

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

A. Osterfeld.

Graphische Behandlung der kontinuierlichen
Träger mit festen, elastisch senkbar oder
durchbar und elastisch senk- und durchbaren
Stützen.

1905.

~~624.043.58125~~
624.021

ST.F.

gl.

624.043:53.25(083.3)

Graphische Behandlung der kontinuierlichen Träger mit festen, elastisch senkbaren oder drehbaren und elastisch senk- und drehbaren Stützen.

Von A. Ostenfeld, Prof. a. d. Techn. Hochschule, Kopenhagen.

Bei der graphischen Behandlung der kontinuierlichen Träger mit beliebig vielen Stützpunkten sind zurzeit namentlich zwei verschiedene Verfahren im Gebrauch. Das erste verwendet das ursprünglich von Mohr eingeführte, von Winkler u. a. weiter vervollkommnete elastische Seilpolygon und hat im bekannten Werke von W. Ritter („Der kontinuierliche Balken“, Zürich 1900) seine höchste Entwicklung erreicht, wobei doch zu bemerken ist, daß die Behandlung mit Hilfe des genannten Seilpolygons für Träger mit elastisch senkbaren Stützen nicht durchgeführt wurde (bekanntlich hat neuerdings Vianello in Z. d. Ver. d. Ing. 1904, von dem Ritterschen Grundgedanken ausgehend, aber mit anderen Hilfsmitteln die Behandlung dieser Träger weiter geführt); für eine einheitliche Behandlung aller Arten von kontinuierlichen Trägern scheint das Verfahren hiernach nicht unbedingt geeignet zu sein. Die zweite Methode zielt dahin, den Schlußlinienzug für das Momentenpolygon des Trägers unmittelbar zu konstruieren. So viel dem Verfasser bekannt, wurde dieses Verfahren zuerst von Claxton Fidler, Dundee, angegeben („Trans. Inst. C. E.“, Vol. LXXIV, Okt. 1883); später ist es auch von Müller-Breslau verwendet („Zeitschr. f. Bauwesen“ 1891, sowie in seiner „Graph. Statik“, II, 1892), von den beiden genannten Autoren doch nur für Träger mit festen Stützpunkten. Der vorliegende Aufsatz bezweckt nun, zu zeigen, daß diese Behandlungsweise für alle in der Ueberschrift genannten Trägerarten verhältnismäßig einfach und ganz einheitlich zum Ziele führt. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle von festen Stützpunkten; das Verfahren hier ist zwar bekannt, braucht daher nur, um das Verständnis des folgenden zu erleichtern, kurz auseinanderzusetzen zu werden.

I. Feste Stützpunkte.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen (Abb. 1):
für die Stützpunkte $0 \quad 1 \dots r-1, r, r+1 \dots n$
„ „ Stützenmomente $M_0 \quad M_1 \dots M_{r-1} \quad M_r \quad M_{r+1} \quad M_n$
„ „ Feldlängen $l_1 \quad l_2 \dots l_r \quad l_{r+1} \quad l_n$

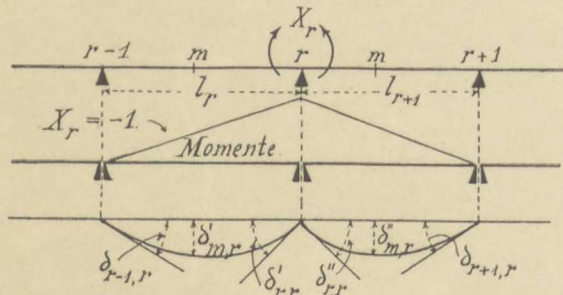


Abb. 1.

Die Stützenmomente M werden positiv gezählt, wenn sie eine Biegung mit der Konkavität nach oben hervorrufen. Als überzählige Größen führen wir ein: $X_1 = -M_1$, $X_2 = -M_2 \dots X_r = -M_r \dots$; das Hauptsystem ist dann die in Abb. 1 (unten) gezeigte Reihe von einfachen Balken.

Für den einfachen Balken $(r-1) - r$, mit der gegebenen Belastung und außerdem mit den Momenten X_{r-1} und X_r belastet, ergibt sich ein Tangentenwinkel beim Stützpunkt r , den wir δ_r nennen und positiv in der Richtung $X_r = -1$ rechnen wollen; für den Balken $r - (r+1)$ erhält man aus den entsprechenden Ursachen

einen Tangentenwinkel δ'_r , ebenfalls im Punkte r . Die Grundgleichungen zur Berechnung der unbekannten X sind dann:

$$1) \quad \delta_r = -\delta'_r$$

und die analogen. Diese Winkel können, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$2) \quad \begin{cases} \delta_r = \Sigma P_m \delta_{mr} - X_{r-1} \delta_{r-1,r} - X_r \delta_{rr} + \delta_{rt} + \delta_{ru}, \\ \delta'_r = \Sigma P_m \delta'_{mr} - X_r \delta'_{rr} - X_{r+1} \delta_{r+1,r} + \delta'_{rt} + \delta'_{ru}, \end{cases}$$

wo alle die Größen δ auf der rechten Seite (siehe Abb. 1, ganz unten) Formänderungen im Hauptsystem bedeuten und zwar:

$\delta_{mr}, \delta'_{mr}$ die Durchbiegungen des einfachen Balkens links bzw. rechts des r^{ten} Stützpunktes infolge von der Belastung $X_r = -1$,

$\delta_{r-1,r}, \delta'_{r-1,r}$ die Winkeldrehungen des einfachen Balkens $(r-1) - r$ am $(r-1)^{\text{ten}}$ bzw. r^{ten} Stützpunkt, und

$\delta_{rr}, \delta'_{rr}$ die entsprechenden Winkeldrehungen des Balkens $r - (r+1)$ am r^{ten} bzw. $(r+1)^{\text{ten}}$ Stützpunkt, alle vier infolge von derselben Belastung $X_r = -1$,

$\delta_{rt}, \delta'_{rt}$ die von einer Temperaturvariation und $\delta_{ru}, \delta'_{ru}$ die von einem eventuellen Nachgeben der Stützpunkte bewirkten Drehungen der Tangente in r , links bzw. rechts des Stützpunktes.

Die Durchbiegungen δ_{mr} können mit Hilfe der gewöhnlichen „ v -Kräfte“ berechnet oder konstruiert werden. Bezeichnet man die von den v -Kräften ausgeübten Stützendrucke allgemein mit V' oder V'' , je nachdem sie vom Felde links oder rechts des betreffenden Stützpunktes herühren, während der unten hinzugefügte Doppelindex dieselbe Bedeutung wie bei den Größen δ hat, so ist:

$$3) \quad \delta_{r-1,r} = V'_{r-1,r}, \quad \delta_{rr} = V'_{rr}, \quad \delta'_{rr} = V''_{rr}, \quad \delta_{r+1,r} = V'_{r+1,r}$$

Mit diesen Erklärungen sind die Gleichungen 2) allgemein gültig, ganz unabhängig von der näheren Beschaffenheit des Trägers (ob Fachwerk oder vollwandig, mit konstantem oder veränderlichem Trägheitsmoment). δ_{rt} und δ_{ru} können in den verschiedenen Fällen leicht berechnet werden, z. B. mit Hilfe der Arbeitsgleichung; speziell ist

$$4) \quad \delta_{ru} = \frac{\Delta_{r-1} - \Delta_r}{l_r}, \quad \delta'_{ru} = \frac{\Delta_{r+1} - \Delta_r}{l_{r+1}},$$

wenn Δ_r die absolute Bewegung (positiv nach unten) des r^{ten} Stützpunktes bedeutet.

Die graphische Behandlung, mit der wir uns hier beschäftigen sollen, ist nun einfach eine graphische Auflösung der Gleichungen 1). Man denkt sich (Abb. 2) die gesuchten Größen X als Ordinaten in den Stützpunkten abgetragen, also $A_{r-1} a_{r-1} = X_{r-1}$, $A_r a_r = X_r$ usw.; die Aufgabe ist dann gelöst, wenn es gelingt, den „Schlußlinienzug“ $\dots a_{r-1} a_r a_{r+1} \dots$ zu bestimmen.

Der Kürze halber schreiben wir die Ausdrücke 2):

$$5) \quad \delta_r = K'_r - (\alpha_r X_{r-1} + \beta'_r X_r), \quad \delta'_r = K''_r - (\beta'_r X_r + \gamma_r X_{r+1}),$$

wo also K'_r und K''_r die bekannten Glieder bezeichnen. Nun betrachtet man die Koeffiziente α, β, γ in 5) als lotrechte Kräfte, α_r in A_{r-1} angreifend, β'_r und β'_r beide in A_r und γ_r in A_{r+1} , bestimmt die Angriffspunkte U'_r, U''_r und O'_r von den Resultanten $\alpha_r + \beta'_r, \beta'_r + \gamma_r$ und

$\alpha_r + \beta_r + \gamma_r$ (wobei gesetzt wurde: $\beta_r = \beta'_r + \beta''_r$) und setzt ab:

$$6) \quad U'_r S'_r = \frac{K'_r}{\alpha_r + \beta'_r}, \quad U''_r S''_r = \frac{K''_r}{\beta'_r + \gamma_r},$$

$$7) \quad \text{und } O^0_r O_r = \frac{K'_r + K''_r}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r}.$$

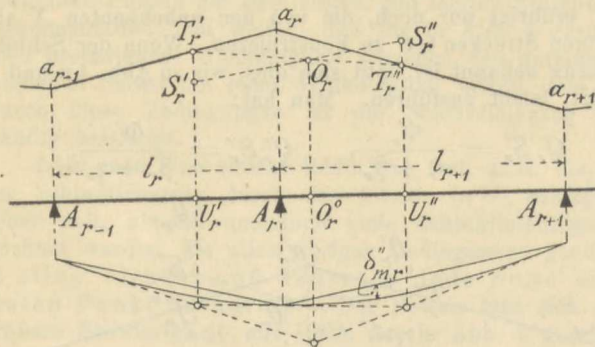


Abb. 2.

Die lotrechten in U'_r und U''_r , welche wir im folgenden als die U -Vertikalen bezeichnen, schneiden die Schlußlinie in T'_r und T''_r , und man findet nun leicht, daß die Verbindungsgeraden $S'_r S''_r$ und $T'_r T''_r$ beide durch O_r gehen müssen. Es ist nämlich (Abb. 2):

$$8) \quad \begin{cases} U'_r T'_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_r + \beta'_r} X_{r-1} + \frac{\beta'_r}{\alpha_r + \beta'_r} X_r = \frac{\alpha_r X_{r-1} + \beta'_r X_r}{\alpha_r + \beta'_r}, \\ U''_r T''_r = \frac{\beta''_r}{\beta'_r + \gamma_r} X_r + \frac{\gamma_r}{\beta'_r + \gamma_r} X_{r+1} = \frac{\beta''_r X_r + \gamma_r X_{r+1}}{\beta'_r + \gamma_r}, \end{cases}$$

warum $T'_r T''_r$ auf der O -Vertikalen die Strecke

$$\frac{\alpha_r + \beta'_r}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} U'_r T'_r + \frac{\beta'_r + \gamma_r}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} U''_r T''_r = \frac{(\alpha_r X_{r-1} + \beta'_r X_r) + (\beta''_r X_r + \gamma_r X_{r+1})}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r}$$

abschneidet; wegen 1) und 5) ist dies indessen gleich

$$\frac{K'_r + K''_r}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r}.$$

Ebenso schneidet $S'_r S''_r$ die Strecke

$$\frac{\alpha_r + \beta'_r}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} U'_r S'_r + \frac{\beta'_r + \gamma_r}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} U''_r S''_r = \frac{K'_r + K''_r}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r}$$

auf der O -Vertikalen ab.

Die beiden Punkte S'_r und S''_r hängen also (wie auch der Punkt O_r) nur von den bekannten Größen ab und können im voraus abgetragen werden, sobald die Belastung gegeben ist. Wir nennen dieselbe im folgenden nach Claxton Fidler die „charakteristischen“ Punkte. Sie sind wohl hier — bei Trägern mit festen Stützpunkten — nicht unbedingt notwendig für die Konstruktion, indem man ebenso gut den Punkt O_r direkt — [nach 7)] wie denselben als Schnittpunkt der Geraden $S'_r S''_r$ mit der O -Vertikalen bestimmen kann. Indessen werden sie sich bei den anderen Arten von kontinuierlichen Trägern, die wir später untersuchen sollen, als sehr nützlich erweisen, weshalb wir vorgezogen haben, dieselbe sofort hier einzuführen.

Mit den eben bewiesenen Eigenschaften ist ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen zwei aufeinander folgenden Seiten des Schlußlinienzuges gegeben. Indem die Verbindungsgerade $T'_r T''_r$ durch O_r geht und weiter die beiden Seiten $a_{r-1} a_r$ und $a_r a_{r+1}$ sich auf der Stützenvertikalen schneiden, sieht man ein, daß die genannten Seiten als zusammengehörige Linien in einer Homologie betrachtet werden können, für welche die bestimmenden Größen sind: die Stützen-

vertikale als Homologieachse, O_r als Homologiezentrum und die beiden charakteristischen Punkte als homologe Punkte oder die beiden U -Vertikalen als homologe Linien.

Hieraus folgt nun weiter, daß man aus einem etwa bekannten Punkte J_r (Abb. 3) der Seite $a_{r-1} a_r$ sofort einen Punkt der folgenden Seite herleiten kann, nämlich den zu J_r homologen J_{r+1} . Zweckmäßig konstruiert man bekanntlich zuerst die Vertikale $J_{r+1}^0 J_{r+1}$

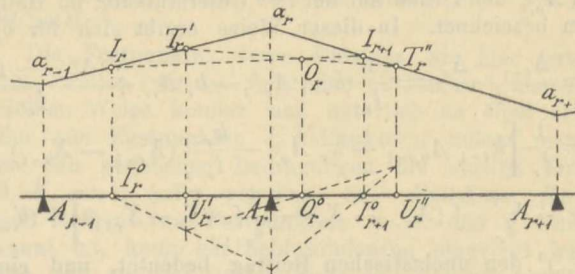


Abb. 3.

als homolog zur gegebenen Vertikalen $J_r^0 J_r$ (wie unten in Abb. 3 gezeigt) und hat dann schließlich nur die Gerade $J_r O_r J_{r+1}$ zu ziehen. — Zur vollständigen Bestimmung des Schlußlinienzuges braucht man hiernach nur zwei Punkte desselben im voraus zu kennen, und solche Punkte finden sich gewöhnlich beim ersten und letzten Stützpunkt (M_0 und $M_n = 0$ oder gegeben usw.). Vom ersten Stützpunkte ausgehend kann man nun einen J -Punkt jeder Seite konstruieren und hat somit zwei Punkte der letzten Seite, womit der ganze Schlußlinienzug bestimmt ist. In derselben Weise könnte man vom rechten Ende ausgehend noch eine Reihe von Punkten (K -Punkten) konstruieren und würde so zwei Punkte jeder Seite erhalten.

Da die senkrechten durch die beiden im voraus gegebenen Punkte eine feste, von der Belastung unabhängige Lage haben, wird dasselbe auch für die daraus abgeleiteten J - und K -Vertikalen der Fall sein (indem auch die U - und O -Vertikalen diese Eigenschaft besitzen). Die Festlegung der U -, O -, J - (und K -) Vertikalen hat also nur ein für allemal zu geschehen, selbst wenn verschiedene Belastungen untersucht werden sollen.

Hiermit ist die Aufgabe im Prinzip gelöst; wie man weiter die Einflußlinien herleiten und die Trägerberechnung im einzelnen durchführen kann, ist hinlänglich bekannt.

Speziell soll nur noch bemerkt werden, daß $(\alpha_r + \beta'_r)$ und $(\beta'_r + \gamma_r)$ die Resultante aller v -Kräfte auf der Strecke l_r bzw. l_{r+1} bedeuten, ebenso $(\alpha_r + \beta_r + \gamma_r)$ den Resultant aller v -Kräfte zwischen A_{r-1} und A_{r+1} . Bestimmt man die Biegungslinie (δ_{mr}) als Seilpolygon, ergibt sich daher die unten in Abb. 2 gezeigte Konstruktion des U - und O -Vertikalen.

Ein Nachgeben der Stützpunkte [δ_{ru} in 2)] kommt in der Konstruktion dadurch zum Ausdruck, daß die charakteristischen Punkte (und der O -Punkt) eine neue Lage (stets doch in den festen U - und O -Vertikalen) einnehmen, und mit Hilfe von 4) sieht man leicht ein, daß sich die genannten Punkte abwärts oder aufwärts bewegen müssen, je nachdem der r -te Stützpunkt unter oder über der Verbindungsgeraden zwischen den beiden benachbarten Unterstützungen zu liegen kommt.

II. Elastisch senkbare Unterstützungen.

Wir führen dieselben überzähligen Größen X ein wie im vorigen Fall und haben dann auch zu deren Bestimmung genau dieselben Gleichungen 1) und 2); nur ist hier δ_{ru} keine gegebene Größe, sondern eine Funktion der Stützendrücke A und dadurch auch der unbekannten X . In die Ausdrücke 4) für δ_{ru} hat man dementsprechend einzuführen:

$$9) \quad \Delta_{r-1} = k_{r-1} A_{r-1} + \Delta_{r-1}^0, \quad \Delta_r = k_r A_r + \Delta_r^0, \dots,$$

wo k_{r-1}, k_r, \dots gegebene unveränderliche sind, welche die elastischen Verschiebungen der Stützpunkte für $A_{r-1} = 1, A_r = 1, \dots$ bedeuten, während $\Delta_{r-1}^0, \Delta_r^0, \dots$ die (unelastischen) Beiträge bezeichnen, die von einem eventuellen Nachgeben der Fundamente u. dgl. herrühren mögen. Weiter ist:

$$10) A_r = A_{0,r} - \frac{1}{l_r} X_{r-1} + \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) X_r - \frac{1}{l_{r+1}} X_{r+1},$$

indem $A_{0,r}$ den Druck auf der r -ten Unterstützung im Hauptsystem bezeichnet. In dieser Weise ergibt sich für δ_{ru} :

$$\delta_{ru} = \frac{\Delta_{r-1} - \Delta_r}{l_r} = \frac{1}{l_r} (k_{r-1} A_{r-1} - k_r A_r) + \frac{\Delta_{r-1}^0 - \Delta_r^0}{l_r}$$

$$= \frac{1}{l_r} \left[k_{r-1} A_{0,r-1} - k_r A_{0,r} - \frac{k_{r-1}}{l_{r-1}} (X_{r-2} - X_{r-1}) + \frac{k_{r-1} + k_r}{l_r} (X_{r-1} - X_r) - \frac{k_r}{l_{r+1}} (X_r - X_{r+1}) \right] + (\delta_{ru}^0),$$

wo (δ_{ru}^0) den unelastischen Beitrag bedeutet, und einen analogen Ausdruck erhält man für δ_{ru}' . Mit den Abkürzungen:

$$11) \begin{cases} m_r' = \frac{1}{\alpha_r + \beta_r} \frac{k_{r-1}}{l_r}, & m_r'' = \frac{1}{\beta_r' + \gamma_r} \frac{k_r}{l_{r+1}}, \\ n_r' = \frac{1}{\alpha_r + \beta_r} \frac{k_r}{l_r}, & n_r'' = \frac{1}{\beta_r' + \gamma_r} \frac{k_{r+1}}{l_{r+1}}, \end{cases}$$

und ferner:

$$12) \frac{X_{r-1} - X_r}{l_r} = \operatorname{tg} \varphi_r, \quad \frac{X_r - X_{r+1}}{l_{r+1}} = \operatorname{tg} \varphi_{r+1} \dots \dots,$$

wo also φ die Winkel der einzelnen Schlußlinien mit der wagerechten bezeichnen, gestalten sich die Gleichungen 2) hier folgendermaßen:

$$13) \begin{cases} \delta_r' = [K_r' + R_r' + \Phi_r'] - (\alpha_r X_{r-1} + \beta_r X_r) \\ \quad = L_r - (\alpha_r X_{r-1} + \beta_r X_r), \\ \delta_r'' = [K_r'' + R_r'' + \Phi_r''] - (\beta_r' X_r + \gamma_r X_{r+1}) \\ \quad = L_r' - (\beta_r' X_r + \gamma_r X_{r+1}), \end{cases}$$

wo $K_r' = \Sigma P_m \delta_{mr}' + \delta_{rt}' + (\delta_{ru}')^0$ dieselben Größen sind wie bei Trägern mit festen Stützpunkten, $K_r'' = \Sigma P_m \delta_{mr}'' + \delta_{rt}'' + (\delta_{ru}'')^0$

$$15) \begin{cases} R_r' = (\alpha_r + \beta_r) [m_r' A_{0,r-1} - n_r' A_{0,r}], \\ R_r'' = (\beta_r' + \gamma_r) [-m_r'' A_{0,r} + n_r'' A_{0,r+1}], \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \Phi_r' = (\alpha_r + \beta_r) [-m_r' (\operatorname{tg} \varphi_{r-1} - \operatorname{tg} \varphi_r) + n_r' (\operatorname{tg} \varphi_r - \operatorname{tg} \varphi_{r+1})], \\ \Phi_r'' = (\beta_r' + \gamma_r) [m_r'' (\operatorname{tg} \varphi_r - \operatorname{tg} \varphi_{r+1}) - n_r'' (\operatorname{tg} \varphi_{r+1} - \operatorname{tg} \varphi_{r+2})]. \end{cases}$$

Die Gl. 1), $\delta_r' + \delta_r'' = 0$, läßt nun eine geometrische Deutung zu, die sich derjenigen für Träger mit festen Stützpunkten als eine verhältnismäßig einfache Erweiterung anschließt. Wir setzen zunächst voraus,

a) Die Stützen sind sehr nachgiebig.

In Abb. 4a denkt man sich die gesuchten X als Ordinaten in den Stützpunkten abgetragen; es handelt sich also wieder darum, den Schlußlinienzug $\dots a_{r-1} a_r a_{r+1} \dots$ zu bestimmen. Zuerst werden genau dieselben U - und O -Vertikalen wie früher eingelegt; und wenn dann hier abgetragen wird:

$$17) U_r S_r' = \frac{L_r}{\alpha_r + \beta_r}, \quad U_r S_r'' = \frac{L_r'}{\beta_r' + \gamma_r},$$

und

$$18) O_r O_r = \frac{L_r + L_r'}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r},$$

müssen sich die Geraden $S_r' S_r''$ und $T_r' T_r''$ in O_r schneiden. Hier sind indessen die charakteristischen Punkte S_r' und S_r'' (und somit auch O_r) nicht von den gesuchten X unabhängig.

Zu den Ordinaten US liefern die bekannten Glieder die folgenden Beiträge:

$$19) U_r Q_r' = \frac{K_r' + R_r'}{\alpha_r + \beta_r}, \quad U_r Q_r'' = \frac{K_r'' + R_r''}{\beta_r' + \gamma_r};$$

die Punkte Q_r' und Q_r'' sind also jedenfalls im voraus bekannt. Indem man die Ordinaten $US = UQ + QS$ setzt, erübrigt nur noch, die von den unbekannten X abhängigen Strecken QS zu konstruieren. Wenn der Schlußlinienzug bekannt ist, läßt sich dies, wie in Abb. 4a und b gezeigt, leicht ausführen. Man hat:

$$Q_r S_r' = \frac{\Phi_r'}{\alpha_r + \beta_r}, \quad Q_r S_r'' = \frac{\Phi_r''}{\beta_r' + \gamma_r},$$

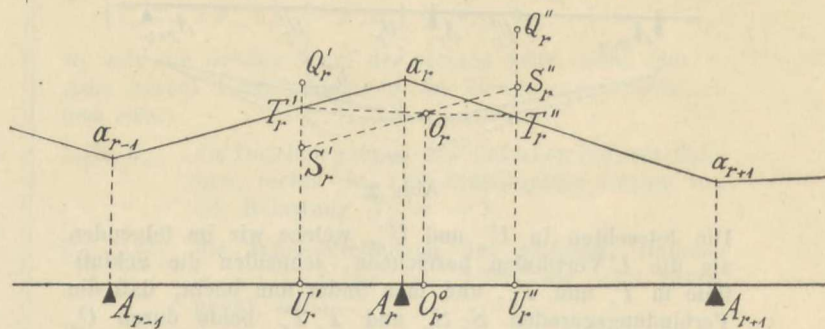


Abb. 4 a.

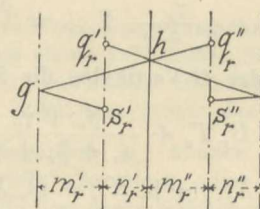


Abb. 4 b.

wo Φ_r' und Φ_r'' durch 16) gegeben sind. Wenn man daher (Abb. 4b) die fünf lotrechten in den Abständen m_r', n_r', m_r'' und n_r'' zeichnet und dann Parallelen mit den vier Schlußlinien zieht ($gs_r' \parallel a_{r-2} a_{r-1}$, $gh_q' \parallel a_{r-1} a_r$, $q_r h_i \parallel a_r a_{r+1}$, $is_r'' \parallel a_{r+1} a_{r+2}$), findet man $q_r s_r' = Q_r S_r'$ und $q_r s_r'' = Q_r S_r''$. Indem man in Abb. 4b, welche wir im folgenden die „Richtungsfigur“ nennen wollen, die Buchstaben q bei den Endpunkten der langen Parallelen mit den dem r -ten Stützpunkt am nächsten liegenden Schlußlinien setzt, sieht man ein (vgl. die Vorzeichen in 12) und 16), daß die Punkte S in Abb. 4a über oder unter Q liegen müssen, je nachdem in Abb. 4b s über oder unter q liegen. Hiernach kann man also rein mechanisch die Strecken qs von der Richtungsfigur in die Abb. 4a übertragen.

Wenn also der Schlußlinienzug gegeben ist, findet man in der beschriebenen Weise mittels der Richtungsfigur die charakteristischen Punkte. Umgekehrt kann man aber, wenn der Schlußlinienzug nur vom linken Ende des Trägers bis zu a_{r+1} gegeben ist, die folgende Seite $a_{r+1} a_{r+2}$ konstruieren. Die Schnittpunkte T_r' und T_r'' sind nämlich bekannt, und die Verbindungsgerade $T_r' T_r''$ bestimmt dann auf der O -Vertikalen den Punkt O_r . Die ganze Richtungsfigur, nur die letzte Parallele is_r'' ausgenommen, kann sofort gezeichnet werden, und da Q_r' bekannt ist, findet man hierdurch S_r' , indem $Q_r S_r' = q_r s_r'$. Nun zieht man $S_r' O_r$, welche die U -Vertikale in S_r' schneidet, und führt die Strecke $Q_r S_r''$ in die Richtungsfigur über, wodurch der Punkt s_r'' und somit die Richtung is_r'' der Schlußlinie $a_{r+1} a_{r+2}$ erhalten wird; diese Schlußlinie kann also jetzt eingelegt werden. — Von der Seite $a_{r+1} a_{r+2}$ gelangt man in derselben Weise zu der folgenden, $a_{r+2} a_{r+3}$ usw., und es leuchtet ein, daß der ganze Schluß-

linienzug konstruiert werden kann, wenn nur die beiden ersten Seiten, z. B. am linken Ende, bekannt sind.

Von dem gesuchten Schlußlinienzug weiß man, daß die erste und letzte Seite durch gegebene Punkte gehen sollen (der Einfachheit halber setzen wir im folgenden voraus, daß $M_0 = 0$ und $M_n = 0$, in welchem Falle die erwähnten Punkte mit dem ersten und letzten Stützpunkte zusammenfallen) und weiter, daß die in Abb. 4 gezeigte, eben beschriebene Abhängigkeit zwischen den aufeinander folgenden Seiten bei jeder Winkelspitze erfüllt sein soll. Durch diese Bedingungen ist der Schlußlinienzug vollständig bestimmt.

Läßt man eine einzige Bedingung fort, z. B. die, daß der Schlußlinienzug durch den letzten (n^{ten}) Stützpunkt gehen soll, können unendlich viele Schlußlinienzüge gezeichnet werden, die allen übrigen Bedingungen genügen; in allen diesen muß indessen jede Seite einen festen Punkt enthalten. Der Beweis läßt sich ohne größere Schwierigkeit mit Hilfe des in Abb. 4 gezeigten Zusammenhanges geometrisch führen; da indessen die rein graphische Konstruktion dieser Festpunkte ziemlich umständlich und wegen der Umständlichkeit auch leicht zu ungenau wird, weshalb wir unten deren Bestimmung teilweise mittels Berechnung durchführen, ziehen wir hier vor, auch den Beweis mittels Rechnung zu liefern. — Zu diesem Zwecke müssen wir die Gleichungen $\delta'_r + \delta''_r = 0$ in etwas anderer Form wie früher anschreiben. Indem wir der Kürze halber die Anzahl der Felder z. B. $n = 7$ annehmen, lauten dann die Gleichungen:

$$20) \quad \begin{cases} c_1 X_1 + d_1 X_2 + e_1 X_3 & = B_1 \\ b_2 X_1 + c_2 X_2 + d_2 X_3 + e_2 X_4 & = B_2 \\ a_3 X_1 + b_3 X_2 + c_3 X_3 + d_3 X_4 + e_3 X_5 & = B_3 \\ a_4 X_2 + b_4 X_3 + c_4 X_4 + d_4 X_5 + e_4 X_6 & = B_4 \\ a_5 X_3 + b_5 X_4 + c_5 X_5 + d_5 X_6 + e_5 X_7 & = B_5 \\ a_6 X_4 + b_6 X_5 + c_6 X_6 + d_6 X_7 & = B_6 \end{cases}$$

wo $B_r = K'_r + K''_r + R'_r + R''_r$. Die Koeffiziente auf der linken Seite haben mit den Abkürzungen:

$$21) \quad \mu_r = \frac{k_r}{l_r l_{r+1}}, \quad \nu_r = \frac{k_{r-1} + k_r}{l_r^2}$$

die folgenden Werte:

$$22) \quad \begin{cases} a_r = \mu_{r-1}, & b_r = \alpha_r - \mu_{r-1} - (\mu_r + \nu_r), \\ c_r = \beta_r + \beta'_r + (\mu_r + \nu_r) + (\nu_{r+1} + \mu_r), \\ d_r = \gamma_r - (\nu_{r+1} + \mu_r) - \mu_{r+1}, & e_r = \mu_{r+1}. \end{cases}$$

In den Gleichungen 20) ist X_7 (X_n) nicht gleich Null gesetzt und somit diese Bedingung nicht eingeführt; wir haben somit sechs Gleichungen mit sieben Unbekannten, also unendlich viele möglichen Schlußlinienzüge. Eliminiert man alle die unbekannten bis auf zwei aufeinander folgenden, z. B. X_3 und X_4 , ergibt sich:

$$23) \quad C_1 X_3 + C_2 X_4 = D,$$

und daraus kann gefolgert werden, daß die durch X_3 und X_4 bestimmte Schlußlinie (Abb. 5) durch einen festen Punkt auf der durch die Abstände

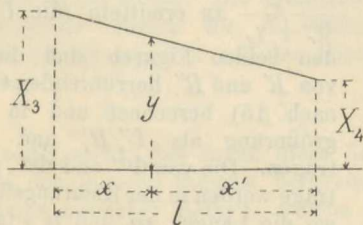


Abb. 5.

$$23a) \quad x = \frac{C_2}{C_1 + C_2} l, \quad x' = \frac{C_1}{C_1 + C_2} l$$

gegebenen Vertikalen gehen muß; man findet nämlich die hier abgeschnittene Ordinate

$$23b) \quad y = \frac{x'}{l} X_3 + \frac{x}{l} X_4 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} X_3 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} X_4 = \frac{D}{C_1 + C_2}.$$

Weiter sieht man ein, daß C_1 und C_2 und somit x und x' von der Belastung unabhängig sind und also berechnet werden können, indem man die Glieder B in 20) gleich Null setzt.

Die Festpunkte, deren Existenz wir hier bewiesen haben, wollen wir im folgenden „J-Punkte“ nennen; in derselben Weise kommt man natürlich zu einer anderen Reihe von Festpunkten („K-Punkte“), indem man von allen den gegebenen Bedingungen die einzige fortläßt, daß $X_0 = 0$ (oder gegeben) ist. Falls nur die eine dieser Reihen von Festpunkten, z. B. den J-Punkten, bekannt ist, kann der Schlußlinienzug eingelegt werden, indem man von der letzten Seite zwei Punkte kennt und von allen den übrigen je einen Punkt.

Wie oben gesagt, ist indessen die direkte graphische Ermittlung dieser Punkte nicht sehr praktisch; dagegen läßt sich mit Vorteil ein gemischtes Verfahren anwenden, so daß man nur J_2 (den J-Punkt der zweiten Seite) mittels Rechnung, und davon ausgehend die übrigen mittels graphischer Konstruktion herleitet. Für die durchzuführende Berechnung hat man zuerst ein für allemal die Unterdeterminanten U_1, U_2, \dots , die der letzten lot-rechten Kolonne der folgenden Determinante entsprechen,

zu bilden. Aus der Gleichung [entsprechend 23)]:

$$\begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 X_1 + d_1 X_2 - B_1 \\ d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & b_2 X_1 + c_2 X_2 - B_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & 0 & 0 & a_3 X_1 + b_3 X_2 - B_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & 0 & a_4 X_2 - B_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & -B_5 \\ 0 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & -B_6 \end{vmatrix} = 0$$

erhält man nämlich, indem alle B gleich Null gesetzt werden, die Abszisse x zum Fußpunkte der J_2 -Vertikalen nach 23a) (da $\frac{x'}{l_2} X_1 + \frac{x}{l_2} X_2 = 0$):

$$24) \quad x = \frac{d_1 U_1 + c_2 U_2 + b_3 U_3 + a_4 U_4}{(c_1 + d_1) U_1 + (b_2 + c_2) U_2 + (a_3 + b_3) U_3 + a_4 U_4} l_2,$$

und die Ordinate zum J_2 -Punkt (nach 23b):

$$24a) \quad J_2 J_2 = \frac{B_1 U_1 + B_2 U_2 + \dots + B_{n-1} U_{n-1}}{(c_1 + d_1) U_1 + (b_2 + c_2) U_2 + (a_3 + b_3) U_3 + a_4 U_4};$$

die beiden letzten Formeln sind gleich für den Fall einer beliebigen Anzahl (n) Felder aufgeschrieben.

Wenn der Abstand $A_1 J_2^0 = x$ (Abb. 6) nach 24) berechnet ist, konstruiert man einen beliebigen Schlußlinienzug durch a_0 und J_2^0 , derselbe schneidet dann die Achse in dem übrigen J^0 -Punkte. Die Konstruktion ist in Abb. 6 gezeigt; $a_0 a_1$ und $a_1 a_2$ werden willkürlich gezogen; die ganze Richtungsfigur, außer is'_1 , kann sofort gezeichnet werden (gs'_1 ist wagerecht), und indem die Q -Punkte in der Achse liegen, findet man hierdurch S'_1 und mittels $S'_1 O_1$ dann S'_1 und somit die Richtung is'_1 der Schlußlinie $a_2 a_3$. — In derselben Weise findet man,

Abb. 6 a.

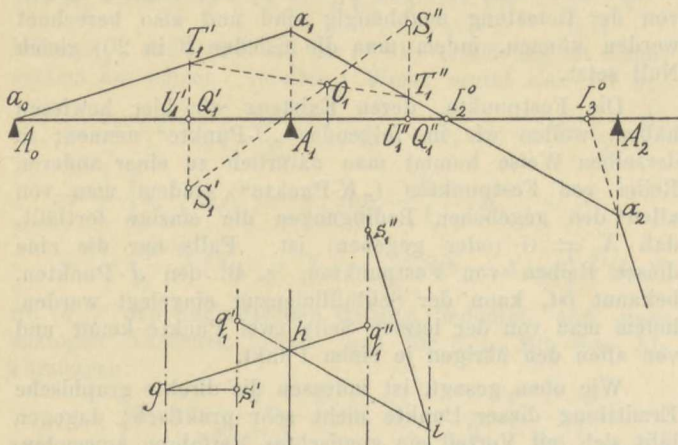


Abb. 6 b.

darauf zu achten, daß es gar nicht notwendig ist, mit demselben Schlußlinienzug stets fortzusetzen; hat man z. B. in Abb. 6 J_3^0 mit Hilfe der Seiten $a_0 a_1$ und $a_1 a_2$ ermittelt, kann man, um J_4^0 zu finden, von ein paar

Man kann indessen diesen Uebelstand durch eine kleine Aenderung umgehen. Zu diesem Zweck setzt man:

25) $X_{r-1} = X_{r-1}^0 + Z_{r-1}$, $X_r = X_r^0 + Z_r \dots$,
und bestimmt X_{r-1}^0 , $X_r^0 \dots$, als ob die Größen Φ und R
in 13) Null wären, so daß also die X^0 diejenigen Werte
der überzähligen bedeuten, welche festen Stützpunkten
entsprechen würden, und somit nach der bekannten Kon-
struktion bestimmt werden können. Sodann erhält man zur
Bestimmung der Zusatzwerte Z die Gleichung $\delta_r' + \delta_r'' = 0$,
wo jetzt

$$26) \quad \begin{cases} \delta'_r = [R'_r + \Phi_r^{\theta'} + \Phi'_r] - (\alpha_r Z_{r-1} + \beta'_r Z_r) \\ \quad \quad \quad = N'_r - (\alpha_r Z_{r-1} + \beta'_r Z_r), \\ \delta''_r = [R''_r + \Phi_r^{\theta''} + \Phi'_r] - (\beta''_r Z_r + \gamma_r Z_{r+1}) \\ \quad \quad \quad = N'_r - (\beta''_r Z_r + \gamma_r Z_{r+1}); \end{cases}$$

die Bedeutung von R , α , β , γ sind hier dieselben wie früher, die Werte von Φ^0 und Φ werden aus 16) erhalten, wenn man nur den durch 12) gegebenen Wert von $\operatorname{tg} \varphi$ durch:

durch:

$$27) \quad \operatorname{tg} \varphi_r^0 = \frac{X_{r-1}^0 - X_r^0}{l_r}, \text{ bzw. } \operatorname{tg} \varphi_r = \frac{Z_{r-1} - Z_r}{l_r}$$

ersetzt. Man erreicht in dieser Weise den Vorteil, daß die Z -Werte in einem beliebig (v -fach) vergrößerten Maßstabe (im Verhältnis zu demjenigen für die X -Werte) konstruiert werden können, und man braucht dazu nur statt der wirklichen Längen m' , n' , m'' , n'' die v -fachen Werte zu benutzen; alle in N' und N'' enthaltenen Glieder sind nämlich mit diesen Längen proportional.

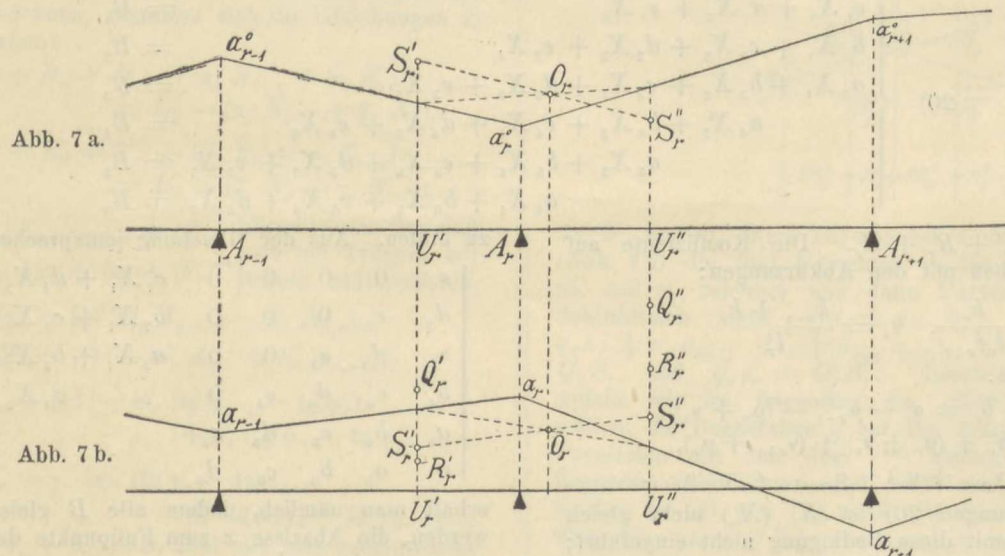


Abb. 7 a.

Abb. 7 b.

neuen Seiten $a_1 a_2$ und $a_2 a_3$ ausgehen. Ohne diesen Kunstgriff würde man sehr schnell zu allzu unbequem gelegenen Linien gelangen.

Mit der Bestimmung der J -Punkte ist nun die Aufgabe gelöst, indem der Schlußlinienzug dann leicht eingezeichnet werden kann. Für einen neuen Belastungsfall braucht man nur nach 24a) den neuen J_2 -Punkt zu berechnen, wobei die Unterdeterminanten $U_1, U_2 \dots$ und der ganze Nenner in 24a) unverändert bleiben.

b) Die Stützen sind weniger nachgiebig.

In diesem wohl am häufigsten vorkommenden Falle wird die bisher angegebene Konstruktion teilweise unbrauchbar, weil die Längen m' , n' , m'' und n'' allzu klein werden, um eine zuverlässige Bestimmung der Richtung der folgenden Schlußlinie (in Abb. 4: $a_{r+1}a_{r+2} \pm i_{r''}$) zu ermöglichen.

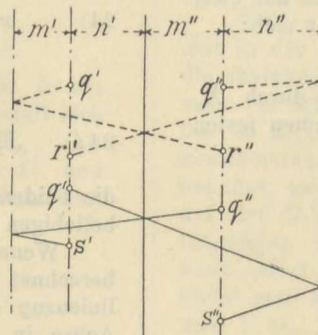


Abb. 7 c.

Die Konstruktion ist in Abb. 7 skizziert. Nachdem man zuerst die X^0 -Werte gefunden hat (Abb. 7 a), womit die φ^0 -Winkel bekannt geworden sind, ist der nächste Schritt, die charakteristischen Punkte (S in Abb. 7 b) mit den Ordinaten $\frac{N'_r}{\alpha_r + \beta_r}$ und $\frac{N''_r}{\beta'_r + \gamma_r}$ zu ermitteln (die U -Vertikalen in den beiden Figuren sind dieselben). Die von R' und R'' herrührenden Glieder werden nach 15) berechnet und in v -facher Vergrößerung als $U'_r R'_r$ und $U''_r R''_r$ abgetragen. Die von $\Phi^{0'}$ und $\Phi^{0''}$ gelieferten Beiträge werden in der Richtungsfigur (Abb. 7 c), wo die Längen m und n v -fach vergrößert sind, als $r' q'$ und $r'' q''$ konstruiert, indem man die punktierten Parallelen mit den X^0 -Schlußlinien in Abb. 7 a zieht; die gefundenen Ordinaten $r' q'$ und $r'' q''$ sollen dann in Abb. 7 b als $R' Q'$ und $R'' Q''$ übergeführt werden, und wenn man in

Abb. 7c die Buchstaben r' und r'' bei den Endpunkten der langen Parallelen mit den dem r -ten Stützpunkt am nächsten liegenden Schlußlinien setzt, hat man dabei nur R und Q in derselben Reihenfolge nacheinander zu nehmen wie r und q in der Richtungsfigur. Schließlich behandelt man die noch fehlenden, von den gesuchten Z abhängigen Beiträge QS zu den Ordinaten der charakteristischen Punkte genau wie in Abb. 4 (mittels des unteren Teiles der Richtungsfigur 7c). — Mit der Bestimmung der Q -Punkte in Abb. 7b ist in der Tat die Konstruktion vollständig zur oben erklärten zurückgeführt. Die Berechnung der Lage der J_2 -Vertikalen geschieht unverändert nach 24), wo alle Buchstaben ihre früheren Bedeutungen beibehalten; bei der Berechnung von $J_2^0 J_2$ nach 24a) sollen hier die Größen B die bekannten (R und φ^0 enthaltenden) Glieder bedeuten, also

$$28) \quad B_r = (\alpha_r + \beta_r) U_r' Q_r + (\beta_r' + \gamma_r) U_r'' Q_r'.$$

Die Glieder R' und R'' könnten auch in die X^0 -Werte einbezogen werden, da sie ja im voraus bekannt sind. Gewöhnlich wird es doch von Vorteil sein, die Z -Werte eben die durch die elastische Stützung hervorgerufenen Zusatzwerte bedeuten zu lassen.

III. Elastisch drehbare Stützen.

Wenn der Träger z. B. auf eisernen Stützen aufruft, mit denen er fest vernietet ist, muß sich die Stütze am oberen Ende ebenso viel drehen wie der Träger selbst; aus dieser Biegung der Säule resultiert zwar immer ein Seitendruck auf das Fundament, so daß man eigentlich eine Art Bogenkonstruktion erhält. Mit der immer zulässigen Annäherung, daß die Längenänderung der Trägerachse vernachlässigt werden kann, läßt sich indessen die Berechnung in einer solchen Weise durchführen, daß dieselbe als eine sehr einfache Erweiterung derjenigen für kontinuierliche Träger mit festen Stützpunkten betrachtet werden kann. Wir gedenken dabei nur auf lotrechte Belastung; unter der genannten Voraussetzung leuchtet ein, daß die oberen Endpunkte der Säulen (richtiger: die Schnittpunkte der Säulen- und Trägerachsen) keine wagerechte Verschiebung erleiden können, und bei Gleichsetzung der drei Winkel δ_r' , δ_r'' und δ_r''' (Abb. 8 und 9)

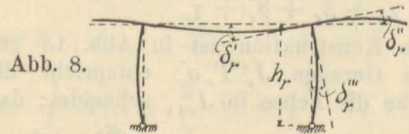


Abb. 8.



Abb. 9.

ergeben sich dann Gleichungen genug, um die unbekannten Stützenmomente zu bestimmen.

In Abb. 10 sind unendlich nahe der r -ten Unterstüttung zwei lotrechte Schnitte im Träger und einen wagerechten Schnitt in der Säule gelegt. Die in diesen Schnitten auftretenden Momente nennen wir X_r' (links), X_r'' (rechts) und ΔX_r (in der Säule), und mit den Drehrichtungen der Figur hat man:

$$29) \quad X_r' - X_r'' = \Delta X_r.$$

Das Hauptsystem, das durch diese Schnitte und die analogen bei den übrigen Stützen hergestellt ist, besteht aus einer Reihe einfacher Balken, welche außer den gegebenen äußeren Kräften mit den Momenten X' und X'' belastet sind, sowie aus einer Reihe von Säulen, auf welche an den oberen Endpunkten die Momente ΔX , wagerechte Kräfte H und lotrechte Kräfte A angreifen.

Die von den Stützendrücken A herrührende Zusammen-drückung der Säulen setzen wir hier als verschwindend voraus (die Stützen sind nur elastisch drehbar, nicht auch senkbar).

Wenn die Säule unten frei drehbar ist, hat man die Fundamentreaktionen A und H , und es muß sein:

$$\Delta X_r = H_r \cdot h_r,$$

indem h_r die Höhe der Säule bezeichnet. Der Tangenten-winkel δ_r''' berechnet sich als für einen an beiden Enden

Abb. 10

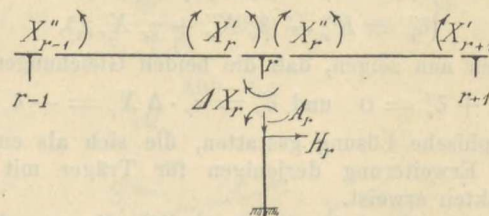


Abb. 11.

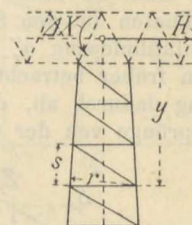


Abb. 12.

einfach gestützten Balken, der vom Momente ΔX am oberen Ende belastet ist, und mit dem Trägheitsmoment J_r^u der Säule findet man dann:

$$30a) \quad \delta_r''' = \frac{\Delta X_r h_r}{3 E J_r^u} = \Delta X_r \cdot \tau_r, \text{ wo } \tau_r = \frac{h_r}{3 E J_r^u}$$

die Drehung für $\Delta X_r = 1$ bedeutet.

Ist die Säule unten eingespannt, findet man zuerst eine Relation zwischen H und ΔX dadurch, daß die wagerechte Verschiebung des oberen Endpunktes der Säule Null sein soll, und demnächst den Winkel

$$30b) \quad \delta_r''' = \frac{\Delta X_r h_r}{4 E J_r^u} = \Delta X_r \cdot \tau_r, \text{ wo } \tau_r = \frac{h_r}{4 E J_r^u}.$$

Bisher wurde die Trägerhöhe als verschwindend angenommen, also die Höhe h_r bis zum Schnittpunkt der Säulen- und Trägerachsen gemessen. Richtiger sollte man in Abb. 11 das Trägheitsmoment der Säule gleich J_r^u nur auf der Strecke h rechnen, dagegen unendlich groß auf der Strecke h_1 ; dadurch würde man z. B. statt 30b) erhalten:

$$30c) \quad \tau_r = \frac{h^3}{4 (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) E J_r^u}.$$

In ähnlicher Weise findet man ohne Schwierigkeit τ_r in anderen Fällen; z. B. für den in Abb. 12 gezeigten Turmpfeiler ergibt sich mit den in der Abbildung eingeschriebenen Bezeichnungen unter Vernachlässigung der Füllungsglieder:

$$30d) \quad \tau_r = \frac{\sum \frac{s}{r^2 F} \cdot \sum \frac{y^2 s}{r^2 F} - (\sum \frac{y s}{r^2 F})^2}{\sum \frac{y^2 s}{r^2 F}}.$$

τ_r ist hier immer als eine Drehung in der Richtung von ΔX angegeben. — Allgemein hat man also:

$$31) \quad \delta_r''' = \tau_r \cdot \Delta X_r.$$

Die außer 29) und 31) notwendigen Gleichungen zur Berechnung von den unbekannten X' , X'' und ΔX ergeben sich nun, wie oben gesagt, durch Gleichsetzung der

Winkeländerungen δ'_r , δ''_r und δ'''_r . Für die einfachen Balken ($r-1$)— r und r —($r+1$) hat man [vgl. 21)] die allgemeinen Ausdrücke:

$$32) \quad \begin{cases} \delta'_r = \Sigma P_m \delta'_{mr} - X''_{r-1} \delta'_{r-1,r} - X'_r \delta'_{r,r}, \\ \delta''_r = \Sigma P_m \delta''_{mr} - X'_r \delta''_{r,r} - X''_{r+1} \delta''_{r+1,r}; \end{cases}$$

alle die hier vorkommenden Größen, außer X' und X'' , sind genau dieselben wie für Träger mit festen Stützpunkten. Der Kürze halber schreiben wir diese Ausdrücke wie früher:

$$32a) \quad \begin{cases} \delta'_r = K'_r - (\alpha_r X''_{r-1} + \beta'_r X'_r), \\ \delta''_r = K''_r - (\beta'_r X'_r + \gamma_r X''_{r+1}), \end{cases}$$

und sollen nun zeigen, daß die beiden Gleichungen

$$33) \quad \delta'_r + \delta''_r = 0 \quad \text{und} \quad \delta'_r = \tau_r \cdot \Delta X_r = -\delta''_r$$

eine graphische Lösung gestatten, die sich als eine sehr einfache Erweiterung derjenigen für Träger mit festen Stützpunkten erweist.

In Abb. 13 sind wie gewöhnlich die gesuchten X als Ordinaten in den Stützpunkten abgetragen, wodurch der Schlußlinienzug $a'_{r-1}, a'_r, a''_r, a'_{r+1}, \dots$ entstanden ist; von den früher betrachteten Fällen weicht dieser Schlußlinienzug dadurch ab, daß er in den Stützpunkten plötzliche Sprünge von der Größe ΔX aufweist. Weiter sind

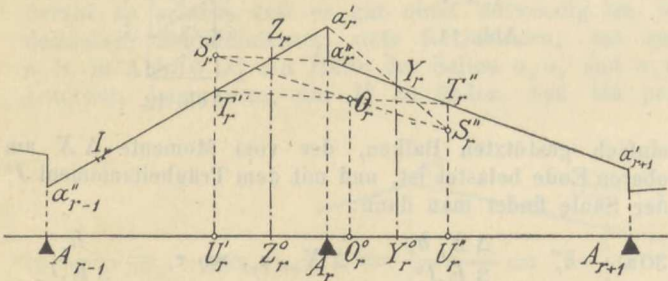


Abb. 13.

die U - und O -Vertikalen genau wie früher bestimmt, und ebenso die charakteristischen Punkte S'_r und S''_r und der O -Punkt, indem [vgl. 6) und 7)]:

$$34) \quad U'_r S'_r = \frac{K'_r}{\alpha_r + \beta'_r}, \quad U''_r S''_r = \frac{K''_r}{\beta'_r + \gamma_r}, \quad O_r O_r = \frac{K'_r + K''_r}{\alpha_r + \beta'_r + \beta''_r + \gamma_r}.$$

Die U -Vertikalen schneiden den Schlußlinienzug in T'_r und T''_r , und man findet leicht [vgl. 8)]:

$$35) \quad U'_r T'_r = \frac{\alpha_r X'_{r-1} + \beta'_r X'_r}{\alpha_r + \beta'_r}, \quad U''_r T''_r = \frac{\beta'_r X'_r + \gamma_r X''_{r+1}}{\beta'_r + \gamma_r};$$

die Verbindungsgerade $T'_r T''_r$ schneidet somit auf der O -Vertikalen die Strecke ab:

$$\frac{\alpha_r X'_{r-1} + \beta'_r X'_r + \beta'_r X'_r + \gamma_r X''_{r+1}}{\alpha_r + \beta'_r + \beta''_r + \gamma_r},$$

die Verbindungsgerade $S'_r S''_r$ ebenso die Strecke

$$\frac{K'_r + K''_r}{\alpha_r + \beta'_r + \beta''_r + \gamma_r},$$

und infolge von der Gleichung $\delta'_r + \delta''_r = 0$ sind diese Strecken einander gleich. Die beiden genannten Verbindungsgeraden gehen also durch den O -Punkt, und dies ist die geometrische Bedeutung der ersten Gleichung 33).

Mittels 34) und 35) findet man weiter:

$$U'_r S'_r - U'_r T'_r = T'_r S'_r = \frac{K'_r - (\alpha_r X'_{r-1} + \beta'_r X'_r)}{\alpha_r + \beta'_r},$$

und also mit Hilfe von 32a):

$$36) \quad T'_r S'_r = \frac{\delta'_r}{\alpha_r + \beta'_r}, \quad T''_r S''_r = \frac{\delta''_r}{\beta'_r + \gamma_r}.$$

Die zweite der Gleichungen 33) läßt sich nun schreiben:

$$(\alpha_r + \beta'_r) T'_r S'_r = \tau_r \cdot \Delta X_r = (\beta'_r + \gamma_r) S''_r T''_r,$$

oder, indem $\Delta X_r = a'_r a''_r$ (Abb. 13):

$$37) \quad \frac{a'_r a''_r}{T'_r S'_r} = \frac{\alpha_r + \beta'_r}{\tau_r} \quad \text{und} \quad \frac{a'_r a''_r}{S''_r T''_r} = \frac{\beta'_r + \gamma_r}{\tau_r}.$$

Wenn man also die Vertikalen $Z'_r Z'_r$ und $Y'_r Y'_r$ derart einlegt, daß

$$38) \quad \frac{A_r Z'_r}{Z'_r U'_r} = \frac{\alpha_r + \beta'_r}{\tau_r} \quad \text{und} \quad \frac{A_r Y'_r}{Y'_r U'_r} = \frac{\beta'_r + \gamma_r}{\tau_r},$$

und Geraden von S'_r bzw. S''_r aus durch die Schnittpunkte dieser Vertikalen mit den Schlußlinien zieht, so müssen diese Geraden die Stützenvertikalen in a'_r bzw. a''_r treffen. Aus den Vorzeichen in den Gleichungen kann gefolgert werden, daß von den charakteristischen Punkten der eine immer über, der andere unter dem Schlußlinienzuge liegen muß, und ferner, daß a'_r über a''_r gelegen sein muß, wenn S'_r , dagegen a''_r über a'_r , wenn S''_r über dem Schlußlinienzuge liegt.

Dem jetzt Gezeigten zufolge kann man den Zusammenhang zwischen den aufeinander folgenden Seiten a'_{r-1}, a'_r und a''_r, a'_{r+1} als eine Art erweiterte Homologie auffassen. Wenn a'_{r-1}, a'_r gegeben ist, findet man den Schnittpunkt T'_r von a'_r, a'_{r+1} mit der U' -Vertikalen durch den Strahl $T'_r O_r T'_r$, und aus dem Schnittpunkte von a'_{r-1}, a'_r mit der Z -Vertikalen leitet man den Punkt a'_r durch die Gerade $S'_r Z'_r a'_r$ her. — Weiter kann man einen Punkt der Seite a'_r, a'_{r+1} finden, wenn ein Punkt J_r von a'_{r-1}, a'_r bekannt ist. Dreht sich nämlich a'_{r-1}, a'_r um J_r , und konstruiert man die jeder Stellung entsprechende folgende Seite (durch T'_r und a'_r bestimmt), so sieht man ein, daß die Punkte T'_r und a'_r ähnliche Punktreihen durchlaufen, warum die Verbindungsgeraden zusammengehöriger Punkte einen festen Punkt enthalten müssen; dieser Punkt kann natürlich als Schnittpunkt zweier Geraden $a'_r T'_r$ gefunden werden. Macht man speziell a'_{r-1}, a'_r lotrecht, wird auch die entsprechende Gerade $a'_r T'_r$ lotrecht werden, und es ist ersichtlich, daß die Lage dieser letzten lotrechten davon unabhängig ist, ob sich J_r, S'_r und O_r in lotrechten bewegen. Die der gegebenen Vertikalen durch J_r entsprechende Vertikale läßt sich daher konstruieren, indem man die genannten Punkte in der Achse liegend an-

nimmt. Die Konstruktion ist in Abb. 14 gezeigt; der willkürlichen Geraden $J_r T'_r a'_r$ entspricht die Gerade $a''_r T''_r$, welche die Achse in J_{r+1} schneidet; da alle Kon-

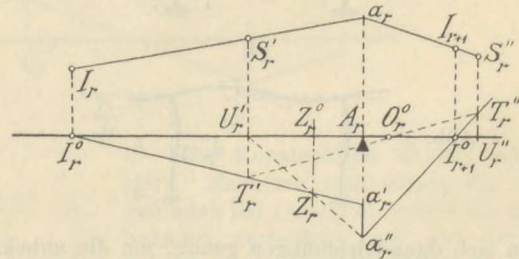


Abb. 14.

struktionslinien mit der Achse zusammenfallen können, ist J_{r+1} der J_r entsprechende Punkt. — Endlich bestimmt man am einfachsten J_{r+1} (auf der Vertikalen durch J_{r+1}), indem man durch J_r die spezielle Gerade durch S'_r zieht; dieser entspricht nämlich die Gerade $a'_r S'_r$, welche die Stützenvertikale in demselben Punkt a_r wie J_r, S'_r schneidet.

Die ganze Konstruktion wird jetzt in genau derselben Weise wie für Träger mit festen Stützpunkten ausgeführt. Zuerst legt man alle die U -, O -, Z - (und Y -) Vertikalen fest; wenn die Endmomente Null sind, kennt man dadurch einen Punkt der ersten und letzten Schlußlinie, und von diesen Punkten ausgehend konstruiert man die J - (und K -) Vertikalen; all das bisher Genannte ist von der Belastung unabhängig. Dann trägt man die der jeweiligen Belastung

entsprechenden S - und O -Punkte ab, bestimmt die J - (und K -) Punkte wie in Abb. 14 und kann nun endlich den ganzen Schlußlinienzug einzeichnen.

Wenn auch die Endstützen elastisch drehbar sind, hat man z. B. dem Stützpunkt 0 entsprechend einen charakteristischen Punkt S''_0 (Abb. 15) und eine Y-Vertikale.

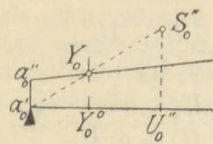


Abb. 15.

Dieser ist also hier der im voraus bekannte Punkt der Schlußlinie (statt des Stützpunktes selbst), und hiervon ausgehend konstruiert man die J -Vertikalen und die J -Punkte.

Für $\tau_r = 0$ hat man eine vollständige Einspannung; die Z -Vertikalen fallen dann mit den U' -Vertikalen zusammen; ebenso decken sich die Punkte Z_r und S'_r , so daß der Schlußlinienzug durch die charakteristischen Punkte geht. Für $\tau_r = \infty$ hat man ungehinderte Drehbarkeit; die Z - und Y -Vertikalen fallen mit den Stützenvertikalen zusammen, und die Konstruktion geht über in diejenige für Träger mit festen Stützpunkten.

IV. Elastisch senk- und drehbare Stützen.

Mit denselben Bezeichnungen wie im vorigen Abschnitt hat man auch hier die Grundgleichungen:

$$39) \quad \delta'_r = -\delta''_r = \tau_r \cdot \Delta X_r.$$

τ_r ist durch dieselben Ausdrücke (30 a—d) wie früher gegeben, die Winkeländerungen δ'_r und δ''_r sind:

$$40) \quad \begin{cases} \delta'_r = \Sigma P_m \delta'_{mr} - X''_{r-1} \delta_{r-1,r} - X'_r \delta'_{r,r} + \delta'_{ru}, \\ \delta''_r = \Sigma P_m \delta''_{mr} - X''_{r+1} \delta'_{r,r} - X'_{r+1} \delta_{r+1,r} + \delta'_{ru}, \end{cases}$$

wo δ'_{ru} und δ''_{ru} die von einem Nachgeben der Stützen herrührenden Beiträge bedeuten. Nach 4) ist

$$\delta'_{ru} = \frac{\Delta_{r-1} - \Delta_r}{l_r}, \quad \delta''_{ru} = \frac{\Delta_{r+1} - \Delta_r}{l_{r+1}},$$

wo $\Delta_{r-1} = k_{r-1} A_{r-1} + \Delta_{r-1}^0, \quad \Delta_r = k_r A_r + \Delta_r^0,$

und

$$A_r = A_{0,r} - \frac{1}{l_r} X''_{r-1} + \frac{1}{l_r} X'_r + \frac{1}{l_{r+1}} X''_r - \frac{1}{l_{r+1}} X'_{r+1},$$

Durch Einführung dieser und der analogen Ausdrücke, und indem man wie früher [11) und 12)] zur Abkürzung setzt $\delta_{r-1,r} = \alpha_r$, $\delta'_{r,r} = \beta'_r$, $\delta''_{r,r} = \beta''_r$, $\delta_{r+1,r} = \gamma_r$ und ferner:

$$41) \quad \begin{cases} m'_r = \frac{1}{\alpha_r + \beta'_r} \frac{k_{r-1}}{l_r}, & m''_r = \frac{1}{\beta'_r + \gamma_r} \frac{k_r}{l_{r+1}}, \\ n'_r = \frac{1}{\alpha_r + \beta'_r} \frac{k_r}{l_r}, & n''_r = \frac{1}{\beta'_r + \gamma_r} \frac{k_{r+1}}{l_{r+1}}, \end{cases}$$

$$42) \quad \frac{X''_{r-1} - X'_r}{l_r} = \operatorname{tg} \varphi_r, \quad \frac{X''_r - X'_{r+1}}{l_{r+1}} = \operatorname{tg} \varphi_{r+1} \dots,$$

lassen sich δ'_x und δ''_x schreiben:

$$43) \begin{cases} \delta'_r = [K'_r + R'_r + \Phi'_r] - (\alpha_r X''_{r-1} + \beta'_r X'_r) = L'_r - (\alpha_r X''_{r-1} + \beta'_r X'_r), \\ \delta''_r = [K''_r + R'_r + \Phi'_r] - (\beta'_r X''_r + \gamma_r X'_{r+1}) = L''_r - (\beta'_r X''_r + \gamma_r X'_{r+1}); \end{cases}$$

die Größen K , R und Φ sind durch dieselben Ausdrücke [14), 15) und 16)] wie im Abschnitt II gegeben (nur muß man in 14) $\delta'_{r,t}$ und $\delta'_{t,t}$ hier gleich Null setzen, da eine Temperaturänderung eine Längenänderung der Trägerachse bewirkt und daher die zu Anfang des Abschnittes III gemachte Voraussetzung nicht erfüllt sein würde). — Indem wir hier wie im Abschnitt II zuerst voraussetzen, daß

a. die Stützen sehr nachgiebig sind,

ergibt sich jetzt die geometrische Konstruktion sozusagen von selbst. In Abb. 16a ist der gesuchte Schlußlinienzug eingezeichnet und die gewöhnlichen U - und O -Vertikalen sowohl wie die für elastisch drehbare Stützen benutzten Z - und Y -Vertikalen eingelegt. Die charakteristischen Punkte S'_r und S''_r und der O -Punkt sollen nach 17) und 18) bestimmt werden; hierfür werden zuerst die nur von bekannten Größen abhängigen Q -Punkte nach 19) abgetragen, und wenn der Schlußlinienzug gegeben ist, können dann die Zusatzordinaten QS , nämlich:

$$Q_r S_r' = \frac{\Phi_r'}{\alpha_r + \beta_r'} \quad \text{und} \quad Q_r'' S_r'' = \frac{\Phi_r''}{\beta_r'' + \gamma_r}$$

Abb. 16 a.

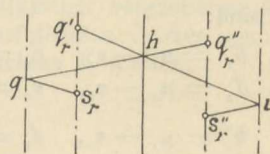
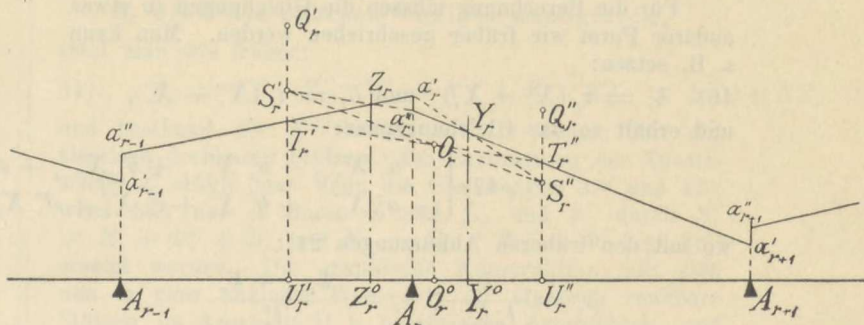


Abb. 16 b.

in der Richtungsfigur (Abb. 16b) genau wie früher konstruiert werden. Jetzt können die Ausdrücke 43) für δ'_x und δ''_x geschrieben werden:

44) $\delta'_r = (\alpha_r + \beta'_r) S'_r T'_r$ und $\delta''_r = (\beta''_r + \gamma_r) S''_r T''_r$,
und die Gleichung $\delta'_r + \delta''_r = 0$ besagt dann, daß sich
die Verbindungsgeraden $S'_r S''_r$ und $T'_r T''_r$ in O_r schneiden
müssen, und die Gleichung

$$\delta'_r = \tau_r \cdot \Delta X_r = -\delta''_r$$

oder $(\alpha_r + \beta'_r) S'_r T'_r = \tau_r \cdot \Delta X_r = (\beta''_r + \gamma_r) T''_r S''_r$

oder endlich:

$$45) \quad \frac{a'_r a''_r}{S'_r T''_r} = \frac{\alpha_r + \beta'_r}{\tau_r}, \quad \frac{a'_r a''_r}{T''_r S'_r} = \frac{\beta''_r + \gamma_r}{\tau_r},$$

daß die Strahlen $S'_r Z_r$ und $S''_r Y_r$, welche von den charakteristischen Punkten aus die Schnittpunkte Z_r und Y_r der Schlußlinien mit den Z - und Y -Vertikalen projizieren, die Stützenvertikale in a'_r bzw. a''_r treffen müssen.

Wenn aber der Schlußlinienzug von dem linken Ende bis a'_{r+1} bekannt ist, findet man in der zum r -ten Stützpunkt gehörigen Richtungsfigur die Richtung von $a'_{r+1} a'_{r+2}$ und mit Hilfe des charakteristischen Punktes S'_{r+1} beim $(r+1)$ -ten Stützpunkt und der Z-Vertikalen hier ergibt sich der Punkt a''_{r+1} , so daß die Seite $a'_{r+1} a'_{r+2}$ eingelegt werden kann. Der ganze Schlußlinienzug kann

also auch hier, wie früher, konstruiert werden, wenn nur die beiden ersten Seiten z. B. am linken Ende des Trägers bekannt sind.

Die weitere Entwicklung ist im Prinzip genau dieselbe wie für Träger mit nur elastisch senkbaren Stützen. Läßt man eine einzige von allen den Bedingungen fort, welchen der Schlußlinienzug genügen soll, z. B. die, daß

$X_n = 0$ (n ist die letzte — rechte — Stütze), muß jede Seite einen festen Punkt (J -Punkt) enthalten, und die Bestimmung dieser J -Punkte führt man auch hier am besten durch teilweise Berechnung durch, indem man zuerst J_2^0 (den Fußpunkt der J -Vertikalen im zweiten Felde) berechnet und daraus die übrigen J -Vertikalen durch Konstruktion herleitet, und dann ebenso die Ordinate $J_2^0 J_2$ berechnet und die übrigen J -Punkte konstruiert. Statt J_2^0 und J_2 direkt kann man auch — und das wird ein wenig einfacher für die graphische Konstruktion sein — das Verhältnis zwischen X_1' und X_1'' berechnen; die beiden Schlußlinienzüge, welche zur Bestimmung der J^0 -Punkte (mit den Q -Punkten in der Achse liegend) bzw. der J -Punkte gezeichnet werden sollen, sind ebensogut hierdurch bestimmt.

Für die Berechnung müssen die Gleichungen in etwas anderer Form wie früher geschrieben werden. Man kann z. B. setzen:

$$46) \quad \delta_r = \tau_r (X_r' - X_r'') \quad \text{und} \quad \delta_r'' = \tau_r (X_r'' - X_r'),$$

und erhält so das Gleichungspaar:

$$47) \quad \begin{cases} a_r X_{r-2}' - a_r X_{r-1}' + b_r X_{r-1}'' + c_r X_r' + d_r X_r'' - e_r X_{r+1}' = K_r + R_r, \\ -a_r X_{r-1}' + b_r X_r' + c_r X_r'' + d_r X_{r+1}' - e_r X_{r+1}'' + e_r X_{r+2}' = K_r + R_r, \end{cases}$$

wo mit den früheren Abkürzungen 21):

$$\mu_r = \frac{k_r}{l_r l_{r+1}}, \quad \nu_r = \frac{k_{r-1} + k_r}{l_r^2}$$

die Koeffizienten sind:

$$48) \quad \begin{cases} a_r' = \mu_{r-1}, & b_r' = \alpha_r - \nu_r, & c_r' = \beta_r + \nu_r + \tau_r, \\ d_r' = \mu_r - \tau_r, & e_r' = \mu_r, \\ a_r'' = \mu_r, & b_r'' = \mu_r - \tau_r, & c_r'' = \beta_r + \nu_{r+1} + \tau_r, \\ d_r'' = \gamma_r - \nu_{r+1}, & e_r'' = \mu_{r+1}, \end{cases}$$

während die Größen K und R ihre alten Bedeutungen beibehalten.

Mit z. B. fünf Feldern sind somit die Gleichungen, wenn $X_0' = X_0'' = 0$, dagegen $X_5' \geq 0$, und wenn man zur Abkürzung $K_r + R_r = B_r$ setzt:

$$\begin{aligned} c_1 X_1' + d_1 X_1'' - e_1 X_2' &= B_1 \\ b_1 X_1' + c_1 X_1'' + d_1 X_2' - e_1 X_2'' + e_1 X_3' &= B_1 \\ -a_2 X_1' + b_2 X_1'' + c_2 X_2' + d_2 X_2'' - e_2 X_3' &= B_2 \\ -a_2 X_1'' + b_2 X_2' + c_2 X_2'' + d_2 X_3' - e_2 X_3'' + e_2 X_4' &= B_2 \\ a_3 X_1' - a_3 X_2' + b_3 X_2'' + c_3 X_3' + d_3 X_3'' - e_3 X_4' &= B_3 \\ -a_3 X_2'' + b_3 X_3' + c_3 X_3'' + d_3 X_4' - e_3 X_4'' + e_3 X_5' &= B_3 \\ a_4 X_2' - a_4 X_3' + b_4 X_3'' + c_4 X_4' + d_4 X_4'' - e_4 X_5' &= B_4 \\ -a_4 X_3'' + b_4 X_4' + c_4 X_4'' + d_4 X_5' &= B_4, \end{aligned}$$

und wenn man hier alle X außer X_1' und X_1'' eliminiert, ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} -e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 X_1' + d_1 X_1'' - B_1 \\ d_1' - e_1' & e_1'' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 X_1' + c_1 X_1'' - B_1 \\ c_2' & d_2' - e_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 X_1' + b_2 X_1'' - B_2 \\ b_2'' & c_2'' & d_2'' - e_2'' & e_2'' & 0 & 0 & 0 & -a_2 X_1'' - B_2 \\ -a_3' & b_3' & c_3' & d_3' - e_3' & 0 & 0 & 0 & a_3 X_1'' - B_3 \\ 0 & -a_3'' & b_3'' & c_3'' & d_3'' - e_3'' & e_3'' & 0 & -B_3 \\ 0 & a_4' - a_4'' & b_4' & c_4' & d_4' - e_4' & e_4'' & 0 & -B_4 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4'' & b_4'' & c_4'' & d_4'' & -B_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nennt man die der letzten lotrechten Kolonne entsprechenden Unterdeterminanten U_1, U_2, \dots , kann dies auch geschrieben werden:

$$(c_1 U_1 + b_1' U_2 - a_2' U_3) X_1' + (d_1 U_1 + c_1' U_2 + b_2' U_3 - a_2'' U_4 + a_3' U_5) X_1'' = B_1 U_1 + B_1' U_2 + \dots + B_4' U_8,$$

und hieraus ergibt sich zur Bestimmung der J^0 -Punkte, indem alle B gleich Null gesetzt werden:

$$49) \quad \frac{X_1''}{X_1'} = - \frac{c_1 U_1 + b_1' U_2 - a_2' U_3}{d_1 U_1 + c_1' U_2 + b_2' U_3 - a_2'' U_4 + a_3' U_5},$$

und zur Bestimmung der J -Punkte für jede gegebene Belastung:

$$50) \quad X_1'' = \frac{B_1 U_1 + B_1' U_2 + \dots + B_{n-1}' U_{2n-2}}{d_1 U_1 + c_1' U_2 + b_2' U_3 - a_2'' U_4 + a_3' U_5} - \frac{c_1 U_1 + b_1' U_2 - a_2' U_3}{d_1 U_1 + c_1' U_2 + b_2' U_3 - a_2'' U_4 + a_3' U_5} \cdot X_1'.$$

Jetzt können die J^0 -Punkte folgendermaßen konstruiert werden (Abb. 17): man zieht eine willkürliche erste Seite $a_0 a_1$ und findet durch 49) den Punkt a_1' . Indem keine Belastung vorhanden vorausgesetzt wird, fallen die Q - und U -Punkte zusammen, $a_1' Z_1$ bestimmt S_1' , $S_1' Q_1$ wird in die Richtungsfigur als $s_1' q_1$ übertragen, (hier ist $g s_1'$ wagerecht, $gh \perp a_0 a_1$), und $q_1 h$ ist dann die Richtung der zweiten Seite $a_1' a_2'$, welche die Achse

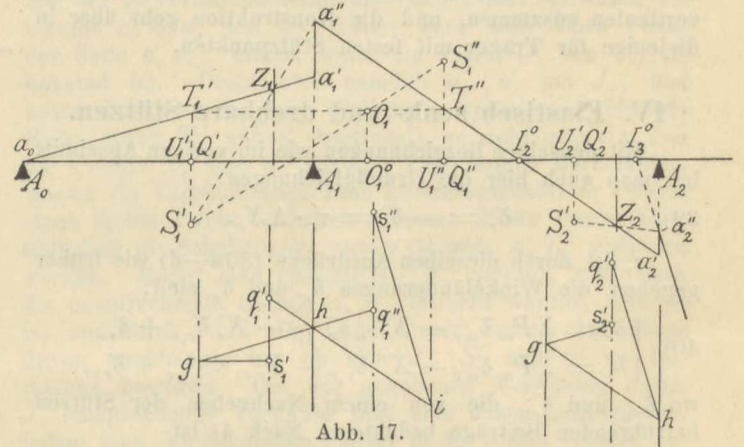


Abb. 17.

in J_2^0 schneidet. Weiter ist O_1 durch die Gerade $T_1' T_1''$ bestimmt, $S_1' O_1$ liefert dann S_1'' , womit s_1' in der Richtungs-

figur und also die Richtung $s_1' i$ der dritten Seite gefunden ist. Nun geht man zum Stützpunkt A_2 und zeichnet hier in der dazu gehörigen Richtungsfigur die Geraden $s_2' g$, gh und $h q_2$, wodurch S_2' bestimmt ist; die Gerade $S_2' Z_2$ liefert dann a_2' und die dritte Seite, welche

die Achse in J_3^0 schneidet, kann eingelegt werden. Wenn J_3^0 gefunden ist, kann man, um möglicherweise bequemer gelegene Konstruktionslinien zu erhalten, drei neue Seiten $a_0 a_1$, $a_1 a_2$ und $a_2 a_3$ zur Bestimmung von J_4^0 benutzen; die neuen Seiten müssen nur durch J_2^0 und J_3^0 gezogen werden und dieselben Verhältnisse $X_1':X_1''$ und $X_2':X_2''$ wie eben gefunden liefern. — In derselben Weise verfährt man mittels 50) um die J -Punkte selbst zu konstruieren; wenn man hier zu neuen Seiten übergehen will, um die Konstruktion bequemer fortsetzen zu können, muß man

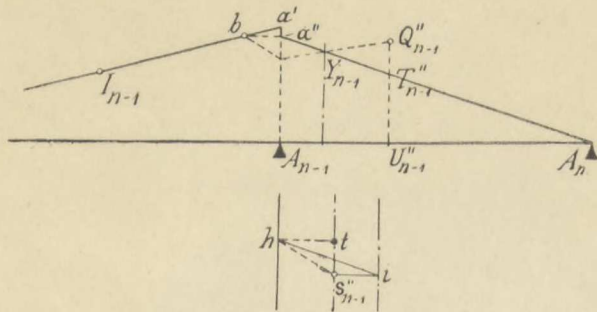


Abb. 18.

doch die in Abb. 18 gezeigte und weiter unten erklärte Hilfskonstruktion benutzen.

Wenn schließlich alle J -Punkte bekannt sind, kann der ganze Schlußlinienzug gezeichnet werden. Die letzte Seite ist nämlich sofort gegeben, da man zwei Punkte derselben kennt; von der vorletzten Seite ist dagegen

nur J_{n-1} bekannt; man findet indessen leicht einen Punkt b in folgender Weise (Abb. 18): In der Richtungsfigur kennt man $s''i$ (wagerecht) und $ih \neq A_n a''$; in Abb. 18 selbst ist Q''_{n-1} bekannt, S'' dagegen unbekannt; läßt man S'' die U -Vertikale durchlaufen und bestimmt a' durch $S'' Y_{n-1}$ und in der Richtungsfigur q'' durch $s'' q'' = S'' Q''$, wollen a' und q'' ähnliche Punktreihen beschreiben, und Strahlen durch a und $h q''$ müssen daher einen festen Punkt b enthalten, der durch zwei Versuche konstruiert werden kann (in der Abbildung hat man S'' mit Q'' bzw. mit T'' zusammenfallen lassen). $b J_{n-1}$ ist dann die gesuchte vorletzte Seite, und wenn zuerst zwei Seiten bekannt sind, können alle die folgenden in gewöhnlicher Weise eingezeichnet werden.

b) Sind die Stützen weniger nachgiebig,

setzt man wie früher:

$$51) \quad X_r' = X_r^0 + Z_r', \quad X_r'' = X_r^{0''} + Z_r'', \quad \Delta X_r = \Delta X_r^0 + \Delta Z_r$$

und bestimmt die X^0 -Größen wie für Träger mit nur elastisch drehbaren Stützen. Zur Bestimmung der Zusatzwerte Z erhält man dann die Gleichungen 39) und 43), wenn hier nur X durch Z und L_r und L_r' durch $N_r' = R_r' + \Phi_r^{0'} + \Phi_r'$ und $N_r'' = R_r'' + \Phi_r^{0''} + \Phi_r''$ [vgl. 26)] ersetzt werden. Die graphische Konstruktion läßt sich nun in ganz analoger Weise wie für elastisch senkbare Stützen im Abschnitt II, b beschrieben durchführen, und man kann ein willkürlich vergrößertes Maßstab für die sonst zu klein ausfallenden Größen (m und n) und dadurch für die gesuchten Z wählen.



TB
624.021
OST

461277



300184470

1905

