undersøge eller afgjøre, ligesom jeg på visse Punkter, hvor Professor *Zeuthen* snarere mente anderledes, har fulgt min egen Opfattelse; men for selve Gjennemsynet, som for mangt et historisk, matematisk og pædagogisk Vink skylder jeg Professor *Zeuthen* min hjærteligste Tak. — Blandt dem, der har ledaget mine tidligere Forsøg i denne Retning med Interesse og også meddelt mig værdifulde Oplysninger, må jeg med Tak nævne en norsk Mathematiker, Hr. Amtsskolebestyrer *Paul Bergh*. — Desuden skylder jeg Tak til Bogens Forlægger, Hr. *P. G. Philipsen*, fordi han ikke har holdt sig tilbage fra dette, fra et forretningsmæssigt Standpunkt måske tvivlsomme, Foretagende, men ved Bogens Udgivelse tilmed har udvist al ønskelig Rundhåndethed.

Poul la Cour.

T A L.

Tælning og Talord.

§ 1. Dyrene kunne undertiden yttre sig på en Måde, hvoraf man kunde fristes til at tillægge dem Evne til at tælle. Således skal en And kunne savne en Ælling af sin store Flok. Spørgsmålet, om dette sker ved Tælning, bliver væsentlig klaret ved følgende Kjendsgjerning fra Menneskeverdenen.

I en Folkestamme i Sydafrika er der kun få, der kunne tælle til mere end 10, og dog kan Ejeren af en Hjord på 4—500 Stykker Hornkvæg, når han ved Hjordens Hjemkomst har stået ved Leddet og iagttaget Dyrene, nøjagtig sige, om der mangler nogle; men han kan tillige sige, *hvilke* der mangler, og dette viser, at det ikke er ved Tælning, men ved en ualmindelig Hukommelse, at han udøver sin Kunst; thi ved egentlig Tælning ser man netop bort fra hver enkelts Ejendommeligheder; hvad enten en Ko er sort eller broget, tælles den for én, så, når Hjordens Ejer just har stået og lagt i den Grad Mærke til de 4—500 Ejendommeligheder, så at han véd, hvilken han endnu savner, har han på en Måde gjort lige det modsatte af det, der sker ved Tælning.

Ex. Tag 8 Mønter af en Slags (25 Øre) og 10 Mønter af en anden Slags (10 Øre), og ryst disse 18 Mønter mellem hverandre. Lad en anden tage en af Mønterne, uden at du ser, hvilken.

Tæl så de øvrige rask ud af Hånden i en uordnet Bunke på Bordet for at forvisse dig om, at du har 17 Mønter tilbage. Da vil du under denne Tælning i Almindelighed ikke kunne lægge så meget Mærke til Mønternes Ejendommelighed, at du derefter kan sige, hvilken af de to Møntarter, der savnes. — Under *Tælningen forsvinder Ejendommeligheden.*

§ 2. Ligesålidt, som Ællingerne eller Oxerne ere ens, gives der i den virkelige Verden to Ting, som ere aldeles ens, end ikke »to Dråber Vand«, der ellers efter Sprogbrugen skulde »ligne hinanden«. Lad dem falde på hver sin Skål af en fin Vægt, og de ville så at sige aldrig endog synes at holde hinanden i Ligevægt; og skulde det måske et Øjeblik synes så, da — mens man tænker over, at nu skulde man egentlig også undersøge deres Varmegrad, den Luftmængde, som hver Dråbe muligvis indeholder, osv. — bemærker man måske, at nu er end ikke den tilsyneladende Ligevægt længere tilstede; der er måske fordampet mere af den ene end af den anden. Hverken ere Dråberne ens, eller der foregår ensartede Fænomener i dem.

Der gives altsaa ikke i den virkelige Verden to Ting, der ere absolut lige. Således er også ethvert Mål, der tages, kun en Tilnærmelse. Har man en Normalmeter, et Normalkilogram osv., blive alle de Mål, man tager derefter, trods al mulig anvendt Forsigtighed, mer eller mindre fejlagtige.

§ 3. Vilde man behandle Tingene i Verden med fuldstændig Nøjagtighed, kunde det altså synes urigtigt at indføre Tælning, som netop lader to ulige Ting gjælde for lige meget; men på den anden Side vil det snart bemærkes, at der netop finder størst Nøjagtighed Sted dér, hvor Tal bruges. Den afrikanske Ejer af Hjorden har et almindeligt ubestemmeligt Indtryk af sin Formue, hvorimod den Landmand, der har Tal på sit Kvæg, og har Tal på den Vægt, som hvert Stykke Kvæg vejer, og har Tal på den Pris, som gives for hvert Pund levende Vægt, kan gjøre Rede for, hvad hans Hjord er værd i

Antal af Kroner, hvorved han f. Ex. ser sig istand til at drage en bestemt Sammenligning imellem Hjordens øjeblikkelige Værdi og det Udbytte, Hjorden i et År kan give.

Man skjønner altså Fordelen ved at se bort fra de Ejendommeligheder, som dog præge hver eneste Ting i Verden, og indlade sig på noget sådant som Tælning, skjøndt denne kun har fuld Gyldighed for *Tanken*. Denne Overgang fra Forestillingen om virkelige Ting til Begreber, der kun have hjemme i Tankens Verden, kaldes *Abstraktion*, at *abstrahere*; og ligesom Tingene i Verden kunne omformes efter Naturens Love, således kunne de abstrakte Begreber, der ere blevne Tankens Ejendom, omformes efter Tankens Love. Dersom der passerer 4 Kobbelt Kreaturer forbi, hvert Kobbelt på 15 Kreaturer, da'er det en Abstraktion, når man ikke fastholder Forestillingen om det mer eller mindre udmærkede ved hvert enkelt Kobbelt, men kun Begrebet 4, og ligeledes, når man ikke fastholder Forestillingen om hver enkelt Ko eller Stud, men kun Begrebet 15. Og når man dernæst siger: 4 Gange 15 er 60, så udfører man herved noget, der i og for sig ikke har med Virkeligheden at gøre, men som sker i Kraft af Tankens Love. Berettigelsen eller Værdien heraf fremgår af, at det omformede Begreb, 60, atter viser sig at svare til Tingene i den virkelige Verden, idet de samlede Kreaturer virkelig udgjøre 60 Stykker.

Man vil således kunne tale om to forskellige Virkeligheder: en Virkelighed i Sandseverdenen og en Virkelighed i Tankeverdenen. Den første komme vi i Berøring med og til Erkjendelse af ved vor egen sandselige Natur, ligesom vi ved samme gribe ind i den. Den sidste nå vi ved Abstraktion og ved Omformninger efter Tankens Love. Og som Prøve på, at fuld Virkelighed er tilstede i begge disse Verdener, har man i Grunden ikke andet end den Omstændighed, at hvorsomhelst man kan få Lejlighed til at sammenligne Tankevirkeligheden

med Sandsevirkeligheden — i det nævnte Exempel, at der er 60 —, stemme de overens, det vil sige, svare således til hinanden, at Tankevirkeligheden til Slut er den samme som den, man abstraherer fra Sandsevirkeligheden; — alt under Forudsætning af, at alle Abstraktioner og Tankeomformninger ske på forsvarlig Måde.

Ex. Jeg tager 21 Kært og lægger dem op, et for et, først 3 ved Siden af hinanden, så de næste 3 ovenpå hvert af dem o. s. fr. Jeg har i Forvejen anmodet en Person om at tænke på et Kært og lægge Mærke til, i hvilken Bunke det findes. Når han angiver dette, danner jeg af de 3 Bunker atter 1, idet jeg sørger for, at den angivne Bunke bliver lagt midterst. Jeg lægger op igjen på samme Måde og spørger sluttelig, i hvilken Bunke Kærtet findes. Dette gjentages endnu en Gang. Sluttelig samler jeg atter Kærtene i en Bunke på samme Måde som før, tæller dem så op og præsenterer det ellefte Kært som det, den anden har lagt Mærke til. — Hvorfor? Kunstneren skulde gjerne kunne gjøre Rede for Tankevirkeligheden, den anden stadfæster Sandsevirkeligheden. Det tiltalende ved Udførelsen er *Overensstemmelsen mellem begge*.

§ 4. Man mærker imidlertid snart, at et sådant Tankearbejde sker ved Hjælp af *Ord*, hvad enten nu disse udtales lydeligt eller blot indvendig. At blive klar på Sammenhængen i sidstnævnte Exempel *blot* ved en *Anskuelse*, vil næppe kunne ske. Der gives ganske vist Folkefærd, der kunne udføre en Slags Regninger endog med temmelig store Tal uden at have Navn på et eneste af dem; men medens det vistnok stempler dem som tænkende Væsener, at de overhovedet ville regne og kunne finde på en Måde at gjøre det på, er det ikke væsentlig ved Tanken, at de *udføre* selve Regningen, men ved udvortes Foretagender. Således skal man i en anden sydafrikansk Folkestamme kunne betegne Tallene lige til 1000 ved Hjælp af 3 Mand. Skal en Hjord tælles, står den første Mand og berører hvert Dyr med en af sine Fingre fra venstre Lillefinger til højre Lillefinger. Når han er tilende med de 10 Fingre, løfter den anden Mand en Finger (ligeledes venstre Lillefinger). Nr. 1 begynder da forfra igjen, og når han atter er færdig, løfter Nr. 2

den anden Finger, osv., indtil alle 10 Fingre ere løftede. Så løfter den tredie Mand en Finger, og de to første begynder da forfra igjen. Når Tælningen — om den kan kaldes saa — er færdig, står de 3 Mænd i Stillinger, som giver en Illustration af Hjordens Størrelse, tilstrækkelig tydelig for Anskuelsen, når man er vant til at se en Hjords Størrelse anskueliggjort på denné Måde. Til lige er denne Måde skikket til at afstedkomme en Sammentælling af 2 Hjorders Størrelse; men her er ikke Tale om abstrakt Tænkning.

Selve denne Udførelse ved Hjælp af Anskuelsen er måske en lignende som den, man kan lære en Hund, der afrettes til at give tilkjende, at 5 og 7 er 12. Men man må derover ikke glemme, at det er Afrikaneren selv, der både stiller sig Opgaven og finder på en Måde at løse den på, hvad Hunden ikke gjør. Ligheden er i hvert Fald kun i selve Udøvelsen.

Kun ved Hjælp af *Ordet* kan der finde en fuldstændig Abstraktion Sted, hvor alle Ejendommeligheder (som tilhøre de sandselige Ting) tages bort, for Ex. i Ordet »Intet«, eller hvor de glide ubestemmeligt imellem hinanden, medens Ordet dog er bestemt nok, for Ex. »Alt«, eller hvor hvikesomhelst Ejendommeligheder vilde kunne anbringes, medens ingensomhelst Ejendommeligheder ere fornødne, for at Ordet skal kunne bruges og behandles efter Tankens Love, f. Ex. i »Tolv«.

Sådanne Ord ere Udtryk for en Tankevirkelighed, der står fast, uanfægtet af, om der er nogen Sandsevirkelighed, der går Side om Side med den eller ej. Og idet alene Mennesket har Ævne til at bruge sådanne abstrakte Ord, er dette den eneste Skabning på Jorden, der kan træde i et bestemt Forhold til en Tankeverden, som har sin Gyldighed uden Hensyn til Sandseverdenen. Forrådet af Ordene og Ævnen til at bruge dem er derfor også et Civilisationens Kjendemærke. Matematikens Ord og Operationer betegner et vist Område heraf; men

der findes selvfølgelig flere andre. De første abstrakte Ord, vi i Mathematiken få Brug for, ere Navnene på Tallene, *Talordene*. At »tælle« er derfor også det første, man i denne Retning lærer Småbørn.

§ 5. Der foreligger en Mængde Beretninger om, at der gives Folk, som kun have Navn på de allerførste Tal, så det må vel antages, at der er noget rigtigt deri, om der end muligvis også kan være Misforståelser fra Europæernes Side ligeoverfor Folk, hvis Sprog og Tankegang er saa overordentlig afvigende fra vor.

Abiponerne, et vildt Rytterfolk i Laplatastaterne, tidligere talrigt, nu kun fåtalligt, kunne kun udtrykke de 3 første Tal. Højere Tal kalde de »mange«. På Australiens Fastland findes en Mængde Stammer, der kun kunne tælle til 4, derefter kommer »mange«, enkelte kunne gå til 7. Det samme gjælder flere Stammer i Sydafrika. Endog Eskimoerne, der dog have en ikke ringe Begavelse og f. Ex. let lære Domino og Brædspil, endog Schak, skulle vanskelig kunne tælle til mere end 10.

Med Hensyn til selve Talordene, da ere i alt Fald nogle af disse oprindelig lånte fra sådanne Ting i Sandseverdenen, som umiddelbart minder om vedkommende Tal. Således er på mange Sprog (f. Ex. malayiske) Navnet på »Hånd« det samme som Navnet på »Fem«, og på andre er Ordslægtskabet let at se. Hos Aztekerne, Mejikos gamle Beboere, har 20 Navnet »hele Mennesket« (som har 20 Fingre og Tæer). Der er en vis Rimelighed for, at noget lignende gjælder de første simple Talord, og man har troet i nogle Sprog at finde, at 2 har samme Stamme som »Vinger«, 3 som »Kløverblad«; men dette er ikke sikkert godtgjort. Mere tvivlsomt er det, skjøndt der er Sprogmand, der mene det, at Talordene én, to og tre skulde have samme Stamme som »jeg, du og han«, der selv ere abstrakte. Derimod er der Sprogmand, der med stor Bestemthed påstå, at flere af de første Talord have de samme Rødder i næsten alle Sprog lige-

fra indoeuropæiske til malayiske og indreafrikanske Sprog, hvilket altså måtte være et Vidnesbyrd om Menneskeslægtens fælles Oprindelse. I de højere Talord findes ikke et så udstrakt Fællesskab, men denne Slags Lighed kan med Fordel benyttes som Kjendemærke på Sproglægtskaber.

Foruden sådanne Navne på Ting, der ligefrem udviser det Tal, de har givet Navn, har man på flere Sprog brugt Ord som »Bjerg«, »Hob«, »Mængde« o. l. som Navn på et eller andet stort Tal. På Græsk betød »Myrioi«, med Tryk på anden Stavelse, »en Mængde«, med Tryk på første Stavelse, Tallet 10,000. Atter i vort Talesprog opfattes »Myriade« som en ubestemt stor Mængde. Her i Bogen vil Ordet stundom blive brugt i Betydningen 10000, på hvilket vi selv savner et særligt Navn.

§ 6. Efterat man har givet de første Tal Navne og er nået op til et vist Tal, for vort Vedkommende Ti, begynder man, så at sige, forfra igjen og optæller påny de samme Tal, lagte til Ti. Når man da atter kommer til Ti, så at man har to Tiere, begynder man igjen, idet man lægger de første ni Tal til Toti, indtil man kommer til Treti o. s. v. Når man på sådan Måde er kommen til Titi og skal derfra videre, så kunde man, efterat have talt endnu Ti, enten sige »Elleve Tiere« eller »Titi og Ti«. Der er lige god Mening i begge Dele (ligesom vi ofte sige »Elleve Hundrede« istedenfor »et Tusinde og et Hundrede«); men at det sidste Valg er så meget heldigere end det første, som det senere skal vise sig, derom havde Menneskene fra først af næppe nogen bevidst Anelse, og dog kan det siges, at trods alle øvrige Uligheder i Måden at benævne Tallene på, ja trods Uligheden i selve Grundtallet (f. Ex. 10 eller 20), så gives der intet Folk, som ikke, når de kom til ovennævnte Vendepunkt, valgte Udtryksmåden »Titi og Ti« eller

»Tyvetyve og Tyve« — atter »et Punkt, hvor Menneske-slægtens Enhed overvinder al individuel Ulighed«.

Med andre Ord »Titi« blev en ny Mærkepæl, et *Trintal*, som får sit særlige Navn, *Hundrede**), medens alle Tallene mellem 10 og 100 benævnes ved Sammensætninger af Navnene indtil 10 på en Måde, som senere skal omtales (§ 9).

Efter et Hundrede tæller man atter et Hundrede, og således fremdeles, indtil Ti Hundrede, der bliver et nyt Trintal med sit særlige Navn, *Tusinde*.

§ 7. De fleste europæiske Folk havde tidligere ikke særlige Navne på andre Trintal end 10, 100 og 1000. Flere af Oldtidsfolkene havde tillige Navn på 10000, såsom Grækerne, Ægypterne, Babylonierne og Kineserne. Hvad de højere Trintal angik, måtte man hjælpe sig ved at sætte de andre sammen: Ti Tusinde, Hundrede Tusinde, Tusinde Tusinde, eller, som hos Oldtidsfolkene: Myriade af Myriader (= 10000 0000). Først i Slutningen at det 15de Århundrede begynder der at danne sig nye Navne på højere Trintal. Ordet »*Million*« var hidtil Navnet på en vis Guldmenge, nemlig 10 såkaldte Tønder (omtrent $\frac{1}{2}$ Kubikfod); men i en italiensk Tallære fra 1494 e. Kr. findes dette Ord for første Gang brugt som Navnet på 1000000. Navnene *Billion* og *Trillion* ere opfundne i Begyndelsen af det 17de Århundrede, men kom dog først ret i Brug ved Astronomien i forrige Århundrede. Disse Navne ere dannede efter Million, men med Begyndelseslyden fra det latinske Ord for »to Gange« og »tre Gange«, nemlig en Million Millioner og en Million Million Millioner og betegne henholdsvis et 1-tal

*) Dette Trintals Navn skal forevrigt, efter Sprogmands Påstand, på indoeuropæiske Sprog kunne afledes som et af »Ti-ti« dannet Ord; og Navnet på »Hundrede« skal altså i disse Sprog have en fælles Rod. Dette gjælder ikke om Navnet på Tusinde, der altså først synes at være taget op efter Stammernes Adskillelse.

med 12 og med 18 Nuller efter. Undertiden træffer man på fortsat Orddannelse i: Qvatrillion (24 Nuller), Qvintillion (30 Nuller), Sexillion (36 Nuller). — Ordet Milliard har i et halvt Århundrede været brugt på den franske Børs som Navn på *Pengesummen* 1000 000 000 Francs, men siden Fredslutningen i Versailles 1871 er det kommet i Brug andensteds for selve Tallet 1000 000 000.

Det er åbenbart en Fordel at have Navne på Trin-tal; thi når man først har forbundet et bestemt Begreb med disse, er det lettere at opfatte, når der siges, f. Ex. Fem Milliarder, end når der siges Fem Tusinde Tusinder af Tusinder eller på gammel Græsk Halvtredsindstve Myriader af Myriader. Derfor lå de meget store Tal fjernt fra de Gamles almindelige Tankegang, så at kun et Geni som *Arkimedes**) i Syrakus (287—212 f. Kr.) [○] eller en anden udmærket Mathematiker som den noget senere *Apollonios* fra Perga indlader sig på umådelige Talangivelser. Arkimedes har nemlig skrevet en hel Bog for at udtrykke Tallet på de Sandkorn, der vilde kunne fylde hele Verden efter den Størrelse, man på Arkimedes' Tid tillagde den. Det er ret betegnende, at han indleder denne Bog med Bemærkning om, at der er dem, der ansé Sandkornene ved Havets Bredder og i Jordens Dyb for uendelige i Tal; men nu vil han som Modsætning hertil påvise et Tal, der er større end det Antal Sandkorn, der vilde kunne fylde hele Verden. — Næst efter at have gjort nogle Rumberegninger over Verdens Størrelse, indlader han sig på det den Gang storslåede Arbejde, som optager den sidste Halvdel af hans Bog, at give klare Udtryk for store Tal; thi han savner jo både Navne og Betegnelser på dem. Han

*) Om Personer eller Forhold, som må forudsættes kjendte fra den almindelige Verdenshistorie, vil der ikke i denne Bog blive fortalt. Derimod sættes der, for at sikre, at sådan Kundskab ikke savnes, på vedkommende Steder Tegnet [○].

fremstiller derfor forskellige Grupper af Tal. Den første omfatter Tallene indtil Ti Tusinde Myriader, hvad vi kalde Hundrede Millioner og skrive med 8 Nuller. Et sådant Tal regnes for én i den anden Gruppe Tal; to sådanne Tal for to i anden Gruppe osv.; og af denne Slags Enere optælles nu Ti Tusind Myriader. Da har man et Tal, som regnes for én af tredje Gruppe. På denne Måde kan så Arkimedes på en nogenlunde simpel og klar Måde udtale, at selv med den videstgående Forudsætning om Verdens Storhed, som kjendtes på hans Tid, ville de Sandkorn, som vilde kunne fylde den, ikke beløbe sig til Tusind Myriader af den ottende Talgruppe, $\circ$: Et med 63 Nuller efter.

Hos Apollonios, som ligeledes har store Talangivelser, består hver Gruppe ikke af en Myriade Myriader, men simpelt hen af en Myriade, hvad der for så vidt er naturligere, som der dog kun findes græske Trintalnavne indtil Myriaden.

§ 8. Det eneste Folk, hvorom vi vide, at det har havt en *uafbrudt* og nogenlunde lang Række af Navne på Trintal, er *Hinduene* [$\odot$]*), og dette allerede på en Tid, der ligger forud for vor Tidsregning. Og disse

*) I Cantu's Verdenshistorie findes en levende Skildring af Hindu-folket i Oldtiden; og Kalidasas Skuespil Sakuntala (overs. af M. Hammerich) giver en Forestilling om Hinduernes Digtekunst og Liv. — I Forbindelse med Hinduernes matematiske Begavelse kan nævnes deres grammatiske. Ligesom vi i matematisk Retning ville træffe på en afgjort Forskjel i Tankegangen hos Grækere og Hinduere, således også i grammatisk. Medens den græske Grammatik væsentlig går ud på at udrede Forholdet mellem Ordene i en Sætning, Syntax, fordybede Hinduene sig i Redegjørelsen af Ordene Slægtskab og Betydning, Etymologi, hvilket skete med en sådan Flid og en så overraskende lagttagelsesevne, at en Grammatik af Panini (over 3 Århundreder før Kr.) er bleven kaldt »en så fuldstændig Grammatik, som intet andet Sprog end Sanskrit kan opvise dens«.

Navne have ikke blot været kjendte og brugte af de hinduiske Mathematikere, men have i aller egentligste Forstand været en Del af Modersmålet; thi de bruges i deres ældste Bøger (Vedasangene) og i Folkesangene, og det synes at have været en Folkeejendommelighed hos dem at svælge i store Tal. Således angiver en Konge i Folkedigtet Mahabharata, flere Århundreder før Kristus, i stigende Begejstring sine Rigdomme til 100 000 Billioner, og i det noget senere Digt Ramayana møder Abefyrsten sine Fjender med 10 000 Sexillioner Aber. — Men Buddhaisterne gå senere endnu videre. For ikke at tale om 23 000 Billioner Guddomme siger en buddhaistisk Forfatter om et Tal med 17 Nuller, at »Buddha alene kan begribe det, men at det kan give en Forestilling om Tilværelsen af den ubegrændsede Natur, om de Visers rene Fortjenester, om Tidsrummene af de Tilværelser, som de vandrende Sjæle må friste, om det Ønskernes Ocean, der er skabt for de levende Væseners Lykke, om den Kjæde af Love, der danner Verdens uendelige Udvikling«. Man lagde derefter Buddha en Række Trintal i Munden lige til et Tal med 54 Nuller, og dette, tilføjer Buddha, er kun én Tælning; over denne gives der endnu én, over denne atter én, over denne 5 eller 6 andre. — Ja, som om dette endnu ikke forslog, har senere buddhaistiske Skrifter fastslået et Tal med 17 Nuller som et første Trintal. Dernæst betragtes (ligesom hos Arkimedes et Tal med 8 Nuller) dette som Ener i en ny Tælning, og man kommer således til, hvad vi skrive med 34 Nuller. Men idet dette betragtes som Ener i den tredie Tælning, fortsættes denne, indtil man får så mange af disse Enere, som vi vilde udtrykke ved et Tal med 34 Nuller; altså er vi i tredie Tælning nået op til 68 Nuller (efter Arkimedes' Fremgangsmåde skulde vi kun være nået til 3 Gange 17 (eg. 8) Nuller eller 51 Nuller); ved fjerde Tælning nåes til 136 Nuller og således dobbelt op, så at man ved den 128de Tælning nær op til et Tal med så mange

Nuller som 17 taget dobbelt op 128 Gange. Dette Tal er så stort, at Antallet af dets Nuller selv må angives med et 40-siffrer Tal. Til Sammenligning kan tjene, at dersom Afstanden herfra til Stjerner, der ere 10 000 Lysår [☉] fjerne, blev opfyldt med et umådeligt langt Tal trykt med Typer som i denne Bog, vilde Antallet af dets Siffre dog kunne udtrykkes ved et 23-siffrer Tal.

Denne Syssel med store Tal smittede noget af på Hinduernes Naboer, navnlig hvor Buddhaismen trængte frem (Thibet og Kina).

Ligesom vi lære Børn at tælle de sædvanlige Enere, have Hinduerne uden Tvivl tillige lært deres Børn at tælle Trintallene:

daçan	-	10
çata	-	100
sahasra	-	1000
ayuta	-	10000
laksha	-	100 000
prayuta	-	1 000 000
kôti	-	10 000 000
vyarbuda	-	100 000 000
padma	-	1 000 000 000
kharva	-	10 000 000 000, o. s. v.

Forsåvidt man først havde tilegnet sig disse Talord, måtte man ved Hjælp af dem altid kunne udtale et stort Tal på en fatteligere Måde end vi, der dog have fået flere Trintalnavne end Europæerne havde i Oldtiden; og denne Omstændighed har rimeligvis bidraget sit til Opfindelsen af den fortrinlige Talskrivning, som senere blev Hinduernes Værk, og som er optaget af hele den civiliserede Verden.

Ex. Prøv at udtale 86789325 174

- | | |
|----|--|
| 1, | når det højeste Trintalord er Tusinde, |
| 2, | - - - - - Myriade, |
| 3, | - - - - - Million, |
| 4, | - - - - - Milliard, og |
| 5, | - - - - - Kharva. |

§ 9. Når man nu har Navne på Tallene fra 1 til 10 og dernæst på Trintallene 100, 1000 osv., danner man i Reglen de øvrige Talord ved Sammensætninger af disse. Dog gives der Undtagelser herfra, idet f. Ex. et Folk i det indre Afrika (Bornu) har særlige Navne på 20, 30, 40 ..., der ikke skjønnes at være dannede ved Sammensætning. Men hvorledes de forskellige Sprog iøvrigt danne disse Sammensætninger, derfor gives ingen enkelt Regel. Måden er i visse Henseender ejendommelig for Sprogene og kan også bruges som Kjendemærke på Sproglægtskaber.

Det mest almindelige er, at når et af de små Tal (Enerne) nævnes i Forbindelse med et Trintal, menes der enten, at de skulle lægges sammen, eller at de skulle foldes*) med hinanden. Nævnes Tre og Hundrede, bliver det på vort Sprog enten 103 eller 300; og det kan endvidere angives som almindeligst, at *når Trintallet nævnes før Enernes Tal, skulle de lægges sammen (103); når Enernes nævnes før Trintallet, skulle de foldes med hinanden (300)*. I første Tilfælde indskyde nogle Sprog et »og« eller en anden Mellemlid, i sidste Tilfælde foretages ofte blot en simpel Sammenstilling, men Sprogene kunne dog også her have ejendommelige Forbindelsesmåder. De væsentligste Undtagelser fra den angivne Hovedregel finde Sted i Talordene fra 11 til 19; thi efter Reglen skulde vi kalde 13 for Titre eller Tiogtre ligesom 103 for Hundrede

*) Ordet at »multiplicere« falder det mange Mennesker højst unaturligt at bruge, tilmed fordi det drejer sig om så simpel en Handling, som man endog lærer Småbørn at udføre. I denne Anledning bruge mange Mennesker Ordet at »gange«, rimeligvis dannet af, at man siger »3 Gang 7«. Jeg tillader mig at foreslå og her i Bogen at bruge Ordet at »fold« i Forbindelse med Ordet »Fold«. Jeg tager 7 3 Fold; jeg folder 7 med 3; jeg folder 3 og 7 med hinanden. Dette udelukker ikke, at man *også* kan sige »3 Gang 7«, ligesom man foruden »3 lagt til 7« kan sige simpelt hen »3 og 7 er 10«.

og tre, medens vi omvendt sige Tretten. For ikke at forveksle disse Tal med Tierne, f. Ex. treti, har Sproget, alt efter sin Ejendommelighed, givet dem afvigende Former (Tretten).

Af alt dette ses, at der allerede under Dannelsen af Talordene er Tilbøjelighed til Regning tilstede, navnlig til Sammenlægning (Addition) og Foldning (Multiplikation); men også af de to andre simple Regningsarter, Fratrækning (Subtraktion) og Deling (Division) findes der Antydninger i Talordenes Dannelse i flere Sprog.

På Latin hedder 18 »duodeviginti«, 2: To fra Tyve, 99 hedder »undecentum«, 2: En fra Hundrede. På Græsk hedder 49 »henos deontos pentækonta« 2: Halvtreds på én nær, osv. Lignende Former kan træffes i flere Sprog, såsom Sanskrit, og f. Ex. hos Nordamerikas Indianerstammer.

Sjældnere ere Talord dannede ved Deling. Vort eget Sprog afgiver et temmelig enestående Exempel i Ordene Halvtredsindstyve, Halvfjerdsindstyve og Halvfemsindstyve, hvortil der dog findes Sidestykker, dels hos Dajakerne (Urindvånerne af Øen Borneo) og dels hos Malayerne, hos hvem 25 kaldes med et Ord, der på Dansk betyder »Halvtreti«, og 55 kaldes »Halvsexti«, ligesom vi og andre Europæere kalde $5\frac{1}{2}$ for »Halvsjette«, og Klokken $5\frac{1}{2}$ for »Halvsex«^{*)}.

Ex. på Talordet for 18 på forskellige Sprog:

Dansk:	atten	2: 8-10
Fransk:	dix-huit	2: 10-8
Græsk:	okto kai deka	2: 8 og 10
Latin:	decem et octo	2: 10 og 8
	duo de viginti	2: 2 fra 20
Basbreton:	triouech	2: 3 Sexere
Aztekisk:	caxtulli om ey	2: 15 og 3.

*) For at imødekomme Sprogbrugen »Halvsex«, har man på enkelte Steder begyndt at skrive $\frac{1}{2}6$, en Skrivemåde, der stem-

§ 10. *Valget af Grundtallet* er næsten for alle Folkefærds vedkommende bleven afgjort ved den Omstændighed, vi spøgende udtrykke således: »Jeg har 10 Fingre på hver Hånd 5 og 20 Negle på Hænder og Fødder«. Ligesom Fingrene naturligt tages i Brug som Talangivere hos Folk, der slet ikke have Talord (§ 4), således vedblive de at være et selvskrevet Hjælpemiddel og Undervisningsmiddel ved den første Tilegnelse af Talordene. — Det er da rimeligt, at »man må vende, når man kommer til Ende«. Der gives Folk, der tydeligt have gjort en Vending, når de ere komne til Ende med den ene Hånd*). En sådan Vending sker hos Grønlænderne og de Indfødte i Surinam og andre Dele af Amerika og Afrika, idet de kalde 6 for »Hånd og én« eller »Fod og én« eller »5 og 1«; men intet Folk har gennemført Femtalsystemet; thi de af dem, der overhovedet ere nåede saa højt op i Talrækken, at der kan være Tale om et System, have dog senere lagt 10 eller 20 til Grund derfor.

Delvist findes Tyvetalsystemet anvendt hos os (fra 50 til 100; vore Fædres »et stort Hundrede«, nemlig 120, hører måske også herhen), fremdeles hos Bretonerne, hvorfra det er gledet ind i fransk Tælning (70 kaldes 60-10, 71 kaldes 60-11, 72 = 60-12 osv.; 80 hedder Firtyve, 90 hedder Firtyve-ti, 91 = Firtyve-elleve osv.; ja man skal undertiden på Fransk kunne træffe Sextyve, Syvtyve . . . til Femtentyve (300)), og hos Armenierne; men Tyvetalsystemet er fuldstændig gennemført hos Aztekerne, hvis første Trintal 20 har Navn af »Men-

mer med den Latinske Måde at skrive et mindre Tal foran et større for dermed at betegne, at det lille skal trækkes fra det (IX = 9). Herom mere senere.

*) Det græske Ord »pempazein«, at tælle, hænger uden Tvivl sammen med Ordet pente, 5; ligeledes vor Talemåde »ikke at kunne tælle til 5«.

nesket«, det andet, 20 Gang 20 eller 400, har Navn af »Håret«, det tredie, 8000, har Navn af »Pungen«, og hos Mayaindianerne (i Yukatan), der endog have Navn på det næste Trintal 160,000; men de skriver selvfølgelig ikke Tallene på denne Måde.

Iøvrigt er det Titalsystemet, der er kommet i Brug hos næsten alle Folk, som overhovedet have noget Talsystem. Man har fra Tid til anden troet at opdage nye Talsystemer. Indfødte ved Cap York (Australien) tælle saaledes:

- 1 netat
- 2 naes
- 3 naes netat $\circ$: 2 og 1
- 4 naes naes $\circ$: 2 og 2
- 5 naes naes netat $\circ$: 2 og 2 og 1
- 6 naes naes naes $\circ$: 2 og 2 og 2.

Dette skulde være et Totalsystem; men da man ikke en Gang har Navn på det andet Trintal 4, er det intet Under, at Tælningen går i Stå. Det kan næppe betragtes som andet end, når vi siger »imorgen, iovermorgen, imorgenvormorgen osv.«

Efter et Brev fra en Missionær meddelte Leibnitz (1646—1716) [○] i sin Tid til Videnskabernes Selskab i Paris, at Kineserne fra gammel Tid have havt et Totalsystem, hvad der af filosofiske Grunde i høj Grad tiltalte ham; thi man behøvede da kun Siffrene 0 og 1, ved Hjælp af hvilke alle Tal kunde udtrykkes, f. Ex.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

i Totalsyst.:

1 10 11 100 101 110 111 1000 1001 1010 1011...

Endvidere behøvede man da ingen anden Tabel at kunne end, at $\begin{cases} 1 \text{ og } 0 \text{ er } 1 \\ 1 \text{ og } 1 \text{ er } 10, (\circ: \text{To}), \text{ og at } \end{cases} \begin{cases} 1 \text{ Gang } 0 \text{ er } 0 \\ 1 \text{ Gang } 1 \text{ er } 1; \end{cases}$ men Meddelelsen har vist sig at være urigtig. Ligeledes har det vist sig kun at være et falsk Rygte, at Folk i

Kaukasus skulde have et Attentalsystem. Derimod synes det ikke at skulle afkræftes, at Nyseelænderne skulle have et temmelig gennemført Ellevetalsystem. Vort 11 er deres første Trintal, derefter tælle de 11 og 1, 11 og 2 ... 2 Gang 11, ... 3 Gang 11, osv. til det andet Trintal, der svarer til vort 121, o. s. fr. til deres 3die Trintal, der svarer til vort 1331.

Ex. 1. Dersom man vilde omskrive vort 1888 på Tolvtalet-systemet, måtte man finde, hvor mange *Enere* af Tolvtalet-systemet (som efter vore sædvanlige 1, 2, ... 9 måtte beriges med T (vort 10) og L (vort 11)) der findes, foruden det Antal Trintal, det indeholder. Dette findes ved at dele 1888 med 12, hvorved fåes

157 Tolvere og 4 Enere.

Ved at fortsætte på samme Måde fåes

1 Tolv-Tolv-Tolv, 1 Tolv-Tolv, 1 Tolv og 4,

altså i Tolvtalet-systemet 1114.

Ex. 2. Omskriv ligeledes 1888 i Systemer med Grundtallene, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 20, idet man kan skrive 14 Enere i 20-systemet med Tegnet F.

§ 11. Medens Valget af Grundtallet 10 forlængst er truffet under Indflydelsen af den Omstændighed, at vi har 10 Fingre, og skjøndt det er trængt således ind i alle dannede Folkefærds Bevidsthed og slået fast ved Bestemmelsen af vore Målestokke for Rum, Vægt, m. m., at det sikkert aldrig vilde blive ombyttet med et andet Grundtal, selv om dette skulde vise sig hensigtsmæssigere, skal her gjøres nogle Bemærkninger i så Henseende, da der er adskillige, som omgås sådanne Tanker. Til at udtrykke et eller andet Tal, f. Ex. 1888, vilde der i Totalsystemet kræves 11 Siffre, i Tretalsystemet 7 Siffre osv., som følgende Oversigt viser. Hertil vilde det være fornødent, at man havde i Totalsystemet 11 Navne på Enere og Trintal, i Tretalsystemet 8 Navne osv., som Oversigten udviser:

Grundtal ... 2 3 4 5 6 8 10 11 12 20

Antal Siffre. 11 7 6 5 5 4 4 4 4 3

Antal Navne 11 8 8 8 9 10 12 13 14 21

Da det må ansees for hensigtsmæssigt, at der skal bruges så få Siffre som muligt, og at man er bebyrdet med så få Navne som muligt, sees efter denne Tabel Titalsystemet at være ret vel stillet i så Henseende. Var Talen om et større Tal end 1888, vilde Tabellen ændre sig til Gunst for et større Grundtal; var Talen om et mindre, til Gunst for et mindre.

Tallene ere imidlertid ikke alene til at udtale og opskrive; de ere også til at regne med; men der vilde ved de forskellige Regningsarter være så mange ulige Hensyn at tage, så at en Besvarelse i så Henseende vilde falde højst vanskelig. Det skal derfor kun tilføjes, at Menneskene have en Tilbøjelighed til at gruppere i 3 (f. Ex. når man tæller Søm) eller 4 (f. Ex. når man inddeler), og at der således kunde være noget, der talte for Tolvitalsystemet, som endog er bleven kaldet vort åndeligt naturlige, medens Titalsystemet kun skulde være vort legemligt naturlige Talsystem. Det kan ikke nægtes, at Tolvtallet har taget Plads på mange Områder (Tids- og Vinkelinddelingen, Liniemål m. m.).

Ex. 1. Hvorledes vilde den lille Tabel se ud for Tallet 7, dersom vi havde Ellevetalsystemet (lad Ti få Siffret T), såvel Sammenlægnings Tabellen som Foldningstabellen.

Ex. 2. Omskriv 546 og 78 til Ellevetalsystemet.

Læg disse to Tal sammen, og gør Prøve ved at lægge 546 og 78 sammen og omdanne det udkomne.

Fold dem med hinanden og gør lignende Prøve.

Ex. 3. Løs samme Opgaver i Totalsystemet; og i samme System træk endvidere 78 fra 546, og del 546 med 78.

Talskrivning.

§ 12. Medens forrige Afsnit væsentlig behandlede den mundtlige Tælning, forekommer der dog deri megen Talskrivning, hvilket har kunnet ske, fordi vi i vore Dage have en så simpel og fortrinlig Måde at skrive Tal

på, at enhver, der kan læse, ja mangen én, som dårligt kan læse, dog både kjender Talskrivningen og kan opfatte den. Forud for den vigtige Opfindelse, som ligger til Grund herfor, går der imidlertid en Mangfoldighed af tarveligere Fremgangsmåder, udfundne og brugte i Årtusinder af forskellige Folkefærds mest fremragende Mænd. Ved at gjøre Bekjendtskab med de mest typiske af disse Måder hos de mere kjendte Oldtidfolk, vil man få en klarere Opfattelse både af vor Talskrivnings Væsen og af dens Værdi.

Til egentlig Talskrivning kan ikke regnes noget sådant som, at man i Ægypten [⊙] har fundet 9 Guder skrevet derved, at Hieroglyfen for »Gud« anbringes 9 Gange. Dette er snarere at omgå Brug af Taltegn.

Heller ikke er det Talskrivning, når man har fundet *Talord skrevet efter Ordlyden* med Hieroglyfer brugt som en Slags Bogstaver, nemlig hver for sig som det første Bogstav i det Ord, de ellers betød, hvorimod denne Omstændighed har sat de Sprogkyndige i vort Århundrede istand til at danne sig en Forestilling om Ordlyden af Talordene og derefter om mangen anden Ordlyd i dette forlængst uddøde Sprog, hvis Skrift man vel for en Del forstod, medens man ikke vidste, hvorledes Ordene i sin Tid have lydt.

§ 13. Men *Ægypternes* gamle Hieroglyfskrift har også på mange Steder virkelige Taltegn, dog kun for Trintallene 1, 10, 100, 1000, 10 000 og ganske enkeltvis for 100 000, 1000 000, 10 000 000 (se Pl. I, Tg. 1*). Navnlig findes en rig Samling Taltegn i den såkaldte »Tallenes Grav«, som Ægyptologen Champollion [⊙] op-

*) Man har — men ikke uimodsagt — tolket disse Tegn således: 1 = Målestokken (det samme Tegn, der findes i så at sige alle Skriftegn); 10 = en Omgang; 100 = et Palmeblad eller Præstestav; 1000 = en Lotusblomst eller Lampe; 10 000 = en Finger; 100 000 = en Frø; 1000 000 = en forbauset Mand; 10 000 000 = et Himmeltegn.

dagede tæt ved Gizeh, og hvor den rige Ejers Hjorder angives til 834 Oxer, 220 Køer, 3 234 Geder, 760 Æsler og 974 Får. Man brugte ikke andre Tegn end de nævnte, og sammensatte Tal skrives derfor ved, at Enertegnet sættes så mange Gange, som der er Enere, Titegnet så mange Gange, som der er Tiere, osv. For at lette Oversigten, når der er mange Tegn af samme Art, deles de ensartede Tegn i Grupper på 4, eller 4 og 4, samt, hvad der bliver tilovers (sml. § 11). Reglen var nu, at man først skrev de højstbetydende Taltegn, så de næsthøjeste osv. og sidst Enerne. Denne Fremgangsmåde er fulgt af alle Folk, der i det Hele taget have brugt dette naive *Sammentægningsystem* (Additionssystem); men hvad der skal kaldes »først« og »sidst« berøer for hvert Folks Vedkommende på, om dets sædvanlige Skrift løb fra Venstre til Højre (ligesom vor) eller fra Højre til Venstre. De ægyptiske Hieroglyfer læses på forskellige Steder i modsatte Retninger. De bleve nemlig hovedsagentlig anbragte som Ornamenter i Bygninger, og der bleve de da skrevne i den Retning, hvori man tænkte sig, at Besøgeren vilde bevæge sig og læse dem. I en og samme Gang eller Port vilde man således på venstre Side læse Skriften fra Venstre, på højre Side fra Højre.

Ved den hieratiske Skrift [⊙], som navnlig brugtes i Dødebogen [⊙], og hvor Hieroglyfernes monumentale Tegn bleve ændrede til mere flydende (kursiv) Skrift, gav man sig ikke Tid til at tegne eller male Tallene så udførligt, og der udviklede sig derfor her en hel Del særlige Tegn, ikke alene for alle Enerne, men f. Ex. for 200, 300 . . . , som dog alle bar Mærket af at være Omdannelser af de tilsvarende hieroglyfiske Taltegn eller Tegngrupper. Da der imidlertid ikke er noget særligt typisk ved dem, og de ikke synes at have dannet Overgang til noget bedre, skulle de ikke omtales her.

Ex. Skriv hieroglyfisk 63792 og 1020050.

§ 14. *Grækernes* [⊙] oprindelige (indtil 5te Årh. f. Kr. brugte) Talskrivning var bygget på et ganske lignende System som den hieroglyfiske. Selve Tegnene vare dog anderledes, nemlig Begyndelsesbogstavet i de græske Talord for 1, 10, 100, 1000, 10 000 (Pl. I, Tg. 2). Hertil kom et Tegn for 5, et Tegn omtrent som en Galge (det første Bogstav i det græske Navn på 5), og når man nu skal skrive 5 Tière, hænger man så at sige et lidet Titegn op i Galgen; skal man skrive 5 Hundrede, hænger man et lidet Hundredtegn op, osv. Herved bliver Systemet både noget mere kortfattet og mindre trivielt end det ægyptiske.

Også *Romernes* [⊙] Talskrivning var grundet på væsentlig samme System. De havde følgende Tegn: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Men her træder en ny Ejendommelighed til, idet man nemlig, ved at sætte et mindre betydende Taltegn foran et større, betegnede, at det mindre skulde trækkes fra det større, f. Ex. IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90 osv. Romerne kunde endvidere folde et Tal med 1000, ved at sætte en Streg oven over Taltegnene, eller med 1000 000, ved tillige at sætte Klammer om dem, såsom:

$$\overline{\text{XDCXXXI}} \text{ CCLIV} = 10\ 631\ 254.$$

Ex. Skriv 63792 på gammel Græsk og på Romersk.

§ 15. *Babylonierne*. I Landet ved Eufrat og Tigris [⊙] have til forskellige Tider forskellige Folk været de herskende, medens de undertvungne levede i så stor Mængde, at man satte offentlige Indskrifter på to, ja ofte på tre meget forskellige Sprog. Således findes på samme Tavler

1. Et arisk Sprog, i Slægt med Sanskrit, eller snarere med det endnu ældre Zend (sagtens Gammelpersernes Sprog).
2. Et semitisk eller aramæisk (sagtens gammelbabilonisk) Sprog.

3. Et skytisk (hvis Herkomst ikke er klar; måske tilhørende de gamle Beboere af Landskabet Susiana). Alle disse Sprog, som det med en Mængde Sprogmands forenede Anstrængelse er lykkedes nogenlunde at læse, ere trods deres store Forskjelligheder skrevne med en og samme ejendommelige Skrift, den såkaldte *Kile-skrift* [☉], der løber fra *Venstre til Højre*, uagtet det sædvanlige for semitiske Sprog er at skrive fra Højre til Venstre. Rawlinson gjør hertil den Bemærkning, at Skriveretningen intet har med Sproget at gjøre, men alene med Alfabetets Art. Man har således Mynter, på hvis to Sider der Bogstav for Bogstav står samme Indskrift, men med forskellige Alfabeter og derfor på den ene Side fra Højre, på den anden fra Venstre.

Noget andet, som de nævnte Indskrifter have tilfælles, er Tallene. Tal såvelsom matematiske Formler ere, hvad man kalder, pasigrafiske, *o:* således skrevne, at Folk med helt forskellige Sprog dog opfatte dem aldeles éns, uagtet hver læser dem på sit Mål. Således skulle Øboerne i det indiske Ocean have livligt Handelssamkvem med Kineserne, medens de dog ikke forstå disses Sprog, men kun kjende deres Tal.

Tallet 1 skrives med den lodrette Kile (Tg. 3), 10 med Vinkelhagen, som efter Grotefends*) Mening forestiller to sammenlagte Hænder med strittende Tommelfingre, som de holdtes ved Bøn. Da Skriften ufravigelig går fra Venstre til Højre, og Systemet *fra 1 til 100 er et Sammenlægningssystem*, skrives længst til Venstre Tierne, så Enerne, medens man dog for at spare Plads kan gruppere Tegnene, så at de ens gjældende Tegn også kunne komme nedenfor hinanden, og at nogle Tegn ere mindre end andre, uden at de dog derved forandre Værdi. (Se Tallene Tg. 3).

*) En genial tysk Sprogmand, der væsentlig har bidraget til Kile-skriftens Tydning (1775—1853).

Men idet nu 100 skrives ved en lodret og en vandret Vinkelhage (Tg. 4), bliver Systemet ved højere Tal et Foldningssystem (multiplikativt), idet 200 skrives, ikke ved at sætte Hundredtegnet to Gange, men ved at sætte et Total foran (∩: til Venstre for) Hundredtegnet. Hvor nemlig et mindre Tal går foran et større, skal det foldes med dette, hvor det mindre følger efter det større, skal det lægges dertil (se Tg. 4).

1000 skrives (Tg. 5) med Vinkelhage, lodret Kile, vandret Kile; og man kunde fristes til at tro, at der hermed var ment Ti Hundrede. Men det er en ren Tilfældighed, at det kan tolkes således; thi det er at betragte som en sammenhængende selvstændig Betegnelse for 1000, nemlig en Slags Bogstavbetegnelse for det gammelbabyloniske »shi«, ligesom Hundredtegnet betyder »ki«. Derfor skal heller ikke det bedst øvede Øje kunne opdage nogen Skilning imellem Vinkelhagen og det formentlige Hundredtegn i 1000; og 2000 skrives ikke, som det da vilde have været at vente, med to Vinkelhager (∩: 20) foran 100, men med to Enere foran Tusindtegnet (Tg. 5). Efter Foldningssystemet kan man således skrive mange Tusinde, men Babylonierne brugte også jevnlig endnu et Tegn for Trintallet 10 000, som udtaltes »avibi« (Tg. 6).

Ex. Skriv 63792 på Babylonisk (sml. Tg. 7).

§ 16. *Kinesernes Historie* [⊙] viser, at dette Folk er i Besiddelse af en meget gammel Kultur, medens det i lange Tider har aflukket sig fra ydre Påvirkning. Når Kineserne dog af og til har optaget noget godt fra andre Folk, synes de at have et særeget Anlæg til helt at ville tilegne sig Opfindelsen. Et Exempel herpå findes i den kinesiske Talskrivnings Historie.

Medens Kinesernes Sprog er meget fattigt på Ord (de have kun 450, alle Enstavelsesord), som hvert kan have mangfoldige Betydninger, der udtrykkes ved Accentuation, Sammenstilling af særligt valgte Ord m. m., er

deres Skriftsprog overordentlig rigt på Tegn, af hvilke der nok findes 40 000, medens dog de 5000 regnes for tilstrækkelige til almindelig skriftlig Virksomhed. Hvert *Ord* kan derfor skrives med en Mængde forskellige *Tegn*, alt efter dets Betydning, dets Forhold i Sætningen osv.; og omvendt kan et enkelt Tegn læses på forskellig Måde, snart som ét Ord, snart som et andet, hvilket så må fremgå af den hele Sammenhæng, ligesom 1^o i en dansk Bog kan læses enten: »én Grad« hvor man atter efter Omstændighederne kan tænke på en Varmegrad, en Bredegrad e. a., eller: »pro primo«, eller: »for det første«.

For Talskrivningens Vedkommende have Kineserne særlige Tegn for 1, 2, 3 . . . 9, 10, 100, 1000, 10000 (se Tg. 8), og disse Tegn sammenføje de med gennemført Orden, efter *Foldningssystemet*, således at de ved at sætte de små Tal *foran* de større udtrykke en Foldning, medens de små Tal lægges til, når de komme *bagefter* de større; men »foran« og »bagefter« må forstås i Overensstemmelse med Kinesernes Skrivemåde; thi de begynde til Højre på Papiret og skrive Linien nedad; dernæst skrives en ny Linie til Venstre for den anden fra oven og nedad, osv. Exemplet Tg. 9 fremstiller altså Tallet 186214.

Det er med Føje bleven bemærket, at Kinesersprogets Ejendommelighed har hjulpet dem til denne gennemførte Talskrivning, der står højere end de tidligere omtalte. Deres Ord kunne nemlig aldeles ikke bøjes, og når de sammensættes, kan der ikke heller være Tale om nogen Sløjfning eller Sammensmæltning af Ordene. De kunne altså ikke sætte 6 og 10 sammen som vi med Forskel i Formen, hvorved vi kunne danne »Sexten« og »Sexti«. Men må nu Ordene »Sex« og »Ti« ikke bøjes, så må Kineseren holde strengt på Ordenen, så at »Sexti« er 60 (ved Foldning, thi det lave

Tal er foran), og »Tisex« er 16 (ved Sammenlægning, thi det lave er bagefter).

Foruden denne Talskrivning, der er ægte kinesisk, forekommer endnu to andre, som dog ikke skulle nærmere beskrives her, fordi den ene, Kjøbmandstalskrivningen (se Tg. 10), kun er en ulogisk Sammenblanding af kinesisk og hinduisk Talskrivning (herom mere senere), og fordi den anden, Mandarintalskrivningen (se Tg. 11), ikke er nogetsomhelst andet end den Talskrivning, som Kineserne lige såvel som vi have fået fra Hinduerne, blot med forskellige Skrifttegn. Dette fremgaaer tilstrækkeligt af den fra andre kinesiske Skrifttegn afvigende Form for Nul, samt af Skrivelinjen, som ingenlunde behøvede at slå om fra lodret til vandret. Det kan bevises, at Mandarintallene allerede ere blevne brugte i Kina i Mongoltiden (7de til 10de Årh. e. Kr.), og Indvandringen af Systemet falder det ikke vanskeligt at forstå, når man betænker, at den kinesiske Kejser jevnlig indkaldte hinduiske Astronomer, når de kinesiske havde gjort sig skyldige i Forsømmelsen af at forudsige de i den kinesiske Kultus højst vigtige Solformørkelser. Også den buddhaistiske Strømning kan have bidraget til at indføre adskilligt fra Hindustan, deriblandt de høje Trintal lige til et Ettal med 53 Nuller, som Kineserne kalde Hang-ho-schan, 卅: Ganges' Sand, et Navn, der røber dets Kilde.

Ex. Skriv 63792 på ægte Kinesisk.

§ 17. En mærkelig Talskrivning begyndte i det 5te Årh. f. Kr. at udbrede sig blandt flere Folk i de Egne, hvor Europa, Asien og Afrika nærme sig til hinanden. Man har sagt, at den begyndte hos Fønikerne, men disse skulle nok bestandig have brugt et lignende Sammenlægningssystem som Ægypterne og de gamle Grækere. Denne Misforståelse skriver sig snarere fra, at en hel Del af de Folk, som optog det ny System og brugte det i omtrent 1000 År, oprindeligt skylder Fønikerne

deres Alfabet. Det er fornemmelig Grækerne, der førte an i denne Henseende; men de bleve efterfulgte af Armenerne og Georgierne, af Kopterne og Ætioperne, af Jøderne og Syrerne.

Det græske Alfabet med de Talværdier, som man fra det 5te Århundrede f. Kr. tillagde hvert af Bogstaverne, er følgende:

α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ		ι	κ	λ	μ	ν	ξ	$\omicron$	π	ρ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90

ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	$\wp$	M
100	200	300	400	500	600	700	800	900	10000

De Bogstaver, der betegne 6, 90 og 900, bruges ellers ikke i det almindelige græske Alfabet, hvis Tegn som sagt skyldes Fønikerne. De 3 nævnte Bogstaver, som Fønikerne brugte som Hviskelyde, havde der imidlertid ikke været Grund til at optage i det græske Alfabet, fordi Sproget ikke havde disse Lyde. Nu bleve de derimod optagne for at udfylde Taltegnene, så at man erholdt 27 forskellige Tegn, nemlig 9 for de 9 Enere, 9 for de 9 Tiere og 9 for de 9 Hundreder. De største Tal skreves først; og man satte en Streg ovenover, for at Tallet ikke skulde ligne et Ord. $\overline{\psi\xi\delta}$ er altså 764. — Vilde man have et Tal foldet med 1000, satte man blot en skrå Streg foran eller under. $\nearrow\theta$ eller $\underset{\cdot}{\theta}$ betyder 9000. $\overline{\pi\rho\chi\epsilon}$ betyder 82605. Dog brugtes også endnu Myriadetegnet med sit Antal ovenover. $\overset{\alpha}{M}\chi\epsilon$ betyder 10025. Senere udelader man ofte Myriadetegnet og sætter blot en Prik. $\lambda\beta.\epsilon\psi\delta$ betyder 325704.

Den Omstændighed, at Bogstaverne i et Ord kunne opfattes som Tal, gav senere hen Anledning til mystiske Betragtninger over, hvad forskellige Ord på en forborgten Måde bar i sit Skjold. Således blev Nilen på Græsk

skrevet med Bogstaver (*νείλος*), der som Tal tilsammen udgjorde 365, så at Nilen og Året måtte have noget med hinanden at gjøre. Man finder derfor undertiden, at Året kaldes Neilos. — Lignende Mysticismer findes hos flere af de Folk, der brugte Bogstaver som Tal.

Denne Talskrivning er ganske vist ofte noget mere kortfattet end den, som den afløste hos Grækerne; men den er dog i mange Tilfælde alt andet end overskuelig. Dertil kommer, at den er meget besværlig at *regne* med, hvad der senere skal vises. Det er derfor mærkeligt nok, at den fik et så udstrakt og langvarigt Råderum. Man har med Grund bemærket, at dens Indførelse snarere skyldes *Afskrivere* end *Regnere* eller Mathe-
matikere.

Ex. Skriv 63792 med græske Bogstaver.

§ 18. Førend Hinduerne opfandt det endelige Talsystem, havde også de brugt flere Systemer, hvori Bogstaver optræde på visse vedtagne Måder som Tal. Og man lavede det ofte så snildt, at sådanne Tal kunde udtales som en Ordlyd, idet man læste Bogstaverne som en samlet Lyd. Derved kunde disse sære Ord anbringes i Vers eller Remser, som knyttede sig til en eller anden Talopgave, og man havde da den Fordel, at de vare lette at lære udenad. Hindufolket havde megen Lyst og Ævne til sådanne Sindrigheder, men da disse hænge på det nøjeste sammen både med Sanskritalfabetet og med Sproget, skal her kunne gives et Exempel på, hvorledes Brugen af Bogstaver i en vis Ordforbindelse kan komme Hukommelsen til Hjælp.

Ex. *Kortkunst*. Idet jeg tilsyneladende uden Orden lægger røde og sorte Kort i en stor Kreds på Bordet, fortæller jeg således: »Et Skib med 15 Kristne og 15 Jøder var i Havsnød, så at 15 måtte kastes overbord. Kaptajnen, der gjerne vilde af med Jøderne, men dog vilde *synes* retfærdig, stillede dem i en stor Kreds og lod så hver 9de kaste ud (ligesom: »El-le tæl-le ni ti du er fri). Han magede det nu så, at alle de 15, der skulde kastes ud, vare Jøder (sorte Kort). — Ved Oplægningen af Kortene kan man be-

nytte sig af Sætningen: »Kom ud med Dampskib paa Eremitagen Fredag«, idet man retter sig efter Selvlydene således, at *a, e, i, o* og *u* gjælder henholdsvis 1, 2, 3, 4 og 5. Man lægger altså vexelvis røde og sorte Kort efter hinanden, nemlig først 4 (Kom) røde Kort, så 5 (ud) sorte, så 2 (med) røde, så 1 (Damp) sorte, osv.

§ 19. En anden mærkelig Måde hos Hinduerne at udtrykke og fastholde Tal på, er følgende. Der er mange Ord, de brugte som Symboler for 1, såsom Måne, Begyndelse, Skaber, Brahma, Form o. fl. Ligeledes havde de Symboler for 2, for 3 osv. Når de nu dannede et Vers eller en Remse, hvori der forekom flere sådanne Symboler, betegnede det første Antallet af Enere, det andet Antallet af Tiere, det tredje Antallet af Hundreder osv., og man kunde således fastholde temmelig svære Tal i Hukommelsen.

Ex. På Dansk vilde man således kunne fastholde Tallet 3,14159265 *) ved Hjælp af Remsen:

*Vognstangen ser jeg og Hjulene rundtom Polarstjernen haste
Menneskehånden dog højest om Skjæbnen kun Terning kan haste,*
når man betænker, at den Vognstang, hvorom her må være Tale, nemlig Karlsvognens, har 3 Stjerner, og Hjulene 4, at jeg er 1. Polarstjernen ligeså, at Menneskehånden er Symbol på 5, at det »højeste« Siffer er 9, at Skjæbnen har 2 Hovedveje (Medgang og Modgang), at Tæringen har 6 Sider, og at Kastningen finder Sted med Fingrene, hvoraf der er 5. — *Det forblommede såvel i Remsens Indhold som i Symbolernes Fortolkning, lå særligt for Hinduerne.*

§ 20. Denne sidste Udtryksmåde, hvor Trintallene ikke nævnes, men simpelthen fremgaa af den Orden, hvori Talsymbolerne nævnes, minder om den af os brugte Talskrivning, hvor det samme finder Sted, idet f. Ex. Tallet 425 indeholder 5 Enere, 2 Tiere og 4 Hundreder, uden at »Enere«, »Tiere« eller »Hundreder« udtrykkelig skrives. Den har ligget så meget nærmere for Hinduerne,

*) Som det senere skal vises, er det dette Tal, hvormed en Cirkels Tværmål skal foldes for at give dens Omkreds. Tallet er så nøjagtigt, at for en Cirkel, der kan omslutte Jordkloden, bliver Beregningen ikke $\frac{1}{4}$ Alen fejl.

som de havde en uafbrudt Trintalrække (§ 8), så at det, så at sige, har været overflødigt at nævne Trintallene, fordi man for hvert nyt Tal, der nævnedes, af sig selv måtte vide, at nu mentes det næste Trintal. Hinduerne have altså i disse to for dem ejendommelige Omstændigheder havt visse Betingelser for den Opfindelse, hvormed de skulde berige Menneskeslægten. Men der manglede dog endnu en Ting, inden Opfindelsen kunde fuldbyrdes, nemlig et Symbol for, at der intet fandtes af de Trintal, hvis Tur det var at blive nævnet. Dette Symbol, Nul, 0, dukker frem i Slutningen af det 6te Århundrede e. Kr., og er med Rette blevet kaldet »en ægte hinduisk Opfindelse«. Hinduernes Grublesyge lod dem snart svælge i det umådeligt Store (§ 8), snart fortabe sig i det tomme (Nirvana [○]), og det er da også ret betegnende, at selve Tegnet for Nul skal være dannet af Begyndelsesbogstavet i det hinduiske Ord for »tom«. Hvilken Mathematiker der har gjort det sidste vigtige Skridt, hvorved vor Talskrivning stod fuld færdig, vides ikke, og dette ligner også Hinduerne, for hvem det almene og abstrakte havde Interesse fremfor den udvortes virkelige Historie. Kun derom kan der ikke tvistes, at med om muligt endnu større Klarhed end den, hvormed Hinduerne *udtalte* store og indviklede Tal, stod blandt dem i Slutningen af det 6te Århundrede Tallenes Symboler færdig skrevne på den beundringsværdig simple og anskuelige Måde, hvorpå de nu forstås og bruges af al Verdens nogenlunde dannede Folkefærd, ja, af Børn og Mennesker, der næppe kunne læse deres Modersmål, skrevne efter *Positionssystemet* (position = Stilling).

Hvad Siffrenes Form*) angår, da var disse hos Hinduerne temmelig afvigende fra vore nuværende Siffer-

*) Der er andre Folkefærd, som have optaget Hinduernes Talskrivning, blot med andre Sifferformer. Kinesernes Mandarintal ere tidligere omtalte (§ 16). Siameserne have andre Sifferformer, men samme System.

former. Det er imidlertid godtgjort, at der er Slægtskab også imellem Formerne, idet arabiske og visse gamle europæiske Taltegn danne Overgangene. Dog ere disse Overgange ikke ganske klart historisk oplyste, og det har i matematisk Henseende mindre Betydning, hvilken Form man giver Symbolerne, end hvilken Symbolik man vælger. Derimod har det matematisk-historisk Interesse at vide, at denne Talskrivning — foruden at den i Mongoltiden gik til Kina (§ 16) — i det 8de Århundrede blev optaget af Araberne. Fra disse gik den i det 12te og 13de Århundrede gennem Spanien op i Vesteuropa og findes f. Ex. hos os i Valdemars Jordebog fra 1250—75. Når vor Talskrivning ofte benævnes som arabisk, da bør herved kun forståes, at Araberne have været Gjennemgangsled.

Foruden, at den hinduiske Opfindelse bringer Klarhed og Oversigt over Talskrivningen, gjør den samtidig Måden så almenlydig, at, selv når man kommer op til så store Tal, at man ikke længere har Trintalnavne, kan Talskrivningen uhindret fortsættes med samme Klarhed op imod det *Uendelige*.

Regning.

§ 21. Allerede ved Dannelsen af Talord, ved Tælning, har Tilbøjelighed til Regning givet sig tilkjende (§ 9); og det kan tilføjes, at i samme Grad som Tallene gennem Ord og Symbol ere blevne Tankens Ejendom, er også Regnekunsten voxet fra at være en udvortes (mekanisk) Handling til at blive Tankens Værk.

Ligesom det endnu ikke kan kaldes Tælning — eller i hvert Fald ikke abstrakt Tælning —, når man f. Ex. med Fingrene (§ 4) giver et Anskuelighedsbillede af, hvor mange

Oxer der findes, således tør det heller ikke endnu kaldes Regning — eller i hvert Fald ikke abstrakt Regning —, når mange Folk i Oldtiden brugte Småsten, Kugler e. l. således, at de ved disses Sammentælling eller Frataëlling fik et Regnestykke udført. Kuglerne kunde være fri (løse) eller på en Snor, eller Snoren kunde selv danne Knuder; og der synes næsten ikke at have været noget regnende Folkefærd i Oldtiden, som har kunnet undvære et af disse Hjælpemidler. At »regne« hed derfor hos Grækerne »psæfizein« af psæfos, en Småsten, og hos Romerne »calculare« af calculus, en Småsten; og der gives endnu i vore Dage Handelsmænd af mindre oplyste Folk, som rejse med en Pose Majskorn til lignende Brug. Kugler på Snor brugte man f. Ex. i Asien, med skiftevis 10 små og 1 stor Kugle, og dør forefandt Korsfarerne dem og optog dem som »Rosenkrandsen«, hvormed endnu Papisterne optælle og fastholde Tallet på deres Bønner. Også hinduiske Bramaner bruge deres Perlekrands ved Optællingen af Guden Visnu's Navne. Endelig brugte man på sine Steder Snore, hvormed man dannede Knuder. De gamle Beboere af *Peru* brugte Snore af forskellig Farve til at betegne forskellige Ting. Den røde Snor betegnede Soldater, den hvide Sølv, den grønne Korn, osv. En Knude dannet ved 1 Slyngning betegnede 10, med 2 Slyngninger 100, med 3 1000 osv., 3 Knuder med enkelt Slyngning 30 osv. Kineserne har i den fjerne Oldtid ikke alene brugt sådanne Knudesnore, men også optegnet dem; men da dette hos Kineserne skete kun ved 2 forskellige Tegn, gav dette Anledning til den af Leibnitz udsprede Misforståelse, at Kineserne skulde have havt et Totalsystem, hvor de to Tegn skulde være vort 1 og 0 (§ 10). Hvis dette havde været rigtigt, vilde Kineserne have havt Æren af Positionssystemet, skjøndt efter Totalsystemet.

§ 22. En Regnemåde, der i alt Fald kan drives til større Kunstfærdighed, og er bleven det i det mindste

hos Grækerne og Romerne og rimeligvis allerede havde været det hos Ægypterne og Babylonierne, er *Fingerregning*.

Grækerne betegnede Enerne ved Hjælp af de 3 yderste Fingre på venstre Hånd, Tierne ved Hjælp af Pege- og Tommelfinger, Hundrederne ved Hjælp af de samme 2 Fingre på højre Hånd og Tusinderne ved Hjælp af de 3 yderste. Man tænke sig, at f. Ex. Pegefingeren kan indtage 3 forskellige Stillinger, strakt, halvlukket og hel-lukket, som vi kunne betegne ved a, b og c, og Tommel-fingeren ligeså, betegnende A, B og C. Da kunne disse to Fingre indtage de 9 fornødne Samstillinger, nemlig: aA, aB, aC, bA, bB, bC, cA, cB og cC. Endnu lettere kan der åbenbart dannes 9 Stillinger af de 3 yderste Fingre; men der kræves et ikke ringe Herredømme over Fingrene for at bringe dem i de rette Stillinger og en ikke ringe Øvelse i at blive fortrolig med disse Symboler. Endvidere er det klart, at Sammentælling og Fratrækning ikke på denne Måde vil foregå slet så mekanisk som ved Brugen af Småsten, men må være ledsaget af visse Tankebevægelser.

Romerne brugte en lignende Fremgangsmåde, og, medens de således kunde fastholde Tallene fra 1 til 9999 betegnede de ved at holde Hænderne højt eller foran Brystet Tallene fra 1 til 9999 Myriader. Der findes endnu Rester af dette gamle Mesterskab, men rigtignok sunket sørgeligt lavt, både i intellektuel og i moralsk Henseende, nemlig det bekjendte Morraspil, der blot går ud på, — idet hver af de to Spillende samtidig stikker Hånden frem med et vist Antal udstrakte Fingre — hvem der da først kan råbe, hvor mange udstrakte Fingre der er på de to Hænder tilsammen, en Leg, som Italienerne drive med Lidenskabelighed, og som ofte ender med et dræbende Knivstik.

§ 23. Besværligheden ved at udføre ganske simple Sammenlægninger og Fratrækninger i Oldtiden følte så

stor, at det ikke alene var mindre udviklede Mennesker og Folk, der betjente sig af materielle Hjælpemidler, som Småsten, Kugler osv.; men næsten alle dannede Oldtidsfolk have brugt en Slags Maskine, som ingenlunde endnu er uddød, nemlig *Regnebrædtet*. Dette var trods Forskjelligheder i det enkelte dog overalt indrettet efter lignende Grundsætninger, som følgende. I en firkantet Ramme er der udspændt et Antal lodrette Stænger, og på hver Stang findes 10 Kugler, der kunne skydes op (til Tælleenden) og ned. Vil man nu med Regnebrædtet sammenlægge to Tal, som

2573

og 4356,

så skyder man først på Tusindstangen 2 Kugler op, på Hundredstangen 5 Kugler op osv., dernæst på Tusindstangen 4 Kugler mere, på Hundredstangen 3 Kugler mere, og nu skulde man på Tistangen skyde 5 Kugler mere, men der gives kun 3. Man skyder derfor disse 3 op, skyder dem alle 10 ned igjen, imod at skyde en Kugle mere op på Hundredstangen, og dernæst endnu på Tistangen de 2 manglende Kugler. Sluttelig skydes 6 Kugler mere op på Enernes Stang.

Sammenlægningen, som rigtignok foregår fra Venstre, er på en Måde en Illustration af den, vi udføre med Tal; men det er forbavsende, at Slægt efter Slægt lige fra det stille Havs Kyst til Middelhavet i Århundreder, ja vist i Årtusinder, og at de store græske Matematikere have kunnet sysle med sådanne Regneoperationer uden at finde på at opskrive Tallene efter det Skema, som Regnebrædtet i Grunden frembød, hvor Enernes Stang gav sine Kugler Værdi som Enere, Tiernes som Tiere osv.; man behøvede jo blot at *skrive* de tilsvarende Siffre på samme Måde ved Siden af hinanden, og, når der da ingen Kugler skulde være på vedkommende Plads, kunde man jo skrive et Tegn for »ingen«. Der var i Virkeligheden ikke mange Skridt til Hinduernes Tal-

system, og dog blev man i Århundreder ved med sin nøjsommelige Talskrivning og dermed følgende Regning selv på Tider, da det, at kunne regne, blev betragtet som en stor og værdifuld Kunst, der f. Ex. gjorde de romerske Landmålere til Potentater.

I den Form af Regnebrædtet, som ovenfor er beskrevet, findes det endnu i næsten enhver russisk Kjøbmandsbod under Navn af *Tschotü*. Otte af Kuglerne ere hvide, men de to midterste på hver Stang sorte, hvilket letter Oversigten. Den franske Officer og Matematiker Ponçelet, der blev fangen under Napoleonskrigen, førte senere Regnebrædtet med sig hjem; det kom således ind i Vesteuropas Børneskoler.

Kinesernes *Suanpan* adskiller sig kun herfra ved, at en Tværstang overskjærer alle Stængerne, og at hver af disse kun bærer 5 Kugler på den ene Side af Tværstangen og to på den anden, idet hver af hine gjælder 1, hver af disse gjælder 5. Øvede Kinesere skulle have en overordentlig Færdighed i at bruge Suanpan, så at de, ligesom en Musiker på et Instrument, skulle kunne gribe hele Tal-Akkorder på en Gang (se Plan I Fig. 12).

1846 fandt man på Salamis en græsk Marmortavle, der er delt i Rubriker, og som har været brugt efter en lignende Grundsætning; thi ved Randen står der nogle Tal, som udtrykke Rubrikernes Betydning. Istedendfor forskydelige Kugler har man brugt Mærker, som man lagde på vedkommende Pladser.

Man er også endnu i Besiddelse af nogle romerske Regnebrædter. Istedendfor de asiatiske Stænger og de græske Rubriker findes her Furer, i hvilke lignende Brikker kunne flyttes som dem, der bruges i de såkaldte Belejringsspil.

Grækerne kaldte Regnebrædtet *Abax*, Romerne *Abacus*. Navne, som visse Sprogmand henhøre til den semitiske Rod Abak, der betyder Støv eller Sand; dog ere ikke alle enige om denne Afledning.

§ 24. Hvor vanskelig en simpel Sammenlægning har været, kan man få en Forestilling om ved at forsøge en sådan med Romertal, såsom:

$$\begin{array}{r} 1473 = \text{MCDLXXIII} \\ 876 = \text{DCCCLXXVI} \\ \hline 2349 = \text{MMCCCXLIX} \end{array}$$

Man må ved Efterregning af dette anstrenge sig for at holde vor sædvanlige Talbetegnelse borte fra Anskuelsen; thi Fristelsen til at omskrive Romertallene påtrænger sig bestandig.

Endnu mere broget måtte en Sammenlægning blive med den græske Talskrivning. Dette ses let ved et så simpelt Exempel som følgende:

$$\begin{array}{r} 345 = \tau\mu\varepsilon \\ 543 = \varphi\mu\gamma \\ \hline 888 = \omega\pi\eta \end{array}$$

Medens vi have nok i den lille Tabel, og det kan betragtes som et tvivlsomt Gode for os at tilegne os den større Tabel, vare Grækerne nødte til enten at lære både Enernes, Tiernes og Hundredernes Tabel, eller at have disse Tabeller ved Hånden eller at bruge Regnebrættet eller en Måde, omtalt i Slutningen af § 25.

Ved de samme Hjælpemidler måtte åbenbart en Fra-trækning fuldfyldes.

§ 25. At *fold* et Tal med et andet faldt naturligvis endnu vanskeligere. Man brugte hertil udførlige Tabeller, og næppe har Mange endog blot kunnet den såkaldte pythagoræiske Tabel, den lille Foldningstabel. Endnu i Midten af det 16de Årh. e. Kr. var man ikke kommen videre i Europa, end at Regnemestre *anbefalede*, at man i *højere Skoler* lærte denne Tabel udenad.

Som Exempel på, hvor møjsommeligt man ellers

hjælp sig, kan følgende nævnes. I et Skrift af 944 e. Kr., som Klerikerne brugte til at beregne Måne-Elementerne og dermed Påsken [⊙], bliver der også givet en Anvisning på Udførelsen af en simpel Foldning, idet Tallet 409 skal tages 15 Fold, eller — med Romertal CDIX skal foldes med XV. Hertil gives der i det nævnte Skrift følgende Anvisning. Først tages CD V Fold, nemlig idet man danner følgende Række CD, DCCC, MCC, MDC, MM. Dernæst skal CD tages X Fold, hvilket bliver MMMM. Ved at tage CD XV Fold må man altså få MMMMMM. Fremdeles får man IX foldet V Gange ved at danne Rækken IX, XVIII, XXVII, XXXVI, XLV; og når IX foldes med X, bliver det XC. Altså vil IX taget XV Fold blive XLV og XC tilsammen, nemlig CXXXV. Således finder man da, at CDIX Gange XV bliver MMMMMMCXXXV.

Og det var ikke blot Præster, der havde sådanne møjsommelige Fremgangsmåder. Matematikeren Eutokios, der i det 6te Årh. efter Kr. skrev om Matematikeren Arkimedes' Skrifter, og, vel at mærke, skrev for Matematikere, finder det fornødent at udføre en Foldning af 265 og 265, og denne Regning ser hos Eutokios således ud. Tilhøjre ses de samme Tal skrevne med vore Siffre, men foldede på Eutokios' Måde, ikke på vor sædvanlige Måde:

$\sigma \ \epsilon \ \epsilon$	200	60	5
$\sigma \ \epsilon \ \epsilon$	200	60	5
$\delta \ \alpha$ $M \ M \ \beta \ \alpha$	40 000	10 000	2000 1000
α $M \ \beta \ \gamma \ \chi \ \tau$	10 000	2000	3000 600 300
$\alpha \ \tau \ \chi \ \epsilon$	1000	300	20 5
ξ $M \ \sigma \ \chi \ \epsilon$	70 000	200	20 5

Regningen er åbenbart udført derved, at 200 først foldes 200 Gange, så 60 Gange og så 5 Gange. Dernæst foldes 60 først 200 Gange, så 60 Gange og så 5 Gange. Og endelig

foldes 5 først 200 Gange, så 60 Gange og så 5 Gange. Hvorledes Udførelsen sker, berettes ikke, men skrevne Tabeller har utvivlsomt været nødvendige.

Græske Mathematikere har dog havt visse Måder, hvorved de undgik for vidtløftige Tabeller. De mærkede sig nemlig, hvilke Enere, Tiere og Hundreder, der svarede til hinanden (vare analoge), såsom α , ι og ϱ (1, 10 og 100) eller β , κ og σ (2, 20 og 200) osv. Når f. Ex. μ (40) og φ (500) skulde foldes, tog Grækerne de analoge δ (4) og ε (5) og foldede dem, hvilket giver κ (20). Derefter siger de: men da det ene var Tiere, det andet var Hundreder, bliver der κ Tusinder, eller β Myriader.

§ 26. Det i § 25 nævnte Klerikerskrift viser endvidere, hvorledes man *deltte* et Tal med et andet. Det gjælder her om at dele 6152 med 15 eller egentlig blot at udfinde, hvad der kommer til Rest. Fremgangsmåden er da denne, at man folder 15 et så stort Antal Gange, at man får omtrent 6152, eller rettere, at man trækker sådanne Mangfold af 15 fra 6152, at man får en Rest mindre end 15. Der gives nemlig Anvisning på at danne Mangefoldene af XV indtil MMMMMM, nemlig: XV, XXX, LX, XC, CXX, CL, CLXXX, CCX, CCXL, CCLXX, CCC, DC, MCC, MD, MDCCC, MMC, MMCD, MMDCC, MMM, MMMMMM; der bliver da af det opgivne Tal MMMMMMCLII til Rest CLII. Herfra skal nu atter trækkes et Mangfold af XV, nemlig XV, XXX, LX, XC, CXX, CL. Således bliver Resten II.

Så vidtløftig end denne Regning er, har man dog kun fundet Resten, medens det endnu ikke er klaret, hvor mange Gange XV så egentlig blev fratrullet. Dette måtte man afgjøre særskilt ved Hjælp af de opskrevne Talrækker, hvis man havde Brug derfor.

§ 27. Det må antages, at det er på lignende Måder, at også mere matematiske Personer i Oldtiden delte et Tal med et andet; men der haves ganske vist kun sparsomme historiske Notitser vedrørende Regningsopera-

tionererne i det Hele taget. Dette hænger sammen med, at man ikke indøvede disse ved Hjælp af skrevne Værker, men ved mundtlig eller personlig Undervisning.

Græske Matematikere have, som vi i et senere Afsnit skulle se, opdaget en Mængde Egenskaber ved Tallene; men de skjelnede skarpt imellem den Lære om Tallene (Arithmetik), som de udviklede, og egentlig Regning (Logistik). Hin var for dem den egentlige Viden-skab, denne var dem snarere en håndværksmæssig eller »købmandsmæssig« Færdighed, ikke værdig til nogen nærmere videnskabelig Beskrivelse eller Behandling; og dette er intet Under; thi de synes virkelig at have fuldbyrdet Regningerne mere ved udvortes (mekanisk eller tabellarisk) Virksomhed end ad Tænkningens Veje; og Hovedgrunden hertil har uden Tvivl de slette Talskrivningsmåder været.

§ 28. Strax efter at *Hinduerne* havde fundet den ny Talskrivning, fandt de på Regnemåder omtrent som dem, der nu bruges Verden over. Nogen Afvigelse fra vore Regnemåder skyldes væsentlig, at de ikke havde så megen Plads, som vi i Reglen have på vort Papir, idet de skrev på en sort Tavle med et Skriverør, hvorudaf der flød en hvid Farve, eller de ridsede i et rødt Pulver, strøet på en hvid Tavle.

Sammenlægning og Fratrækning udførte de fra Venstre til Højre. Kom der en »Mente«, eller skulde der »lånes«, så var det let at udslette det Tal, man allerede havde skrevet, og skrive det påny efter at have lagt »Menten« til eller »lånt« af det; og man kunde da ligeså godt regne fra Venstre som fra Højre.

Exempel herpå kan vanskelig prøves på Papir; men man bør prøve det på Tavlen.

Foldning udførte de på flere Måder, hvoraf 3 skal nævnes, og hvortil den lille Foldningstabel må kunnes.

Skal et flersifret Tal foldes med et enkelt Siffer, anbringer man dette Siffer ovenover Enerens Siffer, og

skriver det udkomne ovenover igjen, idet man begynder *fra Venstre*, og udvisker, hvad man allerede har skrevet, og som skal rettes, når man får en »Mente«, der skal lægges til. Altså (læs nedenfra):

Nr. 3 det udkomne	2259
Nr. 2 det Tal, hvormed der foldes,	3
Nr. 1 det Tal, der skal foldes,	753.

Er det Tal, hvormed der skal foldes, selv et flersiffrigt Tal, sættes det ovenover det, der skal foldes, først således, at dets højest betydende Siffer står over Enerne, og der foldes da med det højest betydende først, således

Nr. 3 det foreløbig udkomne	2259
Nr. 2 det Tal, hvormed der foldes,	32
Nr. 1 det Tal, der skal foldes,	753

Dernæst visker man det Tal ud, der skal foldes, flytter det en Plads tilhøjre og folder det så med det Siffer, der nu står over Enerne, idet man ligeledes begynder fra venstre, lægger det til det foreløbig udkomne, der altså må viskes og rettes. Det ser derefter således ud

Nr. 3 det udkomne	24096
Nr. 2 det Tal, hvormed der foldes,	32
Nr. 1 det Tal, der skal foldes,	753

Således vedblev man at flytte det Tal, der skal foldes, til Højre, dersom det Tal, hvormed der foldes, havde haft flere Sifre; og man får altså altid kun 3 Rækker Tal. Denne Måde kaldtes *Viskemåden*.

Af de to andre Måder stiller den ene større Krav på Tankeanspændelse, den anden derimod mindre. Den første er grundet på den Betragtning, at Enere Gang Enere giver Enere, Enere Gang Tiere såvelsom Tiere Gang Enere giver Tiere, Enere Gang Hundreder, samt Tiere Gang Tiere og Hundreder Gang Enere giver

Hundreder, osv. Når man nu folder to flersifrede Tal, tager man først Enere Gang Enere og nedskriver Tallet, idet man dog muligvis får en »Mente«, der skal tages med ved Tierne. Dernæst udregner man i Hovedet begge de to Sæt Tierne, som fåes ved Foldning, og lægger dem sammen med »Menten« fra Enerne, opskriver deres Siffer og passer på den ny »Mente«, der tælles sammen med de 3 Sæt Hundreder, der ligeledes udregnes i Hovedet, osv. Da her ikke blev udvisket, gav man denne Måde Navn af »at blive stående«.

Ex. Fold de to Tal $\begin{smallmatrix} 516 \\ 7423 \end{smallmatrix}$ med hinanden. Enerne fåes af 6 Gang 3, Tierne af 6 Gang 2 og 1 Gang 3, Hundrederne af 6 Gang 4, 1 Gang 2 og 5 Gang 3, Tusinderne af 6 Gang 7, 1 Gang 4, 5 Gang 2, osv. Man må åbenbart have Tankerne fuldt så anspændte som ved vor sædvanlige Fremgangsmåde.

Derimod krævede *Nætmethode*n mindre Tanke-spænding end vor Måde, men den tog rigtignok mere Plads end de to førstnævnte. De to Tal, der skulle foldes, anbringes foroven af og til Højre for et Næt som følgende således, at Tallet til Højre har det højest betydende Siffer øverst. Man foldede da kun Siffer med Siffer og indskrev det udkomne i de herhenhørende Rubriker således, at Enerne kom nederst til Højre i Rubriken, Tierne øverst til Venstre i Rubriken, og endelig foretog man Sammenlægningen på Skrå nedad mod Venstre, således:

				7	5	6	
				2	1	1	3
				1	5	8	
				1	1	1	2
				4	0	2	
2	4	1	9	2			

Hvorledes Hinduerne efter Talsystemets Opfindelse udførte en Deling af et Tal med et andet, vides ikke med Bestemthed; men når først Foldning går let fra

Hånden, vil en Deling aldrig falde vanskelig, da den kun går ud på at finde et Tal, som ved at foldes med det Tal, hvormed Delingen udføres, giver det andet. Hvad det højest betydende Siffer bliver, kan man i Reglen let skjønne; man folder da Tallet med dette. Skulde det udkomme vise sig større end det Tal, der skal deles, har man valgt hint Trintal for stort. Det må altså vælges mindre, Foldningen udføres, og dersom det udkomme nu ikke er for stort — trækkes det fra det Tal, der skal deles. Man får således en Rest; og nu søges, hvor mange Gange det Tal, hvormed der deles, indeholdes deri, først ved, at det højeste Trintal findes, osv., som før. — Hinduerne synes, efter Arabernes Skrifter at dømme, ikke at have opskrevet de Tal, der efterhånden skulde trækkes fra, men efterhånden at have formindsket det Tal, der skulde deles, ved Udviskning og Rettelse.

Ex Man udregne på den fra almindelig Regning kjendte Måde, hvor mange Gange 243 indeholdes i 78035, og hvad der desuden bliver til Rest, idet den her fremsatte Opfattelse af Delingen fastholdes.

$$\begin{array}{r} 243 \quad 78035 \quad (3(00) \\ 729(00) \quad \text{osv.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 513(5) \\ \text{osv.} \end{array}$$

§ 29. At en Opfindelse eller Opdagelse er af stor Betydning, giver sig gjerne tilkjende, dels derved, at den er simpel, og dels derved, at den åbner Udsigt til nye Områder. Ved Hinduernes ny Talsystem bleve de nu istand til med Lethed og uden Hjælpemidler at udføre Regninger med store og sammensatte Tal; men under Nydelsen heraf har de grublende Hinduer snart lagt Mærke til visse Ejendommeligheder ved Tallene, som alene knytte sig til det ny Talsystem.

Når man deler et hvilket som helst Trintal med 9, vil man altid til Rest få 1; når man deler 2 sådanne med 9, får man til Rest 2, osv., nemlig:

$$9) 100000 \quad (1$$

$$9$$

$$1 \text{ osv.}$$

$$9) 200000 \quad (2$$

$$18$$

$$2 \text{ osv.}$$

$$9) 300000 \quad (3$$

$$27$$

$$3 \text{ osv.}$$

Da nu et eller andet flersiffret Tal består af visse Antal af forskellige Trintal, og hvert af dem ved Deling med 9 giver samme Tal til Rest, vil det flersiffrede Tal ved Deling med 9 give til Rest det Tal, som disse Rester tilsammen blive, altså, hvad Tallets Siffre tilsammen blive, *o: Tværsommen*. Om det just er ganske på denne Måde, Hinduerne have fundet denne Sætning, vides ikke; men kort efter Talsystemets Opdagelse vide de, at *når et flersiffret Tal deles med 9, bliver Resten den samme som Tallets Tværsum*. 9 ind i 2301 må altså give til Rest 6. Er Tværsommen større end 9, vilde man kunne sige det samme; altså for 45382 bliver Resten 22; men da kan 9 åbenbart fratrækkes endnu 2 Gange, og man får så til Rest 4, hvilket man også kunde få ved at sige, at Tværsommen af 22 er 4.

Denne Omstændighed brugte Hinduerne til at gjøre Prøve på, om en Sammenlægning, en Fratrækning eller en Foldning var rigtig udført, idet de dannede Tværsommen såvel af de to Tal, som af det udkomne, og således (måske ved igjen at tage Tværsommen deraf) fik Resten for disse Tals Deling med 9. Da måtte de to Tals Rester ved henholdsvis Sammenlægning, Fratrækning eller Foldning give det udkomnes Rest. Man kan, i Overensstemmelse med Nutidens Måde at opstille Regnestykker på, skrive således:

Sammenlægning.

$$\begin{array}{r} 453208 \dots 22 \dots 4 \\ 71423 \dots 17 \dots 8 \\ \hline 524631 \dots 21 \dots 3 \end{array} \begin{array}{l} > \\ > \\ > \end{array} \begin{array}{l} 12 \\ 3 \end{array}$$

Fratrækning.

$$\begin{array}{rcl}
 453208 & \dots & 22 \\
 71423 & \dots & 17 \\
 \hline
 381785 & \dots & 32 \dots 5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 > 5 \text{ eller} \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 4; \\
 8
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \text{men her er 9 trukket} \\ 1 \text{ Gang for meget} \\ \text{fra; altså ændres} \\ \text{de til} \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 13 \\
 8
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 > 5 \\
 \\
 \end{array}$$

Tænkte man sig nu, at de to Tal, der sammenlægges, ere lige store, da kan man, istedenfor at lægge de to lige store Rester sammen, folde dem med 2. Skulde samme Tal lægges til endnu en Gang, vilde Resten blive foldet med 3, osv. Altså, når et Tal flere Gange skal lægges til sig selv, α : når det skal foldes med et andet Tal, bliver Resten at folde med dette, hvorved man får Resten af det udkomne. Skal således 4318 foldes med 132, vilde Resten af 4318 blive 16 eller bedre 7 og Resten af det udkomne altså 132 Gang 7; men hvad Resten heraf bliver, findes på samme Måde, ved først at finde Resten for 132, nemlig 6. Resten af det udkomne bliver altså 7 Gang 6 eller 42, hvis Rest er 6. Alt dette opskrives simpelt således:

$$\begin{array}{rcl}
 4318 & \dots & 16 \dots 7 \\
 132 & \dots & 6 \dots 6 \\
 \hline
 8636 & & \\
 12954 & & \\
 4318 & & \\
 \hline
 569976 & \dots & 42.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 > 42 \\
 > \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

Altså, skal to Tal foldes, vil det udkomnes Rest for 9 blive det samme, som fåes ved Foldning af Tallenes Rester, om fornødent med gjentagen Deling med 9.

Denne Prøve — Niprøven — sikkrer ikke fuldstændig, at Regningen er rigtig; men er Regningen rigtig, må den slå til.

§ 30. Da et Tal ved at deles med 9 giver til Rest, hvad Tværsummen giver, går 9 op i et Tal, når det går op i dets Tværsum. Man har ofte Brug for at vide

om visse andre Tal gåer op i et Tal eller, hvad der kommer til Rest. For de mindste Tals Vedkommende gives simple Regler.

Da 2 gåer op i 10, vil det gå op i et hvilket som helst Antal Tiere, altså f. Ex. i 42370. *2 må altså i et flersiffreret Tal give til Rest, hvad det giver ind i Enernes Siffer alene.* Ind i 42377 vil 2 således give til Rest 1, da 2 i 7 giver 1 til Rest. 2 gåer op i 1738.

Om 5 kan ganske det samme siges. Ind i 42377 vil 5 altså give til Rest 2, da 5 i 7 giver til Rest 2. 5 gåer op i 1735.

Da 3 gåer op i 9, vil det gå op i et hvilket som helst Antal 9ere. For at få et flersiffreret Tals Rest at vide for 3, vilde man altså kun behøve at spørge om Resten for 9, og dernæst sige 3 ind i denne Rest; men i Henhold til den for 9 kjendte Regel, kan man selvfølgelig kort og godt sige: *3 giver til Rest, hvad det giver ind i Tværsummen.* Ind i 4351 giver 3 til Rest 1. 3 gåer op i 2130.

Da 4 gåer op i 100, vil det gå op i et hvilket som helst Antal Hundreder, altså f. Ex. i 42300. *4 må altså i et flersiffreret Tal give til Rest, hvad det giver ind i det Tal, hvoraf Tierne og Enerne består.* Ind i 42335 vil 4 give til Rest 3, fordi 4 ind i 35 giver 3 til Rest. 4 gåer op i 42344.

Ex. 1. Sammenlæg 71356, 4203 og 15281; træk herfra 61265, og gjør Ni-prøve på det hele.

Ex. 2. Udregn, hvor mange Sekunder der går på et År (365 Dage) og gjør Ni-prøve.

Ex. 3. Hvad giver 2, 3, 4, 5 og 9 hver for sig til Rest i 420519?

Ex. 4. Hvorledes vil man lettest kunne finde, hvad 25 giver til Rest i et mangesiffreret Tal? Og ligeledes hvad 8 giver?

Ex. 5. Af to flersiffrerede Tal med de samme Sifre, men i forskjellig Orden, trækkes det mindre fra det større. Hvilken Rest får det udkomne ved Deling med 9.

Ex. 6. Af to Tal, bestående af de samme Sifre i modsat

Orden, trækkes det mindste fra det største. I det udkomne Tal udslettes et Siffer, hvorefter Tallene har en Tværsam på 25. Hvad må det udslettede Siffer da have været?

Brøk.

§ 31. Medens man ved *Optælling* ser bort fra det Ejendommelige ved hver enkelt (§ 1) og således kommer til de såkaldte »hele Tal«, 1, 2, 3 osv., stiller *Opmåling* en ny Opgave. Her må først vælges en *Målestok*, og man optæller dernæst, hvor mange Gange denne indeholdes i den Gjenstand, der skal måles. Målestokken må selvfølgelig være af samme Art, som det, der skal måles. En Vejlængde kan måles med Alenmål, en Vares Vægt med Pundmål, en Tidsvarighed med Tidssekunden, osv. — Men hvis der ved sådan Optælling bliver noget tilovers, der er mindre end selve Målestokken, og som dog ikke kan lades uændset, bliver Opgaven at betegne dette og benævne det på en bestemt Måde, og tillige således, at denne Betegnelse kan optages i Tanken ligesom de hele Tal, og helst fuldstændig abstraheres (se § 3) fra Sanseverdenen ligesom de hele Tal.

Sådanne Udtryk for noget, der er mindre end 1, *Brøker*, have været brugte i den grå Oldtid. Men det var først langt hen i den historiske Tid, at det endelig lykkedes at finde en lignende klar og simpel Betegnelse med dertil hørende hensigtsmæssige Symboler, som dem, vi ovenfor nåede til for de hele Tals Vedkommende.

§ 32. Også i denne Henseende griber man gjerne fat på en *udvortes* Måde, idet man nemlig danner Underafdelinger af den Ener (Målestok), hvorom Talen er; og ved Valg af Underafdelinger ere oftest udvortes Omstændigheder blevne rådende. Således er det ikke længe

siden, at vi her i Landet havde en Daler, der bestod af 6 Mark, som hver igjen gjaldt 16 Skilling; og endnu har vi en Tønde, der beståer af 8 Skjæpper, hver på 4 Fjerdingskar eller 18 Potter osv., en Alen, der beståer af 2 Fod eller 4 Kvarter, hvert lig 6 Tommer, et Pund, som beståer af 32 Lod eller 100 Kvint osv. osv. — alt sammen Vidnesbyrd om, at særlige praktiske Hensyn have været rådende ved Underafdelingen. Til disse Underafdelinger knytter der sig særlige Navne og særlige Forestillinger. Her er intet Fællesskab i Betegnelsen for Underafdelingerne af de forskellige Enere (Målestokke). Man kan ikke se bort fra Arten og Ejendommelighederne. Man kan ikke abstrahere.

§ 33. Et Exempel på en begyndende Abstraktion findes i Romernes Brøksystem. Fra gammel Tid var den såkaldte *As* en Kobbermønt af et Punds (?) Vægt — Møntfoden eller Enheden. Den deltes i 12 *Unciæ*, hver på 4 *Sicilici* eller på 24 *Scripuli*. Desuden gaves der en Mængde Mønter af forskjellig Værdi, så at man fik følgende Række Navne:

	<i>scripulus</i>	
	<i>dimidia sextula</i> = 2 <i>scr.</i>	
	<i>sextula</i> = 4 —	
	<i>sicilicus</i> = 6 —	
	<i>semuncia</i> = 12 —	
	<i>uncia</i> = 24 —	
<i>sescuncia</i> = 1½ <i>unc.</i>	<i>septunx</i> = 7 <i>unc.</i>	
<i>sextans</i> = 2 —	<i>bes</i> = 8 —	
<i>quadrans</i> = 3 —	<i>dodrans</i> = 9 —	
<i>triens</i> = 4 —	<i>dextans</i> = 10 —	
<i>quincunx</i> = 5 —	<i>dēunx</i> = 11 —	
<i>semis</i> = 6 —	<i>as</i> = 12 —	

Denne Række Underafdelinger, som man således tillagde *As*-mønten, lod man nu gjælde også på andre Enheder, Længdemål, Flademål, Vægt osv., og brugte de samme

Navne på disse, så at Navnene efterhånden gik over til at betyde de tilsvarende Underafdelinger af enhver Enhed. Således kunde Romerne tale om semuncia af en Tomme (hvad vi kalde $\frac{1}{24}$ Tomme) eller septunx ($\frac{1}{12}$) af en Tønde Land; ja, de kunde endog tale om bes af en scripulus ($\frac{1}{3}$ af $\frac{1}{88}$; men disse *Tal*betegnelser eksisterede naturligvis ikke). På en Måde kan man altså nok sige, at Romernes Brøker vare abstrakte Størrelser, anvendelige på alle Enheder og betegnende bestemte Begreber, uden at de behøvede at benyttes til nogen Gjenstand. Men på den anden Side vare disse Underafdelinger af Enheden så vilkårligt valgte, at de kun dårligt egnede sig til at behandles af Tanken. De bleve derfor også mest Gjenstand for Hukommelsen og synes efter Horats [○] at dømme at have været til adskillig Besvær for Skolebørnene, som måtte lære udenad, at, når man f. Ex. fra quincunx trækker uncia, får man triens; men den Omstændighed, at noget så populært som Møntværdierne gav et Holdepunkt for Anskuelsen, har dog rimeligvis lettet Arbejdet en Del. Når man imidlertid skulde udføre Regninger ud over det aller nødtørftigste, måtte man have vidtløftige Tabeller, hvori man f. Ex. kunde finde, at quincunx Gange sescuncia giver semuncia og dimidia sextula og scripulus. I vore Brøkbetegnelser vilde dette hedde $\frac{5}{12}$ Gange $\frac{1}{8}$ er $\frac{5}{96}$; men $\frac{5}{96}$ måtte på Romersk udtrykkes ved $\frac{1}{24}$ og $\frac{1}{44}$ og $\frac{1}{88}$, udtalt ved de angivne Navne.

Det er intet Under, at de romerske Landmålere, der vare istand til at udøve den Kunst at regne med disse Brøker, stod i stor Anseelse. Men det er værd at lægge Mærke til, at et Folk som Romerfolket, der ved det udstrakte Riges Administration havde i høj Grad Brug for en hensigtsmæssig Regnemåde, gennem mange Århundreder måtte nøjes med et så ubehjælpsomt Middel som det her omtalte System, så at det endnu brugtes i det 12te Årh. e. Kr. Dette er et Vidnesbyrd om, at *ud-*

vortes Behov ikke er tilstrækkelig til at fremkalde Opfindelser.

§ 34. At de romerske Brøker — hvor uheldigt de end ere valgte — ere blevne brugte på samme Måde som andre abstrakte Tal, fremgaaer, som allerede omtalt, af, at man f. Ex. kunde folde dem med hinanden. Der bliver nemlig *ingen Mening i Foldning af to Tal med hinanden, når ikke i det mindste det ene er abstrakt*. Man kan tage 12 Oxer 4 Gange; men man kan ikke tage 12 Oxer 4 Heste Gange eller 4 Oxer Gange. Der er Mening i at tage 12 Oxer $\frac{1}{4}$ Gang (nemlig 3 Oxer). Derimod vilde der ikke være Mening i at tage 12 Oxer quadrans Gang, så fremt man ved quadrans forstod Mønten af dette Navn, men kun når quadrans opfattes som et rent Tal, nemlig som det, der ved at tages 4 Fold giver det abstrakte Tal 1.

Dette staaer tidt uklart for Folk, at *Folding af to Tal alene kan finde Sted, når det ene eller de begge ere abstrakte Tal, rene Tal, ubenævnte Tal*. Man kan træffe voxne Menneker, som med megen Undren f. Ex. kunne påtage sig at bevise, at 1 Tønde Rug er det samme som 8 Tønder Rug, og da det således beviste åbenbart er galt, mene de, at man egentlig ikke kan stole på noget somhelst Bevis. Beviset føre de da således. 1 Tønde Rug er lig 8 Skjæpper Rug. Når man nu folder hver af de lige store Ting med sig selv, må man få lige store Ting, og da fåer man — idet man siger: 1 Tønde Gange 1 Tønde er 1 Tønde, og 8 Skjæpper Gange 8 Skjæpper er 64 Skjæpper —, at 1 Tønde Rug er lig 64 Skjæpper Rug, der atter er 8 Tønder Rug. Den falske Slutning ligger i den Tankeløshed, at man skulde kunne folde *benævnte Tal med benævnte Tal*.

Der gives dog enkelte Beregninger, der kunde synes at berettigge til den Opfattelse, at *benævnte Tal* kunne foldes med hinanden. Ved Beregning af Fladefang siger man, som vi senere skulle se, f. Ex. 3 Fod Gange 4 Fod

giver 12 Fladefod (Kvadratfod); men dette er en unøjagtig Udtryksmåde, medens man burde sige: man fåer at vide, hvor stort et *Antal* af Fladefod her findes, ved at folde *Tallet 3* med *Tallet 4*.

Ligeledes beregner man en Bevægelsesmængde i Fysiken til 12 såkaldte Fodpund derved, at man folder *Tallet 3* med *Tallet 4*; men det er de nævnte Discipliners (Landmålingens og Fysikens) Sag at gjøre Rede for, at denne Beregningsmåde er rigtig. Sker denne Redegjørelse forsvarlig, vil det indsees, at Regningen i Virkeligheden finder Sted med *abstrakte Tal*, der kun tilfældigvis ere ligelydende med de benævnte Tal, som have givet Anledning til Opgaven, og det er derfor, at man ved en mindre omhyggelig Udtryksmåde tager sig den Frihed at sige: Fod Gange Fod giver Fladefod. Herom mere på sit Sted (§ 65).

§ 35. Noget, der tillige kan indvendes mod det romerske Brøksystem, er, at Brøknavnene ere dannede efter forskjellige Grundsætninger. Således er triens ($\frac{1}{3}$) dannet af Talordet 3 (på Latin tres); og Meningen hermed er, at triens er *en sådan, hvoraf 3 udgjør en hel*. Derimod er quicunx ($\frac{1}{12}$) dannet af Talordet 5 (på Latin quinque); og Meningen hermed er, at en quincunx *består af 5 uncia*. Denne Omstændighed har rimeligvis ikke virket klarende på Opfattelsen.

§ 36. Går man længere tilbage i Tiden, træffer man på en mere gennemført Tankegang, således først hos Ægypterne. Disse havde en Række Brøker, der bar Navne, svarende til de danske: en halv, en Trediedel, en Fjerdedel, en Femtedel ... osv., idet alle Ordene — undtagen som hos os »halv« — ere dannede af Talordene 3, 4, 5 osv. og betegne, at der af Trediedele går 3 paa en hel, af Fjerdedele går 4 på en hel osv. Sådanne Brøker (vi kalde dem Stambøker og skrive dem i vore Dage således $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$) skrev Ægypterne ved at sætte en Prik over det tilsvarende hele Tal, altså,

hvis man dertil brugte vore Sifferformer: 5 6 7 ...; kun for de første tre Brøker, nemlig for $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ havde de nogle særlige Tegn, der ikke ses at være dannede af Tegnene for 2, 3 4. Foruden alle disse Brøker havde Ægypterne endnu kun én, som ikke kan kaldes Stambrøk, nemlig, hvad vi kalde to Trediedele. Den havde sit særlige Navn og Tegn, som hverken synes at vedkomme Tegnet for to eller tre.

Derimod havde Ægypterne ingen Brøk, svarende til vor sædvanlige Brøkform, f. Ex. som $\frac{5}{12}$. Dette udtrykte de på en Måde, der i vort Skriftsprog vilde være $\frac{1}{3} \frac{1}{12}$.

Ægypterne have åbenbart nedlagt et stort Arbejde i Behandlingen af disse Brøker, som de have havt megen Brug for i de bevægede og på sin Vis velordnede ægyptiske Samfundsforhold [○]. Der gives endnu et gammelt Papyrushåndskrift [○], som under Navn af det Rhindske Papyrus (efter dets forrige Ejer) opbevares i Britisk Musæum i London. Det er rimeligvis forfattet c. 1700 f. Kr. af Ahmes og er en Slags Regnebog, vist bestemt for viderekomne; thi den indeholder ikke synderligt om hele Tal, hvorimod om Brøker, men synes nærmest at have været en Samling af 79 Opgaver til Øvelse under en iøvrigt mundtlig Vejledning, skjøndt den begynder med de store Ord: »En Forskrift til at komme til Kundskab om alle dunkle Ting . . . alle Hemmeligheder, som ligge skjulte i Tingene«.

At dele en Gjenstand i et vist Antal ligestore Dele har uvitvlsomt været en vigtig Opgave for Ægypterne. Når 1 skal deles lige mellem 7, får hver netop Brøken $\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{7}$. Men når f. Ex. 9 skal deles imellem 7, får hver af disse for det første 1, og dernæst er der 2 til Deling imellem de 7. Dette vilde vi kalde, at hver skulde fremdeles have $\frac{2}{7}$; men en sådan Brøk havde Ægypterne ikke; og Ahmes' Regnebog indeholder derfor en Tabel, som skal tjene til at give Besked om, hvor meget hver

Del bliver, når 2 deles mellem 3, eller når 2 deles mellem 5, eller mellem 7, osv., lige til når 2 deles mellem 99. Således viser Tabellen f. Ex.:

.....
2 delt mellem 7 giver $\frac{1}{4} \frac{1}{28}$
.....
.....
2 > > 33 > $\frac{1}{22} \frac{1}{66}$
.....
2 > > 41 > $\frac{1}{24} \frac{1}{246} \frac{1}{328}$
OSV.

Tabellen angiver derimod ikke — og behøver ikke heller at angive —, hvad hver Del bliver, når 2 deles imellem 4, 6, 8, 10, 12 osv., thi når 2 deles mellem 12, bliver hver Del selvfølgelig det samme, som når 1 deles mellem 6, nemlig $\frac{1}{6}$ eller $\frac{1}{6}$. Ved Hjælp af den nævnte Tabel kan man nu dele et hvilket som helst Tal mellem et forskjelligt Antal lige til 99. Skal f. Ex. 3 deles mellem 41, så siger Tabellen, hvad hver Del vilde blive, hvis det var 2, der skulde deles, nemlig $\frac{1}{24} \frac{1}{246} \frac{1}{328}$, og den tredie, der skal deles mellem 41, giver simpelthen $\frac{1}{41}$, altså bliver hver Del, når 3 deles mellem 41, $\frac{1}{24} \frac{1}{41} \frac{1}{246} \frac{1}{328}$. Var det 4, der skulde deles mellem 41, bliver der dobbelt så meget som, når 2 skulde deles mellem 41, altså dobbelt så meget som $\frac{1}{24} \frac{1}{246} \frac{1}{328}$, altså som 2 delt mellem 24 og 2 delt mellem 246 og 2 delt mellem 328, hvilket bliver $\frac{1}{12} \frac{1}{123} \frac{1}{164}$.

Vi skulle ikke fordybe os i Spørgsmålet om, hvorledes Ægypterne fra først af kunne have fundet Tabellens Indhold, f. Ex. at, når 2 deles mellem 41, bliver hver Del $\frac{1}{24} \frac{1}{246} \frac{1}{328}$ osv. Men Tabellen er rigtig, og man må indrømme, at de på en fuldkommen rigtig Måde have behandlet deres Brøker ved Hjælp af denne Tabel; men man ser tillige, at det er et overordentlig ubehjælpsomt System, hvis kunstige Behandling nok har kunnet lægge

Beslag på den vel organiserede Arbejdskraft, som Præsteskaberne [○] sad inde med.

Ex. 1. Hvorledes vilde Ægypterne udtrykke $\frac{1}{14}$; og hvorledes $\frac{1}{12}$?

Ex. 2. Hvad får man, når man lægger disse Brøker sammen efterat have skrevet dem på Ægyptisk, men med vore almindelige Siffre.

§ 37. Også Grækerne brugte mest Stambroker, som de skrev ved at sætte et Mærke foroven tilhøjre ved de tilsvarende hele Tal, så at, medens γ betyder 3, δ 4 og ϵ 5, skal γ' betyde $\frac{1}{3}$, δ' $\frac{1}{4}$ og ϵ' $\frac{1}{5}$ osv., medens $\xi\delta$ betyder 64, må $\xi\delta'$ betyde $\frac{1}{64}$; $\rho\alpha\alpha'$ er $\frac{1}{121}$; men Grækerne fik senere Brøker, der lignede vore nuværende; herom mere i det følgende.

Stambroker kræve for at kunne bruges — hvad også Ahmes' Regnebog, som sagt, indeholder — nødvendigvis Tabeller til de fleste Regningers Udførelse; og der er ingen Tvivl om, at Grækerne ligesom Ægypterne have brugt sådanne Tabeller. Disse Oldtidsfolk udførte således Regnearbejder, der i Vanskelighed kunne stilles ved Siden af dem, som i vore Dage den regnende Matematiker udfører med sine Logarithmetabeller. Men herved bliver det des mere iøjnefaldende, at vi ere i lykkelig Besiddelse af et langt hensigtsmæssigere Værktøj for Tanken i de nuværende Brøker, hvormed Børn kunne udføre Regninger uden Hjælp af særlige Tabeller. Inden vi imidlertid gå til disse Brøker, ville vi først betragte en anden af Oldtidens Brøkformer, som endnu ikke er gået af Brug. Denne Form synes at have havt sin Oprindelse i Egnen ved Eufrat og Tigris.

§ 38. Babylonierne have fra gammel Tid, rimeligvis allerede et Par Tusinde År før vor Tidsregnings Begyndelse, havt en gennemført *Inddeling i 60 ligestore Dele*, medens de på den anden Side sammentalte i Grupper på 60. Ligesom også vi have et Navn på 60, et Navn, som ikke egentligt er et Talord, nemlig Skok, således havde Babylonierne på 60 Navnet *Sossos* og på

60 Sossos eller 3600 Navnet *Saros*, Navne, der heller ikke vare egentlige Talord. Om de atter havde Navn på 60 Saros osv., vides ikke, men de brugte i hvert Fald store Talangivelser, ganske som om de havde det.

At man har kunnet finde på at bruge Tallet 60 som et Slags Trintal, kunde synes at have nogen Støtte i den menneskelige Tilbøjelighed til at bruge Tallet 12 (§ 11). 12 Gange 5 er 60; og 12 Gange 10 eller 120 er også et Tal, der f. Ex. er blevet brugt af vore Fædre (§ 10). Men der er forøvrigt al Rimelighed for, at Babylonierne 60 skriver sig fra deres astronomiske Arbejder, hvorfor de roses af græske Forfattere, og hvorom de i den nyere Tid gjorde, interessante Fund af Lertavler m. m. [⊙] give et uomstødeligt Vidnesbyrd.

Året er med runde Tal 360 Dage. I denne Tid går Solen tilsyneladende en Gang rundt iblandt de Stjerner, der danne den såkaldte Dyrekreds eller Ekliptika [⊙]. Solen synes altså daglig at gå omtrent $\frac{1}{360}$ af en Cirkels hele Omkreds. De delte derfor enhver Cirkelomkreds i 360 lige store Dele, hvad vi endnu gjøre, efter dem. Hver af disse Dele kaldes en Grad og skrives således: 1°. — Når man tager en Passer og med denne tegner en Cirkel, vil det Mål, der findes mellem Passerspidserne netop slå til, til at Passeren i 6 Skridt går Cirkelomkredsen rundt (herom mere senere). Hvert Skridt eller den Passeråbning, der har frembragt Cirklen, må altså netop spænde over 60°; og det skal være denne Omstændighed, der har ført Babylonierne til også at dele andre Enheder i 60 ligestore Dele, så at de fik en på forskellige Områder (Mål, Vægt, Tid osv.) gennemført Inddelingsmåde. En Grad delte de atter i 60 Minuter (skrives 60'), en Minut i 60 Sekunder (skrives 60''), en Sekund i 60 Tertier (60''') osv. Denne Inddeling, navnlig af Cirklen i 360 Grader, hver på 60 Minuter, hver på 60 Sekunder, har holdt sig lige til vore Dage. Også i Tidsregningen gjenfindes den endnu, om end i

noget ændret Form, idet vor Dag (og ligeså Natten) deles i 12 Timer, medens Babylonierne skulle have delt Dagen i 60 Timer, en Inddeling, som rimeligvis er gået til Hinduerne, hvor den i hvert Fald fandtes og har holdt sig lige til vore Dage, idet man kan træffe på Vanduhre*), der vise $\frac{1}{60}$ af Dagen.

Denne Inddeling af Enheden i 60 osv. synes altså ligesom Romernes Inddeling at være knyttet til den udvortes Natur, om end til mindre håndgribelige Ting (Solens daglige Vej); men det viser sig også, at den blev brugt ikke alene overfor andre Enheder, men overfor det rene Tal 1, så at vi også her have med virkelige Brøker at gøre, der ikke blot kunne behandles ved Sammenlægning og Fratrækning, men også ved Foldning (og dette er Vidnesbyrd om, at de vare virkelige Brøker (§ 34)), og ved Deling. Når disse Brøker bruges som rene Tal, betegner 1^0 Tallet 1, $1'$ altså $\frac{1}{60}$, $1''$ bliver $\frac{1}{3600}$ osv. Regningerne fremtræde her med større Simpeltid og Anskuelighed end ved de tidligere omtalte Brøker. Grader lægges til Grader, Minuter til Minuter osv.; og udgjøre Minuterne mere end 59, gjøres de til Grader og Minuter. På tilsvarende Måde sker Fratrækning; men skal et større Antal Minuter trækkes fra et mindre, »låner« man en Grad, som er 60 Minuter, osv. ligesom vi ved anden Fratrækning »låner 1, som er 10«. Ved Foldning vil man let indse, at Grader Gange Grader giver Grader (3: Hele Gange Hele giver Hele), medens Grader Gange Minuter giver Minuter. Således 3^0 Gange $12'$ giver $36'$ (3: 3 Gange $\frac{1}{60}$ giver $\frac{3}{60}$, jfr. § 44). Ligeledes vil Grader Gange Sekunder give Sekunder. End-

*) Et hinduisk Vanduhr er dannet som et Stykke af en Hulkugle af Kobber, der sættes på Vandet at sejle ligesom en Båd. Gennem et nålesint Hul siver Vandet ind og bringer i Løbet af $\frac{1}{60}$ Dag Skålen til at synke med et lille Kladsk, idet Vandet slår sammen over den.

videre vil Minuter Gange Minuter give Sekunder, f. Ex. $15'$ Gange $3'$ giver $45''$ (o: $\frac{15}{60}$ Gange $\frac{3}{60}$ giver $\frac{45}{600}$, jfr. § 46). Minuter Gange Sekunder giver »Tertier«, nemlig $15'$ Gange $3''$ giver $45'''$ (o: $\frac{15}{60}$ Gange $\frac{3}{600}$ giver $\frac{45}{216000}$), osv. Er man først fortrolig med disse Regler, vil man let kunne udføre Regning med sådanne Brøker, hvilket fåer en Del tilfælles med de vante Regninger med Tønder, Skjæpper, Fjerdingskar e. l.

Ex. 1. Hvorledes skrives $4\frac{2}{3}$ på Babylonisk (men med vore Siffrer); og hvad er $1^\circ 12' 30''$ udtrykt ved almindelig Brøk.

Ex. 2. Læg $1^\circ 12' 30''$ sammen med $3^\circ 9' 42''$.

Ex. 3. Træk $1^\circ 12' 30''$ fra $3^\circ 9' 42''$.

Ex. 4. Fold $6^\circ 54'$ med $2^\circ 15'$.

Ex. 5. Del $6^\circ 54'$ med $2^\circ 15'$.

Dette Brøksystem blev omtrent 200 År f. Kr. optaget af græske Mathematikere og Astronomer i Alexandria. Det er dette Brøksystem, der hovedsagentlig blev anvendt i videnskabelige Skrifter i Europa lige til hen i det 16de Årh. Navnet Minut, Sekund, Tertie osv. skriver sig fra latinske Værker, hvori disse Brøker bleve kaldte »partes minutæ primæ«, »partes minutæ secundæ«, »partes minutæ tertie«, osv.

§ 39. Ved Siden af dette ældgamle og i Virkeligheden meget brugelige System, findes også hos græske Mathematikere et andet, som dog blev meget mindre brugt, nemlig et, som i Virkeligheden er det samme som det, der bruges i vore Dage, om end i en lidt anden Form. Hvad vi skrive som $\frac{5}{8}$ skrev de $\frac{58}{100}$, eller rettere med græske Taltegn, $\epsilon\eta$; hvad vi skrive $\frac{15}{64}$, skrev de $\frac{1564}{10000}$, eller egentlig $\epsilon\theta$. Denne Skrivemåde er i Virkeligheden ligeså god som vor, måske endog nærmere i Overensstemmelse med vor sædvanlige Skrivning. Hvad forstår man nemlig ved $\frac{5}{8}$? Der er tidligere gjort Rede for, hvad der forstås ved $\frac{1}{8}$, en Ottendedel, nemlig en sådan Del, som fåes, når 1 deles ligeligt mellem 8. En sådan Del kan betragtes som en Slags Ener, ligesom

Babyloniernes Minut, og der kan nu gives et vist Antal af dem, f. Ex. 5. Man har altså et vist Antal af en vis Slags, nemlig 5 Ottendedele, ligesom man kan have 5 Kvint. At man ved en talmæssig Opskrivning af dette vil bruge både 5-tallet og 8-tallet, er ganske rimeligt; men skulde man gå frem efter, hvad der kunde synes rimeligst, så måtte det ske ved at lade 5-tallet beholde den vanlige Plads i Linien; thi 5-tallet skal betegne, at der er 5 af en vis Slags; 5 er det egentlige Antal eller Tal; og derimod burde 8-tallet have en noget afvigende Stilling eller Betegnelse; thi det skal ikke betegne, at der er 8 af en vis Slags, men kun antyde *Arten* af dem, hvoraf der er 5, nemlig den Art, som opstår, når 1 deles ligeligt mellem 8. Formen 5^8 for 5 Ottendedele vilde altså i og for sig være meget træffende og har på sin Vis nogen Lighed med den babyloniske $5'$ for 5 Minuter, idet her Minuttegnet blot er Stedfortræder for 60; men når vi dog ikke fastholde den græske Form og ikke her ville indøve Brøker under denne, så er det, fordi man senere har taget denne Form i Brug som Udtryk for noget ganske andet; herom senere.

Hos Hinduerne træffe vi den samme Slags Brøker, men under Formen $\frac{5}{8}$, hvis den blev skrevet med vore Siffrer. På samme Måde træffes Brøker hos Araberne; og hvis der da tillige fandtes hele, f. Ex. $7\frac{5}{8}$, skrev de det $\frac{7}{8}$. Hvis der derimod ikke var Hele, skrev Araberne et Nul på de Heles Plads; altså $\frac{0}{8}$ betyder $\frac{5}{8}$. Selve Brøkestregen dukker først frem omtrent År 1200 hos en Mathematiker ved Navn Leonardo af Pisa.

Når vi herefter skrive 5 Ottendedele således $\frac{5}{8}$, så må det altså erindres, at denne Skrivemåde er en ren vilkårlig Vedtægt, at det egentlige *Tal* er 5, som derfor også kaldes *Tælleren*, medens 8 kun antyder *Navnet* på dem, hvoraf der er 5; og 8 kaldes derfor *Nævneren*. Medens 5-tallet altså kan behandles på tilsvarende Måder,

som f. Ex. 5-tallet i 5 Kvint eller 5', må 8-tallet snarere behandles på en Måde, der ligner Behandlingen af Kvint-betegnelsen eller Minutbetegnelsen. Under dette Synspunkt ville vi betragte de Regler for Brøkrekning med dette System, der efterhånden have udviklet sig, og som i det Væsentlige ere følgende.

§ 40. *Sammenlægning og Fratrækning* af Brøker falder meget simpel, dersom de have samme Nævner, ens Benævning; thi Regningen udføres da med de egentlige Tal, det vil sige Tællerne, medens Navnet skrives til, på den en Gang vedtagne Måde. Ligesom 5 Kvint og 3 Kvint er 8 Kvint, saledes må $\frac{5}{11}$ og $\frac{3}{11}$ være $\frac{8}{11}$; og på tilsvarende Måde må $\frac{3}{11}$ fra $\frac{5}{11}$ være $\frac{2}{11}$.

Have Brøkerne derimod forskjellig Nævner, kunne de i denne Skikkelse ikke lægges sammen eller trækkes fra hinanden; thi de Tal, man har med at gjøre, ere da af forskjellig Art, og ligesålidt, som der vilde være Mening i at lægge 5 Alen til 7 Pund, er der Mening i at lægge 5 Ottendedele til 7 Fireogtyvendedele. Var Talen imidlertid om 5 Lispund og 7 Pund, vilde disse ganske vist heller ikke ligefrem kunne tælles sammen; men da vilde man istedenfor 5 Lispund kunne sætte 80 Pund, og derefter er Sammenlægningen mulig (87 Pund). Man siger, at 5 Alen og 7 Pund ere *uensartede*, og disse kunne end ikke ved Omformninger lægges sammen eller trækkes fra hinanden. Derimod ere 5 Lispund og 7 Pund *ensartede*, men ikke *ensbenævnte*. Dette blev først Tilfældet, da man istedenfor 5 Lispund satte 80 Pund. Da kunde de 80 Pund og 7 Pund lægges sammen eller trækkes fra hinanden. Ensartede ere imidlertid også 5 Ottendedele og 7 Fireogtyvendedele, forsåvidt de begge ere rene Tal, eller begge betegne Brøkdele af samme Ting; det gjælder da blot, om man kan skaffe dem samme Benævning, samme Nævner.

§ 41. Vi stå her overfor en Opgave, der er af stor Vigtighed ved Regning med denne Slags Brøker,

navnlig ved Sammenlægning og Fratrækning, hvor det altså gjælder om at kunne forandre en Brøks Nævner uden at forandre Brøkens Værdi.

Man kan i al Almindelighed sige: Når en Brøks Nævner gjøres et vist Antal Gange større, bliver hver af Smådelene ligeså mange Gange mindre. Følgelig må deres Antal (nemlig Tælleren) gjøres ligeså mange Gange større. Med andre Ord *Nævneren og Tælleren kunne foldes med et og samme Tal, uden at Brøkens Værdi forandres.*

Har man f. Ex. Nævneren 8, men foretrækker Nævneren 24, da vil hver af Fireogtyvendedelene åbenbart være 3 Gange så små som Ottendedelene, altså må der blive 3 Gange så mange af dem, 3: Tælleren bliver 3 Gange så stor.

Når man på den anden Side ikke vil bruge så små Dele, som Nævneren bestemmer, men f. Ex. 3 (eller et andet Antal) Gange større Dele, så at Nævneren bliver 3 Gange mindre, da blive Smådelene slæde sammen 3 og 3, og der bliver altså 3 Gange færre Dele, så at Tælleren også bliver 3 Gange mindre. Med andre Ord *Nævneren og Tælleren kunne deles med et og samme Tal, uden at Brøkernes Værdi forandres.* Dette kaldes at forkorte Brøken.

Ex. 1. Hvilken Brøk er størst: $\frac{3}{8}$ eller $\frac{4}{7}$?

Ex. 2. Hvilken Brøk er størst: $\frac{7}{11}$ eller $\frac{24}{34}$?

Ex. 3. Forkort Brøkerne: $\frac{11}{16}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{16}{28}$ og $\frac{22}{31}$; Sætningerne fra § 30 bruges.

§ 42. Når Brøker skulle sammenlægges eller trækkes fra hinanden, gjælder det, som i § 40 vist, altså først om at skaffe dem fælles Nævner, Fællesnævner (Generalnævner). Dette sker derved, at man folder hver af dem i Tæller og Nævner (§ 41) med et sådant Tal, at de derved alle få samme Nævner; og dette kan altid lade sig gjøre. Det vilde i alt Fald altid finde Sted, dersom

man foldede hver Brøks Tæller og Nævner med alle de andre Nævner; thi da vilde alle Brøkerne til Nævner have, hvad der fåes ved Foldning af alle Nævnerne; men man kan ofte nøjes med en mindre Fællesnævner. Således ville $\frac{3}{8}$ og $\frac{5}{12}$ ikke behøve at få Nævneren 96, men ville kunne nøjes med Fællesnævneren 24, hvorved de ændres til $\frac{9}{24}$ og $\frac{10}{24}$.

Hvad Fællesnævneren må være, findes ved at opløse Nævnerne i sådanne Tal, som de ved Foldning kunne tænkes opståede af. 8 kan opløses i 2 Gange 2 Gange 2, og 12 i 2 Gange 2 Gange 3. Når ingen af disse kan forsvinde ved Forkortning, må Fællesnævneren indeholde 2 og 3 i så stort et Antal, som de findes i den Nævner, hvor der er flest af dem. Altså må Fællesnævneren være 2 Gange 2 Gange 2 Gange 3 eller 24. — Dernæst må hver Brøks Tæller og Nævner foldes med de Tal, der findes mere i Fællesnævneren end i deres egen Nævner, hvilket forøvrigt er det samme som fåes, når Fællesnævneren deles med Brøkens Nævner.

Ved praktisk Regning opstiller man gjerne Opgaven på lignende Måde som følgende. Brøkerne $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{10}$ og $\frac{2}{15}$ skulle sammenlægges. Man opskriver da *Nævnerne* og prøver sig frem, om de ere delelige med de små Tal: 2, 3, 5, 7 osv., og sådan Deling udføres i alle de Tal, hvor den er mulig, altså:

$$\begin{array}{r}
 2) \ 5 \ - \ 12 \ - \ 10 \ - \ 15 \\
 2) \ 5 \ - \ 6 \ - \ 5 \ - \ 15 \\
 3) \ 5 \ - \ 3 \ - \ 5 \ - \ 15 \\
 5) \ 5 \ - \ 1 \ - \ 5 \ - \ 5 \\
 \hline
 1 \ - \ 1 \ - \ 1 \ - \ 1
 \end{array}$$

Dernæst dannes Fællesnævneren ved Foldning af de således udskildte Tal: 2, 2, 3, 5. Den bliver her 60.

Man opskriver dernæst Brøkerne i en Række lodret

under hinanden. I næste lodrette Række skriver man det Tal, hvormed Brøken i Tæller og Nævner skal foldes; og i tredje lodrette Række skrives, hvad Tælleren derefter må blive. Nævneren behøver jo ikke at skrives. Den er ens for alle. Man lader den gjerne trone ovenover.

		60	
		—	
$\frac{1}{5}$	—	12	— 12
$\frac{5}{12}$	—	5	— 25
$\frac{1}{10}$	—	6	— 6
$\frac{2}{15}$	—	4	— 8

De ændrede Tællere blive altså ialt 51 og Brøkerne tilsammen altså $\frac{51}{60}$, der kan forkortes $\frac{17}{20}$.

Ex. 1. Læg $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ og $\frac{1}{5}$ sammen.

Ex. 2. Træk $\frac{2}{5}$ fra $\frac{3}{10}$.

Ex. 3. Læg $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$ og $\frac{1}{45}$ sammen og træk derfra $\frac{2}{9}$ og $\frac{7}{30}$.

§ 43. Et vist Antal Hele tilligemed en Brøk kaldes et *blandet Tal*. Det kan betragtes som to Brøker med forskjellig Nævner, idet de Hele ere Enere og altså have Nævneren 1, skjøndt denne ikke skrives. $2\frac{3}{4}$ kunde nemlig skrives 2 Enere og 3 Fjerdedele eller $\frac{2}{1}$ og $\frac{3}{4}$; og disse Brøker kunne altså sammenlægges på den omtalte Måde. Men da de Heles Tæller er større (eller i alt Fald lig med) Nævneren, vil efter Sammenlægningen Tælleren være større end Nævneren, f. Ex. $\frac{8}{4}$ og $\frac{3}{4}$ giver $\frac{11}{4}$. Brøken kaldes da en *uægte Brøk*, som Modsætning til de almindelige Brøker, hvor Tælleren er mindre end Nævneren, og som kaldes *ægte Brøker*.

I Almindelighed falder det bekvemmest, at der angives, dels hvor mange Hele der er, dels hvor stor en (ægte) Brøk der desuden findes (blandet Tal); men undertiden er det bekvemmest at angive under ét Navn (f. Ex. som Fjerdedele), hvor mange Dele der ialt findes.

Ex. 1. Udtryk $4\frac{2}{3}$ som en uægte Brøk.

Ex. 2. Udtryk $\frac{47}{6}$ som et blandet Tal.

Ex. 3. Læg $2\frac{1}{3}$, $\frac{3}{20}$, $3\frac{7}{10}$, $1\frac{5}{8}$ og $4\frac{2}{7}$ sammen, træk derfra $6\frac{9}{35}$ og $2\frac{1}{8}$, og udtryk det udkomne ved en enkelt Brøk.

§ 44. En Brøk *foldes* ligesom et andet Tal, det vil sige: Brøken Tal eller Tæller foldes, og dens Navn eller Nævner forandres ikke. 3 Syttendedele taget 4 Gange er 12 Syttendedele, ligesom 3 Pund taget 4 Gange er 12 Pund. 4 Gange $\frac{3}{17}$ er $\frac{12}{17}$.

En Brøk foldes ved, at dens Tæller foldes.

Selv om Brøken ikke kunde forkortes forinden, kan det hænde, at den kan forkortes efter Foldningen (10 Gange $\frac{2}{15}$ er $\frac{20}{15}$ eller $\frac{4}{3}$); ja, det kan hænde, at hele det Tal, hvormed der er foldet, kan forkortes bort. Dette vil åbenbart kunne ske, hvis dette Tal kan gå op i Nævneren, og der vil da udkomme det samme, som om man istedenfor at folde Tælleren strax havde *delt Nævneren med Tallet*, 5 Gange $\frac{2}{15}$ vilde ved Foldning af Tælleren blive $\frac{10}{15}$, ved Deling i Nævneren $\frac{2}{3}$, altså det samme.

Ex. Hvad er 5 Gange $\frac{1}{18}$, ligeså 8 Gange $\frac{1}{18}$ og endelig 9 Gange $\frac{1}{18}$?

§ 45. Når en Brøk skal *deles* med et Tal, kan man beholde samme Tæller, samme *Antal* Dele, men Delene må da blive så mange Gange mindre som det Tal, hvormed der deles, det vil sige: dets Nævner gjøres så mange Gange større. Når 5 Syvendedele skulle deles med 3, kan man bibeholde 5 Dele, men de blive nu 3 Gange mindre, det vil sige, de blive Enogtyvendedele. $\frac{5}{7}$ delt med 3 er $\frac{5}{21}$.

En Brøk deles derved, at dens Nævner foldes.

Hvis Tallet tilfældigvis kunde gå op i Brøken Tæller fortrækker man, hvad man ifølge Brøken Natur også kan, at *dele Tælleren med Tallet*. 6 Ellevtedele delt med 3 blive 2 Ellevtedele. $\frac{6}{11}$ delt med 3 er $\frac{2}{11}$.

Ex. Del $\frac{3}{7}$ med 5, med 6 eller med 9?

§ 46. At folde en Brøk ($\frac{2}{7}$) med en Stambrøk ($\frac{1}{4}$) må betyde at dele Brøken i såmange (4) lige store Dele, som Stambrøkens Nævner angiver. Dette sker (§ 45) ved at folde Brøkens Nævner med Stambrøkens Nævner. $\frac{2}{7}$ Gange $\frac{1}{4}$ er $\frac{2}{28}$.

Skal en Brøk nu foldes med en anden Brøk, måtte man, efter først at have foldet med den sidste Brøks Stambrøk, tage det udkomne så mange Gange, som den sidste Brøks Tæller angiver, $\circ$: folde det udkomne med denne Tæller. Ved at folde $\frac{2}{28}$ med $\frac{3}{4}$, vilde man først kunne folde $\frac{2}{28}$ med $\frac{1}{4}$, altså $\frac{2}{56}$, og dernæst folde dette med 3, altså $\frac{1}{8}$. *To Brøker foldes altså ved, at Tællerne foldes med hinanden og Nævnerne ligeså.*

Ex. Fold $\frac{2}{28}$ med $\frac{3}{4}$ og det udkomne med $\frac{1}{8}$.

§ 47. Dersom man skal dele en Brøk ($\frac{2}{7}$) med en anden Brøk ($\frac{3}{4}$), men i det Sted deler med dennes Tæller (3), har man delt med et Tal, der er så mange Gange for stort, som den sidste Brøks Nævner (4); og man må da til Gjengjæld folde det udkomne med denne Nævner. Altså vil den første Brøk blive at dele med den andens Tæller, men at folde med den andens Nævner. $\frac{2}{7}$ delt med $\frac{3}{4}$ vil være: $\frac{2}{7}$ delt med 3, men foldet med 4, hvilket bliver det samme som $\frac{2}{7}$ Gange $\frac{1}{3}$. Dette kan også udtrykkes således: *en Brøk deles med en anden derved, at den foldes med den »omvendte» Brøk.*

Ex. 1. Del $\frac{2}{7}$ med $\frac{3}{4}$.

Ex. 2. Del $\frac{2}{7}$ med $3\frac{1}{4}$.

§ 48. Den i §§ 39—47 omtalte Brøksform, som endnu bruges, har imidlertid visse Mangler. Den Omstændighed, at Nævneren kan være et hvilket som helst Tal, giver disse Brøker noget vist usammenligneligt; thi de angive i Virkeligheden Tal med forskjelligartede Benævninger. Ganske vist kan man skaffe Brøkerne ens Benævning, og de blive da sammenlignelige således, at man blot sammenligner deres Tællere; men dette kan allerede for et ringe Antal simple Brøker blive temmelig

broget. Vilde man f. Ex. sammenligne $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ og $\frac{1}{11}$ på en Gang, måtte man skaffe dem alle Nævneren 4620, og Tællerne blive da: 1540, 1155, 924, 660, 420. Hermed er der endda ikke endnu skaffet noget Grundlag til Sammenligning med f. Ex. $\frac{1}{8}$. Desuden kan Regningen med sådanne Brøker, navnlig de simple Regningsarter, Sammenlægning og Fratrækning, også ofte blive noget vidtløftig. Dette Brøksystem har også snarere sit Fortrin i den kortfattede Udtryksmåde end deri, at Brøkerne ere umiddelbart sammenlignelige eller lette at behandle. I sidstnævnte Henseende have de gamle babyloniske Brøker ofte Fortrinet, og det er et Spørgsmål, om disse vilde være gæde af Brug som rene Brøker i vore Dage, hvis ikke en anden med dem beslægtet Brøkform havde fortrængt dem, nemlig Decimalbrøken.

§ 49. *Decimalbrøk* træffes først hos Araberne [○] i det 13de Århundrede, og den synes at have sin Oprindelse hos dem, hvad der er så meget rimeligere; som den Videnskabelighed, Araberne udfoldede i dette Tidsrum, efterat have optaget Æmne fra Hinduerne og Grækerne og bygget på babylonisk Grund, heri havde den bedste Forudsætning for Opfindelsen af Decimalbrøkerne.

Disse ere nemlig indrettede efter selv samme Grund-sætning som Babyioniernes Brøker, blot med den Forskjel, at medens disse benyttede Underafdelinger på 60 Smådele, benytte Decimalbrøkerne Underafdelinger på 10 Smådele. Denne Ændring vilde have været uden Betydning, sålænge man skrev Tal på de gamle Måder. Ja, ved Babyioniernes Inddeling nåede man endog i få Skridt en tilstrækkelig Nøjagtighed, så at ikke alene Babyionerne, men også græske og senere europæiske Lærde plejede i Enderesultatet at bortkaste alt, hvad der var mindre end Sekunder, om man end i selve Udregningerne brugte Tertier osv.; og man kunde ofte uden Skade gjøre dette, da en Sekund er det samme som $\frac{1}{3600}$; og mindre Brøker er der kun sjelden Brug for.

Fordelen ved at gå over til Inddelingen i 10 er først tilstede, når man bruger Hinduernes Talskrivning. Da behøver man nemlig ikke mere at give Tiendedelene et særligt Mærke (ligesom Minuterne) eller Hundrede-delene (ligesom Sekunderne) osv. Man behøver ikke at skrive noget lignende som

$$43^0 5' 6''.$$

Man kan nemlig helt udelade disse Mærker, når man kun bibeholder et Mærke for Enerne, hvad enten man nu fastholder Tegnet 0 eller — for at gjøre mindre Brud i Talrækken — foretrækker et spinklere Tegn, *Decimal-kommaet*, og skriver

$$43,56.$$

Denne Skrivemåde kan ikke misforståes. Det første Siffer efter Enerne, nemlig 5, er Tiendedele, det næste, 6, er Tiendedele af dette igjen, $\frac{6}{10}$: Hundrededele, o. s. fr., hvis der er flere.

Men ikke alene er Skrivemåden bleven simplificeret; der er også kommet andre Fordele til.

Ligesom Hinduernes Talskrivning tilsteder en Fortsættelse af Talrækken i Retning mod det uendelig store, idet der intet Trintaltegn behøves, men selve Pladsen for hvert Siffer bestemmer dets Værdi, således tilsteder Decimalbrøkskrivningen en Nøjagtighed i Retning af det uendelig fine, idet man ikke behøver at anføre Nævnere eller Benævninger, eftersom Pladsen af hvert Siffer angiver dettes Benævning. Her forudsættes da selvfølgelig ligesom i Talskrivningen, at når der ikke findes nogle af en vis Benævning, udfyldes Pladsen med et 0. — Hvis der ingen Enerer findes, anbringes også på disses Plads et 0, hvad allerede Araberne gjorde i almindelige Brøker (§ 39).

En anden Fordel ved Decimalbrøkerne består deri, at de danne en følgestreng Fortsættelse af Talsystemet nedad, således at Betydningen af hver Sifferplads er 10 Gange højere end af den Sifferplads, der findes nærmest til

Højre for Sifferet, og altså 10 Gange mindre end den, der findes nærmest til Venstre for det. Dette gjælder både for de Sifre, der betegne Hele, og for dem, der betegne Decimaler, og for Naboerne på begge Sider af Decimal-kommaet. Der er intet Brud i denne Rækkefølge. — Denne Omstændighed er en Hovedgrund til, at *Regning med Decimalbrøker* falder meget let, ja, i Virkeligheden er den *selvsamme som med hele Tal*, når man blot gjør sig klar over, hvilke Hensyn der er at tage til det ny Tegn, Decimalkommaet, som man nu har fået med.

Decimalbrøkerne tør altså nok siges at have bragt Talskrivningen til Fuldkommenhed. At denne simple Brøkform først blev opfundet efter Skrivningen af hele Tal, er ganske naturligt. Derimod kunde det måske undre, at medens Babylonierne havde lignende Brøker i 60-talsystemet, medens Ægypterne navnlig yndede at angive Underafdelinger i 2-talsystemet ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ osv.), medens Romerne havde noget tilsvarende (om end mindre gennemført) i 12-talsystemet, og medens der hos flere Folkefærd findes Antydninger af andre Talsystemer i Underafdelingerne (navnlig $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$...), vides det ikke, at noget Folk har brugt *Underafdelinger* i 10, medens dog de fleste brugte *Optællinger* efter Titalsystemet. Dette stadfæster, hvad før er fremhævet, at det væsentlig er en ydre Omstændighed (vore 10 Fingre), der har skaffet os Titalsystemet, medens det slet ikke falder naturligt at inddele Enheden i 10 Dele.

Først i det 16de Århundrede begyndte Decimalbrøksystemet i europæiske Skrifter at afløse det babyloniske Brøksystem. Hint er siden den Tid kommet mere og mere i Brug; men fuldt Brug derfor i det virkelige Liv vil dog først nåes, når alle Enhederne (for Mål, Vægt, Mønt osv.) ere delte efter den samme Grundsætning. Frankrig har Æren af at have virket med Kraft herfor, og det franske Mål og Vægtsystem [○] breder sig nu mere og mere ud over Verden. Derimod er der næppe Grund til

at vente, at Decimalsystemet skal trænge ind i Tids- og Cirkelinddelinger, hvorpå der dog også under den franske Revolution blev gjort Forsøg. Har Fingrenes Tital sejret på sine Områder, ville dog de astronomiske Kjendsgjeringer sikkert opretholde det babyloniske System på sine Områder, hvor de i sin Tid selv have sat det ind.

Ex. 1. Opskriv en enkelt Talstørrelse, der indeholder følgende 300, 5, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ og $\frac{1}{10000}$ tilsammen.

Ex. 2. Skriv en Decimalbrøk lig $\frac{1}{10}$ og $\frac{1}{100}$ tilsammen.

Ex. 3. Skriv $\frac{1}{10000}$ som Decimalbrøk.

§ 50. Dersom man i en Decimalbrøk flyttede Kommaet en Sifferplads til Højre, vilde hvert af Siffrene derved få en 10 Gang så høj Værdi. Tiendedelene vilde blive til Enere, Enerne til Tiere, Tierne til Hundreder osv.; og på den anden Side vilde Hundrededele blive til Tiendedele, Tusindedele til Hundredede osv. *Man folder altså en Decimalbrøk en Gang med 10 for hver Sifferplads, man flytter Kommaet til Højre; og selvfølgelig deler man den en Gang med 10 for hver Sifferplads, man flytter Kommaet til Venstre.*

Ex. 1. Fold 52,381 med 100.

Ex. 2. Fold 2,5 med 1000.

Ex. 3. Del 432,1 med 10.

Ex. 4. Del 28,15 med 1000.

§ 51. Medens man kan fæste Blikket på *hver enkelt Siffer* i en Decimalbrøk og betragte dette som en Brøk med sin særlige Nævner (hvis det står til Højre for Enernes Siffer) eller som et Trintal (hvis det står til Venstre for Enernes Siffer), kan man også betragte det hele som *en eneste Brøk, hvis Tæller er det Tal, som Decimalbrøken uden Komma udtrykker, og hvis Nævner er et 1-tal med så mange Nuller, som der er Decimaler* 3: Sifre til Højre for Kommaet. — Når man nemlig flytter Kommaet så mange Pladser til Højre, som der er

Decimaler, bliver Decimalbrøken et helt Tal; men da har man foldet den så mange Gange med 10 som Antallet af Decimaler, altså med et 1-tal med ligeså mange Nuller efter. Man bør altså derefter dele det udkomne med samme Tal. — 28,314 bliver til 28314 ved at foldes med 1000; når det derefter atter deles med 1000, får man $28\frac{314}{1000}$. — En Decimalbrøk, der egentlig er en Samling af Brøker med lutter forskellige Nævner, kan altså, uden at man har Ulejlighed med at søge Fællesnævner m. m., i samme Øjeblik betragtes som sammenlagt til en enkelt Brøk med en enkelt Nævner.

Ex. 1. Skriv 0,125 som én almindelig Brøk, og forkort den.

Ex. 2. Ligeså 1,16.

§ 52. Decimalbrøker lægges sammen eller trækkes fra hinanden ligesom hele Tal, idet man anbringer dem således, at Komma er under Komma, og, om fornødent, tilføjer Nuller til Højre for den eller de Decimalbrøker, der har færrest Decimaler, så at de alle få lige mange Decimaler, en Tilføjelse, som man forøvrigt ofte (navnlig ved Sammenlægning) kan spare sig, medens dog Meningen er den samme, som om man tilføjede disse Nuller. Derved giver man dem nemlig, uden videre Ulejlighed, Fællesnævner.

Sammenlægning:

$$\begin{array}{r} 32,143(0) \text{ eller } 32,143 \\ 0,25(00) \quad 0,25 \\ 1,4121 \\ \hline 33,8051 \end{array}$$

Fratrækning:

$$\begin{array}{r} 2,18(0) \\ 0,124 \\ \hline 2,056 \end{array}$$

Ex. 1. Læg 48,23 2,047 0,1356 76,1 sammen.

Ex. 2. Træk 432,5617 fra 735,8.

Ex. 3. Læg 2,104 0,25 52,1 sammen og træk derfra 10,1
11,22 13,1345.

§ 53. Decimalbrøker og hele Tal, eller Decimalbrøker indbyrdes, foldes som de hele Tal, Decimal-

brøkerne uden Komma udtrykke, og i det udkomne sættes Kommaet således, at der bliver ligeså mange Decimaler som i Decimalbrøkerne tilsammen. Man folder nemlig Brøker derved, at Tællerne foldes indbyrdes og Nævnerne ligeså (§ 46), og dette udføres her på den nævnte simple Måde.

Ex. 1. Fold 21,145 med 47.

Ex. 2. Fold 2,48 med 0,125 og det udkomne med 15,1.

§ 54. En Decimalbrøk *deles* med et helt Tal derved, at man først deler uden Hensyn til, at der findes et Komma, og sluttelig anbringer Kommaet således, at der bliver ligeså mange Decimaler i det udkomne som i den oprindelige Decimalbrøk. Dette følger ligefrem af Reglen for almindelig Brøk (§ 45).

7 ind i 0,5922 giver 0,0846.

Hvis imidlertid Delingen ikke går op, f. Ex. når 0,5925 deles med 7, hvor der bliver 3 tilovers, plejer man ikke her at skrive $0,0846\frac{3}{7}$, hvad man forøvrigt nok kunde, når man blot forstod det således, at $\frac{3}{7}$ er af samme Art som 6-tallet, altså Titusindedelev, idet der nemlig skulde stå $\frac{846\frac{3}{7}}{10000}$. Enten kastes da $\frac{3}{7}$ helt bort, eller, hvis der

herved vilde afstedkommes for stor en Fejl, forsyner man den givne Decimalbrøk med flere Nuller, f. Ex. 0,592500, og får da ved Deling med 7 $0,084642\frac{6}{7}$, hvor $\frac{6}{7}$ rimeligvis tør bortkastes, da de nu kun betegne Milliontedele (ellers måtte man føje flere Nuller til og fortsætte). Ved Bortkastningen af en Brøk som $\frac{6}{7}$, der er over $\frac{1}{2}$, altså nærmere ved 1 end ved Nul, forhøjer man dog gjerne det sidste Siffer og får altså 0,084643.

Fastholder man den Fordring, at det udkomne skal være en Decimalbrøk, må man ofte finde sig i, at denne ikke bliver helt nøjagtig; men i Virkeligheden kan man skaffe sig Fejlen så lille, man vil, og i de Opgaver, som den virkelige Verden stiller, behøver man i Reglen ikke

at tage mange Decimaler med, før end Fejlen ved Bortkastning af det øvrige er uden al praktisk Betydning.

Ex. 1. Del 48,763 med 121.

Ex. 2. Del 72,43 med 12 (4 rigtige Decimaler).

Ex. 3. Del 0,04 med 51 (5 rigtige Decimaler).

§ 55. Skal en Decimalbrøk, f. Ex. 2,9025, deles med en anden Decimalbrøk, f. Ex. 1,35, vilde dette kunne ske (§ 47) ved at folde med den omvendte Brøk, altså med $\frac{100}{135}$. Foldningen med Tælleren 100 udføres blot ved at flytte Kommaet 2 Pladser til Højre, så at man får 290,25; men istedenfor nu at folde Nævneren med 135, kan man dele Tælleren dermed og beholde Nævneren uforandret, hvorved fåes 2,15.

I det Tal, der skal deles, flytter man altså først Kommaet så mange Pladser til Højre, som Antallet af Decimaler i Deleren. Derefter udføres Delingen ligesom med et helt Tal ind i en Decimalbrøk.

Ex. 1. Del 26,199 med 4,5.

Ex. 2. Del 5,2135 med 2,18 (4 rigtige Decimaler).

Ex. 3. Del 23086,8 med 4,356.

Ex. 4. Del 3,7 med 5,12 (3 rigtige Decimaler).

Anm. Det er ved sådanne Delinger hensigtsmæssigt, efter endt Regning at efterse, om de Hele ind i de Hele omtrent giver det udkomne. Skulde man have givet Kommaet en urigtig Plads, vil man ofte herved blive opmærksom på Fejlen.

§ 56. Da almindelige Brøker og Decimalbrøker endnu bruges Side om Side med hinanden og vel ville vedblive dermed, er det nødvendigt, at man er istand til at forandre en Brøk fra den ene Form til den anden. Fra almindelig Brøk til Decimalbrøk sker Overgangen på følgende Måde.

Ligesom en Stambrøk ($\frac{1}{8}$) opstår derved, at Enheden deles i det Antal (8), som Nævneren angiver, må *en almindelig Brøk*, der blot er et Antal af ligestore Stambrøker, *opstå derved, at et Antal Enere, lig Tælleren, deles med Nævneren*. Man behøver altså blot at udføre

denne Deling i Henhold til § 54, efter først at have forsynet Tælleren med et Decimalkomma og så mange 0-decimaler, som man behager. $\frac{5}{8}$ omdannes således:

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 5,000} \\ \underline{0,625} \end{array}$$

I dette Exempel gik Delingen op ved tredie Decimal; men ofte vil dette aldrig ske, hvor mange Decimaler man end tilføjer, og hvorlænge altså Delingen fortsættes. Når man nemlig i Regningens Løb får en Rest igjen, som man før har havt, ville de samme Tal gjentage sig og gjentage sig i det uendelige, f. Ex. ved Omdannelse af $\frac{9}{13}$:

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 9,00000000} \quad (0,6923076 \\ \underline{78} \\ 120 \\ \underline{117} \\ 30 \\ \underline{26} \\ 40 \\ \underline{39} \\ 100 \\ \underline{91} \\ 90 \\ \underline{78} \\ 12 \end{array}$$

Efterat man er nået til en Deling af 90 med 13, som man tidligere har havt, vil alt det samme gjentage sig, og man vil altså igjen få Siffrene 692307 og derefter den samme Gruppe Siffre i det Uendelige. Man kan skrive dette således:

$$\frac{9}{13} \text{ er } 0,\overline{692307692307692307} \dots\dots$$

Den Gruppe Siffre, som gentager sig, kaldes *Perioden*, og man skaffer ofte en bedre Oversigt over Forholdene ved, som sket er, at sætte en Streg over den første Periode.

Det er nu let at indse, at ved enhver almindelig Brøks Omdannelse til Decimalbrøk må Delingen enten gå op, og man får da en *sluttet eller endelig Decimalbrøk*, eller føre til en uendelig, men *periodisk Decimalbrøk*; thi der kan ved Delingen åbenbart ikke komme andre Rester end 0, 1, 2 .. osv. indtil det Tal, der er 1 lavere end Nævneren. Får man Resten 0, har man en endelig Decimalbrøk; får man det ikke, må i alt Fald den 13de Deling (om ikke en tidligere), når Nævneren er 13, give en Rest, man før har havt, og da får man en uendelig, men periodisk Decimalbrøk.

I sidste Tilfælde skjelner man dog atter mellem to Arter. Det kan hændes, at den Rest, som først frembyder en Gjentakelse, er det samme Tal, som det, hvori Delingen fra aller først begyndte. I så Fald begynder Perioden strax efter Kommaet, og man kalder en sådan Decimalbrøk *ren periodisk*. Ovennævnte er et Exempel derpå. Men det kan også hændes, at den første Rest, der møder som en Gjentakelse, er en Rest, som første Gang forekom noget henne i Regningen. I så Fald vil Perioden ikke begynde strax efter Kommaet. Man kalder da Decimalbrøken *blandet periodisk*.

Således giver $\frac{7}{22}$:

$$\begin{array}{r}
 22 \overline{) 7,0000} \quad (0,3181 \\
 \underline{66} \\
 40 \\
 \underline{22} \\
 180 \\
 \underline{176} \\
 40 \\
 \underline{22}
 \end{array}$$

Det kan skrives anskueligt således $0,\overline{3181818} \dots$, idet man sætter en Streg *under* de uperiodiske Siffre og en Streg *over* den første Periode.

Ex. Omdan hver af følgende Brøker til Decimalbrøk, og skriv dem, så at det klart ses, af hvad Art Decimalbrøken er: $\frac{5}{40}$, $\frac{1^3}{12^3}$, $\frac{7}{32}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{2}{13}$.

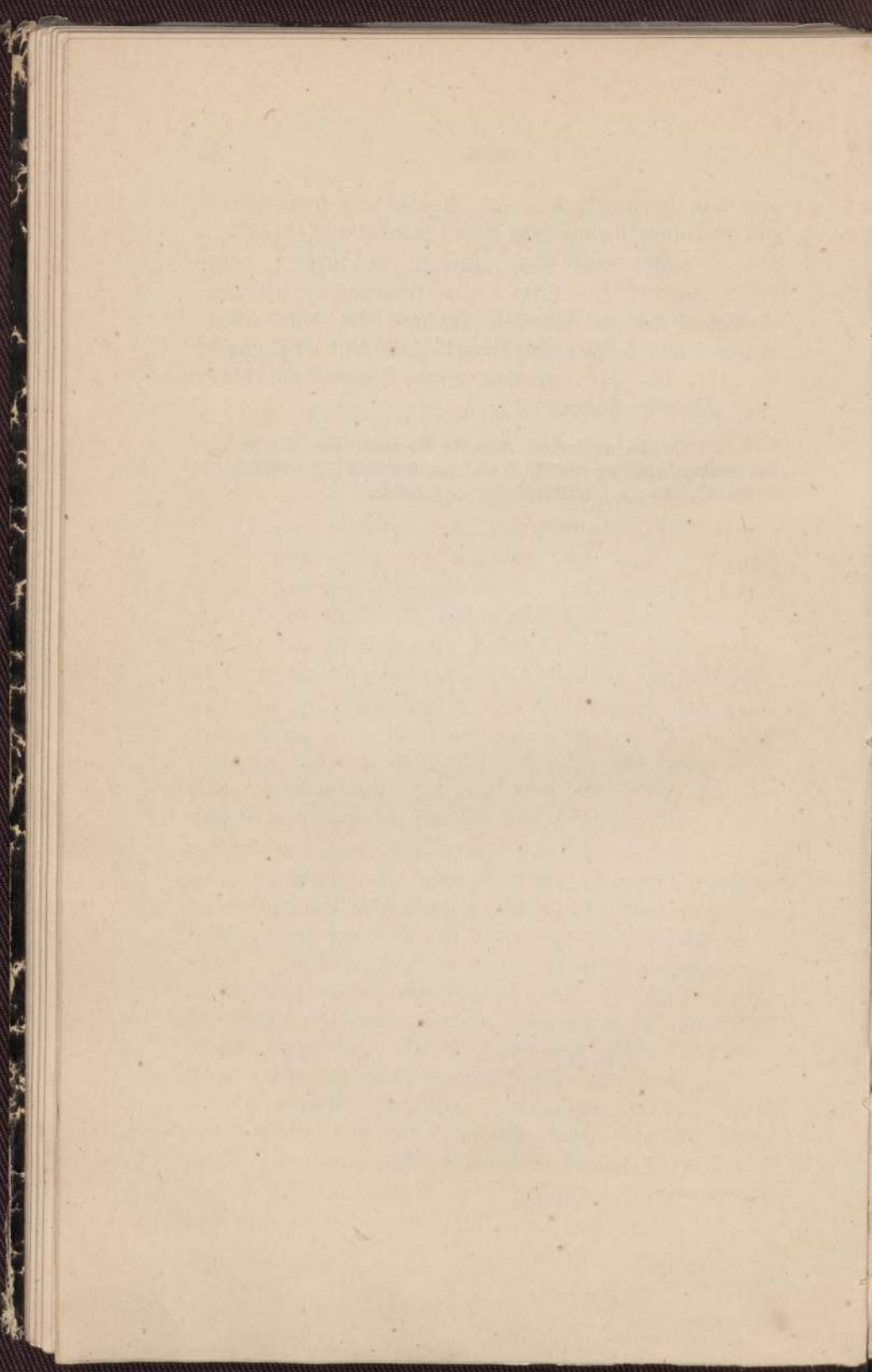
§ 57. En *endelig Decimalbrøk* omdannes til almindelig Brøk simpelthen ved at den skrives som sådan. Således er $0,875$ det samme som $\frac{875}{1000}$. Ofte bliver Brøken derefter at forkorte, i nærværende Exempel til $\frac{7}{8}$.

Dersom man folder en *ren periodisk Decimalbrøk*, f. Ex. $0,\overline{324324324} \dots$, med et 1-tal med så mange Nuller efter, som Perioden har Siffre, vil åbenbart Kommaet blive flyttet til Højre for den første Periode, medens der til Højre for Kommaet igjen befinder sig den selv samme uendelige, ren periodiske Decimalbrøk. Exemplet giver $324,\overline{324324} \dots$. Trækkes nu den givne Decimalbrøk fra sidstnævnte, fåes kun hele Tal, nemlig Perioden 324; og dette Tal må være 999 Gange den givne Decimalbrøk; thi når man fra 1000 sådanne trækker 1 sådan, må man få 999 sådanne. Men er 324 netop 999 Gange så stor som $0,\overline{324324} \dots$, så er $\frac{324}{999}$ netop lig denne. Da man altid kan bringe en Periode foran Kommaet ved Foldning med et 1-tal med så mange Nuller, som Perioden har Siffre, og det Tal, der er 1 mindre end dette, altid er dannet af ligeså mange 9-tal, vil en *ren periodisk Decimalbrøk* altid være lig en Brøk, hvis Tæller er Perioden, og hvis Nævner er et Tal, dannet af ligeså mange 9-tal, som Perioden har Siffre, hvorefter Brøken ofte kan forkortes, i Exemplet til $\frac{12}{7}$.

En *blandet periodisk Decimalbrøk* vil, når den foldes med et 1-tal med så mange Nuller, som der findes uperiodiske Siffre efter Kommaet, komme til at bestå dels af hele Tal, dels af en efter Kommaet følgende ren

periodisk Decimalbrøk, som i Henhold til foranstående kan omdannes til almindelig Brøk. Således vil $0,147\overline{7272} \dots$ ved at foldes med 1000 blive til $147,7\overline{272} \dots$ eller $147\frac{2}{9}$ eller $147\frac{8}{11}$. Efter denne Omdannelse har man så blot at dele det blandede Tal med det Antal Tiere, hvormed man foldede den givne Decimalbrøk. I Exemplet er $147\frac{8}{11}$ lig $1\frac{523}{11}$; og den givne Decimalbrøk bliver da $\frac{1623}{11000}$ eller forkortet $\frac{13}{88}$.

Ex. Omdan og forkort følgende Decimalbrøker til almindelige Brøker: 0,256 og 0,0048. Endvidere 0,636363 ...; 0,666666 ...; 0,198019801980 ...; 0,3272727 ... og 0,597222 ...



GEOMETRI.

GEOMETRI

Ret Linie og Kvadrat.

§ 58. Ligesom Tallene ved deres Fremkomst knyttes til den udvortes Omstændighed, at vi have 10 Fingre, således skal efter mange Historieskriveres Vidnesbyrd den Videnskab, som kaldes *Geometri*, også skyldes praktiske Foretagender sin Oprindelse. Selve Navnet tyder derpå; thi *Geometri* er et græsk Ord, der betyder *Landmåling*, medens *Geometrien* i vore Dage finder ligeså megen Anvendelse på andre Fag, såsom Maskinlære, Bygningskunst, Jord- og Vandbygningsarbejder, Astronomi og andre Naturfag, ja, selv på sådanne Fag, som egentlig intet have med Udstrækning, Form eller Rum at gøre, men hvis Love og Kjendsgjæringer man finder det hensigtsmæssigt at fremsætte og behandle på geometrisk Måde (grafisk, α : ved Tegning).

Herodot [$\odot$] fortæller, at den ægyptiske Konge Sesostris (α : Ramses II, omtr. 1407—1341 f. Kr.) delte Landet således mellem alle Ægypterne, at han gav hver en lige stor Firkant, og at han beregnede sig sine Indtægter derefter, idet han pålagde dem at svare en årlig Skat. De, hvem Floden (Nilen) berøvede noget Jord, måtte melde det skete til ham. Han sendte da en Opsynsmand, der havde at opmåle, hvor meget Jordstykket var formindsket, for at Indehaveren kunde betale Skat

af det øvrige i Forhold til den oprindelig pålagte Afgift. »Således«, skriver Herodot, »mener jeg, at Geometrien må være oprunden og derfra være kommen til Hellas (Grækenland)«. Flere senere græske Forfattere udtale sig i lignende Retning, såsom Isokrates, Plato, Hero, Strabo og Diodor, og at disses Udsagn ikke har været simpel Gjentagelse af, hvad Herodot én Gang havde fortalt — noget, som i lignende Forhold ikke er uden Exempel, end ikke i vore Dage —, fremgår af, at der forekommer andre Enkeltheder i disse Beretninger end i Herodots. Således tilføjer f. Ex. *Hero* (c. 100 f. Kr.), der selv levede i Alexandria [○], at ved mange Grundstykker, som Floden oversvømmede, var det ikke muligt, efterat Vandet var sunket, at skjelne enhvers Ejendom. — *Strabo* (f. 66 f. Kr.) skriver noget lignende. De fortælle altså, at selve Grændserne bleve udviskede.

§ 59. At Ægypternes Færdighed i denne Retning imidlertid var grundet på andet og mere end disse Landinspektørforretninger, fremgår også af flere af de nævnte Forfatteres Meddelelser. Således skriver *Diodor* (omtrent ved vor Tidsregnings Begyndelse) om de ægyptiske Præster: »De beskæftige sig ivrigt med Geometri og Regning; thi idet Floden årligt forandrer Landet meget, foranlediger den mange Stridigheder af forskjellig Art mellem Naboerne med Hensyn til Grændserne; disse Stridigheder kunne nu ikke let bilægges, medmindre en Landmåler afgjør Sagen ved ligefrem Måling. Regningen gjør Nytte i Husholdningssager og ved Geometriens Læresætninger. Thi ere hos noget Folk *Stjernernes* Stillinger og Bevægelser blevne omhyggeligt iagttagne, så er det hos Ægypterne. De glemme Optegnelser af enkelte iagttagelser for utrolig lange Årrækker, da der hos dem fra gammel Tid er blevet anvendt den største Omhu derpå. De have meget omhyggelig iagttaget Planeternes Bevægelser, Omløbstider og Stilstand [○], tilligemed

deres Indflydelse på de levende Væseners Skjæbne og alle deres gode og skadelige Indvirkninger.«

Det fremgaaer heraf og af andre Beretninger, at *Iagttagelse af Stjernerne* — navnlig Planeterne — fra gammel Tid er bleven dreven i Ægypten. Det er da en Selvfølge, at denne Virksomhed, der dog også er knyttet til den udvortes Verden ligeså vel som Landmålingen, må have bidraget til Geometriens Fremkomst, og det turde være, at Stjerneiagttagelserne ikke have havt mindst Andel i at fremkalde de mere dybtgående geometriske Betragtninger. I det Hele vil det vise sig, når man følger Astronomiens Udvikling fremad igjennem Tiderne, at de Bestræbelser, som Menneskeslægten har udfoldet for at løse astronomiske Opgaver, have fremkaldt både matematiske Sætninger og naturvidenskabelige Fremskridt, så at *Stjernerne i mange Henseender have været Menneskeslægstens Opdragere*.

At Ægypterne satte Stjerneiagttagelserne i Forbindelse med Spådomskunsten (Astrologi [☉]*) var selvfølgelig til Hinder for en virkelig naturvidenskabelig Erkendelse med Hensyn til Himmellegerne, men dette hindrer ikke Iagttagelsernes Betydning for Geometrien.

§ 60. Medens Landmåling og Stjerneiagttagelser var de udvortes Virksomheder, der fremkaldte Geometrien, bliver det næste Skridt, som vi skulle se, ligesom

*) Også Babylonierne (Kaldæerne) anvendte Stjerneiagttagelser til Spådomskunst og gik i så Henseende måske endnu videre. Det var iøvrigt ikke blot Stjernerne de adspurgte; de havde også andre systematiske Fremgangsmåder, der ligeledes med Iver bleve brugte af deres Naboer Perserne og Mederne, hvis Spåmænd *Magerne* forstod sig på den såkaldte Punktérkunst. De udøvede den ved at tegne Linier og Punkter på et med Sand belagt Brædt og efter et Stød til dette at iagttage de Forandringer, som Tegningerne fik derved. Fra Asien synes denne Kunst. Sandsigerkunsten, at have bredt sig også over Europa. At spå i Kaffegrumset er uden Tvivl en Levning deraf.

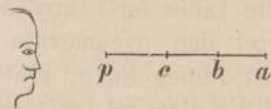
det i første Afsnit er omtalt med Hensyn til Tallene, at *abstrahere* (§ 3) fra disse udvortes Virkeligheder, og derved at erholde Sætninger, der vilde have Virkelighed for Tanken, selv om alle de udvortes Virkeligheder forsvandt, men hvis absolute Gyldighed godtgjør sig derved, at de Slutninger, som Tanken udleder af disse Sætninger, vise sig at stemme med Forholdene i den virkelige Verden. Det blev ganske vist ikke Ægypterne, men fornemmelig Grækerne, der skulde gøre de store Fremskridt i denne Retning; men Begyndelser findes dog allerede hos Oldtidsfolkene.

Dette kan skjønnes blandt andet deraf, at den græske Filosof *Demokrit* fra Abdera (f. omtr. 460 f.Kr.), som roser sig af at have berejst hele den kjendte Verden, endvidere praler saledes: »Ingen har overgået mig i at løse Opgaver, end ikke *Harpedonapterne* i Ægypten.

§ 61. Hvem ere disse *Harpedonapter*? De henhørte til den samme Samfundsklasse som de Landmålere, de øvrige græske Forfattere omtale, de såkaldte Præsteskaber, der varetog alle sådanne Forretninger, hvortil der kvævedes — efter Datidens Forhold — videnskabelig Uddannelse [○]. En af *Harpedonapternes* vigtigste Handlinger synes Orienteringen af hellige Bygninger at have været. Navnet *Harpedonapt* har forøvrigt noget oplysende ved sig. *Harpedon* skal betyde noget lignende som en Snor. *Harpedonapt* er altså en *Snorspænder*. Ved at stramme Snoren mellem dens to Ender udstak de *rette Linier*. Denne Fremgangsmåde bruges ofte endnu, navnlig af Bygningshåndværkere og Gartnere, ligesom selve Ordet »Linie« er et gammelt græsk Ord dannet af Ordet »Linon«, der betyder Hør, Snor (Lin, Line osv.). For at forebygge Misforståelse føje vi i Reglen Ordet »ret« til, idet man som Modsætning hertil også kan tale om en krum Linie (dannet af en ikke udstrammet Linie).

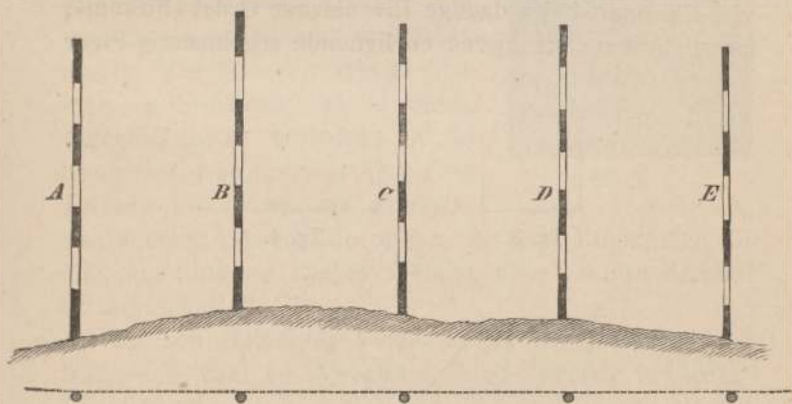
§ 62. Der er også andre Måder, hvorpå man i det

mindste kan efterse, om en Linie er ret. Navnlig bliver følgende jevnlig brugt af vore Håndværkere og Landmålere, og den må uden Tvivl også have været kjendt i Oldtiden, da lagttagelsen af den så at sige pånøder sig enhver, der har med rette Linier at gjøre. — Den beroer på den Naturlov, at Lyset under almindelige Forhold forplanter sig i en ret Linie. Deraffølger, at når Øjet befinder sig ud for Enden af en ret Linie



Tg. 1.

(Tg. 1), vil man med dette Øje ikke kunne se andet af Linien end selve Enden p ; thi Lyset fra Liniens øvrige Dele a , b , c skal da netop nå til Øjet igjennem Enden p .



Tg. 2.

Befinder Øjet sig derimod ude til Siden, kan det se Liniens øvrige Dele; og Prøven på, om den er ret, består derfor i, om alle Delene, idet Øjet føres hen i Linien, forsvinde på en Gang. — Således efterser Sned-

keren om en Kant er retlinet, og således ser Landmåleren, om en Række Stokke, som han har anbragt lodret i Jorden, *A, B, C, D, E* (Tg. 2), stå i en ret Linie.

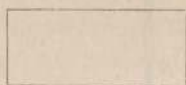
Det er imidlertid *Linen*, der oprindelig har givet *Linien* Navn, og hvortil de historiske Notitser om den rette Linie først knytte sig; men selv om det havde været den ovennævnte såkaldte *Øjeprøve*, der havde givet *Linien* Navn, måtte de deraf følgende Betegnelser for, hvad en ret Linie er, dog siges fra først af at have været knyttede til Forhold fra den udvortes Virkelighed.

§ 63. Idet Herodot fortæller, at »Sesostris havde delt Landet således mellem alle Ægyptere, at han gav hver en lige stor Firkant«, så stå vi her overfor en Inddelingsmåde, der virkelig er et Ideal, hvorimod alle lignende Inddelinger og Anordninger burde stile og i Reglen også have stilet.

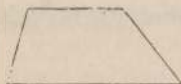
Når man i det daglige Liv nævner Ordet »Firkant«, forestiller man sig gjerne en lignende regelmæssig Figur



Tg. 3.



Tg. 4.



Tg. 5.



Tg. 6.

som Tg. 3, undertiden også en Figur som Tg. 4. Kun få tænke på en Figur som Tg. 5 eller som Tg. 6, skjøndt alle disse Figurer i Mathematiken kaldes Firkanter. Det kan være rimeligt, at Herodot ligesom Folk ellers i Almindelighed har tænkt på en af de to første Former.

I hvert Fald er det, som vi senere skulle se, sikkert, at det er disse Idealer, Sesostris har tilsigtet.

Ligeledes vides det for sikkert, at kinesiske Marker fra gammel Tid (mange Århundreder før vor Tidsregnings Begyndelse) vare delte i Lodder af Formen Tg. 3. Tillige var det Lov, at hver niende af disse Firkanter (*Li*) dyrkedes af de 8 omboende Jordbrugere til Fordel for Kejseren.

Også for de gamle Etruskere og de af dem i kulturhistorisk Henseende afhængige Romere var en lignende Inddeling og Orientering af Marker, Byer og Templer en højst magtpåliggende, ja ligefrem religiøs Sag (de romerske Augurer [☉]).

Fordelen ved Figuren Tg. 4, som kaldes et *Rektangel*, ses let ved et Øjekast på Tg. 7. Man kan nemlig inddele et Rektangel ved Linier på begge Led, og Inddelingerne blive da atter lutter Figurer, som, medens de vedblive at være Rektangler, dog have forskellige Former og Størrelser, så at denne Inddelingsmåde tilsteder på en Gang *Orden og Oversigt* og en vis *Frihed*, idet Form og Størrelse kan ændres, uden at de ophøre at være Rektangler, alt eftersom Linierne lægges i større eller mindre Afstand fra hinanden (Tg. 7).



Tg. 7.

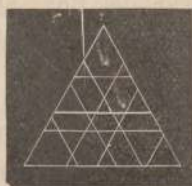
Hvilken Betydning Valget af Inddelingsmåden i så Henseende har, vil skjønnes f. E. af følgende Inddeling. Trækker man Linier på 3 Led (Tg. 8) således, at der dannes lutter regelmæssige Trekanter, da er vel Orden tilstede, men ikke Frihed; thi forrykker man Linierne for at give Trekanterne forskellige Størrelser, opstår der ganske andre Figurer end regelmæssige Trekanter (Tg. 9).

Rektanglet er derfor blevet den almindeligst anvendte

Form, ikke alene for Inddeling i Marken, men for Bygningers Grund med deres Inddeling, for Bohave m. m. — Flere vilde Folk bygge runde Hytter. Det betragtes som et afgjort Fremskridt, når de begynde at bygge »firkantet«.



Tg. 8.



Tg. 9.

§ 64. Ved al Opmåling må først vælges en *Målenhed*, der må være af samme Art som det, der skal måles. Skal en Linie måles, vælger man sig først et Liniemål, f. Ex. en Fod, eller, til Opmåling af mindre Linier, et mindre Mål, en Tomme eller $\frac{1}{2}$ Fod. Skal et Legemes Vægt angives, vælges først et Vægtmål, f. Ex. et Pund. Skal Tiden måles, vælges et Tidsmål, f. Ex. et Sekund osv.

Skal en Flade måles, må man først vælge et Flademål; og det kunde synes rimeligt, at man valgte denne af samme Form som den Flade, der skal måles, at man f. Ex. til Måling af Rektangler valgte et rektangulært Mål, at man til Måling af Trekanter valgte et trekantet Mål, osv. Men på den anden Side må et Rektangels og en Trekants Fladefang kunne angives på samme Måde, da de dog begge udgjøre et eller andet Fladefang, så at der må træffes Valg af et vist Flademål, hvormed alle Fladefang må måles.

At Rektanget var den Figur, der efter Omstændighederne blev valgt som den Form, der mest tilsigtes i ordnede Forhold, medførte, at det også blev et Rektangel, man valgte som Målenhed for Fladefang, nemlig et sådant Rektangel, hvis Sider alle ere lige

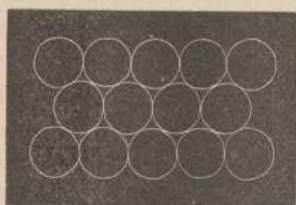
store med Linieenheden, f. Ex. en Fod. Et Rektangel, hvis Sider ere ligestore (Tg. 3), kaldes et *Kvadrat*, og den nævnte Målenhed kaldes derfor en Kvadratfod. Den kan forøvrigt også, som det ofte sker, kaldes en *Fladefod*; thi det vides ikke, at noget Folk, som har befattet sig med Opmåling af Fladefang, har brugt nogen anden Form for Fladeenheden end Kvadratet, så der vil ingen Misforståelse kunne fremkomme, selv om man ikke nævner, hvilken Form Flademålet, Fladefoden har; men det bør dog bemærkes, at Valget af Kvadratet ganske vist var hensigtsmæssigt, men ingenlunde havde været det eneste brugelige.

Som Sagerne stod — nemlig, at man inddelte i Rektangler —, faldt det lettest, at få disse målt, når der til Flademål valgtes et Kvadrat. Man må da finde sig i, at der senere kommer Vanskeligheder, når man skal måle en Trekant med samme kvadratiske Flademål. Havde man valgt et trekantet Flademål, vilde det være gået let at måle Trekanter, der have samme Form; men så vilde Vanskelighederne indtræffe, når man derefter skulde måle Rektangler med samme trekantede Flademål.

At bruge en Cirkel med 1 Fod i Tværmål som Flademål, vilde der i og for sig være ligeså god Mening i, og da vilde det være let at måle Cirklers Fladefang (noget, som dog først vil blive klart senere hen), medens Vanskelighederne først vilde rejse sig overfor andre Figurer. Men skjøndt Cirklen er en Figur, som selv frembyder sig ofte i den udvortes Verden, og skjøndt f. Ex. Rundbygningen først tilbyder sig for uudviklede Folk, er det let at indse, at man ikke kunde falde på fra først af at bruge Cirklen som Flademål; thi lægges Flademål ved Flademål af denne Slags, bliver man i Forlegenhed med de mange Mellemrum, som ikke komme med i Opmålingen (Tg. 10). — Denne Omstændighed vilde

fra først af have vanskeliggjort Brugen af et cirkelformet Flademål; men den umuliggjør det ikke.

Man må altså lægge Mærke til, at når vi angive Danmarks Fladefang til 693 Kvadratmil, eller Flademil

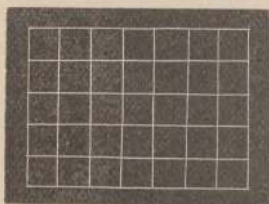


Tg. 10.

— skrevet 693 $\square$ Mil —, så beroer denne Angivelsesmåde på en ren Vedtægt, grundet på Hensigtsmæssigheden af at inddele i Rektangler, medens vi ellers vilde kunne angive Landets Størrelse til 882 Cirkelmil — skrevet 882 $\circ$ Mil —, eller

til 1600 Trekantmil — skrevet 1600 $\triangle$ Mil —, eller på endnu andre Måder.

§ 65. Når nu først Kvadratet er valgt som Flademål, udføres *Målingen* selv *ikke* derved, at man tager et sådant *materielt* Flademål og flytter det fra Sted til Sted i Marken, indtil hvert Sted har været 1 Gang belagt dermed, idet man optæller det Antal Gange, Flademålet således bliver lagt. Denne Fremgangsmåde kunde vel siges at være i Overensstemmelse med Opgavens



Tg. 11.

Væsen; men den vilde være i høj Grad ubekvem og vidtløftig. Man udfører derimod Opmålingen ved at opmåle visse *Linier* med *Liniemål* og derefter *ved Regning* at *finde Fladefanget*.

Dette sker nemlig let, hvis den Figur, der skal måles, er et Rektangel. Man måler da blot, hvor mange Linieenheder (Fod) Rektanglet er langt (f. Ex. 7), og hvor mange Fod bredt (f. Ex. 5). *Tænker* man sig dernæst, at der for hver Fod blev trukket Delelinier både på langs og på tværs (Tg. 11), vilde Rektanglet blive delt i lutter Kvadrater, hver på 1 Fods

Længde og Bredde. Altså vil det i Tanken blive belagt med Fladefod, hvad der viste sig for møjsommeligt at udføre i Virkeligheden. Af sådanne Fladefod vil der ved Siden af hinanden på langs være så mange som Rektanglets Længde indeholder Fod, nemlig 7 *Fladefod*; og der vil være så mange Rækker, som Rektanglets Bredde indeholder Fod, nemlig 5 *Rækker*. Når der er 5 Rækker, hver indeholdende 7 Fladefod, er der åbenbart 5 *Gange* 7 *Fladefod* eller $35 \square$ (*).

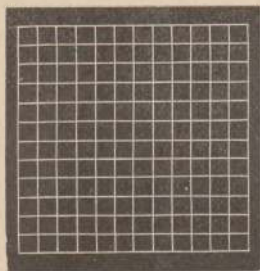
I dette Tilfælde fæer man altså det *Antal* Fladefod, som Foldning af Længdens og Breddens *Antal* af Fod giver; og dette forleder Folk til den urigtige Sætning, at 7 Fod Gange 5 Fod giver $35 \square$ Fod (jfr. § 34). Det er her *et helt særligt Tilfælde*, når vi finde *Antallet af Fladefod* ved en simpel Foldning af de *Tal*, som Længden og Bredden udtrykker i Fod. Det vilde f. Ex. ikke mere finde Sted, dersom vort Flademål havde været en $\triangle$ eller en $\bigcirc$ (**); og det vil heller ikke gå så glat, når vi senere gå over til andre Figurer end Rektangler.

§ 66. For så vidt Opmålingen af Længden og Bredden ikke udviser noget Antal hele Fod, må man bruge en mindre Målestok. Hvad enten man kalder denne en Tomme eller $\frac{1}{12}$ Fod, er ligegyldigt; men har man brugt et mindre Liniemål end før, svarer hertil selvfølgelig også et mindre Flademål, nemlig Kvadrat-tommen eller Fladetommen; og iøvrigt gjælde de samme Betragtninger som i § 65. Er f. Ex. Rektanglets Længde 7 Fod og 1 Tomme og Bredden 5 Fod og 7 Tommer,

*) Fod plejer man at betegne ved et Mærke $\prime$, Tommer ved 2 sådanne $''$ og Linier ved 3 Mærker $'''$.

**) Hvis Flademålet f. Ex. var en $\triangle$, vilde et Rektangels Fladefang, omtrentlig fæes ved at folde $2\frac{1}{3}$ af den ene Sides Antal Fod med den anden Sides Antal Fod, eller også ved at folde $\frac{1}{3}$ af den ene Sides Antal med det dobbelte af den anden Sides Antal.

er dette det samme som en Længde på 85 Tommer og en Bredde på 67 Tommer. Rektanglets Fladefang må altså være 67 Gange 85 Kvadrattommer eller 5695 $\square''$.



Tg. 12.

Foretrækker man at have Fladefanget udtrykt i $\square'$ fremfor i $\square''$, har man kun at klare sig, hvor mange Fladetommer der gæder på en Fladefod. Da en Fladefod er et Rektangel, der er 12 Tommer langt og 12 Tommer bredt, indeholder den 12 Gang 12 eller 144 $\square''$ (Tg. 12). — Deles altså 5695 med 144, får man $39\frac{7}{44}\square'$. Der er følgelig $39\frac{7}{44}\square'$ eller 39 $\square'$ 79 $\square''$.

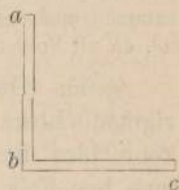
Ex. 1. Et Jordstykke i Rektangelform er 200 Alen langt, $157\frac{1}{4}$ Alen bredt. Hvor mange $\square$ Alen? og hvor mange Tønder Land (å 14000 $\square$ Alen)?

Ex. 2. Et Træsnit er 4,5 Centimeter langt og 3,8 Centimeter bredt. Et andet Træsnit er 3 og 2 Centimeter. Hvor mange Gange er hints Fladefang større end dettes? Det udregnes med Decimaler.

Vinklen.

§ 67. Medens Længde og Bredde af en Firkant høre til de mest almindelige Forestillinger, og man i det daglige Liv vilde kunne udtrykke sig således derom, at den enes Retning går *tværs* på den andens, vil enhver, der selv får den Opgave at klippe et Stykke Papir, skjære et Stykke Tøj, save et Brædt, udstikke en Plads osv. således, at Bredden er »lige tværs på« Længden, snart mærke, at dette ikke er så helt let at gjøre. I mange Tilfælde løser man denne Opgave ved Hjælp af

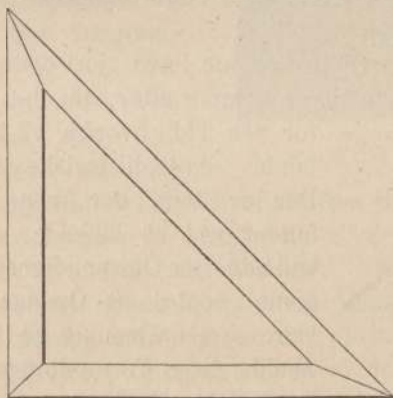
en såkaldet *Vinkelhage* af Træ, Jern e. a. (Tg. 13), hvis to Grene nu en Gang ere rettede tværs på hinanden, og som ligefrem bruges som en Model for de to Linier, man vil tegne, klippe osv., tværs på hinanden. At Vinkelhager også ere blevne brugte i Oldtiden, fremgaaer deraf, at man på et ægyptisk Vægmaleri, der forestiller et Snedkerværksted, har truffet en sådan afbildet.



Tg. 13.

Ved Tegning i vore Dage bruger man ofte en Vinkelhage, hvis to Grene ere afstivede med en tredie Stang, så at det hele danner en Trekant (Tg. 14).

Spørgsmålet er nu, hvorledes man fra først af kan lave selve Modellen, Vinkelhagen, rigtig, så at, når man tænker sig Grenen bc (Tg. 13) fast, a hverken kommer for langt henimod c eller for langt bort fra c .



Tg. 14.

Der gives hertil flere Midler fra den udvortes Verden, og der kan næppe være Tvivl om, at Oldtidsfolkene have kjendt nogle af dem.

Ex. 1. Hænger man et Lod eller en Sten i en Snor således, at Stenen er nedsænket i roligt Vand, vil Snoren indtage en Stil-

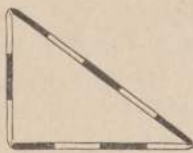
ling tværs på Vandfladen, og Vinkelhagen kan prøves derved, at man holder dens ene Gren langs med Snoren (uden at forstyrre denne); da skal den anden Gren kunne ligge langs hen ad Vandfladen.

Ex. 2. Tager man et Stykke Papir (de gamle havde ikke så let Adgang til Papir [○] som vi), klipper en Rand lige, bøjer dette Papir sammen således, at en Del af denne Rand falder sammen med den øvrige Del af Randen, og dernæst retter Papiret ud, da vil Folden være lige tværs på Randen.

§ 68. Det er imidlertid værd at mærke, at den vigtigste Løsning på denne Opgave ikke hos Oldtidsfolkene blev hentet fra sådanne udvortes Naturforhold; men hos Folk lige fra Middelhavet til det stille Oceans Kyst, hos Ægypterne (naturligvis også senere hos Grækerne), hos Kineserne og rimeligvis hos Babylonierne, træffer man i den fjerne Oldtid en Fremgangsmåde, der i alt Fald tyder på en theoretisk Oprindelse.

Når man lægger 3 Stokke med Længderne 3, 4 og 5 Fod (Alen, Favne e. l.) således, at de danne en Trekant, ville Stokkene 3 og 4 være nøjagtigt tværs på hinanden (Tg. 15).

Hvorledes Oldtidsfolkene have gjort denne Opdagelse, er det ikke muligt at komme efter; thi det ligger forud



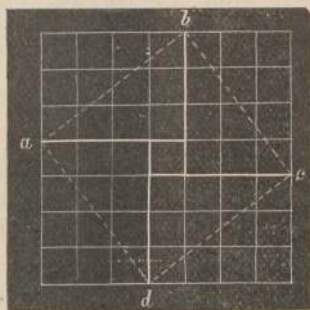
Tg. 15.

for den Tid, hvorfra vi have nogenlunde sikre historiske Oplysninger. Der er dem, der mene, at det er fundet ved et Tilfælde — altså dog ved udvortes Omstændigheder; og atter mene nogle, at Opdagelsen skulde være sket uafhængig på flere Steder. Skulde disse Formodninger være rig-

tige, da må det i hvert Fald stå fast, at Oldtidsfolkene, da de fandt det, have skønnet, at de her stod overfor en anden Art af Virkelighed end blot og bar udvortes Sandselighed; thi overalt, hvor vi se denne Sætning omtalt, nemlig, når den bruges, omgives den af en hemmelighedsfuld Glands og sættes i Forbindelse med Guddommen.

Der er dog også en Mulighed for, at denne Sætning oprindelig kan være funden ved Fornuftslutninger, og idet vi følge en Anvisning, som findes i et kinesisk Skrift, der rigtignok *måske* kun går tilbage til vor Tidsregnings Begyndelse*), men hvori dog Sætningen endnu behandles på en hemmelighedsfuld Måde, ville vi se, hvorledes man kan slutte sig til den.

§ 69. Et Kvadrat med Siden 7 inddeles i sine 49 Kvadratenheder, Tg. 16. Dette Kvadrat består åbenbart af 4 Rektangler, der have Længde og Bredde på 4 og 3, samt et Kvadrat i Midten med Siden 1. Forbindes nu de modstaaende Spidser a og b i det ene Rektangel med en ret Linie (en ret Linie fra en Spids til en anden i en Figur kaldes en *Diagonal*), og tegnes ligeledes Diagonalerne bc , cd og da , får man en Firkant $abcd$, hvis Fladefang må være 25 Kvadratenheder; thi når



Tg. 16.

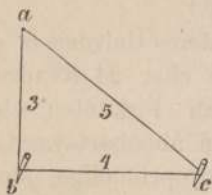
hver af Rektanglerne er 12, er hver af deres Halvdele 6, og Firkanten $abcd$ består af 4 Halvdele eller 24 Kvadratenheder samt det midterste Kvadrat. Firkanten $abcd$ er således 25; men denne Firkant må åbenbart være et Kvadrat; thi tænkte man sig, at det oprindelige, store Kvadrat blev drejet $\frac{1}{4}$ Gang rundt, så at den ny Stilling dækkede den gamle, vilde a falde i b , b i c , c i d og d i a . Firkanten $abcd$ vilde altså også kunne dække sig selv i den nye Stilling. Dens Sider have følgelig samme Størrelse og indbyrdes Stilling. Men et Kvadrat,

*) Det er dog skrevet som en Samtale mellem en Konge, der levede omtrent 1100 År før Kr., og en Lærd (jfr. 71, Anm.).

hvis Fladefang er 25, må have Sider på 5. — Er 3 og 4 altså Sider i et Rektangel, det vil sige, stå de nøjagtig tværs på hinanden, idet deres Ender berøre hinanden, må Forbindelseslinien mellem de andre Ender være 5.

Ex. Prøv på en lignende Måde at godtgjøre, at når 5, 12 og 13 sammenstilles til en Trekant, ville 5 og 12 være tværs på hinanden.

§ 70. Sætningen om 3, 4 og 5 hørte til en af Harpedonapternes Hemmeligheder. Ved så vigtige Handlinger som Udstikningen af Grunden til en Pyramide [○] eller et Tempel blev en første Linie (Nord-Syd) udstukken efter Stjernerne, og Tværlinien (Øst-Vest) kunde man da ikke nøjes med at udstikke efter en Vinkelhage; men den måtte findes ved en selvstændig Handling. Hvad Harpedonapterne foretog sig, kunde så med forblommede Ord tillægges Bygherren, Kongen. Således læses endnu på en ægyptisk Tempelruin: »Jeg har fattet Træpløkken og Køllens Skaft; jeg holder Snoren sammen med Gudinde *Safek**). Mit Blik følger Stjernernes Gang. Når mit Øje er kommet til den store Bjørns Stjernebillede, og det for mig bestemte Klokkeslet er fyldt, så fastslåer jeg Hjørnepunkterne af dit Gudehus.«



Tg. 17.

Er en Snor på 12 Favne fæstet med sine 2 Ender i Punktet *a*, medens 2 Knuder dele Snoren i 3, 4 og 5 Favne, sætter Harpedonaptern Pløkken *b* i den første Knudes Afstand efter Stjernerne således, at *ba* er Nord-

linien, og strammer derefter med Pløkken *c* ved den anden Knude Snoren ud og bestemmer således Østlinien *bc*.

Ifølge græske Forfattere skulle Ægypterne have tænkt

*) *Safek* var Bibliotheksgudinde og Gudinde for Grundlægning.

sig Verdens Natur under denne Trekants Skikkelse, således, at det lodrette 3 er Ophavet, *Osiris*, det vandrette 4 er Undfangelsen, *Isis*, og det skrå 5 er det avlede, *Horos*. Om disse 3 og deres Kamp med Osiris' fjendtlige Broder *Tyfon* har Plutark opbevaret os en smuk Fortælling fra Ægypterne [○]. Tg. 18 viser en gammel ægyptisk Fremstilling af de 3. — Endnu hos nogle af Grækerne gik den nævnte Trekant som et Billede på »Ægteskabet».

*Isis.**Osiris.**Horos.*

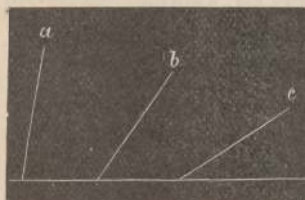
Tg. 18.

Også i vore Dage bruge Håndværkere gjerne den samme Regel med 3, 4 og 5 ved Udstikning af Grunden til en Bygning, hvor en almindelig Vinkelhage vilde give for liden Sikkerhed. Man danner sig da gjerne af nogle Brædder, som man sømmer sammen, en stor Trekant på 3, 4 og 5,

§ 71. Foruden den nøjagtige Tværstilling af en Linie i Forhold til en anden, gives der åbenbart en

Mængde andre Stillinger med større eller mindre Heldning, såsom *a*, *b*, *c* i Tg. 19.

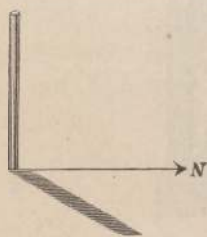
De Folk, der som Ægypterne, Babylonierne, Hinduerne og Kineserne særlig iagttog Stjernerne, måtte



Tg. 19.

snart føle Trangen til på en nøjagtig Måde at kunne give Udtryk for den Retning, hvori de så en Stjerne, Solen eller Månen. Da Øjet ikke tåler at fæste sig på Solen, brugte man for dennes Vedkommende en *Gnomon*, der bestod i en lodret oprejst Stang, som kaster Skygge på den vandrette Jord-

flade. Gnomonen var efter Herodots Beretning opfundet af Babylonierne, og fandt, omtrent midt i det 6te Århundrede,



Tg. 20.

Vej til Grækerne. Dog findes der også på en gammel ægyptisk Indskrift et Billede, der rimeligvis er en *Gnomon**).

Skyggens Retning henad Jorden (Tg. 20) angav åbenbart lige den modsatte Retning af den, hvori Solen befandt sig; og Skyggens Længde beroede åbenbart på Solens Højde over Hori-

*) Det i § 68 nævnte kinesiske Skrift hedder Tsjiu-pi. Tsjiu er nu Navnet på den Konge, der fremføres talende (se Anm. til § 68); men det kan også betyde Cirkel. Pi betyder Ben: Tsjiu-pi er altså måske »Ben i Cirklen« : *Gnomon*. I hvert Fald have Kineserne havt en lignende Indretning. Thi i Tsjiu-pi er angivet, at en Stok på 8 ved Sommersolhverv gav en Skygge på $1\frac{3}{4}$, ved Vintersolhverv på $13\frac{1}{4}$. En Udregning af, hvor stor Skyggen må have været i Året 1100 f. Kr. på det anførte Sted (Loyang) viser, at de anførte lagttagelser ere meget gode, hvilket stadfæster Pålideligheden af Tsjiu-pi.

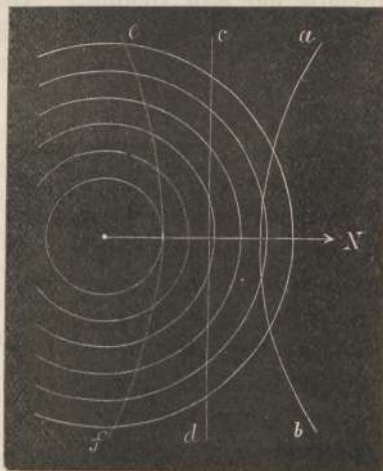
zonten således, at jo højere Solen stod, des kortere måtte Skyggen være *).

Skyggens Længde er altså en Slags Angiver af Solens Højde; men Skyggens Længde beroer naturligvis også på Stokkens Højde, idet f. Ex. en 3 Gange så lang Stok giver en 3 Gange så lang Skygge. Vilde man altså betegne en bestemt Solhøjde, kunde det ske derved, at man f. Ex. sagde: en sådan Solhøjde, at Skyggen er halvt så lang som Stokken, eller en Solhøjde, som er ligeså lang som Stokken, e. l. Udtryksmåden er i og for sig bestemt nok for hvert enkelt Tilfælde; men vil man sammenligne de forskellige Højder, falder det let i Øjnene, at ikke alene svarer den *store* Skygge til den *lille* Solhøjde (altså omvendt), men til den halve Skygge-

*) Det var navnlig som Soluhr, at Grækerne tog Gnomon i Brug. Man tegnede på Jorden 6 Cirkler omkring Stangens Fodpunkt

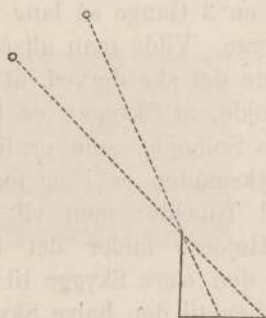
Tg. 21 forestiller en Gnomon set lige ovenfra. Når Solen om Formiddagen steg, blev Skyggen kortere og kortere, så at dens Ende trak sig indenfor den ene Cirkel efter den anden og angav derved et Klokeslet for hver Cirkel, den passerede. Om Eftermiddagen omvendt. Hvis imidlertid Cirklerne ere tegnede således, at Timerne ere lige lange på en Årstid, ville de ikke være nøjagtige på en anden. Om Vinteren vil Enden af

Skyggen forøvrigt beskrive en lignende Linie som *ab* i Løbet af Dagen. Ved Jevndøgntid beskriver den en ret Linie *cd* og ved Sommertid en Linie som *ef*.



Tg. 21.

længde svarer dog ikke den dobbelte Solhøjde (Tg. 22). Skyggelængden egner sig derfor nok til at fastslå en enkelt uforanderlig Heldning, men den egner sig ikke



Tg. 22.

til at være *Mål* for Heldningen; thi da måtte der kræves, at så mange Gange, som Målet er større eller mindre, er også Heldningen. Derfor skulle vi strax komme til et bedre Mål for Heldningen; men først et Par Ord om den allerede nævnte *Angivelsesmåde*.

§ 72. På næsten alle Ægyptens Pyramider

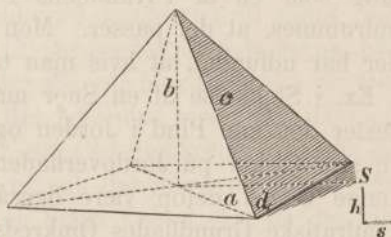
have Sidefladerne — dette kunne vi endnu udmåle — havt nøjagtig lige stor Heldning. Det må antages, at denne bestemte Heldning har hørt til de kanoniserede Forskrifter [○], hvorefter de ægyptiske Foretagender i såre mange Retninger ledes. Man har ved Bygningen havt visse Mål, der skulde holdes med Hensyn til Heldningen, bestemte på en lignende Måde som den, hvorved Solstrålernes Heldning kunde fastslåes.

Nogle Opgaver i Ahmes' Regnebog (§ 36) stadfæster dette, idet der dog her er angivet (ganske vist ikke, hvor mange Gange den vandrette Linie *a* (Tg. 23) er mindre end Højden *b*, men) hvor mange Gange den vandrette Linie *a* er mindre end Pyramidens skrå Kant *c*, nemlig omtrent $\frac{3}{4}$ af *c*, hvilket selvfølgelig også må være bestemmende for Heldningen. Man kunde imidlertid ikke kontrollere denne Heldning indvendig fra; thi Bygningsmåden hindrede dette, idet nemlig hver Farao, der kom på Tronen, påbegyndte Opførelsen af en Pyramide omkring sit tilkommende Gravkammer på en kvadratisk Grundflade, fra hvilken trappetrinformede Sider efterhånden førte op til Spidsen.

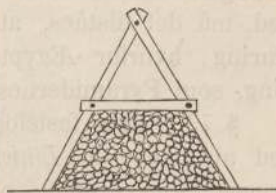
I hvert År af Kongens Regjeringstid opførtes et nyt Lag af Trappetrin, og såldes voxede Bygningen til en Størrelse, der svarede til Kongens Regeringstid, efter hvilken man kun fuldførte det sidst begyndte Lag, udfyldte Rummene mellem Trappetrinene ovenfra og nedefter og glasserede Overfladen.

At man således ikke har kunnet komme til at måle Pyramidens Højde, har rimeligvis været en Grund til, at man har

valgt at fastlå Forholdet mellem a og c , thi man har altid ligefrem kunnet måle c under Pyramidens Opførelse; og a eller den halve Linie mellem Grundfladens to modsatte Spidser har man rimeligvis kunnet finde ved at opmåle Grundfladens Kanter (jfr. § 80). Sådanne Målinger og dertil svarende Regninger have været en af Harpedonapternes Opgaver at udføre under det store Bygningsarbejde, og det er vel i så Henseende, at Ahmes giver Exempler til Øvelse; thi man har her næppe villet nøjes med en fast, men lille Model for Heldningen, således som man kan bruge den ved mindre Foretagender, og som den endnu den Dag idag bruges af vore Arbejdere, f. Ex. til Opsætning af Skjærvebunker, Tg. 24, til Dannelse af Jordvolde, Gravning af Grøfter e. l.



Tg. 23.



Tg. 24.

Der er Ægyptologer, som i Pyramidernes ensartede Heldning have villet se en bestemt Tanke udtrykt. Således har én fundet, at dersom man tog Pyramidens Højde (Tg. 23, b) og tegnede et Kvadrat, hvori denne var Side, vilde dette Kvadrat just have samme Fladefang som en af Pyramidens 4 Sideflader, og det må indrømmes, at det passer. Men så er der en anden, der har udfundet, at hvis man tager Pyramidens Højde, f. Ex. i Skikkelse af en Snor med en Pind i hver Ende, fæster den ene Pind i Jorden og med den anden ridser en stor Cirkel på Jordoverfladen, så vil Omkredsen af denne Cirkel netop være ligeså lang som Pyramidens kvadratiske Grundflades Omkreds. At dette tilfældigvis passer ligeså godt som hint, giver Anledning til at betragte sådanne Forklaringer for søgte, ligesom andre Påstande om, at der inde i Pyramidernes Gravkamre skulde findes, så at sige, hele Magasiner af Videnskabelighed, idet Størrelsesforhold, Former og Vægtforhold ved Sarkofagerne skulde være aldeles nøjagtige Udtryk for Længdemål, Rummål, Vægtmål o. s. v., ja, at endog Ting som Jordens Størrelse, Jordaxens Retning i Himmelummet [☉] m. m. skulde som bundne Tanker ligge gjemte i Pyramiderne. — Medens sådant vistnok må betragtes som Overdrivelser af ægyptisk Videnskabelighed, må det tilståes, at der endnu savnes anden Forklaring, hvorfor Ægypterne just have valgt den Heldning, som Pyramidernes Sideflader nu en Gang have.

§ 73. Man fastslog altså i Oldtiden en Heldning ved at angive to *Liniemål*. En sådan Angivelsesmåde bruges, som omtalt, ofte endnu ved praktiske Foretagender og er i visse Tilfælde den hensigtsmæssigste, f. Ex. ved Jordarbejder, hvor en sådan Bestemmelse knytter sig naturligt til Angivelser af Jordarters Gnidningsmodstand, der betinger deres Tilbøjelighed til Nedglidning og derfor også den Heldning (»Anlæg«, som det kaldes), som Overfladen bør have for at være sikret

mod Nedglidning. Og endelig kan det om sådan Angivelsesmåde for Heldningen bemærkes, at den har ført til en hel Gren af Mathematiken, nemlig *Trigonometri*. Men, som i § 71 nævnt, denne Måde frembyder dog ikke noget egentligt *Mål* for Heldning — kun en *Angivelse* af bestemte Heldninger.

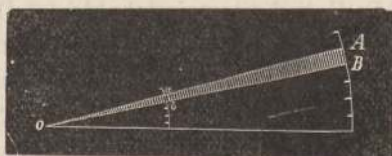
§ 74. Inden vi imidlertid kunne nå til dette, må vi først lægge Mærke til, hvorledes Babylonierne behandlede Cirklen, noget, der allerede blev berørt i § 38. Det blev der omtalt, at det Mål, hvormed man har slået en Cirkel, nøjagtig i 6 Skridt går Cirkelomkredsen rundt, og at dette gav Anledning til, at Babylonierne betragtede en sådan Sjettedel som en Slags Enhed. Da de dog til lige inddelte hele Cirkelomkredsen i 360 Stykker, fordi Solen omtrent bevæger sig et sådant Stykke i hvert Døgn, kom hin Enhed til at indeholde 60 Dele, Grader, og denne Omstændighed anses for Grunden til Babyloniernes Inddelinger i 60. Hver Grad deltes så igen i 60 Minuter, 60', hvert Minut i 60 Sekunder, 60'', osv.

Denne Babyloniernes Tilbøjelighed til at dele Cirklen i 6 eller 12 fremgår bl. a. af gamle Afbildninger. Tg. 25 er en Afbildning af Kongevognens Hjul på et ninivitisk Mindesmærke; og man har ægyptiske Billeder, der forestille skatskyldige *Asiater*, som bringe de ægyptiske Konger af 18de Dynasti [○], vel henved 1700 År før Kr., deres Tribut, og hvor cirkelformige Prydelser uden Undtagelse ere inddelte i 6 eller 12, medens cirkelformige Prydelser på rent ægyptiske Tegninger tidligere altid vare delte i 2, 4 eller 8 Dele. Først fra det 19de Dynasti træffes på Ægypternes Afbildninger af deres egne Vogne mest Hjul med 6 Eger, sjelden med 4, så at man temmelig sikkert kan se, når 6-delingen er indført fra Babylonierne til Ægypterne.



Tg. 25.

§ 75. For den umiddelbare Anskuelse viser Himmelhvælvingen sig som en Kugleskal, hvorpå Sol, Måne og Stjerner daglig synes at bevæge sig i Cirkler $[\odot]$. Hvor store disse Cirkler synes at være, altså hvor langt Sol, Måne og Stjerner synes fjernede fra os, deraf få forskellige Mennesker forskjelligt Indtryk. Derom vidner den Strid, man stundom kan høre, når én påstår, at Månen synes at være på Størrelse med en Tkekop, en anden, at den synes som en Slibesten. I Virkeligheden kunne en Thekop og en Slibesten synes lige store, når blot Slibestenen anbringes i passende Afstand længere borte end Thekoppen. Hvad man altså egentlig er uenig om, er den tilsyneladende Afstand. Der kan da heller ikke være Tale om almindelige Størrelsemål (Fod e. l.) for



Tg. 26.

Himmellegemerne eller deres Bevægelser, når man ikke kjender Afstandene; og det eneste, der altså er at gjøre, er, hvad Babylonierne gjorde, idet de indførte *et Mål for Cirkler, der er uafhængigt af Cirklernes Størrelse*. Hvad enten nemlig Cirklen er stor eller lille, deles den i 360 Grader. Den store Cirkel fåer altså store Grader, den lille små Grader; men betragtes begge fra et fælles Centrum gjør den lille Grad *ab*, Tg. 26, samme Indtryk på Øjet *o*, som den store Grad *AB*.

Gradangivelsen er altså ganske uafhængig af Størrelsen. Den er i Virkeligheden *en ren Brøkangivelse*. Når vi med Hensyn til en Cirkel tale om 90° , er dette blot den babyloniske Skrivemåde, nemlig $\frac{90}{60}$, for Brøken $\frac{1}{4}$, hvormed vi mene en Fjerdedel af Cirkelns Omkreds.

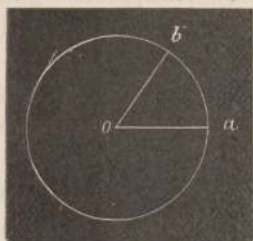
Når vi sige, at Solens Tværmål er omtrent $\frac{1}{2}^{\circ}$, så kunde dette også udtrykkes således, som visse andre Oldtidsfolk have gjort, at Solens Tværmål er $\frac{1}{120}$, hvorved forstås, at dersom vi, med os selv som Midtpunkt tegne en Cirkel Himlen rundt således, at den går igjennem Solen, vil Solens Tværmål optage $\frac{1}{120}$ af Cirkelens Omkreds. Når f. Ex. Solen er ved at gå ned, viser den sig således, at 720 Sole vilde danne en sammenhængende Perlesnor om Synskredsen.

Det viser sig atter (jfr. § 59) her, at *Stjernehimlen* har bragt Menneskene til at gjøre noget, som ikke lå helt lige for, nemlig at skaffe et nyt Udtryk for visse Rumstørrelser. Sådanne rumlige Størrelser, som ellers omgive os, falder det naturligt at måle med et Liniemål. Således så vi i forrige Afsnit, hvorledes Fladefang blev målte med Liniemål, og vi skulle senere se, at Rummål behandles på lignende Måde. Ligeledes er det omtalt, hvorledes både Ægypterne og vi selv, ligeoverfor Heldningens Størrelse, kunne benytte et Par Liniemål til at udtrykke den ved.

Men her stå vi overfor en Rumstørrelse, som vi — fordi Stjernehimlen så at sige anspænder os dertil — ikke mere angive ved Linier, men ved en ren Brøk. Gradinddelingen er en Slags Abstraktion. Det går med et Gradantal ligesom med et andet abstrakt Tal. Det har sin Gyldighed for Tanken; men dets Betydning i den udvortes Rumverden beroer på, hvilken Cirkel det knyttes til.

§ 76. Herved er det, at man har nået også at få indført et *Mål* for en Linies Heldning mod en anden. Medens nemlig en Stjerne ved at stige fra *a* til *b* (Tg. 27) har gennemløbet $56^{\circ} 15'$ eller $\frac{5}{32}$ af den hele Cirkel, så har dens Lysstråle *ao*, Tg. 27, fået en større og større Heldning, idet den er bleven drejet om *o*, en Drejning, der åbenbart må være samme Brøkdel af en hel Omdrejning, hvad enten denne Brøk nu angives som

$\frac{5}{32}$ eller som $56^{\circ} 15'$. Således kan Grademål på en Gang være Mål for Cirklen og for Liniens Drejning, altså i nærværende Tilfælde for Heldningen. Dette vilde dog



Tg. 27.

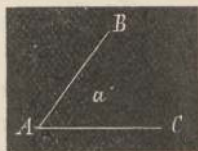
efter almindelig Sprogbrug ikke gjælde for Heldningen længere, end til Drejningen eller Heldningen blev $\frac{1}{4}$ eller 90° . Fortsættes Drejningen videre, vil Heldningen begynde at aftage, men til modsat Side. Tilmeld vilde det også være mindre godt at tale om en Liniens »Heldning« imod en anden Linie, som ikke

selv var vandret; og da man nu netop tidt har Brug for en sådan Angivelse, give vi hellere Slip på Ordet Heldning og udtrykke og måle en Liniens Stilling i Forhold til en anden ved den Brøkdels af en hel Omdrejning, som man måtte tænke sig, at den ene Linie havde gjort, hvis den havde begyndt med at falde sammen med den anden og derfra var drejet hen i den Stilling, den nu indtager; denne Brøkdel, som vi kalde en Vinkel, dannet af to Linier, er den samme som den Brøkdel af en Cirkel om Liniernes Skjæringspunkt, som Linierne afskjære af denne, og udtrykkes derfor, ligesom sidstnævnte, i Grader, Minuter og Sekunder.

En sådan fuldstændig Redegjørelse for en Vinkel er næppe givet fra Babyioniernes eller Ægypternes Side; men Spiren hertil findes i Babyioniernes Gradangivelser. Hel Klarhed vinder Sagen først hos Grækerne, der byggede videre på babylonisk og ægyptisk matematiske Forudsætninger; men vi savne historiske Enkelt-heder til at kunne efterspore, når og hos hvem en Vinkel udtrykt som en Brøk for første Gang bliver Menneskeslægten klart bevidst. Da denne Sag imidlertid har så nøje Sammenhæng med Cirkelns Gradering, at allerede denne må siges at være et væsentligt Skridt

hen imod en klar Opfattelse af Vinklen og dens Måling, gjør man i hvert Fald næppe Uret i at give Babylonierne Æren for en vigtig Del af dette Fremskridt, og at anse Stjernerne som en væsentlig Drivkraft dertil.

At finde Udtryk og Mål for sådanne Størrelser (Længde, Fladefang, Rumfang, Vægt osv.), som i det daglige Liv have virkelig Betydning, har forholdsvis været let i Sammenligning med at finde Udtryk og Mål for en Vinkel, der for den dagligdags Anskuelse mere betegner en *Stilling* (af en Linie til en anden) end just en *Størrelse*. Dette får man let at føle, når en Vinkel stundom findes udtrykt som *den Del af Rummet, a* (Tg. 28), der findes mellem to Linier, som skjære hinanden, med den Tilføjelse, at Linierne tænkes forlængede i det Uendelige. Folk bemærke da tidt ganske naturligt: »Så må Rummet *a* da også være uendeligt«.



Tg. 28.

»Ja!« »Men der kan da ikke være noget, der er mere end uendelig stort, og der kan jo så ikke gives nogen større Vinkel«. Skjøndt Matematikere nu ikke ganske kunne indrømme Rigtigheden af denne sidste Sætning, men må forbeholde sig først senere at belyse den lidt nærmere, så viser dog en sådan Bemærkning, at det er ret rimeligt, at det fra først af kan have faldet svært at opfatte en Vinkel klart som en *Størrelse* og dette Skridt må derfor anses som et betydningsfuldt Skridt i Geometrien.

§ 77. At en Linie går »tværs på« en anden (Tg. 29) må selvfølgelig forståes således, at ikke nogen af de fire Vinkler er større end sin Nabo, at altså alle Vinklerne ere ligestore, hver lig med $\frac{1}{2}$ eller 90° . Man kalder en sådan Vinkel en *ret Vinkel* (skrives ofte 1 R) og siger, at den ene Linie står *vinkelret* på den anden. En Vinkel, der er mindre end en ret, kaldes en *spids Vinkel* (Tg. 28), en, der er større end en ret, kaldes en

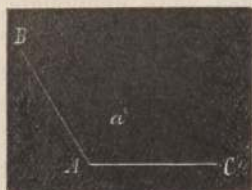
stump Vinkel (Tg. 30). De to Linier, der danne Vinklen, kaldes dens *Ben*. Det Sted, hvor Benene støde sammen, kaldes Vinklens *Spids*. Med Bogstaver kan en Vinkel



Tg. 29.

betegnes ved et enkelt Bogstav mellem Vinklens Ben eller ved dens Spids, hvortil gjerne føjes Vinkeltegnet $\angle$, f. Ex. i Tg. 28 og 30 $\angle a$ eller $\angle A$. Hvor dette kan misforståes, måske fordi der også ligger andre Vinkler, betegner man en Vinkel med et Bogstav på hvert Ben og et ved Vinkel-spidsen, hvilket sidste altid nævnes i Midten, f. Ex. $\angle BAC$.

Man får jevnlig at gøre med Vinkler, der tilsammen udgjøre en ret, — de kaldes *Complementvinkler*, — og ligeledes med Vinkler, der tilsammen udgjøre 2 rette — de kaldes *Supplementvinkler*.



Tg. 30.

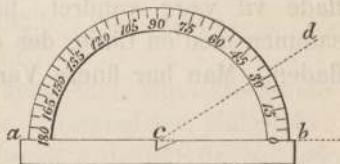
Ex. 1. Når en Stjerne er $25^{\circ} 13'$ over Synskredsen, hvor langt er den da fra det Sted, op imod hvilket Lodlinien peger (Zenith), og fra det Sted, ned imod hvilket den peger (Nadir)?

Ex. 2. De ægyptiske Pyramiders Sideflader helde $51^{\circ} 50'$ mod Horizonten. Hvilken Vinkel danne de med Lodlinien?

§ 78. I et særligt Tilfælde sker Inddelingen ofte efter et andet Brøksystem end det babyloniske, nemlig ved Kompasset $[\odot]$, hvor man gjerne bruger en Inddeling efter Totalsystemet, idet den Skive, hvorpå Magnetnålen viser, eller som den bærer, først deles i to (ved en Linie fra N. til S.), dernæst af en vinkelret Linie i 4 (Ø. V.), så ved Halvering af disse 4 rette Vinkler i 8 (NØ, osv.), fremdeles i 16 (NNØ, osv.) og endelig i de 32 såkaldte »Streger« (N. til Ø., osv.). Denne Inddeling er dog ikke gammel. Den fremkom først i Slutningen af det 16de Årh. e. Kr. og skyldes rimeligvis Hollænderne.

Ex. Når en Stjerne går ned i VNV, hvor mange Grader og Minuter er den da fra Nord og hvor mange fra Vest og fra Syd?

§ 79. Vi have set (§ 61), at det var Linen, man oprindelig brugte til at afsætte en ret Linie med, ligesom den også har givet Linien Navn. At man også har brugt Linien — måske med en Pløk i hver Ende — fra først af til at tegne Cirkler med, kan der vel næppe være Tvivl om, da en sådan Operation ved mange Lejligheder frembyder sig aldeles af sig selv, såsom ved et Kreaturs Tøjrsdrag. Det er i og for sig tiltalende, at man har kunnet bruge samme simple Redskab til at tegne både ret *Linie* og *Cirkel*, ja, rimeligvis endog til at *tage Mål* med og Pinden i Linien til at *tegne* med; men ved adskillige Lejligheder volder det dog nogen Besvær, at Linen skal holdes udstrammet. Denne Fordring falder bort ved Overgangen til to særlige Redskaber til Frembringelse af ret Linie og Cirkel, nemlig Lineal og Passer, som dog kun egne sig til mindre Tegninger. Grækerne henvise Opfindelsen af disse Redskaber til den mythiske Person Dædalos [⊙], hvilket altså vil sige det samme som, at ingen kjendte Oprindelsen af dem ved den egentlig historiske Tids Begyndelse. Ved Tegningerne i Ahmes' Regnebog viser det sig, at her har været brugt Lineal, men ikke Passer.

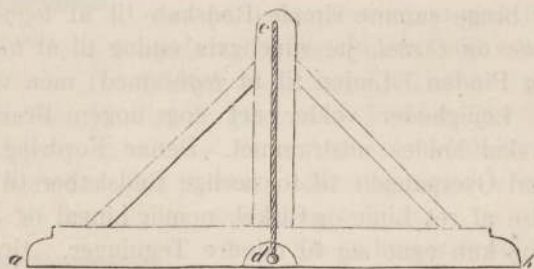


Tg. 31.

Ved Måling af en Vinkel bruger man ofte — istedenfor at tegne en Cirkel om dens Spids og foretage Inddeling af denne — et materielt Redskab, som Tg. 31 viser, nemlig en inddelt Halvcirkelring, der lægges på Vinklen således, at dens Centrum falder i Vinkelspidsen, og at Linien *cb* falder sammen med Vinklens ene Ben. Man aflæser da blandt Inddelingerne, hvilket Gradantal det andet Ben går

igjennem (32 °). Når sådanne materielle Grademål begyndte at tages i Brug, lader sig ikke afgjøre; men Grækerne give den berømte Bygmester *Theodoros* fra Samos [⊙] Æren. Dette viser vel i hvert Fald, at et sådant har været brugt af ham, og altså i hvert Fald er så gammel som fra det 7de Årh. f. Kr.

Samme *Theodoros* tillægger man Opfindelsen af det såkaldte Vaterpas eller Vandmål, Tg. 32, hvis Grund-



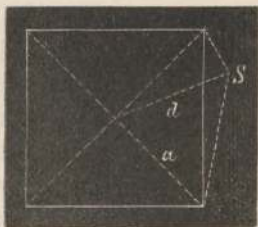
Tg. 32.

flade vil være vandret, når et Lod i en Snor falder sammen med en Linie, der er tegnet vinkelret på Grundfladen. Man har finere Vandmål i vore Dage.

Måling af det utilgjængelige.

§ 80. Under Opførelsen af Pyramiderne kunde, som det er blevet omtalt i § 72, Ægyptere ikke foretage Målinger indvendig i disse til Kontrol for Heldningens Rigtighed. Det fremgaaer da af Ahmes' Regnebog,

at de to Mål, som de brugte til Kontrollen, må have været Pyramidens skrå Kant c (Tg. 23) og den under c liggende vandrette Linie a , altså en Linie fra Grundfladens Spids til dens Midte, en Linie, som man ganske vist ikke heller har Adgang til, men som Ægypterne dog rimeligvis må have kunnet bestemme Længden af. Hertil må de først have opmålt Sidelinien i den kvadratiske Grundflade. Det er muligt, at de derefter have kunnet regne sig til a , når de en Gang for alle vidste, i hvilket Forhold en Linie fra Midten til Spidsen i et Kvadrat stod til dettes Sidelinie; Ahmes' Beregninger af a og c (Tg. 23) berettiger til denne Formodning. Men stoler man på Grækernes Vidnesbyrd om Ægypternes Tegnefærdighed, vilde de i alt Fald have kunnet løse Opgaven derved, at de i Marken afsatte et stort Kvadrat (Tg. 33) svarende til Pyramidens Grundflade, afstak Linier mellem Vinkelspidserne og målte a .



Tg. 33.

Ægypterne behøvede ved en sådan Operation ikke en Gang at udføre Tegningen af Grundfladen så stor, som den i Virkeligheden var. De kunde tegne den i, hvad man kalder, »formindsket Målestok«, ja, på et Stykke Papyrus, et Brædt e. l., når de blot på dette afsatte den Målestok, som de brugte ved Tegningen af Kvadratet, og senere brugte den samme Målestok ved Opmålingen af den således tegnede Linie a .

At man har Grund til at formode, at Ægypterne vare i Stand til at udføre sådant, kan sluttes af deres mange Kunstværker i overnaturlig Størrelse, der vise, at de have forstået den næsten endnu sværere Kunst at tegne i forstørret Målestok, og dette endog, hvor Talen var om at tegne mere indviklede og vanskelige Figurer,

såsom Menneskelegemer. Et ufuldført Gravkammer for Setos I, Fader til Ramses II, viser tilmed, hvorledes man bar sig ad med Forandring af Målestok for sådanne friere Afbildninger. Man inddelte såvel Modelbilledet som den Vægflade, hvorpå det skulde gjengives i anden Målestok, i ligestore Småkvadrater og fik således gjort klart, hvilke Dele af Tegningen der befandt sig i de forskellige Kvadrater — en Fremgangsmåde, som endnu stundom bruges.

Ex. Søg ved Tegning på den ovennævnte Måde at udmåle, hvor stor a må være i en kvadratisk Grundflade, hvis Side er 1000 Fod.

§ 81. I den Tid, da Ægypterne under det 18de og 19de Dynasti (§ 73) vare overmægtige over Asiaterne, modtog de adskilligt fra Babylonierne. Men da Ægypterne fra omtrent År 1300 f. Kr. begyndte at blive forjagne fra Asien og bleve mere og mere trængte i deres eget Land, trak de sig mere ind i deres egen Skal. Da endelig Riget ved udvortes Fjender og indre Uroligheder var blevet helt opløst, og Psammetik i det 7de Årh. f. Kr. påny havde samlet det igjen ved tilfældig strandede »Grækere i Kobberrustninger«, begyndte under hans Regjering et mere medgjørligt Forhold til Fremmede, navnlig til Grækerne, at gjøre sig gjældende, og dette vedvarede under hans Eftermænd, så at det i de følgende 200 År blev almindeligt, at Grækere studerede i Ægypten; men ved at »studere« må man mere tænke på, at de så, hvad der var at se i det virkelige Liv, og indøvede sig i ægyptiske Færdigheder, end at de nød nogen væsentlig mundtlig eller boglig Undervisning. Dertil vare de ægyptiske Præsteskaber altfor tilbageholdne og Sproget altfor fremmed og vanskeligt. Det er betegnende, hvad Strabo siger i sin Beskrivelse af Heliopolis: »Her viser man nu Præsternes Huse og også Platos og Eudoxos' Opholdsteder. Thi Eudoxos kom hid med Plato og de levede der sammen med Præsterne i 13 År, som nogle

sige. Thi disse, som ere dygtige i Himmelkundskaben, men hemmelighedsfulde og ikke gjerne fortælle andre derom, bragte de kun med Tiden og ved venskabelig Ærbødighed så vidt, at de meddelte dem nogle af deres Kundskaber; men det meste skjulte dog Barbarerne (o: Ægypterne).«

Under disse vanskelige Forhold, hvor de besøgende Grækere ofte måtte gjætte sig til Ægypternes Mening, og vel stundom ikke en Gang havde let ved at afgjøre, om det, de senere fandt på, var deres eget eller Ægypternes, er det forståeligt, at ikke alene i Nutiden, men også i Oldtiden lyde Udsagnene om Ægypternes Videnkabelighed højst forskjelligt. Snarest må det vel antages, at de med den for *Kamiterne* [○] ejendommelige *Dygtighed i Håndens Verden* i Forbindelse med sund menneskelig Omtanke have udfoldet en stor udvortes Virksomhed og udført de mange storslåede Foretagender, hvorom de uforgjængelige Ruiner bære Vidnesbyrd.

Rigt Æmne til Eftertanke var altså tilstede, og i visse Henseender vare Tankerne allerede tænkte; men det tør måske siges, at de væsentlig vare tænkte for Tingenes Skyld. Man sporer endnu ikke den Glæde, der er ved at tænke Tankerne for Tankernes Skyld, og som senere kjendes; thi hvor noget er i Færd med at komme frem som rent Tankeindhold, f. Ex. i Trekanten 3, 4, 5 (§§ 68—70), der tilslører man det ved at stille en Guddom på dets Plads istedenfor at lægge det klart frem.

§ 82. Det blev derimod *Grækerne*, der efterat have samlet ind i Ægypten, først ret egentlig fik gjort dette for selve Tanken og for al videre Udvikling så betydningsfulde Skridt; men det er betegnende for de *højtstræbende Jafetider* [○], at hvad der omtales som noget af det, der først optog dem, er Bestræbelsen efter at *måle det utilgjængelige*. Det er omtalt, at Ægypterne må have kunnet gjøre en sådan Måling af Linien fra

Midten af Pyramidens Grundflade til Grundfladens Spids; og det er muligt, at de have kunnet mere i denne Retning, men historisk træffe vi det dog først hos Grækerne, navnlig til en Begyndelse hos Thales fra Milet, på hvem senere Forfattere på en — ganske vist noget sagnagtig — Måde, peger hen som Geometriens Grundlægger.

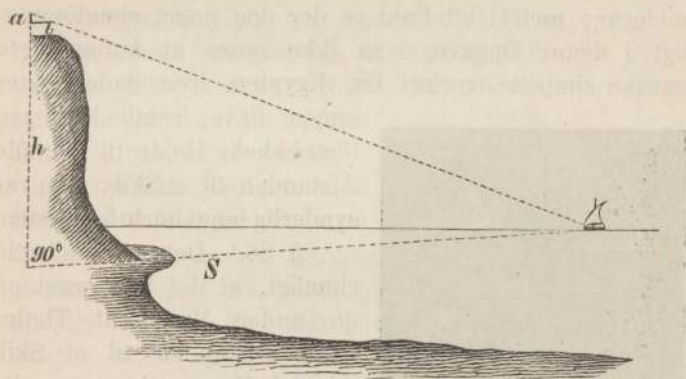
§ 83. Byen *Milét*, anlagt på Lilleasiens Vestkyst af Karerne, fik efter Jonernes [○] Indvandring et sådant Opsving, at den blev en af det blomstrende Joniens [○] livligste Handelsstæder. Den havde 4 Havne, og Kolonier langs det sorte og assovske Hav, og dens Handel strakte sig til hele den da kjendte Verden. Her blev *Thales* født omtrent 640 f. Kr. af Forældrene Examios og Kleobuline af ansét Familie. Thales blev opdraget i Faderens Livsstilling, som Kjøbmand, og dertil hørte i Datiden Søfarten. Som ungt Menneske foer han med Salt og med Olie — på en Gang Belysningsvædske og Næringsmiddel i Middelhavslandene —, og han kom således også til Ægypten, der kort i Forvejen under Psammetik havde begyndt at åbne sine Havne for Udlandinge. Optaget af, hvad han så, slog han sig ned her i lang Tid for at sætte sig ind i, hvad her var at lære. Han havde aldrig før havt nogen Lærer, så at det uden Tvivl har været et vanskeligt Arbejde at trænge ind både i Sproget og i Præsternes Hemmeligheder; og først da han nærmede sig 50 Års Alderen, vendte han hjem igjen til *Milét* og blev der Stifter af den såkaldte *joniske Skole*.

§ 84. Flere græske Forfattere fortælle, at Thales, inden han forlod Ægypten, skal have løst en Opgave, som vakte Faraos Beundring, nemlig at måle en Pyramides Højde ved Hjælp af dens Skygge; to af Forfatterne føje til, at det skete i det Øjeblik, da et Legemes Skygge *s*, Tg. 23, er ligeså lang som dets Højde *h*, et Øjeblik, da også Pyramidens lodrette Højde *b* må være

ligeså stor som Afstanden d fra Grundfladens Midtpunkt til Skyggens Spids S . Istedendfor at skulle måle b , er det altså nok, om man nu er i Stand til at måle d ; og dette har Thales kunnet gjøre ved på *Tegningen* af Grundfladen, Tg. 33, at afsætte Punktet S og derved at tegne og måle d .

Ahmes' Regnebog lader formode, at Ægypterne nok måtte kunne finde på at måle en Pyramides Højde. I så Fald kunde Thales' Fortjeneste muligvis have bestået i at have gjort dette på en særlig simpel og fattelig Måde, som f. Ex. foranstående, en Måde, der har kunnet fattes selv af dem, som ikke vare indviede i Harpedonapternes Hemmeligheder, altså også af Farao selv. Thales roses i hvert Fald for Evne til at gjøre en Sag fatteligere.

Skulde der endelig i den hele Fortælling ikke være noget sandt med Hensyn til, at Thales selv havde fundet



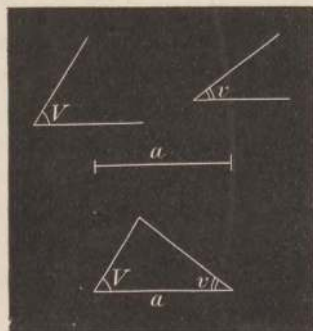
Tg. 34.

på en Måde, eller blot på en ny Måde, så aflægger Fortællingens Gjentagelse af græske Forfattere i hvert Fald Vidnesbyrd om, at Grækerne have følt sig tiltalte ved Løsningen af sådanne Opgaver, og at de selv i disse have set Spiren til Geometrien, idet de særlig omtaler denne Slags Ting hos den, som de kalder Geometriens Grundlægger.

§ 85. Thales berømmes nemlig endvidere for Løsning af den Opgave: *fra Kysten at måle Afstanden til et Skib ude på Havet*. Nogle af dem, der i vore Dage ere tilbøjelige til at give Ægypterne Æren for alt, hvad Thales førte frem, mene, at denne Opgave blev løst på følgende Måde. På Toppen af en Bakke ved Kysten, Tg. 34, hvis Højde man kjender, anbringer man en Vinkelhage ab således, at b er vandret, a lodret, og at Vinkelhagens Flade er rettet imod Skibet. Man sigter dernæst imod dette ved at sætte sådanne Mærker på Grenen a og på Grenen b , at en Sigtelinie gennem disse Mærker peger mod Skibet. Da må Afstanden S være ligeså mange Gange større end b , som Højden h er større end a .

Hvis det er således, at Thales har båret sig ad, kan det ikke nægtes, at det er en lignende Tankegang som den, hvorefter Ahmes beregnede Linier ved Pyramiderne; men i alt Fald er der dog noget ejendommeligt i denne Opgave, som ikke synes at kunne være ganske simpelt overført fra Ægypten, hvis flade Kyster næppe have frembudt nogen tilstrækkelig Højde til at måle Afstanden til et Skib, som var synderlig langt borte fra Kysten.

§ 86. Det er imidlertid rimeligt, at det har været på en anden Måde, at Thales målte Afstanden til et Skib ude på Havet; thi en særlig pålidelig historisk-mathematisk Forfatter, *Eudemos* fra Rhodos (i Slutningen af 4de Årh. f.



Tg. 35.

Kr.), skriver, at ved den Måde, hvorpaa Thales målte Afstanden til et Skib, har han brugt den Sætning:

En Trekant er bestemt ved en Side og de to hosliggende Vinkler.

Når man véd, at en Side i en Trekant har Længden a (Tg. 35), og at de to Vinkler ved Enderne af a ere V og v , kan man tegne Trekanten; thi lægges V og v ved a 's to Ender, så at deres ene Ben falder i a , ville de andre Ben være Trekantens to andre Sider.

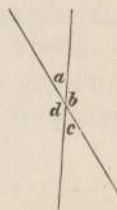
Selv med denne Oplysning af Eudemos kan der endnu tænkes flere Måder at løse Opgaven på, hvoraf to skulle omtales i § 88 og 89.

§ 87. Den ene Måde beroer imidlertid desuden på en anden Sætning, som Eudemos også siger, at Thales har kjendt, nemlig, at

Topvinkler ere lige store.

At Vinkel c (Tg. 36) er Topvinkel til a vil sige, at dens Ben ere Forlængelser af denne Vinkels Ben ud over Vinklens Spids. Ligeledes ere b og d Topvinkler.

Medens Thales måske har betragtet det som en Selvfølge, at sådanne Vinkler ere lige store, fortælles det, at først Euklid, hvorom mere senere, agtede denne Sætning et videnskabeligt Bevis værd. Dette Bevis er omtrent følgende.

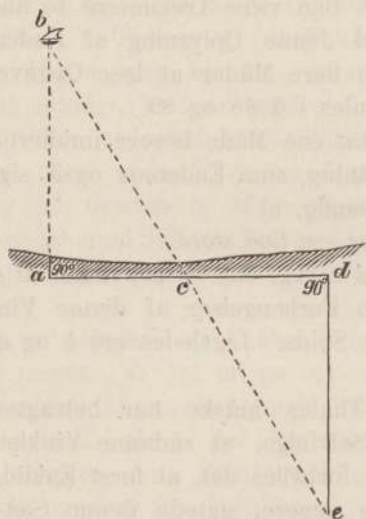


Tg. 36.

To Vinkler, som a og b , der have et Ben fælles og det andet i en og samme Linie, men i modsat Retning, kaldes *Nabovinkler*. To sådanne udgjøre tilsammen to rette Vinkler. Det samme gjælder c og b . Men når a og b tilsammen er lig med c og b , må a være lig c .

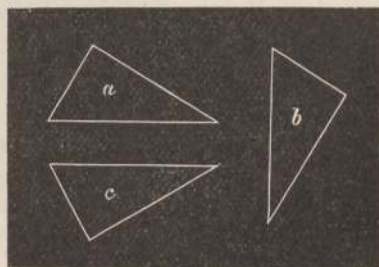
§ 88. Lad nu a (Tg. 37) være en Person på Land, ab Sigtelinien ud til Skibet. Da kan man, f. Ex. ved Harpedonapternes Fremgangsmåde (§ 70), udstikke en Linie acd vinkelret på ab , og udgående fra a , og på denne Linie afmåle to lige store Stykker, nemlig først ac og derpå cd . — Fra d udstikker man så atter en Linie de vinkelret på ad , men til modsat Side af ab . Når man da i Linien de fjerner sig så langt fra d , at man har

Skibet b og Stedet c , hvor man kan have sat en Stok, i én Sigtelinie (jfr. § 62), vil man netop være i ligeså stor Afstand fra d , som b fra a , og man kan altså på Land opmåle denne Afstand ed . — De to Trekkanter acb



Tg. 37.

og dce må nemlig være ens (§ 86); thi Siden ac er lig Siden dc (således ere de afsatte), Vinklen ved a og Vinklen ved



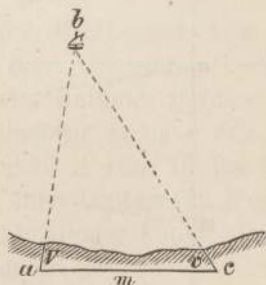
Tg. 38.

d ere rette, altså lige store, og Vinklen acb er lig Vinklen dce , fordi de ere Topvinkler (§ 87).

To Figurer, der ere således ens, at den ene ved at lægges på den anden vil falde fuldstændig sammen med denne, ville vi kalde *samfældige*. Kan man vel bringe den ene Figur c (Tg. 38) til at dække den anden a , men kun derved, at c må vendes om således, at den nu opadvendte Side kommer nedad, kaldes Figurerne omvendt-samfældige (symmetriske). Kan derimod den ene Figur b bringes til at dække a blot ved Forskydning eller Drejning eller begge Dele, men uden at vendes om, kaldes Figurerne ligefrem-samfældige (congruente). Samfældig udtrykkes ved Tegnet $\cong$.

§ 89. En anden Måde, hvorpå Thales i Samklang med Eudemos' Bemærkning kan have løst Opgaven: at måle Afstanden til Skibet, er følgende.

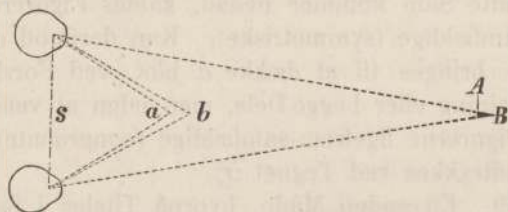
To Personer a og c (Tg. 39) tæt ved Kysten befinde sig i en indbyrdes Afstand m , som de kjende eller måle. Personen a måler da desuden den Vinkel V , som en Sigtelinie ab til Skibet danner med en Sigtelinie ac til den anden Person. Apparater til Vinkelmåling vare jo opfundne (jfr. § 79). Personen c måler ligeledes Vinklen v . Man kjender således i Trekanten acb Siden ac og de to hosliggende Vinkler V og v , og man kan altså tegne Trekanten andensteds, enten i sand Størrelse eller, hvad der er mere rimeligt, i formindsket Målestok (jfr. § 136); og på Tegningen kan man måle den søgte Afstand ab .



Tg. 39.

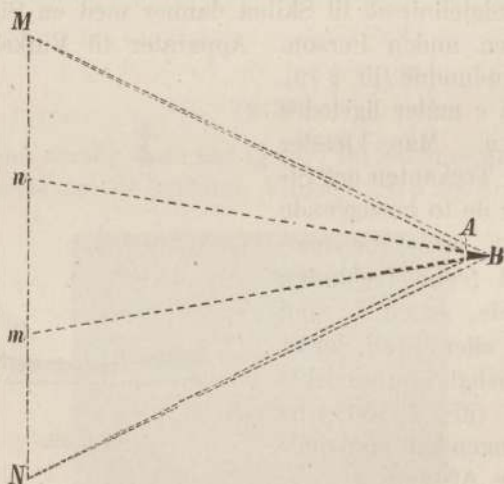
§ 90. Denne sidste Måde for Afstandsmåling er så almenfyldig, at endog vor Afstandsbedømmelse med to Øjne er grundet på den samme Sætning. I Tg. 40 ses tilvenstre de to Øjne ovenfra. Fæste disse sig på en

nær Ting a , sker dette derved, at Øjnene ved Hjælp af visse Muskler, anbragte på deres Sider drejes temmelig stærkt mod hinanden. Betragter man derimod en fjern Ting A , sker det ved, at Øjnene drejes mere lige ud. Ved



Tg. 40.

Musklerne Anspændelse have vi en umiddelbar Fornemelse af, hvilke Vinkler Øjnenes Retninger danne med den



Tg. 41.

Linie s , der forbinder de to Øjne. Trekanten er altså bestemt ved den uforanderlige Afstand s mellem de to

Iagttagelsestationer (Øjnene) og de to hosliggende Vinkler. Det er ved Øvelsen, at man får Evne til at vurdere Muskernes Anspændelse, og derved at bedømme Afstanden, ligesom man kan øve sig i at fornemme, hvad en Ting vejer, ved den Muskelanspændelse, der fordres for at holde den oppe; men noget nøjagtigt Mål nåes hverken ved hin eller ved denne Bedømmelse.

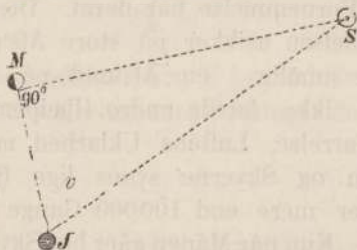
Tillige vil det bemærkes, at, når en nær Ting fjerner sig lidt, nemlig fra a til b , må også Øjnene drejes kjendeligt; når derimod en fjern Ting fjerner sig ligeså meget, nemlig fra A til B , vil den Drejning, som Øjnene i denne Anledning må foretage, være så forsvindende, at man ingen sikker Fornemmelse har deraf. Derfor bliver Afstandsbedømmelsen usikker på store Afstande og vilde være aldeles umulig i en Afstand på f. Ex. $\frac{1}{2}$ Mil, dersom man ikke havde andre Hjælpemidler i Gjenstandenes Størrelse, Luftens Uklarhed m. m. Således kunne Månen og Skyerne synes lige fjerne, skjøndt Månen ofte er mere end 100 000 Gange så langt borte som Skyerne. Kun når Månen går bag Skyerne, skjønnes det, at dens Afstand er størst.

§ 91. Der kan bødes på den Usikkerhed, som der er i en Afstandsmåling af en fjern Gjenstand, dersom man kan bringe de to Iagttagelsesstationer fjernere fra hinanden. Medens således Iagttagerne m og n (Tg. 41) næsten have samme Sigteretning til A som til det fjernere B , er dette ikke Tilfældet med Iagttagerne M og N , som derfor nok ved deres Vinkelmålinger kunne afgjøre, om den Ting, hvis Afstand de måle, er i A eller i B .

§ 92. Den samme Grundsætning for Afstandsmåling blev brugt af senere Grækere til at måle Afstanden til Månen og Solen. Således fandt den geniale*) Astronom

*) Aristarks Genialitet fremgæer ikke mindst af, at han påstod, ikke alene, som tidligere Grækere, at Jorden drejer sig om sin Axe, men tillige, at den går omkring Solen. Han var klar på, at

Aristark fra Samos (f. omtr. 265 f. Kr.), at Månens Afstand fra Jorden er 56 Gange så stor som vor Afstand fra Jordens Midtpunkt. Solens Afstand viste sig derimod for stor til, at den lod sig måle på denne Måde, når man i Valget af de to lagttagelsessteder skulde holde sig til et Par Steder på Jordkloden. Han fik derfor den stolte Tanke, så at sige, at anbringe sin Medhjælper på Månen. Han iagttog nemlig det Øjeblik, da Månen var netop halvt belyst af Solen (Tg.42), og da måtte han være berettiget til følgende Slutning: Hvis nu min Medhjælper befinder sig midt på den Del af



Tg. 42.

Månen, der vender mod Jorden, vil han have Jorden lige over Hovedet og Solen lige ud i Synskredsen (Horisonten); thi han står netop på Grænsen af den Del

det tager sig ligedan ud, enten vi bevæge os i den ene Retning, eller Omverdenen bevæger sig i den modsatte, og han fandt det rimeligst, at det var den lille Jord, der bevægede sig, fremfor den store Stjernehimmel og den store Sol. Da han dog ikke kunde levere egentlig Bevis herfor, gik senere Astronomer, navnlig Ptolemæos i Alexandria i 2det Årh. e. Kr. tilbage til den gamle Betragtning, der holdt sig, indtil Kopernikus i det 16de Årh. påny fremdrog Aristarks Visdom og tilføjede, at de andre Planeter forholdt sig ligesom Jorden, men uden at Kopernikus egentlig kunde give bedre Bevis derfor end Aristark. Dette er først nået senere.

af Månen, hvor Solen skinner, og den Del, hvor den ikke skinner. Min Medhjælper må altså måle Vinklen mellem sit Sigte til mig og sit Sigte til Solen til 90° . Selv måler jeg Vinklen v mellem Sigter til Solen og til min Medhjælper på Månen; og da jeg kjender Afstanden til Månen, er Trekanten bestemt ved Siden JM og de to hosliggende Vinkler v og 90° .

Aristark fandt således Solens Afstand meget stor, nemlig omtrent 20 Gange så stor som Månens; men dette er dog ikke nær nok (den er omtrent 400 Gange Månens Afstand, noget som man dog først har fået nogenlunde ordentlig bestemt i Året 1769). Solens Afstand er nemlig så stor, at selv en »Standlinie« så lang som Månens Afstand fra Jorden er for lille til at give tilstrækkelig Sikkerhed i Målingen på denne Måde; men af det anførte ses, hvorledes astronomiske Opgaver have ægget Grækerne og bragt dem til at anspænde deres Tanker for at bryde nye Baner.

§ 93. Selve Løsningen af astronomiske Opgaver er imidlertid ikke det *Tankeindhold*, vi her nærmest spørge efter, om end de astronomiske Fremskridt også kunde synes at være uden Værdi i materiel Henseende (hvad de dog ikke ere; thi Astronomien har bidraget overordentlig til de mere jordiske Naturvidenskabers Fremme). Astronomiske Opgaver ere imidlertid knyttede til den udvortes Verden ligeså vel som Landmålingen; men ved de Tilskyndelser, som Virksomhed i begge disse Retninger har givet Menneskeslægten, har denne skabt sig en Tankebygning og et Tankeindhold, Geometrien, som er aldeles uafhængig af Stjerner o. l., om det end kan anvendes på disse som på så meget andet.

Nutidens Historieforskere ere trods Grandskning af de gamle Historieskrivere og matematiske Forfattere ingenlunde enige om, når og hvor man skal antage, at det rene Tankeindhold først er trådt frem som sådant. Nogle mene, at det allerede fandtes hos Ægypterne;

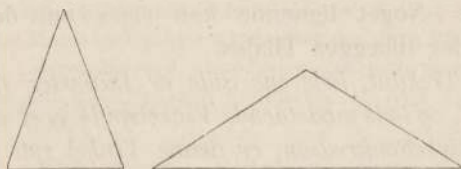
andre mene, at Thales er Manden, og atter andre, at det først er senere Grækere, der få det fuldstændigt afklarede Tankeindhold frem. Sandheden er vel snarest den, at dette lidt efter lidt har voxet sig ud af de Sysler med udvortes Ting, hvorom der ovenfor er givet Meddelelse, og at en Sætning nok kan nå til at være en ren Tankesætning (såsom, at 3, 4 og 5 giver en ret Vinkel), uden at den dog endnu har fået en så klar Begrundelse af selve Tanken, et såkaldet *Bevis*, som man måske senere giver den. Et historisk Vidnesbyrd herom er den ovenfor nævnte Sætning af Thales om Topvinklers Ligestorhed, hvor Beviset først skyldes en senere Matematiker (§ 87). Ligeledes kunde der have været givet et grundigere Bevis for den Sætning, at en Trekant er bestemt ved en Side og de to hosliggende Vinkler, eller, at to Trekanter, der have disse ens, ere samfældige, et grundigere Bevis, end vi have turdet tillægge Thales, der måske blot har *brugt* denne Sætning, fordi han *indså*, at den var rigtig.

Man vilde nemlig kunne sige: thi tænker man sig, at den ene Trekant blev lagt på den anden således, at den Side i den ene Trekant, der er lige stor med en Side i den anden, falder sammen med denne, ville også de to hosliggende Vinkler falde sammen med de tilsvarende, fordi de ere lige store. Derved falde de to andre Sider også sammen med de to andre Sider; og når alle 3 Sider således falde sammen, ere Trekanterne samfældige.

Gjør man altså rettest i at tillægge, ikke en enkelt Mand, men en flerhundredårig Række af græske Tænkere Fremdragningen og Afklaringen af det rene Tankeindhold, så er det dog på den anden Side berettiget at fæste Blikket på enkelte Mænd og enkelte Sætninger som de første og de mest fremtrædende i sin Tid; og som sådanne må Thales og hans Sætninger nævnes. Foruden de allerede omtalte to Sætninger, hvis Fremdrag-

ning af Thales muligvis kunde indskrænke sig til, at han har *anvendt* dem til praktiske Opgavers Løsning, anføres endnu et Par andre, som ikke skjønnes at stå i et sådant Forhold til praktiske Opgaver; men på den anden Side må det indrømmes, at man ikke heller ved, hvorledes Thales beviste deres Rigtighed.

§ 94. Den ene af disse Sætninger er følgende: *I en ligebenet Trekant ere Vinklerne ved Grundlinien lige store.*



Tg. 43.

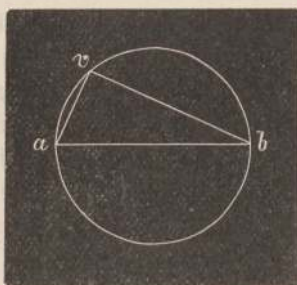
Ligebenet kaldes en Trekant, når to af dens Sider ere lige store. Den tredie Linie kaldes Grundlinien, hvorledes end Trekanten vender. Tg. 43 viser to ligebenede Trekanter. Det påfaldende ved denne Sætning, at i en sådan Trekant ere Vinklerne ved Grundlinien lige store, er måske dens tilsyneladende Ubetydelighed. Den udtaler ikke andet, end hvad enhver iforvejen ved. At to lige lange Stænger, der stilles op mod hinanden på et vandret Underlag således, at de øverste Ender støtte mod hinanden, må helde lige meget, er noget, som enhver betragter for en Selvfølge. Vinklerne ved Grundlinien ere altså lige store, og hvis man tænkte sig, at Underlaget og Stængerne løftedes og drejedes, uden at deres indbyrdes Stilling forandrede, måtte naturligvis de to lige store Vinkler vedblive at være lige store. — Hvilken Betydning imidlertid sådanne simple Sætninger kunne have, kan man foreløbig få et Skjøn om af den Omstændighed, at Beretningen om den nævnte Sætnings

Herkomst er bleven opbevaret i Årtusinder, ganske som om det var en anden stor verdenshistorisk Begivenhed. — At Thales kan have fremsat Sætningen for at anvende den, kan være muligt, måske endog rimeligt; men om hans Anvendelse af den findes i hvert Fald ingen Beretning mere. *Selve Sætningen er, trods sin Spinkelhed, bleven mere påagtet end dens Anvendelse.* Denne Omstændighed tyder på, at man nu var nået et væsentligt Skridt fremad i Retning af at lægge Vægt på det rene Tankeindhold.

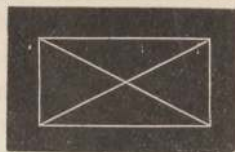
§ 95. Noget lignende kan siges om den næste Sætning, der tillægges Thales.

I en Trekant, hvis ene Side er Diameter (Tværmål) i en Cirkel, og hvis modstående Vinkelspids er et eller andet Punkt i Cirkelomkredsen, er denne Vinkel ret.

Når den rette Linie ab (Tg. 44) går igjennem Cirkelns Centrum, og Vinklen v har sin Spids i Cirkelns



Tg. 44.



Tg. 45

Omkreds, medens dens Ben gå gennem a og b , siger Sætningen altså, at v er en ret Vinkel. — Hvorledes Thales er kommen på denne Sætning, vides ikke. Man vilde kunne falde på den ved at tegne Diagonalerne i et Rektangel. Deres Skjæring giver Rektanglets Midtpunkt (Tg. 45), der må være lige langt fra dets 4 Spidser. Altså vil man om dette Midtpunkt kunne tegne en Cirkel gennem disse Spidser. På hver Side af en af Diago-

nerne ligger der da en Halvcirkel med en retvinklet Trekant i. Dette vil være Tilfældet, hvilken Form end Rektanget har, hvor aflangt det end er, og man får således forskellige Former for retvinklede Trekanter, der ligge på den nævnte Måde i en Halvcirkel. På sådan Måde kan Sætningen ret naturligt være fundet; men nogen fuldstændig Begrundelse af Sagen har man måske først senere anset for nødvendig.

Ex. 1. I en Halvcirkel ligger en retvinklet Trekant således som angivet i denne Paragraf; hvor store ere de to andre Vinkler tilsammen (tegn en Hjælpelinie fra Centrum til v , og brug § 94)?

Ex. 2. Mærk to Punkter på Papiret og tegn en Linie (ret eller krum) i deres Nærhed. Hvorledes kan man da tegne en ret Vinkel, hvis Ben går gennem Punkterne, og hvis Spids ligger i den tegnede Linie?

§ 96. Ved sådanne Sætninger synes Thales ikke at have vundet Agtelse og Tillid hos sine Medborgere i Milet, der ikke fattede, at en forstandig Mand kunde give sig af med Ting, som intet materielt Udbytte gav. Da han derimod et Forår forudså, at der vilde blive en rig Oliehøst, og lejede alle Oliepresserne i Milet og på Øen Kios, og der så pludselig blev Brug for mange Presser ved Høstens Begyndelse, så at han kunde leje Presserne ud til høje Priser, fik man Agtelse for hans Klogskab. Mest steg dog Forbauselsen, da han offentlig og længe iforvejen forudsagde sine Landsmænd, at det på en bestemt Dag vilde blive Nat, og der så indtraf en Solformørkelse. Det var navnlig derfor, at man gav Thales Tilnavnet »den vise« og nævnede ham som den første af de 7, blandt hvilke de forskellige Forfattere vakle noget med Hensyn til de 6 andre. Thales omtales som den, til hvem Prisen som den viseste først blev bragt, men som, efterat have henvist den til andre, som han anså for visere, atter fik den tilbage, hvorpå han henviste den til Apollos Tempel i Delfi. At det særligt er Forudsigelsen af Solformørkelsen, der har gjort Ind-

tryk på hans Landsmænd, berettes udtrykkelig, og det stadfæstes deraf, at der tillige fortælles, at han fik sit Tilnavn, da Damasias var Arkont — og dette var fra 585 til 583 —, medens en senere Udregning har vist, at der ganske rigtigt den 28de Mai 585 f. Kr. gik en total Solformørkelse hen over Lilleasien. Æren herfor tilkommer imidlertid næppe Thales selv, men Ægypterne, der ligesom Babylonierne og Kineserne vidste, at Sol- og Måneformørkelser gjentage sig periodisk, så at de komme igjen med et Mellemrum af 18 År og 11 Dage (nøjagtigere 6585,32 Dage), Kaldæernes *Saros*. — Når Thales' Samtidige altså lagde Vægten på hans Visdom med Hensyn til udvortes Ting, og man dog har opbevaret Beretninger om de nævnte abstrakte Sætninger, er denne Omstændighed et ret talende Vidnesbyrd om, at Thales selv må have lagt Vægt på disse, og at han har havt Fortjeneste i denne Retning, selv om Beretningerne ikke give synderlig mange Enkeltheder i så Henseende. Han døde omtrent 548 f. Kr. Der tillægges ham en Mængde Visdomsord, som f. Ex.: »Man skal ikke forskjønne sit Udvortes, men man skal have skjønne Idrætter.«

En af Nutidens fremragende Historikere på dette Område, Moritz Cantor, sammendrager de sparsomme Beretninger, man har om Thales, i følgende Udtalelse om hans Betydning: »at man ved ham havde fået at vide, hvor Geometrien var til Huse; at ved ham lærte man de første Sætninger af Geometrien, vel ringe i Antal, men allerede værdifulde i Anvendelsen; at der fra ham udgik en strengere Bevisførelse; og at han endelig grundede en Skole [den joniske], som tjente Videnskaben og ikke anså Politik og Pengefortjeneste for de eneste Ting, som en Mand værdigt kunde hellige sine Kræfter.«

Parallele Linier.

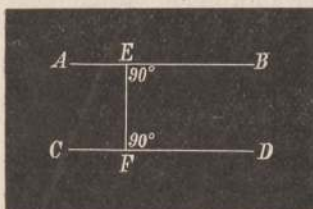
§ 97. Når Ægypterne, Kineserne og andre civiliserede Folkefærd inddelte Markerne eller anordnede huslige eller andre Forhold efter Rektangler (§ 63), fik man Linier »på to Led«, i to Retninger, af hvilke Linierne i den ene Retning ere vinkelrette på Linierne i den anden Retning.

Linierne af hver Retning for sig kaldes *jevnløbende* eller *parallelle*. Forestillingen om parallelle Linier er uden Tvivl i det mindste ligeså gammel som en sådan ordnet Inddeling; og det er da intet Under, at Historien ikke fortæller noget om deres første Optagelse i eller Behandling af den menneskelige Tanke. At udtrykke i klare Ord, hvad egentlig parallelle Linier ere, og hvilke Egenskaber de have, har man først stillet sig til Opgave langt hen i den græske Geometris Historie, og dog er det af flere Ting klart, at man ikke alene efter Kunstens Regler tegnede parallelle Linier (såsom når Ægypterne udstak Markskjel eller Grunden til Templer og andre Bygninger), men at man også (som vi senere skulle se) ved Hjælp af parallelle Liniers selvfølgelige Egenskaber gjorde Slutninger med Hensyn til andre geometriske Forhold.

Hvad der således den Gang har ligget naturligt for Folks Forestilling, men måske ikke har fået sit klare Udtryk i Ord, ville vi nærmere udtale i Overensstemmelse med, hvad der lidt efter lidt blev Skik blandt Grækerne, og således, at vi kunne følge disse, når de bygge deres næste Sætninger, bl. a. på sådanne Sætninger om parallelle Linier, som de enten have betragtet som Selvfølger eller måske nok have udtalt, men ikke agtet værdig at knyttes til dens Navn, der først udtalte dem.

§ 98. Vi ville da kalde *parallele Linier* sådanne, der ere *vinkelrette på en og samme Linie*.

Det har nemlig utvivlsomt været den første Måde, hvorpå man har udstukket *parallele Linier*, når det



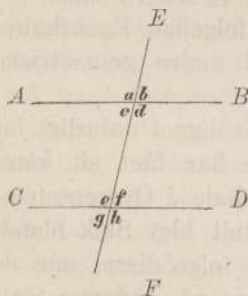
Tg. 46.

skulde ske med nogen Nøjagtighed (f. Ex. af Harpedonapterne), at man fra et Punkt *E* i den ene Linie *AB* (Tg. 46) har tegnet en Linie *EF* vinkelret (§ 67—70), og atter fra Punktet *F* i denne en Linie *CD* vinkelret på *EF*. Man bruger i vore Dage at betegne, at *EF* er vinkelret på

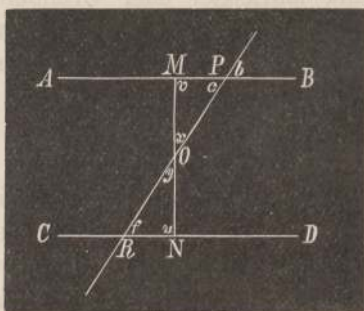
AB, ved at skrive: $EF \perp AB$, og ligeså $CD \perp FE$, og, at *AB* er parallel med *CD*, ved at skrive $AB \parallel CD$.

Ligesom to Linier kaldes *parallele*, når de ere vinkelrette på en og samme rette Linie, således ere *alle* Linier, der ere vinkelrette på én ret Linie, *parallele*.

§ 99. En Sætning, som man vistnok også har betragtet som selvfølgelig, og hvorom Historien ikke har



Tg. 47.



Tg. 48.

noget at melde, inden vi (i et følgende Afsnit) ser den anvendt, er følgende:

Når *parallele Linier* overskjæres af en ret Linie, ere de »ensliggende« Vinkler lige store.

»Ensliggende« kaldes de Vinkler, hvis Ben pege i samme Retning. Altså, når $AB \neq CD$ (Tg. 47), er $\angle a = \angle e$, $\angle b = \angle f$ osv.

Ville vi ved Hjælp af de hidtil fremsatte Sætninger ligefrem bevise dette, kan det ske således. At AB (Tg. 48) er parallel med CD , vil sige, at de begge ere vinkelrette på MN , at altså $\angle v = 90^\circ$ og $\angle u = 90^\circ$; følgelig er $\angle v = \angle u$. Lad nu O være Midten af MN , og lad os igjennem O tegne en hvilken som helst Linie PR , der skjærer de parallelle i P og R . Da ville de to Trekkanter OMP og ONR , som herved opstå, være samfældige; thi de have en Side og de to hosliggende Vinkler lige store (§ 86 og 88), idet nemlig $OM = ON$ (ifølge Tegningen), $\angle v = \angle u$ (givet) og $\angle x = \angle y$ (Topvinkler, § 87). Da Trekkanterne ere samfældige, er $\angle c = \angle f$. Da endelig $\angle c = \angle b$ (Topvinkler), er $\angle b = \angle f$; og det var det, der skulde bevises.

Denne sidste Bemærkning blev det efterhånden Skik blandt Grækerne at slutte ethvert Bevis med. Det er som om de, efter at have samlet alle Bevisets Enkeltheder af lutter selvfølgelig eller tilforn beviste Sætninger, triumferende slå fast, at nu er det ikke tilladeligt at fremkomme med senere Tvivl eller Betænkeligheder.

Når to Linier skjære hinanden (Tg. 36), dannes der 4 Vinkler, hvoraf to, a og c , ere lige store, og ligeså de to andre, b og d , medens en af de første og en af de sidste tilsammen ere 180° , altså Supplementvinkler.

Heraf og af § 99 følger, at når to parallelle Linier overskjæres af en tredie, ville af de således dannede 8 Vinkler to hvilken som helst være enten lige store eller Supplementvinkler. Ved nærmere Eftersyn på Tg. 47 vil man se, at *lige store ere*:

de Vinkler, hvis Ben gå i samme Retning, og
 — — — — — modsat — ;

Supplementvinkler ere:

de Vinkler, hvis ene Ben går i samme Retning, og
hvis andet Ben går i indbyrdes modsat
Retning.

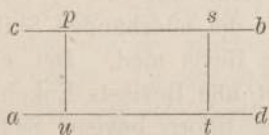
Ex. 1. Bevis at *lignende Sætninger gjælder om to hvilke-
somhelst Vinkler, hvis Ben ere parvis parallelle.*

Ex. 2. I en retvinklet Trekant tegnes en Linie fra den rette
Vinkels Spids til Midten af den modstående Side, og fra dette
Punkt atter to Linier parallelle med Trekantens to andre Sider.
Hvorledes blive de 4 Trekanter beskafne. som herved opstå?

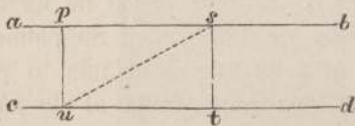
§ 100. Man har rimeligvis fra først af også be-
tragtet det som en Selvfølge, at:

*Parallele Linier ville, hvor langt de end forlænges,
ikke skjære hinanden.*

Når man tegnede Rektangler på omhyggelig Måde,
må der have været rigelig Lejlighed til at *erfare*, at Af-
standen mellem ab og cd (Tg.
49) var den samme ved st som
ved pu . Det er vel endog rime-
ligt, at Forestillingen herom har
været ligeså rådende ved de
første Forsøg på at udstikke
parallelle Linier, som Tanken
om, at Linierne skulle stå vinkel-
ret på hinanden. Vi skulle dog nu se, at når blot den
ene Ting ståer fast, når man blot har sørget for, at de



Tg. 49.



Tg. 50.

to Linier ab og cd begge ere vinkelrette på pu , kan
man slutte sig til den anden Ting, nemlig, at de overalt
må have samme Afstand og altså ikke kunne skjære
hinanden.

Lad således være givet $ab \perp pu \perp cd$ (Tg. 50). Når man da fra et Punkt s i ab tegner en Linie $st \neq pu$, skal det bevises, at st er lig pu . Tegnes nemlig en ret Linie fra u til s , vil Trekkanterne ups og stu være samfældige; thi de have en Side lige stor, nemlig us , som er fælles for begge Trekkanter, og de to hosliggende Vinkler, nemlig $\angle sup = \angle ust$ og $\angle usp = \angle sut$, fordi deres Ben ere parallelle og i modsatte Retninger (§ 99). Når Trekkanterne ere samfældige, ere pu lig st . Da det samme kan siges, hvor langt end s rykker hen ad Linien ab , må Afstanden fra ethvert Punkt i denne til cd altid være lige stor; de nå altså aldrig hinanden.

Ex. 1. En Firkant, hvori to og to Sider ere parallelle, Tg. 51, kaldes et *Parallelogram*. Bevis, at en *Diagonal* deler et *Parallelogram* i to samfældige *Trekkanter*.



Tg. 51.

Ex. 2. Bevis, at de modstående Sider i et *Parallelogram* ere ligestore, og *Vinklerne* ligeså.

Ex. 3. Bevis, at *Diagonalerne* i et *Parallelogram* halvere hinanden.

Tegning.

§ 101. Ligesom den praktiske Trang til at kunne tælle og foretage Regninger efterhånden bragte Mennesketanken til at sysle med de abstrakte Tal, således have også de Tegninger, man udførte af Jordstykker, Bygninger, astronomiske Forhold m. m. givet Anledning til nøjagtigere Tænkning over Tegningernes geometriske Egenskaber. Tegnekunsten er altså for en Del gået forud for den egentlige Geometri, og vi træffe hos Oldtidsfolkene, Ægypterne, Babylonierne o. fl., ikke alene Tegninger af virkelige Gjenstande (Mennesker, Dyr,



Tg 52.

Træer osv.), og Ornamenter, der åbenbart mere have tiltalt Øjet end Tanken (såsom Tegningerne på den gammel-ægyptiske Vase, Tg. 52), men man træffer også på gamle Tegninger, der vanskelig kunne have havt Betydning for andet end Tanken. Således den ægyptiske Figur, Tg. 53, og de babyloniske, Tg. 54.

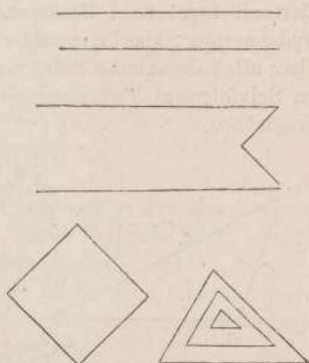
Men efterhånden som den geometriske Indsigt voxede, frembød denne jevnlig nye Måder, hvorpå man ved Hjælp af de gamle Redskaber kunde udføre Tegninger, som man tilforn ikke formåede. Erkjendelsen af, at 3, 4 og 5 danne en retvinklet Trekant, afgav således et Exempel på, hvorledes en ret Vinkel kunde tegnes ved Hjælp af en Snor og 3 Pinde.

§ 102. Vi have set, at de Linier af bestemt Form, som man kan frembringe ved de simpleste Midler, ere den rette Linie og Cirklen, at disse fra først af rimeligvis ere blevne tegnede med Snoren, men at endog det Fremskridt, som Passer og Lineal betegne, hører Sagntiden til. Heraf kan man vel slutte, at allerede Oldtidsfolkene have ved Hjælp

af disse Redskaber kunnet løse andre Opgaver end blot at tegne en ret Linie eller en Cirkel. Når f. Ex. *Theon* fra Smyrna (i det 2det Årh. e. Kr.) skriver: »Ved Under-



Tg. 53.

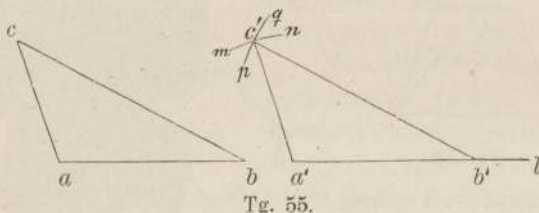


Tg. 54.

søgelsen af Planeternes Bevægelse have Ægypterne benyttet sig af tegnende Fremgangsmåder, have tegnet, medens Kaldæerne hjalp sig ved Regning, og fra disse to Folk have de græske Astronomer hentet deres første Kundskaber, så ligger det i Sagens Natur, at der må have været mere Indhold i Tegningen end det, at tegne en ret Linie eller en Cirkel. Hvad Ægypterne formåede i denne Henseende, vide vi imidlertid ikke; og vi ere ligeså uvidende med Hensyn til Indholdet af en Bog om »Tegnekunsten«, som skal være skreven af *Thales' Lærling* og Eftermand i den joniske Skole, *Anaximander* (611—545 f. Kr.), den Mand, der desuden har Ord for at have indført Gnomon som Tidsangiver blandt Grækerne og været den første, der tegnede Landkårt. Da vi altså ikke vide, hvorledes de simpleste Tegninger udførtes, kunne vi kun ved Exempler vise, hvorledes de vilde kunne udføres på Grundlag af de hidtil omtalte Sætninger.

Ex. 1. Når Længden af en ret Linie skal afsættes etsteds, har man simpelthen taget den i Passeren (eller Snoren) og afsat den.

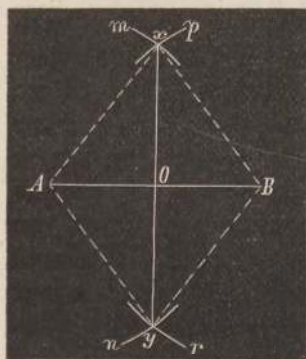
Ex. 2. Skal en Trekant tegnes på Linien $a'l$ (Tg. 55) samfældig med en anden Trekant abc , har man først på Linien $a'l$ afsat $a'b' = ab$, dernæst taget ac i Passeren og fra a' slået Buen mn , dernæst taget bc i Passeren og fra b' slået Krydsbuen pq . Til Krydsbuenes Skjæringspunkt c' tegnes rette Linier. Trekant $a'b'c'$ har altså de samme Sider som abc , og man betragtede det som en Selvfølge, at *Trekanter med lige store Sider måtte være ens, samfældige.*



Tg. 55.

Ex. 3. Når en ret Linie skulde deles i to lige store Stykker, har man måske kun prøvet sig frem, til man fik et Mål i Passeren, som tog Linien i to Skridt; men det kan også ske således.

Er AB (Tg. 56) den Linie, der skal halveres, slår man med A som Centrum og et hvilket som helst Mål i Passeren Krydsbuerne m og n ; og dernæst med B som Centrum og samme Mål i Passeren p og r . En Linie gennem Buernes Skjæringspunkter x og y vil da halvere AB i o . Tænkte man sig nemlig, at Trekant xyB blev drejet om Linien xy , vil den falde sammen med xAy (Ex. 2); altså vil B falde i A , og følgelig OB være lig OA .

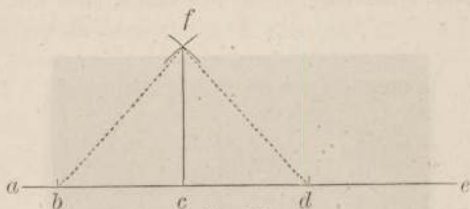


Tg. 56.

Ex. 4. Tillige indser man, at $\angle xob = \angle xoa$. Denne Vinkel er altså ret, så at Tg. 56 samtidig har løst den Opgave at tegne en Linie vinkelret på Midten af en given.

Ex. 5. Vil man fra et bestemt Punkt c (Tg. 57) i en Linie ac oprejse en Linie vinkelret, kan man først afsætte et lige stort

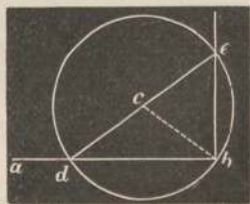
Stykke til hver Side af Punktet c , og fra de to nye Punkter b og d slå Krydsbuer med et og samme Mål. En Linie fra Krydspunktet f til det givne Punkt c er da vinkelret. Hvorfor? (Ex. 2).



Tg. 57.

Ex. 6. Der er givet en ret Linie og et Punkt udenfor denne. Hvorledes skulde man på en noget lignende Måde som i Ex. 5 tegne en Linie fra Punktet vinkelret på Linien?

Ex. 7. På Enden af en ret Linie, som ikke kan forlænges, skal tegnes en Linie vinkelret. — Man kan bruge Sætningen om en retvinklet Trekant i Halvcirklen således. Lad ab (Tg. 58) være den givne Linie, b Endepunktet. Man vælger da et eller andet Punkt c , og med dette som Centrum og Målet cb i Passeren tegner man en Cirkel. Denne skjærer Linien ab i et Punkt d . Gjennem d og c tegnes en ret Linie, som skjærer Cirklen i et Punkt e . En Linie eb tegnes. Denne er da vinkelret på ab (§ 95).



Tg. 58.

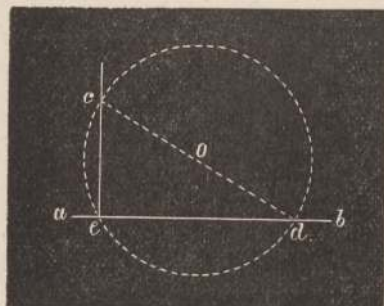
Ex. 8. Fra et Punkt ved Siden af Enden af en ret Linie, der ikke kan forlænges, skal tegnes en Linie vinkelret på Linien.

Lad ab (Tg. 59) være Linien, c Punktet. Man tegner da en ret Linie fra c til et eller andet Punkt i ab , f. Ex. d . Man søger Midten af cd (Ex. 3), nemlig o . Om dette som Midtpunkt og med oc i Passeren slæes en Cirkel. Denne vil skjære ab i Punktet e . En Linie tegnes fra c til e . Den er den søgte. Hvorfor?

Ex. 9 a. Skulde en Vinkel afsættes lig med en given, vilde det kunne ske ved at tegne en ret Linie fra et eller andet Punkt i det ene Ben til et eller andet Punkt i det andet Ben. Man får således en Trekant, hvis ene Vinkel er den givne. Trekanten kan flyttes (Ex. 2), og dermed er Vinklen flyttet. — Man indser let, at

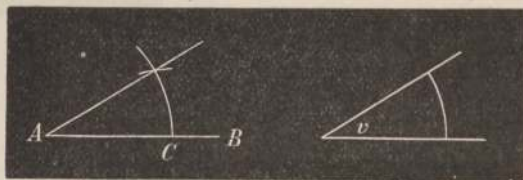
Trekanter, der have en Vinkel og de to høstiggende Sider lige store, ere samfældige;

thi tænker man sig, at Trekkanterne blive lagte på hinanden, så at de lige store Vinkler falde sammen, ville disses Ben falde sammen, og Benenes Endepunkter ligeledes, så at Trekkanternes 3 Spidser falde sammen.



Tg. 59.

9 b. At afsætte en Vinkel lig en anden kan endnu simplere ske ved at vælge de to Punkter i Benene lige langt fra Vinkel-spidsen, hvorved den Trekant, man får at flytte, bliver ligebenet. Det er egentlig dette, man gjør, når man som sædvanlig løser denne Opgave, som Tg. 60 viser. Vinkel v skal flyttes, så at den får A til Spids og AB til Ben. Man slår med samme Passer-

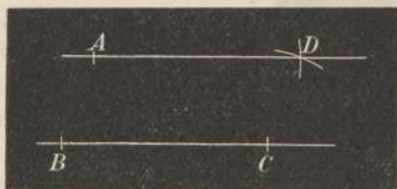


Tg. 60.

åbning en Cirkelbue med Vinklens Spids som Centrum og med A som Centrum. Dernæst tager man »den Bue« i Passeren, som ligger mellem Benene af Vinkel v , og med denne slår man Krydsbue fra C som Centrum. Man kan imidlertid ikke tage en Bue i Passeren, så det er i Virkeligheden en Trekant, man har flyttet, hvis tredje Side man kun ikke har tegnet.

Ex. 10. Gjennem et givet Punkt at tegne en ret Linie parallel med en given.

a. Opgaven kan løses ved først fra Punktet at trække en vinkelret eller en skrå Linie imod den givne, og derefter tegne en anden Linie, der danner samme Vinkel (Ex. 9) med den vinkelrette eller skrå, som denne med den givne. Den første og den sidste Linie ere da parallelle (§ 98 eller 99).

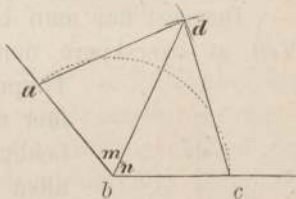


Tg. 61.

b. Opgaven kan også løses således: A (Tg. 61) er det givne Punkt, B og C to Punkter, man kan vælge efter Behag i den givne Linie. Med BC i Passeren slår man Krydsbue fra A og med BA i Passeren fra C . Gjennem det derved fundne Punkt D og A tegnes en ret Linie, der da er parallel med BC . Hvorfor? (Ex. 2).

Ex. 11. At halvere en Vinkel har man måske fra først af gjort ved at tegne dens Bue og simpelthen prøve sig frem med Passeren til man fik et Mål, der kunde tage Buen i to Skridt. Men det kan også gøres således:

Lad abc (Tg. 62) være Vinklen. Man mærker da Punkterne a og c i de to Ben således, at $ba = bc$, hvilket f. Ex. kan ske ved at tegne den punkterede Cirkelbue ac . Fra a og c slås Krydsbuerne d med et og samme Mål. Man tegner den rette Linie bd , der da halverer Vinklen abc . Hvorfor?

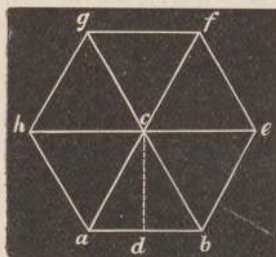


Tg. 62.

Trekantsvinklerne.

§ 103. Mellem en Trekants tre Vinkler finder der en mærkelig Forbindelse Sted, og Opdagelsen heraf

hører vistnok til de ældste mathematiske Fremskridt blandt Grækerne. Det er måske selve Thales, der sigtes til, når en geometrisk Forfatter, *Geminus*, i Århundredet før Kristus, skriver, at denne Sag allerede er kommen frem hos de gamle Geometrikere i følgende 3 Skridt.

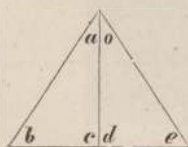


Tg. 63.

En lignende Tegning som Tg. 8 viser, at 6 Spidser af regelmæssige eller ligesidede Trekanter passe sammen om et Punkt. Det samme ses af den

Figur, man får ved at dele Cirklen i 6 ligestore Dele (§ 74), og tegne rette Linier fra Delingspunkt til Delingspunkt såvelsom fra Delingspunkterne til Centrum, hvorved man får en Sexkant som Tg. 63. Når 6 Vinkler af ligesidede Trekanter således udgjøre 4 rette Vinkler, må 3 af dem udgjøre 2 rette. Altså ere *de tre Vinkler i en ligesidet Trekant tilsammen to rette*.

Dernæst har man betragtet den *ligebenede* Trekant. Ved at overskjære denne (Tg. 64) med en Linie fra Toppunktet til Midten af Grundlinien, får man åbenbart to (omvendt-) samfældige Trekanter (§ 102, Ex. 2), hvor altså $\angle c = \angle d$, og da disse Vinkler tilsammen ere to rette, er hver lig 1 ret. Disse to Trekanter kunne åbenbart sættes sammen til et Rektangel, derved at den ene vendes om og lægges

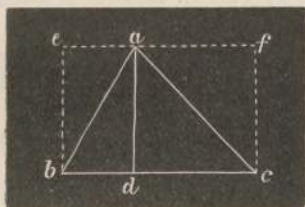


Tg. 64.

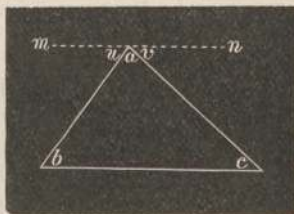
med sin længste Side langs den andens længste Side. Af Rektanglets 4 rette Vinkler ere c og d de to. De to andre rette ere a og e , b og o ; men disse 4 ere netop den ligebenede Trekants Vinkler, altså ere også *Vinklerne i en ligebenet Trekant tilsammen lig to rette*.

Endelig har man betragtet en uligebenet Trekant abc

(Tg. 65). Når man fra en Vinkelspids a tegner en Linie ad vinkelret på den modstående Side bc , og således skjærer Trekanten i to retvinklede Trekanter adb og adc , vil enhver af disse kunne udfyldes til et Rektangel ved Hjælp af de med dem omvendt-samfældige Trekanter bea og cfa . Disse to Rektangler have i alt 8 rette Vinkler, deres Halvdele adb og adc have altså 4 rette. Men disse to Trekanter have foruden den uligebenede Trekant abc 's 2 Vinkler tillige de to rette Vinkler ved d , der altså må regnes fra. Og man indser således, at *Vinklerne i den uligesidede Trekant også tilsammen ere to rette.*



Tg. 65.



Tg. 66.

§ 104. Således er man ofte, Trin for Trin, nået fra Sætninger, som ere iøjnefaldende under særlig regelmæssige Former, til Sætninger af større Almengyldighed og Rækkevidde. Dette er ofte »Opdagelsens« Vej. Men så er det også gjerne gået således, at når det først er opdaget, at flere sådanne særlige Tilfælde kunne udtales under ét, nemlig:

I enhver Trekant ere Vinklerne tilsammen lig med to rette,

så har man gjerne fundet en simpel Måde at betragte og bevise det Hele på. En sådan blev given af den Mathematiker, *Pythagoras*, eller hans Læringer, som vi i næste Afsnit komme til; men den skal for Forbindelsens Skyld nævnes her.

Lad abc , Tg. 66, være Trekanten. Gjennem den ene Vinkelspids a tegnes en Linie mn parallel med Trekantens modstående Side. Den herved opstående Vinkel u er lig b (Benene parallelle og i modsatte Retninger, (§ 99); og af samme Grund er $\angle v = \angle c$. Da nu Vinklerne u , a og v udgjøre to rette Vinkler eller 180° , ville b , a og c altså også gjøre det.

Ex. 1. I en Trekant er en Vinkel 67° , en anden 14° , den tredie?

Ex. 2. I en Trekant er den ene Vinkel 15° større, den anden 15° mindre end den tredie. Hvor stor er hver?

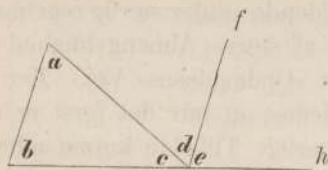
Ex. 3. I en ligebenet Trekant er en Vinkel ved Grundlinien 72° . De andre to? Vinklen 72° halveres, hvorved to Trekanter dannes. Disses Vinkler?

Ex. 4. I en ligebenet Trekant er Vinklen ligeoverfor Grundlinien $22^\circ 30'$. De andre to?

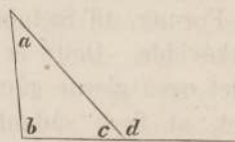
Ex. 5. På to af Siderne i en ligesidet Trekant er tegnet vinkelrette Linier fra modstående Vinkelspids. Hvor stor er den Vinkel, de danne?

Ex. 6. I en vis retvinklet Trekant er den største Linie dobbelt så stor som den mindste; hvor store ere Vinklerne?

§ 105.- Man kunde også have set Sagen således. Ved en Vinkelspids af Trekanten forlænges en Side mod h (Tg. 67), og fra samme Vinkelspids tegnes en Linie til f parallel med Trekantens modstående Side. Da er



Tg. 67.



Tg. 68.

$\angle a = \angle d$ (Benene parallelle med modsat Retning) og $\angle b = \angle e$; c , d og e er to rette, altså også c , a og b .

d og e tilsammen kaldes Trekantens udvendige Vinkel ved c ; den er dannet af en Side i Trekanten og en anden Sides Forlængelse. At denne Vinkel er lig a og b tilsammen, udtales således:

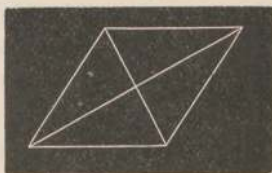
En Trekants udvendige Vinkel er lig de to indvendig modstående tilsammen.

Således er i Tg. 68 Vinkel d lig Vinkel a og b tilsammen.

Ex. 1. En udvendig Vinkel af en retvinklet Trekant er $117^{\circ} 15'$. Hvor store ere Trekantens Vinkler?

Ex. 2. Når man tager en udvendig Vinkel ved hver af en Trekants 3 Spidser, hvor store ere da sådanne 3 Vinkler tilsammen?

Ex. 3. *Hvor meget udgjøre enhver Firkants Vinkler tilsammen? Ligeså enhver Femkants, enhver Sexkants, Sykkants, Hundredekanter?* Det sidste må naturligvis klares, uden at man tegner den.



Tg. 69.

Ex. 4. Dersom man tager en udvendig Vinkel ved hver Spids af de nævnte Figurer, *hvor meget udgjøre da disse udvendige Vinkler tilsammen for hver enkelt Figur.*

Ex. 5. En Firkant med 4 lige store Sider kaldes en Rhombus, Tg. 69. Bevis, at en Rhombus er et Parallelogram.

Ex. 6. Bevis, at Diagonalerne i en Rhombus halvere Vinklerne. Hvilken Vinkel danne de med hinanden?

Pythagoras.

§ 106. Medens det var i det. fra Midten af 11te til Midten af 6te Århundrede f. Kr. blomstrende, Jonien, at Mathematiken skulde grundlægges blandt Grækerne, så flyttede Skuespladsen såvel for denne Sag som for andre udmærkede græske Fremskridt sig fra Østen til det fjernere Vesten, da Jonien i Midten af det 6te Årh. f. Kr. kom under fremmed Herredømme, først lydsk og så persisk. Det blev nu i de græske Plantestæder på Sicilien og i Syditalien, »Storgrækenland«, at Kultur-

strømmen i den nærmeste Fremtid skulde fortsættes. Disse Plantestæder vare vel grundede længe tilforn, for en Del allerede i det 11te Århundrede; men det livlige Samkvem i det 6te Årh., der udspandt sig mellem Byerne ved den Tarentinske Bugt, Tarent, Sybaris og Krotone, og Byerne på Lilleasiens Vestkyst, Milet, Knidos osv., har utvivlsom overflyttet en Mængde af de bedste Kræfter, der ikke kunde finde sig i Fremmedherredømmet; og det tør derfor nok i alt Fald tildels kaldes en Fortsættelse af, hvad der var begyndt i Jonien, om der end allerede var både Kræfter og Forudsætninger tilstede, der kunde bringe nye Momenter ind i Udviklingen. Vi se således Mathematiken her udfolde sig, ikke alene langt stærkere end tilforn, men med helt nye Synspunkter. — Noget lignende kan siges ved de to senere Flytninger af Midtpunktet for græsk Kultur, efter Perserkrigene [○] til Hellas og efter Alexander den store [○] til Alexandria.

§ 107. Det er nu iøjnefaldende, at selve den Mand, der i det mindste i mathematisk Henseende bærer det fremtrædende Navn i denne Periode, *Pythagoras* selv er Jonier, medens dog hans Virksomhed falder i Storgrækenland.

Fortællingerne om Pythagoras give en meget broget Skildring af hans Liv; men historisk pålidelige ere kun få af Enkelthederne, hvortil dog navnlig de høre, der have mest Betydning for os. Efterat den Skole, som Pythagoras grundede, nemlig forlængst var uddød, fremstod der i Århundredet før Kristus en ny under Navn af Nypythagoræerne, og disse have i høj Grad tildigtet og ændret, hvad der endnu på deres Tid fandtes af Tradition med Hensyn til den store Mand. Disse Tildigtninger synes endog senere at have fået endnu stærkere Fart ved Bestræbelsen efter at fremstille et Ideal, der kunde stilles op overfor de Kristnes.

Vi ville dog ikke her bortskjære alt, hvad der ikke

er historisk sikkert, men skulle sluttelig udpege, hvad der med Betydning for Mathematikens Udvikling må anses for at være det. Altså går *Sagnet* således.

§ 108. En Mand af anset Familie ved Navn *Mnesarkos* flyttede fra Øen Lesbos til Samos, ved Lilleasiens Vestkyst, en af Joniens største Handels-, Industri- og Kunststæder. Da han under en Hungersnød hjalp Samierne med Korn, gav de ham Borgerret i deres By. Som Kjøbmand havde han efter græsk Skik sin Hustru *Pythais* med, og på en af disse Rejser blev Sønnen *Pythagoras* født i Tyrus omtrent 580 f. Kr.

Som ganske ungt Menneske forlod Pythagoras Samos og besøgte først sin Fædreneø Lesbos, hvor han i 3 År hørte Vismanden *Ferekydes*, en af de Grækere, der havde besøgt Ægypten, og af hvem han især blev påvirket i religiøs og moralsk Retning; thi om *Ferekydes* er der senere sunget:

»Prydet ej mindre med Mod end med Sands for det Ædle og
Skjønne

i Sjælen han havde, skjøndt døende, frydefuldt Liv;
såsandt Pythagor, den virkelig Vise, om Mennesket vidste
og indså, hvorledes enhver var i Tænkning og Hu.«

Derfra rejste Pythagoras til Milet, hvor han hørte den gamle Thales og Anaximander og fik Indtryk af deres Tankeklarhed.

Senere drog han til Ægypten (nogle sige, efter først at have besøgt og studeret i Sidon). Den daværende Farao, *Amasis*, havde sluttet Forbund med forskellige græske Fyrster, deriblandt med *Polykrates* på Samos, fra hvem Pythagoras havde et Anbefalingsbrev, der efter en Del Modstand fra Præsteskabernes Side mod at optage en Fremmed i deres egen Kreds først i Heliopolis, så i Memphis og endelig i Theben, dog tilsidst skaffede den standhaftige Pythagoras, der ikke veg tilbage for at underkaste sig de til hans Optagelse stillede Vilkår med Hensyn til Vadskning, Faste og anden Kjødets Spægelse,

Plads i de Indviedes Kreds. Her opholdt han sig i over 20 År og kom således ind i alt det væsentlige, som de ægyptiske Lærde sad inde med.

Da Perserkongen Kambyses overvandt Amasis' Søn og Efterfølger Sammenit og erobrede Ægypten, bortførte han, for bedre at få Magt over Ægypterne, disses Præsteskaber, og således kom Pythagoras også til de kaldæiske Vismænds Land, hvor han tilligemed de ægyptiske Præster fik en Behandling, der stemmede med Kaldæernes Ærefygt for deres egen Præstestand. — Under denne ufrivillige Landflygtighed gjorde Pythagoras i Susa Bekjendtskab med den græske Læge *Demokedes* fra den akæiske By *Krotone* ved den Tarentinske Bugt i Syditalien. *Demokedes* havde i sin Tid været i *Polykrates'* Tjeneste på *Samos*; men efter dennes Mord i *Sardes* var han falden i persisk Fangenskab. Da *Demokedes* senere kom således i Yndest hos *Darios Hystaspes' Søn*, at denne ikke mere vilde undvære ham, fik han dog Kongen til at sende ham i Spidsen for et Gesandtskab til Grækenland og tillade ham med det samme at besøge sit Hjem *Krotone*, imod at han vilde vende tilbage igjen; men da Gesandtskabet strandede på Italiens Kyst, tog Herskeren *Gillos* de persiske Sendemænd til Fange og slap dem kun fri på visse Betingelser, hvoriblandt *Demokedes* hemmelig fik indskudt den, at *Pythagoras* skulde gives fri.

Efterat være kommen på fri Fod, besøgte han endnu en Gang *Ferekydes* og var hos ham ved hans Dødsleje. Han rejste så hjem til *Samos*, men kunde ikke finde sig til rette efter de Forandringer, der vare foregåede under hans lange Fravær, og deriblandt navnlig Fremmedherredømmet. Rejsen gik derfor til *Demokedes' By Krotone* ved den tarentinske Bugt en af de blomstrende græske Byer, der tog yderligere Opsving ved Joniens Undertvingelse. *Krotone* var tillige en af dem, hvor Velleynet endnu ikke således havde fået

Magten som i flere andre af de græske Plantestæder, såsom i det yppige, men for Blødagtighed så berygtede Sybaris ved samme Havbugt. Krotoniaterne havde tværtimod Ry for at være de hyppigste Sejrherrer ved de olympiske Lege.

Pythagoras fik efterhånden megen Indflydelse, ja blev til en Tid den ledende Personlighed i Krotone.

Han talte til Mændene om Lovlighed, Sædelighed og Familieliv som Statens bedste Støtter, så at Senatet udstedte Forbud mod Flerkoneri, og til Kvinderne om, hvad der virkelig pryder et Menneskeliv fremfor fine Klæder og Smykker, så at man undså sig for at vise sig i overdådig Dragt. Navnlig fæstedes dog hans Anseelse, da Krotoniaterne efter hans Tilskyndelse blandede sig i Uroligheder, der vare udbrudte i Sybaris, hvilket havde denne blødagtige Byes Ødelæggelse til Følge.

Pythagoras var Talsmand for en streng Moral og strenge Skikke knyttede til religiøse Forestillinger, som minde om hans Besøg både hos Ægypterne og hos Kaldæerne. Hans Interesser og Virksomhed omfattede selvfølgelig ikke blot de almenmenneskelige Forhold, men også de politiske, navnlig forsåvidt de vare en Betingelse for hine. Hans Virksomhed strakte sig derfor også til Lovgivning, og man skal senere på flere andre Steder have villet efterligne Pythagoras' Lovgivning, men uden Held; thi den Ting, som Pythagoras lagde Vægt på i Statsager, nemlig at skaffe udviklede Politikere, tog man ikke tilstrækkelig op. Dette var derimod for Pythagoras en Hovedsag; thi medens han ganske vist også direkte virkede på Folket, var hans Elevers, *Pythagoræernes*, grundige Uddannelse ham særlig magtpåliggende.

Han lod dem i Begyndelsen mest arbejde på egen Hånd og efter kortere Anvisning tilegne sig Kundskaber og Færdigheder og lære forskellige Ting udenad; og først senere værdigede han dem mere personlig Omgang, en Fremgangsmåde, der måske minder om den ægyptiske,

og som gav Pythagoræernes Samfund noget fornemt klikeagtigt, som ellers passede mindre godt i den græske By. Dog blev det til en Tid bedre tålt i Krotone, hvor de alvorlige, doriske Elementer vare mere rådende, end det f. Ex. var blevet i Jonien.

Pythagoræerne vare deres Mester i høj Grad hengivne. Det blev Skik iblandt dem kun at benævne Pythagoras som »ham selv« — »han har sagt det«. Man gav ham Æren af alle Opfindelser og Fremskridt, der bleve gjorte, og betragtede det som en velforskyldt Straf fra Guderne, at en Pythagoræer ved Navn Hippasos, der havde udgivet en Opdagelse, han virkelig havde gjort, for sin egen, omkom i Bølgerne. Det er derfor ikke muligt at skjelne imellem Pythagoras' egne Frembringelser og hans Skoles. Dog er så meget vist, at meget af det Mathematiske har Pythagoras selv Æren for, og medens man ved Pythagoræernes egen Adfærd kommer til at tilskrive ham også en Del af, hvad hans Disciple frembragte, er han jo heller ikke helt uden Del deri.

Man fandt sig ikke i Længden i Pythagoræernes aristokratiske Adfærd; og Pythagoras og hans Venner, deriblandt Demokedes, måtte flygte. Nogle År efter fristede han samme Skjæbne i Tarent og endnu en Gang i Megapont, hvor man afbrændte det Hus, hvori han og hans Venner vare forsamlede, så at han kun med Vanskelighed undslap. Han døde kort Tid efter, omtrent 100 År gammel. — Der fortælles, at han ikke vilde kaldes »den vise«, men kun *Filosof* (ϕ: Visdommens Ven), en Titel, han selv opfandt.

§ 109. Således omtrent kan Sagnet fortælles, idet dog mange Enkeltheder ere udeladte. Historisk sikker er hans Hjemstavn på Samos, altså i Jonien, hvor vi have set Mathematiken tage sit første Tilløb, og hans Besøg i Ægypten. Ret rimeligt er hans Ophold hos Kaldæerne (selv om det har været under andre Vilkår

end de her omtalte); thi en hel Del af hans religiøse Lærdomme ere øjensynlig af østerlandsk Oprindelse, og hans matematiske Fremskridt bærer i en vis Henseende (med Hensyn til Tallene) et Præg, som er fremmed både for Ægypterne og for Grækerne, men som har Lighed med det babyloniske, så der er ingen Grund til at forkaste denne Del af Sagnet, om det end må indrømmes, at den ikke er sikkert historisk bevist. Endelig er det sikkert, at det var i Storgrækenland, navnlig i Krotone, at Pythagoras virkede, ligesom den ovenfor givne Karakteristik af Pythagoræerne i Forhold til Mesteren er vel afhjemlet.

Historisk sikker er altså Omplantningen af den matematiske Udviklingsgang fra Jonien gennem Pythagoras til Storgrækenland; og i de Fremskridt, som vi nu komme til, vil man se Virkningerne af en sådan Omplantning i Forening med ny Tilførsel af ægyptiske og babyloniske Indskydelser gennem en fremragende Personlighed som Pythagoras'.

Hvad der i § 96—103 er fremsat om parallelle Linier, om Tegning og om Trekantvinklerne, er noget, hvis Fremkomst ikke i Almindelighed knyttes til bestemte Navne, og som derfor her er blevet omtalt som noget hvorom Forestillingerne lidt efter lidt have klaret sig. Hvad vi nu træffe på hos Pythagoras er bygget på meget af dette, så at man heraf kan slutte, at det væsentlige deraf har foreligget på Pythagoras' Tid, uden at vi dog have turdet tillægge Pythagoras det, da vi ikke have historisk Hjemmel derfor. Tilmed er, som allerede antydnet i de nævnte §§, måske meget af det anførte, f. Ex. om parallelle Linier, betragtet som Selvfølger, uden at det derfor er blevet så sætningsmæssigt fremsat som her. Dog nævnes det fine Bevis om Trekantvinklerne ved Hjælp af en Linie parallel med en af Siderne (§ 104) udtrykkelig som Pythagoras'. Vi skulle nu se, hvilke

mathematiske Sætninger Pythagoras byggede videre herpå, uden at vi dog kjende den Form og Orden, hvori han fremførte dem.

Fladefangs Omdannelse.

§ 110. Det blev i § 63 omtalt, at Rektanglets Egenskaber i Retning af Orden og Frihed giver dette stor Anvendelse i det daglige Liv, og at Valget af Kvadratet som Målenhed hænger sammen hermed. Det blev dernæst vist, at når dette Valg er truffet, er det let at beregne Fladefanget af et Rektangel, hvis Længde og Brede i Liniemål man kjender. Hvorledes derimod Beregningen af andre Fladefang end Rektangler skulde foregå, har sikkert været Menneskeslægten en langt sværere Opgave at løse, end man i vore Dage er tilbøjelig til at tænke sig.

Selv på Tider, da *Mathematikerne* vare nåede så vidt, at sådanne Beregninger vare *dem* en simpel Sag kan man træffe på fuldstændig fejlagtige Opfattelser hos endog meget begavede Forfattere; ja, endnu i vore Dage kan man finde højst mangelfulde Anskuelser i så Henseende.

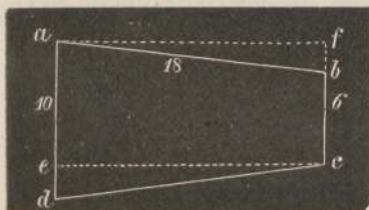
Det er en gængse Opfattelse, at der er et vist simpelt Forhold imellem Omkredsen og Fladefanget af en Figur, hvilket slet ikke er Tilfældet.

En så udmærket Historieskriver som *Thukydides* (474—403) [⊙] kan f. Ex. falde på at beregne Fladefanget af en Ø ved den Tid, man bruger om at omsejle den, og *Polybios* (203—121) [⊙], der selv véd bedre Besked, fortæller, at der gives Folk, som ikke kunne begribe, at en Lejr med lige Omkreds kan have for-

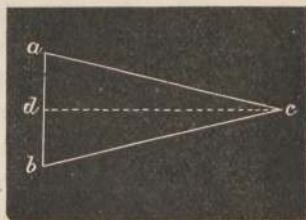
skjelligt Indhold. Ligeledes skulle Skatbetjente i Palæstina i det 5te Årh. e. Kr. have taget i den Grad fejl, at de indvilligede i, at en Mand, hvem der som Skat påhvilede Afgrøden af et med Hvede tilsæt Kvadrat på 40 Alens Side, såede det i to Stykker, hvert som et Kvadrat på 20 Alens Side, i den Mening, at han således opfyldte sine Forpligtelser. Lignende Ting fortælles om Araberne og vilde sikkert endnu et og andet Sted kunne fortælles i vore Dage.

§ 111. Det er da intet Under, at når Ahmes kommer til Beregning af Firkanter, der ikke ere Rektangler, eller til Trekanter, ere Beregningerne kun tilnærmelsesvis rigtige.

Når en Firkant afviger lidt fra Rektangelformen, så at det f. Ex. er lidt bredere ved den ene Ende end ved



Tg. 70.



Tg. 71.

den anden, har man ment at træffe det rigtige, når man foldede Længden med Middeltallet af Bredden ved de to Ender. Fladefanget af Firkanten $abcd$ (Tg. 70) skulde altså beregnes ved at folde Linien ab , der er 18, med Middeltallet af 10 og 6 eller 8, hvilket giver 144. Men dette er åbenbart urigtigt; thi afskjæres Trekanten ced , vendes om og sættes til som abf , bliver Firkanten til et Rektangel, hvis Brede ganske vist er 8, men hvis Længde ikke er 18; thi af må være mindre end 18. Stor er Afgivelsen imidlertid ikke, dersom ab ikke er

synderlig skrå, og man kan i sådanne Tilfælde nogenlunde bruge den ægyptiske Fremgangsmåde.

På lignende Måde har Ahmes beregnet ligebenede Trekanter ved at foldè et af Benene *ac* (Tg. 71) med Halvdelen af Grundlinien *ab* (hvad der er det samme som Middeltallet af Bredden ved de to Ender). Ved at skjære Trekanten over med en Linie fra *c* vinkelret på *ab*, og sætte de to Trekanter sammen til et Rektangel, ser man, at det ikke skulde være *ac*, men *dc*, der skulde foldes med *ad*.

Der er dem, der mene, at Ægypterne sagtens kunde have gjort det bedre, men at de fandt denne Tilnærmelse tilstrækkelig. Ovennævnte historiske Exempler fra andre Folk i langt senere Tider vise imidlertid, at den rigtige Sammenhæng ingenlunde har ligget så lige for. Vi træffe da fremdeles på den samme urigtige Fremgangsmåde omtrent halvandet Tusinde År efter Ahmes hos hans egne Landsmænd, skøndt de den Gang kunde have fået bedre Besked fra Grækerne.

På de ydre Mure af det berømte Tempel i Edfu findes meget udførlige hieroglyfiske Indskrifter, som ere anbragte mellem Årene 107 og 88 f. Kr. Indskriftene omhandle nogle Grundstykker, der tilhørte dette Tempels Præsteskab, nemlig 52 sammenstødende Marker, hvis 4 Siders Længde savel som deres Fladefang ere opførte på Muren. Ikke alle Markstykkerne ere Rektangler, og *nogle afvige endog betydeligt*, således et, der betegnes ved følgende Tal:

$$5 \quad 8 \quad 20 \quad 15 \quad 113\frac{1}{4}$$

Beregningen er åbenbart udført på samme Måde som af Ahmes. Middeltallet af de modstående Sider 5 og 8 er $6\frac{1}{2}$, og af 20 og 15 er det $17\frac{1}{2}$. $6\frac{1}{2}$ Gange $17\frac{1}{2}$ er $113\frac{3}{4}$ eller, som Ægypterne udtrykte det, $113\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Et andet Markstykke er

$$5 \quad 2\frac{1}{2} \quad 5 \quad 5 \quad 18\frac{1}{2}\frac{1}{4}.$$

Og Trekanter behandles her på samme Måde. Således må følgende Markstykke åbenbart være trekantet:

$$5 \text{ Intet } 17 \text{ } 17 \text{ } 42\frac{1}{2},$$

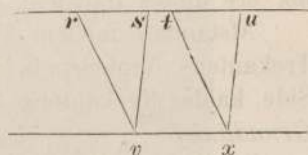
hvor ganske rigtig $2\frac{1}{2}$ Gange 17 er $42\frac{1}{2}$.

Skulde virkelig Ægypterne have været i Stand til at gjøre det bedre, kan man ikke sige andet, når de på en så monumental Måde fastslåer Præsteskabets Ejendomme, end, at man må have været så bundet af kanoniserede Forskrifter om, hvorledes der *skulde* regnes, at Tankens Evne til at gå sine egne Veje ikke kan antages at være blevet synderlig udviklet.

Særlig med dette for Øje, at Fladefangsberregning før Pythagoras' Tid synes at have været en så håndværksmæssig Sag, undertiden endog med kun ringe Grad af Tilnærmelse til det rigtige, kan det forstås, når en Historieskriver beundrer »det højere Synspunkt, hvorfra Pythagoras betragtede Mathematiken«.

§ 112. *Parallelogrammer, der have en Side fælles, og hvis modsatte Sider ligge i en og samme rette Linie, have lige store Fladefang.*

Lad *rvxt* (Tg. 72) være det ene Parallelogram, *svxu* det andet. Man indser let, at $\triangle rvs \cong \triangle txu$; thi $rv = tx$ (§ 100, Ex. 2); og af samme Grund $vs = xu$; og endelig er $\angle rvs = \angle txu$ (§ 99, Ex. 1). Når Trekantene *rvs* og *txu* altså (§ 102, Ex. 9 a) ere samfældige, og man fra Parallelogrammet afskærer den ene og sætter den anden til, bliver Fladefanget uforandret.



Tg. 72.

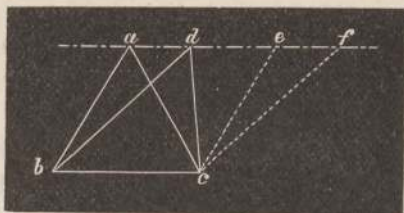
Afstanden mellem to parallelle Sider i et Parallelogram kaldes dettes *Højde*, og en af de nævnte Sider er da dettes *Grundlinie*.

Ex. Sammenligner man således et Parallelogram med det Rektangel, der har samme Grundlinie, og som ligger imellem de

samme Paralleler, vil man kunne besvare Spørgsmålet: *Hvilke Linier skal man måle og folde for at beregne et Parallelograms Fladefang?* 2 Måder.

§ 113. *Trekanter, der have en Side fælles, og hvis modstående Spidser ligge i en ret Linie parallel med hin Side, ere ligestore og halvt så store som et Parallelogram på samme Linie og mellem samme Paralleler.*

Lad abc (Tg. 73) være den ene Trekant, dbc den anden. Tegnes ce parallel med ba , er $abce$ et Parallelo-



Tg. 73.

gram, og Trekant abc dettes Halvdel (§ 100, Ex. 1). Tegnes $cf \neq bd$, bliver ligeledes Trekant dbc Halvdelen af Parallelogrammet $dbcf$. Da Parallelogrammerne $abce$ og $dbcf$ ere ligestore (§ 112), og Trekanterne abc og dbc ere disses Halvdele, ere disse ligestore.

Afstanden mellem Parallelerne eller en Linie fra Trekantens Vinkelspids vinkelret på den modstående Side kaldes Trekantens *Højde*, og bemeldte Side dens *Grundlinie*.

Ex. 1. *Hvorledes beregnes en Trekants Fladefang?*

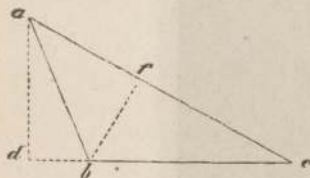
Ex. 2. *Hvilke Linier vilde man måle i Tg. 74 for at beregne Fladefanget af Trekanten abc ? To Måder. Hvilke Linier skulde tegnes og måles for at gjøre Beregningen på en tredje Måde?*

Ex. 3. *Enhver retlinet Figur, hvis Fladefang skal findes, kan ved Diagonaler deles i Trekanter; hver Trekant beregnes for sig, og sluttelig lægges alle Trekanter sammen. I Tg. 75 er $ac = 80$ Alen, $df = 46$ Alen, $bg = 32$ Alen. Hvor stort er Fladefanget af $abcd$?*

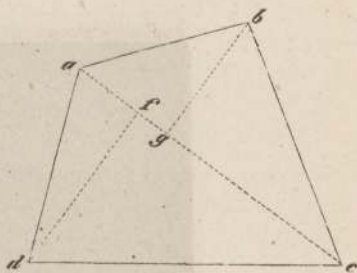
Ex. 4. *Beregn Fladefanget af et Trapetz, α : en Firkant, hvori*

to Sider ere parallelle, når der er givet Længden af Parallelerne, 22 Fod og 46 Fod, og disses Afstand, 18 Fod (Tg. 5).

Ex. 5. Bevis, at *Trekanter*, der have en Side lige stor og i samme rette Linie og den modstående Spids i en Linie parallel dermed, have lige store Fladefang.



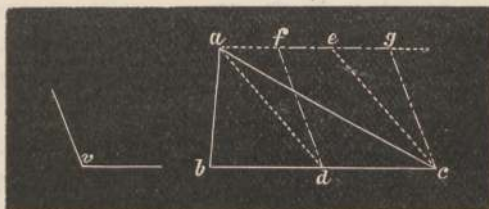
Tg. 74.



Tg. 75.

§ 114. At omdanne en given Trekant til et dermed lige stort Parallelogram, som tilmed har en given Vinkel.

Lad *abc* (Tg. 76) være Trekanten, *v* Vinklen. Man finder da Midten *d* af Grundlinien *bc*, og tegner en Linie



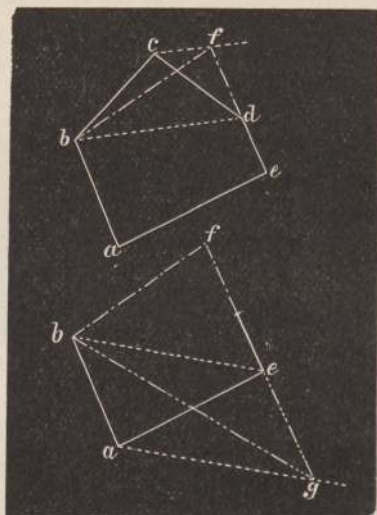
Tg. 76.

fra *a* til *d*. Denne Linie halverer da Trekanten (§ 113, Ex. 5).

— Dernæst tegner man $ae \neq dc$ og $ce \neq da$. Det herved opstående Parallelogram *adce* er dobbelt så stort som Trekant *adc*, altså netop lig Trekant *abc*. — Vinklen *v* afsættes nu som $\angle cdf$, og *cg* tegnes parallel med *df*.

Da har Parallelogrammet $fdcg$ samme Størrelse som $adce$ (§ 112) og altså som Trekant abc , og det har den givne Vinkel $v = \angle cdf$.

Havde man valgt $v = 90^\circ$, vilde Trekanten således være bleven omdannet til et dermed lige stort Rektangel.



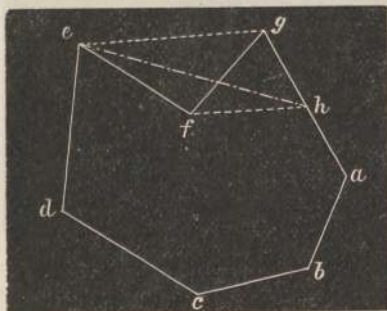
Tg. 77.

§ 115. *At omdanne en hvilkenksomhelst retlinet Figur til en Trekant med samme Fladefang.*

Lad der være givet en Femkant $abcde$ (Tg. 77), da omdannes den først til en Firkant. Man afskærer nemlig ved at tegne Diagonalen bd først en Trekant bcd , for siden at sætte en anden med samme Fladefang, nemlig bfd , til. Denne Trekant findes derved, at man gennem c tegner en Linie parallel med bd , forlænger ed , til den skjærer hin i f og tegner bf . Femkanten $abcde$ er således bleven omdannet til Firkanten $abfe$. — Ved en ganske lignende Fremgangsmåde omdannes denne igjen til Trekanten bfg (se den anden Del af Tg.

77, hvor dette er udført for sig selv, for ikke at overfylde Tegningen med Linier).

Har Figuren en indadgående Vinkel, såsom Vinklen efg (Tg. 78) i Syvkanten $abcdefg$, begynder man med at



Tg. 78.

sætte en Trekant efg til, ved at tegne Linien eg , for senere at afskjære en dermed lige stor Trekant ehg , der fåes ved igjennem f parallel med eg at tegne en Linie, der skjærer ag i h . Den tilsatte og den afskårne Trekant have åbenbart samme Grundlinie eg og de modstående Spidser f og h liggende på en Linie parallel med denne. Syvkanten $abcdefg$ er således bleven omdannet til Sextanten $abcdeh$.

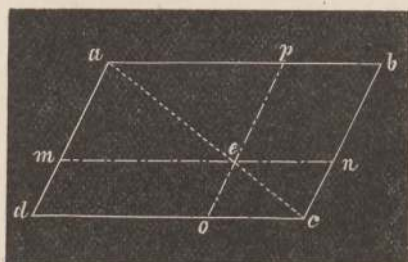
Ved enhver lignende Operation får man således en Figur med 1 Side færre end tilforn, hvad enten Figuren har indgående Vinkler eller ikke; og man vil således tilsidst få en Trekant.

Ex. Omdan en given Femkant, til et Rektangel (§ 115 og 114).

§ 116. Når man gennem et eller andet Punkt af Diagonalen i et Parallelogram tegner to Linier parallelle med Siderne, ville de to små Parallelogrammer, der ligge hver på sin Side af Diagonalen, være lige store.

$abcd$ (Tg. 79) er et Parallelogram. Gennem Punktet e af Diagonalen ac er tegnet $mn \neq ab$ og $op \neq da$. Man

har da den hele Trekant abc og de to små ape og enc henholdsvis lig med den hele Trekant adc og de to små ame og $ecoc$ (§ 100, Ex. 1). Trækkes de to små fra den



Tg. 79.

store, blive de to små Parallelogrammer $penb$ og $mdoe$ tilbage, og de må altså være lige store.

Ex. Der er givet et Rektangel og en Linie af en vis Størrelse. Der skal derefter tegnes et andet Rektangel med samme Fladefang og med den givne Linie som den ene Side. I den Figur, der bliver at tegne, vil det givne Rektangel komme til at spille en lignende Rolle som f. Ex. $dmeo$ i Tg. 79, og Linien som ne eller oc .

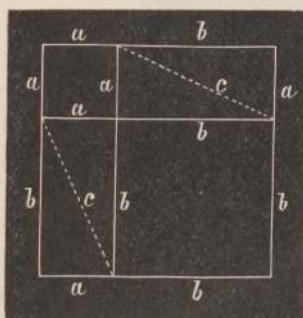
Den pythagoræiske Læresætning.

§ 117. Med Hensyn til den Sætning, der særlig har fået Navn af den pythagoræiske, og som virkelig også temmelig sikkert skyldes Mesteren selv, savne vi desværre Oplysning om, hvorledes Pythagoras er kommen til den; og de Gjætninger, man har gjort herom, ere meget forskellige. Vi ville her vælge én, som vil være i Samklang med det foregående, og som tillige vil vise

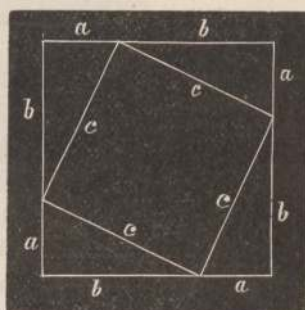
Sammenhæng med de Arbejder af Pythagoras, der skulle omtales i det følgende; men det må indrømmes, at man også kan få god Sammenhæng ved at gå omtrent den omvendte Vej, altså begynde med andre af Pythagoras' Ejendommeligheder, og derfra komme til den pythagoræiske Læresætning. Sammenhængende Tankeslutninger kunne nemlig ofte gøres lige i modsat Orden; og endelig er den geniale Opdager måske fra først af slet ikke gået nogen af de to eller flere Veje, men har på Grundlag af forskellige Kjendsgjerninger, som ligge måske både ad den ene og ad den anden Vej, anet Sammenhængen, og derefter fundet den stadfæstet ved bestemte Slutninger.

§ 118. Vi have set (§ 110), at en mindre mathematisk anlagt Person kunde være af den Mening, at man istedenfor et Kvadrat på 40 Alens Side kunde sætte to Kvadrater, hvert på 20 Alens Side. Den samme Person vilde formodentlig finde sig tilfredsstillet ved to Kvadrater, et på 30 og et på 10 Alens Side. — At imidlertid hverken de sidste to eller de første to ere lig Kvadratet på 40 Alens Side, vil strax falde i Øjnene på den, der tænker en lille Smule dybere over Figurernes Fladefang. Regn ud, hvor mange Kvadratalen der fåes i hvert af de 3 Tilfælde! — Men det kan da ligge nær at tegne en Figur for nærmere at betragte Forskjellen imellem det store Kvadrat og to små, hvis Sider tilsammen ere lig det stores, f. Ex. som i Tg. 80, hvor man i det store Kvadrats ene Hjørne har lagt det ene af de to små med Siden a , og i det modsatte Hjørne det andet lille Kvadrat med Siden b , og hvor man altså let ser, at Forskjellen mellem det store og de to små er to Rektangler, hvert med de samme Sider som de to små Kvadrater, nemlig a og b . Vil man altså vide, hvad de to små Kvadrater tilsammen ere, så må disse to Rektangler trækkes fra det store Kvadrat. Det ligger nu ikke fjernt at prøve på at skjære så meget som de to

Rektangler bort fra det store Kvadrat, men på en sådan Måde, at det tiloversblevne endnu er et Kvadrat. Tegner man Diagonalerne c i Rektanglerne, skjønnes det, at det altså gjælder om at bortskjære 4 retvinklede Trekkanter, hvori Siderne ved den rette Vinkel ere a og b .



Tg. 80.



Tg. 81.

Falder man nu blot på at skære en sådan af hvert af de 4 Hjørner af det store Kvadrat (Tg. 81), så har man her et Kvadrat tilbage, der er lige stort med de tidligere to små tilsammen.

At den ny Figur bliver et Kvadrat, falder let i Øjnene; thi Siderne ere c , altså lige store, og Vinklerne ere rette, nemlig Supplement til de to spidse, der ere lig 1 ret.

Man er nu altså i Stand til at lægge to Kvadrater sammen således, at man får et Kvadrat ud af det: Kvadraterne på a og på b ere tilsammen lig Kvadratet på c . Men hvad er c for en Linie? åbenbart Siden overfor den rette Vinkel, på hvis Ben a og b ere afsatte. Hin kaldes med et græsk Ord *Hypotenusen* i den retvinklede Trekant, hvori a og b ere *Katheter*. Vi ere nu nåede til de pythagoræiske Læresætning, der lyder:

Kvadraterne på Katheterne i en retvinklet Trekant ere tilsammen lig Kvadratet på Hypothenusen.

Ganske vist kunde man nu indvende: ja, dette var rigtigt for *den* retvinklede Trekant, vi i det omhandlede Tilfælde traf på; men er det rigtigt for enhver retvinklet Trekant? Man vilde kunne forvisse sig herom ved at gjøre alle de tilsvarende Slutninger i omvendt Orden, idet man kan begynde med en hvilken som helst retvinklet Trekant, gående ud fra Tg. 81. Men *Euklid*, om hvem senere, har et Par Hundrede År efter givet et smukt Bevis for den pythagoræiske Læresætning, som vi for Sammenhængens Skyld ville tage her.

§ 119. På hver af Siderne i den retvinklede Trekant *abc* (Tg. 82) tegnes et Kvadrat. Fra den rette Vinkels Spids *c* tegnes en Linie *cd* vinkelret på Hypothenusen og forlænges til *e*. Da kan man først bevise, at Kvadratet på *ac* er lig Rektanglet *adem*, eller at

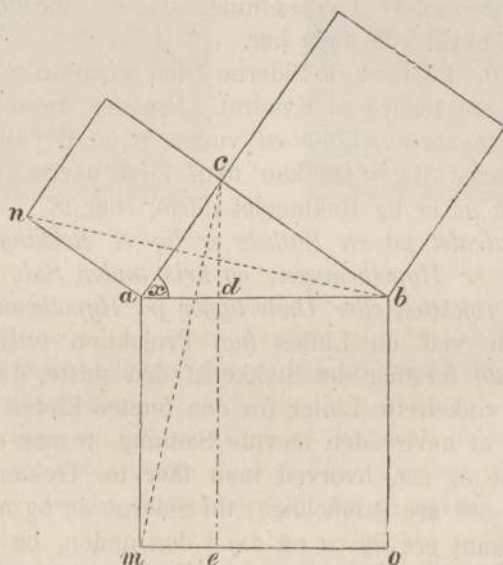
Kvadratet på en Kathete er lig et Rektangel, hvis ene Side er Hypothenusen, og hvis anden Side er Kathetens Projektion eller Underligger på Hypothenusen, idet man ved en Linies (*ac*) Projektion (*ad*) på en anden (*ab*) forstår det Stykke af den sidste, der ligger imellem vinkelrette Linier fra den førstes Ender.

For at bevise den nævnte Sætning, tegner man Linierne *nb* og *cm*, hvorved man får to Trekanter *nab* og *cam*, der ere samfældige; thi Siderne *na* og *ab* i den ene Trekant ere lig *ca* og *am* i den anden, og Vinklen imellem disse to Sider er i hver Trekant lig med en ret Vinkel og *x* i Forening. Trekanterne have altså to Sider og den mellemliggende Vinkel lige store og ere således samfældige (§ 102, Ex. 9 a), følgelig også lige store. Men den første Trekant *nab* er halvt så stor som Kvadratet på *na* (§ 113), og den anden Trekant *cam* er halvt så stort som Rektanglet *amed* (§ 113), følgelig er hint Kvadrat lig dette Rektangel.

Heraf følger da også, at Kvadratet på den anden

Kathete bc er lig Rektanglet *boed* (man kan forøvrigt selv udfinde, hvilke Hjælpelinier der skulde tegnes, og hvorledes Beviset skulde føres, om det skulde gjentages for den anden Kathete). Og lægges nu Kvadraterne på de to Katheter sammen, fåes to Rektangler *amed* og *boed* tilsammen, altså Kvadratet på Hypotenusen.

Ved Hjælp af den pythagoræiske Sætning kan man nu lægge Kvadrater sammen således, at det udkomme



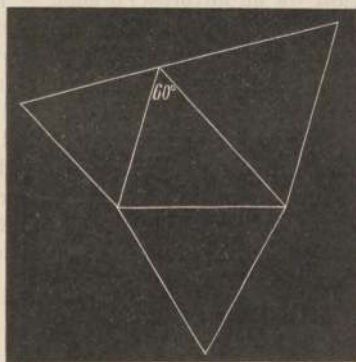
Tg. 82.

bliver et Kvadrat. For at lægge to sammen, danner man blot en retvinklet Trekant med deres Sider som Katheter. Et Kvadrat på Hypotenusen er da lig hine tilsammen. Hertil kan atter lægges et tredje på tilsvarende Måde osv.

Ligeledes kan man trække et Kvadrat fra et andet således, at det udkomne bliver et Kvadrat. Man tegner blot en ret Vinkel, på hvis ene Ben man afsætter Siden af det Kvadrat, som skal fratrækkes, og fra dette Bens Ende anbringer man Siden af det Kvadrat, hvorfra det andet skal trækkes, som Hypotenuse. Den anden Kathete er da Siden i det søgte Kvadrat.

Den pythagoræiske Læresætning, hvis Vigtighed bl. a. fremgår deraf, at Sagnet *fortæller*, at Pythagoras bragte Guddommen et Offer af 100 Oxer, hvad der forøvrigt strider imod Pythagoras' religiøs-moralske Anskuelser, har man kaldet *Magister Matheseos*, ω : Matematikens Læremester.

Ex. 1. Læg Kvadrater med Siderne 3, 6 og 7 sammen, og træk derfra et Kvadrat på Siden 9 og et på Siden 2. Prøv dernæst Tegningens Nøjagtighed ved at udregne, hvor stort det udkomne skulde være.



Tg. 83.

Ex. 2. I en Trekant (Tg. 83) er den ene Vinkel 60° . På hver af dens 3 Sider tegnes en ligesidet Trekant. Bevis, at den givne Trekant i Forening med den ligesidede Trekant på den Side, der er ligeoverfor den først nævnte Vinkel på 60° , er lig de to andre ligesidede Trekanter tilsammen. — Beviset kan føres på lignende Måde som ovennævnte af Euklid.

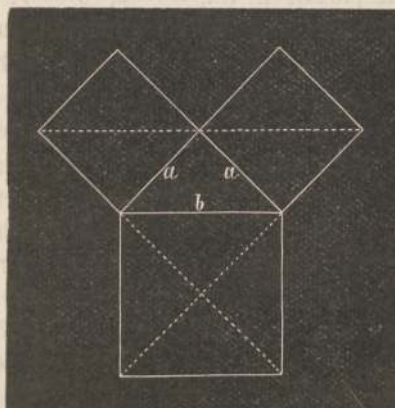
Ex. 3. Tegnes en tilsvarende Figur, men hvor Vinklen er 120° , vil den ligesidede Trekant på Siden overfor denne Vinkel være lig de andre 3 Trekanter tilsammen. Bevis dette!

Anm. Man har i den pythagoræiske Læresætning set et så rent Udtryk for en fornuftig Tanke uden Påheftning af jordiske Forudsætninger, at man har foreslået, hvis vi en Gang skulde indlede en Forhandling med mulige Fornuftvæsener på andre Kloder, der kunde have helt andre Forudsætninger end vi, at vi da skulde give en kjæmpemæssig Fremstilling af den pythagoræiske Sætning f. Ex. i Sahara. — Det kan bemærkes, at hvis sådanne mulige Fornuftvæsener af en eller anden Grund foretrak den ligesidede Trekant som Målenhed fremfor Kvadratet, eller hvis de ligesom de jordiske Bier vare mere oplagte for den regelmæssige Sexkant, måtte deres pythagoræiske Læresætning om den »rigtigvinklede Trekant« i første Tilfælde afbildes som Tg. 83, i sidste Tilfælde tegnes i Overensstemmelse med Ex. 3, om de muligvis også kunde anerkjende Rigtigheden af vor jordiske Læresætning, ligesom vi kunne anerkjende deres, medens dog hverken vor Sætning ligger så naturlig for dem, eller deres for os. Man ser således, at hvorvel vi nu have nået en Sætning så almenyldig, at dens Rigtighed i alt Fald må respekteres af ethvert Fornuftvæsen, er den dog ikke helt frigjort fra de udvortes Forhold. — Der er dem, der mene, at vor Tanke kan gennemtrænge, ikke alene Størrelsesbegreberne og deres Love, men også Naturens Love, såvel dem i den livløse, som dem i den levende Verden, at Tanken også der kan frigjøre sig i den Grad, at den kan se tilbunds i Lovene og deres Sammenhæng, og at den derfor nok ved egen Fuldkommenhed kan danne sig et Skjøn — og med Tiden mere — om Tilværelsens Gåde. Overfor sådanne Forventninger er det værd at lægge Mærke til, at vi endog indenfor Mathematiken, ja, overfor så rene Tankesætninger som den pythagoræiske endnu ikke ere helt frigjorte fra Jordlivets Forhold.

»Usigelige« Størrelser.

§ 120. Blandt retvinklede Trekanter forekommer den ligebenede, den, hvori de to Katheter ere lige store, særlig ofte. Den har naturligvis været kjendt og brugt

i den grå Oldtid og var en af de Figurer, som Pythagoras særlig beskæftigede sig med. Anvendte Pythagoras nu sin Læresætning på denne, fandt han (Tg. 84), at



Tg. 84,

et Kvadrat på Hypotenusen b er dobbelt så stort som et Kvadrat på Siden a .

Rigtigheden af dette stadfæster sig her særlig let, idet Kvadratet på a består af to retvinklede ligebenede Trekanter samfældige med den givne, og Kvadratet på b består af 4 sådanne Trekanter. Da 2 Gange 2 er 4, ere de to Kvadrater på a lige store med Kvadratet på b .

§ 121. Når man nu tilforn vidste, at man får en ret Vinkel ved at sammensætte Linierne 3, 4 og 5 (Tg. 68), og heri havde et værdifuldt Middel til Dannelsen af en ret Vinkel, så kunde det ligge nær for Pythagoras, som i Babylon har kunnet få en stærkere Tilskyndelse til at indføre Tal i Geometrien end i Ægypten, at prøve på at finde, hvilke Tal der kan passe for a og for b . Og vi stå her ved en anden af Pythagoras' store Opdagelser, nemlig, at der blandt Tallenes uendelige

Skare ikke findes to Tal, som nøjagtigt kunne svare til Kathete og Hypothenuse i den ligebenede retvinklede Trekant.

Lad os først prøve nogle Tal, som kunde synes omtrentligt at passe, f. Ex. $a = 2$, $b = 3$; Katheternes Kvadrater blive da 4 og 4, ialt 8, Hypothenusens 9; — stemmer ikke. $a = 5$, $b = 7$; Katheternes Kvadrater 25 og 25, ialt 50, Hypothenusens kun 49. $a = 12$, $b = 17$; Katheternes 144 og 144, ialt 288, Hypothenusens derimod 289; og ethvert Forsøg vil vise sig forgjæves. Dette var Pythagoras klar på, og en Bemærkning af en senere Forfatter gjør det rimeligt, at det har været på en lignende Måde som følgende, at Pythagoras har klaret dette; thi der angives, at Grunden til, at to sådanne Tal ikke lade sig finde, er den, at „*et lige Tal ikke kan være det samme som et ulige Tal*“. Lad os se, hvorledes dette Bevis må være at forstå.

At der skulde gives to Tal, der kunne passe på a og b , vil sige, at der skulde være et vist lidet Liniemål, som indeholdes et *helt* Antal Gange i Linien a , og også et *helt* Antal Gange i Linien b . Man kalder det, at a og b have et *fælles Mål* eller (med et latinsk Ord), at a og b ere *kommensurable*. — Vi behøve ikke at befatte os med et fælles Mål, som skulde indeholdes et *lige* Antal Gange i a , f. Ex. 10, og et lige Antal i b , f. Ex. 14; thi fandtes der et sådant; så behøvede man blot at tage et dobbelt så stort Mål, da vilde det indeholdes halvt så mange Gange i a , nemlig 5, og halvt så mange Gange i b , nemlig 7. Således kan man altid sige, hvis begge Tallene ere lige, og man kan blive ved dermed, indtil et af Tallene eller begge Tallene blive ulige. — Men nu kan man indse, at når a er et helt Tal, vil a Gange a også være et helt Tal; og når dette fordobles, fåer man et lige Tal. Altså må b Gange b , som er lige stort hermed, være lige; thi ulige Gange ulige kan ikke give lige. Er a hel, må b altså altid være lige. Nu er således

den *eneste* Mulighed, at b skulde kunne være et *lige* Antal Småmål, a et *ulige* Antal af samme Småmål. — Tænker man sig nu en Linie trukket fra den rette Vinkels Spids (Tg. 84) til Midten af b , fåer man åbenbart en ligebenet retvinklet Trekant (eller rettere to sådanne), hvis Hypothenuse er a , og hvis to Katheter ere $\frac{1}{2}b$; men da b var et lige Antal Småmål, må $\frac{1}{2}b$ dog være et *helt* Antal Småmål; og vi have altså nu en ligebenet retvinklet Trekant, hvor Katheterne ($\frac{1}{2}b$) ere et vist helt Antal Småmål, og hvor Hypothenusen a altså, som før blev vist, må være et *lige* Antal af samme Småmål; men vi betragte jo netop det Tilfælde, at a er et *ulige* Antal af samme Småmål. Da »et lige Tal ikke kan være det samme som et ulige Tal«, er der altså ingen Mulighed mere for at a og b overhovedet kunne være to hele Tal; der gives ikke noget Mål, der indeholdes et vist Antal Gange i a og et vist Antal i b .

§ 122. Lad os eksempelvis tænke os Trekanten tegnet således, at a er 1. Da må b være større end 1, men dog mindre end 2. Man kunde altså tænke sig b som et blandet Tal (§ 43) imellem 1 og 2; men et sådant kan altid tænkes omskrevet til en uægte Brøk (§ 43); og vi kunne tænke os den så forkortet, som den overhovedet kan forkortes. — Er dette nu muligt? Kvadratet på a er 1; Kvadraterne på Katheterne ere altså tilsammen 2. Kvadratet på b skal altså være 2. Men en uforkortelig Brøk Gange sig selv kan åbenbart ikke give 2 eller i det hele taget ikke noget helt Tal, men må give en uforkortelig Brøk. Pythagoras gjorde herved den Opdagelse at der gives Størrelser, der hverken ere hele Tal eller Brøker. Han kaldte dem *usigelige Størrelser*. I vorre Dage plejer man at kalde dem med et latinsk Ord *irrational* Tal, $\circ$: uforstandige Tal, men det kan ikke nægtes, at der er vel så god Mening i Pythagoras' Udtryksmåde. I og for sig er nemlig Størrelsen bestemt og klar nok. Tænkes fra en ret Vinkels Spids

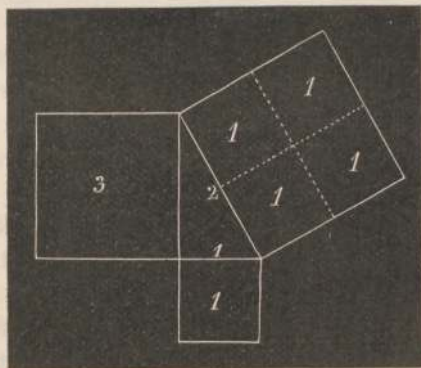
1 afsat hen ad hvert Ben, så må Endepunkterne have en bestemt Afstand fra hinanden; vi kunne blot ikke *ved Hjælp af vort hidtidige Forråd på Talord* (Hele og Brøker) *sige*, hvor stor denne Afstand er.

Pythagoræerne skulle fra først af have opfattet de usigelige Størrelser som af Guderne bestemte til ikke at måtte omtales. De holdt dem en Tid hemmelig; men da en Pythagoræer senere talte om Sagen til andre, gjentager Fortællingen om Hippasos sig: også denne Ugudelige skal have lidt Skibbrud og være druknet.

§ 123. Hele Tal ere brugte forud for den historiske Tid. De første Talords fælles Rødder i Alverdens Sprog tyde på, at de ere så gamle som Menneskeslægten (§ 5). Skulde ikke det selv samme kunne siges om Brøksbegrebet, f. Ex. en halv, så er det i hvert Fald vist, at også dettes første Fremkomst taber sig i den forhistoriske Tid, så at det kun er den videre Udvikling og Behandling af hele Tal og Brøker, vi have kunnet følge i denne Bogs første Afsnit: »Tal«. Det ny Størrelsesbegreb, vi nu stå overfor, tilhører ved sin første Fremkomst nogenlunde den historiske Tid; og når vi i det hele taget betænke, hvilken Tankefærdighed der må have hørt til for første Gang at finde og klare, at der gives sådanne usigelige Størrelser, så er det snarere at undres over, at denne Opdagelse falder så tidligt. Vi have her med et rent Værk af Tanken at gjøre. Der er ikke noget fra Sandseverdenen, der kan indgive Anskuelse af eller Forestilling om de usigelige Størrelser, medens der findes Anskuelighedsbilleder nok, der kunne kalde både på hele Tal og på Brøker. Ja, man kan sige, at Sandseverdenen snarere aflægger et Vidnesbyrd modsat det, som Tanken her har fundet; thi tegner man, så godt man kan, en ligebenet retvinklet Trekant, vil man nok kunne finde et lidet Mål i Passeren, som *synes* at gå op både i Hypotenusen og i Katheten. Men er her Modstrid mellem Tanken og vore

Sandsemidler, skjønner man dog strax, at Tanken må have Retten på sin Side. At »lige ikke kan være det samme som ulige« er en logisk Nødvendighed, som ingen vil rokke ved eller tvivle om. Og gå vi nærmere ind på at prøve, om virkelig det Småmål, vi have i Passeren, kan gå nøjagtigt op i begge Linier, hvilket kan ske enten ved Mikroskopets Hjælp eller ved at udregne, om så virkelig de to Kathetekvadrater blive lig Hypothenus-kvadratet, viser det sig, at der kun tilnærmelsesvis var Overensstemmelse. Denne kan på en Måde, som vi senere skulle se, drives så vidt, man ønsker, så vidt, at der for alle praktiske Foretagender er så godt som fuld Overensstemmelse; men aldeles passer det ikke; Tanken beholder Ret ligeoverfor Sandsemidlerne.

§ 124. Den usigelige Størrelse er som sagt en ligeså klar og bestemt Størrelse som den sigelige. Derom



Tg. 85.

kan man forvise sig ved at tegne eller tænke sig tegnet en ligebenet retvinklet Trekant. Kalder man Katheten 1, er det Hypothenusen, der er usigelig; tager man derimod Hypothenusen som Enhed — og dertil har man naturligvis lige så god Ret — så bliver Katheten usige-

lig. Den ene Størrelse er lige så bestemt som den anden.

Man ser tilmed snart, at der gives uendelig mange andre usigelige Størrelser end dem, som man træffer på ved den nævnte Trekant. Gå vi til en anden Trekant af dem, som Pythagoras særlig yndede, nemlig *den retvinklede Trekant*, hvis Hypothenuse er dobbelt så lang som dens mindste Kathete (Tg. 85), åbenbart den Trekant, der fåes ved Halvering af den ligesidede Trekant (Tg. 63), og kalde vi den mindste Kathete 1, ser man, at Kvadratet på Hypothenusen er 4, på den mindste Kathete 1; og Kvadratet på den største må altså være 3. Denne Kathete indses nu let at være inkommensurabel (o: ikke kommensurabel) med den anden Kathete; thi var der et af Enerens Småmål, der gik op i den store Kathete, vilde denne blive udtrykt ved en uægte Brøk mellem 1 og 2; og ingen uægte og forkortet Brøk kan ved at foldes med sig selv give 3 eller noget andet helt Tal (§ 122).

§ 125. Efterat vi nu med Pythagoras ere nåede til at erkjende Tilværelsen af usigelige Størrelser, ville vi ikke lade dem forblive usigelige, men give dem Navn, navnlig give den Slags usigelige Størrelser, vi her have gjort Bekjendtskab med, Navn — det kunde jo være, at der også vare andre Arter, som vi senere kunne træffe på. Man kalder da den Størrelse, på hvilket et Kvadrat vilde være 2, for *Kvadratrod 2*, et billedligt Udtryk, en sådan Rod, at et Kvadrat, der voxer op på den, er 2. Ligeledes kalde vi den store Kathete i Tg. 85 Kvadratrod 3, den Rod, der bærer et Kvadrat på 3. Og vi nøjes ikke med at indføre disse nye Talnavne; vi indføre også nye Taltegn og skrive de nævnte Størrelser $\sqrt{2}$ og $\sqrt{3}$, hvor $\sqrt{}$ kaldes Rodtegnet og er i Virkeligheden ikke andet end et omdannet latinsk r, Forbogsstavet i det latinske Ord »radix», Rod.

Vi nøjes indtil videre med Navn og Tegn. Senere

skulle vi se, hvorledes man finder, hvilke Tal og Brøker, der ligge en sådan Størrelse nærmest.

Ex. 1. Hvorledes udsiges og skrives Størrelsen af Hypothenusen i en retvinklet Trekant hvis Katheter ere 1 og 2?

Ex. 2. Hvorledes udsiges og skrives Størrelsen af den ene Kathete i en retvinklet Trekant, hvis Hypothenuse er 6, og hvis anden Kathete er 5?

Pythagoræiske Talspekulationer.

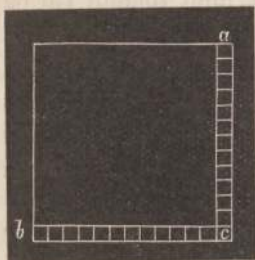
§ 126. Opdagelsen af de usigelige Størrelser fik en gennem mange År voxende Betydning for den græske Mathematik. Man indså, at når der midt iblandt Tal og Brøker lå Størrelser, der ikke vare Tal og Brøker, så fyldte disse altså ikke hele Størrelsesbegrebet ud. Hvert Tal eller Brøk strakte sig på en Linie kun fra dennes Ende til et bestemt Punkt, og om man så får nok sa mange Punkter (hvert bestemt af sit Tal eller sin Brøk), så fik man dog aldrig hele Linien. *Det hele Størrelsesbegreb var derfor efter Grækernes Opfattelse kun at finde i Geometrien*, medens Arithmetiken blot behandlede de enkelte om end overmåde talrige hele Tal og Brøker. Denne Spaltning blev endnu langt stærkere efter Pythagoras' Tid, og man vil heraf forstå, at det fornemmelig blev Geometrien, der hos Grækerne blev den fuldstændigste Størrelseslære, og som også hos dem udviklede sig til en videnskabelig Højde, som rækker langt ud over, hvad vi i vore Dage kalder elementær Mathematik, og ind i, hvad man kalder den højere Mathematik. Hvad Grækernes arithmetiske Arbejder angår, skulle vi i Bogens tredie Afsnit kortelig berøre disse; men foreløbig ville vi se nogle Talbetragtninger, hvis væsentlige

Del skyldes Pythagoras, der synes at have været ualmindelig oplagt for Talspekulationer.

§ 127. Ved at søge efter andre retvinklede Trekkanter end den på 3, 4 og 5 med hele Tal som Sider, kom vi ind på Størrelser, hvorom Pythagoras sagde, at de ikke vare Tal. Men det kunde jo dog være, at der gaves andre Trekkanter, hvis Sider ere Tal, når man blot kunde opdage dem. Pythagoras skal selv have Æren af at have opdaget, ikke alene enkelte sådanne, men en almengyldig Måde at finde uendelig mange sådanne på.

Det gjælder om at finde 3 hele Tal således beskafne, at, når hvert af dem foldes med sig selv, vil det ene Kvadrat være lig med de to andre tilsammen.

Tænker man sig, at det ene Kvadrat blev omdannet



Tg. 86.

til en Vinkelhage acb (Tg. 86) eller, hvad Grækerne også (§ 71) kaldte, en *Gnomon*, nemlig her en retvinkelformet Figur, hvis Grene ere lige brede og lige lange, i nærværende Tilfælde så lange som Siden i det andet Kvadrat, vil Gnomonen åbenbart passe om det andet Kvadrat og fylde dette ud til et Kvadrat, der altså skal være Hypotenusens.

Man kan nu gå ud fra et hvilket som helst ulige Tal, f. Ex. 5, og sige, at det skal være den ene Kathete. Man folder det med det selv og får altså Kathetens Kvadrat, der må være et ulige Tal, 25. Man trækker herfra 1, nemlig det, som på Tg. 86 er mærket med c (tilbage bliver 24). Det tiloversblevne er da Gnomonens to Grene, og halveres det, altså 12, har man Tallet for Gnomongrenens Længde, der tillige er Længden af den anden Kathete, hvis Kvadrat er 12 Gange 12 eller 144.

Hypothenusens Kvadrat er åbenbart 1 mere på hver Led; følgelig er Hypothenusen 13.

Denne Regel af Pythagoras lyder altså således: *Vælg et ulige Tal for den ene Kathete. Udregn dets Kvadrat. Træk 1 fra. Halver det. Da har du den anden Kathete. Læg 1 hertil. Da har du Hypothenusen.*

Ex. Find efter denne Regel Hypothenusen og den ene Kathete i hele Tal, når den anden Kathete er 11.

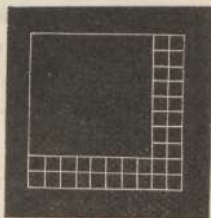
§ 128. Medens dette var en Måde, hvor man valgte et *ulige* Tal for en Kathete, skal *Plato*, om hvem senere, have fundet en Måde, hvor man for en Kathete vælger et *lige* Tal.

Man tænker sig atter dennes Kvadrat omdannet til en Gnomon, men hvis Grene have en Bredde på 2 (Tg. 87). Der bliver således 4 Rækker Småkvadrater, hver Række med et Antal så stort som den anden Kathete, hvis Kvadrat Gnomonen just omslutter, og desuden er der 4 Småkvadrater i Hjørnet af Gnomonen, så at denne har 4 Gange så mange Småkvadrater som »1 mere end den anden Kathete«, eller 4 Gange så mange Småkvadrater som »1 mindre end Hypothenusen«. (Det samme vilde indses ved at omdanne det ene Kathetekvadrat, ikke til en Gnomon, men til en kvadratisk Ring om det andet Kathetekvadrat.) »En Række og 1 til« udgjøre altså $\frac{1}{4}$ af det omdannede Kathetekvadrat.

Tænker man sig altså den givne Kathetes Kvadrat ved et Kors skåret i 4 lige store Kvadrater, så at hver af disse har den halve Kathete til Side, har hvert af disse Kvadrater netop, hvad vi kaldte, »en Række Småkvadrater og 1 til«.

Platos Regel lyder da således:

Vælg et lige Tal for den ene Kathete. Halver dette,



Tg. 87.

og udregn Kvadratet på denne Halvdel. Da får man et Tal (hvad vi kaldte »en Række og 1 til«), som formindsket med 1 giver den anden Kathete, medens det forøget med 1 giver Hypothemisen.

Ex. 1. Tg. 87 svarer til, at den første Kathete er valgt som 6, der halveret giver 3, dette kvadreret er 9, dette formindsket med 1 giver 8 (den ene Kathete) og forøget med 1 giver 10 (Hypothemisen). Trekanten er altså 6, 8, 10, den samme, som vi pleje at kalde 3, 4 og 5

Lx. 2. Vælg den ene Kathete lig 8, og find de andre Sider!

§ 129. I Sammenhæng med sådanne Sammenstillinger mellem Tal og Figurer, kan nævnes flere *Talrækker*, som Pythagoras opstillede. Disse er ikke nye i hvert Fald ikke alle; thi man har fundet enkelte af dem igjen på udgravede Lertavler i Kaldæa. Derimod er vist netop sådanne Sammenstillinger som følgende mellem Figurer og Tal noget nyt, tilvejebragt ved et Møde af Ægyptisk og Kaldæisk i Grækeren Pythagoras, og de bar i hvert Fald herefter nye, uanede Frugter.

Til Tallene i den naturlige Talrække svarer åbenbart følgende Kvadrater:

Tal	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13
Kvadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81	121	144	169

Hvert Kvadrat kan nu tænkes opstået af det foregående derved, at der er lagt en Gnomon om det, ligesom ved Tg. 86. Istedenfor at tegne selve Kvadraterne kunne vi illustrere dette ved Prikker således:

1	3	5	7	9	11	13	15	17
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.								
..	.	.						
.	..	.						
.	..	..	.					
.	..	..	..					
.	..	..	..	.				
.	..	..	..	..				
.	..	..	..	..	.			
.	..	..	..	..	..			
.	..	..	..	..	..	.		
.	..	..	..	..	..	..		
.	..	..	..	..	..	..	.	
.	..	..	..	..	..	..	..	
.	..	..	..	..	..	..	..	.

Begynder man med 1, skal der først sættes en Gnomon på 3 til, for at Figuren skal vedblive at være et Kvadrat; dernæst en Gnomon på 5, så på 7 osv. bestandig det følgende ulige Tal. De ulige Tal kaldte man *Gnomontal*; og det indses let, at Forskjellen mellem hver to efter hinanden følgende Kvadrattal er Rækken af ulige Tal, nemlig:

Kvadrattal 0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 ...

Forskjel 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 ...

Lægger man altså de første ulige Tal sammen, op til et eller andet ulige Tal, må man få et Kvadrattal.

§ 130. Til Sammenligning hermed var det ganske naturligt at efterse, hvad der kom ud af en Sammenlægning af de første lige Tal.

Lige Tal 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 ...

Sammenlagt 2 6 12 20 30 42 56 72 90 110 132 ...

Hvad dette er for Tal, klarer sig ved en lignende pythagoræisk Illustration som i § 129, nemlig:

	2	4	6	8	10	12	14
• — •	•	•	•	•	•	•	•
• — • — •	•	•	•	•	•	•	•
• — • — • — •	•	•	•	•	•	•	•
• — • — • — • — •	•	•	•	•	•	•	•
• — • — • — • — • — •	•	•	•	•	•	•	•
• — • — • — • — • — • — •	•	•	•	•	•	•	•
• — • — • — • — • — • — • — •	•	•	•	•	•	•	•
• — • — • — • — • — • — • — • — •	•	•	•	•	•	•	•

Man ser strax, at hvor mange lige Tal (en Slags Gnomoner, men med ulige lange Grene) der end sættes til, får man et Rektangel, der er 1 mere på den ene Led end på den anden. Rektanglerne må altså beregnes ved at folde et Tal med det følgende, og sådanne Tal — Pythagoras kaldte dem *heteromeke* — fik i den pythagoræiske Filosofi sin særlige Betydning, hvad de derimod ikke have fået i nogen synderlig Grad i Matematiken. Man ser, at ovennævnte Talrække ganske rigtig kan opløses således:

2 6 12 20 30 42 56 72 90 110...

1.2 2.3 3.4 4.5 5.6 6.7 7.8 8.9 9.10 10.11...

§ 131. Endelig kan man prøve, hvilke Tal der fåes, når man sammenlægger de første Tal i Talrækken, både de ulige og de lige, nemlig:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78...

Billedligt tager dette sig således ud:

Disse Tal fik derefter Navnet Trekantstal eller *Trigonal-tal*, en Række Tal, der har fået noget større Betydning i Mathematiken.

Pythagoras bemærkede om disse Tal, at når man sammenlægger to efter hinanden følgende Trigonal-tal, får man et Kvadrattal, nemlig:

Trigonal-tal:	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	...
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...	
tilsammen	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	...

Billedligt forståes dette således. Skydes to efter hinanden følgende Trigonal-tal sammen, nemlig:

fåes en Figur, der ved at vrides, men uden at forandre Enheder, bliver til et Kvadrat.

§ 132. Pythagoras' Filosofi havde blandt andet travlt med Modsætninger. Således opstilledes følgende 10 Par:

- | | |
|----------------|----------------|
| 1, begrændset | og ubegrændset |
| 2, ulige | og lige |
| 3, én | og mange |
| 4, højre | og venstre |
| 5, mandligt | og kvindeligt |
| 6, hvilende | og bevæget |
| 7, ret | og krumt |
| 8, lyst | og mørkt |
| 9, godt | og ondt |
| 10, kvadratisk | og heteromekt, |

en sær Blanding, hvis filosofiske Sammenhæng vi ikke her skulle forsøge at finde rede i; men i Nr. 2 og 10

gjenkjender man Tallene fra §§ 129 og 130. Man anså forøvrigt de ulige Tal for hellige, de lige for ikke hellige. Hine gave det fuldendte, nemlig Kvadrater, disse det mindre fuldkomne, Heteromekerne. Trigonaltallene vare en Sammensætning af begge Dele; men ved gjentagen Behandling kunde de dog afføde det fuldkomne, Kvadraterne.

Vi se således, at Pythagoras' udmærkede matematiske Spekulationer ikke ganske have været uden Bihensigter, og vi kunne heraf skjønne, at hans Arbejder have været knyttede til visse religiøse Forestillinger. I Ægypten og Babylon havde man sine Hensigter — mere end Bihensigter — med Stjerneiagttagelser og derhen hørende Spekulationer, nemlig at spå ud af Stjernerne. I den græske Astronomi trådte dette i Baggrunden og var til Tider næppe en Gang nogen Bihensigt; men medens Pythagoras i mathematisk Henseende gjorde så store Fremskridt, fortsatte han dog — og således gik det fremdeles i mange År efter ham — med at knytte de matematiske Sandheder til Guddommen og til Forholdet til samme.

Under dette, og måske på sin Vis ægget ved denne Omstændighed, kom dog også en Mængde rent mathematiske Opdagelser frem. Således studerede Pythagoras foruden de omtalte Rækker endnu flere andre, som have fået stor Betydning i Mathematiken, men som ikke skulle omtales her.

Proportioner.

§ 133. At tegne en Figur, der *ligner* en anden, men har en anden Størrelse, er en Opgave, man allerede

har prøvet Kræfter med i den forhistoriske Tid, ligesom denne Kunst tilstræbes endnu i vore Dage af vilde Folk, som på deres Hud tatovere eller på deres Våben eller Klæder male eller ridse Afbildninger af andre Ting. Når denne Opgave skal løses med nogen Nøjagtighed kan man, således som vi vide, at Ægypterne have gjort (§ 80), tegne et Næt af Kvadrater på Originalen og begynde med et tilsvarende Kvadratnæt der, hvor Billedet skal tegnes, for således at mærke de Steder, hvor hver af Billedets Enkeltheder skal falde.

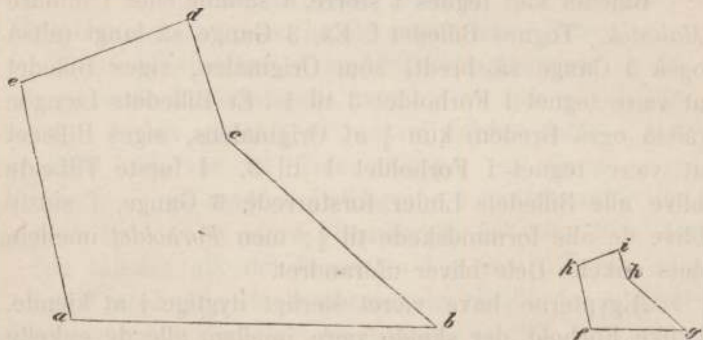
Billedet kan tegnes i større, i samme eller i mindre *Målestok*. Tegnes Billedet f. Ex. 3 Gange så langt (altså også 3 Gange så bredt) som Originalen, siges Billedet at være tegnet i Forholdet 3 til 1. Er Billedets Længde (altså også Bredden) kun $\frac{1}{3}$ af Originalens, siges Billedet at være tegnet i Forholdet 1 til 3. I første Tilfælde blive alle Billedets Linier forstørrede 3 Gange, i sidste blive de alle formindskede til $\frac{1}{3}$; men *Forholdet* imellem dets enkelte Dele bliver uforandret.

Ægypterne have været særligt dygtige i at kjende, hvilke Forhold der skulde være imellem alle de enkelte Dele af de Billeder, de fremstillede. Den latinske Tale-måde, der siger: »Ud af Kloen — Løven,« menes at skulle føres tilbage lige til Ægypterne, der, når Løvekloens Størrelse først var fastslået, forholds-mæssigt kunde bygge alt det øvrige op derpå.

At de græske Kunstnere have fortsat sådanne Studier ivrigt, vides bl. a. deraf, at *Fidias'* [⊙] samtidige og Medbejler *Polyklet* i Argos fastslog de skønneste Forhold eller Proportioner i det menneskelige Legeme i en Statue, som man kaldte »Kanon« (Rettesnor), og som nød den højeste Anseelse og i lang Tid blev betragtet af mange Kunstnere som en Lov.

Man indser imidlertid strax, at et Billede meget godt kan være tro, uden at just dets Linier ere et helt Antal Gange større eller mindre end Originalens. Man kan

f. Ex. tegne Billedet i Forholdet 2 til 3, det vil sige: at en Linie, som på Originalen er 3 Alen (Tommer e. l.), på Billedet bliver 2 Alen (Tommer e. l.), eller man kan f. Ex. tegne Figurerne, som i Tg. 88, i Forholdet 19 til 5, så at når en Side *ab* i den ene Figur er 19 Linier, så er den tilsvarende Side *fg* i den anden Figur 5 Linier, og når en anden Side, f. Ex. *ed* er 19 halve Linier, så er *ki* 5 halve Linier. Også sådanne Figurer ville kunne ligne hinanden, være *ligedannede*, hvilket naturligvis bl. a.



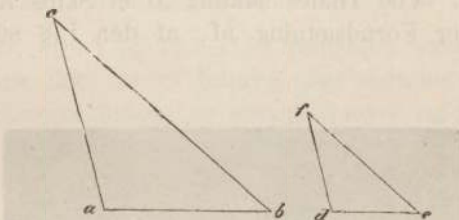
Tg. 88.

vil kræve, at samme Forhold (19 til 5) finder Sted imellem hvert Par sammensvarende eller — som de kaldes — *ensliggende* Linier, såsom *ae* og *fk* osv. Derimod skjønner man også, at *det er ikke nok*, at alle de 5 Linier *fg*, *gh*, *hi*, *ik* og *kf* have Længder, der hver for sig står i det rette Forhold til *ab*, *bc*, *cd*, *de* og *ea*; thi dersom man tænkte sig Linierne stive og et Hængsel i hver Vinkelspids, vilde man åbenbart kunne fortrække Figuren, f. Ex. ved at fjerne *f* og *h* fra hinanden, så at Billedet ikke mere lignede Originalen, medens dog alle dens egne Linier stod i det rette Forhold. En sådan Fortrækning vilde derimod ikke være mulig, dersom der blev anbragt en ustrækkelig og uforkortelig Linie af

rigtig Størrelse fra f til h og en fra h til k , hvorved den ellers bevægelige Figur så at sige vilde blive afstivet.

§ 134. Når man således *opløser* Originalen i *lutter Trekanter*, når man dernæst forandrer hver eneste af Trekanternes Sider efter det til Forstørrelse eller Formindskelse bestemte Forhold, vil man kunne tegne den ligedannede Figur ved at tegne Trekant efter Trekant, idet man til Tegningen af hver Trekant således har dens 3 Sider (§ 102, Ex. 2).

Vil man f. Ex. tegne en Trekant ligedannet med abc (Tg. 89) således, at Siderne komme til at forholde



Fg. 89.

sig til Originalens som 1 til 2, $\text{c}:$ at de blive halvt så store, afsætter man først *de* lig. det Halve af ab , og med en halv ac i Passeren slås Krydsbue fra d , med en halv bc slås Krydsbue fra e . Man får således def .

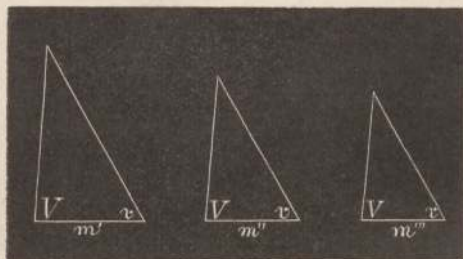
Vi have her en anden Måde at tegne ligedannede Billeder på end ved Hjælp af det ægyptiske Kvadratræt; og det må antages, at også denne Måde har været brugt meget tidligt, thi når man f. Ex. kjender 3 Steders 3 indbyrdes Afstande, danner man sig ikke alene en Forestilling om deres indbyrdes Beliggenhed, men man fremstiller let denne ved Tegning af en Trekant med de 3 Afstande som Sider. Vi slå altså fast, hvad der umiddelbart har klaret sig ved Kårttegning (som det nævnes at Anaximandros udførte), o. l., at

en Trekant, hvis 3 Sider hver for sig stå i et og samme Forhold til de tilsvarende 3 Sider i en anden Trekant, er ligedannet med denne.

§ 135. Når man således ved at formindske de tre Sider i en Trekant fik tegnet et Billede af den, har man sikkert endvidere betragtet det som en Selvfølge, at Linierne helledede lige så meget imod hinanden i Billedet som i Originalen, eller, med andre Ord, at de tilsvarende, α : ensliggende, Vinkler i sådanne Trekanter ere lige store, f. Ex. $\angle abc = \angle def$, osv.

I en ligedannet Trekant ere de ensliggende Vinkler lige store.

§ 136. Ved Thales' Måling af et Skibs Afstand er man, under Forudsætning af, at den i § 89 omtalte



Tg. 90.

Måde er den rette, kommen et Skridt videre i Retning af at tegne et formindsket Billede af en Trekant. Man benytter nu ikke de 3 Sider, men blot 1 Side og de to hosliggende Vinkler. Ville vi således give en formindsket Tegning af den i Landskabet (Tg. 39) værende Trekant, beroer det blot på, i hvilket Forhold (i hvilken Målestok) man vil have Billedet, om man for m , Tg. 39, skal tegne m' , m'' , m''' e. a. (Tg. 90). Når blot Vinklerne V og v afsættes rigtigt, bliver Billedet i hvert Fald ligedannet

med Originalen, hvor stor man end vælger m , og heraf følger, at

Trekanter, hvori to Vinkler ere stykkevis lige store, ere ligedannede.

Den tredie Vinkel vil i sådanne Tilfælde naturligtvis også være lige stor; thi den er jo i en Trekant Supplementvinkel til de to andre.

Ex. 1. Tegn en eller anden Trekant, og tegn på Grundliniens Forlængelse en anden, ligedannet med den, men hvis Grundlinie staaer i Forholdet som 1 til 4. Hvilken Retning skulle herved Trekantens to andre Sider have i Forhold til Originalen?

Ex. 2. Tegn en Sykkant, opløs den i Trekanter, og tegn på en af Sidernes Forlængelse en ligedannet Sykkant med Siderne i Forholdet 3 til 1, derved, at der tegnes Trekant på Trekant.

§ 137. De i §§ 133—136 fremsatte Sætninger have — om just ikke været udtalte som sådanne — så dog væsentligt været brugte og ere altså mere og mere modnede til Pythagoras' Tid. Men nu begynder man mere bestemt at udtale sig om ligedannede Figurer og navnlig om *Forholdet* mellem ensliggende Linier samt om Forholdet mellem Fladefang. Medens man tidligere vel i det højeste lagde Mærke til Forholdet som en af de Egenskaber, der lejlighedsvis kom frem ved Figurerne, så bruger nu Pythagoras Figurer til Behandling af Forhold, og han har herved — om ikke lagt Grunden til, hvad vi kalde *Proportionslæren*, $\propto$: Læren om Forhold, hvortil der efter flere Grækeres Vidnesbyrd allerede fandtes en ikke ringe Begyndelse hos Babylonierne — dog ført denne Sag frem og behandlet den med en Dygtighed, som vist langt har overgået Babylonierne.

§ 138. Pythagoras havde Øje for, at der ved mange Lejligheder kræves bestemte Talforhold, for at noget skal være *smukt* eller i andre Henseender fyldestgørende. Således krævedes der visse Forhold imellem en Søjles Højde og Tykkelse og dens Forandring i Tykkelse fra nederst til øverst samt mellem flere sammenstillede

Søjlers indbyrdes Afstande, og ligeledes mellem en Mængde af et Tempels eller en anden Bygnings enkelte Dele, for at de skulle kunne tiltale Skjønhedssandsen. Det var åbenbart ikke selve *Størrelsen* af disse Dele, det kom an på; men *Forholdet* mellem dem. Gjennem lange Erfaringer havde man f. Ex. hos Ægypterne fået fastslået visse Forhold, der vare brugelige, og Grækerne have sikkert i så Henseende modtaget meget værdifuldt fra Ægypterne, hos hvem sådanne Forhold bleve holdte i Hævd som noget helligt, der ikke turde forandres. Grækerne stillede sig dog friere overfor disse Overleveringer, men på den anden Side kunde man ikke løsrive sig fra al Taltvang; der var blot Tale om at gjøre Erfaringer og finde nye Forhold, som kunde tilfredsstille Skjønhedssandsen, inden man slap de gamle.

Ved sådanne Erfaringer lod man Øjet med det umiddelbare Skjøn være øverste Dommer; men Pythagoras mente, at siden Skjønhedssandsen dog kun tilfredsstilledes ved de bestemte Forhold, som man således erklærede for gode, og ikke ved hvilkesomhelst andre, måtte der være en vis mystisk eller guddommelig Sammenhæng i disse Talforhold, som det bedre sømmede sig Mennesket som tænkende Væsen at finde ad Tankens Vej end ved en ubevidst Fornemmelse.

§ 139. Ganske særligt skal Pythagoras have taget Musiken under Matematikens Behandling og have slået fast (som det synes, også efter babylonisk Indskydelse), at Toner, der frembringes af lige spændte og lige tykke Streng, hvis Længder stå i simple Talforhold, lyde smukt sammen eller efter hinanden. Således danne to Streng, der ellers ere ens, men hvis Længder stå i Forholdet 1 til 2, en Oktav, to, hvis Længder stå i Forholdet 2 til 3, en Kvint, osv. *Jo simple Talforhold, des mere harmonisk lyde Tonerne sammen.* Denne Sætning, der endnu i vore Dage er en Hovedlov i Tone-læren, og nu er udvidet derhen, at, idet hver Tone be-

ståer af et vist Antal Bølger, gjælder det ved Toner af forskellige Instrumenter blot om, at *Bølgernes Antal* i Toner, der skulle lyde godt sammen, *stå i simple Talforhold*, hvad de netop gjorde i Pythagoras' Strenge. Pythagoras har således virkelig Fortjenesten af at have stillet denne Gren af Fysiken på et matematisk Grundlag; men han faldt herved i den Fristelse, som også har ramt andre senere, ikke at nøjes med at studere Tonerens Natur og den matematiske Betingelse for Velklang, hvorigjennem den matematiske Fysik kan yde og har ydet Musiken Tjenester; han fordrede tillige af Musikerne, at de ikke alene skulde bøje sig for matematiske Afgjørelser, men at de selv skulde blive Matematikere for at kunne blive Musikere. Dette er et Overgreb; thi i Musiken spørges der om andet end om blot og bar Velklang. Denne kan ligefrem blive kjedelig. En Musiker må udøve sin Kunst ud af menneskelige Stemninger, der netop finde sit Udtryk i en Blanding af større og mindre Velklang, således som et Billede med Indhold både har Lys og Skygge, og således som kun den deri begavede forstår at give den menneskelige Stemning Udtryk i Toner.

Pythagoras' Autoritet fastholdt dog i mange År Mathematiken som højest rådende ved Musikkens Udøvelse, noget, der mere fremmede det almene Kjendskab til Mathematiken, end det var til Både for Musiken. Først over 200 År senere vovede *Aristoxenos* f. omtr. 330 f. Kr.) i Tarent, skjøndt oprindelig Lærling af en Pythagoræer, at optræde imod Pythagoras' Musiksistem, idet han lod Øret og den musikalske Sands være de ledende i Kunsten.

Når Pythagoras imidlertid spejdede efter Talforhold her som i mange andre Ting, så er det, fordi han heri troede at skulle finde Tingenes dybeste Sammenhæng, og ligeså magtpåliggende som det havde været for Oldtidsfolkene at fastholde de kanoniserede Talforhold og

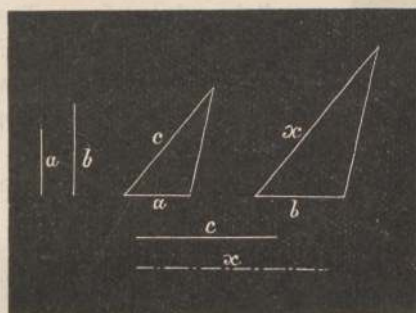
Forskrifter som en Overlevering stammende fra Guddommen, ligeså samvittighedsfuldt søgte nu Pythagoras at komme til Forståelse af disse og af nye hemmelige Guddomstanker, og denne Ihærdighed er det måske navnlig, vi skyldte den store Udvikling, som Pythagoras og hans Skole gav Mathematiken.

§ 140. Der kan nu ofte stille sig følgende Opgave: *når der er givet et vist Forhold, da at finde en Størrelse, som står i samme Forhold til en given.*

Et industridrivende og handlende Folk som Babylonierne [○] har særlig haft Brug for Løsningen af en sådan Opgave, som ligger for, hver Gang Prisen skal beregnes på en Vare, hvis Mængde er en anden end den Varemængde, hvorpå Prisen ellers angives. Ved man, at Prisen på en Favn (eller 3 Alen) Toug er 36 Øre, og vil man vide Prisen på 5 Alen Toug, gjælder det om at finde et Tal (60), der står i samme Forhold til Prisen 36, som det Forhold, 5 til 3, hvori Varerne stå til hinanden. Hvad Prisen bliver, kan findes ved den Regningsart, som vi i vore Dage kalde *Regula de tri*, α : Regning med 3. De taldygtige Babyloniere formåede naturligvis at løse en sådan Opgave og Pythagoras selvfølgelig også. Vi skulle i Bogens sidste Afsnit komme ind på Opgavens Behandling ad Regningens Vej. Men når *Grækeren* Pythagoras tager denne Opgave op, så benytter han til dens Løsning det Hjælpemiddel, hvorved de græske Mathematikere i det Hele behandlede Størrelser, nemlig *geometriske Figurer*, hvori man så et fyldigere Udtryk for Størrelsesbegrebet end i Tallene (jfr. § 126). Til en Begyndelse kan Pythagoras sandsynligvis have båret sig ad på en lignende Måde som i de nærmest følgende §§, en Måde, der ligger lige for og måske tildels har været kjendt før Pythagoras' Tid, en Måde, der er meget bekvem, og som derfor i vore Dage bruges mest, medens Pythagoras af Grunde, som vi i næste Afsnit skulle se, senere foretrak en anden, som derfor

mere blev Grundlaget for Forskningerne i den nærmeste Tid.

§ 141. Lad der være givet Størrelserne a og b (man kan gjerne tænke på Varemængderne) Tg. 91, der stå i et vist Forhold til hinanden, og tillige Størrelsen c (Prisen på a), da skal man finde en Størrelse x således



Tg. 91.

beskaffen, at (Prisen) x står i samme Forhold til (Prisen) c , som (Varen) b til (Varen) a , eller — hvad der er det samme, at (Varen) a står i samme Forhold til (Varen) b , som (Prisen) c til (Prisen) x .

Opgaven kan løses derved, at man tegner en Trekant, hvis to Sider ere a og c — iøvrigt er Trekantens Form ligegyldig — og dernæst tegner en anden Trekant ligedannet med den første, men således, at den med a ensliggende Side bliver b . Dette sidste kan åbenbart ske derved, at man afsætter b på Forlængelsen af a og fra b 's Ender tegner to Linier parallelle med den anden Trekants to Sider. Derved blive nemlig Vinklerne ved b stykkevis lig Vinklerne ved a . Trekanterne ere altså ligedannede (§ 136), og x ensliggende med c , følgelig i samme Forhold til c , som b til a .

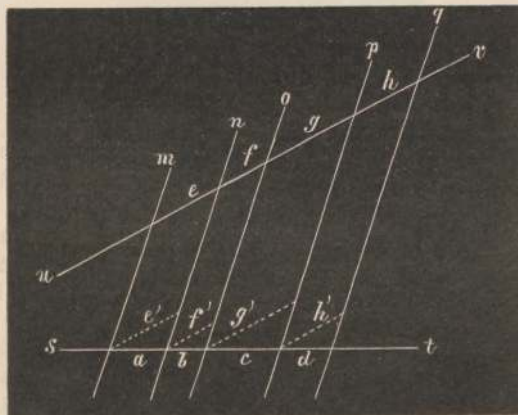
§ 142. Fire sådanne Størrelser danne, hvad man kalder en *Proportion*; og når de tre ere kjendte, kan

anden c . Linien BD tegnes og fra C en Linie parallel dermed. DE er da x .

Ex. Vælg en Linieenhed, og find ved Tegning en Størrelse, der forholder sig til 7 ligesom 20 til 13. Gjør dette på to Måder i Lighed, dels med Tg. 92, dels med Tg. 94, og prøv, om begge Måder give samme Størrelse.

§ 143. Man kan på lignende Måde som i § 142 indse, at når flere Paralleler overskjære to rette Linier, ville to på den ene afskårne Stykker stå i samme Forhold, som de tilsvarende afskårne Stykker på den anden.

Lad m, n, o, p, q (Tg. 95) være de parallelle Linier, *st* og *uv* de to Linier, der skjæres, da tegnes e', f', g', h' parallelle med uv , og man har, at f. Ex. a og b stå i samme

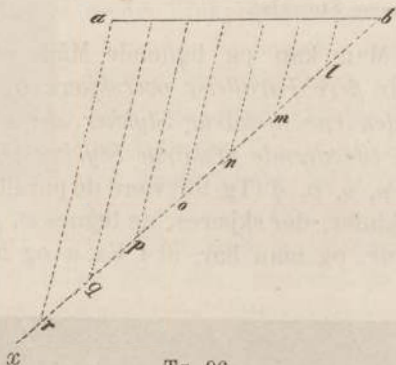


Tg. 95.

Forhold som e' og f' eller, hvad der er det samme, som e og f , eller f. Ex. b og d stå i samme Forhold som f' og h' eller f og h . Man udtrykker alt dette på en Gang ved at sige, at Forholdene mellem a, b, c og d ere de samme som mellem e, f, g og h . Herved kan løses adskillige vigtige Opgaver.

Ex. 1. At dele en ret Linie ab (Tg. 96) i et vist Antal lige

store Dele (f. Ex. 7). Fra den ene Ende af Linien ab tegner man en ret Linie bx ud i en vilkårlig Retning. Hen ad denne afsætter man 7 lige store — men ligegyldigt, hvor store — Stykker bl , lm osv. Fra det sidste Stykkes Endepunkt r tegnes en ret Linie til a , og fra alle de andre tegnes Paralleler.



Tg. 96.

Ex. 2. At dele en ret Linie ab i et Antal, f. Ex. 5, Stykker, der stå i de samme Forhold som 5 givne Linier, udføres på lignende Måde som Ex. 1, blot at det ikke er lige store Stykker, der afsættes henad bx , men de 5 givne Linier.

Ex. 3. Del en ret Linie ab i et Antal, f. Ex. 4, Stykker, der stå i Forhold som 4 givne Tal, f. Ex. Tallene 3, 5, 1 og 2.

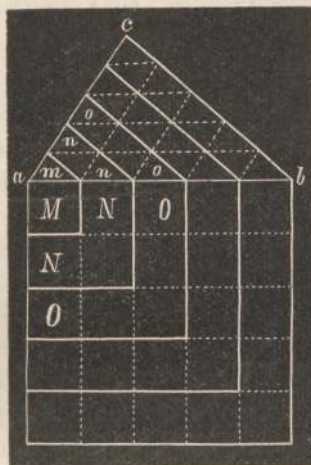
Anm. Sådanne Opgaver, der også kunne løses ved Regning, kunne jevnlig forefalde i det daglige Liv, f. Ex. at dele et Vejstykke til Vedligeholdelse mellem 7 Mand, der tidligere have haft visse andre givne Vejstykker (Ex. 2), eller som skulle have Arbejde i Forhold til deres Hartkorn, som f. Ex. 5, 4, 7, 2, 13, 3 og 9 Skjæpper.

§ 144. En Sætning, som ifølge Plutark har været kjendt af Pythagoras, og som blev brugt meget af Pythagoræerne er følgende:

To ligedannede Figurers Fladefang forholde sig ligesom Fladefangene af Kvadrater på et Par ensliggende Sider.

Dette er en meget vigtig Sætning, som på en simpel Måde tjener til Sammenligning af ligedannede Figurers

Fladefang, f. Ex. mellem Fladefanget af et Landskab og dets Billede på Landkårtet, når man kjender den Målestok, hvori Kårtet er tegnet, eller mellem en mikroskopisk Overflade og dens forstørrede Billede, når man kjender det såkaldte *lineære Forhold*, α : det Forhold, hvori en



Tg. 97.

Linie i den ene Figur står til den enslyggende i den anden.

Til denne Sætning kan Pythagoras være nået på en lignende Måde som følgende, der blandt andet stemmer med hans Måde at opløse Figurer, særligt Kvadrater, på (jfr. § 129). Først betragtes en Trekant abc (Tg. 97). Dennes ene Side ab deles i et Antal lige store Dele, og gennem Delingspunkterne tegnes Linier parallelle med bc og ac . Der vil da opstå nogle samfældige Trekanter og Parallelogrammer, hvilke sidste ved Diagonaler også deles i Trekanter samfældige med hine. (Hvorfor ere de samfældige?) Tegnes dernæst på samme Linie ab et Kvadrat, og deles det ved Linier gennem Delingspunkterne og Linier vinkelrette derpå i Kvadrater, kan det,

som i § 129 påvist, betragtes som bestående af Hjørnekvadratet M og Gnomonerne NN , OO osv. med henholdsvis Fladefangene 1, 3, 5 ... På den anden Side beståer Trekanten abc af Hjørnetrekanten m og Paralleltrapezterne nn , oo ..., indeholdende henholdsvis 1, 3, 5... samfældige Trekanter. Trekanten beståer altså netop af ligeså mange samfældige Småtrekanter, som Kvadratet af Småkvadrater.

[I forbigående bemærkes, hvad før (§ 65) er antydnet, at når man til Måling af en Trekants Fladefang vilde have valgt en lille Trekant ligedannet med den selv og med den ene Side lig Linieenheden, vilde Opmålingen simpelt hen udføres, ved at man målte, hvor mange Gange denne Linieenhed indeholdes i Trekantens ensliggende Side, og at man foldede dette Tal med sig selv, ligesom vi nu gjøre for Kvadratets Vedkommende.]

Man indser nu let, at to ligedannede Trekanter må forholde sig ligesom to Kvadrater på et Par ensliggende Sider; thi da hver Trekant for sig indeholder selv samme Antal Trekantmaal, som dens Kvadrat indeholder Kvadratmaal, må der være samme Forhold mellem de to Trekanters Antal af Trekantmaal og de to Kvadraters Antal af Kvadratmaal.

Det er selvfølgelig ligegyldigt, hvilket Par ensliggende Sider af Trekanterne man vælger at tegne Kvadrater på.

Betragtes nu et Par andre ligedannede Figurer som bestående af ligedannede Trekanter, indser man, at ikke alene Forholdet mellem *ét* Par tilsvarende Trekanter er lig Forholdet mellem Kvadrater på et Par Sider, men det samme gjælder åbenbart hvert Par tilsvarende Trekanter, og når der til hver Trekant af den ene Figur svarer en Trekant i den anden, der står i det nævnte Forhold til hin, må hele denne Figur stå i dette Forhold til hin.

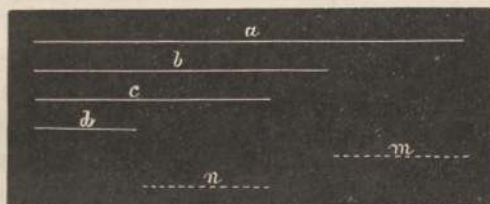
Ex. 1. På et Landkært er en Mil gjengivet som 1 Tomme. Hvor mange Gange er et Stykke Land større end den tilsvarende Del af Kærtet?

Ex. 2. To Bøger med lige store Blade ere trykte med Typer af samme Form og forholdsvis Afstand, men Højden af Bogstaverne i den ene er $\frac{3}{4}$ af Højden af Bogstaverne i den anden. Hvilket Forhold er der imellem Antallet af Bogstaver på en Side i den ene Bog og i den anden?

Ex. 3. På Hypotenusen og på hver af Katheterne i en retvinklet Trekant tegnes 3 ligedannede Figurer. Hvilken Sammenligning kan gøres mellem de 3 Figurers Fladefang?

§ 145. Den her omtalte Slags Proportioner var ikke den eneste, Pythagoras beskæftigede sig med. Man har givet den Navn af den *geometriske Proportion*.

En anden Slags er den *arithmetiske Proportion*, som ligeledes udtrykker en Forbindelse mellem 4 Størrelser,



Tg. 98.

a , b , c og d (Tg. 98), nemlig at a er ligeså *meget* større end b , nemlig m , som c er større end d , nemlig n ; men a er ikke ligeså mange *Gange* større end b , som c er Antal Gange større end d ; thi a er ikke dobbelt så lang som b , men c er mere end dobbelt så lang som d .

Medens altså den geometriske Proportion vilde være, at der er samme *Forhold* mellem a og b som mellem c og d , lyder den arithmetiske Proportion på, at der er samme *Forskjel* mellem c og d , som mellem a og b .

Også her kan man tale om en arithmetisk Proportion mellem 3 Størrelser, idet den ene er arithmetisk mellemproportional mellem de to andre, nemlig når der er ligeså stor Forskjel på den første og den anden som på den anden og den tredie. Den anden er da, hvad man også kalder Middeltallet mellem de to andre.

Vi komme senere tilbage til begge disse Arter af Proportioner, og skulle da se, at den geometriske Mellemproportional altid er mindre end den arithmetiske.

Ex. 1. To lige hurtige Vandrere have gået, den ene i 180 Minutter, den anden i 300 Minutter. Den første har gået 96 Stadier, den anden 160 Stadier. Hvilken Slags Proportion må disse Tal danne?

Ex. 2. Om nogen Tid har den første ialt gået 144 Stadier, den anden 208 Stadier. Hvilken Slags Proportion er der mellem Tallene 96, 160, 144 og 208.

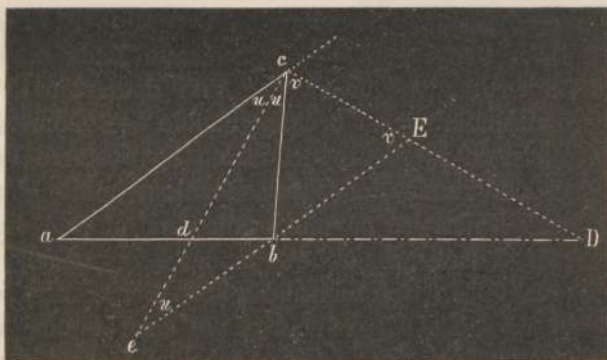
§ 146. Noget mindre Vigtighed i Mathematiken har den tredie Art af Proportioner fået, som Pythagoras opstillede, nemlig den *harmoniske Proportion*, som han gav dette Navn, fordi han kom ind på den ved sine Studier af velklingende Strenges Længde (§ 138). Denne Proportion har også en ikke uvæsentlig Betydning i den videregående Mathematik og navnlig i Lyslæren fremfor i Lydlæren; men den skal dog ikke omtales her; thi Grækerne ere med Pythagoras nåede så vidt frem i matematisk Udvikling, at vi allerede nu må begynde at udelade enkelte Ting i det Omrids af Sagens Fremstilling, som her gives, ligesom der i det 5te, 4de og 3die Århundrede blandt Grækerne udfoldede sig en matematisk Videnskabelighed, som man må være Fagmand for at kunne følge i alle Enkeltheder, og som gennem Årtusinderne har virket og endnu kan virke befrugtende med Hensyn til Mathematikens yderligere Fremskridt.

Medens Pythagoras' Virksomhed — såvidt vi her have med den at gøre — er en tankeklarende, må det ikke undre, at han i Henrykkelse over, hvad han havde fundet, og i Anelse om, hvor meget mere der måtte kunne findes, også stundom kunde svæve ud i det mindre sikre. Han fandt således, at der måtte være Harmoni i Himmellegemernes Bevægelser, og skjøndt hans Opgave

netop var at søge Talforhold alle vegne, nøjedes han ikke her dermed, men Musiken gik for ham således i ét med Tal og Proportioner, at når Himmellegerne gik efter sådanne, måtte der også være en Sfærernes (Himmelkuglernes) Harmoni — han føjede rigtignok til — hørlig for det åndelige Øre, ikke for det legemlige, fordi det er vant til denne Musik fra Fødslen af; men hans Lærlinger synes i alt Fald at have opfattet det, som om Pythagoras selv havde hørt den.

Ex. For at give en Forestilling om den harmoniske Proportion ville vi fremføre følgende Sætning, som har været tidlig kjendt, selv om den ikke skulde gå tilbage lige til Pythagoras.

Når man i en Trekant abc (Tg. 99) halverer en Vinkel c , kan man bevise, at Halveringslinien cd skjærer Siden ab i to Stykker, ad og bd , der forholde sig til hinanden ligesom Siderne ac til bc .



Tg. 99.

Gjennem b tegner man en Linie parallel med ac , til den skjærer Halveringslinien i e . Da er $\angle e = \angle ace$ (§ 99). Man må altså have $be = bc$ (§ 94). Desuden er Vinkel d lig sin Topvinkel, så at Trekanterne adc og bde have to Vinkler lige store og ere altså (§ 136) ligedannede. To enslyggende Sider, såsom ad og bd , må altså forholde sig som et Par andre, nemlig som ac til be , eller, hvad der er det samme, som ac til bc ; følgelig har man: ad til bd som ac til bc .

Bevis på en lignende Måde, at Halveringslinien cd til c 's ud-

vendige Vinkel skjærer ab 's Forlængelse i D således, at Forholdet mellem aD og bD er det samme, nemlig ligeledes som ac til bc !

Af disse to Sætninger følger, at ad forholder sig til bd som aD til bD , eller — med Ord —, at d 's Afstande fra a og fra b stå i samme Forhold som D 's Afstande fra de samme to Punkter.

Denne ejendommelige Afstand mellem Punkterne var som sagt kjendt af de gamle, og da den tillige giver Udtryk for, hvad de gamle kaldte en harmonisk Proportion, har man — rigtignok først i den nyere Tid — kaldt Liniens Deling ved d og D harmonisk.

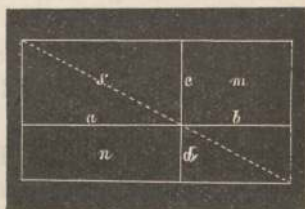
Geometrisk Regning.

§ 147. Den i § 141—142 fremsatte Måde at finde Fjerdeproportionalen på er dog ikke den, som Pythagoræerne i Almindelighed brugte. Skulde den geometriske Bestemmelse af Fjerdeproportionalen have større Værdi end den, der kunde findes ved Regning, måtte det jo efter deres Opfattelse navnlig bestå deri, at den omfattede hele Størrelsesbegrebet, medens Regningen kun kunde omfatte en begrændset Mængde Tal. Størrelserne a , b , c og x i Tg. 91—94 bør altså også kunne være inkommensurable, så at f. Ex. Forholdet mellem a og b ikke lader sig udtrykke ved nogetsomhelst Par Tal. Forholdet mellem c og x , der skal være lige stort med hint Forhold, lader sig da heller ikke udtrykke ved noget Par Tal. Hvad er da egentlig a 's og b 's Forhold? thi vistnok må de stå i et Forhold, men et *usigeligt*, $\circ$: man har ikke *Talord* at udtrykke det med. Man kommer da i Forlegenhed, når man skal kunne tale om dette Forhold på en sådan bestemt Måde, som er nødvendig i matematiske Redegjørelser. Det er måske nærmest

Pythagoræernes Trang i så Henseende, der har bragt dem til, så at sige, at gå af Vejen for denne Vanskelighed derved, at de valgte en noget anden Måde at tage Sagen på.

§ 148. Betragter man Sætningen i § 116 for et Rektangels Vedkommende, ser man, at Rektanglerne m og n ere lige store (Tg. 100). Det er nu let at indse, at dersom Linierne a og b ere *kommensurable*, ville de kunne tænkes delte med deres fælles Mål i lige store Smådele, og når der gjennem Delingspunkterne tegnes Linier parallelle med c , vil

Rektanglet s bestå af ligeså mange lige store Smårektangler, som a har Smådele, og Rektanglet m bestå af ligeså mange Smårektangler, som b har Smådele, så at s vil forholde sig til m som a til b , nemlig som Antallene af



Tg. 100.

Smådelene. På samme Måde indser man, at Rektanglet s vil forholde sig til Rektanglet n som c til d . Nu er m og n lige store (§ 116), altså er Forholdet mellem s og m det samme, som Forholdet mellem s og n , følgelig

forholder a sig til b som c til d .

Tilmed måles Rektanglet m ved, at b 's Tal foldes med c 's Tal, og n ved, at a 's Tal foldes med d 's Tal, og da n er lige stor med m ,

er a Gange d lig med b Gange c .

Hvis altså Linierne lade sig udtrykke ved Tal, er der den nævnte Forbindelse imellem dem og vel at mærke en sådan, at

når Proportionens første og sidste Led, c : Yderledene, foldes, fås det samme, som når Mellemliddene foldes.

Eller omvendt:

idet to Tal ved Foldning give det samme som to

andre, må de to være Yderled, de to Mellemed i en Proportion.

At denne Forbindelse måtte finde Sted, når Størrelserne kunne udtrykkes ved Tal — at f. Ex. Proportionen: 18 forholder sig til 26 som 45 til 65, medfører: at 18 Gange 65 er lig 26 Gange 45, og omvendt — har uden Tvivl Pythagoras indset. Når derfor 3 af disse Tal ere givne, og man skal finde det fjerde, er det ligeegyldigt, om man vælger en geometrisk Fremgangsmåde, der svarer til Proportionen (§§ 141—142), eller en, der svarer til de lige store Foldninger (§ 116, Ex. — Jfr. Tg. 100).

§ 149. Når derimod a og b ere *inkommensurable*, så at Forholdet ikke lader sig udtrykke ved Tal, bliver Forholdet »usigeligt«, og ligeledes bliver Foldningen uudførlig; men der er en Ting, som er lige klar og bestemt, nemlig *de to Rektangler og deres Ligestorhed*, som ikke afhænger af, om Størrelserne have fælles Mål, men som er bevist i al Almindelighed (§ 116). Når altså 3 Størrelser (Linier) ere givne, ligeegyldigt, om de ere kommensurable eller inkommensurable, kan man (jfr. 116, Ex.) *altid finde en fjerde Linie, som med den ene givne Linie danner et ligeså stort Rektangel, som de to andre danne med hinanden.* At dette i Virkeligheden må føre til samme Linie som den, der ved Fremgangsmåderne i §§ 141—142 blev funden som Fjerdeproportionalen, derom har Pythagoras naturligvis ikke tvivlet; men dette kan opfattes som et Vidnesbyrd mere om den Fordring på Tanke- og Taleklarhed, som Grækerne stillede, at man valgte den Udtryks- og Fremstillingsmåde, som er fyldestgørende under alle Forhold, fremfor den, som dog måske falder fuldt så umiddelbar for, men som ikke under alle Forhold kan være Gjenstand for fuldstændig klar Redegjørelse.

§ 150. Pythagoras grundede således, hvad man kan kalde en *geometrisk Regnekunst*, og han grundlagde

den på sådan Måde, at den skulde være fuldstændig dadelfri. Selv om den ikke kunde udøves dadelfrit ved virkelig Tegning, så skulde den dog kunne stå sin Prøve overfor Tanken. — Det er på en Måde en ny Art af Abstraktion. Ligesom vi ved at bruge Tal se bort fra de Ejendommeligheder og de Uensartetheder, der knytte sig til hver eneste af den virkelige Verdens Enere (§ 3), således skal nu Pythagoras' geometriske Regnekunst tankemæssigt kunne behandle sådanne Størrelsesforhold, som Talkunsten endnu savnede Ord eller Tegn til at udtrykke. — Og ligesom den Abstraktion, vi udføre, idet vi danne Tal, får Værdi for andet end for de Ting, hvorfra de ere abstraherede, således har Pythagoras uden Tvivl også været klar på, at den ny Regnekunst skulde *kunne* passe på andre Områder end de geometriske. Det må indrømmes, at der i de græske Matematikeres Efterladenskaber ikke findes synderligt af *Exempler* på sådan Brug; men på den ene Side var det i første Linie en Trang efter Erkendelse af de matematiske Sandheder, der drev Pythagoras, og når det betænkes, at hele Geometrien var Gjenstand for og egner sig hovedsagelig for personlig mundtlig Undervisning, er det ikke så sært, når man endelig skrev noget op derom (dette gjorde endnu ikke Pythagoræerne, man siger — af andre Grunde (?)), at man da kun opskrev Sætningerne, og ikke ovenikjøbet skrev om Exempler fra den udvortes Verden, noget, som vilde kunde bringe Lærerne til at fæste Blikket på uvæsentlige Ting; og på den anden Side er det ved Forskninger i Nutiden, deriblandt af vor Landsmand *H. G. Zeuthen* (jfr. Forord), godtgjort, at de græske Matematikere have været sig klart bevidst, at deres Geometri var en almindelig Størrelseslære, der ikke havde Gyldighed på Rumforhold alene.

Dog må det bemærkes, at en Grund for Grækerne til ikke at nedskrive noget videre om *Anvendelsen* af

denne Størrelseslære i landre Retninger, end hvad vi kalde geometriske, kan ligge deri, at græske Tænkere ikke gjerne blandede uensartede Sager sammen. Pythagoras er, som vi skulle se, måske en af de Grækere, der mest frimodig har overført de Størrelseslove, som vare fundne på ét Område, på et andet. Man blev siden mere betænkelig derved, og senere græske Forfattere have derfor fundet det rigtigst, at man bestandig gennem vidtløftige exacte Tankebevægelser godtgjorde Berettigelsen heraf. Det er derfor betegnende nok, at den, der grundede den geometriske Regning, var en Mand, som havde særlig Sands for Størrelsesbegrebernes Almengyldighed (jfr. § 168).

Vi gjøre derfor næppe noget uhistorisk, når vi illustrere Grækernes geometriske Regning med Exempler fra andre Områder, skjøndt Grækerne ikke selv have efterladt os sådanne.

At finde Fjerdeproportionalen er en Opgave, som kan forekomme på mange Områder i Naturen, i Handelen osv.; og gjøres de givne 3 Størrelser (hvad enten det er Pund, Kroner, Sekunder, Fod e. a.) synlige som Linier af en Længde, der svarer til dem efter en Målestok, som man først har valgt sig, findes Fjerdeproportionalen også som en Linie, hvis Værdi i Tal er at tolke efter den Målestok, som er valgt.

Ex. Når 63 Pd. Smør koster 42 Kr., hvad koster så 30 Pd. Smør? Denne Opgave kan løses ved en lignende Tegning som Tg. 100. Man vælger en Linieenhed, der skal betegne 1 Pd. Smør, og man kan gjerne lade den samme betegne 1 Krone. Derefter afsætter man en Linie på 63 som a , på 30 som b og på 42 som c , tegner Figuren færdig og finder således d , der vil vise sig at være 20 Linieenheder (hvis man for Kroner skulde have valgt en anden Enhed end for Pd., da ere de 20 Linieenheder af samme Slags som c 's). Svaret bliver da 20 Kroner; thi a forholder sig til b ligesom c til d , altså Varemængderne 63 Pd. og 30 Pd. forholde sig som Priserne 42 Kr. og 20 Kr.

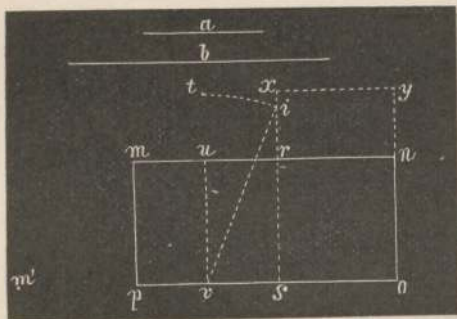
§ 151. Medens man ved Tg. 100 kan omdanne et

givet Rektangel til et andet, hvis ene Side er given, kan man ikke på denne Måde løse en Opgave, som naturligt melder sig, nemlig:

at omdanne et givet Rektangel til et Kvadrat.

Er f. Ex. Rektangel n i Tg. 100 given, og prøver man da at tegne Figuren færdig således, at m bliver et Kvadrat, det vil sige, at b bliver lig c , skal man finde, at dette ikke uden videre lader sig gjøre, og Opgaven har sikkert ikke været af de lette fra først af. Skjøndt vi her savne bestemte historiske Angivelser er det rimeligt, at Pythagoras har løst den på en lignende Måde som følgende.

Lad a og b (Tg. 101) være de givne Sider af Rektanget, og lad dette da være $mnop$. Man kan da først

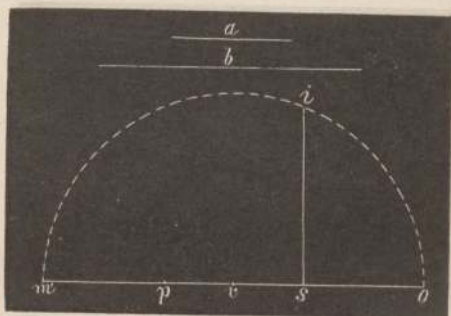


Tg. 101.

afskjære Kvadratet $nrso$ med Siden a . Det overskydende Stykke $rmnp$ s halveres, og Halvdelen $vump$ anbringes som rnv . Således er Rektanget omdannet til en Gnomon $vxyovur$. Er nu t det Punkt, hvor vu og yx 's Forlængelser skjære hinanden, er Gnomonen atter lig Kvadratet $tyov$ formindsket med Kvadratet $txru$. Men ved Hjælp af den pythagoræiske Læresætning kan man trække et Kvadrat fra et andet således, at man får et Kvadrat. Man behøver da blot nu at danne en retvinklet Trekant, som har vt til Hypotenuse og tx eller vs til Kathete.

En sådan vil være dannet, når man blot drejer vt om Punktet v , så at t falder i Linien sx , nemlig i Punktet i . Da er vs den retvinklede Trekant og si den søgte Side til det nye Kvadrat (som ikke er tegnet for ikke at overfylde Figuren); men Kvadratet på si er åbenbart lig med Kvadratet på vi eller vt formindsket med Kvadratet på vs eller tx eller tu . Det er altså lig Gnomonen, der er lig det givne Rektangel.

Dersom man tænkte sig pm drejet om p , ned i Forlængelsen af $osvp$, nemlig til Punktet m' , vil åbenbart den rette Linie $osvm'$ bestå af $os = a$ og $svpm' = b$, og v være Midtpunkt af den hele Linie, så at $vt = vi = vo = vm'$. Altså vil en Halvcirkel med v som Centrum kunne tegnes igjennem Punkterne o , i , t og m' .

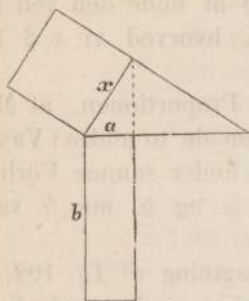


Tg. 102.

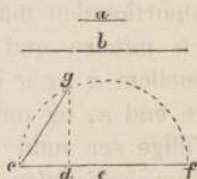
Man ser nu let, hvorledes den hele Tegning, der er fornøden til at finde si kan indskrænkes til følgende. Lad a og b (Tg. 102) være de givne Sider til Rektanglet. Man afsætter da a som os , b som sm' , oprejser $si \perp om'$, finder Midtpunktet v af om' og slår med dette som Centrum og vo som Radius Halvcirklen oim' . Da er si den søgte Kvadratside.

Ex. En anden Måde at løse denne Opgave på følger let af Euklids Bevis for den pythagoræiske Læresætning (§ 119). Det vil erindres, at *Kvadratet på en Kathete i en retvinklet Trekant*

er lig et Rektangel dannet af Hypothenusen og Kathetens Projektion på samme. Kvadratet på x (Tg. 103) er altså lig Rektanglet dannet af a og b . Spørgsmålet er da blot om man, når dette Rektangel eller når dets Sider a og b ere givne, kan tegne den retvinklede Trekant og altså finde x .



Tg. 103.



Tg. 104.

Dette udføres let, som Tg. 104 viser. Lad a og b være de to Rektangelsider. Man afsætter b fra c til f og a fra c til d . I Punktet d tegnes $dg \perp cf$. Man ved da, at den rette Vinkels Spids skal være i et Punkt af Linien dg ; men et Punkt, hvorfra Linier til c og til f stå vinkelret på hinanden, ligger i en Halvcirkel på cf (§ 95). Når man altså finder Midten e af cf og tegner en Halvcirkel over cf , vil den ved Skjæring med dg give Vinkelspidsen g af den retvinklede Trekant. cg er altså den søgte Kvadratside.

§ 152. Vi have set, at enhver retlinet Figur kan omdannes til en Trekant (§ 115), og en Trekant igjen til et Rektangel (§ 114). Da vi nu have Midler til at omdanne ethvert Rektangel til et Kvadrat kan altså enhver retlinet Figur omdannes til et dermed lige stort Kvadrat eller, som man siger, *kvadreres*, altså henføres til den simple Figur, den, som vi have valgt som Flademål for alle andre Fladefang.

Men Rektanglets Omdannelse til Kvadratet repræsenterer desuden Løsningen af andre vigtige Opgaver, både af geometrisk og af ikke geometrisk Art.

§ 153. Af § 140 følger, at når a Gange b er lig

den fundne Kvadratside x Gange x , kunne a og b danne Yderleddene og x og x Mellemlæddene i en Proportion, så at a forholder sig til x ligesom x til b . Man siger da, at x er *mellemproportional* mellem a og b , og § 151 viser, hvorledes en sådan Mellemproportional kan findes, medens man forgjæves vilde søge at finde den ved lignende Fremgangsmåder som dem, hvorved vi i § 142 fandt Fjerdeproportionalen.

Man skjønner umiddelbart af Proportionen, at Mellemproportionalen må ligge imellem de to andre i Værdi. Er den mindre end a , og der finder samme Forhold Sted mellem a og x som mellem x og b , må b være mindre end x , og omvendt.

Tillige ser man let ved Betragtning af Tg. 102, at *Mellemproportionalen (si) må være mindre end de to andres Middelbærde* (som er $vo = vi$).

Eller: *Omkredsen af et Kvadrat må altså være mindre end Omkredsen af et dermed lige stort Rektangel.*

§ 154. Spørgsmålet: hvor stor er Siden i et Kvadrat af givet Fladefang? have vi tidligere truffet på (§ 125). Er dette Fladefang f. Ex. 3, kaldte vi Siden Kvadrat-roden af 3 og skrev den $\sqrt{3}$. Vi vide da nu, hvorledes vi kunne finde en sådan Kvadratrod, nemlig ved at tegne den som Side i et Kvadrat med Fladefang lig et Rektangels, hvis Sider f. Ex. ere 1 og 3. $\sqrt{15}$ tegnes som Side i et Kvadrat på 15, der er lig et Rektangel, hvis Sider f. Ex. ere 1 og 15 eller 3 og 5, o. s. v.

Hermed er der ved Tegning givet en almen gyldig Løsning af en Opgave, som Babylonierne have søgt at løse ved Regning længe før Pythagoras' Tid. Man har i den nyeste Tid ved Senkerek ved Eufrat (det gamle Larsam) fundet 2 Lertavler med Kileskrift på begge Sider; og Rawlinson har i disse erkjendt Tabeller over alle de Kvadrater, hvis Side er mindre end 60. Begyn-

delsen og Enden af Tabellen, der er skrevet med de sædvanlige Kileskriftstaltegn, lyder således:

1	er Kvadrat af 1
4	er Kvadrat af 2
9	er Kvadrat af 3
16	er Kvadrat af 4
25	er Kvadrat af 5
36	er Kvadrat af 6
49	er Kvadrat af 7
1.4	er Kvadrat af 8
1.21	er Kvadrat af 9
1.40	er Kvadrat af 10
— — — — —	
— — — — —	
58.1	er Kvadrat af 59
1	er Kvadrat af 1

Når Kvadratet på 8 kaldes 1.4, så er dette efter det for Babylonierne ejendommelige 60-talsystem, idet 1.4 er 60 og 4 eller 64. Ligeledes er Kvadratet på 9 lig 1.21, α : 60 og 21 eller 81, osv.

Af en sådan Tabel — og Grækerne have vist senere havt en lignende — har man vel kunnet se, hvad Kvadrat-roden af 36 er (nemlig 6), eller af 49 (nemlig 7), men f. Ex. ikke af 39. Vi skulle senere se, hvorledes man tilnærmelsesvis kan nå dette ved Regning; men da Pythagoras havde erkjendt, at en Størrelse som $\sqrt{39}$ ikke er noget Tal (helt eller Brøk), gjaldt det for ham om at blive i Stand til altid at kunne give et strengt matematisk Udtryk for en sådan Kvadratrod, og det er altså dette, som er lykkedes Pythagoras, idet han tegnede Kvadratsiden til et givet Fladefang.

At finde Kvadratroden af et Tal er en Opgave, som stilles ved mangfoldige andre Lejligheder end ved geometriske. Vi ville tage et Par Exempler; men medens

det fine ved Pythagoras' Bestemmelse af Kvadratroden just består i, at den ikke er begrændset til sådanne Kvadratrødder, som ere hele Tal, ville vi *her* kun vælge sådanne Exempler, hvor Løsningen giver hele Tal, og tilmed sådanne, hvor man nogenlunde let kan *prøve sig frem* til disse, idet det anbefales at løse følgende Op-gaver både ved Tegning og ved at prøve at finde Tallene.

Ex. 1. Et Hus er 32 Alen langt og 100 Alen i Omkreds. Hvor stor vilde Omkredsen være, hvis det havde kvadratisk Grund-flade af samme Fladefang?

Ex. 2. Man såer 12 Pd. Korn. Hele Indhøsten sæes næste År, og der avles 75 Pd. Når det nu giver lige mange Fold første og andet År, hvor stor er da Høsten det første År? (Den er naturligvis mellemproportional mellem 12 og 75.)

Ex. 3. Et Fort er provianteret for 140 Mand i 315 Dage. Hver Dag skal der 1 Mand udsendes med et sådant Hverv, at når han sluttelig ser den Fare, hvori han har været stedt, er det ikke at vente, at han med Sikkerhed kan udrette det oftere. Lige inden Kommandanten på Fortet bliver afskåret fra sine Landsmænd, for-langer han derfor så stort et Mandskab, at han just kan sende en ny Mand i det nævnte Hverv hver Dag, til Proviantens Ophør nøder til Overgivelse. Hvor mange Mand forlanger han? (Han selv tælles ikke med.)

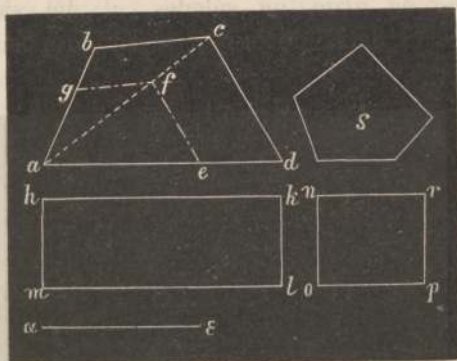
Ex. 4. 20 Mand kunne udføre et vist Arbejde i 45 Dage. Hvor mange Mand skal der være, når de skulle udføre det i samme Antal Dage, som der er Mand?

§ 155. En Opgave, for hvis Løsning Pythagoras berømmes af de gamle græske Mathematikere, og som kaldes endnu »finere» end Sætningen om den retvinklede Trekant (også her er der Tale om Takoffer i denne An-ledning), er følgende:

når der er givet to Figurer, da at tegne en tredie, lige stor med den ene og ligedannet med den anden, eller, med andre Ord:

at omdanne en Figur således, at den bliver lige-dannet med en anden, men uden at den forandrer Flade-fang.

Lad s (Tg. 105) være den Figur, der skal omdannes, så at den bliver ligedannet med Firkanten $abcd$. Det gjælder da blot om at finde den Linie i den ny Figur, som skal være ensliggende med ad ; thi hvis man havde



Tg. 105.

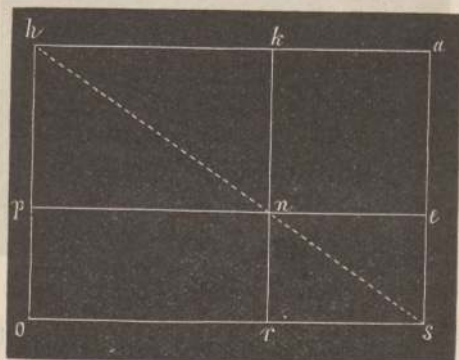
den — lad den være ae — kan den afsættes som ae og Figuren bliver da $aefg$ (jfr. § 136, Ex. 2).

For imidlertid at finde ae , må man først omdanne Figuren $abcd$ til et Rektangel med Siden $hk = ad$ (§ 115, Ex.), nemlig $hklm$; og dernæst omdannes Figuren s til et Rektangel $nopr$, hvis Side no er lig kl . — Nu må Fladefanget af $abcd$ forholde sig til s som de to Rektangler eller (da de have samme Højde) som hk til nr . Men tænker man sig s omdannet til $aefg$, skulle Fladefangene forholde sig som Kvadraterne på ad og ae (§ 144). Det gjælder altså blot om at finde en sådan ae , at Kvadraterne på ad (eller hk) og ae forholde sig som hk til nr , eller hvad der er det samme at løse følgende Op-gave.

§ 156. Når to Linier hk og nr ere givne, skal der findes en tredje Linie ae således, at i samme Forhold, hvori de to givne Linier stå til hinanden, skulle Kvadrater på den første og den søgte stå.

Flere af de foregående Betragtninger kunne lede til, at denne Linie ae netop er *Mellemproportionalen* mellem de givne hk og nr .

Betragte vi nemlig Rektanglet (Tg. 106) med de to lige store Smårektangler på begge Sider af Diagonalen, nemlig $npor$ og $nkae$, og således, at det sidste er et Kvadrat, så at dets Side just er mellemproportional mel-



Tg. 106.

lem np og nr (§ 153), kunde man tænke sig et Kvadrat på np og sammenligne dette med Rektanglet $npor$. Da disse have den ene Side lige stor, nemlig np , må de forholde sig som den anden, nemlig som np til nr , eller som hk til nr . Men istedenfor Rektanglet $npor$ kunne vi tage Kvadratet $nkae$. Altså have vi, at et Kvadrat på hk vil forholde sig til et Kvadrat på ae som hk til nr . — Den Linie, vi spørger efter, er altså ae , som er mellemproportional mellem de to givne.

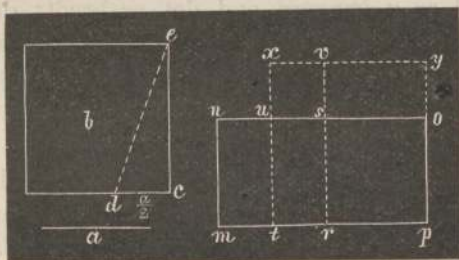
Herefter kan man altså finde ae i 155 ved at tegne Mellemproportionalen hk og nr og således løse den der stillede Opgave.

§ 157. De pythagoræiske Fladefangsomdannelser ere nu nåede så vidt, at først blev en hvilkensomhelst

retlinet Figur omdannet til en Trekant og denne til et Rektangel (§ 115), så til et Rektangel med given Side (§ 116, Ex.), så til et Kvadrat (§ 151) og endelig til en hvilkenksomhelst given Form, α : ligedannet med en given Figur. Man kan altså også omdanne enhver retlinet Figur til et Rektangel, hvis to Sider stå i et givet Forhold; thi tegnes et Rektangel af de to Linier, der danne dette givne Forhold, gjælder det jo blot om at skaffe det givne Fladefang omdannet til en Figur ligedannet med dette.

Men endnu en Opgave stillede og løste Pythagoras, en Opgave, hvis Rækkevidde skulde vise sig overordentlig stor, nemlig

at omdanne et givet Fladefang til et Rektangel, hvis ene Side er et givet Stykke større end den anden.



Tg. 107.

Det givne Fladefang kan altid først omdannes til et Kvadrat, hvis det ikke allerede er det. Lad Fladefanget altså være b , Tg. 107, den givne Linie a , og man skal nu omdanne b til Rektanglet $mnop$, som er a længere end det er bredt. Lad os tænke os, at det var gjort, og at mr er lig a . Linien rs tegnes parallel med mn , og Delen $rsop$ skulde da være et Kvadrat. Tænkte man sig nu den anden Del af Rektanglet halveret ved Linien tu og Halvdelen $mnut$ sat til Kvadratet $rsop$ som $osvy$, fåer man Rektanglet omdannet til en Gnomon

ptusvyp. Denne er atter lig med Kvadratet på *tp* formindsket med Kvadratet på *us* eller *tr* eller den halve $\frac{a}{2}$, hvilket skrives $\frac{a}{2}$. Hvor stor skal altså *tp* være? Den skal åbenbart være så stor, at man, efter fra dens Kvadrat at have trukket Kvadratet på $\frac{a}{2}$, netop får Kvadratet *b* (der var lig Rektanglet *mnop*, der var lig Gnomonen); men da må *tp* være Hypothenuse i en retvinklet Trekant *cde*, hvor $\frac{a}{2}$ er den ene Kathete og *b*'s Side *ce* den anden. Nu får man let Løsningen således:

Man tænke sig på Tg. 107 kun Kvadratet *b* og Linién *a* at begynde med. Man afsætter da *a*'s Halvdel fra *c* til *d* og tegner *de*. Da har man den nys nævnte Hypothenuse *de*. Man afsætter nu *a* som *mr* og forlænger den; og fra dens Midte *t* afsætter man *de*, hvorved man får *p*; *po* tegnes vinkelret på og lig med *pr*, Rektanglet *mpon* tegnes færdigt, og Opgaven er løst; thi Rektanglet er *a* længere end det er bredt; det er lige stort med Gnomonen; det er altså lig Kvadratet på *tp* formindsket med Kvadratet på *us* eller *tr*; det er altså lig Kvadratet på *de* formindsket med Kvadratet på *dc*; det er altså lig Kvadratet på *ce*, der er *b*.

Denne Opgaves Løsning giver Nøglen til en stor Gruppe, der kunne forefalde på forskellige andre Områder end Geometriens, såsom: at finde to Størrelser med en given Forskel (*a*), og som ved at foldes give et vist Tal (*b*). Vi skulle senere se, hvorledes sådanne Opgaver kunne løses ved Regning; men man kan forøvrigt allerede her følge de geometriske Operationer med Regning, forudsat, at Tallene ikke ere for vanskelige; man skal nemlig beregne (*ed*) Kvadratroden af Kvadratet på $\frac{a}{2}$ og *b* tilsammen. Lægges $\frac{a}{2}$ hertil, har man den ene af de søgte Størrelser; og trækkes $\frac{a}{2}$ derfra, har man den anden. Man prøve følgende Exempler både ved Tegning og ved Regning.

Ex. 1. Af to Brødre er den ene 12 År ældre end den anden.

Folder man den enes Antal År med den andens, fåer man 64. Hvor gamle ere de?

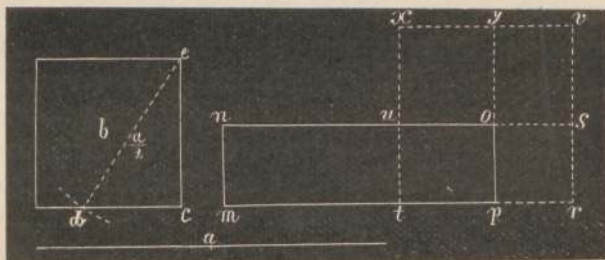
Ex. 2. I en Bog på 2400 Linier er der 20 Sider flere, end der er Linier på hver Side. Hvor mange Sider og hvor mange Linier på hver Side?

Anm. Den i denne Paragraf omhandlede Opgave kan også udtales således:

At omdanne et givet Kvadrat b (Tg. 107) til et Rektangel langs med en given Linie (a eller mr) således, at den overskydende Del af Rektanglet bliver et Kvadrat ($rsop$).

§ 158. Endelig løste Pythagoras endnu en Opgave, som slutter sig på det nærmeste til den forrige, nemlig:

At omdanne et givet Fladefang til et Rektangel, hvis to sammenstødende Sider tilsammen have en given Længde.



Tg. 108.

Lad b (Tg. 108) være det givne Fladefang, formet som et Kvadrat, a den givne Linie. Der skal da tegnes et Rektangel $mnop$ med Fladefang som b , og hvori mp og po tilsammen ere lig a . — Tænke vi os det gjort, og at mr er lig a , skal pr være lig po . I mr 's Midtpunkt t tegnes tu vinkelret. Tænker man sig dernæst Rektanglet $mnut$ henlagt på Pladsen $rpvy$, vil Rektanglet $mnop$ være omdannet til en Gnomon $rtuoyvr$; thi $oprs$ er et Kvadrat, og rt er lig rv , nemlig $\frac{a}{2}$. Gnomonen i

Forening med et Kvadrat på uo er imidlertid atter lig et Kvadrat på rt eller $\frac{a}{2}$; altså er også Kvadratet b i Forening med Kvadratet på uo lig Kvadratet på $\frac{a}{2}$. Danner man nu en retvinklet Trekant cde , hvis ene Kathete er b 's Side ce , og hvis Hypothenusen ed er $\frac{a}{2}$; må cd være lig uo . Nu kan Opgaven løses således.

Lad der i Tg. 108 kun være Kvadratet b og Linien a at begynde med. Man afsætter mr lig a og halverer den i t . Man tager tr i Passeren, og med e som Centrum tegnes Buen, der giver Punktet d . Man tager dc i Passeren og afsætter den fra t til p . po oprejses vinkelret og gjøres lig pr . Rektanglet $mnop$ tegnes færdigt og er det søgte; thi mp og po ere tilsammen lig $mr = a$; og dets Fladefang er lig Gnomonens, der atter er lig Kvadratet på $\frac{a}{2}$ forformindsket med Kvadratet på $uo = tp = dc$; og dette er atter lig Kvadratet på ce eller b .

Også denne Opgaves Løsning er Nøglen til en hel Gruppe andre Opgaver, som vi senere skulle se. Man kan således nu finde *to Størrelser, som tilsammen ere lig med en given Størrelse a , og som foldet med hinanden give b* . — Vil man ved Regning følge de geometriske Operationer, må man her se at finde *Kvadratoden af Kvadratet på $\frac{a}{2}$ formindsket med b* (jfr. Tg. 108). Denne Kvadratrod (cd) lagt til og trukket fra $\frac{a}{2}$ giver de *to søgte Størrelser*. — Følgende Exempler ere valgte så simple, at man nok kan forsøge deres Løsning både ved Tegning og Regning, idet man kan prøve sig frem for at finde den fornødne Kvadratrod. Grækerne magtede ikke Sagen anderledes ved Regning; men de havde fundet, hvad der for dem var det tilfredsstillende, *et geometrisk Middel til Løsning af denne Slags Opgaver under alle Forhold*.

Ex. 1. En rektangulær Fårefold indeslutter 1176 $\square'$. Dens Omkreds er 140'. Find dens Længde og Brede.

Ex. 2. Jeg har i en vis Tid hævet ialt 1600 Kroner i Løn. Af hver Ugeløn har jeg lagt 1 Krone i en Sparebøsse. Da jeg

idag tæller dennes Indhold sammen med den Ugeløn, jeg idag har hævet, finder jeg ialt 99 Kroner. Hvor mange Uger og hvor stor Ugeløn? (Glem ikke den Krone, som idag skulde nedlægges.)

Ex. 3. Lægges to Tal sammen, fåes 65. Foldes de med hinanden, fåes 900. De ere?

Ann. 1. Af Tg. 108 ser man, at $\frac{a}{2}$ må være større end Siden i Kvadratet b ; thi ellers kan $\frac{a}{2}$ ikke blive Hypothense i en retvinklet Trekant, hvor b 's Side er Kathete. a må altså være større end Kvadratet b 's to Sider eller halve Omkreds; eller Rektanglets Omkreds må være større end Kvadratets, hvis Fladefang er det samme (jfr. § 153). *Er a mindre end b 's halve Omkreds er Opgaven umulig.*

Ann. 2. Opgaven i § 158 kan også udtrykkes således.

At omdanne et givet Kvadrat (b , Tg. 108) til et Rektangel langs med en given Linie (a eller mr) således, at det, der mangler, er et Kvadrat (oprs).

Det gyldne Snit.

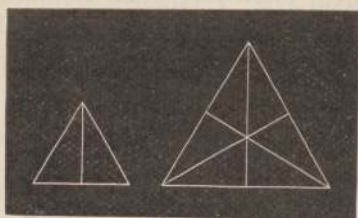
§ 159. Regelmæssige Figurer skal Pythagoras særlig have behandlet, navnlig den regelmæssige eller regulære 3-, 4-, 5- og 6-kant, idet der ved regulær forståes, at alle Figurens Sider ere lige store og Vinklerne ligeså.

Med den for Pythagoras ejendommelige Tilbøjelighed til at udstykke Figurer har han særlig betragtet de Stykker, hvoraf de bestå, og som altså kunne sammen sættes til disse.

Der er da først den retvinklede ligebenede Trekant, hvis Vinkler ere $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ og 1 ret Vinkel, og som var en

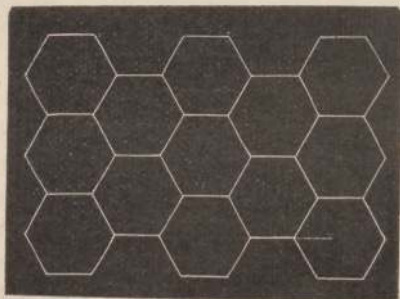
af hans »skjønne« Trekanter. Man kan på to Måder sammensætte denne Slags Trekanter til *Kvadrater*, nemlig enten af 2 eller af 4 Trekanter, således som det ses af Tg. 84. Kvadrater have den Egenskab, at de kunne udfylde hele Planet (Tg. 11); og Kvadratet var da også en »skjøn« Figur.

En anden »skjøn« Figur var *den* retvinklede Trekant, hvor den ene spidse Vinkel er dobbelt så stor som



Tg. 109.

den anden, altså hvor Vinklerne ere $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ og 1 ret. Sådanne Trekanter kunne på to Måder, nemlig 2 eller 6 i Antal, sammensættes til den ligesidede Trekant (Tg.



Tg. 110.

109), hvis Vinkler alle ere 60° eller $\frac{2}{3}$ ret. Sådanne 6 Vinkler give 4 rette, så at også regulære Trekanter kunne udfylde Planet (Tg. 8).

Sex af disse Trekkanter danne igjen en regulær Sexkant (Tg. 63), hvis Vinkler blive 120° eller $\frac{2}{3}$ ret; og regelmæssige Sexkanter kunne altså også udfylde Planet, idet 3 af deres Vinkler give 4 rette (Tg. 110).

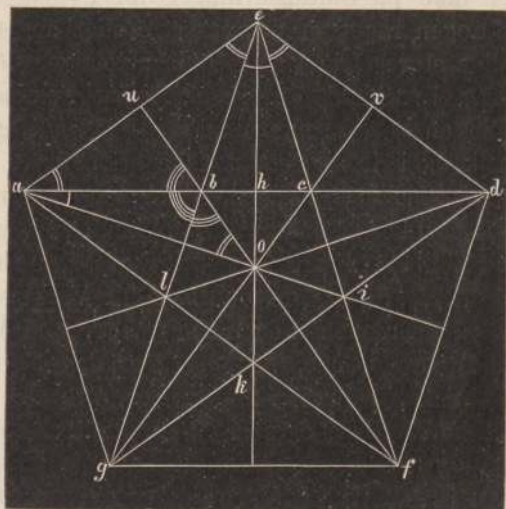
§ 160. De hidtil nævnte regelmæssige Figurer, 3-4- og 6-kanter have været kjendte og brugte før Pythagoras' Tid, om de end ikke vare blevne opløste og undersøgte på denne Måde i deres Enkeltheder. Derimod synes der ikke på Oldtidslevninger før Pythagoras' Tid at findes nogen regelmæssig Femkant, eller nogen Cirkel delt i 5 lige store Dele eller i Underafdelinger deraf (10, 15 eller 20), hvorimod den regelmæssige Femkant kom til at spille en vigtig Rolle, både i den pythagoræiske Mathematik og i den pythagoræiske Filosofi.

Efter forskjelliges Vidnesbyrd skal Pythagoras have opløst den regulære Femkant i 30 Småtrekanter, rimeligvis som Tg. 111 viser, nemlig ved at tegne de 5 Diagonaler *ad*, *ef*, ..., og de 5 Linier fra Vinkelspidserne vinkelret på de modstående Sider *fu*, *gv*, ... Man får da 10 Småtrekanter *boh*, *hoc* ..., der danne en indre Femkant *beikl*, 10 Småtrekanter, *beh*, *hec* ... ud for denne Femkants Sider, og som gjøre den til en Femstjerne *abecd* ..., og endelig 10 Småtrekanter *abu*, *ube* ..., der fylde Femstjernen ud til den oprindelige Femkant.

Enhver Femkants Vinkler ere tilsammen 6 rette Vinkler (§ 105, Ex. 3). Da Vinklerne her ere lige store, er hver altså $\frac{2}{3}$ ret. Er nu $\angle aed$ lig $\frac{6}{5}$ ret, må de to Vinkler *ead* og *eda* tilsammen være $\frac{4}{5}$ ret, og da de ere lige store, er hver af dem $\frac{2}{5}$ ret. I det Hele taget ville alle Vinklerne lade sig udtrykke ved Femtedele af en ret Vinkel, og Antallet af Femtedele betegnes på Tegningen ved Antal af Buer tegnede i nogle af Vinklerne. Det er nu let at udfinde, hvor stor enhver af Vinklerne ere; og idet vi nu udtrykke disse Vinkler ved Femtedele af en ret, se vi, at de 30 Småtrekanter have følgende Vinkler:

	Vinkler.
<i>boh, hoc</i>	2, 3, 5 femtedel ret
<i>beh, hec</i>	1, 4, 5 » »
<i>abu, ube</i>	2, 3, 5 » »

Atsaa ere de inderste og de yderste Småtrekanter ligedannede.



Tg. 111.

Ved Sammensætning af visse Grupper af Småtrekanter fåes atter Trekanter, der ere ligedannede med hine, f. E.

	Vinkler.
<i>ahc</i> osv.	2, 3, 5 femtedel ret
<i>ahk</i>	2, 3, 5 » »
<i>auo</i>	2, 3, 5 » »
<i>aho</i>	1, 4, 5 » »
<i>auf</i>	1, 4, 5 » »

Desuden kan der ved Småtrekanternes Sammensætning dannes en Mængde andre indbyrdes ligedannede Trekanter med endnu simplere Vinkelforhold, deriblandt navnlig følgende to Slags:

	Vinkler.	Vinklernes Forhold.
<i>bec</i> osv....	2, 4, 4	1, 2, 2
<i>cae</i>	2, 4, 4	1, 2, 2
<i>fad</i>	2, 4, 4	1, 2, 2
<i>abe</i>	2, 2, 6	1, 1, 3
<i>aed</i>	2, 2, 6	1, 1, 3
<i>akd</i>	2, 2, 6	1, 1, 3

I en Trekant, som *bec*, hvor Vinklerne ere 2, 4 og 4 Femtedele af en ret Vinkel, stå Vinklerne åbenbart i indbyrdes Forhold til hinanden som 1, 2, 2, ligesom Vinkelforholdet f. Ex. i Trekant *abe* er som 1, 1, 3, Forhold, der i Simpelhed kan sammenlignes med Vinkelforholdet i Pythagoras' to andre »skjønne« Trekanter, nemlig den retvinklede ligebenede, hvor det er 1, 1, 2, og den retvinklede Trekant, hvor Hypotenusen er dobbelt så stor som den ene Kathete, og hvor Vinkelforholdet er 1, 2, 3. — Foruden disse yderst simple Forhold, var også de ovennævnte 2, 3, 5 og 1, 4, 5 og overhovedet en hel Del Vinkelforhold, der kunne findes ved Sammensætning af flere Småtrekanter til en Trekant i Tg. 111 (f. Ex. *aoe* og *boc* 3, 3, 4) så simpelt sammensatte, at de navnlig kunne udtrykkes ved Tallene fra 1 til 5. Intet Under derfor, at Pythagoras i denne Mylder fandt en Fylde af Harmoni, som i ingen anden Figur. Som i § 139 bemærket, bestå de Toner, der give de simpleste velklingende Akkorder, af Svingninger, hvis Antal stå i simple Forhold, nemlig:

1,1 Enklang	1,3 Kvinten til Oktaven
1,2 Oktav	1,4 næstfølgende Oktav
2,3 Kvint	1,5 stor Terts til næstfølgende Oktav
3,4 Kvart	2,5 stor Terts til Oktaven
4,5 stor Terts	osv.

Ja, det kan tilføjes, at der i Musiken i vore Dage ikke bruges velklingende Akkorder af andre Toner end dem, hvis Talforhold kunne udtrykkes ved Tallene 1 til 6, de samme Tal, som udelukkende findes i Vinklerne i Tg. 111.

Ydermere forhøjes Harmonien, når man betragter de forskellige *Linier* i Figuren. Vi ville nemlig lægge Mærke til følgende.

De ligebenede Trekanter *bec* og *cae* (Vinkelforhold 1, 2, 2) ere ligedannede, og Grundlinie og Sidelinie i den ene må altså stå i samme Forhold som Grundlinie og Sidelinie i den anden; altså forholder *bc* sig til *be* som *ce* til *ac* eller, hvad der er det samme, *bc* forholder sig til *ab* som *ab* til *ac*. Med andre Ord *ab* er mellemproportional mellem *bc* og *ac*. Altså, *Linien ac* er i Punktet *b* delt i et større og mindre Stykke, hvor det større er *mellemproportional* mellem det mindre og det hele, en Deling, man har kaldt *Højdeling* eller *det gyldne Snit*.

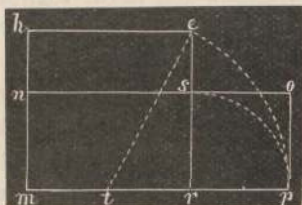
Sammenlignes endvidere de ligedannede Trekanter *cae* og *fad*, vil man på aldeles tilsvarende Måde (gennemtænk det!) få, at *ac* er mellemproportional imellem *cd* og *ad*, at således *ad* er højdelte i Punktet *c*, eller, om man vil i Punktet *b*, der altså er Højdelingspunkt både for *ac* og for *ad*. Man får således på Linien *ad* tre lige store Forhold nemlig, *bc* til *ab*, *ab* til *ac* og *ac* til *ad*.

Man kunde også have betragtet de ligebenede Trekanter *abe* og *aed* (Vinkelforhold 1, 1, 3) og fundet det samme Forhold mellem Linierne (forsøg det!).

§ 161. Men selv al denne Harmoni vilde næppe have tilfredsstillet Pythagoras, dersom han ikke havde

kunnet løse den herved stillede nye Opgave, at tegne Figuren mathematisk.

Opgaven vil være let at løse, dersom man først kan tegne en af Trekkanterne f. Ex. adf , thi har man først denne, kan man let tegne aed , hvis andre to Sider ae og ed ere lig df , og dernæst agf på samme Måde. Man har da Femkanten $aedfg$, og Resten følger af sig selv. Men for at kunne tegne adf gjælder det om, at man, efterat have valgt ad at begynde med, kan finde Længden af Siden df . Denne er imidlertid lig db , og det gjælder altså blot, om man kan højdele Linien ad .



Tg. 112.

Lad den Linie, der skal højdeles, blive afsat som re (Tg. 112), og lad os tænke os den højdelet i s , så at rs er mellemproportional mellem re og es . Da må et Kvadrat på rs , nemlig $rsop$, være lig et Rektangel af re og es (§§ 151—153), der tegnes som $esnh$ (idet eh gøres lig re). Forlænges pr og hn til m , vil $mreh$ åbenbart være et Kvadrat, der må være lige stort med Rektanglet $mnop$ (thi $esnh = rsop$). Man ser nu, at Opgaven blot er et særligt Tilfælde af den i § 157 løste. Der er nemlig givet et Fladefang $mreh$ (Kvadratet på mr), hvad der svarer til hin Opgaves b , og der er givet en Linie mr (der svarer til hin Opgaves a , som her just har samme Længde som det givne Kvadrats Side). Opgaven er da at omdanne $mreh$ til et Rektangel, hvis ene Side er mr længere end den anden (eller til et Rektangel, hvis over-

skydende Del (*rsop*) er et Kvadrat). — Der er blot den særlige Omstændighed at mærke her, at det Kvadrat, der skal omdannes, (*mreh*), har netop til Side samme Linie som den givne *a* eller *re*.

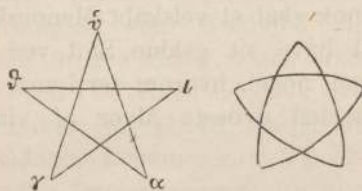
Dette gjør Løsningen simplere, idet de to Dele af Tg. 107 passende kunne trækkes sammen til én. Man tænke sig i Tg. 112 ikke givet andet end *re* at begynde med. Man tegner da blot *rt* vinkelret på *re* og halvt så lang, forlænger den til Højre for *r*, tegner *te*, drejer denne om Punktet *t*, så at man får Punkt *p*, og drejer sluttelig *rp* om *r*, så at man får Punktet *s*. *re* er da højdelt i *s*.

For at indse Rigtigheden heraf tegner man Kvadratet *ermh* og Rektanglet *mnop* færdigt. I Overensstemmelse med Reglen i § 157 er den givne Linies Halvdel *rt* afsat på Siden af det givne Kvadrat *ermh* og fra Punktet *t* tegnet en Linie *te* til Kvadratets Vinkelspids *e*. Denne Linie er afsat fra den givne Midtpunkt *t* ud over dens Ende *r* til Punktet *p*; og Tegningen giver altså i Henhold til § 157, at Rektanglet *mnop* er lige stort med Kvadratet *ermh*. Disse have imidlertid *mnsr* fælles, og det overskydende *rsop* må altså være lig det overskydende *esnh*. Følgelig er *sr* mellemproportional mellem *sn* og *es*, eller mellem *re* og *es*. ∴ Linien *re* er højdelt i Punktet *s*.

§ 162. Femkanten med Femstjernen blev i den pythagoræiske Skole Udtrykket for den mest fuldendte, alt gennemgribende Harmoni, og dermed for den rene ubeskårne Sundhed, hvor ingen forstyrrende Mislighed gjør Skår i Tilværelsens Skjønhed og Glæde.

At Femkantens 5 Diagonaler danne Femstjernen, der omfatter den indre Femkant, og således — foruden al den Harmoni, der er i alle de små Trekanter — knytte den ydre til den indre ved harmoniske Bånd, de gjen-tagende proportionalt delte Linier, at den indre Femkant på sådan Måde affødes af den ydre, og ved Diagonaler

selv vilde afføde en endnu mindre, osv. i det uendelige, ligesom man kan tænke sig den ydres Sider forlængede, så at der atter opstår en endnu ydre, osv. i det uendelige, — alt dette, sagtens i Forening med Tilfredsstillelsen over at have magtet den herhen hørende matematiske Opgave, gjør hin Opfattelse i et Samfund, hvor man i det Hele spejdede efter Tilværelsens Gåde i Tal- og Størrelsesforholdene, forståelig. Femstjernen (Tg. 113) blev således det Tegn, hvormed Pythagoræerne skriftligt hilste hinanden. Thi medens andre udtrykkede



Tg. 113.

sig f. Ex. således: »Vær hilset!» eller »Gid det må gå dig godt!» satte Pythagoræerne Femstjernen som Brevmærke eller Vignet på deres Breve, nogle mene, med de 5 græske Bogstaver (Tg. 113), der, idet det første er en beåndet Lyd, udtales »Hygita« $\varnothing$: vær sund! Femkantens Omkreds tegnedes ikke; dens Linier findes jo desuden igjen i Stykker af selve Femstjernens. Denne blev skrevet i ét Pennestrøg, der i mere flydende Skrift kunde arte sig som den afrundede Figur i Tg. 113. Den har flere Navne såsom: den tredobbelt slyngede Trekant, Pentagrammet ($\varnothing$: det, der skrives i 5 Strøg) eller Pentalfa ($\varnothing$: Fem-alfa, idet alfa er Navnet på det første græske Bogstav, α).

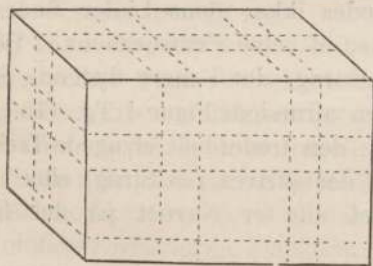
Femkanten er oftere senere bleven brugt som Sundhedssymbol. Således skal i forrige Århundrede den russiske Kejserindes Læger på hendes Fødselsdag have spist ved et femkantet Bord.

§ 163. Mere indgribende i det virkelige Liv end Femstjernen blev dog »det gyldne Snit«; thi det Forhold, der finder Sted imellem en højdelt Linies Stykker blev brugt som et Ideal, man tilstræbte på mange Punkter af Arkitekturen; og det er bleven eftervist, at dette Forhold går igjen i mange af den græske Blomstringstids bedste Bygningsværker og har navnlig udfoldet sig på det skønneste i Athen i Årene 450—430 f. Kr. Men Brugen af »det gyldne Snit« døde ikke ud — den er gået som en halv hemmelighedsfuld Sag igjen i senere Bygningsarbejder, navnlig i Middelalderen.

Mærkelig nok skal et velskabt Menneskes Højde fra Isse til Fodsål have sit gyldne Snit ved den nederste Rand af Ribbene, noget, hvorom der i vore Dage skrives hele Værker i den dybeste Alvor af virkelig Lærde.

Regulære Legemer.

§ 164. Ligesom Rektanglet blev valgt allerede i den forhistoriske Tid som en hensigtsmæssig Figur at indrette sig efter og inndelev efter, fordi den forbinder Orden



Tg. 114.



Tg. 115.

med en vis Frihed i Anordningen, således er også en Form som Tg. 114 den, som hovedsagelig er bleven

brugt som den *Rumform*, der har tilsvarende Egenskaber, og som hertil knytter den, især for Byggematerialier, vigtige Egenskab, at flere kunne hvile på hverandre med lutter vandrette Flader, hvorved Nedglidning forebygges. Denne Form er derfor kommen til at spille en lignende, måske endnu mere gennemgribende Rolle i Rummet end Rektanglet i Planet.

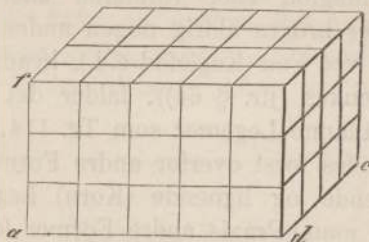
Det er da også blevet en sådan Form, man har valgt som Enhed for Rummål, nemlig en, som er en Linieenhed på hver Led, en Form, som kaldes *Terningen* (latinsk: Cubus), Tg. 115. Da denne Form er valgt som Rummål (Terningfod eller Kubikfod eller simpelthen Rumfod, thi der bruges aldrig nogen anden Form, som kan benævnes ved Fod (Kuglefod e. l.), hvad i og for sig godt kunde tænkes (jfr. § 64)), falder det let at måle Rumfang af sådanne Legemer som Tg. 114, og Vanskelighederne træffes først overfor andre Former.

Ved flydende og lignende (Korn) Legemers Rummåling bruger man i Praxis andre Former for Rummålet end Terningen, såsom Pot, Skjæppe, Tønde osv., men disse Navne ere da ikke knyttede til Navnet på Linie-målet (Fod).

Desværre har den danske Mathematik ikke valgt noget simpelt Navn på den simple Form, Tg. 114. Et Navn som »retvinklet retstående Parallelepipedum« er åbenbart hentet noget langt inde i Mathematiken. Det foreslåes at kalde den *Kassen*, et Navn, som vel tør have nogen Berettigelse ved Siden af et Navn som *Terningen*, og som derfor her vil blive brugt.

§ 165. Kassen har åbenbart Udstrækning på 3 Led, som vi kunne kalde Længde, Brede og Højde. I denne Forbindelse er der ingen Mening i *tillige* at nævne Dybde, da Højden og Dybden kun betegner de to modsatte Retninger af den samme Linie, som måles fra sin ene Ende til den anden. Opmålingen ved flydende og lignende Legemer kan ske således, som ovenfor blev antydet;

men iøvrigt kan Kassens ligesom Rektanglets Måling foregå derved, at man måler visse Linier, nemlig Længde, Brede og Højde. *Tænk*er man sig derefter Kassen gennemskåret gennem de Punkter, som Liniemålet (f. Ex. Fod e. l.) har afsat, vil Kassen ses at bestå af flere Lag af Terningmål, nemlig så mange Lag, som Højden har Liniemål (Fod), og i hvert Lag er der så mange Terninger som Grundfladen har Flademål, hvilket er samme Antal, som fåes ved at folde Længden og Bredden med hinanden. Man fåer altså samme Antal



Tg. 116.

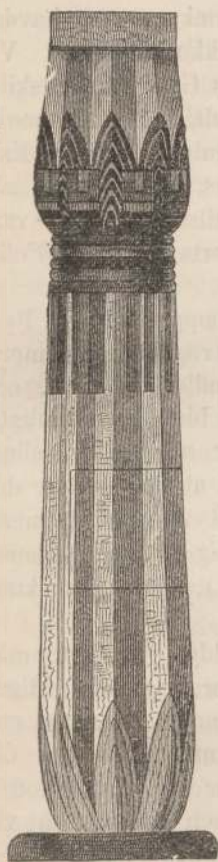
Terningmål i alt, som det Tal, der fåes ved Foldning af det *Antal* af Fod, der findes i Længden, med *det*, der findes i Bredden, og med *det* i Højden. — Man kalder dette — men med Urette (jfr. § 65) — at Fod Gange Fod Gange Fod giver Rumfod.

For så vidt Opmålingen af Længde, Brede og Højde ikke giver et helt Antal Fod, må man vælge et mindre Liniemål og dertil svarende Terningmål og iøvrigt gå frem på en aldeles tilsvarende Måde, som ved Flademåling er omtalt i § 66. En Terningfod er selvfølgelig 12 Gange 12 Gange 12 eller 1728 Terningtommer.

Ex. Hvor stor er en Kasse, som er 6' 9" lang, 5' 4" bred og 3' 4" høj?

§ 166. Vil man nu måle andre Legemer, der ikke

have Kasseform, møde Vanskelighederne; men vi vide ikke bestemt, om de tidlige Oldtidsfolk formåede noget af Betydning i denne Retning. Af Ahmes' Regnebog se



Tg. 117.



Tg. 118.

vi, at her findes Rumfangsberegninger af Forrådskamre, der ikke havde Kasseform; men hvilken Form de havde, vides ikke nøjagtigt; og altså endnu mindre vides det, om

de temmelig gådefulde Beregninger, hvormed Ahmes løser disse Opgaver, ere mer eller mindre rigtige. Det er næppe rimeligt, at Ægypterne have havt afklarede matematiske Sætninger med Hensyn til Rumlæren eller *Stereometrien*; thi da måtte der uden Tvivl have været noget at finde igjen hos de tidligere Grækere, som havde studeret i Ægypten. Men dette er ikke Tilfældet. Vi se først *Stereometrien* udvikle sig hos Grækerne adskiligt senere, end *Geometrien* var begyndt. Men når man betragter Formerne i de ægyptiske Ruiner, som f. Ex. Tg. 117 og 118, må det indrømmes, at her var så megen Formsands og Formdygtighed tilstede, at der var rigelig Lejlighed til Efterligning og Eftertanke for et Folk som Grækerne.

§ 167. Helt nyt er det derfor næppe, når nu Pythagoras fremdrager regelmæssige eller regulære Legemer. Derimod er Måden, hvorpå han behandler dem, ny, og det er rimeligvis også derved, at det blev ham muligt, til tidligere kjendte regulære Legemer at føje et eller måske to andre og derved i det Hele at danne *alle* de regulære Legemer, som overhovedet kunne dannes. Medens man nemlig kan danne uendelig mange regulære Figurer (5-kant, 6-kant, 7-kant osv.), kan der kun dannes 5 regulære Legemer.

For at et Legeme skal kunne kaldes regulært, må dets Overflade bestå af lutter regulære og samfældige Figurer. Hvor disses Sider støde sammen, dannes en *Kant*, hvor deres Spidser støde sammen, dannes et *Hjørne*. I det daglige Liv gå Hjørner og Kanter ofte noget ubestemt imellem hinanden; men her forstå vi noget bestemt ved hver Ting. I et Legeme af Kasseform, f. Ex. et almindelig Værelse, er Gulv, Loft og 4 Vægge dets *Sideflader* (6 i Antal); de vandrette Linier mellem Gulv og Vægge, de lodrette Linier på Overgangen fra den ene Væg til den anden og de vandrette Linier mellem Loft og Vægge kaldes Legemets *Kanter*

(12 i Antal); og de Spidser (i det daglige Liv »Kroge«), som dannes af Gulv og to sammenstødende Vægflader eller af Loft og to sammenstødende Vægflader, kaldes *Hjørner* (8 i Antal).

En Sideflade er altså en Figur, en Kant er en Linie, og et Hjørne er et Punkt.

Terningen, Tg. 115, er åbenbart et af de regulære Legemer. Det har, ligesom Kassen, 6 Sideflader, 12 Kanter og 8 Hjørner; og Sidefladerne ere Kvadrater. Grækerne benævnedes de regulære Legemer efter Sidefladernes Antal, og Terningen kaldte de således *Hexaëdret* (6: som har 6 Sideflader).

§ 168. Tænker man sig fra Midten af Loftet i en terningformet Stue trukket 4 Linier (Snore) til hver Midte af de 4 Vægge, og ligeledes fra Midten af Gulvet til de samme 4 Punkter på Væggene, samt fra den ene Vægmidte til den næste osv., og bortskærer man alt, hvad der ligger udenfor disse Linier, få vi et Legeme som Tg. 119. Da alle de nævnte 12 Linier (Snore) naturligvis på Grund af Terningens Regelmæssighed må være lige lange, må de Trekanter, de danne, være ligesidede eller regulære og tillige samfældige. Dette Legeme kaldte Grækerne *Oктаëdret*; thi det har åbenbart 8 Sideflader og iøvrigt 12 Kanter og 6 Hjørner.



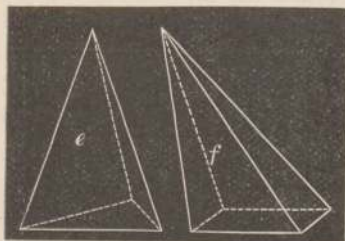
Tg. 119.

Ligesom her Hexaëdret har affødt Oктаëdret, således kan igjen dette afføde hint, når man i dette tænker sig Linier fra Midtpunkt til Midtpunkt af de 4 skråt opad vendte Trekanter, og ligeledes fra Midtpunkt til Midtpunkt af de 4 skråt nedad vendte Trekanter, og endelig 4 Linier fra et af de øverste Midtpunkter til det til-

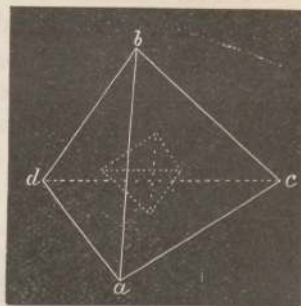
svarende nedenfor. Disse 12 blive da Kanterne i den indre Terning; og således vilde man kunne fortsætte.

Af det anførte følger, at Oktaëdret har ligeså mange Hjørner som Terningen har Sideflader (6) og omvendt (8), medens de begge have 12 Kanter.

§ 169. Sammenligner man et Hjørne af Terningen og et Hjørne af Oktaëdret, vil man lægge Mærke til, at i hint støde 3 Sideflader sammen, i dette støde 4 Sideflader sammen. Et Hjørne af første Slags kalder man et tresidet Hjørne, et af sidste Slags et firsidet Hjørne. De opadvendte Hjørner i Legemerne Tg. 120 ere også Exempler, det første på et tresidet, det andet på et firsidet Hjørne.



Tg. 120.



Tg. 121.

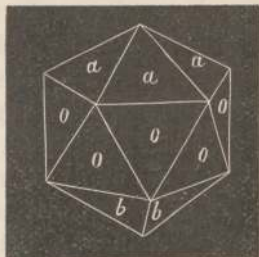
Vi ville da prøve at sætte ligesidede Trekanter sammen til et tresidet Hjørne. Sættes 3 sådanne Trekanter sammen, Tg. 121, nemlig abc , abd og cdb , ser man strax, at Siderne ac , cd og da danne en fjerde ligesidet Trekant samfældig med hine, og vi have da her atter et regulært Legeme, *Tetraëdret*, nemlig med 4 Sideflader, 6 Kanter og 4 Hjørner.

Forsøger man at forbinde Midtpunkterne af de 4 Sideflader, ser man let, at man får et andet Tetraëder inden i det gamle.

§ 170. De nævnte 3 Legemer tør næppe anses for nye på Pythagoras' Tid. Hvis han derimod skulde have anstillet lignende Betragtninger over dem, som her ere

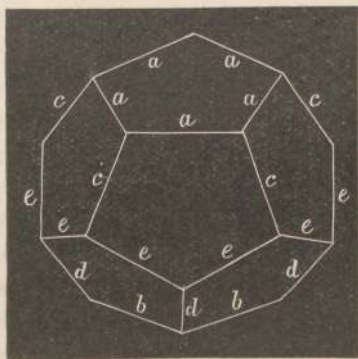
gjorte, tør dette vistnok anses for nyt og for skikket til at lede til Opdagelsen af de andre regulære Legemer.

Efterat have dannet tresidede Hjørner af ligesidede Trekanter og derved fået Tetraëdret, og firesidede Hjørner af de samme og derved fået Oktaëdret, er det naturligt at prøve at danne femsidede Hjørner af ligesidede Trekanter, og man kommer således til det næste regulære Legeme (Tg. 122) *Ikosaëdret* med 20 Sideflader, nemlig 5 på skrå opad (a) og 5 på skrå nedad (b), samt et Belte på 10 (c), hvoraf de 5 danne Kanter med de øverste 5, og 5 danne Kanter med de nederste 5. Man optæller let Ikosaëdrets Kanter til 30 og dets Hjørner til 12.



Tg. 122.

§ 171. Forsøger man at forbinde Midtpunkterne af Sidefladerne, ser man, at de øverste 5 Trekanters Midt-



Tg. 123.

punkter give Vinkelspidserne til en regulær Femkant og den nederstes ligeså. Men ligesom disse to femsidede Hjørner give en regulær Femkant, må på Grund af Regelmæssig-

heden ethvert af Ikosaædrets Hjørner give det, og vi få således et Legeme begrændset af ligeså mange Sideflader, som Ikosaædret havde Hjørner, nemlig 12, det femte regulære Legeme, Tg. 123, *Dodekaædret*. Af Kanter har det åbenbart 30 ligesom Ikosaædret, nemlig 5 for oven (*a*) og 5 for neden (*b*), 5 skråt nedad fra hine (*c*) og 5 skråt opad fra disse (*d*), samt et Belte på 10 (*e*). Da Dodekaædrets Hjørner fremkom i Midten af hver af Ikosaædrets Sideflader, har det ligeså mange Hjørner som Ikosaædret har Sideflader, nemlig 20.

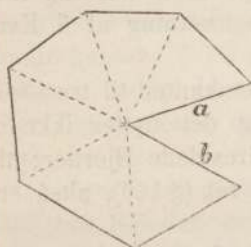
Man indser let, at hvis atter Midtpunkterne af Dodekaædrets 12 Femkanter forbindes, får man et femsidet Hjørne i hver af disse Midtpunkter, og at herved netop opstår et indre Ikosaæder, der atter kan afføde et Dodekaæder, osv. i det uendelige.

§ 172. Pythagoras synes at have været klar på alle disse Forhold, dog for Dodekaædrets Vedkommende rimeligvis senest, og muligvis er det først hans nærmeste Lærlinger, der have udfyldt de regulære Legemers Tal med Dodekaædret. Men senere er det i hvert Fald ikke sket, og det tør da anses for rimeligt, at Pythagoras, eller i alt Fald tidligt hans Skole, var klar på, at der ikke fandtes andre regulære Legemer end de nævnte 5. Man har uden Tvivl nu — eller måske allerede før Erkjendelsen af de sidste to — gået sammensættende til værks efter en lignende Tankegang som følgende.

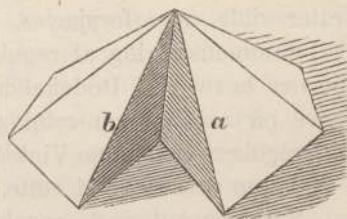
Sammensætning af de ligesidede Trekanter til et tresidet Hjørne fører til Tetraædret, til et firsidet Hjørne fører til Oktaædret, til et femsidet, til Ikosaædret. Nu var det naturligt at tænke på et sexsidet Hjørne. Men da hver af den ligesidede Trekants Vinkler er $\frac{2}{3}$ ret, ville 6 af disse give 4 rette, hvilket netop falder glat ud i et Plan (Tg. 8, jfr. §§ 103 og 159), så at der ikke bliver noget Hjørne af denne Sammensætning.

I det Hele skjønner man let, at for at der skal kunne blive Tale om et Hjørne, må de Vinkler, der

sættes sammen, nødvendigvis tilsammen være mindre end 4 rette. Skal man få et Stykke fladt Papir til at højne sig til et Hjørne, må der nødvendigvis klippes, ikke alene et Snit ind i det, men et Skår ud af det, som Tg. 124 viser, så at a og b kunne lægges langs med hinanden, idet Papiret bøjes langs visse andre Linier, f. Ex. de i Tg. 124 punkterede Linier, hvorved et 6-sidet Hjørne opstår.



Tg. 124.



Tg. 125.

— Dog må det indrømmes, at a og b nok kunde lægges sammen ved, at Papiret imellem dem bøjes bagud, ja, at der endog mellem a og b kunde indskydes Papir med en endnu større Vinkel, og at det hele dog kunde foldes til et Hjørne; men man måtte da folde både udad og indad, som Tg. 125 viser; men om sådanne (konkave) Hjørner kan der åbenbart ikke blive Tale i et regulært Legeme, hvor den ene Sideflade i alle Måder skal være som den anden.

Endnu mindre vilde det altså føre til noget at prøve at danne et syv- eller flersidet Hjørne af ligesidede Trekanter; men på en Måde kunde man nok sige, at Sammensætningen af 6 ligesidede Trekanter fører til et regulært Legeme; man måtte da blot føje til — med uendelig mange Sideflader. Man kan enten give Sidefladerne en endelig Størrelse, og Legemet må så blive uendelig stort, nemlig Planet; eller man kan lade Lege-

met få en endelig Størrelse, nemlig Kuglen, men da bliver hver Sideflade uendelig lille.

Gå vi dernæst til den regulære Firkant, Kvadratet, så have vi allerede set dettes Sammensætning til tresidede Hjørner, hvilket gav Terningen. Prøves en Sammensætning af 4 Kvadratvinkler, få vi igjen Planet udfyldt (Tg. 11, jfr. § 159), og man kan atter her tænke på det uendelig store Legeme, Planet, med endelige Kvadrater, eller på en endelig Kugle med uendelig små Kvadrater. — At prøve på Sammensætning af 5 Kvadrater vilde være forgjæves.

Sammensætning af regulære Femkanter til tresidede Hjørner have vi i Dodekaëdret, og det nytter ikke at prøve på en Sammensætning til firesidede Hjørner; thi den regulære Femkants Vinkel er $\frac{6}{5}$ ret (§ 160), altså ere 4 sådanne mere end 4 rette.

Sammensættes 3 regulære Sexkanter, fåes ikke noget Hjørne, men Planet; thi hver af deres Vinkler er $\frac{4}{3}$ ret, altså 3 af dem lig 4 rette (jfr. § 159); og vi have igjen Plan eller Kugle som sammensat af Sexkanter.

At prøve en Sammensætning af regulære Sexkanter til et firesidet Hjørne, skjønnes strax at være forgjæves, og ligeledes at prøve Sammensætning af Figurer med flere Sider.

§ 173. Disse Opdagelser kom til at spille en stor Rolle i den pythagoræiske Filosofi. De Figurer, som i Planet fandtes »skjønne« (§ 159) og særlig harmoniske (§ 162), ere ligeledes de eneste, som i Rummet kunne sammensættes til regulære Legemer. I et af Platos Værker, kaldet »Timæos«, lader han en ivrig Pythagoræer af dette Navn gjøre Rede for de 4 Elementer (Grundstoffer): Ilden, Luften, Vandet og Jorden, og fremføre, at Ilden består af Tetraëdre, Luften af Oktaëdre, Vandet af Ikosaëdre og Jorden af Hexaëdre, noget som minder om Nutidens Undersøgelser over Atomformer af forskellige Stoffer. Det femte Legeme, Dodekaëdret,

bliver anvist Plads som det alt gennemgribende og alt omfattende. Det kan vel være rimeligt, at den regulære Femkants mange harmoniske Forhold og Bånd, der lader det myldre indad og udad med en Uendelighed af tilsvarende Figurer (§ 160), have givet Anledning til denne Opfattelse; men det er også muligt, at Dodekaædret har fået en sådan særlig Rolle, fordi det måske først er opdaget, efter at der var anvist de andre fire deres Plads. Dog må det til Støtte for den førstnævnte Mulighed bemærkes, at idet Femkanten bestod af 30 Småtrekanter (§ 160), fik Dodekaædrets Overflade 360 sådanne, netop det samme Antal som det, hvori man efter Babylonierne delte Cirklen, fordi Solen går omtrent en tilsvarende Vej daglig. Dodekaædret havde netop ligeså mange Sideflader, som Dyrekredsen (Ekliptika) har Billeder, og hver Sideflade ligeså mange Småtrekanter, som hvert af disse Stjernebilleder har Grader. — Dodekaædret er måske også Anledningen til, at man senere talte om Kvintessentsen, quinta essentia, α : femte Grundstof, det, som er gennem og over de andre fire.

Medens vi i vore Dage kjende helt andre (omtrent 60) Grundstoffer (Elementer) og vide, at de pythagoræiske 4 ikke vare virkelige Grundstoffer, så at også Forklaringen af disses indre Væsen falder bort, må vi dog beundre, ikke alene den matematiske Klarhed, hvormed han bearbejdede Formerne, men også Overbevisningens Varme, hvormed han og hans Skole førte frem, at *alt er Tal*, og at Tingenes inderste Væsen og deres Egenskaber alene beroer på deres Tal. — Man har ofte ringeagtet Pythagoras' sære Talfilosofi, som søgte Nøglen til Verdens gådefulde Sammenhæng i Tal og Harmoni; men næst efter at have skaffet — selv eller ved sine Lærlinger — en Mængde værdifuldt matematisk Indhold — i store Træk, hvad vi her have gennemgået i §§ 104 til 173 — har han havt en Anelse om, hvad der i Nutiden er Grundlaget for naturviden-

skabelig Forskning, at *alle Egenskaber ved Tingene kunne måles og angives i Tal*, ikke alene Størrelse og Vægt, men Hårdhed, Elasticitet, Varmegrad, Varmefyldte, Varmeledningsevne, Udstrålingsevne, Tilbagekastningsevne, de elektriske Egenskaber osv.; ja, det tør i vore Dage betragtes som god Regel, at de Egenskaber, som man ikke endnu kan måle og udtrykke i Tal, ere kun slet kjendte.

Perspektiv.

§ 174. Forsøg på at tegne eller indridse Billeder af Mennesker, Dyr og andre Naturgjenstande ere måske ligeså gamle eller ældre end på at forme dem frit i Rummet. Den ældste Skrift hos de mest fremragende Oldtidsfolk er begyndt som Billedskrift. Og dog må det vist siges, at Formkunsten nåede tidligere en vis *Fuldkommenhed* både i Arkitektur og Billedhuggerkunst end Maler-, Tegne- eller Reliefkunsten, hvilke sidste til en Begyndelse have temmelig ensartede Mål og Midler, ja, i Reglen synes at have været brugte samtidig, idet man malede det indridsede med forskellige Farver.

Formkunsten havde nemlig for så vidt en lettere Opgave at løse, at, hvad den fremstiller, skal i rumlig Henseende svare til det, der bliver efterlignet, så at den i alle Retninger skal gjengive Linierne efter de sande Mål eller i hvert Fald i de sande Forhold. Ved Tegninger derimod må næsten altid en Del Linier vise sig i anden Størrelse end den sande eller forholdsvis, man kalder det, i »Forkortning«. Og tilmed skulle Ting, der i Virkeligheden have samme Størrelse, ofte tegnes med forskjellig Størrelse, eftersom den ene er nærmere ved Øjet

end den anden. Oldtidsfolkene før Grækerne synes ikke at have kunnet komme ud over disse Vanskeligheder. Deres Billeder savne fuldstændig, hvad vi kalde *Perspektiv*, noget, man kan få et Indtryk af ved Betragtning af de ægyptiske Relieffer, Tg. 126 og Tg. 127. Vanskeligheden ved Forkortninger går man simpelthen udenom derved, at man vender eller vrider Gjenstandene således, at deres Omkreds (Kontur) giver de Linier, der har mest Interesse. Et Menneskes Ben vendes helst således, at de ses fra Siden, Brystet derimod, så det ses forfra, og Hovedet atter i Profil, når det nogenlunde går an at give Vedkommende denne dobbelte Vridning; ellers tegnes det hele fra Siden. Tg. 126, der forestiller Færdselen på Nilen, viser, at man nok vidste, at når man står højt, kan man se den ene Gjenstand over den anden, men ikke, at dette ikke skal udføres derved, at man tegner det ene Skib i samme Målestok lige over det andet.

Disse og en Mængde andre af Ægypternes egne



Tg. 126.

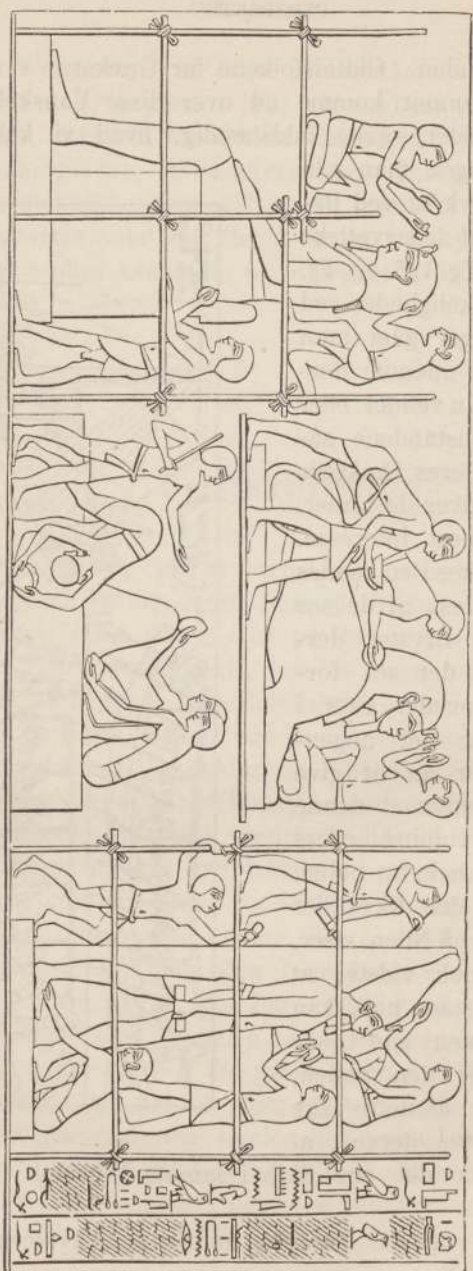


Fig. 127.

Fremstillinger af deres Liv og Sysler have naturligvis stor Værdi, idet de ere en Slags billedlig Beskrivelse, som ofte til de yderste Enkeltheder underrette os om, hvorledes Ægypterne have båret sig ad med en Mængde Ting; men de vise tillige, at sådanne Forholdsregler, som vi betragte som selvfølgelige i al billedlig Fremstilling, slet ikke endnu er faldet dem ind. Således vil man på den øverste Midterdel af Tg. 127 lægge Mærke til, at den *bageste* Persons Knæ hviler på Sfinxen, medens hans Arme ere *foran* den anden Person, der dog selv står *foran* Sfinxen.

Tg. 128 er et Relief fra Nimrud, forestiller en Kongejagt og viser, at Kaldæerne ikke heller have været bevandrede i Perspektiven (Løvens Bagben foran Skjolddragerne, dens Hale bag ved dem, osv.; med Hensyn til Hjulet på Kongevognen, jfr. § 74).



Tg. 128.

§ 175. Der er dem, der ligeoverfor de store Kulturfremskridt, som Grækerfolkets Historie betegner, finde en Slags Behag i at påstå, at Grækerne egentlig slet intet nyt have frembragt, men kun udviklet videre, hvad de forefandt hos ældre Folk. Forsåvidt dette er andet end en triviell Gjentakelse af det bekendte Ord »Intet nyt

under Solen, kan det have nogen Betydning, at der hos Grækerne kan påpeges Områder, som vitterlig ere absolut nye. Et sådant er Perspektiven; og medens vi desværre ikke kunne danne os nogen bestemt Forestilling om, hvor vidt man bragte denne Sag, bør den dog ikke forbigåes i Tavshed, da fremragende Matematikere vides at have prøvet Kræfter med denne Op-gave. Det Tidspunkt, hvor vi have historisk Beretning om, at man bestræber sig for at skaffe et matematisk Grundlag for Perspektiven, falder først efter Pythagoras' Tid, nemlig på en Tid, da Midtpunktet for græsk Kultur atter er flyttet østerpå, til *Athen* efter Perserkrigene [⊙].

Pythagoræernes noget hemmelighedsfulde og aristokratiske Samfund var på mange Steder blevet sprængt og forjaget, og skjøndt man anså det for en Skam at åbenbare Hemmelighederne for andre og endnu mere at gjøre det for Fortjenestens Skyld, havde dog mangan en landflygtig Pythagoræer set sig nødsaget til at kapitalisere sine Kundskaber, der således fik en større Udbredelse end de ellers havde fået. Brudstykker af dette Samfund træffe vi da også i det ny Kulturens Midtpunkt, og herhen kom mange andre fra forskellige Kanter, deriblandt også fra Jonien.

§ 176. Blandt de Ting, der blomstrede i Athen efter Perserkrigene, er også Skuespildigtningen; og Opførelsen af Aiskylos' Skuespil [⊙] skal have givet Anledning til Perspektivens Udvikling, idet en vis *Agatharkos* skal have bestræbt sig for at dekorere den lidet dybe Scenes Baggrund således, at det skuffede Øjet ved at give dette Indtryk af, at det ikke havde en Mur for sig, men at det så ind i et Landskab, i en Gade e. l.

Denne Omstændighed gav et Par Matematikere *Anaxagoras* og *Demokritos* Anledning til at behandle denne Sag fra et rent matematisk Standpunkt og således lægge Grunden til Perspektivlæren. Den romerske

Arkitekt *Vitruvius Pollio* (på Augusts og Tiberius' Tid), der har skrevet det eneste Værk fra Oldtiden om Arkitektur, som vi endnu besidde, og deri har nævnet denne Perspektivlærens Opkomst giver tillige Antydning af de første simple Sætninger af denne Videnskab. Vi ville betragte et Par af disse, som vil vise, at på den ene Side give nogle få simple matematiske Sætninger værdifulde Bidrag til et rigtigt Perspektiv, medens på den anden Side atter denne praktiske Bestræbelse giver Anledning til, at Mathematiken gjør nye Fremskridt.

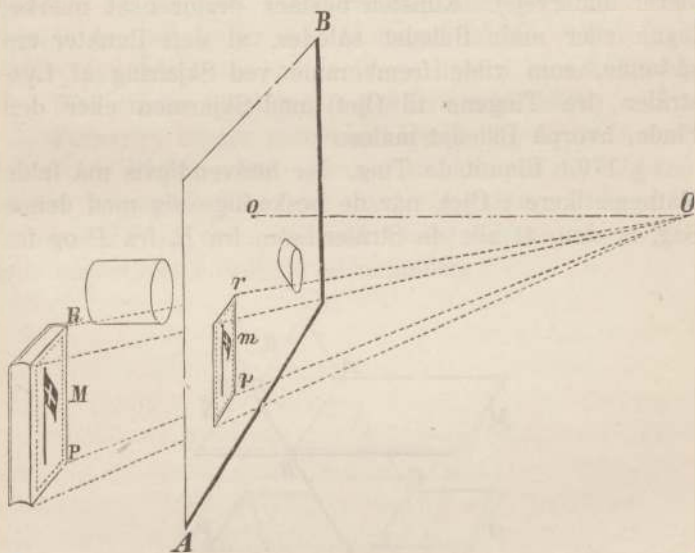
Hvad Anaxagoras angår, da er han født af fornem Familie i Klazomene i Jonien omtrent År 500 f. Kr. eller måske tidligere. Også han synes at have været i Ægypten. Omtrent År 464 kom han til Athen og helligede sig ganske til filosofiske Sysler uden at bryde sig om den Anseelse, han ellers ved sin Formue og Indflydelse kunde have erhvervet sig. Han udviklede en skarpsindig Atomtheori [○] og havde mange fremragende Læringer, deriblandt måske den 30 År yngre Sokrates og i hvert Fald Euripides og Perikles [○]. Da det senere begyndte at gå tilbage for Athen, og mange derfor pønsede på ondt mod Perikles, som de dog ikke let kunde komme tillivs, rettede man sit Angreb på Anaxagoras; og da det altid er let at gjøre en sådan Filosofs Virksomhed mistænkelig i den ukyndige Mængdes Øjne, lykkedes det Perikles' Fjender, at få Anaxagoras dømt for Gudsbespottelse År 434. Med stor Vanskelighed fik Perikles ham dog reddet, men kun således, at han måtte gå i Landflygtighed til Lampsakos, hvor han døde 428 f. Kr.

Demokritos skal have været omtrent 40 År yngre end Anaxagoras, altså være født omtrent 460 f. Kr. i Abdera i Trakien — de græske Molboers Hjem — og kom vist i en ung Alder til Athen. Han blev meget gammel, efter nogle 90 År, efter andre endog 100 År

eller derover; men hans Hovedvirksomhed er rimelig falden mellem År 420 og 400. Han var ikke alene i Ægypten, men berejste også Forasien og Persien, og har efter eget Udsagn været i alle Dele af den da kjendte Verden. Han var både en kundskabsrig Mand og, som det synes, en fremragende Mathematiker; men desværre vide vi kun dårlig Besked om hans Frembringelser, medens Titlerne på hans Bøger vise, at han har skrevet om alt muligt, endogså Krigsvæsen. Demokritos fik Tilnavnet »den smilende« eller »leende«, noget som måske for en Del har havt Sammenhæng med hans Filosofi, som var en ren Materialisme, idet han ikke troede på noget åndigt, hvad Anaxagoras havde gjort, og Demokritos betragtede det som Hovedopgaven at være så glad og så lidet uroet af Frygt og Håb som muligt. Derimod udviklede han Anaxagoras' Atomtheori videre. — Plato (om hvem senere) går over ham i fuldstændig Tavshed, medens han ellers omtaler de fleste af Oldtidens andre Filosofer. Demokritos' Filosofi har uden Tvivl været ilde set af Plato, som endog beskyldes for at have bidraget til at tilintetgjøre hans Skrifter. Som Mathematiker roses Demokritos meget af mathematiske Forfattere, og enkelte af hans Bogtitler lader ane, at der er tabt adskilligt med hans Værker. Hans »Retliniebeskrivelse« er måske et Værk om Perspektiven, som han befattede sig med, og hvortil han måske sigter, når han selv roser sig af, at ingen har overgået ham i Tegnekunst (§ 60).

§ 177. Perspektivlæren er grundet på den Naturlov, at Lyset forplanter sig i en ret Linie (§ 62). Denne Lov have de gamle Grækere kjendt, men indtil Aristoteles' Tid have de rigtignok forsåvidt udtalt den bagvendt, som der tales om *Sestråler*, nemlig Stråler, der *udgå* fra Øjet og beføle Tingene, medens det — som Aristoteles bemærker — ikke kan være således (»thi da måtte man ligeså godt kunne se i Mørke«), men det må være fra

Tingene, de oplyste eller selvlysende, at *Lysstråler* udgaa og træffe Øjet. Endnu Descartes eller Cartesius [○] i det 17de Årh. var af den Mening, at Lyset ikke brugte Tid til sin Forplantning; og under denne Forudsætning vilde man i Virkeligheden ligeså godt kunne tale om Sestråler som om Lysstråler. Men efter at Lysets Hastighed er målt (omtrent 40000 Mil i Sekundet*), vide vi i hvilken Retning Bevægelsen foregaa; dog er dette med Hensyn til Perspektiven ganske ligegyldigt, da man her kun har Brug for den Kjendsgjerning, at Forplantningen er *retlinet*.



Tg. 129.

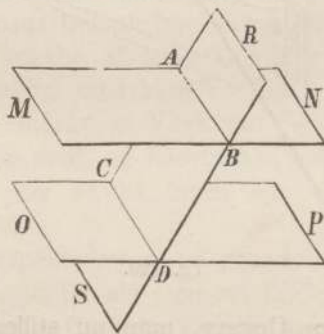
§ 178. Den Opgave, man nu stiller sig ved Perspektivtegning, er følgende: at tegne eller male Billedet

*) Lysets Hastighed blev målt, først af *Ole Rømer* i 1672—76 ved Jupitermånernes Formørkelser, så af *Bradley* i 1727—48 ved Fixstjernernes Aberration, så af *Fizeau* i 1849 mellem Paris og Suresne og endelig af *Foucault* i 1850 i en Stue $[\odot]$.

således, at de Lysstråler, som fra dette ramme Øjet, gjøre samme Indtryk på dette, som om de kom fra de virkelige Gjenstande, Billedet forestiller.

Tænker man sig således et Par Gjenstande bagved en Skjærm AB (Tg. 129), kan man fra disses Punkter P, R tegne retlinede Stråler til Øjet O . Strålerne stikke igjennem Skjærmen og mærke således visse Punkter, hvorfra Lyset vilde gå til Øjet ganske efter de samme Linier, som om de kom fra Gjenstandenes egne Punkter (thi Øjet har blot Fornemmelse af, hvilken Retning hver enkelt Stråle kommer i — ikke, hvor langt den har været undervejs). Kunsten består derfor i at mærke, tegne eller male Billedet således, at dets Punkter ere sådanne, som vilde fremkomme ved Skjæring af Lysstråler (fra Tingene til Øjet) med Skjærmen eller den Flade, hvorpå Billedet males.

§ 179. Blandt de Ting, der nødvendigvis må falde Mathematikere i Øjet, når de beskæftige sig med denne Sag, er den, at alle de Stråler, som fra R , fra P og fra



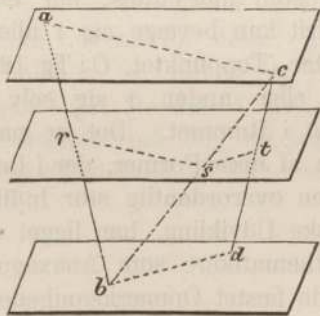
Tg. 130.

hvert Punkt i den rette Linie M træffer Øjet, må danne et Plan, at altså:

en ret Linie og et Punkt bestemme et Plan;

fremdeles, at når en Linie, M , er parallel med Billedplanet AB , må dens Billede m blive parallel med den, eller, at når Bogens Plan (Tg. 129) er parallel med Billedplanet, vil Planet RPO skjære disse to Planer i to parallelle Linier, $PR \neq pr$. Man ledes da til at betragte Sagen i dens Almindelighed og skjønner let, at forsåvidt som man ved *parallelle Planer* forstår sådanne Planer, som aldrig få noget Punkt fælles, hvor langt de end forlænges, *må deres Skjæringslinier med et andet Plan være parallelle*. Således må AB og CD (Tg. 130) være parallelle, hvis Planerne MN og OP ere det. Thi have disse to Planer intet Punkt fælles, kunne to Linier, der ligge hver i sit, heller ikke få noget tilfælles, altså ikke skjære hinanden; og da de begge ligge i Planet RS og dog ikke skjære hinanden, må de være parallelle.

Forøvrigt lægger man snart Mærke til, at i Rummet kunne to Linier være således stillede, at de hverken skjære hinanden eller ere parallelle, såsom i Tg. 129 Linierne PR og Oo . Sådanne Linier siges at være stillede *vindskjævt* i Forhold til hinanden.



Tg. 131.

Ex. 1. Vælg en af de 12 Kanter i en Terning eller en Kasse (Stuen), og find, hvor mange af de andre Kanter der ere parallelle

med den, hvor mange der skjære den, og hvor mange der ere stilledes vindskjævt til den.

Ex. 2. Når en Bjælke af sædvanlig Form saves over med et plant Snit i en hvilkensomhelst Retning, hvilken Form har da Snitfladen.

Ex. 3. To hvilkesomhelst Linier i Rummet ab og cd skjære 3 parallelle Planer i Punkterne a, r, b og c, t, d . Bevis, at Stykkerne på den ene ere proportionale med Stykkerne på den anden. Tegn først en Hjælpelinie fra b til c (Tg. 131), og tegn i Planerne Linier fra Skjæringspunkt til Skjæringspunkt.

Ex. 4. Der er atter givet 3 parallelle Planer, og to Punkter i hvert af de to Planer. Forbindes et af disse Punkter med hvert af de to i det andet Plan ved to rette Linier, og det andet ligeså, ville disse 4 Linier skjære det tredie Plan i 4 Punkter, der forbindes ved rette Linier; hvilken Figur danne disse?

§ 180. De rette Linier, som fra Gjenstandens Punkter (Tg. 129) samles i Øjet O , danne en *Lyskegle*. Opfattelsen af denne Rumform lå måske så meget nærmere for de gamle Grækere, som de mente, at de retlinede Stråler *udgik* fra Øjet O og befølte alle Punkterne af Gjenstanden. — Det fjerde Århundredes Mathematikere kom, som vi skulle se, i høj Grad ind på Undersøgelsen af visse Egenskaber ved Legemer formede på lignende Vis, de såkaldte *Kegler*, idet man ved en Kegel forstår den Del af Rummet som indesluttet, når en Linie (*Frembringeren*), der frit kan bevæge sig i alle Retninger om et af sine Punkter (Toppunktet, O i Tg. 129) glider rundt langs med en eller anden i sig selv tilbageløbende Linie (*Ledelinien*) i Rummet. Det er næppe urimeligt, at Betragtningen af disse Former, der i Løbet af det 4de Årh. f. Kr. fik en overordentlig stor Indflydelse på den hele matematiske Udvikling, har ligget så meget nærmere, fordi Mathematikere som Anaxagoras og Demokritos først havde fæstet Opmærksomheden på Perspektivens Lyskegler.

Foreløbig ville vi lægge Mærke til, at hvis Gjenstanden frembyder en plan Figur parallel med Billedfladen (man kalder i vore Dage en sådan Figur »en

Frontflade»), vil dens Billede blive ligedannet med den. Når denne Omstændighed betragtes fra et rent matematisk Synspunkt, former den sig til følgende Sætning:

når en Kegel skjæres af to parallelle Planer, ville de to Snitflader være ligedannede Figurer, og de ensliggende Linier i disse ville forholde sig som Toppunktets Afstand fra de to skjærende Planer.

Denne vigtige Sætning følger simpelthen deraf, at hver Linie, PR , i den ene Figur er parallel med den tilsvarende, pr , i den anden Figur (§ 179) og derfor forholder sig til den som OR til Or , der atter forholde sig som de på Planerne vinkelrette Linier (§ 179, Ex. 3). — Det samme kan siges, ikke alene om hver Side i Skjæringsfigurerne, men også om deres Diagonaler, og de ere altså (§ 134) ligedannede.

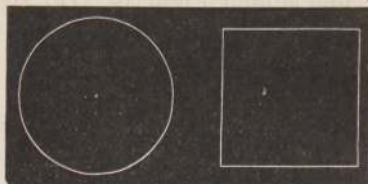
Fordringen om Perspektiv i Billeder ses således at have været en ny udvortes Anledning til videre gående matematiske Undersøgelser. Medens tidligere Oldtidsfolk vel havde udformet meget i Rummet og derunder udviklet et vist Kjendskab til visse »stereometriske« Former, så vise Lysstrålernes retlinede, men usynlige Baner så at sige nye Veje, ad hvilke man kommer mere ind på at *tænke sig* Punkter, Linier og Planer i Rummet, og på at udtænke Lovene for disse, ligesom vi hidtil væsentlig have holdt os til Punkter og Linier i et Plan. Om man end ikke i det 5te Årh. f. Kr. nåede så meget vidt i denne Henseende, må dog de perspektiviske Bestræbelser have givet et Stød til, hvad vi kalde »Stereometrien«.

Cirkelns Kvadratur.

§ 181. Har man en given Cirkel, vil der åbenbart kunne tegnes Kvadrater med større Fladefang og ligeså

med mindre Fladefang, og der måtte da også kunne tegnes et med samme Fladefang, om man ellers var i Stand til at løse denne Opgave, som har fået Navn af »Cirkelns Kvadratur«.

Opgaven er *praktisk talt* ret godt løst allerede i Ahmes' Regnebog, hvor det ses, at de ægyptiske Forråds-kamre ofte have havt en cirkelrund Grund. Ahmes' kvadrerer da Cirklen ved at tage $\frac{8}{9}$ af, hvad vi kalde, Cirkelns Tværmål eller *Diameter* og gjøre dette til Side



Tg. 132.

i et Kvadrat, hvis Fladefang så skulde være lig Cirkelns. Er således Diameteren 9 Alen, bliver $\frac{8}{9}$ heraf netop 8 Alen. Et Kvadrat på 8 Alens Side er 64 Kvadratalen, som altså skulde være lig den givne Cirkels Fladefang.

Ægypterne have sikkert set et Mysterium også i denne Sag. Allevegne, hvor en Cirkel findes i Ahmes' Regnebog, er der inden i den skrevet et ægyptisk Nital, også når den har en helt anden Diameter end 9; ja, „Cirkel“ *hed på ægyptisk det samme som „ni“ („paut“).*

Ex. 1. Beregn, på ægyptisk, Fladefanget af en Cirkel med Diameter på 2 Alen 6 Tommer.

Ex. 2. Et Kreaturs Tøjr er 10 Alen. Hvor stort er Fladefanget af dets Tøjrslag?

§ 182. Grækerne kunde ikke nøjes med en sådan overleveret Regel uden Begrundelse; og de kunde ikke finde nogen Fornufts slutning, der lå til Grund for denne Ægypternes Regel om $\frac{8}{9}$, således som Tilfældet var med deres Regel om den rette Vinkel dannet af 3, 4 og 5. Pythagoræerne have uden Tvivl søgt at finde en bedre Kvadratur. De vidste, at der var Størrelser, som ikke

vare Tal; og det kunde jo være, at de Størrelser, der i retlinet Form skulde fremstille Cirklen, vare sådanne. Men hvilke vare de da? Kunde man ikke tegne sig til dem, ligesom man kunde tegne de »usigelige Størrelser«, de hidtil kjendte? — Der fortælles, at Anaxagoras skal have fordrevet sin Tid i Fængslet (§ 176) med at spekulere på denne Sag*). Dette er den første Lejlighed, hvor denne Opgave historisk træder frem, så Anaxagoras — selv om Pythagoræerne tidligere skulde have tænkt over Sagen — er den, der har bragt den under Diskussion, en Opgave, som i Århundreder beskæftigede de skarp-sindigste Tænkere, og hvorpå endnu i vore Dage unge Mathematikere i Reglen ikke kunne undlade at prøve Kræfter.

Sagen kom under Diskussion; og i det hele taget kom i det femte Århundrede f. Kr. mange af Pythagoræernes Sager under Diskussion. Medens de før holdtes hemmelig af en åndsaristokratisk Klike, bleve de nu spredte ud og dragne ind i de dagligdags Samtaler og i Skuespil. Således vil man ikke kunne miskjende Spekulationerne over de 4 Elementer, når man i Aiskylos' Sørgespil »Sonofferbærerinderne« læser Korets Udbrud, da Orestes og Elektra have besluttet Faderhævn og Moderdrab:

*Jorden fremavler nok
mange Rovdyrs glubske Sværm.
Havets Dyb nærer ved bredden Barm
af Udyr en rædsom,
modbydelig Vrimmel. Solens Strålers Kraft
klækker ud en Mylder af
vingede, krybende, fjendlige Skabninger; også
tænk på de vilde Stormes Magt*.*

Denne Popularisering medførte naturligvis også adskillig løs Tale om disse Ting. Et Tal som 5, hvis

*) Man har andre Exempler på, at Mathematikere kunne trøste sig i Fængsel ved deres eget Tankearbejde. Således grundede den franske Officer og Mathematiker *Poncelet*, der blev fangen under Napoleons Indfald i Rusland, her en betydelig Gren af den højere Geometri.

Kvadrat er 25, der altså også ender på 5, og et Tal som 6, hvis Kvadrat er 36, der ender på 6, kaldte Grækerne kyklike (Kyklos er det græske Navn på Cirklen, altså Cirkeltal eller Kredtal). Der var da nogle, der mente, at Opgaven måtte være løst ved Henviſning til diſſe Cirkeltal, der tillige vare Kvadrattal.

§ 183. I denne Glandſtid, da der mødtes i Athen ſå meget ſtort og herligt på Kunſtens, Filoſofiens, Mathe-
matikens o. fl. Områder, da Kræfterne rørtes i ubunden Frihed, da derfor også de ſtorbrammende og lige-
glade Elementer kom til Orde, er det intet Under, at enkelte dybere Naturer med Bekymring og Alvor arbejdede på at åbne Folks Øjne for Hulheden af det Liv, ſom mange ſåledes førte. En ſådan helſtøbt Mand havde Athen i Århundredets Slutning i *Sokrates* [⊙], men også tidligere havde der lydt en og anden Røſt, ſom — om den end ikke tog Sagen ſå alvorlig og ſå dybt ſom Sokrates — dog åbenbart også har været ſom en »Bremſe, ſendt Athenienſerne af Guden«. Som ſådan må man viſnok betragte *Zeno* fra Elea (eller Hyle i Syditalien ikke at forvekle med Stoikeren Zeno, der levede halvandet Hundrede År senere).

Eleaten Zeno er født omtrent 500 År f. Kr. eller lidt senere. Også han kom til Athen og fik Perikles til Tilhører, men ſynes forøvrigt at have levet meget i Elea, hvor han tilſidſt rolig led Døden under ſtore Pinsler efter et miſlykket Forsøg på at befri Elea for Tyrannen Narkos; ja, han ſkal have afbidt ſin Tunge for ikke at forråde ſine Fæller.

Zeno er bleven kaldt Dialektikens (Taleſkarphedens) Fader. Men når han med ſin ſkarpe Tunge kunde — ſå at ſige — gjøre ſort til hvidt, ſå ſkete dette viſnok ofte for at viſe, hvor lidet man til ſyvende og ſidſt kan stole på det, der kun er bygget på en Række ſammen-
kjædede Sætninger uden at være ſtafdæſtet ved Kjends-
gjerninger. Særlig blev Mathematiken Gjenſtand for

hans Angreb, og uden selv at være Mathematiker, gjorde han sine Angreb med de blandt Mathematikerne vante Talemåder og tildels med mathematisk Indhold, hvad der viser, at Mathematiken havde spredt sig i større Kredse, så at ikke alene Zeno havde nogen Fortrolighed med den, men at også den Folkemængde, overfor hvilken hans Tale lød, havde visse Forudsætninger.

For denne Mængde kan hans Tale have været vækkende, forsåvidt som den satte Tanker i Bevægelse, og kan måske have bragt vordende Mathematikere til at gå mere selvtænkende til Mathematiken, ligesom den kan have bragt de ældre til endnu mere at passe på at føre Beviserne grundigt og ikke at behandle Ting, som man ikke tilbunds kunde gennemtrænge med sin Tanke.

Zeno, der rimeligvis var velkendt både med Pythagoræernes usigelige Størrelser, som man var kommen til i Kraft af logiske Slutninger, og med Anaxagoras' Atomer, kunde spotte Mathematikernes Sikkerhed ved at fremføre sådanne Påstande og Beviser som følgende: »Når et Legeme skal bevæge sig fra et Punkt til et andet, må det først tilbagelægge Halvvejen; men inden dette sker, må det tilbagelægge Halvvejen af Halvvejen, og inden dette sker, Halvvejen deraf igjen; og i det hele taget kan Legemet ikke bevæge sig det mindste Stykke Vej, uden ved først at bevæge sig Halvvejen deraf, og da først Halvvejen af denne igjen, o. s. fr.; og denne Halvering kan ske, ja *må tænkes ske i det uendelige*, så at der skal udføres *uendelig* mange Bevægelser, for at Legemet overhovedet skal kunne bevæge sig. Da det imidlertid er ugjorligt at udføre uendelig mange Bevægelser i en endelig Tid, så er Bevægelse en Umulighed.«

Mathematikerne i det femte Årh. f. Kr. formåede ikke at hæve denne Modsigelse, ligesålidt som, når Zeno fortsatte således:

»Akkilles kan ikke indhente en Skildpadde, når denne fra først af har et Forspring for ham; thi når Akilles

kommer dér, hvor Skildpadden nu er, vil den have fået et nyt Forspring, og når han også får gjennemløbet dette, vil Skildpadden have fået Forspring, og således fremdeles i det uendelige, så at han først om uendelig lang Tid, det vil sige *aldrig*, vil indhente den.

Begge »Sofismer« løbe åbenbart ud på et og det samme, nemlig, at en Ting ikke kan udføre *uendelig* mange Bevægelser i en endelig Tid. Sådanne Betragtninger, hvad enten de nu vare Zenos egne Påfund, eller han blot var Taleorgan for de Vanskeligheder, der mødte Matematikerne, gjorde, at man i denne Periode fastslog, at Rummet ikke er deleligt i det uendelige, men at en Linie i Virkeligheden består af et stort — men ikke uendelig stort — Antal små Dele, der ikke kunne blive mindre, fordi de i Virkeligheden ingen Størrelse have. Zeno siger: «Hvad der ingen Størrelse har, er intet, og når »intet« lægges til, bliver det ikke større, derfor kunne disse Intetheder tilsammen ikke give en »Størrelse.»

Den nærmeste Følge af disse Vanskeligheder blev altså, at Matematikerne gik af Vejen for dem, så man befattede sig ikke i den nærmeste Fremtid med det uendelig store eller det uendelig lidet, men kun med hvad den matematiske Tanke den Gang med Sikkerhed kunde magte. Herved tabte Mathematiken imidlertid ikke. Den vandt ved den større Beherskethed, og, som vi strax skulle se, gennemgik den i det følgende Århundrede en sådan Udvikling, at de senere græske Matematikere (som vi i næste Afsnit skulle se Exempel på) kunde med fuldstændig Sikkerhed behandle Uendelighedsbegrebet.

§ 184. Vi ville imidlertid, for ikke at lade Zenos Sofismer blive stående urørte, forlade Historien et Øjeblik. Når Zeno siger, at der ikke kan udføres uendelig mange Bevægelser i en endelig Tid, så kan hertil svares: ligesom en endelig Linie består af uendelig mange Stykker, således består også Tiden af uendelig mange

Tidsdele. Man kan med samme Ret sige om denne, at der først skal gå den halve Tid, så det halve af den øvrige Tid, så det halve af Resten osv. i det uendelige, så at den endelige Tid ligeså godt består af uendelig mange Smådele, som en endelig Vejlængde; men det, som er uoverkommelig for Tanken, er, så at sige, at lade den bevægede Gjenstand gjøre Holdt på uendelig mange Punkter for at beskrive Bevægelserne og tælle dem op; thi dette tager en vis Tid for hver Optælling, en Tid, der er lige stor, hvor liden end den Del er, der tælles til; og uendelig mange Dele, der hver have en vis Størrelse, give ganske rigtig tilsammen uendeligt.

Med denne Betragtning er der i alt Fald skaffet Mulighed for Forståelse under det Synspunkt, at *både* Rum *og* Tid ere uendelig delelige. Men dernæst kan der henvises til selve de usigelige Størrelser som Bevis på den uendelige Delelighed; thi hvis enhver Linie kun kunde deles i et vist — om end stort — Antal Dele, måtte to Linier ikke kunne være inkommensurable (§ 121); men de måtte da altid have et fælles Mål i disse mindste Smådele. Det er måske i denne Retning, at et af Demokritos' tabte Skrifter (§ 176) er gået, hvis Titel lød: »Om usigelige Størrelser og materielle Legemer«. Det vilde have været interessant at vide, hvad denne Filosof mente om denne Sag. Det havde måske ikke ligget fjernt fra vor Tankegang, når vi i Nutiden hævde *Størrelsens* uendelige Delelighed, men ikke *Materiens*, med lignende Betragtninger som følgende.

I det Irrationale kunne vi virkelig se et Vidnesbyrd om Størrelsens Delelighed i det uendelige. Skulde den irrationale Størrelse udtrykkes ved en Decimalbrøk (men Grækerne kjendte jo ikke disse), måtte dette ske med, bogstavelig talt, uendelig mange Decimaler; thi blev der Ende på disse, kunde Decimalbrøken omskrives til en almindelig Brøk, hvis Nævner da vilde angive et fælles Mål med Enheden.

og $\angle dcd' = 120^\circ$, følgelig må $\angle cdd'$ være 30° . Man indser altså, at cd' er lig cd . Nu tegnes fra e, f, g osv. Linier parallelle med dd' eller bb' . Det indses da let, at de er lig $d'e'$ (§ 100, Ex. 2), og at ef først er lig ex (Forlængelsen af de), og dernæst lig $e'f'$, at fg er lig $f'g'$ osv. i det uendelige; og det vil vedblive i det uendelige; thi man indser let, at hver følgende Lodlinie er netop halv så stor som den foregående ($cd = \frac{1}{2} ac$), og Halveringen vil aldrig høre op. — Først når Halvering og Tillægning sker i det uendelige — vi kunne kun ikke overkomme at besørge det —, nå Lodlinierne i Vinklen ind til b , og samtidig nå Småstykkerne på Linien $c'g'$ til b' . De uendelig mange Lodlinier tilsammen ere altså lig ab' . — Hermed er også bevist (dersom ac kaldes 1), at 1 og $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{8}$ osv. i det uendelige ere lig 2. — Vi skulle strax se, hvorledes *Arkimedes* behandlede det uendelig lidet på en endnu mere tankestreng Måde (§ 194).

§ 185. Sofisterne undlod, som sagt, ikke at lade Mathematikerne føle deres Afmagt ligeoverfor Opgaven at kvadrere Cirklen. Nogle gik så vidt, at de påstod, at det var meningsløst at tale om et Kvadrat, der var lige stort med en Cirkel, thi krumt og ret kunde aldeles ikke sammenlignes. De sagde derfor, at Cirklen overhovedet slet ikke havde noget Kvadratindehold. Man svarede, at Våbensmeden, der laver et cirkelrundt Skjold, dog tager en bestemt Betaling for dette ligesom for et firkantet, så hint vel må have en Størrelse, der kan sammenlignes med dettes; men løse Opgaven, at kvadrere Cirklen kunde man dog ikke, hvorimod det lykkedes en af Mathematikerne med fuld matematisk Strengthed at godtgjøre, at *visse krumlinede Figurer ere lige store med visse retlinede*. Denne Mathematiker var *Hippokrates* fra Kios ved Lilleasiens Vestkyst (ikke at forveksle med hans yngre Samtidige, Oldtidens berømteste Læge Hippokrates fra Kos).

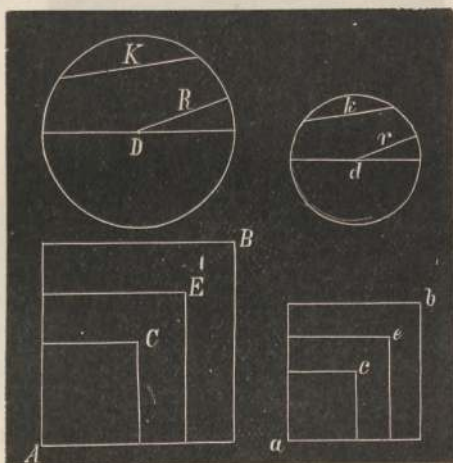
Hippokrates stammer altså også fra Jonien. Han

var måske lidt ældre end Sokrates og kom til Athen midt i det femte Århundrede; men han medbragte næppe Lærdom fra sin Hjemstavn; thi han var Kjøbmand og siges at have været kun lidet begavet i alle andre Retninger end i den, hvori han i Athen skulde gjøre sit Navn u dødeligt. Nogle fortælle, at det også var hans Enfoldighed, der var Skyld i, at Toldbetjente i Byzants narrede ham hans Formue fra, andre, at han blev plyndret af Sørøvere, andre, at det var atheniensiske Kapere i en Krig mellem Athen og Samos; men alle stemme overens i, at han kom til Athen for at klage og skaffe sig sin Ret, men at Retssagen trak så længe ud, at han kom i Lag med de Pythagoræere, som boede i Athen, og at han så blev der for bestandig. Han blev undervist af disse og optaget i deres Samfund; men han holdt sig ikke deres strenge Regler om Hemmelighed efterrettelig; thi både underviste han senere andre i Flæng og han *skrev den første Lærebog i Mathematik*, hvoraf vi desværre kun have Titlen tilbage. Følgen blev da også, at han blev udstødt af Pythagoræernes Samfund.

Medens Fremkomsten af hans Lærebog betegner et vigtigt Fremskridt, dels fordi den gjorde Ende på Hemmelighedskræmmeriet, og dels fordi den var et vigtigt Grundlag for den følgende Tids stærke matematiske Udvikling, er det Arbejde, som ganske særligt har bevaret Hippokrates' Navn, hans Indlæg i Spørgsmålet om Cirkelns Kvadratur, et Arbejde, hvoraf vi endnu have temmelig gode Originallevninger, der synes at være skrevne, før han skrev sin Lærebog; og det er måske tildels ved at føle Ulæmpen af, bestandig at skulle bevise enhver Ting helt fra Grunden af, at han har skjønnnet Ønskeligheden af at have en mere sammenhængende Lærebygning at støtte fremtidige Arbejder og Beviser til.

§ 186. Hippokrates har rimeligvis af Pythagoræerne

lært den Sætning (§ 144), at to *ligedannede Figurers Fladefang* forholde sig ligesom *Fladefangene af Kvadrater* på et Par *ensliggende Sider*. Han har vel også uden videre betragtet Cirkler for ligedannede Figurer, hvor man ved ensliggende Linier efter Behag kan forstå Diametren D og d (Tg. 134), eller den halve Diameter, Radius R og r , eller en ret Linie, der spænder over et lige stort Antal Grader i begge Cirkler, Korden K og k .



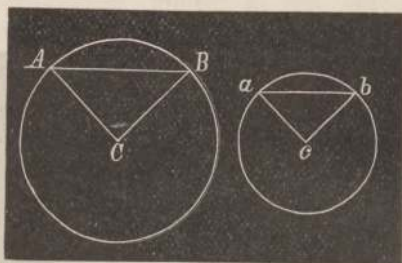
Tg. 134.

Man kan altså sige, at de to Cirklers Fladefang forholde sig som Kvadrater på Diametrene, altså som AB til ab , eller som Kvadrater på Radierne, nemlig AC til ac , et Forhold, der naturligvis er lig hint, eller endelig som Kvadrater på Korderne, nemlig AE til ae , der også må have samme Forhold.

Ifølge Beretningerne har Hippokrates først betragtet, hvad man kalder et *Cirkelsegment* eller *-Afsnit*, nemlig en Figur begrændset af en ret Linie (Korden) og en Cirkelbue, og navnlig sådanne Segmenter [af forskellige

Cirkler, hvis Buer ere lige mange Grader hver af sin Cirkel, Segmenter, som han kaldte ligedannede, og hvorom han beviste, at de forholde sig ligesom Kvadrater på Korderne. Hans Bevis, der ikke nævnes, kan måske have været et lignende som følgende.

Lad Buen AB (Tg. 135) være *ligeså mange Grader som ab* , hvilket blot er et babylonisk Udtryk for, at AB

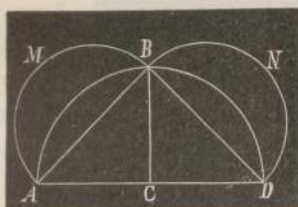


Tg. 135.

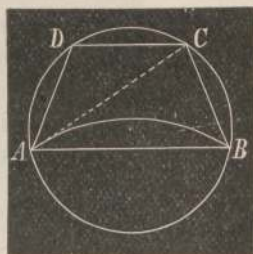
er en ligeså stor Brøkdæl af sin Cirkel som ab af sin. Tegnes Radier fra C og fra c til Kordernes Endepunkter, kaldes den Figur, der er begrændset af to Radier og Buen, en *Cirkelsektor* eller *-Udsnit*. Da de to Cirkler forholde sig som Kvadrater på AB og ab , må også lige store Brøkdæle af Cirklerne, nemlig Sektorerne, forholde sig således. Trekkanterne ACB og acb ere imidlertid ligedannede; thi de have lige store Vinkler (§ 136); og de forholde sig altså også som Kvadrater på AB og ab ; men når hele Sektorerne forholde sig således, og en Del af dem, nemlig Trekkanterne, forholde sig på samme Måde, må også den øvrige Del, det vil sige, de *ligedannede Segmenter forholde sig som Kvadrater på deres Korder*.

§ 187. Dernæst tegner Hyppokrates en ligebenet retvinklet Trekant, tegner en Halvcirkel på Hypotenusen men vendt således, at den går gennem den rette Vinkels Spids, Tg. 136, og en Halvcirkel på hver af Katheterne.

Da nu Fladefanget af Halvcirklen ABD forholder sig til Fladefanget af Halvcirklen AMB som Kvadratet på AD til Kvadratet på AB , og hint Kvadrat er dobbelt så stort som dette, må hin Halvcirkel også være dobbelt så stor, som denne, altså Fjerdedelcirklen ABC være lig Halvcirklen AMB . Trækkes Segmentet AB fra dem begge, får man Trekant ABC lige stor med den halvmåneformige Figur AMB , der er begrænset af en Halvcirkel og en Fjerdedelcirkel. Trekanten kan omdannes til et Kvadrat, og *den nævnte Halvmåne kan altså kvadreres*; men denne Halvmåne har vel at mærke to Cirkelbuer på 180° og 90° .



Tg. 136.



Tg. 137.

§ 188. Hippokrates kvadrerede også andre Halvmåner. (Endnu et Exempel skal nævnes, uden at det dog er nødvendigt til Forståelse af det følgende.

Sæt, at man i en Cirkel (Tg. 137) har et Trapets, hvori 3 Sider ere lige store, medens den fjerde har en sådan Størrelse, at Kvadratet på den vil være lig Kvadraterne tilsammen på de 3 andre (i vort Tegnsprog: sættes $AD = DC = CB = 1$, skal man have $AB = \sqrt{3}$).

Tegnes der nu på AB et Segment ligedannet med Segmentet på AD , vil man åbenbart have, at dets Fladefang er lig de tre Segmenter på AD , DC og CB til-

sammen. Lægges der til disse to lige store Ting den Figur, der er begrændset af de rette Linier $ADCB$ og Buen BA , fåer man, at hele Trapetsen $ADCB$ er lige stort med den Halvmåne, der er begrændset af Buen $ADCB$ og Buen AB . Da Trapetsen kan kvadreres, kan altså også denne Halvmåne kvadreres.

Hypokrates beviste endvidere om den, at dens store Bue er mere end 180° . Tænkes en Linie tegnet fra A til C , fåes en Trekant ADC , der åbenbart er stumpvinklet, hvorfor Kvadratet på AC er mere end dobbelt så stort som Kvadratet på AD (∵ hvis AD er lig 1, er AC større end $\sqrt{2}$). Men så må Vinkel ACB være spids; thi Kvadratet på AC og Kvadratet på CB ere tilsammen mere end 3, medens Kvadratet på AB kun er 3. Er nu Vinkel ACB mindre end en ret, må Buen $ADCB$ være mere end en Halvcirkel.

Hippokrates gav også et Exempel på en Halvmåne, hvis største Bue er mindre end en Halvcirkel, og som kan kvadreres. Vi skulle ikke fortsætte hermed, men derimod stille følgende Opgave, som Hippokrates naturligvis har kunnet løse, uden at det nævnes, hvorledes.

Ex. Hvorledes kan man tegne Halvmånen Tg. 137. Man må først tegne Trapetsen, før man kan tegne Cirkelbuerne.)

§ 189. Men om end således nogle forskellige Halvmåner viste sig at kunne kvadreres, er det dog ikke nået for selve Cirkelens Vedkommende. Hippokrates gjorde endnu et Skridt, som kunde synes at ligge Opgavens Løsning noget nærmere, og vi skulle her så vidt mulig bruge hans egen Fremstilling, da det, at se en sådan Sag udredet i selve den Form, hvori den gamle Mathematiker førte den frem, må have Interesse, i alt Fald for en Gangs Skyld, da vi nu ere så heldige at kunne gjøre det, selv om vi i vore Dage måske kunde udtrykke et og åndet lidt bekvemmere.

»Lad der omkring Centret x være to Cirkler så store,

som Segmenterne på Sexkantsiderne i den indre Cirkel tilsammen. — Altså må Halvmånen og Segmenterne på Sexkanten tilsammen være lig Trekanten. Lægges denne Sexkant til hver af disse Dele, vil Trekanten og Sexkanten tilsammen være lig med Halvmånen og den indre Cirkel tilsammen. — Da man kan kvadrere de to retlinede Figurer tilsammen, kan man kvadrere Cirklen og Halvmånen tilsammen.*

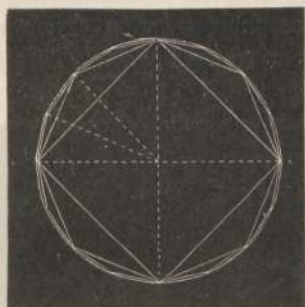
Så vidt Hippokrates! Hvis man nu kunde have kvadreret den nævnte Halvmåne *ηθι*, kunde man have føjet til: når nu denne Halvmåne kvadreres og trækkes fra Trekantens og Sexkantens Kvadrat, fåer man et Kvadrat, hvis Fladefang er lig Cirkelns. Men den nævnte Halvmåne hører ikke til dem, som det lykkedes Hippokrates at kvadrere.

Ex. Tegn en hvilkenksomhelst retvinklet Trekant, og en Halvcirkel på hver af Katheterne samt en på Hypothenusen, men sidstnævnte vendt således, at den gåer igjennem den rette Vinkels Spids. Der opstår da to Halvmåner, hver begrændset af en Kathetes Halvcirkel og et Stykke af Hypothenusens. Bevis, at Fladefanget af disse to Halvmåner tilsammen er lig den retvinklede Trekants Fladefang (jfr. § 144, Ex. 3).

§ 190. En af Hippokrates' Samtidige ved Navn *Antifon*, som nok jævnlig trættedes med Sokrates, og som kaldes Sofist, behandlede Spørgsmålet om Cirkelns Kvadratur på en Måde, som er mere opbyggende end sofistisk nedbrydende. Han sagde således. I Cirklen kan man indskrive et Kvadrat (ved Hjælp af to på hinanden vinkelrette Diametre). Dette er åbenbart mindre end Cirklen. Ved at halvere Vinklen mellem Diagonalerne, kan man indskrive en regulær Ottekant, der også er mindre end Cirklen, men dog større end Kvadratet. Ved atter at halvere Vinklen mellem Ottekantens Diagonaler, kan man indskrive en Sextenkant osv., hvorved man får regelmæssige Figurer, der nærme sig mere og mere til Cirklen. Når man fortsætter sålænge, indtil den

regulære Figur falder sammen med Cirklen, sagde han, kan man kvadrere denne Figur og altså Cirklen.

Denne Løsning er, hvad man *praktisk* talt vilde kalde meget fornuftig; men den er af andre Tænkere, navnlig senere af Aristoteles, bleven skarpt kritiseret, fordi den naturligvis ikke holder Stik for Tanken, med mindre man anser en krum Linie for bestående af

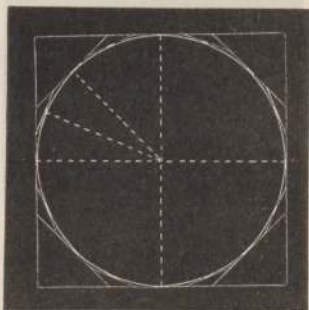


Tg. 139.

mange små rette Linier, hvis Størrelse endog er en sådan, at man vilde kunne overkomme at nå dem ved Deling af Buen; men når man ikke i en Slags Tankefornemhed vil holde sig helt borte fra alt, hvad Tanken ikke tilbunds kan magte, er Antifons Anvisning til at få en *omtrentlig* Kvadrering af Cirklen, meget brugelig, ja i Virkeligheden den, som senere er bleven fulgt, og det kan måske være ret rimeligt, at det heller ikke er andet end en sådan Tilnærmelse, Antifon har påtænkt, en Tilnærmelse, der tilmed kan drives ligeså vidt, som man ønsker det — og herpå beroer denne Methodes største Værdi.

§ 191. En smuk Tilslutning til Antifons Løsning blev givet af en måske lidt yngre, men væsentlig samtidig Pythagoræer ved Navn *Bryson* fra Heraklæa. Bryson omskrev tillige Cirklen med et Kvadrat, der åbenbart er større end Cirklen, så med en regulær Ottekant, som er mindre end

Kvadratet, men dog endnu er større end Cirklen, så med en Sextenkant osv. Men istedenfor nu at sige, at den sidste regulære Mangekant er lig Cirklen, siger han, at Cirkelns Fladefang ligger imellem den største af de indskrevne og den mindste af de omskrevne regulære Mangekanter. Han er så uheldig at sige, at den er disses Middeltal, hvad ikke er ganske rigtigt, og senere Filosofer have naturligvis i denne Anledning hævet sig på Brysons Bekostning; og dog er Brysons Fremgangsmåde netop en meget værdifuld Tilføjelse til Antifons



Tg. 140.

gode Anvisning. — Thi den Ting er i alt Fald rigtig, at Cirkelns Fladefang ligger imellem de nævnte Mangekanter i Størrelse, og samtidig med, at man kan fortsætte at nærme sig fra begge Sider, så længe man vil, er man tillige i ethvert Øjeblik sikker på, at den Fejl, som endnu haves, må være mindre end den Forskjel, der er mellem den omskrevne og den indskrevne Mangekant; og det er en meget vigtig Sag både her og andensteds, hvor der findes en Fejl, at man da kjender Grænsen for denne, tilmed når det så beroer på én selv, om man vil være tilfreds med den opnåede Nøjagtighed.

Cirk lens Måling.

§ 192. Opgaven at kvadrere Cirklen var således i det 5te Årh. f. Kr. bleven grundigt og flersidig behandlet — skjøndt ikke løst —; og Vejen til en praktisk Løsning var bleven anvist; men den blev ikke i nogen nær Fremtid betrådt. Grunden hertil må siges at ligge i Grækernes Fordringer om *absolut* Nøjagtighed. Deres Geometri var et Tankeværk, og hvad der ikke kunde holde fuldstændig Stik for Tanken, havde intet Værd for dette. Denne Fordring, som Mathematikerne vel allerede selv havde stillet, blev tilmed indskjærpet ved Zenos og andre Sofisters Angreb på Mathematiken, og vi skulle se, hvorledes de græske Mathematikere just ved de nævnte Vanskeligheder fik Anledning til at bryde nye Baner, — ja, vi have tildels set det i Hippokrates' Halvmåner.

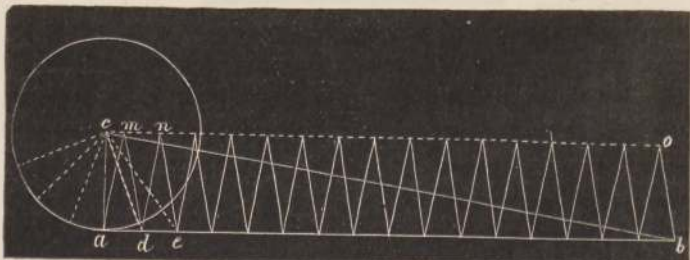
Betragtes derimod den nærværende Opgave fra den virkelige Verdens Standpunkt, så vil man have Grund til at bemærke, at her, hvor Grækerne havde deres Styrke, havde de også en svag Side. Kunde de ikke få Cirklen kvadreret ved de Midler, som stod til deres Rådighed, nemlig ved Tegning, som kunde give alle Størrelsesudtryk, både almindelige Tal og usigelige Størrelser, så faldt de ikke på at søge Opgaven løst blot og bar ved *Tal*, som efter Grækernes Opfattelse måtte være langt ufuldkommere end tegnede eller tænkte Linier, hvis Længder kunde gennemløbe hele Størrelsesbegrebet. At skaffe en Tilnærmelse i Tal har man i det højeste ladet være Landmålernes og Regnernes Sag; og disse synes ikke at have drevet det vidt.

Dertil kom, at de mindre fuldkomne Talsystemer, før Hinduernes, ikke særligt kunne friste til at løse Opgaven ved Hjælp af Tal, fordi de ikke som Hinduernes,

navnlig efter dettes Supplering af Decimaler, give et så umiddelbart Indtryk af Talrækkens Uendelighed i Størhed og i Lidenhed, uagtet denne har været i alt Fald theoretisk anerkjendt af en Græker som Arkimedes (§ 7).

Det er da også ret betegnende, at det er denne Mathematiker, der først 200 År senere værdiger en Talangivelse med Hensyn til Cirklen, som måske Landmålere og Regnere brugte, en mathematisk Begrundelse, idet han har skrevet en lille Bog om »Cirkelns Måling«. For den saglige Sammenhængs Skyld ville vi afvige fra den historiske Orden og forfølge denne Sag videre, navnlig i Arkimedes' Spor.

§ 193. Arkimedes viser først, at Cirkelns *Fladefang* kan findes, når Længden af Cirkelns *Omkreds* eller *Periferi* kjendes. Han beviser nemlig, at *Cirkelns Fladefang* er lige stort med en *retvinklet Trekant*, hvis ene *Kathete* er lig Cirkelns *Omkreds*, og hvis anden *Kathete* er lig Cirkelns *Radius*. Er Cirkelns *Omred*s (Tg. 141) lig ab ,



Tg. 141.

der er tegnet vinkelret på Radius ac , så er Fladefanget af Trekant abc lig Cirkelns.

Mangen én vilde vistnok føle sig tilfredsstillet ved et lignende Bevis herfor som følgende. Tænker man sig Cirklen ved Hjælp af Radier skåren op i en Mængde smalle Sektorer, kunne disse tænkes anbragte langs ad

Linien *ab* således som den takkede Figur viser. Disse Sektorer ville nærme sig des mere til at blive smalle Trekanter, jo flere Radier, der tegnes; og da man har Lov at *tænke sig* uendelig mange, kunne de betragtes som ligebenede Trekanter, hvis Grundlinier tilsammen netop udfylde *ab*. Under samme Forudsætning ere deres Side-linier og Højder lige store, nemlig lige store med Radius. Disse Trekanter kunne nu omdannes, idet *amd* er lig *acd*, *dne* er lig *dce* osv., hvorved alle Trekanternes Top-punkter flyttes til *c*, og Cirklen er således omdannet til Trekant *acb*.

Men om også Arkimedes kunde være ledet ind på Sagen ved en lignende Tankebevægelse, tilfredsstiller et sådant Bevis dog ikke en Græker efter det 5te Arh. f. Kr., da Fordringen om de mathematiske Bevisers Streng-hed var skjærpet.

§ 194. Arkimedes bruger en ejendommelig Bevis-måde, hvorved Vanskelighederne ved Uendelighedsbegrebet overvindes. Han tegner ikke den takkede Figur, men siger omtrent således.

Forudsat, at *ab* er lig Cirkelns Omkreds, da påståer jeg, at Cirkelns Fladefang er lig Trekantens. Hvis ikke, måtte Cirkelns Fladefang enten være større eller mindre end Trekantens; men jeg skal bevise, at den hverken kan være større eller mindre.

Hvis Cirkelns nemlig var *større* end Trekantens, kunde man *indskrive* en regulær Firkant i Cirklen, dernæst en regulær Ottekant, en regulær Sextenkant osv., så at Forskjellen mellem Cirklen og den indeskrevne Mangelkant bliver mindre og mindre. Man bliver ved hermed, til Forskjellen mellem Cirklen og Mangelkanten bliver mindre end Forskjellen mellem Cirklen og Trekanten. Da må Mangelkanten åbenbart være større end Trekanten. — Men Mangelkanten består af Småtrekanter, hvis Grundlinier ere Mangelkantens Sider, der er mindre end Cirkelperiferien, og hine Grundlinier ere altså til-

sammen mindre end Trekanten Grundlinie (*ab*); tilmed ere Højderne i Småtrekanterne mindre end Radius; thi de ere Højder på Grundlinier i ligebenede Trekanter, hvor Siderne ere lig Radius. Højderne i Småtrekanterne ere altså også mindre end Trekantens Højde (*ac*). Følgelig må Mangelkanten være mindre end Trekanten *abc*. At Mangelkanten på en Gang skal være både større og mindre end Trekanten, er en *Selvmodsigelse*, og det er altså utilstedeligt at antage, hvad vi begyndte med, at Cirklen skulde kunne være større end Trekanten.

Dernæst beviser Arkimedes på en ganske tilsvarende Måde, at Cirklen kan heller ikke være *mindre* end Trekanten. Thi hvis den var det, så lad os *omskrive* Mangelkanter om Cirklen, osv. — man prøve selv at føre Beviset i Ord —. Også her endes med en *Selvmodsigelse*.

Når Cirklen nu altså hverken kan være større eller mindre end Trekanten, må den være lig Trekanten.

Denne Bevismåde (på Latin kaldet „*deductio in absurdum*“), der går ud på at gøre Rede for, at enhver anden Antagelse end den, der skal bevises, fører til *Selvmodsigelse*, synes at have sine Rødder i Sofisternes Angreb på Mathematiken i det 5te Årh. f. Kr.

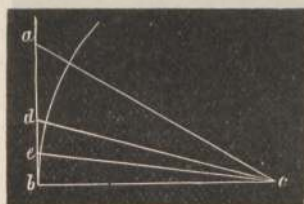
§ 195. Da man nu altså let kan finde Cirkelns Fladefang, når man først kjender dens Omkreds, giver Arkimedes sig til at beregne denne.

Det kan først bemærkes, at en Mængde af Oldtidsfolkene have ment, at Cirkelomkredsen var 3 Gange Diametren. Vi træffe på Beregninger, der vise dette, hos Kineserne, de ældre Hinduere, Hebræerne, ja selv hos Babylonierne, der dog ellers behandlede Cirklen med særlig Dygtighed, og som vidste, at Radius går rundt i 6 Skridt (§ 74, 75). Skulde de virkelig ikke have tænkt på, at Buen på 60° er længere end Radius? Eller har de for Simpelteds Skyld slået sig til Ro dermed? Det sidste er dog det rimeligste.

Til Beregning af Cirkelns Omkreds bruger nu Arkimedes en lignende Fremgangsmaade som den, Antifon og Bryson anviste for Fladefanget, nemlig at beregne Omkredsene af indskrevne Mangekanter med flere og flere Sider, og ligeledes Omkredsene af omskrevne Mangekanter. Cirkelomkredsen må ligge imellem hine og disse.

Vi ville ikke her følge selve Arkimedes' Regninger, der i det græske Talsystem bevæge sig noget tungt i Sammenligning med den Lethed, hvorved vi regne med Hindutallene. Men da vi først senere skulle se, hvorledes man tilnærmelsesvis beregner en Kvadratrods med de sidstnævnte Tal, ville vi her kun se Regningens Gang.

Arkimedes går ud fra Sexkanten — ikke Kvadratet — (dette skal Antifon, efter andres sigende, også have gjort) og begynder med de *omskrevne* Mangekanter.

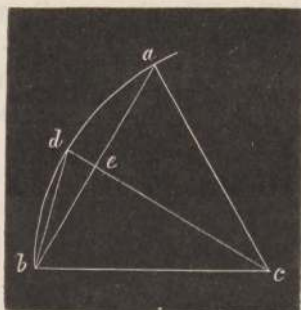


Tg. 142.

Lad Vinkel acb (Tg. 142) være 30° , altså ab den halve Side i en omskreven Sexkant. Da forholder ab sig til ac som 1 til 2 (§ 159) og bc til ac som $\sqrt{3}$ til 2. Halveres nu Vinkel acb ved Linien cd , vil bd være den halve Side af den omskrevne Tolvkant, og ifølge § 146, Ex., må d dele Linien ba i Forholdet bc til ac , der kjendes. Man regner sig altså til bd . I den retvinklede Trekant dbc kjender man nu de to Katheter, og man kan altså beregne Hypotenusen. Dernæst halveres Vinklen dcb , hvorved man får den halve 24-kantside

be, der beregnes på samme Måde osv. — På sådan Måde fortsatte Arkimedes indtil 96-kanten og fandt således, at dens Omkreds er mindre end, og altså *er Cirkelomkredsen endnu mere mindre end $3\frac{1}{2}$ Gange dens Diameter.*

Dernæst *indskriver* Arkimedes Sex-Tolv-... 96-kanter i Cirklen, og beregner tilnærmelsesvis Siderne i disse. Man kan tænke sig dette gjort på følgende Måde, der forøvrigt afviger noget fra Arkimedes'. Lad *ab* være Sexkantsiden, altså lig Radius *cb*. Halveres Vinklen *acb*



Tg. 143.

ved Linien *cd*, er *bd* Tolvkantsiden; og man kan nu altid beregne Siden i en Mangekant med dobbelt så mange Sider som den, hvis Side man kjender, på følgende Måde. Kjender man *ba*, beregner man først *be*, som er det halve deraf. I den retvinklede Trekant *bec* kjender man nu Hypotenusen *bc* og Katheten *be* og kan altså efter den pythagoræiske Læresætning beregne den anden Kathete *ec*. Trækkes denne fra Radius *cd*, fåes *ed*. Nu kjender man i den retvinklede Trekant *bed* Katheterne *be* og *ed* og kan altså beregne Hypotenusen *bd*. På samme Måde fortsættes. — Arkimedes fandt da, at den indskrevne 96-kants Omkreds er større end, og at altså

endnu mere *Cirkelomkredsen er større end $3\frac{1}{4}$ Gange dens Diameter.*

Arkimedes fandt således to Grændser, mellem hvilke Cirkelomkredsen må ligge, nemlig $3\frac{1}{4}$ og $3\frac{1}{4}$ Gange Diametren. Spillerummet mellem disse Grændser findes ved at trække $3\frac{1}{4}$ fra $3\frac{1}{4}$, hvilket er $\frac{1}{497}$ af Diametren.

§ 196. Udtrykke vi Arkimedes' Grændser ved Decimalbrøker med 4 Decimaler, bliver den højere Grændse 3,1429, den lavere 3,1408 Gange Diametren.

Beregnes Cirkelns Fladefang nu efter Arkimedes' Anvisning som en Trekant, der har Radius til Højde og Periferien til Grundlinie, vil dette Fladefang være det samme som et Rektangels med samme Højde og med en Grundlinie mellem 3,1429 og 3,1408 Gange Radius. Med andre Ord:

Cirkelns Fladefang er imellem 3,1429 og 3,1408 Gange et Kvadrat på Radius.

§ 197. Det kunde nu have Interesse at vide, hvorvidt Ægypternes Beregning af Cirkelns Fladefang stemmer hermed. De regnede (jfr. § 181), at dette var ligt med et Kvadrat på $\frac{8}{9}$ af Diametren. Et sådant Kvadrat er åbenbart $\frac{64}{81}$ af et Kvadrat på Diametren eller, udtrykt i Decimalbrøk, 0,7901 af et Kvadrat på Diametren, hvilket sidste er lig 4 Kvadrater på Radius. Cirkelns Fladefang skulde herefter være 3,1604 Gange et Kvadrat på Radius. — Tallet ligger noget udenfor Arkimedes' Grændser og er altså ikke ganske rigtig, om end praktisk brugeligt.

Hos senere Forfattere snævre Grændserne sig tættere sammen. Klaudius Ptolemæos (død 140 e. Kr. i Alexandria) angiver med den Slags Brøker, der på hans Tid vare indførte fra Babylonierne, Cirkelomkredsen til $3^{\circ} 8' 30''$ (o: $3\frac{8}{60} 3\frac{30}{6000}$ eller $3\frac{17}{20}$) Gange Diametren. I Decimaler vilde dette blive skrevet 3,1416666... Som man ser, ligger denne Værdi imellem Arkimedes' Grændser; og medens de to første Decimaler i disse ere over-

ensstemmende og altså rigtige, kan det bemærkes, at de 4 første Decimaler i den Værdi, Ptolemæos brugte, er rigtig. Senere fik man bekvemmere Tal og bekvemmere Måder at udregne denne Størrelse, som man altid plejer at betegne med det græske Bogstav π (udtales »Pi«), en Størrelse, der er *et rent Tal*, hvad enten man siger, at det udtrykker, *hvor mange Gange* Omkredsen er større end Diametren, eller man kalder dette Tal *Forholdet* imellem Omkredsen og Diametren.

I vore Dage kan man udtrykke π med 200 rigtige Decimaler, og at dette må være til Overflod i alle Anliggender, der vedrøre den virkelige Verden, kan man slutte deraf, at hvis man blot benytter de første 30 Decimaler til Beregning af en Cirkels Omkreds, hvis Radius er 10 000 Lysår (Lyset går 40 000 Mil i Sekundet), vil Regningen ikke blive $\frac{1}{4000000}$ af en dansk Linie fejl. — I § 19 blev π med 8 Decimaler lejlighedsvis angivet;

$$\pi = 3,14159265.$$

Meget ofte har man imidlertid tilstrækkelig Nøjagtighed i $3\frac{1}{7}$ eller $\frac{22}{7}$. En anden Tilnærmelse er $\frac{355}{113}$, som er let at huske, nemlig 113355, »brækket midt over og gjort til Brøk«, og som er så nøjagtig, at den ikke er $\frac{3}{10000000}$ fejl.

Man kan i vore Dage føre ligefrem Bevis for, at π ikke lader sig udtrykke ved hele Tal og Brøker, så at den er hvad Pythagoras kaldte en usigelig Størrelse (irrational), § 122; men man er tillige for få År siden nået til at levere et fyldestgørende Bevis for, at den ikke heller lader sig udtrykke ved den Klasse usigelige Størrelser, som Pythagoras traf på, nemlig sådanne som lader sig tegne som Side i en retvinklet Trekant eller som en Mellemproportional mellem to andre kjendte Størrelser. Kvadratet på π er nemlig selv en usigelig Størrelse, og Kvadratet på denne Størrelse er igjen usigelig osv. i det uendelige, hvilket ikke er Tilfældet med Pythagoras' usigelige Størrelser. Derfor er det, at

det vil være forgjæves at forsøge at tegne denne Størrelse ved Hjælp af de Midler, hvormed man ikke kan tegne andre usigelige Størrelser end de nævnte pythagoræiske, som svare til dem, vi i vore Dage kalde »irrationale ved Kvadratrødder alene«.

§ 198. Til »Cirkelns Måling« eller i det Hele til Udførelse af Cirkelregninger har man i Hukommelsen at fastholde:

Omkredsen er π Gange Diametren;

Fladefanget er π Gange Kvadratet på Radius:

samt at huske en eller flere af de tilnærmede Værdier af π , såsom

$$\pi = 3$$

$$\pi = 2\frac{2}{7}$$

$$\pi = 3\frac{55}{113}$$

$$\pi = 3,1416$$

$$\pi = 3,14159265.$$

Ex. 1. Hvor stor er Omkreds og Fladefang af en Cirkel med Radius lig 35? ($\pi = \frac{22}{7}$).

Ex. 2. En 176 Alen lang Snor lægges på Jorden, så at den danner en Cirkel; hvor stor bliver Radius og Fladefanget? ($\pi = \frac{22}{7}$).

Ex. 3. Hvor stor er Forholdet mellem Fladefangene af en Cirkel og det deri indskrevne Kvadrat?

Ex. 4. På hver af Siderne i en Trekant på 3, 4 og 5 Fod tegnes en Halvcirkel, den på 5 Fods Side gående igjennem den modstående Vinkelspids; hvor stort er Fladefanget af hver Halvcirkel, hvor store de to Halvmåner tilsammen, og hvor store de to Segmenter tilsammen? $\pi = 3,1416$.

Ex. 5. Når Jorden er 20000000 Mil fra Solen og går rundt om den i en Cirkel i $365\frac{1}{4}$ Dag; hvor langt går den så i hvert Sekund?

Plato.

§ 199. Den peloponnesiske Krig [⊙] i sidste Trediedel af det femte Årh. f. Kr. afsluttede Athens egentlige Glandsperiode; og i Året 399 lod man den bittre Sindsstemning, som fulgte i Ulykkens Spor, gå ud over Athens betydeligste Mand, *Sokrates* [⊙], der måtte tømme Giftbægeret. Sokrates var ikke Mathematiker. Ganske vist havde han i sine yngre År lagt sig efter flere almenmenneskelige Færdigheder, såsom Musik og Gymnastik, og han skal også have hørt Anaxagoras. Men med Årene lagde han hele Vægten på alt, hvad der kan hjælpe til, at man kan »erkjende sig selv« fremfor at erkjende de udvortes Ting, hvortil Mathematiken efter hans Mening alene tjente. Derfor sagde han, at man »kun skulde drive Mathematik så vidt, som behøvedes til Landmåling af Jord, man købte eller solgte«.

Ikke des mindre bør Sokrates nævnes i Mathematikens Udviklingshistorie, fordi han utvivlsom har udøvet en vis Indflydelse på denne ligesom på så meget andet, som han ikke ligefrem beskjæftigede sig med. Medens Zeno ikke synes at have gjort andet Indlæg i Sagen en Satirens, der dog også kan have sin Betydning, har Sokrates ved at anvise, hvorledes en grundig Undersøgelse på andre Områder bør gjøres, vistnok også i nogle Henseender, som vi skulle se, kunnet virke befrugtende på Datidens Mathematikere. Sokrates havde en ganske egen Evne til at undersøge en Sag ved at »analysere« den, d: opløse den i de Enkeltheder, hvoraf den består eller udpege de Vilkår, hvorpå den beroer; dernæst behandler man disse Enkeltheder eller Vilkår på lignende Måde osv., til man kommer til sådanne Enkeltheder, hvorom der ikke kan være Tvivl eller sådanne Vilkår, som sikkert ere tilstede eller sikkert ikke

ere tilstede. Men efter at have foretaget en sådan *Analyse*, prøvede han så igjen Tankebevægelsen den modsatte Vej, idet han gik ud fra sikre Enkeltheder eller kjendte Vilkår for at prøve, om han så med Nødvendighed måtte nå til den Sag, som skulde klares, en Tankebevægelse, som kaldes *Synthese* (α: Sammensætning), og som ofte er nødvendig, da det ikke er sikkert, at de Enkeltheder, hvoraf en Sag beståer, altid netop medføre denne Sags Existents eller Tilblivelse. — Medens Sokrates gjerne førte, hvad man må kalde, en meget *jævn* Tale — han sagde også i sin Forsvarstale, at han slet ikke var veltalende —, så var den dog bygget med en Soliditet og gennemtrængt af en Tankeklarhed, som aldrig forfejlede at overbevise. Ja, han kunde ved nogle få simple Spørgsmål bringe en ellers selvsikker Person til at kjøre fast i sine egne Talemåder. Dette skyldtes naturligvis den Sandhedssøgen, som ledede Sokrates' Tale og Samtaler; men ud af denne Sandhedssøgen udsprang den Form og Måde, hvorpå han talte, hvorpå han analyserede og syntetiserede; og denne Form viste sig at være en Mønsterform, som kunde bruges på mangfoldige andre Områder, og som også i den nærmeste Tid efter Sokrates satte Spor i den mathematiske Udvikling.

§ 200. Efter den peloponnesiske Krig gik Hege-
moniet (Førerskabet) i Grækenland over til Sparta, der på Kamppladsen ikke svigtede det gamle Ry, men med Heltemod kæmpede i Lilleasien mod Grækernes fælles Fjender, Perserne. Derimod syntes Sparta mindre skikket til at blive et åndeligt Midtpunkt. Athen vedblev i denne Retning at være overlegen, skjøndt ikke i den Grad, som det havde været i den periklæiske Blomstringstid. Strømmen bar nu ikke mere, så at sige, med Naturnødvendighed fra alle Kanter ind mod Athen; og vi træffe da også i den følgende Tid meget fremragende græske Matematikere på helt andre Steder. Om disse

vil der navnlig blive meddelt i det følgende Afsnit; men også Athen fik sig en Efterblomstring, der iøvrigt tillige støttede sig til den politiske Omstændighed, at det lykkedes Athen under Spartas Uenighed med en Del græske Stater, der havde sluttet Forbund mod Sparta, påny at vinde Førerskabet over Grækerne tilsøs, indtil indre græske Stridigheder tilsidst gav Filip af Makedonien [⊙] Lejlighed til at gjøre Ende på Grækenlands Selvstændighed.

§ 201. Den mathematiske og filosofiske Efterblomstring i Athen samler sig om Sokrates' Discipel *Plato*. Han blev født i Athen 429 f. Kr., i den trange Tid, to År efter at Krigen med Sparta var begyndt, og just en Pest rasede, for hvilken også Perikles blev et Offer. Plato døde på sin 81-årige Fødselsdag 348, to År før Kong Filip blandede sig i Grækenlands Sager. Hans Ungdom falder altså i Athens mørke Dage, hans Virksomhed netop under dets delvise Gjenoprejsning.

Plato var af høj Byrd. Hans Fader stammede fra Athens sidste selvforægtende Konge *Kodros* [⊙], hans Moder fra *Solon* [⊙]. Han hørte Sokrates og sluttede sig så inderligt til ham, som det fremgaa af Platos mange Skrifter om Sokrates og hans Virksomhed [⊙], og han omgikkes iøvrigt med Athens mest fremragende Mænd. Efter Sokrates' Død rejste Plato i mange År bort fra Athen og fuldendte således sin videnskabelige Uddannelse. Han opholdt sig hos *Theodoros* i Kyrene (på Afrikas Nordkyst), en Pythagoræer og bekendt Mathematiker, om hvis Fortjenester vi desværre ikke vide andet end, at han skal have behandlet irrationale Tal. Plato opholdt sig dernæst i længere Tid i Helio-*polis* i Ægypten og havde Omgang med Præsterne (§ 81). Så levede han fortroligt med Pythagoræeren *Arkytas* i Tarent, om hvem senere, og som skal have skaffet Plato nogle pythagoræiske Skrifter, og med *Timæos* i Lokri, som har givet Navn til et af Platos Skrifter. Derfra

drog han til Sicilien (han nævner selv sin Alder på denne Tid til 40 År, så at denne Del af Rejsen har været godt en halv Snes År). Her mødte ham den mindre hyggelige Tildragelse, at Tyrannen Dionysios af Syrakus stødtes over Platos frie Tale, tog ham til Fange og udleverede ham som Athenienser til den spartanske Gesandt, der lod ham sælge som Slave til Ægina. En Mand fra Kyrene løskøbte ham imidlertid, og nu vendte han hjem til Athen.

§ 202. Ved Byens nordvestlige Udkant var der af *Kimón* i sin Tid anlagt skyggefulde Spadseregange i en Lystskov ved Navn *Akadæmaia*. Her begyndte Plato at undervise en Kreds af Disciple. Senere trak man sig ind i en Have, han ejede i Nærheden. Skolen beholdt imidlertid Navn efter hin Lystskov; og den Omstændighed, at der senere er voxet »Akademier« frem i Tusindtal Jorden over, er et Vidnesbyrd om, at Platos Skole betegner et Vendepunkt i Oplysningsarbejdets Historie.

Medens Akademiet — vel som Arv både efter Sokrates og efter Pythagoræerne — var præget af en dyb sædelig Alvor, var der dog en betydelig Forskjel på Pythagoras' og Platos Forhold til deres Lærlinger. Platos Karakter er mere åben og tilgængelig. Han holder sig ikke fornemt tilbage fra de mindre vidtkomne. Han påvirker dem ikke blot ved sine Taler, men ved Samtaler, Samliv og Fællesmåltider. Der er noget mere atheniensisk over hele Forholdet. — Derfor danner Akademiet heller ikke nogen Klike, der glemmer på sine Hemmeligheder. Der er åben Adgang for andre selvstændige Filosofer; og kan end ikke Athen længere kalde dem hid fra alle Kanter for at tage varigt Ophold, får Akademiet dog Besøg ikke alene af yngre studerende, men af bedagede Mænd med store Navne fra Syditalien, Marmarahavets o. fl. fjærne Kyster. Og de fremmede blive gjæstfrit modtagne. Man meddeler hin-

anden Udbyttet af sin Forskning. Athen er endnu, om end på anden Vis, Kulturens Midtpunkt, og dog er der enkelte af Gjæsterne, der i visse Henseender ere nåede videre end Værterne; men man ser ikke skinsygt på hinanden. Venskabet styrkes ved Besøget, man glæder sig ved de Fremskridt, hvorom man hører, og man udtaler sig anerkjendende om hinandens Dygtighed ved andre senere Lejligheder. Der findes bestemte Exempler herpå.

§ 203. Plato tilsigtede en harmonisk menneskelig Udvikling. Han nærede ligesom Pythagoras den Opfattelse, at Mathematiken og den exacte Tænkning er et nødvendigt Middel hertil. Besøgerne på hans Skole mødtes først af de Ord: »Ingen i Geometrien uindviet gå under mit Tag«, noget som synes at være holdt strengt i Hævd af hans Eftermænd, af hvilke én sagde til en ung Mand, som meldte sig, men som ikke kjendte noget til Geometrien: »Kjære! bliv borte: du har ikke Filosofiens Værktøj«.

Plato troede at have iagttaget, at hvem der fra Hjemmet af var Mathematiker, var også lærenem i andre Henseender. Og når f. Ex. nogen priste Astronomien for dens praktiske Nytte, spottede han deres Spidsborgerlighed og sagde: »Nej, det er Sagen, og ikke mindre, om end svær at fatte, at ved hver af disse Kundskaber renses og opretholdes en Sands i Sjælen, der under anden Beskjæftigelse vilde gå tabt og udslukkes, medens dog dens Opretholdelse er mere magtpåliggende end tusinde Øjnes; thi ved den alene kan man beskue Sandheden«; og i endnu højere Grad priste han i så Henseende Mathematiken, som drager Ånden bort fra det sandselige og gjør den skikket til at fatte det Ideale. Derfor er »Erkjendelsen af den blandt Stjernerne rådende Fornuft samt Mathematiken« nødvendige Betingelser for enhver, der vil regnes blandt de Dannede.

Mathematiken blev således af Plato stemplet som

den første Betingelse for al videre Udvikling, og dette så grundigt, at ikke blot næsten alle filosofiske Skoler i Datiden krævede matematiske Kundskaber hos sine Tilhængere, men at Mathematiken fra Platos Tid nu i mere end 2000 År i større eller mindre Udstrækning har været brugt ved enhver videregående Undervisning, så at den vist endog har været den eneste Oplysningsgren, som ikke ved nogen Lejlighed har været helt forskudt — end ikke på den af andre Ting så stærkt optagne Humanismes Tid.

§ 204. Så vidt har altså alle kunnet følge Plato. Derimod har der rimeligvis allerede blandt de besøgende Filosofer været dem, der ikke helt kunde samstemme i den Stilling, som han gav Mathematiken i sit filosofiske System.

Geometrien giver, mente han, når den bliver drevet for dens egen Skyld, og ikke for den praktiske Nytte, »Erkjendelsen af det evigt værende«. Midt imellem de evige Ideer (Guddomstanker), hvis Tilværelse aldrig rokkes, og Materien, som er den uvirkelige, og som kun ved Ideernes Indgriben opnåer en Tilblivelse med skiftende Tilværelse, står Mathematiken, dog nærmest ved det Ideale. Derfor have Harmonik (Læren om Tonernes Forhold), Geometri og Astronomi, rettelig drevne, til Formål at udgrunde de evige Guddomstanker efter disses Åbenbarelse i den udvortes Verden, og ere således den bedste Forskole for Menneskene til Erkjendelse af de rene Ideer.

Endnu vanskeligere er det at følge Plato, når han indfører matematiske Bestemmelser på forskellige menneskelige Forhold i sin »Idealstat«, i Ægteskabet m. m.

§ 205. Vi have allerede berørt to af Platos væsentlige Fortjenester af Mathematiken: at han hævdede den som et nødvendigt Dannelsesfag, og at hans Akademi var et Sted, hvor de uensartede matematiske Kræfter

kunde mødes. Den sidste Omstændighed bør sikkert ikke betragtes som en udvortes Tilfældighed, der ikke egentlig skyldes Plato. Der gives Naturer, som ikke give Plads for andet end for egne Frembringelser, men der er også Naturer, som Platos, som, selv om der måske ikke knytter sig nogen udpræget Opfindelse eller Opdagelse til deres eget Navn, dog formå at fremkalde og samle et Åndsliv som bærer de bedste Frugter. Sådanne Mænd komme da mere til at stemple den *Retning*, der bliver rådende, end til at udføre selve dette eller hint; og det er i denne Henseende, at Platos Arvtagning efter Sokrates kommer til at gjøre sig gjældende. Vi skulle se nogle Exempler.

Mathematiken måtte *fra Grunden af* bygges op med den samme Soliditet, som den senere hen udfoldede.

A. Først bør man fremsætte *Redegjørelser* (Definitioner) for sine Udtryk, det vil sige, nøjagtige Udtalelser om, hvad der menes med enhver Ting, såsom:

- en Flade er Grænsen for et Legeme;
- en Linie er Grænsen for en Flade;
- et Punkt er Grænsen for en Linie.

B. Dernæst må man opstille en Del Selvfølger (Axiomer), hvorom alle ere enige, såsom:

- når to lige store Ting lægges til to lige store Ting, udkommer der lige store Ting.

C. Endelig opstiller man de egentlige Sætninger, der kunne bestå i en eller anden *Påstand* (Theorem), og hvis Rigtighed bevises, idet hvert eneste Led i Beviset udelukkende må henholde sig til de tidligere nævnte Redegjørelser, Selvfølger eller Sætninger. Eller også kan Sætningen være en *Opgave* (Problem), der løses, og hvis Løsnings Rigtighed bevises på samme Måde.

Denne ideale Fremstillingsmåde af Mathematiken blev fulgt af vistnok alle Forfattere i den følgende Tid. — Når den ikke altid bliver fulgt i Nutiden, når navnlig

Selvfølgerne gjerne blive udeladte, så er det vel mest i Betragtning af, at Selvfølger ikke behøve at nævnes. Og dog er det et Spørgsmål, om man ikke gjorde rettest i at følge Platonikernes Exempel; thi jevnlig kan man træffe på den Opfattelse, at Mathematiken kan — og at det er den eneste Videnskab, som kan — bygges op på fuldstændig bar Bund og uden noget som helst Materiale fra den udvortes Verden, blot ved, hvad Tanken kan øse af sig selv. — Vi have i denne Bog jevnlig set Exempler på, at, i alt Fald i Mathematikens Udviklingshistorie, have udvortes Ting gjerne fra først af været Udgangspunkter for den matematiske Tænkning, der da først har bestået i en Abstraktion. Men selve dette, at der blev abstraheret, forudsætter, at der var noget, *hvorfra* der kunde abstraheres. — Også i vore Dage, efterat Abstraktionen først en Gang er sket, er det absolut nødvendigt, når man vil meddele Mathematik, at begynde med visse Omstændigheder fra den udvortes Verden. Hvis man prøver at nævne Tal, Størrelser e. l., som om disse Begreber kunde spindes ud af selve Tanken, så vil det ved grundigere Undersøgelse vise sig, at den Mennesketanke, som arbejder, er ikke så tom, at den jo fører visse Forestillinger fra den udvortes Verden med sig, uden hvilke det slet ikke var muligt at få begyndt.

Det minder om Sokrates, som sagde, at hans største Viden bestod deri, at han intet vidste, når nu Plato heller ikke begynder matematiske Sætningers og Opgavers Løsning, som om der ingen Forudsætninger behøves, men først med Ord hentede fra den udvortes Verden siger, hvad han mener med de matematiske Ord, og dernæst udtaler Selvfølger, hvis Uomtvistelighed alle Mennesker i Kraft af deres Oplevelser ere enige om.

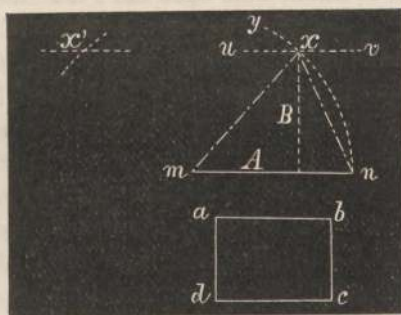
Når vi i nærværende Bog ikke formelt have brugt denne Fremgangsmåde, som dog anbefales, så er det, fordi vi her ikke have villet give noget andet System

end det, der afspejler sig i Mathematikens Udviklingshistorie — og Tilknytningspunkterne til den udvortes Verden ere da også på sine Steder her særlig stærkt fremhævede. Men iøvrigt har en solid Begyndelse med Redegjørelser og Selvfølger fra Platos Tid været betegnende for mathematisk Grundighed og herfra kunnet afgive et godt Exempel for andre Fag, der skulle behandles i Sammenhæng; og dette gjælder ikke alene den begyndende elementære Mathematik, men også Behandlingen af mere vidtgående Æmner, som f. Ex. et mathematisk Værk af Arkimedes om Legemers Ligevægt, der ligeledes begynder med »Definitioner og Axiomer«, for at det kan stå klart, hvad man bygger på.

§ 206. Den for Sokrates ejendommelige i § 199 nævnte undersøgende Måde, bestående af Analyse og Synthese, er ikke ubetinget ny i Mathematiken. Pythagoras, der opløste Figurer i Småtrekanter, og som dernæst, efter at have studeret Enkelthederne, satte dem sammen igjen på sådan Måde, at han med mathematisk Strenghed fik tegnet den vedrørende Figur (f. Ex. den regulære Femkant), har altså både analyseret og syntetiseret, men det er først hos Plato, at disse Undersøgelsesmåder karakteriseres og opstilles som sådanne; og det er i hvert Fald for Menneskeslægten et Skridt videre, når man ikke mere følger blot og bar sit Snille, men ligeoverfor en eller anden Opgave bruger en bestemtere Form og Måde for Sagens Undersøgelse og Udførelse i Almindelighed. — Det er nok muligt, at vi her i Bogen ved Beskrivelsen af visse af Pythagoras' Frembringelser (såsom §§ 157—158) have — eftersom han ikke har efterladt os de Former, hvori han selv fandt dem — fremstillet dem noget mere efter den Måde, som i hvert Fald først under Plato, udtales med fuld Bevidsthed. Men man vil let kunne finde Exempler på, at det er værdifuldt at kjende *Methoden som Methode*.

Lad os som Exempel løse følgende Opgave: Der er

givet et Fladefang, f. Ex. ved et Rektangel $abcd$, Tg. 144, og en ret Linie A . Man skal tegne en ligebenet Trekant, hvis Fladefang er lig Rektanglet, og hvis lige store Sider ere lig A . Man kan da først foretage en Analyse, idet man tænker sig Opgaven løst, så at nemlig mnx er den ligebenede Trekant, der er lige stor med Rektanglet $abcd$, og hvis Sider mn og mx ere lig A . Da nu Fladefangene ere lige store, må et Rektangel, dannet af $\frac{1}{2}A$ og Højden på A , nemlig B , være lig Rektanglet $abcd$; og man må altså kunne finde B (§ 148). Man véd da



Tg. 144.

om Punktet x , at det må ligge så langt fra Linien mn som en Linie B , der kan findes, og tillige, at det må ligge så langt fra Punktet m som A . — Dette var Analysen. Nu falder Synthesen let. — Ved Hjælp af § 148 findes Linien B således, at Rektanglet af B og $\frac{1}{2}A$ er lig det givne Rektangel $abcd$. I et eller andet Punkt af Linien A eller mn oprejses en Linie vinkelret og gjøres lig B . Gjennem dens Endepunkt tegnes en Linie uv parallel med mn , og hvis Punkter altså ere i Afstanden B fra mn (§ 100). Med m som Centrum og A som Radius tegnes Buen ny . Hvor denne skjærer uv er Punktet x , således at mnx er den søgte Trekant; thi den har Grundlinien A og Højden B , og dens Fladefang er altså lig et Rektangel af $\frac{1}{2}A$ og B , hvilket igjen er lig

det givne $abcd$; og Siden mx er lig Siden mn eller den givne Linie A , så at Trekanten er ligebeinet.

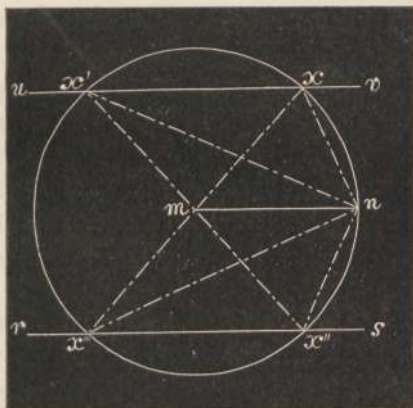
Når man nu således først er kommen ind på Betragtning af *Måden*, som kan føre til en Løsning, der er rigtig, kommer man let til at spørge, om der muligvis kunde være andre Løsninger, der også vare rigtige; og man skjønner her, at hvis uv forlænges til venstre og Buen xy ligeså, ville de skjære hinanden i et andet Punkt x' . Man får derved en helt anden Trekant $mx'n$ (med en stump Vinkel ved m , medens den første havde en spids), en Trekant, som også har Fladefanget B Gange $\frac{1}{2} A$ lig $abcd$ og Siderne mx' og mn lig A . Efter at have gjort en sådan Bemærkning falder det endnu mere naturligt at spørge: »Gives der så ikke flere Løsninger?»

Spørgsmålet kan da fra den gjorte Analyses Side stilles således: gives der noget tredje Punkt x'' således beskaffent, at dets Afstand fra mn er B og dets Afstand fra m er A ? — Når vi da i Synthesen tegnede uv og sagde: denne Linies Punkter ligge alle i Afstanden B fra mn , så manglede der endnu en Udtalelse om, om der ikke også udenfor uv og dens Forlængelse kunde være Punkter med Afstanden B fra mn . Hvis det var sikkert, at der ikke fandtes sådanne, og det ligeledes var sikkert, at der ikke udenfor Cirkelbuen ny og dens Forlængelse fandtes Punkter, der havde Afstanden A fra Punktet m , så vidste man, at der ikke kunde gives noget andet Punkt x , end sådanne, som, ligge både i Cirkelbuen og i Linien uv , det vil sige disses Skjæringspunkter.

Den grundigere Undersøgelse rejser altså nye Spørgsmål, idet der nu ikke blot spørges efter *nogle* Punkter, men *alle de Punkter, der have en eller anden Egenskab* (f. Ex. den, at være i Afstanden B fra mn). Samlingen af alle sådanne kaldes *det geometriske Sted for Punkter af en vis Egenskab*, et Begreb som også skriver sig fra Platons Tid; og der er måske få Lejligheder, hvor det er så iøjnefaldende som her, at ikke Indhold alene, men

også Form har Værdi; thi »geometrisk Sted« giver egentlig ikke ny mathematisk Oplysning, men er nærmest at betragte som en Udtryksmåde for Ting, der ere kjendte andensteds fra. Lad os dog først forfølge det foreliggende Exempel.

Det er let at indse at det geometriske Sted for Punkter, der har Afstanden B fra mn eller dens Forlængelse, er to parallelle Linier, den ene uv på den ene Side af mn , den anden rs , som ikke er tegnet på Tg. 144, men på Tg. 145, lige så langt på den anden Side af mn ; thi ethvert Punkt i disse Linier og *intet Punkt udenfor dem*



Tg. 145.

har Afstanden B fra mn . Ligeledes indses, at det geometriske Sted for Punkter, hvis Afstand fra Punktet m er lig A , er en Cirkel med m som Centrum og A som Radius. Ethvert Punkt i denne Cirkelperiferi og intet udenfor den har denne Afstand. Der gives altså netop så mange Løsninger af den foreliggende Opgave, som der findes Skjæringer af de geometriske Steder, som svare til de to ved Analysen bestemte Egenskaber, — og ikke flere. Tg. 145 giver 4 Løsninger: mxn , $mx'n$, $mx''n$, $mx'''n$.

§ 207. Medens Indførelsen af et sådant Begreb

som »det geometriske Sted for Punkter af visse Egenskaber« kan synes at være en Ubetydelighed, eller *kun* en Udtryksmåde, som ikke i sig selv har noget Indhold, så letter den på den ene Side Løsningen af mængden af Opgave, medens den på den anden skaffer en større Grundighed i Undersøgelsen.

Når man nemlig skal løse en Opgave, f. Ex. finde et Punkt med visse Egenskaber, så véd man nu, at det gjælder om at kunne udtrykke enhver af Egenskaberne ved et geometrisk Sted. Punktet, der skal have begge (eller alle) Egenskaberne, må da være et, der ligger i begge (eller alle) geometriske Steder, altså deres Skjæringspunkter.

Tillige bliver en Opgave, når den kan behandles på denne Måde, grundigere løst, idet man strax ser, *hvor mange Løsninger der er mulige* (så mange, som der er Skjæringspunkter), og *om overhovedet nogen Skjæring er mulig* (have de geometriske Steder intet Punkt fælles, gives der intet Punkt, der har begge (eller alle) de forlangte Egenskaber); og endelig ser man lettere, *hvilke Betingelserne må være for Løsningens Mulighed* (d: for at de geometriske Steder få noget Punkt fælles).

Af geometriske Steder, som jevnlig bruges, kan, foruden de to allerede i § 206 brugte, nævnes:

Ex. 1. Det geometriske Sted for Punkter, der have lige stor Afstand fra de to givne Punkter, er en ret Linie vinkelret på Midten af disses Forbindelseslinie. (Bevis dette! Jfr. § 102, Ex. 3, 4).

Ex. 2. Det geometriske Sted for Punkter, der have lige stor Afstand fra to givne Linier, er de to rette Linier, der halvere de af de givne Linier dannede Vinkler. (Bevis dette! Jfr. § 102, Ex. 11.)

Ex. 3. Det geometriske Sted for Punkter, hvorfra Linier til to givne Punkter danne en ret Vinkel, er en Cirkel over de givne Punkters Forbindelseslinie som Diameter (§ 95)

Ex. 4. Desuden kan et geometrisk Sted være betegnet på mange udvortes Måder, f. Ex. derved, at Punktet skal ligge i en eller anden ligefrem given Linie (ret eller krum).

Ex. 5. Tegn en Linie, der skal forestille Kystlinien af en Sø. Afsæt noget fra Kysten to Punkter, der skulle forestille Bolig for to Mænd, der have en Båd i Fællesskab. De ere enige om, at Båden skal ligge ved Kysten lige langt fra begge Bolig. Hvor skal den ligge? Kan der være Tale om mere end ét Sted? Hvis der mathematisk talt er flere Steder, ere de da også alle praktisk brugelige? Hvad er Betingelsen for, at Aftalen overhovedet kan ske Fyldest?

Ex. 6. Tegn 3 Punkter (ikke i en ret Linie), og find et Punkt, der er lige langt fra dem alle 3! Gives der mere end et sådant Punkt? Punktet kan åbenbart bruges som Centrum for en Cirkel gennem de 3 Punkter.

Ex. 7. Tegn 3 rette Linier (af hvilke ingen ere indbyrdes parallelle)! Find et Punkt, der er lige langt fra alle 3 Sider! Gives der flere Punkter og hvor mange?

Ex. 8. Der er givet en Cirkel, et Punkt i Omkredsen og en ret Linie. Der skal findes et Punkt, hvis Afstand fra Cirkelperiferien er lig den givne Linie, og hvis Afstand fra Punktet er dobbelt så stor. Hvor mange Løsninger er der i følgende 5 Tilfælde:
når den givne Linie er mindre end $\frac{2}{3}$ af den givne Cirkels Radius;

når den er lig med $\frac{2}{3}$ af den givne Cirkels Radius;

når den er større endnu, men dog mindre end den givne Cirkels Diameter;

når den er lig denne Diameter;

når den er større end denne?

Ex. 9. Tegn en retvinklet Trekant, hvis Hypothense og Højde på samme ere givne.

Ex. 10. Mærk 4 Punkter, som skulle forestille Gadelygter, 2 på den ene Side af Gaden og 2 på den anden. Find et Punkt, hvor man ser de to på den ene Side under en ret Vinkel, og ligeledes de to på den anden Side. Er der altid et sådant? Er der flere?

§ 208. For endnu at angive et vigtigt geometrisk Sted, ville vi her tage en Sætning, som rimeligvis skyldes eller i alt Fald var kjendt af Hippokrates.

En Periferivinkel er halv så stor som en Centervinkel på samme Bue.

Ved Periferivinkel forståer man en Vinkel, hvis Spids er i en Cirkelperiferi, ved Centervinkel en Vinkel, hvis Spids er i Centrum.

Periferivinklen kan ligge således, 1) at dens ene

Ben går igjennem Centrum, eller 2) at et Ben går på hver Side af Centrum, eller 3) at begge Benene ligge på samme Side af Centrum (de 3 Figurer i Tg. 146).

I første Tilfælde vil Trekant bcd være ligebenet, altså $\angle b = \angle d$. Tilmed er Trekantens udvendige

Vinkel c lige stor med de to indvendig modstående b og d tilsammen, altså dobbelt så stor som b alene.

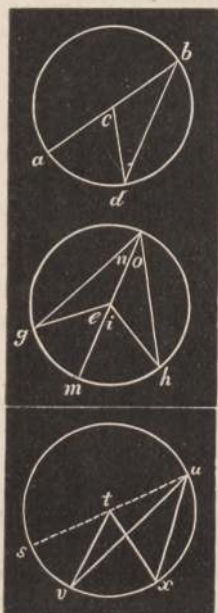
I et andet Tilfælde kan man fra Periferivinklens Spids tegne en Diameter, som deler Vinklen i to Dele n og o , der i Henhold til første Tilfælde hver for sig er halvt så stor som de tilsvarende Centervinkler e og i . Altså er Periferivinklen n og o tilsammen halvt så stor som Centervinklen e og i tilsammen.

I tredje Tilfælde kan man fra Periferivinklens Spids tegne en Diameter, hvorved der opstår en Periferivinkel sux , som formindsket med suv netop er den givne Periferivinkel vux . Men hine to ere i Henhold til første Tilfælde halvt så store som Vinklerne stx og stv ; altså er Vinkel vux halvt så stor som stx formindsket med stv , altså halvt så stor som vtx .

Da en Centervinkel udtrykkes (§ 76) ved samme Antal Grader som den Bue, hvorpå den står, må altså en Periferivinkel udtrykkes ved det halve Gradantal af den Bue, hvorpå den står.

Alle Periferivinkler på samme Bue ere følgelig lige store.

Ex. 1. *Hvorledes udtrykkes en Vinkel, hvis Spids ligger indenfor Periferien (men ikke i Centrum) ved de Buer, som Vink-*

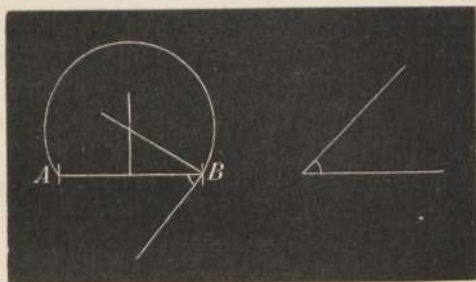


Tg. 146.

lens Ben og disses Forlængelser afskjære; og hvorledes en Vinkel, hvis Spids ligger udenfor Periferien.

Ex. 2. Bevis, at Vinklen imellem en Korde og en Linie vinkelret på Diametren til Kordens Endepunkt er lig en Periferivinkel på Korden. (Kordens og Diametrens anden Ende forbindes med en ret Linie.)

Ex. 3. Find det geometriske Sted for Spidsen af en Vinkel af given Størrelse, og hvis Ben gå igjennem to givne Punkter A og B . A og B forbindes med en ret Linie, Vinklen afsættes ved



Tg. 147.

B med BA som det ene Ben. En Linie vinkelret på det andet Ben må være Diameter (Ex. 2), så at Centret må ligge i denne, og det andet geometriske Sted for Centret er en Linie vinkelret på Midten af AB .

Ex. 4. Tegn en Trekant, når der er givet en Side, den modstående Vinkel og Højden på den givne Side.

§ 209. I Athen udformede og fæstnede Mathematiken sig under Platos Ledelse og Auktoritet som et alment Oplysningsfag. Der kan endnu hertil føjes, at medens fremragende Matematikere, som vi strax skulle se, på denne Tid udvidede Mathematikens Område og Hjælpemidler betydeligt, begrænsede Plato den »elementære« Mathematik til Figurer, der kunne tegnes med Lineal og Passer, altså til Figurer, som kun indeholde rette Linier og Cirkler, en Begrænsning, der har holdt sig til vore Dage.

Endvidere kan man skønne, hvilken Vægt der

lagdes på en fuldendt Form, deraf, at en Platoniker ved Navn *Leon* skrev en Lærebog, som blev meget rost både for Righoldighed og Omhyggelighed; men 10 År efter blev den betragtet som forældet og afløst af en ny og bedre af *Theydios* fra Magnesia, der også var en af Platos Gjæster.

Plato hævdede altså Matematikens almindennende Betydning; men på den anden Side opmuntrede han de forskellige Matematikere til hver i sin Retning at nå så vidt som muligt; ja, han skal have udpeget de Veje, som visse Matematikere alt efter deres personlige Evner burde gå og virkelig også gik. — Fra Akademiet udgik på den ene Side almen Oplysning, på den anden Side videnskabelige Tilskyndelser.

R u m f a n g.

§ 210. Navnene på adskillige atheniensiske Matematikere, Platos Venner eller Lærlinger, ere os opbevarede; men de største videnskabelige Navne på denne Tid ere dog at søge blandt hans Venner udenfor Athen. Især må nævnes Arkytas fra Tarent, Eudoxos fra Knidos og Menaichmos fra Suidas.

Platos pythagoræiske Ven i Tarent *Arkytas* (§ 201) var omtrent jevnaldrende med ham (c. 430—365 f. Kr.). Han indtog en fremragende Stilling i sin Fødeby, der nu var bleven den mægtigste i Syditalien, hvor Pythagoræerne atter havde fået bedre Kår, idet de som Samfund nu kun befattede sig med deres religiøse og matematiske Sager, og ikke stræbte at danne nogen politisk Klike. Ikke des mindre kunde Pythagoræeren Arkytas tage virksom Del i det offentlige Liv. Han blev 7 Gange

valgt til Feltherre for Tarents Tropper, skjøndt Lovene forbød gjentaget Valg, og han blev også Overfeltherre for de bundsforvandede Byer i Storgrækenland. Han blev aldrig overvunden, hvad der derimod hændte Tropperne kort efter, at han havde nedlagt Kommandoen. Man har rost ham for hans personlige Dyder, for hans Godhed mod hans Slaver og hans Venlighed mod Børn, og det var vel nærmest for disse, at han skal have lavet en mekanisk Due, der kunde flyve. — Hans mekaniske Geni ytrede sig imidlertid også på en anden Måde. Han skal have været den første, der begyndte at behandle Mekaniken med mathematisk Grundighed. Det er vel ingen Tilfældighed, at det var i samme Nabolag, i Syrakus, at Arkimedes halvandet Hundredår senere skulde skrive sine udødelige matematiske Værker om Mekanik.

Arkytas omkom ved et Skibbrud ved Forbjerget Matinum, just på Vejen til Athen for at besøge Plato og hans Akademi.

§ 211. *Eudoxos* er født i Knidos omtrent 407 f. Kr. og død 354. Knidos var Hovedstaden i det doriske Forbund i Lilleasien, og der bestod endnu et ret livligt Samkvem imellem de græske Byer i disse Egne og Storgrækenland. Det er derfor ikke så helt uforklarligt, når der fortælles, at Eudoxos, skjøndt fattig, fik Arkytas til Lærer i Mathematik og en navnkundig Læge ved Navn Filistion på Sicilien til Lærer i Lægevidenskab. — 23 År gammel kom Eudoxos til Athen og var der i 2 Måneder for at gjøre sig bekjendt med den »sokratiske« Skole, som nærmest var repræsenteret i Plato, hvem han hørte, men af hvem han ved denne Lejlighed skal være bleven behandlet noget kjøligt. Efter sin Hjemkomst drog han med sine Venners Bistand til Ægypten med Anbefalingsbrev fra Agesilaos til Nektanabis (der regjerede fra 390 til 380). Han opholdt sig der i 14 Måneder, og da Apis [☉] i Heliopolis slikkede hans Klædning, spæede Præsterne ham, at han skulde blive berømt, hvad han også blev,

så at hans Landsmænd på Grund af hans »glimrende« Anseelse kaldte ham Endoxos istedenfor Eudoxos. — Efter Besøget i Ægypten grundede han en Skole i Cizucus (det nuværende Panorma) ved Marmarahavet. Denne Skole nåede et højt videnskabeligt Standpunkt. Som vi strax skulle se, var det især denne, der med Tilskyndelser fra Tarent og fra Athen i denne Periode åbnede nye Baner for Mathematiken. — Men også som Lovgiver og Astronom skal Eudoxos have været fremragende. Navnlig roses han som den første, der på Stjernehimlen og i Planeterne Bevægelser ikke så noget som helst andet, end hvad der var at se, altså hos hvem det sidste Spor af Astrologi var forsvunden, medens han på mathematisk Måde stræbte at betegne alle Bevægelserne.

Da Eudoxos og hans Skole stod i sin Glands skal han med et stort Antal Elever være rejst til Athen, som nogle sige for at imponere Plato, der ikke tidligere skulde have agtet ham tilstrækkeligt. Er dette sidste rigtigt, må Planen være lykkedes; thi det vides, at Plato har henvist Folk, der vilde vide Besked i visse Retninger til Eudoxos.

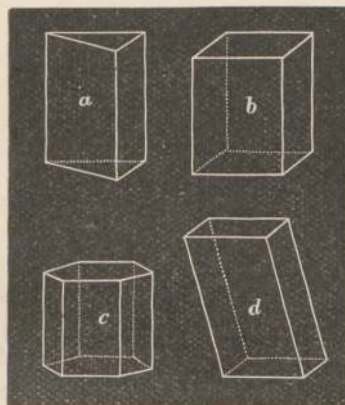
Eudoxos anså Lysten for det højeste Gode, eftersom den begjæres af alle levende Skabninger. Ikke des mindre synes han ikke selv at have været nogen Slave af sin Lyst, idet han tvært imod skal have tiltalt Folk ved sin — ganske vist livsglade — men smukke Adfærd.

Om *Menaikmos* personlig ved man ikke meget andet end, at han var både Platos og Eudoxos' Lærning.

§ 212. Som vi have set, havde Rummets Geometri eller Stereometrien begyndt at udvikle sig, navnlig ved Pythagoras' Behandling af de regulære Legemer (§§ 164—173) og ved Anaxagoras' og Demokritos' Behandling af Perspektiven (§§ 174—180). Ikke desmindre skal Plato have klaget over, at det stod så ringe til med denne Gren af Mathematiken. Eudoxos skal imidlertid

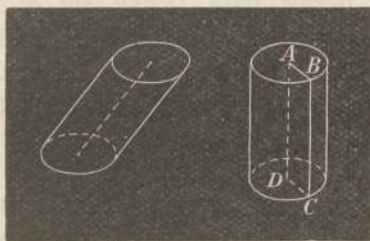
have udviklet den betydelig, og har så at sige lagt Grunden til Bestemmelsen af *et hvilket som helst Legemes Rumfang*.

I § 165 blev vist, at en Kasses Fladefang findes ved at folde dens Længde, Brede og Højde med hin-



Tg. 148.

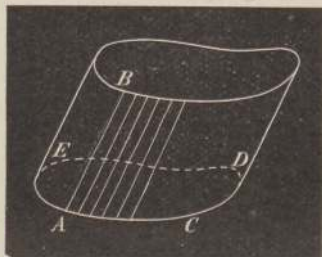
anden, eller, hvad der er det samme, ved at folde dens Grundflade med dens Højde. — Man har måske fra først af betragtet det som en Selvfølge, at det er på samme



Tg. 149.

Måde, man finder Fladefanget af en Gruppe Legemer, som kaldes *Prismer* (Tg. 148 og 149), Legemer, der kunne tænkes dannede derved, at en ret Linie, *Frembringeren*, bevæger sig stadig parallel med sig selv langs

med en eller anden i sig selv lukket Linie, *Ledelinien*. Er denne en Cirkel (Tg. 149), kaldes Prismet særlig en Cylinder, og i det Hele kalder man en Flade, frembragt på denne Måde (Tg. 150), selv om Ledelinien ikke er lukket, en *Cylinderflade*.



Tg. 150.

Man indser let, at de parallelle Endesflader — ligesom alle parallelle Snit gennem et Prisme — må være samfældige. Thi da parallelle Planer altid skjæres af et hvilket som helst andet Plan i parallelle Linier (§ 179), må Prismets Sideflader bliver Parallelogrammer (§ 100, Ex. 1), og hver Linie i den ene Ende- eller Snitflade blive lige stor og parallel med den tilsvarende i den anden.

Man kan derfor også tænke sig et Prisme som dannet derved, at en eller anden Figur (Trekant (a), Firkant (b), Sexkant (c) Tg. 148, eller Cirkel Tg. 149, osv.) bevæger sig parallel med sig selv, idet et af Figurens Punkter glider langs med en ret Linie.

Fastholdes den sidste Opfattelse af et Prisme, kan dette betragtes som dannet af en Stabel af mange Plader af samfældige Figurer. Hver Plade må være lige stor med en Plade af samme Tykkelse, men af rektangulær Form, nemlig en flad Kasse med en ligeså stor, men rektangulær Grundflade og med samme Højde. Hele Prismet bliver altså lige stort med en Stabel af sådanne Kasser, det vil sige, med en Kasse med en ligeså stor

Grundflade som Prismet og med samme Højde, idet man ved Prismets Højde forstår den (vinkelrette) Afstand mellem Prismets parallelle Endeflader.

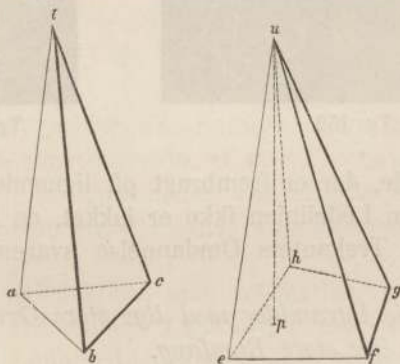
De små Ujevnheder, der ere ved Stablens Overflade, ville åbenbart forsvinde, når man tænker sig Pladernes Tykkelse ringe og Antal stort.

Prismets Rumfang må altså beregnes ligesom en Kasses, som den nævnte, nemlig derved, at man *folder Grundfladens Antal af Flademål med Højdens Antal af Liniemål.*

Ex. 1. Der skal graves en Grøft, 3' bred foroven, 2' dyb og 1' bred forneden, med en Længde på 150 Alen. Hvor mange Terningfod Jord skal der op?

Ex. 2. En Tromle er 18" i Tværmål og 8' lang. Hvad vejer den, når hver Terningfod vejer 45 Pd.?

§ 213. Prismets Omdannelse til en Kasse på en lige så stor Grundflade og imellem de samme parallelle Planer svarer åbenbart til Parallelogrammets Omdannelse



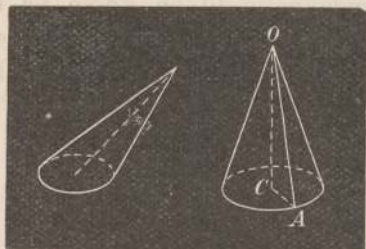
Tg. 151.

til et Rektangel (§ 112). Ligeledes gives der en Sætning, der svarer til en Trekants Omdannelse til en anden Trekant med ligeså stor Grundlinie og Højde (§ 113).

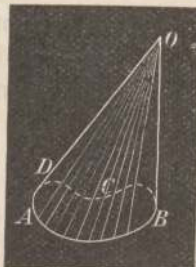
I Mathematiken betegner Navnet *Pyramide* ikke

alene den i de ægyptiske Pyramider brugte Form med en kvadratisk Grundflade, men et Legeme med en hvilken-somhelst plan Grundflade og med Sideflader dannede af rette Linier fra ethvert Punkt i Grundfladens Omkreds til et og samme Punkt, kaldet *Toppen*.

Man kan altså tænke sig en Pyramide dannet derved, at en ret Linie *ta* (Tg. 151), der altid skal gå igjennem et fast Punkt *t*, hvori det dog kan dreje sig, glider langs med en lukket (ret eller krum) Linie, f. Ex. Grundfladens Omkreds *abc*. Den rette Linie kaldes også her *Frembringeren* (*ta*, *tb*, *tc*), den lukkede Linie *Ledelinien* (*abc*). Er Ledelinien en Cirkel (Tg. 152), kalder man gjerne Pyramiden en Kegel, og i det Hele kalder



Tg. 152.



Tg. 153.

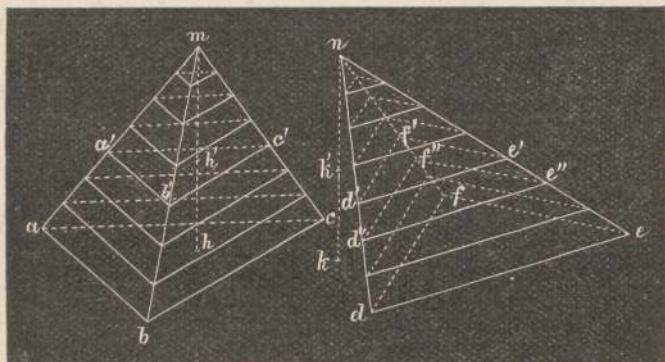
man en Flade, der er frembragt på lignende Måde (Tg. 153), selv om Ledelinien ikke er lukket, en *Kegleflade*.

Den til Trekanters Omdannelse svarende Sætning lyder nu:

Tresidede Pyramider med lige store Grundflader og Højder have lige store Rumfang.

Man vil kunne indse dette på lignende Måde som ovenfor ved Prismerne, nemlig ved at tænke sig Pyramiderne skårne af en Mængde Snit parallelle med det fælles Grundplan (Tg. 154). Man ser nemlig, at når Grundfladerne *abc* og *def* ere lige store og ligeså Højderne *mh* og *nk*, og et Plan parallelt med Grundplanet skjærer

Højderne i h' og k' og Pyramiderne i $a'b'c'$ og $d'ef'$, må disse Snit være lige store; thi ifølge § 180 og 144 forholder $a'b'c'$ sig til abc som Kvadratet på mh' til Kvadratet på mh . Men $mh = nk$ og $mh' = nk'$ (§ 179, Ex. 3), altså forholder $d'ef'$ og def sig også som Kvadratet på mh' til Kvadratet



Tg. 154.

på mh . Følgelig, da abc er lig def , må $a'b'c'$ være lig $d'ef'$.

Da dette gjælder alle Snittene, kan man betragte Pyramiderne som dannede af et stort Antal lige store Plader. De små Ujevnheder ved Overfladen forsvinde, når man tænker sig Pladernes Tykkelse ringe og deres Antal stort.

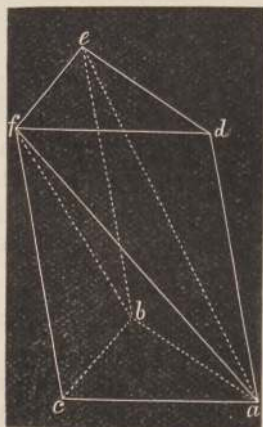
§ 214. Således kan man vel fra først af have tænkt sig den i § 212 omtalte Ligestorhed mellem Prismer og den i § 213 omtalte Ligestorhed mellem tresidede Pyramider med lige store Grundflader og Højder. Men Eudoxos er ikke bleven stående ved denne Slags Beviser, der for Grækerne (navnlig siden det 5te Århundrede) ikke var bindende nok. Det skal netop være Eudoxos selv, der har opfundet *Exhaustionsbeviset*, som her i Bogen er omtalt udenfor Tidsordenen, nemlig

anvendt af Arkimedes på Cirkelen (§ 194), et Bevis, som Mathematikerne fra Eudoxos' Tid brugte, når de stod overfor sådanne Sætninger, som egentlig kræve, at man skal kunne gå i det Uendelige. Med Hensyn til denne mesterlig anlagte, al Sofisteri afvisende Bevismåde ville vi imidlertid her nøjes med at henvise til det allerede givne historisk sikre Exempel derpå i § 194, tilmed da ingen af Eudoxos' egne Exempler ere os ligefrem opbevarede.

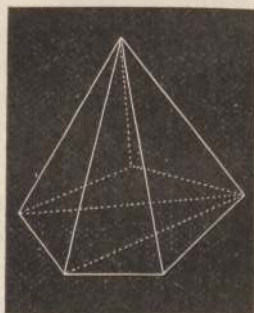
§ 215. En anden Sætning, der udtrykkelig nævnes som Eudoxos', er følgende:

Rumfanget af en Pyramide er $\frac{1}{3}$ af Rumfanget af et Prisme med samme Grundflade og samme Højde.

Vi ville først betragte et tresidet Prisme (Tg. 155). Tænker man sig et plant Snit lagt gennem Punktet f og Linien ab , vil man herved afskjære en Pyramide med samme Grundflade abc som Prismets, og samme Højde



Tg. 155.



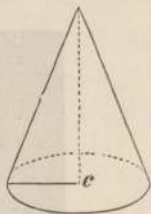
Tg. 156.

fra f til Grundfladen. Den øvrige Del af Prismet kan betragtes som en firsidet Pyramide med Grundfladen $abcd$ og Toppunktet f . — Lægges nu et Snit gennem Top-

punktet f og Grundfladens Diagonal ae , deles den firsidede Pyramide i to tresidede, der i Henhold til § 213 ere lige store. — Men den ene af disse Pyramider, nemlig den, som har Grundfladen aed og Toppunktet f , kan lige så godt betragtes, som om den har Grundfladen def og Toppunktet a , altså samme Grundflade og Højde som Prismet og som den først afskårne Pyramide, med hvilken den altså er lige stor (§ 213). Prismet er således skåret i 3 lige store Pyramider, og da det måles ved Grundflade Gange Højde, må f. Ex. Pyramiden $abc-f$ måles ved $\frac{1}{3}$ af Grundfladen abc Gange Højden fra f .

Enhver Pyramide kan deles i et vist Antal tresidede Pyramider (Tg. 156) med samme Højde; og da hver af dem er lig $\frac{1}{3}$ af deres Grundflade Gange denne Højde, bliver hele Pyramidens Rumfang lig $\frac{1}{3}$ af Grundfladen Gange Højden.

Sætningen gjælder ogsaa Keglen (Tg. 157), hvad enten man vil nøjes med at betragte denne som en Pyramide med uendelig mange Sider, eller man vil forsøge Exhaustionsbeviset ved at omskrive Mangekanter om Grundfladen og lade disse være Grundflade i Pyramider omskrevne om Keglen og ligeledes indskrive Mangekanter og Pyramider. (Jfr. § 194).



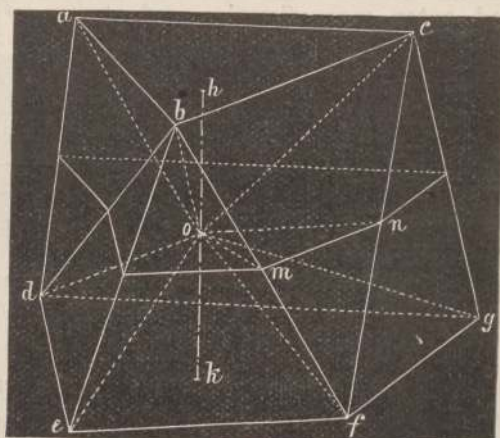
Tg. 157.

Ex. En Kegles cirkulære Grundflade er 10 Tommer i Diameter, Keglen's Sidelinie 13" (Tg. 157); hvor mange Terningtommer er Keglen's Rumfang?

§ 216. Denne vigtige Sætning om Pyramidens Rumfang giver Nøglen til Beregning af alle mulige Legemers Rumfang. Thi tænker man sig f. Ex. inde i Legemet et Punkt, hvorfra der stråleformigt trækkes Linier ud til alle Legemets Hjørner, kan man tænke sig *Legemet som opløst i lutter Pyramider med det nævnte Punkt som Toppunkt, og med Legemets forskellige Overfladedele som Grundflader*. Vi ville tage et vigtigt Exempel herpå.

Ex. 1. *Prismatoïde* kalder man et Legeme (Tg. 158), som har to parallelle Flader, f. Ex. Grundfladen $defg$ forneden og abc foroven, mellem hvis Vinkelspidser der er trukket rette Linier, som bestemme Prismatoidens Sideflader. Disse blive Trekanter, medmindre en (eller flere) Linier i den ene parallelle Flade er parallel med en (eller flere) Linier i den anden. I Tg. 158 er $ac \neq dg$. De bestemme da et Plan, og Sidefladen $acgd$ er altså vel et Paralleltrapez (§ 179), men man kan gjerne, for ikke at gjøre Forskel på Sidefladerne, betragte også dette som bestående af to Trekanter, idet en Diagonal kan tænkes trukket fra c til d .

Vælges nu et Punkt, o , inde i Legemet og midt imellem de to parallelle Flader, og trækkes fra dette Punkt Linier til alle Hjørnespidserne, vil man opad have en Pyramide med Grundflade abc og halv så stor Højde oh som Prismatoiden, altså med et Rumfang lig $\frac{1}{3}$ af et Prisme med Grundflade abc og Højde som Prismatoiden (hk); og nedad fra o vil man have en Pyramide lig $\frac{1}{3}$ af et Prisme med Grundfladen $defg$ og Prismatoidens Højde (hk). Endelig bliver der et Bælte af Pyramider ud imod hver af de trekantede Sideflader-



Tg. 158.

Vi ville betragte en enkelt af dem, f. Ex. den med bcf som Grundflade og o som Toppunkt. Tænker man sig nu et Snit lagt gennem o parallelt med de parallelle Flader, (Midtsnittet), vil det skjære alle Linierne bf , fc ... i disses Midtpunkter m , n ... Trekant mof

bliver altså lig $\frac{1}{4}$ af bcf (§ 144); følgelig bliver Pyramiden $bcf-o$ 4 Gange så stor som Pyramiden $mnf-o$. Men i denne sidste kan man ligeså godt betragte mno som Grundflade og f som Top. Trekant mno er imidlertid den Del af Midtsnittet, som falder i den Pyramide, vi betragtede ($bcf-o$), og det vil gå på samme Måde med alle de andre Sidepyramider, så at de tilsammen blive 4 Gange så store som Pyramider, der have Midtsnittets Trekanter til Grundflader og Prismatoidens halve Højde til Højde, hvilket er 4 Gange så meget som $\frac{1}{6}$ af et Prisme med Midtsnittet til Grundflade og Prismatoidens Højde til Højde. Alt i alt er følgelig

Prismatoidens Rumfang lig ($\frac{1}{6}$ af 6 Prismer eller) Middeltallet af 6 Prismer med samme Højde, men det ene med Prismatoidens ene parallelle Flade til Grundflade, det andet med den anden parallelle Flade til Grundflade og de 4 øvrige med Midtsnittet til Grundflade.

Ex. 2. En Grusbunke af sædvanlig Form er forneden 10' lang, 5' bred, foroven 6' lang, 1' bred; og den er 3' høj. Hvor mange Terningfod?

Ex. 3. Et Tagrums Gulvflade er 30 Alen langt 16 Alen bredt. Alle 4 Tagflader helde 45° . Hvor stort er Rummet?

Den højere Mathematik begynder.

§ 217. Vi have set, at Pythagoræerne vidste, at ligedannede Figurers Fladefang forholde sig som Kvadrater på et Par ensliggende Linier (§ 144). De have også vidst, skjøndt de ikke have kunnet bevise det så smukt, som det nu vilde kunne ske efter Eudoxos' Sætning om Pyramiden, at

ligedannede Legemers Rumfang forholde sig som Terninger på et Par ensliggende Linier.

Man har måske nøjedes med et lignende Bevis som følgende: tænker man sig det ene Legeme inddelt i en Mængde små Tærninger, vil det andet kunne tænkes gjennevævet af Linier ensliggende med Kanterne af

hine Terninger. De blive da selv Kanter af andre Terninger *i netop samme Antal*. De to Legemers Rumfang, der således bestå af lige mange Terninger, må altså forholde sig som en Terning i det ene til en Terning i det andet, følgelig som Terninger på et Par ensliggende Linier.

Ex. 1. Når Jordklodens Tværmål er 4 Gange så stor som Månens, hvor mange Gange er så Jordkloden større end Månen?

Ex. 2. Forudsat, at et Barn har samme Legemsbygning som en Voxen og er netop halv så høj, hvor mange Gange vejer så den Voxne mere end Barnet?

§ 218. Det vil erindres, at Pythagoras især berømmes for at have løst den Opgave at omdanne en given Figur således, at den beholdt samme Fladefang, men blev ligedannet med en anden given Figur, og at Pythagoras hertil bl. a. benyttede en anden af sine Sætninger, nemlig at finde Mellemproportionalen mellem to Linier (§ 155). — Der stiller sig nu en lignende Opgave med Hensyn til Legemer som hin med Hensyn til Figurer, nemlig *at omdanne et givet Legeme således, at det beholder samme Rumfang, men bliver ligedannet med et andet givet Legeme*.

Det er let at skjønne en Grund blandt flere til, at den pythagoræiske Filosofi kunde rejse et sådant Spørgsmål. Når man f. Ex. mente, at et flydende Legeme, såsom Vand, bestod af Ikosaëdre, medens det tilsvarende faste (Is) bestod af Terninger (§ 173), måtte man forestille sig, at der ved Frysningen just skete en sådan Omdannelse som nys nævnt; og da det gjaldt om, at man med Tanken kunde følge, hvad der foregik i Naturen, måtte man f. Ex. kunne besvare Spørgsmålet: når forskellige Rumfang, der stå i Forholdene 1 til 2 til 3 osv., skulle omdannes til Terninger, i hvilket Forhold komme da disses Kanter til at stå til hverandre? eller med andre Ord: hvad bliver Forholdet imellem Linier,

på hvilke Terningerne stå i Forholdet 1 til 2 til 3 osv.

Da Opgaven viser sig vanskelig, stiller man sig den endnu noget simplere, idet man blot søger

at finde Kanten i en Terning, der er dobbelt så stor som en given Terning.

§ 219. Denne Opgave blev forgjæves forsøgt; og efter at Mathematiken var begyndt at blive populær knyttede man til Opgaven om »Terningens Fordobling« flere Fortællinger såsom.

Anaxagoras' Lærling Digteren Euripides lod i et Skuespil Kong Minos, da han så det terningformige Gravmæle, man havde rejst for hans Søn Glaukon, udbyrde, fordi han ikke fandt det kongeligt nok: »Fordobbel det, men bevar Terningformen!« — Endvidere skulle Beboerne på Delos, da de rådspurgte Oraklet med Hensyn til en Pest, der rasede, have fået det Svar, at de skulde fordoble Alteret; Delierne skulde da atter have søgt Råd hos Plato om, hvorledes de skulde bære sig ad. Terningens Fordobling gæder derfor under Navnet det deliske Problem.

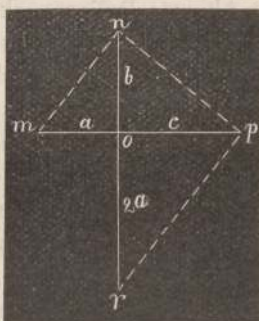
Noget, der således — uden at have synderlig praktisk Betydning — kunde fra de Lærdes Studier trænge ud i den almene Bevidsthed, har uden Tvivl måttet anspænde Mathematikerne selv til det yderste, og denne Anspændelse viste sig at få vidtrækkende Følger.

§ 220. Den første, der vides at have bragt Opgaven et Skridt nærmere til Løsning, er Hippokrates, idet han fremsatte følgende Sætning. Om han just begrundede den på samme Måde som her, kan ikke siges.

Man tænke sig Opgaven løst, så at vi altså have to Terninger, den ene med Kanten a , den anden med Kanten b , og hin Terning har dobbelt så stort Rumfang som denne. Da er det klart, at hvis vi nu atter havde en Terning dobbelt så stor som den største, måtte dens Kant c være så stor, at i samme Forhold, hvori a står

til b , må b stå til c . Haves endelig en fjerde Terning, dobbelt så stor som den sidste, men med Kanten d , må man endvidere have, at b forholder sig til c ligesom c til d . Følgelig er b mellemproportional mellem a og c ; og c er mellemproportional mellem b og d . Da imidlertid Terningen på d er dobbelt så stor som dobbelt så stor som dobbelt så stor som Terningen på a eller 8 Gange så stor som Terningen på a , må Kanten d være dobbelt så stor som Kanten a (thi da bliver d 's Terning 2 Gange 2 Gang 2, eller 8, Gange a 's Terning). Følgelig er $d = 2a$. Det gjælder altså blot om at finde, hvad man nu kaldte to *Mellemproportionaler* (b og c) mellem a og $2a$, så at a forholder sig til b , som b til c , som c til $2a$. Da er b den søgte Kant i en Terning med dobbelt Rumfang.

Da Hippokrates således har gjort Opgaven til en plangeometrisk Opgave, er det naturligt at minde, hvor-

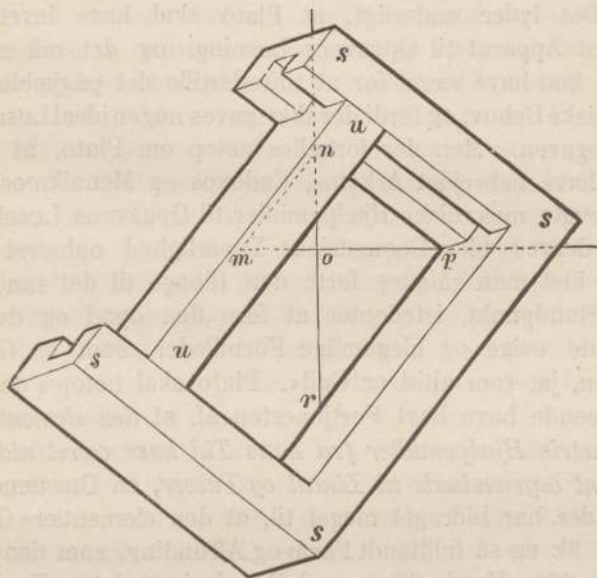


Tg. 159.

ledes man kan finde 1 Mellemproportional mellem to Størrelser (§ 151); og man ser da, at når nr er vinkelret på mp (Tg. 159), og Opgaven tænkes løst således at a , b , c og $2a$ ere afsatte fra o til m , n , p og r , vil Trekant mnp være retvinklet, og npr ligeså. Hvis man altså begynder med at tegne to Linier, mp og nr , vinkelrette på hinanden, afsætter a fra o til m , og $2a$ fra o

til r , vil det blot gjælde, om man fra m kan tegne en Linie i en sådan Retning, at den vil træffe on i et Punkt n , så at en Linie vinkelret på mn i n vil træffe op i et Punkt p , så at en Linie vinkelret på op i p vil træffe Punkt r . Da må (§ 151) a forholde sig til b som b til c , som c til $2a$.

§ 221. Der fortælles, at Plato først skal have svaret Deputationen fra Delos, at Guden nok vilde lade dem



Tg. 160.

vide, at de lagde sig for lidt efter Mathematik, men at Plato forøvrigt hjalp dem ved at konstruere følgende Apparat til Opgavens Løsning.

I et U-formigt Stativ $ssss$ (Tg. 160) kan en Skyder uu glide op og ned, men bestandig parallel med Stativets Fod, altså vinkelret på dets Grene. Har man

nu tegnet de på hinanden vinkelrette Linier mp og nr og afsat om lig a og $or = 2a$, lægger man Apparatet således, at Fodens Kant går igjennem r , og at Vinkelspidsen mellem Fod og Gren er i Linien op ; og man vrider og forskyder under denne Forudsætning nu Apparatet således, at Skyderens Kant går igjennem m samtidig med, at dens Vinkelspids med Grenen ligger i Linien on . Når dette er opnået, er n og p de søgte Punkter; on er da Kant i en Terning dobbelt så stor som Terningen på a .

Det lyder underligt, at Plato skal have lavet et sådant Apparat til Opgavens Løsning, og det må uden Tvivl kun have været for at tilfredsstille det pågjældende praktiske Behov, og fordi der ikke gaves nogen ideal Løsning af Opgaven. Men der fortælles netop om Plato, at han skal have bebrejdet Arkytas, Eudoxos og Menaikmos, at de brugte mekaniske Hjælpemidler til Opgavens Løsning: »thi derved blev Geometriens Ypperlighed ophævet og ødet, idet man således førte den tilbage til det sandse-lige Standpunkt, istedenfor at føre den opad og dvæle ved de evige og ulegemlige Forbilleder, som er Guds Væsen, ja, som altid er Gud«. Plato skal netop i denne Henseende have havt Fortjenesten af, at *den elementære Geometris Hjælpemidler fra hans Tid have været aldeles bestemt begrændsede til Lineal og Passer*, en Omstændighed, der har bidraget meget til, at den elementære Geometri fik en så fuldtendt Form og Afrunding, som den fik.

§ 222. Havde Plato end Ret deri, at det er *Tanken*, der skal klare Sagen, og ikke udvortes Redskaber, og har hans Udtalelse end været en for den *elementære Geometri* gavnlig Auktoritetsudtalelse, så standser hans Ord dog heldigvis ikke hine 3 store Matematikere på deres Vej; thi Sagen er den, at der gives Opgaver, og deriblandt det deliske Problem, som ikke *kunne* løses ved ret Linie og Cirkel, og der gives Fremgangsmåder, som, skjøndt de bruge andre Redskaber end Lineal og

Passer, ere ligeså tankeklare og tankebestemte som de, der ledsage Operationerne med Lineal og Passer. Det deliske Problem førte således de 3 Mænd til at bryde nye Baner, til at åbne Døren til »den højere Matematik«, og denne Videnskab nåede i det følgende Århundrede en sådan Højde, at der ikke kunde være Tale om, blot nogenlunde at skitsere den i en Bog som nærværende. I denne Henseende vil vanskelig andre end Fagmænd kunne følge Grækernes Tankearbejder, der, navnlig i Forhold til den fjerne Oldtid, hvori de fremskød, må forbause Enhver, der lærer dem at kjende og bidrage til at nedstemme Forestillingen om, at det Kulturstandpunkt, hvorpå vi i vore Dage stå, skulde være så himmelhøjt hævet over Oldtidsfolkenes. — Vi skulle dog her kun kaste et lidet Blik på denne Sag.

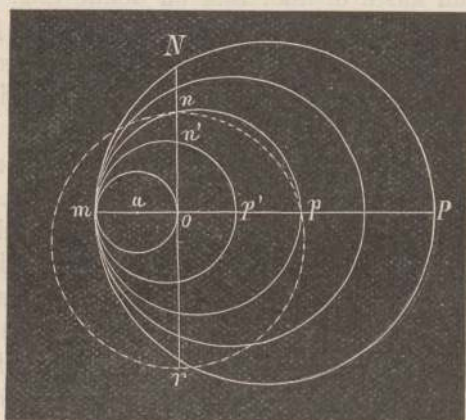
§ 223. Hippokrates havde ganske vist ført Terningens Fordobling tilbage til en rent plangeometrisk Opgave. Men når man nu dog ikke formåede at løse den ved Skjæring af rette Linier og Cirkler i Planet, således som man plejede at løse andre Opgaver, var det ganske naturligt — da Opgaven var stillet fra Rummet — at tænke, at den så måske burde løses ved Linier i Rummet. Arkytas førte an i så Henseende. Ligesom vi i Planet ere vant til, at Linier (rette og krumme) frembringes ved, at et Punkt (i Sandseverdenen en Blyantspids) bevæger sig, således lod Arkytas rette Linier og Cirkler bevæge sig i Rummet og derved danne Overflader, ligesom det i § 212 er omtalt, at Flader kunne frembringes ved Liniers Bevægelse i Rummet. Og det er måske netop Arkytas, der først har gjort dette på en tankeklar Måde. Det lykkedes ham derved at få Overflader dannede på sådanne Måder, at de ved deres Skjæringer virkelig løste det deliske Problem.

Vi ville dog ikke her følge Arkytas, og ikke heller Eudoxos, som fandt og realiserede en anden Løsning ved Hjælp af Rumlæren, hvilken han, således som

vi have set (fornemmelig i §§ 213—215), måske tildels foranlediget ved det deliske Problem, har udviklet mere end nogen Anden.

Derimod ville vi betragte et enkelt af Menaikmos' Arbejder, idet vi mindes, at han — foruden ligefrem at være Lærling af Plato og Eudoxos — desuden har bygget på, hvad Anaxagoras, Demokritos, Arkytas, Eudoxos o. fl. havde udviklet om Linier, Planer, Kegler m. m. i Rummet. — Dog kjende vi ikke selve den Fremgangs- eller Fremstillingsmåde, Menaikmos brugte, men kun Resultatet, han nåede.

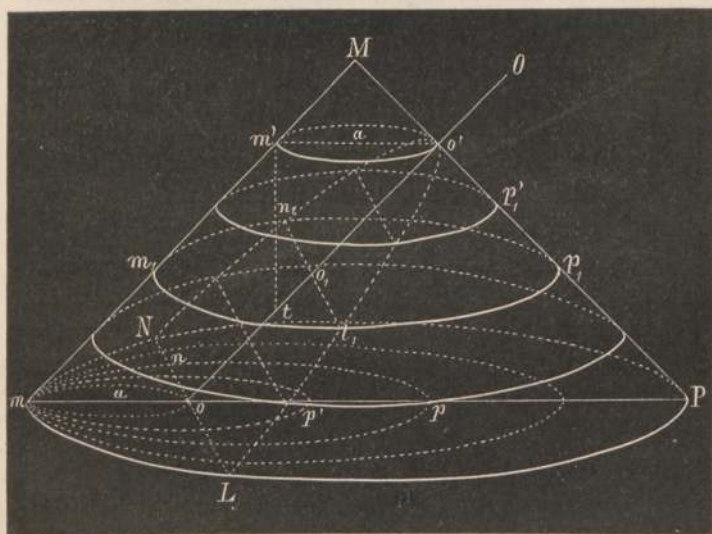
§ 224. Tegner man to på hinanden vinkelrette Linier (Tg. 161) mP og Nr , og et Antal Cirkler med



Tg. 161.

Centre i Linien mP , og som gå igjennem m , vil hver af disse Cirkler give to Værdier (on' og op' eller on og op osv.), som danne en Proportion med om eller a således, at f. Ex. a forholder sig til on som on til op . — Afsætter man nu $or = 2a$, og tegner Cirkler med Centre i rN , og som gå gennem r (der er blot punkteret én sådan, npr , for ikke at overfylde Tegningen), vil enhver af disse

Cirkler give to Værdier (*on* og *op*, osv.), som danne en Proportion med *2a* således, at *on* forholder sig til *op* som *op* til *2a*. Havde man altså to Cirkler (en af hver Slags), *mnp* og *npr*, som have Punkterne *n* og *p* fælles (o: skjære hinanden et Steds i *oN* og et Steds i *oP*), vilde man have: *a* forholder sig til *on*, som *on* til *op*, som *op* til *or*, og Opgaven var da løst. — Men i Tg. 161 kan man kun overkomme at tegne et endeligt Antal af de uendelig mange Cirkler, der gives, og det kan derfor ikke antages, at man slumper til at tegne det rette Par (*mnp* og *npr*). Det vil kun ske med Tilnærmelse og ikke med den tankestrænge absolute Nøjagtighed, som de græske Matematikere krævede.



Tg. 162.

Det gjælder altså, om man kan skaffe, ikke blot et vist Antal sammensvarende Værdier af *on* og *op*, men en uendelig tæt eller, hvad man kalder, en *kontinuerlig*

Række sammensvarende Værdier af *on* og *op*. — Kunde man opnå dette, og havde man en lignende kontinuerlig Række af sammensvarende Værdier bestemte ved Cirklerne *npr* og tilsvarende, vilde det vise sig, hvilket Par *on* og *op*, der var ens i begge Rækker, og dermed var Opgaven løst.

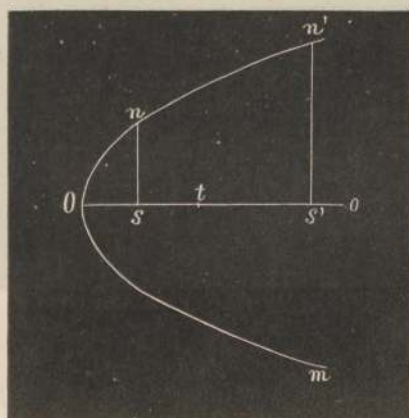
Når man nu følger Arkytas' og Eudoxos' Anvisning til, så at sige, at drage Opgaven påny ud i Rummet, og når man er fortrolig med Perspektivens simpleste Regler, vil man, når man sidder og stirrer på en Figur som Tg. 161 med Tanken om at trække den ud, så at man får uendelig mange sammensvarende Punkter, *n* og *p*, i Fantasien kunne få Cirklerne til at løfte sig op over hinanden, så at de komme til at danne en Kegle set skråt fra et Punkt til Højre, således som Tg. 162 viser, hvor Øjet er tænkt i Retningen *oO*; og $Nn_1o'_1L$ bliver da et Snit ind i Keglen fra Øjet. — Man prøve at lukke venstre Øje, holde det højre til højre for Tg. 161 (f. Ex. over S. 305) og lade Fantasien arbejde lidt, da kan man få Cirklerne til at træde ud i Rummet, så at man ser noget lignende som Tg. 162. Dog får man Snittet kun at se fra Kanten, og man ser altså ikke, hvilken Form det har.

I Tg. 162 er altså Keglen Grundflade den samme som Tg. 161; men Cirkel *mnp* er løftet i skrå Retning op til $m_1n_1p_1$, de indre Cirkler højere, de ydre mindre højt, således at man får dannet Keglen *mMP*, og man får Punkterne i Snittet dér, hvor Snitplanen *ONL* skjærer de løftede Cirkler $m_1n_1p_1$ osv.

Man ser nu, at vore *b*'er, f. Ex. *on*, findes på sit bestemte Sted oppe i Snittet, nemlig o_1n_1 , og at vore *c*'er, f. Ex. *op* eller o_1p_1 stå i et bestemt Forhold til o_1 's Afstand fra *o*' — i nærværende Tilfælde, hvor vi have tegnet *mMP* som en ret Vinkel, bliver *op*'s Forhold til o_1o' som Hypotenusen til Kathete i en retvinklet ligebenet Trekant. Da det nu er Rektanglet af *a* og *op*, der skal være lig Kvadratet på *on*, kan man vel istedenfor *op*

bruge o_1o' , som er for lille i et vist Forhold, når man så forstørrer a i samme Forhold, hvilket kan ske ved fra a 's Endepunkt at nedfælde en Linie lodret til t og da istedenfor Katheten a at bruge Hypotenusen $o't$.

§ 225. Vi ere nu nåede til at finde en Linie (Snittet), hvis Punkter ere således beskafne, at når der fra ethvert af dem n (Tg. 163) tegnes en Linie ns vinkelret på Oo , vil en sådan Linie være mellemproportional mellem dens Afstand sO fra O og en given Linie Ot . Ligeledes er $n's'$ mellemproportional mellem $s'O$ og den givne Linie Ot . Vi have altså nu en krum Linie, der giver en kontinuerlig Række Punkter eller med andre Ord »det geometriske Sted« for Punkter, hvis Afstande fra Oo ere mellemproportionale mellem en given Linie Ot og O 's Afstand, fra Fodpunkterne s, s' , osv.

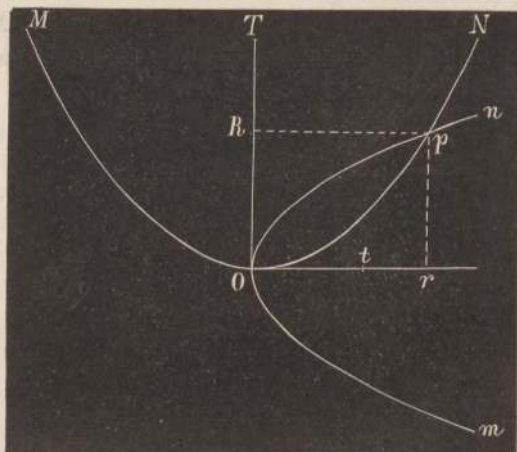


Tg. 163.

Man vilde nu kunne prøve at udspekulere et Redskab, der kunde tegne en sådan krum Linie, og Menaikmos skal virkelig have ladet et sådant lave af en Mechaniker Isidoros fra Milet; men den praktiske Udførelse

var forøvrigt for Grækerne en Biting. Hovedsagen er, at den af Menaikmos opdagede nye Linie, som senere fik Navn af *Parabel*, er fra Tankens Side ligeså bestemt og klar som f. Ex. Cirklen. At man endog kan lave et Redskab, som tegner den, er blot et *udvortes* Vidnesbyrd om, at Tanken magter Opgaven.

§ 226. Menaikmos løste nu det deliske Problem således. Lad Ot (Tg. 164) være Kanten af den Terning, der skal fordobles, og OT , som tegnes vinkelret derpå, være 2 Gange Ot . Man tegner da en Parabel nOm , hvis

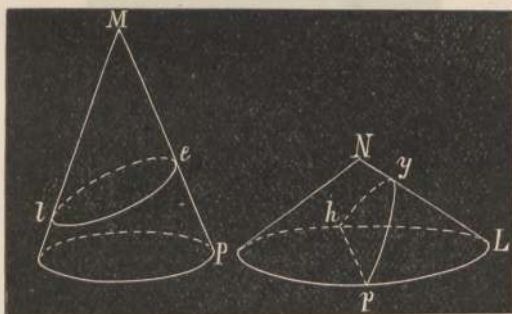


Tg. 164.

Punkter ere således beskafne, at pr er mellemproportional mellem Or og Ot , og en Parabel NOM , hvis Punkter ere således beskafne, at pR er mellemproportional mellem OR og OT . Da ville disse Parabler skjære hinanden i et Punkt p således, at pr er den søgte Kant til den dobbelte Terning; thi man har nu, at Ot forholder sig til pr ligesom pr til Or og (idet $pr = RO$ og $Or = Rp$) ligesom Or til OT .

Det deliske Problem afgiver et mærkeligt Exempel på, hvorledes man stundom i Bestræbelsen efter at løse vanskelige Opgaver kan få Held til at finde endnu vigtigere Ting, som man slet ikke havde tænkt på. Den ny Slags Linier, Parablerne, bleve langt vigtigere end Terningfordoblingen. — Frembragte ved Tankearbejde, som de vare blevne, bleve de yderligere bearbejdede af Tanken og mange mærkelige Egenskaber ved dem bleve fundne.

§ 227. Ligeledes gik det med to andre Arter af »Keglesnit«, som Menaikmos opdagede, og som senere fik Navn af *Ellipsen* og *Hyperblen*. Den første, viste

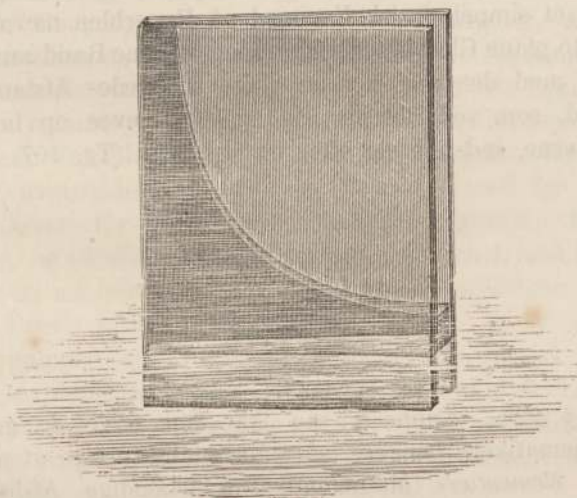


Tg. 165.

han, kunde fåes ved at lægge et Snit *el* (Tg. 165) vinkelret på Sidelinien *MP* i en spidsvinklet Kegle, medens han fik Hyperblen *hyp* som vinkelret Snit på Sidelinien *NL* af en stumpvinklet Kegle.

Det var Keglesnitsliniernes *geometriske* Egenskaber, der væsentlig havde Interesse. At de kunde tænkes opståede som Snit i Kegler, var en underordnet Sag. Det var rimeligvis derfor, at Menaikmos og de nærmest følgende Matematikere nøjedes med at angive dem som Snit vinkelrette på Sidelinien af en retvinklet, spidsvinklet og stumpvinklet Kegle. Dette var den simpleste

flere andre krumme Linier, ligeledes med sikre og klare Tankebestemmelser, men ingen af disse have fået den Betydning som Menaikmos' Keglesnit. Dette beroer væsentlig på den antydende Sammenhæng med hine vigtige Opgaver (§§ 151—158); og Keglesnitslæren fik i forholdsvis kort Tid af de græske Matematikere en stor Udvikling, så at f. Ex. en Mathematiker Aristaios før det fjerde Årbundredes Slutning skrev et Værk i 5 Bøger om Keglesnit. — Når vi ikke her kunne følge disse videnskabelige Arbejder, kan det derimod nævnes — for



Tg. 167.

at ikke Nogen skal tro, at disse Arbejder næppe have anden Værdi end at være et interessant Tankespil for skarpsindige Tænkere —, at Ellipse, Parabel og Hyperbel ikke alene fra Tankens Side findes i Slægt med Cirklen, som tilligemed den rette Linie spiller Hovedrollen i den udvortes Verden, men at Keglesnitslinierne ligeledes

forekomme hyppigt i Naturen og på Steder, hvor det er særdeles vigtigt, at man kan behandle dem. Således bevæge alle Himmelleger uden Undtagelse sig i Keglesnit, navnlig i Ellipser, men for Kometernes Vedkommende også i Parabler og Hyperbler; og Keglesnitslæren er derfor det uundværlige Grundlag for Keplers Love og Newtons Redegjørelser for Himmellegerernes Bevægelser $[\odot]$. Fremdeles bevæger ethvert udkastet Legeme — forsåvidt det ikke forstyrres af Luften — sig i en Parabel (ved et Vandspring eller Vandfald dannes i kort Tid Tusinder af Parabler, og det er utvivlsomt de løvbundne Bevægelser, der tiltaler Øjet). Og endelig kan som et simpelt fysisk Exempel på Hyperblen nævnes, at når to plane Glasplader lægges med den ene Rand sammen, men med den anden i en ringe indbyrdes Afstand, vil Vand, som ved Hårrørsvirkning $[\odot]$ hæves op imellem Pladerne, indstille sig efter en Hyperbel (Tg. 167).

E u k l i d.

§ 229. Kunne vi nu ikke her følge de græske Matematikere længere, så står endnu tilbage at nævne den *elementære* Mathematiks fuldstændige Afslutning. Denne blev fuldbyrdet i *Alexandria* omtrent År 300 f.Kr.

Efter at Filip af Makedonien i Slaget ved Kæronea 338 f. Kr. havde undervundet Hellas, og Alexander den Store havde fuldendt sin Faders Værk, vundet sine glimrende Sejre i Asien, og anlagt Alexandria ved den kanobiske Nilmunding, flyttede Midtpunktet for græsk Videnskab og Kunst over til den, uden Exempel hurtigt opblomstrende Stad. Alexanders Eftermand på Ægyptens Trone, Ptolemæos Soter, Lagus' Søn, fortsatte med Iver

og Dygtighed Stadens Udvikling og Forskjønnelse og samlede om sig en stor Kreds af Grækenlands mest ansete Lærde, hvilket i ikke mindre Grad fandt Sted under hans Søn og Efterfølger Ptolemæos Filadelfos, og i det hele taget under Lagidernes Regjering. De to første Ptolemæer opførte en Mængde Pragtbygninger og Slotte i den Del af Staden, der kaldtes Brukium, og nogle af disse vare bestemte til at afgive et Opholdssted for de Lærde, som Kongen gavmild og rundhåndet underholdt. »Musæet«, som det er blevet kaldet, »bestod af en Spadsereplads, en udstrakt af Træer skygget Gård med Brønde og Hvilepladser, en vid, ved de den omgivende Buegange også mod Regnen beskyttet, åben Hal, i hvilken de Lærde mødtes, disputerede og samlede deres Disciple omkring sig, og desuden af en stor Bygning med en rummelig Spisesal. Her lå Musæets Medlemmer på græsk Vis tilbords under Måltidet, ordnede efter de Skoler, hvortil de bekjendte sig, Aristotelikernes for sig, Platonikerne for sig. Hvert Samfund valgte sin Forstander, og alle Forstanderne udgjorde et Senat, ved hvis Møder en udenfor Partierne stående af Regjeringen udnævnt Provst førte Forsædet.

Bygningen var rummelig, rigt og kunstnerisk udsmykkede dens Gårde og Haller, og hver enkelt Lærd syntes fuldstændig uafhængig; thi det stod ham frit for, om han vilde give Undervisning eller granske i stille Ensomhed.

Under Filadelfos blev Musæet det Brændpunkt, der forenede alle Stråler af Datidens Åndsliv i sig. Ingensteds stod der heller så fortrinlige Dannelsesmidler til de Lærdes Rådighed; thi Filadelfos forstod at forøge den af Faderen grundlagte Bogsamling med så megen Omtanke og Rundhåndethed, og lod den tillige opstille og ordne så fortræffeligt, at dette, det såkaldte alexandrinske Bibliothek, som stod i Forbindelse med Musæet, og indeholdt c. 400,000 Ruller, med Rette anses for at have

været det fortrinligste i hele Oldtiden. Indtil Cæsars Dage, da disse Skatte, som havde så stor Betydning for de alexandriniske Lærdes Arbejder, blev et Rov for Flammerne, synes Ptolemæernes Bogsamling at være voxet til 900,000 Ruller.

Der findes intet Videnskabsfag, der ikke blev dyrket i Alexandrias Musæum, intet Studium, som ikke blev drevet og ført fremad der, men det betydeligste og bedste ydedes dog på Grammatikens, Filologiens og Naturvidenskabernes Område.

Alexandrinernes kritiske Studier kunne vi takke for Bevarelsen af den græske Litteratur. Hvad Naturvidenskaberne angår, så er det sikkert, at deres glimrende Udvikling i vore Dage står i Forbindelse med og knytter sig til Overleveringer fra Alexandrinerne^{*)}.

Her mødtes under Ptolemæernes i videnskabelig Henseende upartiske Auktoritet Platos ideale og Aristoteles' reale Filosofi [⊙]; og det er da intet Under, at græsk Videnskabelighed her satte værdifulde Frugter; men det er måske også en Følge af de altfor gunstige udvortes Kår, at flere af de forskellige Videnskabsgrene efterhånden nåede at blive *færdige*, så at Udviklingen gik istå, hvorefter der naturligvis fulgte et Forfald.

§ 230. I dette ny Midtpunkt for Dannelse og Lærdom var det også, at den *elementære* Geometri skulde finde sin fuldendte Afslutning ved *Euklid*, en af de Lærde ved Ptolemæos Soters Museum. Vi vide desværre meget lidt om hans Person. Han er født i den sidste Del af det 4de Århundrede f. Kr. og skildres som »særdeles velvillig og billig mod Alle, der blot i nogen Grad formåede at fremme Videnskaberne, i ingen Måde trættekjer og ikke pralende«. På den anden Side har han stået på et strængt videnskabeligt Standpunkt, hvilket fremgår af det skarpe Svar, han gav Kong Ptolemæos på dennes

^{*)} Georg Ebers: Ægypten, overs. af Galschiøt. 1881.

Anmodning om at hjælpe ham til en let Forståelse af hans Læresætninger: »I Mathematiken findes ingen Kongevej!«^{*)}. Vi vide ikke, hvilke nye matematiske Opdagelser, Euklid muligvis selv kan have gjort, men det, hvorved hans Navn er blevet udødeligt, er det Værk over „*Begyndelsesgrundene*“ i 13 Bøger, hvori han samlede og ordnede, hvad der er fornødent til et pålideligt Kjendskab til den elementære Mathematik, og hvori han roses for at have fremsat Sætningerne så uforandrede efter deres Opdagere, som det lod sig gjøre, når de dog skulde indpasses i et sammenhængende System. Hvilken Skjønsmhed Euklid har udvist i Valg og Ordning af sit Værk, fremgaaer deraf, at vi af de tidligere Lærebøger kun have ringe Spor tilbage, medens der ikke senere fremkom nogen Bog, der kunde konkurrere med Euklids. Biblen fraregnet, gives der næppe nogen Bog, der i samme Grad som Euklids *Begyndelsesgrundene* er bleven alle Tiders og alle dannede Folkefærds Lærebog, eller som er bleven afskrevet, kommenteret, oversat og trykt på så mange Sprog og i så mange Oplag; thi denne Bog har i de senere forløbne År og er endnu i flere Lande den faste Lærebog i elementær Mathematik, som siden Platos Dage har været et aldrig svigtende Fag i enhver videregående Skoleretning (§ 203).

Når dog her i Landet og i visse andre Lande Euklid er gået af Brug i de senere År, så er dette, *ikke* fordi nogen Nutidsforfatter skulde have overgået ham i at give en Fremstilling af Mathematiken, som skulde være bedre skikket til Udvikling af den menneskelige Tænkning — og hertil var det næsten udelukkende, at Mathematiken tidligere blev brugt som Skolefag —, men snarere, fordi der i vore Dage stilles så mange praktiske Krav til matematiske Kundskaber, at man har

*) I Alexandria, var der en Kongevej, der kun måtte betrædes af Hoffets Medlemmer.

forsøgt virkelig at finde sådanne »Kongeveje« eller Jernveje ind i Mathematiken, hvis Tilværelse Euklid benægtede, men som dog tildels kan skaffes ved Midler, som ville blive omtalte i denne Bogs sidste Afsnit; men det kan vel hændes, at man i Iveren efter at skaffe disse Jernbaner undertiden skyder det første Hensyn — det tankeudviklende — temmelig meget til Side.

Euklid har bl. a. også skrevet et Værk om »Fejlslutninger«, der ligeledes blev brugt som en Skolebog i de første 7 Århundreder, men senere desværre er gået tabt. Han har deri rimeligvis gjort opmærksom på, hvorledes der ikke bør tænkes, medens han i »Begyndelsesgrundene« har vist, hvorledes der bør tænkes; og det tør nok siges, at mange andre Fag have brugt Euklids Fremstillingsmåde som Model. Således kan nævnes, at Newton, som i sine yngre År fandt, at Euklid var altfor omstændelig og kjedelig, senere beundrede hans »Begyndelsesgrunde« og selv skrev sine verdensberømte »matematiske Grundsætninger for Naturforskning« efter et lignende Mønster, så at der i den Lovtale, som blev holdt over dette Værk ved dets Forelæggelse for det engelske Videnskabernes Selskab, blev sagt, at Newton havde klaret denne Sag således, at der var ikke mere at gjøre ved den.

Men én Ting fordres, for at man skal have Udbytte af Euklid og af alle Værker efter hans Model, nemlig, at Interessen og Sandsen for den Sag, der føres frem, tilforn er vakt. Hvor dette ikke er Tilfældet, blive sådanne Værker let kun til Plage, og komme næppe til at virke synderlig tankeudviklende, selv om de læres med en vis pligtmæssig Flid.

§ 231. Det er allerede nævnt (§ 205), at den grundige Fremstillingsmåde når tilbage til Platons Tid. Men for des bedre at gjøre opmærksom på dens Ejendommelighed, hvad enten man nu vil lære den hos Euklid selv eller hos Nutidsforfattere af systematiske Lærebøger, skal

her gives et lidet Brudstykke af første Bog af »Begyndelsesgrundene«, idet her dog kun tages så meget med, som er nødvendigt for at vise den sikre Sammenkjædning.

Euklids Begyndelsesgrunde.

1ste Bog.

Redegjørelser (Definitioner).

1. Et Punkt er det, som ingen Dele har.
2. En Linie er en Længde uden Brede.
3. Enderne af en Linie ere Punkter.
4. En ret Linie er den, som ligger lige udstrakt*) imellem sine Punkter.
5. En Overflade er det, som alene har Længde og Brede, men ikke Tykkelse.
6. Det yderste af en Overflade er Linier.
7. Et Plan er en Overflade, som overalt ligger jevnt imellem de rette Linier, der kunne tegnes i den.
8. En plan Vinkel er den Åbning, der er imellem to Linier AB og AC , som i et Plan skjære hinanden.
-
13. En Grændse er det yderste af en Ting.
14. En Figur er det Rum, der er indesluttet af en eller flere Grændser.
15. En Cirkel er en plan Figur, som er indesluttet af en Linie $ABCD$, kaldet Omkredsen (Periferien). Og i hvilken alle de rette Linier EA , EB , EC , ED , osv., som tegnes til Omkredsen fra et af de Punkter, som er indenfor Figuren, ere lige store.
16. Og dette Punkt kaldes Cirkelns Midtpunkt (Centrum).
-
20. Retlinede Figurer ere de, der ere indesluttet af rette Linier.
21. Af disse kalder man dem Trekanter, som ere indesluttet af tre.
-
24. En ligesidet Trekant kaldes den, som har tre lige store Sider.
25. En ligebenet Trekant kaldes den, som kun har to lige store Sider.

..... (ialt 35).

*) Den rette Linies materielle Udspring, Snoren (§ 61), er ikke endnu glemt hos Euklid.

Forudsætninger (Postulater).

1. Det forudsættes, at man kan tegne en ret Linie fra et Punkt til et andet,
2. At man kan forlænge en given ret Linie til begge Sider, og
3. At man om ethvert Midtpunkt, og med hvilken Linie eller Afstand det forlanges, kan tegne en Cirkel.

[Der gjøres *kun* disse 3 Forudsætninger.]

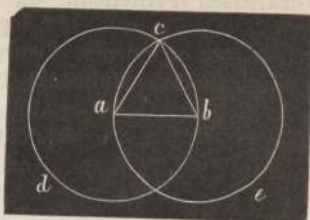
Selvfølger (Axiomer).

1. Ting, der ere hver for sig lige store med en og samme Ting (eller med lige store Ting), ere lige store.
2. Dersom man lægger lige store Ting (eller en og samme Ting) til lige store Ting, så blive de tilsammen lige store.
3. Dersom man trækker lige store Ting (eller en og samme Ting) fra lige store Ting, så blive de øvrige lige store.
-
8. Ting, der overalt passe på hinanden, ere lige store.
9. Det Hele er større end en Del deraf.
- (ialt 12).

Sætning 1.

Opgave: På en given ret Linie at tegne en ligesidet Trekant.

Eksempel: Lad ab være den givne rette Linie, hvorpå Trekanten skal tegnes.



Tg. 168.

Tegning: Om Midtpunktet a og med Linien ab tegnes en Cirkel bcd (Forudsætning 3). Ligeledes om Midtpunktet b og med Linien ab tegnes en Cirkel ace . Fra Punktet c , hvor de to Cirkler skjære hinanden, til Punkterne a og b tegnes de rette Linier ac , bc (Foruds. 1).

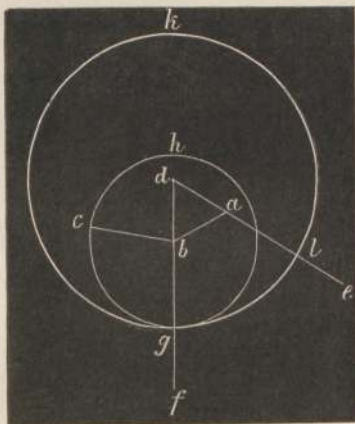
Bevis: Da nu a er Midtpunktet af bcd , er den rette Linie ac lige stor med ab (Redegj. 15). Ligeledes, da b er Midtpunktet af Cirklen ace , er den rette Linie bc lige stor med ab : altså er enhver af de to rette Linier ac og bc lige stor med ab . Men Ting, der ere hver for sig lige store med en og samme Ting, ere lige store (Selvfølge 1); følgelig er ac lig med bc , hvorfor de tre rette Linier ac , ab , bc ere lige store. — Altså er Trekanten acb ligesidet (Redegjørelse 24), og den er tegnet på den givne rette Linie ab , hvilket var det, som skulde gøres.

Sætning 2.

Opgave: Fra et givet Punkt at afsætte en ret Linie så stor som en given ret Linie.

Exempel: Lad a være det givne Punkt, og bc den givne rette Linie; man skal da fra a afsætte en ret Linie så stor som bc .*)

Tegning: Fra Punktet a til b tegnes en ret Linie ab (Foruds. 1), og på ab tegnes en ligesidet Trekant (Sætning 1). Dernæst for-



Tg. 169.

*) Denne Opgave vilde vi tage os overordentlig let ved simpelt-hen at tage den givne Linie i Passeren, sætte dennes ene Ben i det givne Punkt og med det andet Passerben mærke et nyt Punkt, som forbindes med hint ved en ret Linie. Men at Euklid tager Sagen så omstændelig, er fordi han *samvittighedsfuldt vil holde sig til de Forudsætninger, som en Gang ere gjorte.*

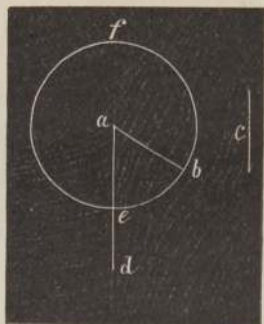
længes de rette Linier da og db henimod e og f (Forudsætning 2). Endelig tegnes om Midtpunktet b med Linien bc en Cirkel cgh (Foruds. 3), og ligeledes om Midtpunktet d med Længden dg en Cirkel gkl .

Bevis: Da nu d er Midtpunktet af Cirklen gkl , er dl lige stor med dg ; og da dba er en ligesidet Trekant, er da lige stor med db . Dersom man da trækker da fra dl og db fra dg , så er den øvrige rette Linie al lige stor med den øvrige rette Linie bg (Selvfølge 3). Men bc er også lige stor med bg (Redegj. 15), fordi b er Midtpunktet af Cirklen cgh ; altså er al lige stor med cb . — Nu er da fra det givne Punkt a afsat en ret Linie så stor som den givne rette Linie bc , hv. v. d., s. sk. gj.

Sætning 3.

Opgave: Når to rette Linier af ulige Størrelse ere givne, da at skjære en ret Linie fra den største så stor som den mindste.

Exempel: Lad ad og c være de to givne rette Linier, og lad ad være den største af dem. Der skal da skjæres en ret Linie fra ad så stor som den mindste rette Linie c .



Tg. 170.

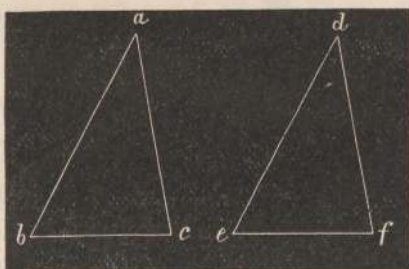
Tegning: Fra Punktet a afsætter man en ret Linie ab så stor som c (Sætning 2); og om Midtpunktet a og med Linien ab tegnes en Cirkel bef (Foruds. 3).

Bevis: Da nu a er Midtpunktet af Cirklen bef , så er ab lig med ae (Redegj. 15); men ab er også lig med c (ifølge Tegningen); følgelig er ae lige stor med c (Selvfølge 1). — Derfor er der fra den største rette Linie ad skåren en ret Linie ae så stor som den mindste c , hv. v. d., s. sk. gj.

Sætning 4.

Påstand: Når to Sider i en Trekant ere lige store med to Sider i en anden, nemlig hver Side for sig så stor som en anden, og når disse Sider tillige indeslutte lige store Vinkler, så er også Grundlinien i den ene Trekant lige stor med Grundlinien i den anden, den ene Trekant lige stor med den anden, og de andre Vinkler i den ene Trekant lige store med de andre Vinkler i den anden, nemlig hver Vinkel for sig lige stor med den Vinkel i den anden, der ligger overfor en lige stor Side.

Exempel: Lad i de to Trekanter abc , def de to Sider ab , ac være lige stor med de to Sider de og df , hver Side for sig så stor som en anden, nemlig ab som de , og ac som df , og lad desuden Vinklerne a , d , som indeslutes af de lige store Sider ab , ac og de , df , være lige store: så siger jeg, at Grundlinien bc er lige stor med Grundlinien ef , og at Trekanten abc er lige stor med Tre-



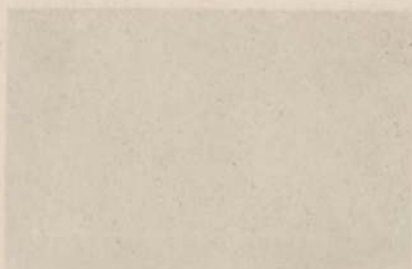
Tg. 171.

kanten def ; og at de andre Vinkler b og c i den ene Trekant ere lige store med de andre Vinkler e og f i den anden, hver Vinkel især så stor som den anden, der ligger overfor en lige stor Side, nemlig, at Vinklerne b , e , som ligge overfor de lige store Sider ac , df ere lige store, og ligeledes Vinklerne c og f , der ligge overfor de lige store Sider ab , de .

Bevis: Man tænke sig Trekanten abc således lagt på Trekanten def , at Punktet a falder i Punktet d , og den rette Linie ab på den rette Linie de , så vil Punktet b falde i Punktet e , eftersom den rette Linie ab er lige stor med den rette Linie de ; og den rette Linie ac må falde på den rette Linie df , eftersom Vinklen a er lig med Vinklen d . Følgelig må også Punktet c falde i Punktet f , fordi ac er lig med df . — Eftersom nu Enderne b og c af den rette Linie bc falde i Enderne e og f af den rette Linie ef , må bc

overalt passe på ef , og derfor må disse Grundlinier bc , ef være lige store (Selvfølge 8). Heraf følger da, at hele Trekanten abc må passe på hele Trekanten def , og altså må den ene af dem være lige stor med den anden (Sevf. 8). Og de andre Vinkler i den ene Trekant må passe på de andre Vinkler i den anden Trekant og følgelig være lige store med disse, nemlig Vinklen b så stor som Vinklen e og Vinklen c så stor som Vinklen f , hv. v. d., s. sk. bevises.

O. S. V.



BOGSTAVREGNING.

BOGSTAVREKNING

Bogstavsymbolet.

§ 232. Ved Tælning abstraherede vi fra udvortes Ting til de rene Tal, som kun have hjemme i Tankens Verden. — Fra Underafdelinger af Mønter o. l. abstraherede vi til rene Brøker, der også kun have hjemme i Tankens Verden. — Med Pythagoras så vi, at man i Tanken kan optage andre rene Størrelsesbegreber end hele Tal og Brøker, nemlig irrationale Tal; og hos Grækerne have vi lært, hvorledes den af dem udviklede Geometri er Grundlag for Behandling af Størrelser i Almindelighed.

Det vil imidlertid let skjønnes, at medens Tanken i alle disse Tilfælde går bort fra den udvortes Virkelighed, har den dog altid havt noget bestemt at holde sig til. Den er ikke gledet ud i det tomme. Den har endog havt bestemte Former at holde sig. Tænker man f. Ex. 5 Gange 7 er 35, da ser man for Anskuelsen et 5-tal, et 7-tal og et 3-tal med et 5-tal efter. Vi se dem nu i disse Former. For en Græker efter det femte Århundrede, der udførte det samme Regnestykke, stod det med Tegnene ε , ζ og $\lambda\varepsilon$. Ligeledes når vi skulle klare, hvad $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{6}$ tilsammen ere, da se vi dem for vor Anskuelse først skrevne som $\frac{3}{12}$ og $\frac{2}{12}$, og Billedet af 3 og 2 glider i denne Forbindelse over i 5, så at vi se og

udtale $\frac{5}{12}$. Det samme kan siges om de geometriske Figurer. Have vi dem ikke tegnede for vort udvortes Øje, må vi dog kalde dem frem for den indre Forestilling, hvis vor Tanke overhovedet skal kunne befatte sig med dem.

Man skjønner snart, at ikke nogensomhelst Tankevirksomhed — ligeså lidt i Mathematiken som på noget andet Område — kan foregå, uden at Anskuelsen knytter sig til visse rumlige Forestillinger, enten hentede umiddelbart fra den udvortes Verdens Ting eller dannede ifølge Vedtægt, f. Ex. 7, der ligeledes står for Anskuelsen med sin Form og følgelig med sin rumlige Udstrækning. Vor såkaldte Abstraktion er altså dog i Virkeligheden ikke nået videre end, at vor Forestilling er gået fra de udvortes Ting over til visse Tegn eller *Symboler*.

Symbolerne kunne nu enten være indrettede således, at de blot (såsom Taltegnene) ere *Stedfortrædere* for andre, måske mere indviklede, Størrelser, uden at de gjøre Forsøg på at afbilde disse, eller således, at deres rumlige Udstrækninger stå i *Forhold* til det, de betegne, og altså ere en Slags Mål derfor, såsom Linier og Fladefang i den almindelige Størrelseslære (jfr. §§ 147—158). En Symbolik af den første Art har den Fordel at være des mere uafhængig af de udvortes Fremstillingsmidler. Man vil f. Ex. ved nøjagtige Størrelsesangivelser i Reglen ikke nøjes med en billedlig (grafisk) Fremstilling af Sagen (dette kan være meget behageligt), men man vil have selve Tallene. Derimod medfører en Symbolik af den sidstnævnte Art den Fordel, at Symbolerne i ethvert Øjeblik under de Operationer, som Tanken udfører med dem, kunne afgive et umiddelbart og forholdsmæssigt Billede af de Begreber, de tjene til at behandle.

Ex. Med Tallenes øvrige Fortrinlighed og Klarhed for Tanken forbinde de ikke egentlig Anskuelighed. Vil man skaffe denne tilveje tyer man gjerne til at omsætte dem i geometriske Billeder med forholdsmæssige Udstrækninger. Da Direktionen for Krystal-

paladset i London ved dettes Tiårsfest vilde vise, at Paladset hidtil var bleven besøgt af 15,266,882 Mennesker, skete det ikke blot ved at angive dette Tal, men ved at tydeliggjøre en Million ved Hjælp af et Stykke hvidt Bomuldstøj, hvorpå der var trykt en Million sorte Pletter af denne Størrelse  ganske tæt ved hverandre og som dog fyldte en Flade på 225 Fods Længde og 3 Fods Brede.

§ 233. En anden Måde at bruge Symboler på, der står Talangivelse nærmest, beståer i, *ved hver særlig Lejlighed* at vælge sig et vist — men ikke billedligt lignende — Symbol, f. Ex. et Bogstav, for de Størrelser, man har med at gjøre, uden at bekymre sig om, at dette Symbol ellers ikke plejer at tilhøre denne Gjenstand eller måske aldrig før er bleven brugt på den. Dette kan imidlertid ske på Måder af højst ulige Værdi. Man kan bruge Bogstavet som et Navn (ligesom når vi kalde to Mænd Per og Povl). Sådant har Aristoteles gjort, idet han et Sted siger: »Når A er det Bevægende, B det Bevægede, C den Vejlængde, det er blevet bevæget, og D Tiden, hvori det er blevet bevæget, så vil den samme Kraft som A i den samme Tid D også bevæge Halvdelen af B dobbelt så langt som C , eller også i Halvdelen af Tiden D ligeså langt som C . — På lignende Måde må det opfattes, når Grækerne (måske fra Pythagoras' Tid ($\iota\gamma\upsilon\theta\alpha$), i hvert Fald fra Hippokrates' (§ 189) betegnede Punkter med Bogstaver og ved at nævne disse, enkelte eller i Rækkefølge, kunde betegne Vinkler, Linier og Figurer. Man har nemlig også Exempler på, at et enkelt Bogstav kunde bruges som Navn, ikke alene for Vinkler, men også for Linier (§ 231, Euklid, Sætning 3) og for et Kvadrat eller en anden lukket Figur eller et Legeme.

Først hos et Par meget senere alexandrinske Matematikere, *Pappos* i det 3die Årh. e. Kr. og *Diofant* i det 4de træffe vi Bogstavsymbolet brugt på en helt anden Måde; men skjøndt der ikke kan være Tvivl om — hvad der forøvrigt for Diofants Vedkommende har været om-

stridt —, at de vare Grækere, og det i Nutiden bliver mere og mere godtgjort, at også Diofant, hvad det mathematiske *Indhold* angår, bygger på de af hans Landsmænd udviklede Sætninger, kan man her have Grund til at tvivle, om denne *nye Symbolik* oprindelig er af græsk Herkomst eller muligvis er indvandret fra det fjerne Østen — fra *Hindostan*, hvor vi i alt Fald vide, at den et Par Hundredår senere stod i høj Blomstring, medens vi ganske vist ikke vide, hvorledes det stod til med Mathematiken i Hindostan på Pappos' og Diofants Tider.

§ 234. Grunden hertil er fornemmelig at søge deri, at Hinduerne var et Folk, som i Forhold til sin øvrige Kultur, må siges at være i højeste Grad uhistorisk. Medens Hinduerne have en rig og gammel Litteratur i forskellige Retninger, ere de historiske Notitser deri dog højst sparsomme; og medens der i Hindostan findes en Uendelighed af Templer, Grotter (Tg. 172), Billeder og Billedhuggerarbejder, prægede af et bevæget Åndsliv og en levende Fantasi, giver næsten intet af alle disse nogen historisk Fremstilling eller nogen virkelig Person, men flyder ud i det almene og i de uendelig skiftende mystiske Gudeformer.

Det er derfor mest, når Hinduerne komme i Berøring med andre historiske Folk, at vi få solide Holdepunkter. Således begynder efter Alexander den Stores Tog ind i Asien et Samkvem mellem de da oprettede østlige græske Riger ved Hindostans Grændser og dettes Folk, et Samkvem, som ikke taber sig i de følgende Århundreder, hvor Hinduer besøge de vestlige Kulturfolk og træffes som Gesandtskaber ved de romerske Kejseres Hof. Men begunstiget af Passatvindene over det arabisk-persiske Hav blev Samkvemmet med Ægyptens Kyster ved det røde Hav særlig livligt i 2det og 3die Århundrede efter Kristus.

Sikkert er der under dette Samkvem udvexlet meget mellem Østens og Vestens Kulturfolk. Hinduisk Filosofi og Theologi sætter sine Spor hos Grækerne (de alexandrinske

Nyplatonikere [⊙]); og græsk Indflydelse er ligeså umiskjendelig i den hinduiske Litteratur, trods Hinduernes ejendommelige Evne til, så at sige, at få ethvert Indhold omsmeltet i deres egne fantastiske Former. Således er det af Flere, deriblandt af den tidligere omtalte M. Cantor (§ 96) bleven godtgjort, at en hel Del af den græske matematiske Viden lader sig gjenkjende under andre Former i den hinduiske, så at Hinduernes matematiske Litteratur næppe er i den Grad original, som man tidligere har været tilbøjelig til at mene. Men i én Hen-



Tg. 172.

seende er der næppe nogen Grund til at antage græsk fremfor hinduisk Oprindelse, om også de første Navne, der historisk ere knyttede dertil, ere græske, nemlig i den mere omfattende Brug af Bogstavsymbolet.

For des bedre at forstå dettes Fremkomst og Væsen er det værd at lægge Mærke til, hvad der f. Ex. kan læses ud af Hinduernes gamle Kunstværker. Foruden at der taler en næsten udtømmelig Fantasi, ud af de yppige Figurer og de uendeligt slyngede Former, føle Hinduerne sig ikke nær så bundne til overleverede eller

en Gang brugte Former, som Grækerne, end sige Ægypterne. I Nydannelser have de en overordentlig rig Fantasi. »Enkelthederne bære Præget af en ubegrændset Vilkårlighed som øverste Lov.« *) »Istedenfor simple, fast bestemte Former finde vi i et Kaos af vildt bevægede Linier og Masser, som ikke give det indiske Naturlivs berusende Yppighed, mægtige Produktivitet og overdådige Mangfoldighed noget efter, ja som næsten overstråler Naturens Vidundere ved endnu dristigere Vidundere«. Særlig er det under den brahmanske Religions



Tg. 173.

Herredømme [○], at denne vældige Fantasi tumler sig, f. Ex. i de Relieffer, der pryde Toperne og Pagoderne. »Den brahmanske Gudeverdens Figurer og de mystisk udstafferede Heltesagn forbinde sig her med friere fantastiske Motiver, der allevegne forråde symbolske Hentydninger, dybsindig Spekulation, Udstrømninger af en overvættets rig Fantasi.« »Kunsten tjener en Kultus, som kun forstår at nærme sig Gudsdomsbegrebet igjennem en vild og formløs Symbolik.«

§ 235. Trods denne rige Fantasi besidde Hinduerne dog en vis Art af Beherskethed. I religiøs Henseende kommer den især til Orde under Budhismen [○], der vel er mindre oplagt til billedlige Fremstillinger, men dog

*) Lübkes Kunsthistorie, ved Lange.

også har efterladt sig Mindesmærker, som da røbe »en dybsindig Eftertanke, en dyb Kontemplation udtrykt på en simpel og alvorlig Måde«. Også i mere menneskelige Fremstillinger må man stundom beundre en ejendommelig Renhed og Mildhed, navnlig i kvindelige Skikkelser, f. Ex. Sakuntala eller i Billeder som Tg. 173, der forestiller et Relief fra Grotten i Ellora, noget som dog, navnlig når det anvendes på Mænd, let henfalder i det drømmende på Bekostning af det dådskriftige.

§ 236. Jo mere man er anlagt til at symbolisere, des mere Virkelighed tillægger man gjerne Symbolet, så at det ikke bruges blot som et Navn eller til at minde om det, for hvilket det er Symbol, men det kommer så at sige til at indeholde selve dettes Væsen. — Jo rigere Fantasi er, des mere Indhold lægger man ind, endog i meget simple Symboler. — Jo mere Beherskethed og Ro man besidder midt i hele dette Mylder, des sikrere er man på *i Mylderet at finde, hvad man attråer* (de hinduiske Æventyr fortælle med endnu større Dristighed end de nordiske om de mærkværdigste Indtræf af Begivenheder og Fund af Gjenstande, som netop ere fornødne til Knudens Løsning). Det er derfor ikke urimeligt, at Hindostan er Hjemstedet for den frie Symbolik af Bogstaver, den nemlig, hvorved *et Bogstav ved en given Lejlighed ikke blot er Navn på en Størrelse, men bærer i sig Størrelsens Væsen, selve Størrelsen*. Også Hinduernes Talsystem kan siges at være et Udslag af denne friere Symbolik; i dette nøjedes Tallene ikke som hos andre Folk med at være faste Symboler for disse Tals Betydning (Hundredtegn, Tusindtegn osv.); men her ere de samme Siffre *efter Omstændighederne* (3: Pladsen) Symboler for Tiere, Hundreder osv. Således bliver nu et Bogstav Symbol på en hvilken som helst Størrelse, dog således, at der ved hver enkelt Lejlighed iboer det en bestemt Størrelse, hvis Værdi Hinduerne så eftersøgte med deres eventyrlige Tro på at finde den i Størrelsernes uendelige Skare.

Det matematiske Tegnsprog.

§ 237. Når man nu for selve Størrelserne indfører Symboler, må også de *Handlinger* (Sammenlægning, Deling osv.), der skal udføres med dem, og de *Udsagn*, der gjøres om dem, have sine bestemte Tegn. Men har man først valgt at bruge et lidet simpelt Bogstav som Symbol, istedenfor et helt Ord eller for en Talemåde såsom »den ubekjendte Størrelse«^{*)}, saa bør også de Behandlinger, Symbolet skal underkastes, udtrykkes på lignende kort og fyndig Måde, og vi træffe da også både hos Diofant og hos Hinduerne på sådanne Handlings-tegn og på Regler for Operationer med disse.

Tegnene have været skiftende igjennem Tiderne (ligesom selvfølgelig Bogstaverne, som hvert Folk i Reglen har valgt ud af sit eget Alfabet). Da Valget imidlertid er uvæsentlig, skal her blot nævnes et Par Exempler.

Lighedstegnet, således som vi nu bruge det, og som det — ganske vist ikke historisk berettiget — er blevet anvendt tidligere i denne Bog, er ikke synderlig gammelt. Hos Diofant, hvor Symboliken ingenlunde er gennemført, men Symboler og almindelige Ord skrives i en sammenhængende Sætning (ikke frit for at minde om de kinesiske Kjøbmænds Brug af Hindutallene, § 16), skrives der ofte helt ud:

. „ere lige“

men på andre Steder har Diofant dog dette forkortet til disse Ords Begyndelsesbogstav ι ($\iota\sigma\sigma\iota \epsilon\iota\sigma\iota\nu$).

Hinduerne bruge i almindelig Skrift som Udtryk for,

*) Man har villet hævde Ægypterne Æren af at være Bogstavregningens Opfindere, fordi man hos Ahmes har fundet et Udtryk, som betyder »Størrelse« eller »Hob«, på Ægyptisk »Hau«. Men da dette Ord skrives med aldeles samme Skrift som alt det øvrige og ikke er det mindste mere symbolsk end dette, er der næppe Grund til at lægge andet ind i det.

at to Ting ere lige store, at de ere i »*Ligevægt*«; men når de skrive *Symboler*, skrive de ikke dette, ikke heller i Forkortning; *de udtrykke det blot ved Symbolernes Plads*, dette minder om Positionssystemet, idet nemlig det ene Sæt af Symboler underneden det andet betyder, at det ene Sæt er lig det andet.

Araberne optog igjen et Bogstav som Lighedstegn, nemlig Endebogstavet i deres Ord for: »er lig«.

Mod Slutningen af det 16de Århundrede skrev Evropæerne atter et Ord istedenfor et Symbol, nemlig »æqual« (Latin: lig). Omtrent samtidig træffes dog også Tegnet $\parallel$, indtil man endelig i Midten af det 17de Aarh. begynder at bruge Tegnet $=$.

Ligeledes er vort nuværende Tegn for Sammenlægning (Addition), $+$, og vort Tegn for Fratrækning (Subtraktion), $-$, ikke ældre end fra Slutningen af det 16de Årh. *) Når Diofant, Hinduer og Arabere satte Størrelser umiddelbart ved Siden af hinanden, mente de, at Størrelserne skulde lægges sammen, og når en Størrelse skulde trækkes fra, skrev Diofant et omvendt Bogstav af Ordet »Fratrækning« og ligeledes gjorde Araberne senere, hvorimod Hinduerne blot satte en Prik ovenover det, der skulde trækkes fra. Inden Europæerne fik $+$ og $-$, brugte de $\overline{p}$ (plus, Latin: mere) og $\overline{m}$ (minus, Latin: mindre). Kineserne skrev de Størrelser, der skulde lægges til, med rødt, dem, der skulde trækkes fra, med sort.

Hinduerne synes således at have havt det reneste Symbolsystem: ikke alene vare deres Størrelsessymboler Bogstaver, men de Handler, der skulde udføres med dem, vare hos dem mest betegnede ved derfra afvigende Tegn (ikke så meget Bogstaver (end sige Ord) som særlige små Tegn eller blot ved Stillingen). Dog træffes

*) De Hieroglyfer, som Ægypterne brugte til at udtrykke Sammenlægning og Fratrækning, ere ret talende, nemlig: et Par Ben, som gå til, og et Par Ben, som gå fra.

også en enkelt Gang en Handling udtrykt hos Hinduerne ved et Bogstav; således, at to Størrelser skulde foldes med hinanden, udtrykkedes ved først at skrive de to Størrelser lige efter hinanden og så at tilføje Forbogatavet i Ordet »det Frembragte«, »Produktet«.

§ 238. Hvorledes man former sine Symboler og deres Handlingstegn, er imidlertid det mindre væsentlige (lige som det er uvæsentligt, om Positionssystemet betjener sig af de Siffre, Hinduerne eller Araberne, Kineserne eller vi bruge). Hovedsagen er, at man kommer ind på et sådant System og vælger Symboler og Tegn så simple som muligt, samt finder Regler for Handlingen med disse. Vi skulle strax se, hvad Hinduerne i så Henseende gjorde; men vi ville dog hertil bruge vore egne Bogstaver og de i Nutiden almindelige Tegn. Disse og de dertil knyttede Udtryksmåder ere:

- = »er lig med«, skrives imellem Størrelser for at udtrykke, at de ere lige store.
- + »plus« betyder, at den *derefter følgende* Størrelse skal lægges til det Foregående.
- »minus« betyder, at den *derefter følgende* Størrelse skal trækkes fra det Foregående.
- + og —, der altså udtrykke en Handling med den efterfølgende Størrelse, har man givet særligt Navn af »Fortegn.«

Anm. Der er dog et Sted, hvor man i Reglen undlader at skrive +, men underforstår det, nemlig i blandede Tal, såsom $2\frac{2}{3}$ istedenfor $2 + \frac{2}{3}$.

eller $\times$ »Gange«, sættes imellem Størrelser, der skulle foldes. Foruden disse to Tegn (af hvilke forøvrigt det ene kunde være nok) har man endnu en tredje Måde at betegne Foldning, nemlig ved at skrive Størrelserne uden Tegn imellem sig, en Måde, som dog *ikke må* bruges ved

Tal og Brøker, da dette som bekjendt vilde give en helt anden Mening.

: »delt med«, sættes imellem to Størrelser for at betegne, at den foran Tegnet skal deles med den, der følger efter Tegnet.

Størrelser, der behandles på disse Måder, få følgende Navne:

$$Adend + Adend = Sum.$$

$$Minuend - Subtrahend = Differents \\ \text{el. Forskjel.}$$

$$Multiplikator \times Multiplikandus = Produkt.$$

$$\text{eller} \quad Faktor \times Faktor = Produkt.$$

$$Dividend : Divisor = Kvotient.$$

$$\text{eller (§ 56)} \quad \frac{Tæller}{Nævner} = Brøk.$$

Findes nu flere Størrelser forbundne med forskellige af disse Tegn, har man vedtaget følgende Regel:

Hvad der befinder sig foran det forreste + eller —, eller efter det sidste + eller —, eller imellem et Par af denne Slags Tegn, kaldes et Led og skal behandles som en Helhed (regnes ud for sig).

I en Brøk er naturligvis Tælleren en Helhed og Nævneren en Helhed, hvad der så end skal gøres med Brøken.

Ex. Udregn følgende Størrelser:

$$24.5 + 14 - 4.3 + 18:6 - 2$$

$$4 + 16.3 - 2.3.4:8 - 1$$

$$60:12 - 2 + 17 \times 5 - 3$$

$$4\frac{2}{3}:6.35 - 5:6\frac{1}{2}$$

$$\frac{5.6 - 8}{2} - 2.3 - 4.$$

§ 239. Forsåvidt man mener det anderledes, forsåvidt de enkelte Størrelses Udregning og Sammentrækning skal foregå i en anden Orden, sætter man *Paran-*

theser eller *Klammer*, og, *hvad der står i et Par Klammer*, er at betragte som en *Helhed* (der først udregnes). Denne kan undertiden være en Del af en større *Helhed*, som muligvis atter holdes sammen med et *Par Klammer* osv. Udregn følgende *Størrelser*:

$$24.5 + (14 - 4).3 + 18 : (6 - 2)$$

$$24.(5 + 14 - 4.3) + 18 : 6 - 2$$

$$[24.5 + (14 - 4)].3 + 18 : 6 - 2$$

$$24.(5 + 14) - (4.3 + 18) : 6 \quad 2$$

$$24.5 + (14 - 4.3 + 18) : 6 - 2$$

$$24.[5 + 14 - (4.3 + 18 : 6) - 2]$$

Ligningen.

§ 240. *Mathematiken* er voxet frem af *Bestræbelsen* efter at løse *Opgaver*, hvad *Bogens* første to *Hovedafsnit* jevnlig vise. »At måle det *Utilgjængelige*« er en *Stræben*, der, frit fortolket, går som »den røde Tråd« gennem *Grækernes Geometri*. Men under *Forsøgene* på at løse *Opgaverne* blev der ofte indvundet *Erfaringer*, som man slet ikke havde ventet. Endnu hos *Euklid* består den *mathematiske Lærebygning* (på *Grundlag* af *Redegjørelser*, *Forudsætninger* og *Selvfølger*) af en *Samling Sætninger*, *snart Opgaver*, *snart Påstande*, i broderlig *Ligestilling*. I *Nutidens Lærebøger* ere *Påstandene* blevne en endnu mere væsentlig *Del* af *Materialet* i *Lærebygningen*; nu anføres *Opgaver* i *Reglen* kun som »*Exemplar* til *Øvelse*.«

På lignende Måde er det uden *Tvivl* gået med *Bogstavregning*, og medens det må stå hen, om *Diofants Brug* af *Bogstavsymboler* skyldes *østerlandsk Tilskyndelse*,

eller om den skulde have været Begyndelsen til, hvad der blev videre udviklet i Hindostan, kan der næppe være Tvivl om, at de hinduiske Folkemøder, hvor man så at sige opførte Opgaveturneringer, have været et Arnested for Bogstavregning. — Et hinduisk Værk fra det 7de Årh. e. Kr. (Brahmagupta § 241) slutter således: »Disse Opgaver ere nu fremsatte til Fornøjelse; den Vise kan opfinde Tusinde andre, eller kan efter de givne Regler løse Andres Opgaver. Ligesom Solen fordunkler Stjernernes Glands, således vil den Dygtige fordunkle Andres Ros i Folkeforsamlingerne, når han forelægger Bogstavregnings-Opgaver, og endnu mere, når han løser dem.«

For i disse Vædekampe at gjøre Opgaverne des kunstigere, brugte Hinduerne at indklæde dem i en poetisk eller på anden Måde indviklet Form, således som f. Ex. den vel kjendte Opgave om »I Tyve-Gjæs« (§ 255). Sådanne Opgaver ere senere gaaede Verden over; og der findes også hos os adskillige rundt om i Landet; men medens det hos os andre Folk er de samme Opgaver, der vandre omkring, bleve de til i Hinduernes Vædekampe og under deres levende Fantasi i stort Antal.*)

§ 241. Man har ved disse Lejligheder betjent sig af helt andre Hjælpemidler (som allerede antydte, Symboler) end dem, som den i Grækenland opvoxende Geometri benyttede. Opgaverne ledede derfor også til Resultater af helt andet *Udseende* end de græske; men medens det endog på Grækernes historiske Jordbund var vanskeligt for os at følge Udviklingens Gang, er der næppe nogen Udsigt til, at dette kan nåes i det lidet

*) Også Skakspillet, det smukkeste af alle Spil, stammer fra Hindostan. Det kom i det 6te Årh. e. Kr. til Persien (hvorfra Navnene: »Shah« = Konge, og »mat« = død, skrive sig) og blev under Korstogene ført til Europa.

historiske Hindostan, hvor der ved År 500 e. Kr. fremstod en Forfatter, der ligesom Euklid stillede sine Forgjængere i Skygge; og her have vi ingen andre historiske Hjælpemidler, hvorved vi kunne drage Forgjængerne frem pāny.

Forøvrigt er der den væsentlige Forskjel pā de matematiske Forfattere i Grækenland og i Hindostan, at hine skrev Værker, som udelukkende handlede om denne Sag, medens Mathematiken i Hindostan kun blev skreven for Anvendelsens Skyld, navnlig som matematiske Kapitler i *astronomiske* Værker. — Ogsaa om selve Forfatterne vide vi meget lidet.

Arya-Bhatta, født 476 e. Kr. ved Ganges' øvre Løb, skrev et Værk, hvis tredie Afsnit er Mathematik.

Brahmagupta, født 598 e. Kr., skrev et Værk, hvis 12te og 18de Afsnit er om Mathematik.

Disse to Værker, der synes at have afløst de tidligere, blev dem, som man flere Århundreder efter væsentlig holdt sig til, idet Mathematiken ikke senere gjorde synderlige Fremskridt. Dog opstod endnu en fremragende Forfatter i

Bhaskara-Akaryā, f. 1114 e. Kr., og som omtr. År 1150 skrev et Værk, «Astronomiens Diadem», med to matematiske Afsnit, af hvilke det første, »Lilavati« (jfr. Forord), nærmest er en Regnebog, der dog behandler en Mængde forskellige Æmner og Fremgangsmāder, som end ikke pleje at findes i Nutidens Regnebøger, medens det sidste Afsnit, »Vija-ganita«, er en omstændelig Bogstavregning.

Bhaskaras Værk fik en stor Udbredelse. Der er fundet Exemplarer over hele Forindien ligefra Nord- til Sydspidsen, fra Øst- til Vestkysten. Indskriften pā en Ruin fortæller endnu i vore Dage, at her var en Skole, rejst af Bhaskaras Sønnesøn, og hvor hans Værker studeredes; men forresten var Udviklingen allerede gāet i

Stå; man nøjedes med at gjøre et tarveligt Bekjendtskab med, hvad der alt forelå.

§ 242. En almindelig Art af Opgaver, som Hinduerne have stillet hinanden, har vistnok været af lignende Art som dem, hvori vi sige: »Tænk på et Tal, osv.« eller »Jeg tænker paa et Tal, osv. . . .« — Lad os tage en ganske simpel sådan:

»Jeg tænker på et Tal: jeg folder det med 3 og lægger 4 til; jeg deler det Udkomne med 10 og trækker 2 fra; da får jeg 2. Hvilket Tal tænkte jeg på?

Lad os som Symbol for det ukjendte Tal sætte x . Hinduerne betegnede det gjerne med det første Bogstav af Ordet »såmegetsom«. Da vil nys nævnte Opgave, når dens Ord ombyttes med Symboler, som den adspurgte Hindu hurtigt har noteret sig for at huske Operationerne, se således ud:

$$\frac{x \cdot 3 + 4}{10} - 2 = 2.$$

Til Løsning af sådanne Opgaver giver Arya-Bhatta nu følgende simple Regel:

Foldning bliver til Deling, Deling til Foldning; hvad der var Vinding bliver Tab og Tab Vinding; [kort sagt] „Omvending“.

Dette trænger næppe til Forklaring; man skal blot udføre alle de omvendte Regninger. Dette vil tage sig således ud (Hinduerne har rimeligvis brugt Viske-måden (§ 28); men på Papir må vi sætte det i flere Linier under hverandre):

$$\frac{x \cdot 3 + 4}{10} = 2 + 2, \text{ som udregnet giver: } 4$$

$$x \cdot 3 + 4 = 4 \cdot 10, \quad - \quad - \quad - \quad 40$$

$$x \cdot 3 = 40 - 4, \quad - \quad - \quad - \quad 36$$

$$x = 36 : 3, \quad - \quad - \quad - \quad 12.$$

Det ubekjendte Tal er 12.

Ved alle disse Operationer bliver et Tal, så at sige flyttet over på den anden Side af Ligningen derved, at det her, som Arya-Bhatta siger, behandles omvendt. Rigtigheden heraf kunde også indsees af, at en Størrelse, der ellers skulde lægges til på den ene Side af Lighedstegnet, kan trækkes fra de lige store Ting; og disse vedblive dog at være lige store (jfr. § 231, Euklids Selvfølge 2). Derved forsvinder Størrelsen på den ene Side, hvor den stod, og den kommer med modsat Tegn på den anden. Ligeledes ved Fratrækning, Foldning og Deling.

§ 243. Man gjør Opgaven lidt kunstigere, når man ikke siger, hvilket Tal der kommer ud af det Hele, men f. Ex. siger:

»Jeg tænker på et Tal; jeg folder det med 3 og lægger 4 til; jeg deler det udkomne med 10 og lægger 8 til; da får jeg det Tal, jeg først tænkte på: hvilket var det?

Dette er imidlertid noteret således:

$$\frac{x \cdot 3 + 4}{10} + 8 = x$$

Allerede den forrige Opgave havde vist, hvorledes Størrelser flyttedes fra den ene Side af Lighedstegnet til den anden, indtil tilsidst x stod alene på den ene Side og et kjendt Tal på den anden. Her bliver da nu Opgaven: at flytte Størrelserne således fra den ene Side til den anden, til man tilsidst opnåer det samme. Ved et sådant Forsøg kunne vi få:

$$\frac{x \cdot 3 + 4}{10} = x - 8$$

$$x \cdot 3 + 4 = x \cdot 10 - 80$$

$$x \cdot 3 + 4 + 80 = x \cdot 10$$

$$84 = x \cdot 10 - x \cdot 3$$

$$84 = x \cdot 7$$

$$84 : 7 = x$$

$$12 = x.$$

Hvad der således måske var begyndt som en symbolsk *Opskrivning* til Hjælp for Hukommelsen, viste sig altså at afgive *selve Hjælpemidlet* eller, om man vil, selve den Mekanisme, *der kunde fremstille den Ubekjendte*. Nogle Grundregler for Maskinens Afbenyttelse ere udtalte ovenfor af Arya-Bhatta; men, som det i sidste Opgave vil kunne bemærkes, indeholde Regningerne ikke altid Operationer med Tal alene, og man må gjøre sig Rede for, hvorledes Regningerne skulle skrives, når der forekommer et Bogstav (eller Bogstaver), som når man f. Ex. skal folde $x-8$ med 10. Ved nogen Eftertanke vil man nok skjønne, at det bliver $x \cdot 10 - 8 \cdot 10$; men foretager man sig ret mange sådanne Arbejder, vil man snart lægge Mærke til, at der er forskellige Arter af Operationer, der jevnlig forekomme; og det kan altsaa være hensigtsmæssigt at optegne en Del Regler for Regning med Tal og et Bogstav, ja med flere Bogstaver; thi Hinduerne indførte flere andre, idet de betegnede flere Størrelser med Forbogstaverne af Farverne (sort, blå, gul, rød, grøn). Inden vi imidlertid gå til disse Regler, ville vi betragte en anden hinduisk Opfindelse.

Positiv og negativ.

§ 244. Det kan vel ikke siges at være Hinduerne, der opdagede, at Tallene kunne voxte i det Uendelige; thi dette har også Andre indset, og Arkimedes havde givet en Slags Prøve derpå (§ 7); men det var Hinduerne, der fandt på en simpel Måde at skrive og opfatte Tal i det Uendelige, uden at der gjøres yderligere Vedtægter om Taltegn og Talnavne. — Det blev lige-

ledes Hinduerne, der først med klar Bevidsthed og fuld Sikkerhed forlængede Talrækken i modsat Retning, nemlig ud over Nul, til en Række Tal, som de benævnedes med et lignende Ord som »Gjæld«, medens de som Mod-sætning kaldte de sædvanlige Tal »Formue«. — Vi kalder hine *negative*, disse *positive*. — Og ligesom de sædvanlige Tal bruges i Forening med særlige Tegn til at betegne Vægt, Mål osv. (3 Pd., 7' osv.), således brugte Hinduerne ogsaa de sædvanlige Tal til at betegne »Gjæld«, men naturligvis med et særligt Mærke, nemlig en Prik over Tallet, det samme Mærke som det, hvormed de betegnede, at en Størrelse skulde fratrækkes (§ 237). Idet vi på samme Måde *mærke* de negative Størrelser med *vort* Fratrækningstegn, bliver Talrækken:

. . . — 5, — 4, — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . .

hvor vi ved —3 forstå et sådant Tal, som sammenlagt med et almindeligt 3 giver Nul (3 Kroners Gjæld lagt til 3 Kroners Formue giver »Intet«). Selve 3-Tallet kalder man den numeriske Værdi, både i det negative og i det positive Tal.

Når Hinduerne kaldte disse Tal »Gjæld« og »Formue«, så tyder dette på, at man i disse har taget sit materielle Udgangspunkt, for derfra at abstrahere til rent matematiske Begreber (ligesom vi ofte tidligere have set, særlig i Afsnittet om *Tal*); thi at Hinduerne have nået en ren Abstraktion, fremgår blandt andet deraf, at de brugte de samme Betegnelser med positive og negative Tal, når der skulde angives Vej længder i modsatte Retninger, så at f. Ex. det Antal Mil, man rejser mod Øst, kaldes positive, og det Antal, man rejser mod Vest, negative. Også her vil 3 Mils vestlig Rejse før eller efter (kort sagt sammenlagt med) 3 Mils østlig Rejse give til Resultat, at man er, hvor man oprindeligt var.

§ 245. Overhovedet bruger man positive og negative Tal ved alle sådanne Lejligheder, hvor et vist Antal

Størrelser af én Slags lagt sammen med samme Antal Størrelser af en anden bliver Nul — det eneste Tilfælde, hvor det går an at sammenlægge uensartede Størrelser, og det maa da strax bemærkes, at Sammenlægningen end ikke her sker efter de sædvanlige Regler. Man sammenlægger ikke 7 Kr.s Tilgodehavende eller »Fordringer« med 3 Kr. Gjæld på samme Måde som man ellers sammenlægger 7 med 3, men *ved at trække 3 Kr. fra 7 Kr.* Derfra hidrørte Hinduernes (såvelsom vort) Mærke af de negative Tal. Thi, som Brahmagupta forklarer, *dissess Tillægning bevirker en Fratrækning af de tilsvarende positive Tal*; ligesom han tilføjer, at *en negativ Størrelses Fratrækning (eller Borttagelse) bevirker det samme som Tillægning af den tilsvarende positive.*

Når to Arter af Størrelser have den nævnte gjensidige Egenskab, er det forøvrigt ganske ligegyldigt, hvilken af dem man kalder positiv. Det gjælder kun om, at man i hvert enkelt Tilfælde helt igjennem fastholder det en Gang trufne Valg. Vil man f. Ex. opgjøre en Mands Formue, falder det naturligt, at kalde hans Fordringer positive og hans Gjæld negativ — med mindre man f. Ex. har at gjøre med en Fallent eller et Tilfælde, hvor man véd, at Gjælden er størst; thi da kan det falde naturligt nok at sammentælle hele Gjælden som positiv, og i Forhold hertil lade Fordringerne være de negative, idet de ved deres Existents virke formindskende på Gjælden. Naturligvis må Fortolkningen af Resultatet ske i Samklang med det en Gang trufne Valg. Er Resultatet positivt, bliver Summen af den Art, som vi have kaldt positiv; er Resultatet negativt, bliver Summen af modsat Slags. Finder man f. Ex., at en Mands Fordringer er — 500 Kroner, fortolkes det som 500 Kr. Gjæld. Finder man, at en Mands Gjæld er — 300 Kroner, betyder det, at han har Fordringer på 300 Kroner.

En sådan Slutningsfortolkning hører med til selve Regningsoperationerne; thi de negative Tal høre ikke

ind under de dagligdags Begreber. Skjøndt næsten alle Mennesker nok ville vide, hvad man måtte forstå ved »— 500 Kr. Formue« eller ved »— 2 Mil mod Nord« eller ved, at »der gik — 3 Personer ind i Huset«, så har sådan Udtryksmåde ikke kunnet skaffe sig Borgerret i *Sproget*. Bhaskara siger også m. H. hertil: »Folk billiger ikke absolut negative Tal.«

Ex. 1. En Skildvagt skal optælle, hvormange Personer der i en Time kommer ind over Grændsen. Han noterer: 6 ind, 2 ud, 1 ind, 7 ud, 3 ud, 4 ind, 5 ud, 2 ind. Hvormange flere er der så indenfor Grændsen?

Ex. 2. En Bager har følgende Tilgodehavender: 75, 435, 1125, 50, 720 Øre; han skylder Mølleren 9 Kroner, Kjøbmanden 12 Kr. og Skovfogden 10 Kr.; hvor stort er hans Tilgodehavende som Helhed?

Regler for Symbolregning.

§ 246. Skjøndt det rimeligvis har været Opgaveløsning, der har fremkaldt Brugen af Symboler (§ 240), og Reglerne for disses Behandling først lidt efter lidt har klaret sig, træffe vi allerede hos de nævnte hinduiske Forfattere Sagen så vidt fremskreden, at de i første Linie give Regler og i anden Exempler, der dog udgjøre en betydelig Del af Værkerne og gjerne ere valgte ud af dette Folks fantasirige Liv, hvorfor de — som det er blevet bemærket — skiller sig fra Nutidens Regnebøger m. m. derved, at de ere ligeså fyldte med Bier, Jasminer, Perler, Lotosblomster, Fugle osv., som disse af Handler, Værtshushistorier osv.

Fra de græske Værker skille de hinduiske sig, ikke alene derved, at Hjælpemidlet er et andet, og at Græ-

kerne ikke give dagligdags Exempler, men også derved, at Fremstillingen ikke giver den logisk klare Sammenhæng og Bevisfasthed som Grækernes. Det er, som om Hinduerne ikke i den Grad glæde sig ved at føle og lade føle selve Tankens Magt som ved at fæste Blikket på det Tænkte. Det er dem kun om at gjøre *at finde det Søgte*, og ofte give de intet Bevis, men sige blot: »Se!» — Hvad de selv have kunnet udspekulere, må også en anden kunne forstå, uden at de, så at sige, nøder ham dertil. — Når vi nu give følgende kortfattede Fremstilling af Regler for Bogstavregning, er det altså ikke uhistorisk, om vi ikke begrunde Reglerne på en så udtømmende Måde, som man i vore Dage ellers plejer ved Bogstavregning, ligesom Grækerne gjorde i Geometrien. Dog afviger også her Fremstillingen noget fra Hinduernes egen, ikke alene derved, at vi i Nutiden bruge et noget andet Valg af Symboler og Tegn, men også derved, at Fremstillingsmåden dog nærmer sig noget til den græske, som vi komme fra, og som sikkert bør betragtes som den mest fuldkomne, hvormed man passende kan prøve Kræfter efter en af Nutidens Lærebøger, efter her at have gjort et foreløbigt Bekjendtskab med Regning med disse Symboler.

§ 247. Hinduerne betragtede det som en Selvfølge, at *den Orden, hvori man tæller Størrelser sammen, er ligegyldig*, og dette hvad enten Størrelserne ere positive eller negative. Ret påfaldende er det, at Hinduerne meget yndede at skrive de negative først. Vi foretrække dog gjerne at sætte de positive først.

Hin Selvfølge nævnes ikke en Gang; derimod siger Bhaskara: *Samme Bogstaver kunne sammenlægges og fratrækkes, men forskellige Bogstaver skrives hver for sig.*

$$\begin{aligned} \text{Ex. 1. } & 5 + a - b + a + 4 - b + a \\ & = 5 + 4 + a + a + a - b - b = 9 + 3a - 2b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex. 2. } & 3a - b + 5c + a - 4b - 2c \\ & = 3a + a - b - 4b + 5c - 2c = 4a - 5b + 3c. \end{aligned}$$

$$\text{Ex. 3. } 5a + 2b - d - 2a + 3c + b + 4d.$$

$$\text{Ex. 4. } -2a + 5d - c + 4b - 6d + 3a - 5b.$$

$$\text{Ex. 5. } 3c - 2a - 2c + b + a + 3b - c + a - 4b.$$

§ 248. Af Brahmaguptas Forklaringer fremgaaer endvidere, om end med nogen Omskrivning, følgende to Sætninger:

Når en Paranthes, indeholdende flere Led, skal lægges til, kan man uden videre udslette Paranthesen, idet de positive Led blive at lægge til og de negative Leds numeriske Værdi at fratrække.

Når en lignende Paranthes skal fratrækkes, kan den også slettes, men da må Leddenes Fortegn forandres, så at de positive Led blive at fratrække, de negatives numeriske Værdi at lægge til.

$$\begin{aligned} \text{Ex. 1. } a + (2a - b - c) + (3b - c) &= a + 2a - b - c \\ &+ 3b - c = a + 2a - b + 3b - c - c \\ &= 3a + 2b - 2c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex. 2. } 5a - (3a - 2b - 4c) + 2a + 2b &= 5a - 3a \\ &+ 2b + 4c + 2a + 2b = 5a - 3a + 2a + 2b \\ &+ 2b + 4c = 4a + 4b + 4c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex. 3. } 3a - (a - (2a - 2b) - 5b) &= 3a - (a - 2a \\ &+ 2b - 5b) = 3a - a + 2a - 2b + 5b = 4a \\ &+ 3b. \end{aligned}$$

$$\text{Ex. 4. } 7a - (2a - 4c) + (3b - a + c).$$

$$\text{Ex. 5. } 15 + 3a - (4 - 2a - 13b) - b.$$

$$\text{Ex. 6. } 3a + 6b - (3b - a - (a + c - 2b)) - 4a$$

§ 249. At den Orden, hvori man folder og deler en Størrelse med flere andre, er ligegyldig, have Hinduerne også opfattet som en Selvfølge af sådan Art, at de ikke en Gang nævnede det.

Derimod siger Brahmagupta: „Produktet af en negativ og en positiv Størrelse er negativt, af 2 negative er positivt, og af 2 positive er positivt.“ Af disse 4 Sætninger er den sidste selvfølgelig nok. Den første vil forståes, hvad enten man ved Produktet af en negativ

og en positiv Størrelse forståer, at den negative skal lægges et vist Antal Gange til, eller at den positive skal borttages (fratrækkes) et vist Antal Gange. At Produktet af to negative bliver positivt, forståes af, at det, at borttage en negativ Størrelse et vist Antal Gange, bevirker det samme, som om man lagde dens numeriske Værdi lige så mange Gange til.

Fremdeles siger Bhaskara: Når en Bogstavstørrelse skal foldes med et Tal, bliver Produktet dette Antal af samme Bogstavstørrelse. Også vi bruge en Skrivemåde, der svarer hertil, idet vi skrive $a \cdot 3$ eller $a \times 3$ således $3a$.

Endvidere, når en Bogstavstørrelse skulde foldes med sig selv, skrev Hinduerne den kun en Gang, men forsynet med visse Mærker. Vi skrive a^2 istedenfor $a \cdot a$, a^3 for $a \cdot a \cdot a$, osv.

Når derimod *forskjellige* Bogstavstørrelser skulde foldes, siger Bhaskara, må de alle skrives og forsynes med et vist Mærke. I § 237 ere vore Mærker nævnte ($\cdot$ eller $\times$); men vi udelade ofte disse Mærker, medens en Udeladelse hos Hinduerne betød Sammenlægning.

Endelig siger Bhaskara: når Multiplikator består af flere Led, må Multiplikandus nedskrives så mange Gange som hin har Led og foldes med hvert af Leddene, hvorefter der lægges sammen, hvad der kan lægges sammen. Vi pleje at udtrykke dette således: *med hvert af Multiplikators Led foldes alle Multiplikandens Led og det Udkomne trækkes så vidt muligt sammen.*

Ex. 1. $(5a - 1) \cdot (3a + 2)$ opstille vi således (Hinduerne lidt anderledes):

$$\begin{array}{r} 5a - 1 \\ 3a + 2 \\ \hline 15a^2 - 3a \\ \quad + 10a - 2 \\ \hline 15a^2 + 7a - 2. \end{array}$$

Ex. 2. $(2a - 3b) \cdot (7a - 5b)$.

- Ex. 3. $(a + b - c) \cdot (a + b + c)$.
 Ex. 4. $(a + b)^2$.
 Ex. 5. $(a - b)^2$.
 Ex. 6. $(a + b) \cdot (a - b)$.
 Ex. 7. $(a + b) \cdot (a + b) - (a - b)(a - b)$.
 Ex. 8. $(2a - b + 5) \cdot (a - 3)$.
 Ex. 9. $(4a - (b - a)) \cdot (a - 3b)$.
 Ex. 10. $(a^2 + b^2)(3a - 6b)$.
 Ex. 11. $(a + b)^3$.
 Ex. 12. $(a - b)^3$.

Anm. Foldning af almindelige Hindutal (§ 28) sker i Samklang hermed.

§ 250. Der kan ofte stille sig den Opgave at gjøre det omvendte af det, der blev gjort i § 249, nemlig, når der er givet en flerledet Størrelse, da at omskrive denne til et Produkt af sådanne. Dette kan ofte være meget vanskeligt og bero på et vist Snille eller et Lykketræf, idet man må gætte sig til, af hvilke enkelte Led muligvis nogle af Leddene ere opståede. — Men i et Tilfælde, og dette et meget vigtigt, kan man altid foretage denne *Op-løsning i Faktorer*, nemlig, når en og samme Faktor findes i alle Leddene. Den kan da, som man siger, sættes udenfor *Parenthes*, idet den samtidig tages bort fra hvert Led.

Ex. 1. $2ab + 6ac - 10ad = (b + 3c - 5d) \cdot 2a$.

Ex. 2. $3a - 4ab - 5ac$.

Ex. 3. $15a^2 - 20ab + 10ac$.

Ex. 4. $a^2 + 2ab + b^2$ } jfr. Ex. 4, 5, 6 i § 249.

Ex. 5. $a^2 - 2ab + b^2$ } Disse Oplosninger forekomme så hyppigt, at de altid bør kunne gøres.

Ex. 6. $a^2 - b^2$

Ex. 7. $6ac - 4bc + 15ad - 10bd$. Forsøg at tage disse Led to og to.

§ 251. Med Hensyn til at *dele* (dividere) en flerleddet Størrelse med en anden, da hedder det blot: Det gjælder om at finde Led for Led af Kvotienten således, at når hvert Led Gange Divisor trækkes fra Dividenden,

skal denne blive udtømt. Disse Fratrækninger besørgede Hinduerne rimeligvis ved Udviskning og Rettelse, som vi have set ved Deling af almindelige Tal (§ 28). Vi opstille det gjerne således, idet vi anmærke, at det ved Fratrækningerne er en god Vane at forandre alle Fortegnene på det, der skal trækkes fra, og så tælle sammen. De nye Fortegn skrives *under* de gamle.

$$\text{Ex. 1. } (15a^2 + 11ab - 14b^2) : (5a + 7b)$$

$$\begin{array}{r} 5a + 7b \int \begin{array}{l} 15a^2 + 11ab - 14b^2 \\ - 15a^2 + 21ab \\ \hline - 10ab - 14b^2 \\ + 10ab + 14b^2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a - 2b \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\text{Ex. 2. } (2a^2 - 17a + 21) : (a - 7).$$

$$\text{Ex. 3. } (2a^3 - 10a^2b + 14ab^2 - 6b^3) : (a - 3b).$$

$$\text{Ex. 4. } (a^3 - 2ab^2 + b^3) : (a - b).$$

$$\text{Ex. 5. } (a^3 - a^2b - ab^2 + b^3) : (a^2 - 2ab + b^2).$$

§ 252. For *Brøker* med Bogstavudtryk gjælde naturligvis samme Regler som for Brøker med almindelige Tal; men Regningerne kunne ikke altid udføres så vidt.

Brøkers Sammenlægning og Fratrækning. Enten ere Nævnerne ens eller de må gjøres ens (jfr. § 40—43).

$$\text{Ex. 1. } \frac{2a}{m} + \frac{3b}{m} + \frac{a-3c}{m}.$$

$$\text{Ex. 2. } \frac{a-2b}{2a-3b} + \frac{3a}{2a-3b} - \frac{4b}{2a-3b}.$$

$$\text{Ex. 3. } \frac{2a^2+b}{2a} + \frac{a^2-3ab}{3b}. \quad (\text{Skaf Fællesnævner!})$$

$$\text{Ex. 4. } \frac{1}{ab} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

$$\text{Ex. 5. } a + \frac{b}{c}.$$

$$\text{Ex. 6. } a - \frac{a^2-b^2}{a}.$$

$$\text{Ex. 7. } \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}.$$

Ex. 8. Hvor meget er $\frac{a+b}{a}$ større end $\frac{a-b}{a}$?

Ex. 9. Hvor meget er $\frac{a^2-b^2}{a}$ større end $2a$?

Brøkers Forkortning (§ 41):

Ex. 10. Forkort $\frac{3a^2-6ab}{15ab}$.

Ex. 11. Forkort $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6ab}$.

Ex. 12. Forkort $\frac{4a^2-8ab+2a}{2ab}$.

Brøkers Foldning og Deling (§ 44—47):

Ex. 13. $\frac{2a}{3b} \cdot 5a$.

Ex. 14. $\frac{7a-b}{12ab} \cdot 4b$.

Ex. 15. $\frac{a}{2a-b} : 3b$.

Ex. 16. $\frac{5a^2-10ab}{3c} : 5a$.

Ex. 17. $\frac{2a-3b}{4c} : (4a-2c)$.

Ex. 18. $\frac{3a}{5b} \cdot \frac{4bc}{6ad}$.

Ex. 19. $\frac{a-b}{2a-4c} \cdot \frac{5a-10c}{a+b}$.

Ex. 20. $\frac{7a^2}{b+c} : \frac{2a}{b^2-c^2}$.

Ex. 21. $\frac{a-b}{2a+2b} \cdot \frac{3a}{4b} : \frac{9ab}{8(a+b)}$.

Ex. 22. $\frac{5a}{a-b} \cdot \frac{3a^2-3b^2}{11b} : \frac{a+b}{6ab}$.

§ 253. Disse Omformninger af de symbolske Udtryk have været tilstrækkelige til at være Ledetråde ved sådanne Forlystelser, som have været drevne ved Hinderne Turneringer i mange Former.

Ex. I. Tænk på et Tal! Fold det med 5, læg 15 til, for-

dobbel det, slet det sidste Nul ud, fold det Udkomne med sig selv, træk 9 fra, del det med det, du først tænkte på, træk derfra, hvad du først tænkte på, så får du 6.

$$\begin{aligned} \text{Nemlig: } & \left[\left(\frac{(a \cdot 5 + 15) \cdot 2}{10} \right)^2 - 9 \right] : a - a \\ & = \left[\left(\frac{a \cdot 10 + 30}{10} \right)^2 - 9 \right] : a - a \\ & = [(a + 3)^2 - 9] : a - a \\ & = [a^2 + 6a + 9 - 9] : a - a \\ & = [a^2 + 6a] : a - a = a + 6 - a = 6. \end{aligned}$$

Ex. 2. Dér sidder eller ståer en Række Mennesker. Gå hen til Numer hvemsomhelst, og sæt denne Ring på hvilket som helst Numer af hans 10 Fingre (venstre Lillefinger kan være Nr. 1), og på hvilket som helst af Fingerens Led (det yderste kan være Nr. 1); og kom så og hør:

Fordobbel Personens Numer, læg 8 til, fold det udkomne med 5, læg Fingerens Numer til, skriv et 3-tal til Højre for det, du har, så at det Hele læses som ét Tal, læg Fingerleddets Numer til; — hvad får du så?

Fra det opgivne Tal, f. Ex. 935, trækker man selv i Tankerne Tallet 403. Af det Udkomne angiver Hundredernes Siffer (eller Siffre) Personens Numer, Tiernes Siffer Fingerens Numer (skulde dette Siffer være 0, bliver det Finger Nr. 10, men da må Hundredernes Siffer formindskes med 1), og Enerens Siffer giver Fingerleddets Numer. 935—403 er 532. Man siger altså i dette Tilfælde: »Ringens sidder på femte Persons venstre Langfingers mellemste Led.«

Lad nemlig Personens Numer være a , Fingerens b , og Ledets c . Da har man først forlangt følgende Regning:

$$(a \cdot 2 + 8) \cdot 5 + b.$$

Når man dernæst lod skrive 3 til Højre for dette, da foldes derved dette med 10, og der lægges 3 til. Altså fremdeles:

$$\begin{aligned} & [(a \cdot 2 + 8) \cdot 5 + b] \cdot 10 + 3 + c \\ & = [a \cdot 10 + 40 + b] \cdot 10 + 3 + c \\ & = a \cdot 100 + 400 + b \cdot 10 + 3 + c. \end{aligned}$$

Når man selv herfra trækker 403, får man:

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c.$$

Første Grads Ligninger.

§ 254. Hvad der ved de sidstnævnte Exempler især må falde i Øjnene, er, at Opgaver, hvis *Ordlyd* er så indviklet, at *Tanken* ikke uden den allerstørste Anstrengelse vilde kunne holde dem fast og vilde have endnu vanskeligere ved at foretage Operationer med de Begreber, den skulde holde fast, uden at de så at sige glide imellem hinanden, så at man atter og atter måtte begynde forfra, sådanne Opgaver vise sig nu for *Øjet* — og dermed også for det indre Syn — som overskuelige og forholdsvis simple, og Omformningerne ske let, uden at man er udsat for, at Tanketråden glipper. Dette Resultat er nået ved et godt Valg af simple Symboler; thi (§ 232) vor Tanke *må* have Billeder, den knytter sig til, og skulde den *fastholde* en af de ovenfor i Ord nævnte Opgaver, uden at den endnu er i Besiddelse af Bogstavsymbolerne, så må den selv have Ulejlighed med at danne sig Anskuelsesformer, nye ved hver ny Lejlighed, og disse ville i Reglen være langt mere brogede og ubestemte at operere med end de simple Bogstavsymboler og matematiske Tegn.

§ 255. Den Opgave, som nu hyppigst stiller sig, er: på Grundlag af en eller anden *Fortælling* at finde en Størrelse, den *Ubekjendte*. Denne kalde vi gjerne x ; og det gjælder da først om at få Fortællingen omsat i Symbolform, og helst således, at den får Skikkelse af en Ligning, at man altså i Fortællingen fæster Opmærksomheden på, om der er to Ting eller Udtryk, der ere lige store. At nedskrive dette med Symboler kaldes »at sætte i Ligning«.

Det næste Skridt er at *løse* Ligningen, hvilket vil sige, at bruge Reglerne for Symbolregning således, at den Ubekjendte, x , tilsidst står alene på den ene Side

af Lighedstegnet, og at der ikke står andet end bekendte Størrelser på den anden. Da står der jo, hvad den Ubekjendte er lig med. For at opnå dette må man i Reglen først bortskaffe sådanne Paranteser og Brøksudtryk, som binde den Ubekjendte sammen med andre Led, hvorefter man samler alle de Led, der ere Antal eller Brøkdeler af den Ubekjendte, på den ene Side af Lighedstegnet, og de andre Led på den anden. Dernæst sætter man den Ubekjendte udenfor Parantes og flytter sluttelig Parantesen over på den anden Side. Så er x funden.

Endelig bør man prøve, om den Ubekjendte så virkelig passer i Opgaven; thi, som omtalt i § 206, kan en Analyse kræve en Synthese: efter at først Tanken har bevæget sig den ene Vej, bør det så at sige prøves, om den med Sikkerhed netop kommer og må komme samme Vej tilbage.

Ligningens Løsning volder i Reglen ingen videre Vanskeligheder; derimod syntes Hinduerne at ynde sådanne Opgaver, hvor der skulde noget Snille til at sætte i Ligning, og navnlig til at afgjøre, hvad der nu egentlig bør hedde x ; thi det er ikke altid hensigtsmæssigt at lade den Størrelse, der ligefrem spørges om, hedde således, såsom i følgende Ex. 1 og 2.

Ex. 1. (Af *Vija ganita*, § 241.) »De 8 Rubiner, 10 Smaragder og 100 Perler i din Ørenring, min Elskede, har jeg solgt for dig til lige store Beløb. Prisen på en af hver Slags er tilsammen 3 mindre end et halvt Hundrede. Sig mig, hvis du kan, hulde Kvinde, Prisen på hver.« — »Her sættes de lige store Beløb lig x . — Da koster en Rubin $\frac{1}{8}x$, en Smaragd $\frac{1}{10}x$, og en Perle $\frac{1}{100}x$; og Ligningen bliver

$$\frac{1}{8}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{100}x = 50 - 3,$$

For at få Nævnerne bort, foldes der på begge Sider af Lighedstegnet med (Fællesnævneren) 200; altså:

$$25x + 20x + 2x = 47 \times 200$$

$$47x = 47 \times 200$$

$$x = 200.$$

Følgelig er Prisen på Stenene henholdsvis 25, 20 og 2.

Ex. 2. (Af *Vija ganita*.) »En siger: »Giv mig 100, så har jeg dobbelt så mange som du, min Ven!« Vennen svarer: »Dersom du giver mig 10, bliver jeg 6 Gange så rig som du«. Sig mig, hvor mange havde hver?»

Det, som »Vennen« vilde beholde tilbage, hvis han virkelig afgav de begjærede 100, kalder Bhaskara x ; og den første Person vilde altså, efter at have modtaget 100, have $2x$. Følgelig må Vennen oprindeligt have $x + 100$ og den først begjærende Person oprindeligt $2x - 100$. Nu giver »Vennens« Svar ligefrem Ligningen:

$$(x + 100) + 10 = 6 \cdot [(2x - 100) - 10]$$

$$x + 110 = 6 \cdot [2x - 110] = 12x - 660$$

$$110 + 660 = 12x - x$$

$$770 = 11x$$

$$70 = x$$

Altså har »Vennen« $x + 100$ eller 170, og den første Person $2x - 100$ eller 140 - 100 eller 40. Prøv!

Ex. 3. (Af *Vija ganita*.) »Af en Flok Bier sætter en Femtedel sig på en Kadamba-Blomst, en Trediedel på en Silindri-Blomst; 3 Gange så mange som Forskjellen mellem disse to Flokke fløj til en Kutaja-Blomst. En Bi, som var tilovers, summede hid og did i Luften, lokket af den søde Lugt af en Jasmin og en Pandanus. Sig mig, yndige Kvinde, Antallet af Bier.«

Ex. 4. »Giv mig et af dine Får, så har jeg dobbelt så mange som du.« »Nej, giv du mig et af dine, så har vi lige mange.«

Ex. 5. »Nå, er I dér, I Tyvegjæ!« »Vi er ikke tyve Gjæs; men, hvis vi var lige så mange til, og en halv Gang så mange til og en hel Gås og en halv Gås og en Gase, så var vi tyve Gjæs!« Eller: »Goddag, Mand, med Tyvegjæ!« »Jeg har ikke tyve Gjæs osv.«

Ex. 6. »Otte Gang otte, og fem Gang x ,
delt så vel med to som med sex,
netop to og tyve lyder;
sig mig så, hvad x betyder.«

Ex. 7. (Af *Lilavati*.) »Af en Hob rene Lotusblomster blev henholdsvis $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ og $\frac{1}{6}$ offret til Guderne Siva, Visnu og Solen, og

og $\frac{1}{4}$ til Bhavani. De øvrige 6 Lotusblomster blev givne til den ærværdige Brahman. Sig mig hurtigt Blomsternes hele Antal.

Ex. 8. Hvad er det for et Tal, hvis Fjerdedel er 3 større end dets Syvendel?

Ex. 9. Hvad er Klokken, når Viserne dække hinanden mellem Kl. 3 og 4? — (Kald det Antal Minutter x , som den lange Viser har gået fra 12.)

Ex. 10. Et sexsiffret Tal ender med 1. Flyttes dette Ettal foran de andre fem Siffrer, bliver Tallet 3 Gange mindre. Tallet?

Ex. 11. To Arbejdere kunne tømme et Anker Øl i 12 Dage. Når nu den ene alene kan drikke Øllet i 30 Dage, hvor lang Tid vilde da den anden bruge dertil? — (Det gjælder om at udtrykke, hvor stor en Del af Ankeret der drikkes på en enkelt Dag i de tre Tilfælde.)

§ 256. En Proportion skrives nu let som en Ligning; thi den udtaler jo (§ 140), at Forholdet mellem to Størrelser er lig Forholdet mellem to andre; og Forholdet mellem to Størrelser må fåes ved at dele den ene med den anden, idet *Forholdet* er det samme som det, vi have kaldt *Kvotient* eller *Brøk* (§ 238).

At a forholder sig til b som c til d , skrives altså:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

At finde Fjerdeproportionalen (§ 140) er nu ikke andet end at løse en Ligning af denne Form, hvor de 3 ere bekendte og den fjerde søges.

Ex. 1. Løs på denne Måde Ex. til § 142.

Ex. 2. De sædvanlige Regnebøgers *Regula-de-tri-Afdeling* giver rigeligt Materiale til Øvelse.

Ex. 3. Af min Løn kan jeg sætte 180 Kr. i Sparekassen årlig. Efter 7 Måneders Forløb har jeg dog kun sat 80 Kr. ind; men jeg har anskaffet en Kikkert. Hvad kostede denne?

§ 257. En Mængde Opgaver omhandler Størrelser, der stå i »omvendte Forhold». Dette vil sige, at visse Størrelser blive så mange Gange (eller i samme Forhold)

mindre, som visse andre blive større, såsom det til et vist Arbejdes Udførelse fornødne *Antal Arbejdere* og *Antal Dage* (eller det Antal Dage og det Antal Personer, som en vis Proviant kan være tilstrækkelig til, osv.). Kan a Mand gjøre et Arbejde færdigt i d Dage, og A Mand i D Dage, må man have, at imellem a og A er der det omvendte Forhold af det imellem d og D , altså

$$\frac{a}{A} = \frac{D}{d}.$$

Om en Proportion er ligefrem eller omvendt, om altså de til hinanden svarende Størrelser skulle stå lige overfor hinanden i Proportionen eller omvendt, kan i Reglen klares ved at undersøge, om man kan sige:

»Jo større (flere), des større (flere),
eller, »Jo større (flere), des mindre (færre).
I første Tilfælde ere Størrelserne ligefrem proportionale, i sidste omvendt proportionale.

Men man bør dog også overveje, om det ligger i Sagens Natur, at det ene netop bliver *så mange Gange* større eller mindre, som det andet bliver større. Dette skulde man ikke ret tro, måtte finde Sted ved sådanne Exempler i »Lilavati« som følgende: »Når en Slavinde på 16 År koster 32, hvad koster så en på 20 År.« Men Bhaskara har rigtignok lige i Forvejen med Hensyn hertil og til Handel med Oxer osv. erklæret, at »Værdien af levende Væsener bestemmes af deres Alder i omvendt Forhold« (!), og han regner så:

$$\frac{16}{20} = \frac{x}{32},$$

hvoraf $x = 25\frac{3}{5}$.

Ex. 1. Et Skib med en Besætning af 18 Mand og med Proviant for 70 Dage redder 10 Mand af et forlist Skib. Hvor længe varer nu Provianten.

Ex. 2. 14 Mand kunne udføre et Arbejde i 23 Dage; men efter 5 Dages Forløb blive 2 syge. Når vil Arbejdet blive færdigt? — De 14 Mand kunde have gjort det færdigt i 23—5 eller 18 Dage. De 12 ville bruge x , altså

$$\frac{14}{12} = \frac{x}{18}$$

Exempler findes forøvrigt til Overflod iblandt Regnebøgerne „omvendte Regula-de-tri“.

§ 258. I Opgaverne findes ofte to eller flere Ubekjendte. Hinduerne betegnede gjerne disse ved Forbogsstavet i Farverne (§ 243), vi bruge i Reglen Bogstaverne x, y, z, u, v .

Følgende Opgave: »hvor mange Kalve til 5 Kr. og Lam til 8 Kr. kan en Slagter købe for 34 Kr.?« vil, når Antallet af Kalve kaldes x og af Lam y , åbenbart give Ligningen:

$$x \cdot 5 + y \cdot 8 = 34,$$

altså, hvis man som før vilde søge at finde x :

$$x = \frac{34 - y \cdot 8}{5}.$$

Her er x dog ikke funden; thi, vel står x alene på den ene Side, men der står også en Ubekjendt (y) på den anden Side. Når man efter Behag tillægger y en Værdi, f. Ex. 2, fåes en dertil svarende Værdi for x , f. Ex. $\frac{34 - 16}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$. Ja, man kan strengt taget give y en hvilken som helst Værdi, og x får da en dertil svarende. En anden Sag er det, at der ikke i den Opgave, der har foranlediget Ligningen, er Mening i enhver Værdi af y og x . Der er f. Ex. *ingen Mening i, at disse ere Brøker* (thi det er hele Kalve og Lam), *eller i, at de ere negative* (Opgaven siger, at Slagteren *køber* et Antal Kalve og Lam, og et negativt Tal måtte betyde, at han

solgte). Man ser altså snart, at der ikke kan være Tale om andre Værdier af y end 0, 1, 2, 3 og 4 (thi $y = 5$, eller større, vil gjøre x negativ). Men af disse Værdier af y kan dog kun en *sådan* bruges, som foldet med 8 og derefter trukket fra 34 giver noget, der er deleligt med 5. Ved at prøve sig frem ser man strax, at dette kun er Tilfældet med $y = 3$, der giver $x = 2$, Værdier som passe; thi $2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 = 34$.

Ofte er det dog for uoverkommeligt at *prøve sig frem*, og der kræves da særlige Metoder til at behandle disse såkaldte *ubestemte Ligninger*, som i mange Tilfælde virkelig kunne tilfredsstilles med flere forskellige Værdier af de Ubekjendte. Vi skulle imidlertid ikke her komme ind på disses udførlige Behandling, men kun nævne, at de fik en sådan både af Diofant og af Hinduerne. Navnlig har Brahmagupta en overordentlig stor Mængde astronomiske Opgaver af denne Slags til Beregning af de Perioder, hvori Himmellegerne komme til at indtage visse bestemte Konstellationer [☉]. Dette tyder på, at det atter er Stjernerne, der have drevet denne Gren af Mathematiken frem (jfr. § 75).

Ex. En Fabrikant giver en Svend 5 Kr. for Dagarbejde og $6\frac{1}{2}$ Kr. for Natarbejde. Hvor mange Dage og hvor mange Nætter har en Svend arbejdet for 205 Kr.? Tre Svar.

§ 259. For at Løsningen af Opgaver med 2 Ubekjendte skal føre til fuldt bestemte Værdier for disse, må Opgaven give Anledning til to Ligninger. Således kunde Opgaven i § 258 hedde:

»En Slagter har for 34 Kr. købt Kalve til 5 Kr. og Lam til 8 Kr. Hver Kalv bringer han ud i 7 Kr., hvert Lam i 11 Kr., idet han sælger Kjødet for 47 Kr. Hvor mange Kalve (x) og hvor mange Lam (y)?»

Man har da:

$$x \cdot 5 + y \cdot 8 = 34$$

$$\text{og} \quad x \cdot 7 + y \cdot 11 = 47,$$

hvoraf
$$x = \frac{34 - y \cdot 8}{5}$$

og
$$x = \frac{47 - y \cdot 11}{7}$$

Da disse to Værdier af x må være lige store, får man Ligningen

$$\frac{34 - y \cdot 8}{5} = \frac{47 - y \cdot 11}{7},$$

som kun har én Ubekjendt, y , der findes at være 3.

Det gjælder altså om at behandle de to Ligninger med de to Ubekjendte således, at man får en Ligning med én Ubekjendt. Man siger, at den anden Ubekjendte bliver *elimineret* (o: skaffet af Vejen). Dette kan ske derved, at man finder den ene Ubekjendte udtrykt ved den anden, både af den ene Ligning og af den anden. Sættes de to Udtryk lige store, er den første elimineret.

Blandt andre Måder har man også følgende. Man finder x af den ene Ligning udtrykt ved y og indsætter dette Udtryk på x 's Plads i den anden. Når således i ovenstående Exempel

$$x = \frac{34 - y \cdot 8}{5}$$

indsættes på x 's Plads i

$$x \cdot 7 + y \cdot 11 = 47,$$

fåes:
$$\frac{34 - y \cdot 8}{5} \cdot 7 + y \cdot 11 = 47,$$

hvor x er elimineret, og y kan findes.

Har man flere Ubekjendte, må man i Reglen have ligeså mange Ligninger, for at Opgaven skal være fuldt bestemt; thi findes x af den første Ligning udtrykt ved de andre, og indsættes dette Udtryk på x 's Plads i alle de andre, får man derved x elimineret, men man får tillige en Ligning færre, end man oprindeligt havde. For hver Ubekjendt, man således eliminerer, får man en Ligning færre, og er der lige mange Ubekjendte og Lig-

ninger, ender man med 1 Ligning med 1 Ubekjendt, som altså kan findes.

Når først denne er funden, kan dens kjendte Værdi indsættes i en af de Ligninger, hvor den før var selvanden, og hvor man nu kan finde den anden. — Værdien af disse to indsættes atter i en Ligning, hvor de før vare selvanden og selvtredie, osv.

Ex. 1. En giver 5 Kr. 72 Øre for 12 Pund Sukker og 16 Pund Risengryn. En anden giver samtidig 4 Kr. 90 Øre for 6 Pund Sukker og 20 Pund Risengryn. Prisen på Sukker og på Risengryn?

Ex. 2. Hvad er det for to Tal, hvis Sum er 30, og hvis Kvotient er 4?

Ex. 3. Divideres hvert af to Tal med 4, bliver Differenten 1. Divideres de derimod med 2, bliver Summen 22. De ere?

Ex. 4. Når 9 Pund Kobber i Vand vejer 8 Pund, og 7 Pund Tin i Vand vejer 6 Pund, og 150 Pund Bronze (Blanding af Kobber og Tin) i Vand vejer 132 $\frac{1}{2}$ Pund, hvorledes er da Blandingen?

Ex. 5. Hvilken Brøk fåer Værdien $\frac{1}{3}$, når der lægges 1 til dens Tæller, og Værdien $\frac{1}{4}$, når der lægges 1 til dens Nævner? — Kald Brøken $\frac{x}{y}$.

Ex. 6. Poul, Per og Hans have tilsammen 486 Kr.: Poul og Per tilsammen har 222 Kr. mere end Hans; og når Per fåer Halvdelen af Hans' Penge, har Per ligeså mange som Poul. De have?

Ex. 6. »En holstensk Slagter opkjøbt har
af fede Kræ en halv Snes Par
og givet for hver Stud kurant
halvanden Hundred Mark kontant,
og just så meget for en Gris,
at tre var lig en Stud i Pris.
Af Kalve sluttet han et Kjøb,
hvis Pris for Stykket sig beløb
kun til en Femtedel deraf,
hvad for en enkelt Gris han gav.
Da nu hans Indkjøbskapital
var Tusind Mark, er den Sag smal
at regne ud, hvor mange Kræ
han fik af disse tre Slags Fæ,
hvor mange Stude, Svin og Kalve;
det findes let — man undgå halve.«

Denne Opgave har 3 Ubekjendte, men giver kun 2 Ligninger. Når den ene (Kalvenes Antal) elimineres, fåes altså en ubestemt Ligning. — Ved en lignende Fremgangsmåde som i § 258 vil man finde to Svar, indtil man lægger Mærke til, at »man undgå halve«, ikke alene gjælder næstførste Linies »Kræ«, men også »Par«.

Kvadrat og Kvadratrod.

§ 260. »De fire Specier« pleje vi at kalde de Regningsarter, der ligge til Grund for al øvrig Regning, nemlig Sammenlægning, Fratrækning, Foldning og Deling. Hinduerne talte om »de sex Specier«, og forstod derved, foruden de fire nævnte, tillige de to, som kaldes *Potentsopløftning* og *Roduddragning*.

Ligesom Foldning er en *gjentagen* Sammenlægning, således er *Potentsopløftning* en *gjentagen* Foldning, idet man ved a^m , der udtales a i m 'te Potents, forstår et Produkt af m a 'er i Antallet m , altså:

$$a = a.a.a.\dots (m).$$

Og ligesom Fratrækning er den omvendte Regningsart af Sammenlægning, og Deling den omvendte af Foldning, således er Roduddragning en omvendt Regningsart af Potentsopløftning, idet man ved $\sqrt[m]{b}$, der udtales m 'te Rod af b , forstår det Tal, som ved at opløftes til m 'te Potents giver b .

Den Potents og den Rod, som hyppigst forekommer og tilmed er lettest at beregne, er anden Potents og anden Rod. — Da dette, at opløfte til anden Potents, eller at folde et Tal med det selv, er noget, der udføres med Siden i et Kvadrat, når man vil kjende dettes Fladefang, kaldes a^2 »Kvadratet på a «. Og da det, at

uddrage anden Rod, er noget, der skål gjøres, for at man af et Kvadrats Fladefang kan finde dets Side, kaldes $\sqrt{a}$ „Kvadratroden af a “, og den Regning, hvorved man finder Tallet, »at uddrage Kvadratroden«. Iøvrigt udelader man gjerne 2-tallet og skriver blot $\sqrt{a}$ (jævnfør § 125).

At beregne en Potents kræver ingen ny særlig Regning; den kan udføres blot ved Foldning. Derimod er det betydeligt vanskeligere at uddrage en Rod. Vi skulle her kun se Uddragningen af Kvadratroden.

§ 261. Allerede Pythagoras erkjendte, at Kvadrat-roden af »et Tal, som ikke just er et Kvadrattal«, er »usigeligt«, irrationalt, og kan ikke udtrykkes ved de almindelige Tal eller Brøker (§§ 120—125).

Ikke desmindre kunde Pythagoras give aldeles nøjagtige Udtryk for en Kvadratrod, enten ved at finde den som en Side i en retvinklet Trekant (f. Ex. $\sqrt{5}$ som Hypothenuse, hvor 1 og 2 ere Katheter, $\sqrt{6}$ som Hypothenuse, hvor $\sqrt{5}$ og 1 ere Katheter, osv., eller $\sqrt{8}$ som Kathete, hvor 3 er Hypothenuse og 1 er Kathete), eller ved at omdanne et Rektangel til et Kvadrat, idet et hvilketsomhelst Tal kan repræsenteres ved et Rektangel (f. Ex. 7 ved et Rektangel, der er 7 langt og 1 bredt, eller som er $3\frac{1}{2}$ langt og 2 bredt), og når dette Rektangel er blevet omdannet til et Kvadrat, har man altså fundet en Linie, som foldet med sig selv giver Tallet, og som altså netop er Kvadratroden (§§ 153—154).

Som imidlertid Lertavlerne fra Senkereh (§ 154) vise, have Babylonierne i en fjern Oldtid haft Angivelser af en Mængde Kvadratrødder i Tal; og med den for Østerlænderne ejendommelige Talsands er det rimeligt, at Bestræbelserne for at udtrykke Kvadratrødder ved Tal navnlig ere komne østerfra. Grækernes Regnekunst (den såkaldte Logistik) blev af dem anset for at være af lavere Art end Geometrien, fordi den efter deres Opfat-

telse (§ 147) dog ikke kunde behandle det hele Størrelsesbegreb. Historien har derfor kun opbevaret os lidet om, hvad Grækerne i så Henseende formåede; men når en enkelt Gang en virkelig Mathematiker (som Arkimedes) kommer ind på en Angivelse af, mellem hvilke Værdier en vis Kvadratrod må ligge, så bevæger hans Tanke sig vel, som sædvanligt, korrekt, men tungt; og Grækerne angive aldrig synderlig snævre Grændser for nogen Kvadratrod.

Det er da også ret påfaldende, at første Gang vi træffe dette hos Grækere udført med større Lethed og med større Nøjagtighed, møde vi det i østerlandsk Dragt. Dette er navnlig hos Theon i Alexandria, der levede i Slutningen af det fjerde Årh. e. Kr. og var Fader til den lærde Hypathia [⊙]. Theon har afskrevet, forklaret og udfyldt tidligere Forfattere, såsom Euklid og Ptolemæos. Han skriver især adskilligt om Regning med 60-talsystemet, der for flere Århundreder siden var indvandret fra Kaldæa (§ 38), og som egner sig langt bedre til Uddragning af Kvadratrødder end de af Grækerne tidligere brugte Brøker. Man træffer således hos Theon Kvadratrodten af Tal funden på sådan Måde, at Senkerehs Lertavler næsten kunde siges at være den fornødne Tabel ved Regningens Udførelse.

Vi have imidlertid set, at det decimale System i Virkeligheden er bygget efter samme Plan som det sexagesimale (§ 49); og da vi danske ikke have den Øvelse i at regne med det sidste som med det første, ville vi nøjes med at give en til Theons svarende Forklaring af Roduddragningen efter Titalsystemet, som Hinduerne temmelig hurtigt efter Opfindelsen af dette, anvendte til al Slags Regning.

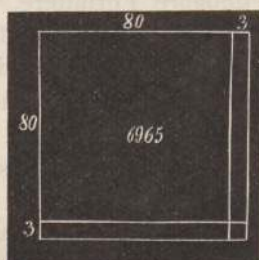
§ 262. Medens Lertavlerne fra Senkereh give alle Kvadraterne på Tallene fra 1 til 60, ere vi så heldige, at have den for os fornødne Tabel i Hovedet; men vi ville dog mærke os den, nemlig at

Kvadratet på	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
er	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100.

Vi kunne herved umiddelbart angive, mellem hvilke to på hinanden følgende Tal Kvadratroden af ethvert en- og to-siffret Tal ligger, f. Ex. $\sqrt{52}$ mellem 7 og 8.

Og ligesom Babylonierne have mærket sig, at f. Ex. 8 Sossos Gange 8 Sossos er 64 Saros, eller, at 3 Minutter Gange 5 Minutter er 15 Sekunder (§ 38), således må vi mærke os, at f. Ex. 8 Tiere Gange 8 Tiere er 64 Hundreder, og 3 Tiendedele Gange 5 Tiendedele er 15 Hundredele.

Vil man nu f. Ex. finde Kvadratroden af 6965, så ligger dette Tal åbenbart imellem 6400 og 8100 (jevnfør



Tg. 174.

de to nys gjorte Bemærkninger). $\sqrt{6965}$ må altså være mellem 80 og 90, altså 8 Tiere og nogle Enere. Tænker man sig nu et Kvadrat lig 6965 (Tg. 174), er det netop dettes Side, der skal findes, og man kan da først tænke sig et Kvadrat på 80, altså 6400, trukket fra; da får man en Gnomon på 6965 — 6400 eller 565 tilovers. Denne Gnomon er lig med et Rektangel, hvis Bredde netop er de manglende Enere x , og hvis Længde er lig 2 Gange 80 plus de nævnte Enere. Man skulde altså dele 565 med Længden $2 \cdot 80 + x$ og vilde da få Bredden x .

Dette kan man imidlertid ikke gjøre, da $2.80 + x$ selv indeholder de ubekjendte Enere, men da disse ere ubetydelige i Sammenligning med 2.80 , dele vi 565 blot med 2.80 og tage det største hele Tal, der kan fåes ved denne Deling. Derved få vi en Værdi for x , der dog muligvis kan være for stor (thi vi have jo delt med noget, der var for lidet). Efter nu at have fundet, hvilket helt Tal x i det Højeste kan være, beregne vi Rektanglet $(2.80 + x) x$. Er dette ikke større end 565 , have vi ikke taget x for stor; men er det større, må vi vælge x en Ener lavere og gjentage Prøven. — Regningen vilde tage sig således ud, som det ses til Venstre, men man udfører den gjerne kortere, således som det ses til Højre:

$\sqrt{6965}$	80	$\sqrt{6965} = 83$
$80^2 = 6400$		64
<u>565</u>		<u>565</u>
$2.80 = 160$	$x = 3$	163
$2.80 + x = 163$	<u>83</u>	<u>489</u>
$(2.80 + x)x = 489$		76
Rest = 76		

Man skriver altså i den forkortede Regning ikke de to Nuller til Hundredbetegnelse; dette besørger ved den antydede lodrette Streg. Man skriver heller ikke Nullet, hvor man tager det dobbelte Antal Tiere, men lader Pladsen stå blank, at den kan udfyldes af Enerne, såsnart disse ere fundne.

Hvad der her er fundet, er, at $\sqrt{6965}$ ligger imellem 83 og 84 , og vi kunne på denne Måde finde Kvadratroden af alle 3- og 4-sifrede Tal, og tillige, hvad der kommer til Rest (76), når det fundne Tals Kvadrat trækkes fra det Tal, der står under Rodtegnet.

Skal man finde Kvadratroden af et 5- eller 6-sifret Tal, f. Ex. 696523 , vilde man også her kunne sige, at

Roden beståer af Tiere og Enere, (når man forudsætter, at Tierne selv muligvis må angives med et to-sifret Tal). Vi kunne nu blot *ikke ud af vor Tabelhukommelse* sige, hvad det er for to Kvadrattal, imellem hvilke 696500 ligger, eller hvad Kvadratroden er af 6965. Men vi kunne finde det, således som ovenfor er vist. Vi fandt eller finde da, at Kvadratroden er 83, og at der bliver 76 til Rest. Regningen må nu fortsættes aldeles som før. Her til Venstre ses kun Forsættelsen udførligt, til Højre ses den hele Regning i brugelig Forkortning.

$\sqrt{696523}$	830	$\sqrt{696523} = 834$
$830^2 = \dots 00$		64
7623		565
2 . 830 = 1660		163
2 . 830 + x = 1664	$x = 4$	489
(2 . 830 + x) x = 6656		
	834	7623
		1664
		6656
	967	967

Ved den forkortede Opstilling plejer man gjerne at slå en Streg tværs over 163 og 1664, efter at de have gjort Tjeneste til Dannelsen af det under dem stående Produkt, for at de ikke skulle gjøre Forstyrrelse under Fratrækningen. — På samme Måde kan man fortsætte, hvor mange Sifre end Tallet har, og Reglen bliver altså:

Man inddeler Tallet under Rodtegnet i Grupper på to og to fra Højre. Af den en- eller to-sifrede Gruppe længst til Venstre kjender man Kvadratroden i Kraft af den lille Tabel. Det nærmest lavere Kvadrattal trækkes fra, og næste Gruppe føres ned ved Siden af Resten. Det fundne Tal fordobles og anbringes under dette, således at der er en tom Plads til Højre. Det næste Siffer findes ved Deling. Siffret anbringes på den tomme Plads og det udkomne foldes med Siffret. Dette Produkt trækkes fra forrige Rest, en ny Gruppe føres ned ved Siden af, osv.

§ 263. Ved Uddragning af Kvadratroden af en Decimalbrøk sørger man altid først for, at Nævneren er et Kvadrattal, altså et 1-tal med ét *lige* Antal Nuller, eller — med andre Ord — at Decimalbrøken har et lige Antal Decimaler. $\sqrt{5,325}$ f. Ex. skrives først således $\sqrt{5,3250}$. Dernæst uddrages Kvadratroden af Tælleren 53250 for sig, nemlig 231, og af Nævneren 10000 for sig, nemlig 100; thi da en Brøk opløstes til anden Potents ved, at Tælleren kvadreres for sig og Nævneren for sig, må også Kvadratroden af en Brøk findes ved, at Roden af Tælleren uddrages for sig og af Nævneren for sig. I nærværende Exempel få vi altså $\frac{231}{100}$ eller 2,31.

Reglen vil her åbenbart blive:

En Decimalbrøk skaffer man først et lige Antal Decimaler. Dernæst uddrager man Kvadratroden uden Hensyn til Kommaet og afskærer så mange Decimaler, som man havde Grupper af Decimaler.

Vil man have Kvadratroden af et helt Tal bestemt med større Nøjagtighed end således, at man blot finder de to på hinanden følgende hele Tal, mellem hvilke Roden ligger, kan man føje et så stort Antal Grupper af Decimaler til, som man ønsker at kjende Decimaler i Roden. Da får man et Resultat, der ikke har en Fejl på en Ener af sidste Decimal; og man kan således angive en af Pythagoras' »usigelige Størrelser« — vel ikke med fuld Nøjagtighed — men med så stor Nøjagtighed, som der forlanges.

Ex. 1. Find, mellem hvilke hele Tal $\sqrt{4263}$, $\sqrt{62381}$, $\sqrt{28356237}$ ligge.

Ex. 2. Find med 3 rigtige Decimaler $\sqrt{5,32142}$, $\sqrt{0,0256}$, $\sqrt{43,218}$.

Ex. 3. Find $\sqrt{2}$, så at den ikke er en Milliarde-del fejl.

§ 264. Vija-ganita har først 4 korte Paragrafer om Sammenlægning, Fratrækning, Folding og Deling. Den femte hedder »Kvadrat og Kvadratrod« og lyder således:

»Kvadratet på en positiv eller en negativ Størrelse er positivt; og Kvadratoden af en positiv Størrelse er to Ting, positiv og negativ. Derimod er der ingen Kvadratrod af negativ Størrelse«.

»Eksempel. Sig mig hurtigt, Ven, hvad er Kvadratet på det positive Tal tre, og på det samme negative? Sig ligeledes rask, hvad er Kvadratoden af positiv og negativt ni?

»Spørgsmål: $\begin{matrix} +3 \\ -3 \end{matrix}$ · Kvadraterne ere $\begin{matrix} +9 \\ +9 \end{matrix}$

»Spørgsmål: $+9$. Kvadratoden er $+3$ eller -3

»Spørgsmål: -9 . Der er ingen Kvadratrod.«

Denne korte og fyndige Besked trænger næppe til nogen Forklaring. Spørges der f. Ex. om $\sqrt{64}$, må der svares: både $+8$ og -8 ; thi begge disse Tal have den Egenskab, at de ved at foldes med sig selv give 64 (§ 249). Derimod findes der intet Tal, som foldet med sig selv giver -64 ; og derfor eksisterer $\sqrt{-64}$ ikke. Noget andet er det, om man kan finde på at bruge dette som Symbol for noget nyt, ligesom negative Tal heller ikke eksistere i den virkelige Verden, hvorimod vi have fundet på at bruge dem som Symbol for sådanne Størrelser, der ved sin Tillægning *bevirker* det samme som andre Størrelser ved disses Fratrækning. — Kvadratrødder af negative Størrelser tages i Brug i den højere Mathematik. Man kalder dem da *imaginære* (indbildte) Størrelser; og som Modsætning hertil kaldes alle de andre *reelle* (virkelige) Størrelser, der omfatte både rationale og irrationale.

Anden Grads Ligningen.

§ 265. Når den Ubekjendte fandtes i anden Potents i en Ligning, ordnede Hinduerne gjerne Ligningen således, at der på den ene Side af Lighedstegnet stod et vist Antal af den Ubekjendtes Kvadrat og et vist Antal af den Ubekjendte selv, og på den anden Side kun bekjendte Størrelser. Dette kan kortelig skrives således:

$$cx^2 + ax = b,$$

hvor c , a og b ere kjendte Størrelser eller Udtryk af kjendte Størrelser.

Bhaskara siger nu, at de Gamle (o: Arya-Bhatta og Brahmagupta) her først skaffede det midterste Led af Vejen; og når dette sammenholdes med det færdige Resultat, som findes hos Brahmagupta selv, så må det antages, at man har båret sig ad omtrent på følgende Måde.

Det gjælder om at omforme Ligningen således, at man på den ene Side af Lighedstegnet kun har et *Kvadrat* på et Udtryk af x og på den anden Side kun *bekjendte Størrelser*. Dette Udtryk af x må imidlertid selv bestå af to Led, af hvilke det ene må indeholde x ; men når Kvadratet på et toleddet Udtryk udregnes (§ 249, Ex. 4), fåes 3 Led, nemlig første Leds Kvadrat, og 2 Gange første og sidste Led, og sidste Leds Kvadrat. For imidlertid at gjøre cx^2 bedre skikket til at være et Leds Kvadrat, begynder man med at folde Ligningen på begge Sider med c , hvorved fåes:

$$c^2x^2 + acx = bc$$

Skal c^2x^2 være det første Leds Kvadrat, må dette Led hedde cx . Skal dernæst acx være 2 Gange første

Led Gange sidste Led, må sidste Led hedde $\frac{a}{2}$. Venstre Side af Ligningen mangler da blot sidste Leds Kvadrat, som nu ses at måtte være $(\frac{a}{2})^2$. Lægges dette til på venstre Side, må det også lægges til på højre Side; altså:

$$cx^2 + acx + (\frac{a}{2})^2 = bc + (\frac{a}{2})^2.$$

Her indeholder højre Side kun lutter bekendte Størrelser, og nu kunne vi skrive venstre Side som en toleddet Størrelse i anden Potents, nemlig:

$$(cx + \frac{a}{2})^2 = bc + (\frac{a}{2})^2.$$

Idet vi således nu kjende Kvadratet af et simpelt Udtryk af x , få vi selve dette Udtryk ved at uddrage Kvadratroden, men, vel at mærke (§ 264), den kan være både positiv og negativ, altså:

$$cx + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{bc + (\frac{a}{2})^2}$$

Af denne første Grads Ligning findes let x , nemlig:

$$x = \frac{\pm \sqrt{bc + (\frac{a}{2})^2} - \frac{a}{2}}{c}$$

x kan altså være to forskjellige Ting, og disse ere mere forskjellige end blot ved deres Fortegn.

§ 266. Dette er en af de to Løsninger, som Brahmagupta giver af den forelagte anden Grads Ligning:

$$cx^2 + ax = b$$

I vore Dage plejer man gjerne først at sørge for, at x^2 ingen Faktor har, eller, rettere, at c er 1. Dersom man nemlig deler på begge Sider af Lighedstegnet med c , får man:

$$x^2 + \frac{a}{c}x = \frac{b}{c};$$

og da $\frac{a}{c}$ er en bekjendt Størrelse, som kan betegnes ved

et enkelt Bogstav, f. Ex. a , og ligeledes $\frac{b}{c}$ kort og godt kan kaldes b , pleje vi blot at løse Ligningen:

$$x^2 + ax = b.$$

Denne Ligning og dens Løsning går imidlertid simpelt ind under Brahmaguptas Ligning og hans Løsning; blot er $c = 1$. Altså er Løsningen:

$$x = \pm \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

Ex. 1. Udled denne Løsning af selve Ligningen

$$x^2 + ax = b$$

på lignende Måde som det skete i § 265.

Ex. 2. Find, ved Hjælp af Formlen, x af følgende Ligninger:

$$x^2 + 4x = 21,$$

$$\text{Ex. 3. } x^2 + 6x = 55,$$

$$\text{Ex. 4. } x^2 + 10x = 24,$$

$$\text{Ex. 5. } x^2 + 48 = 12x,$$

$$\text{Ex. 6. } x^2 + 51 = 20x,$$

$$\text{Ex. 7. } x^2 + 16x + 63 = 0,$$

$$\text{Ex. 8. } 5x^2 + 30 = 25x,$$

$$\text{Ex. 9. } 25x^2 + 25x = 24,$$

$$\text{Ex. 10. } 18x^2 = 27x + 5,$$

Ex 11. En Pige, der blev spurgt om sin Alder, svarede: »Da jeg blev født, var min Moder 40 År. Folderdu nu min Moders Alder med min, fåer du Methusalems Alder (969)«. Hvor gammel var Pigen?

§ 267. Den af Pythagoras løste Opgave (§ 157), »at omdanne et givet Fladefang, b , til et Retangel, hvis ene Side er et givet Stykke, a , større end den anden Side,« vilde med Bogstavsymboler arte sig således. Lad Rektanglets mindste Side være x ; så bliver dets største Side $x + a$, altså:

$$x(x + a) = b$$

eller

$$x^2 + ax = b,$$

just den samme, som blev løst i § 266, og som gav

$$x = \pm \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

men da Grækerne ikke brugte negative Linier, ville vi kun holde os til den positive Værdi af x , nemlig:

$$x = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

Ved Eftersyn af Pythagoras' Tegning (Tg. 107), vil man finde, at det er det selv samme, han har gjort, som her findes udtrykt i Bogstaver. Han danner først en retvinklet Trekant med Kvadratet b 's Side og $\frac{a}{2}$ som Katheter, hvorved fåes Hypotenusen $\sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Fra denne Linie (pt i Tg. 107) trækkes $\frac{a}{2}$; da har man pr eller po , som er den ene Side i Rektanglet. Den anden, som er a større, fåes ved hertil at lægge a .

Hvorvidt denne gamle græske Løsning har været en af Ledetrådene i Diofant's og Hinduernes Løsning af anden Grads Ligningen, lader sig vanskelig afgjøre. Tankegangen ad Tegningens og ad Regningens Vej ser overordentlig forskjellig ud, og det har i og for sig Interesse, at sådanne Mål kunne nåes ad så himmelvidt forskjellige Veje; men desuagtet er det ikke utænkeligt, at Hinduerne, der have Ord for at kunne omsmelte ethvert Tankeindhold i deres egen Digel på sådan Måde, at man har ondt ved at gjenkjende Originalen, og som utvivlsomt have modtaget adskilligt fra Grækerne, kunne have havt, i det mindste, nogen Vejledning i det *Ende-resultat*, som forelå fra Pythagoras. Dog ere i hvert Fald Hjælpemidlerne (Symbolerne) nye.

Ex. Løs ved Bogstavregning Ex. 1 og 2 i § 157.

§ 268 Ligeledes løser § 266 på sin Vis den af Pythagoras på anden Vis løste Opgave, »at omdanne et Fladefang, b , til et Rektangel, hvis to sammenstødende Sider tilsammen have en given Længde, a .»

Kaldes den ene Side x , er den anden $a - x$, altså har man:

$$x(a - x) = b$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{eller} & ax - x^2 = b \\
 \text{eller} & x^2 - ax = -b \\
 \text{altså} & x = \pm \sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2}.
 \end{array}$$

Kvadratroden er her åbenbart mindre end $\frac{a}{2}$ (hvis den overhovedet er reel), så at der her er to positive (altså for Grækerne brugelige) Værdier. Den ene er den ene Side i Rektanglet, den anden er den anden Side; thi de ere tilsammen, hvad de skulle være, nemlig:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} + \left(-\sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2}\right) \\
 &= \sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} - \sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} = a.
 \end{aligned}$$

Ved Eftersyn af Tg. 108 ses, at Pythagoras har just udført ved Tegning, hvad her er nået ved Regning. Først dannes nemlig en retvinklet Trekant af $\frac{a}{2}$ som Hypotenusen og Kvadratet b 's Side som Kathete; den anden Kathete bliver altså $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \sqrt{-b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. De to Sider i Rektanglet fåes dernæst, dels ved at lægge denne Størrelse tp til mt eller $\frac{a}{2}$, dels ved at trække tp fra rt eller $\frac{a}{2}$.

Ex. 1. Løs ved Bogstavering Ex. 1, 2, 3 i § 158.

Ex. 2. Der er givet en Størrelse a . Del den i to Dele således, at den største Del er mellemproportional mellem hele Størrelsen og den mindste Del. Hvor stor er den største Del? Sammenlign dette med Pythagoras' Højdedeling (Tg. 112).

§ 269. Efterat Bhaskara har anført den almindelige Løsning af anden Grads Ligningen, tilføjer han: »Dersom Ligningen ikke fåer den nævnte Form, f. Ex. i Tilfælde af tredje og fjerde Potents, må den klares ved ens eget Snille.« Blandt Bhaskaras Exempler herpå er der følgende:

Ex. 1. Dersom Du er bevandret i Bogstavregning, så sig mig det Tal, hvis 4de Potents, formindsket med den dobbelte Sum af dets Kvadrat og 200 Gange selve Tallet, er 1 mindre end en Myriade«.

Ligningen bliver:

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999 \\
 \text{eller} \quad & x^4 - 2x^2 = 400x + 9999 \\
 & x^4 - 2x^2 + 1 = 400x + 10000
 \end{aligned}$$

Bhaskara siger så: »Nu er venstre Side et Kvadrat (nemlig af $x^2 - 1$); men dette er højre Side ikke; derfor lader Ligningen sig ikke løse således. Der må da anvendes Snille. Når man lægger $4x^2$ til på begge Sider, fåes på begge Sider noget, hvoraf Roden kan uddrages, nemlig:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2x^2 + 1 &= 4x^2 + 400x + 10000 \\
 (x^2 + 1)^2 &= 4(x^2 + 250x + 2500) \\
 x^2 + 1 &= 2(x + 50) \\
 x^2 - 2x + 1 &= 100 \\
 x - 1 &= +10 \\
 x &= 11 \text{ eller } x = -9.
 \end{aligned}$$

Fjerde sidste Linie kunde også lyde: $x^2 + 1 = -2(x + 50)$; men dette giver en imaginær Værdi for x . Derfor bruger Bhaskara den ikke.

Ex. 2. (Bhaskara): »Ottendedelen af en Flok Aber i anden Potens hoppede omkring i en Indhegning og morede sig med at at lege. De øvrige 12 så man underholde hverandre på en Høj.» To Værdier.

Ex. 3. (Bhaskara): »Når Skyggen af en 12 Tommer høj Gnomon bliver formindsket med Trediedelen af Hypothenusen, bliver den 14 Tommer lang. Sig mig rask, Mathematiker, Skyggens Længde.»

Bhaskara kalder Skyggens Længde x . »Når denne formindskes med $\frac{1}{3}$ af Hypothenusen, fåer man 14 Tommer, altså omvendt, når man trækker 14 Tommer fra x , fåer man en Trediedel af Hypothenusen. Denne må da være $3(x - 14) = 3x - 42$. Dens Kvadrat er $9x^2 - 252x + 1764$, hvilket er lig med den anden Værdi af Kvadratet på Hypothenusen $x^2 + 12^2$, idet den ene Kathete er x , den anden 12, osv.

Af de to Værdier, der findes for x , siger Bhaskara, er der kun Mening i den ene, da den anden er mindre end 14.



INDHOLD.

	Tal.	Side.
1—11. Tælning og Talord.....		3.
12—20. Talskrivning.....		20.
21—30. Regning		32.
31—57. Brøk.....		47.

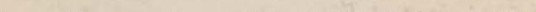
Geometri.

58—66. Ret Linie og Kvadrat.....	79
67—79. Vinklen	90.
80—96. Måling af det Utilgjængelige.....	108.
97—100. Parallele Linier.....	127.
101—102. Tegning	131.
103—105. Trekantsvinklerne.....	137.
106—109. Pythagoras	141.
110—116. Fladefangs Omdannelse	147.
117—119. Den pythagoræiske Læresætning	156.
120—125. «Usigelige Størrelser»	162.
126—132. Pythagoræiske Talspekulationer.....	168.
133—146. Proportioner.....	176.
147—158. Geometrisk Regning.....	194.
159—163. Det gyldne Snit.....	211.
164—173. Regulære Legemer.....	220.
174—180. Perspektiv.....	232.
181—191. Cirkelns Kvadratur.....	243.
192—198. Cirkelns Måling.....	261.
199—209. Plato	270.

	Side.
210—216. Rumfang	286.
217—228. Den højere Mathematik begynder	297.
229—231. Euklid	322.

Bogstavregning.

232—236. Bogstavsymbolet	323.
237—239. Det matematiske Tegnsprog	332.
240—243. Ligningen	336.
244—245. Positiv og negativ	341.
246—253. Regler for Symbolregning	344.
254—259. Første Grads Ligninger	352.
260—264. Kvadrat og Kvadratrod	361.
265—269. Anden Grads Ligningen	379.

Fig. 1. 

Tg.2		□	△	▢	H	□	X	▢	M	▢
	1.	5.	10	50	100.	500.	1000.	5000.	10 000.	50 000

Tg3 {

					
1.	2.	3	4	5	6

						
7	8	9	10	11	12.	

						
20	21	30	40	50	60	62

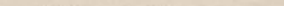
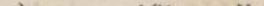
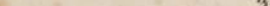
Fig. 4. 
100 200 423 900

Fig. 5  Fig. 6 

Tg.7 

Тг. 11

I	II	III	IIII	IIII	Т	П	П	П
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥

$$TX \equiv LX = 64464 \quad | \equiv O \equiv IIII \equiv T = 1405536$$


Tg.12

Tg 10

1 11 111 X 8 1 11 111 文 十
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 百 千 万 〇 方 〇 〇 〇 X = 1020
 100 1000 10 000 0

Tg.9		Tg.8
一	1	一
十	2	二
八	3	三
萬	4	四
六	5	五
千	6	六
二	7	七
百	8	八
十	9	九
四	10	十
186214		百
		千
$\overline{1} \text{ 冂 } 0 =$	100	萬
102		
$\text{冂} =$	1000	
120		
$\times \text{冂} + 8$	10000	
465		

