DTU Bibliotek

**Denne fil er downloadet fra**

# Danmarks Tekniske Kulturarv

*www.tekniskkulturarv.dk*

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

## Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

Petersen og Forchhammer.

Mekanisk Fysik.

1866

INDUSTRI-FORENINGEN.

53 (02)

3107.

~~26~~

531 (022)

~~531 (022)~~

13/2

6-47

# MEKANISK FYSIK

ELLER

## LÆREN OM LEGEMERS

# LIGEVÆGT OG BEVÆGELSE.

MED 353 OPGAVER

OG

ET KORT UDDRAG AF FYSIKENS HISTORIE.

AF

JULIUS PETERSEN, ADJUNKT. OG GEORG FORCHHAMMER, CAND. POLYT.

INDUSTRI-FORENINGEN.

KJØBENHAVN.
LEHMANN & STAGES FORLAG.
TRIERS BOGTRYKKERI (H. J. SCHOU).
1888.

AL RET TIL OVERSÆTTELSE FORBEHOLDES.

# INDHOLD.


| | Side. |
|---|---|
| Indledning | 1 |
| Ligevægt af faste Legemer, uden Gnidning | 8 |
| — — — med Gnidning | 33 |
| Arbejde | 39 |
| Maskiner | 41 |
| Energi | 51 |
| De molekulære Kræfter i faste Legemer | 59 |
| Vædskers Ligevægt | 68 |
| Luftarters Ligevægt | 92 |
| Bevægelseslære | 139 |
| Jævnt voksende Bevægelse | 146 |
| Bevægelsesmængde, levende Kraft | 157 |
| Stødet | 165 |
| Krumlinede Bevægelser, Rotationer | 170 |
| Svingende eller oscillerende Bevægelse | 183 |
| Den almindelige Tiltrækning (Attraktion) | 195 |
| Potentialet | 212 |
| Vædskers Bevægelse | 216 |
| Luftens Bevægelse | 230 |
| Luftarternes Teori | 236 |
| Bølgebevægelse | 240 |
| Lydlære | 264 |
| Fysikens Historie | 293 |
| Opgaver Nr. 237—353 | 311 |
| Absolute Enheder | 323 |


Hvad der ikke anses for nødvendigt til Studentereksamen er trykt med smaa Typer.

# INDLEDNING.

1. Vi komme i Naturlæren til at lære flere forskellige Arter af Størrelser at kende, og for at regne med disse er det nødvendigt, at vi kunne maale dem, det vil sige angive deres Værdi i Forhold til et bekendt Maal eller Enhed af samme Art som den Størrelse, vi maale. Siger man for Eks., at Afstanden mellem to Punkter er 20 Fod, eller at en Sten vejer 2 Pund, forudsætte vi, at det er bekendt, hvilken Afstand vi kalde en Fod, og hvilken Vægt vi kalde et Pund. Enheden, der i og for sig er vilkaarlig, kan ikke beskrives, enhver maa danne sig Forestillingen derom ved at se den eller paa anden Maade opfatte den med Sanserne.

Bruge vi flere Maal for samme Art af Størrelser, som Fod og Tommer, Pund og Centner osv., maa vi kende deres indbyrdes Forhold. Hvert Land har sine Maal for de forskellige Størrelser, men da de franske Maal i de fleste Tilfælde ere de bekvemmeste, ville vi i det følgende bruge dem.

Længdeenheden er 1 Meter (m), der oprindelig blev bestemt som $^1/_{40\,000\,000}$ af Jordens Omkreds; den deles i 10 Decimeter (dm) = 100 Centimeter (cm) = 1000 Millimeter (mm), og 1000 Meter kaldes en Kilometer (km). Heraf dannes Flademaalene 1 □ Meter = 100 □ Decimeter osv. og Rummaalene 1 cub. Meter = 1000 cub. Decimeter osv.; 1 cub. Decimeter kaldes 1 Liter, og 100 Liter er 1 Hektoliter; 1 Liter er meget nær = 1 Pot.

Vægtenheden er 1 Gram (gr), der blev bestemt som Vægten af 1 cub$^{cm}$ destilleret Vand til 4 $^{0}$ Varme; det deles i 10 Decigram ($^{dcg}$) = 100 Centigram ($^{cg}$) = 1000 Milligram ($^{mg}$), og 1000 Gram er 1 Kilogram ($^{kg}$).

Udtrykt i danske Maal er 1 Meter = 3,$_{186}$ Fod, og 1 Kilogram, som ofte kaldes 1 Kilo, = 2 Pund.

**2.** Det forekommer hyppigt i Naturlæren, at en eller anden Art af Størrelse, $x$, vokser i samme Forhold som flere andre, $y_1\ y_2\ y_3 \ldots$ af samme eller forskellig Art, men i omvendt Forhold af $z_1\ z_2\ z_3 \ldots$ Denne Afhængighed udtrykkes ved Ligningen:

$$x = \alpha \frac{y_1\ y_2\ y_3 \ldots}{z_1\ z_2\ z_3 \ldots}$$

hvor $\alpha$ er en konstant Størrelse, det vil sige, at den bliver uforandret for ethvert Sæt Værdier af $x$, $y$ og $z$. For at bestemme Værdien af $\alpha$ maa man paa en eller anden Maade skaffe sig et Sæt sammenhørende Værdier af $x$, $y$ og $z$, og ved at indsætte dem i Ligningen beregne $\alpha$. Det er en Selvfølge, at der kun kan regnes med de ubenævnte Tal, og derfor vil den Værdi, Konstanten faar, afhænge af de Enheder, hvormed vi maale alle Størrelserne $x$, $y$ og $z$.

Det er f. Eks. let forstaaeligt, at Vægten af en vis Mængde Vand maa vokse proportionalt med Vandets Rumfang. Kaldes Vægten $p$ og Rumfanget $r$, har man altsaa $p = \alpha r$; til Bestemmelse af $\alpha$ ved vi, at 1 cub$^{cm}$ Vand vejer 1 gr.; bruge vi altsaa disse Enheder, have vi Ligningen $1 = \alpha$, som giver Ligningen $p = r$; brugte vi derimod de danske Enheder Pund og Kubikfod, vilde vi finde, at en Kubikfod Vand vejede 61,$_{83}$ ℔, hvorved Ligningen blev $p = 61{,}_{83}\ r$.

Eks. Hvor mange Meter eller Centimeter er en Fod?

Res. 1 Fod = 0,$_{314}$ $^{m}$

Hvor mange Kilometer gaar der paa en Mil?

Res. 1 Mil = 7,$_{53}$ $^{km}$

Hvor mange Millimeter gaar der paa 1 Tomme?

Res. 1 Tomme = 26,$_{15}$ $^{mm}$

Hvor mange □$^{cm}$ indeholdes i 1 □′?

Hvor mange □′ gaar der paa 1 □$^{m}$?

Hvor mange Liter indeholder 1 cub.'?
Res. 1 cub.' = 30,9 Liter.
Hvor mange cub.$^{mm}$ er der i 1 Liter?
Hvor mange gr. indeholder 1 Kvint?
Res. 1 Kvint = 5 gr.
Hvor mange Kilo vejer 1 cub.$^{m}$ Vand?
Hvor mange Kilo vejer 1 Liter Vand?
Hvilken Værdi faar Konstanten $\alpha$ i Ligningen $p = \alpha r$, naar $p$ udtrykkes i Kilo og $r$ i Liter?

---

**3. Inertiens Lov.** Naar et Legeme er i Hvile, kan det ikke sætte sig selv i Bevægelse, og er det i Bevægelse, kan det af sig selv hverken forandre Bevægelsens Hastighed eller Retning. Enhver Forandring i et Legemes Hvile eller Bevægelse maa altsaa hidrøre fra, at Legemet paavirkes af en Kraft, der udgaar fra et andet Legeme. Som Eksempler paa Kræfter kan nævnes Dyrs og Menneskers Muskelkraft, Tyngdekraften, som udgaar fra Jorden og paavirker alle Legemer, magnetiske Kræfter, fremdeles den Kraft, hvormed en spændt Fjeder kan holde et Ur i Gang osv.

Den første Del af Inertiens Lov er forstaaelig nok, da man altid ved Begyndelsen af enhver Bevægelse kan iagttage en ydre Aarsag dertil. Den anden Del af Loven er det derimod umuligt at overbevise sig om ved umiddelbare Iagttagelser, da der aldrig foregaar nogen Bevægelse, uden Legemet paavirkes af ydre Kræfter; er der nemlig ikke andre Kræfter, saa er der dog i al Fald Modstande mod Bevægelsen, og disse virke ganske som Kræfter, der søge at standse Bevægelsen. Saadanne Modstande ere Gnidningsmodstanden, som fremkommer, naar to Legemer bevæge sig langs ad hinanden, Luftmodstanden, der hidrører fra, at Legemet under sin Bevægelse maa skyde Luftdelene til Side, og Bøjningsmodstanden i Snore og Remme, for saa vidt saadanne findes mellem de Ting, der bevæge sig. Jo mindre man kan gøre disse Modstande, desto bedre ser man, at et Legemes

Inerti kan vedligeholde dets Bevægelse, men det sikreste Bevis for Loven er dog, at man altid kommer til rigtige Resultater ved at forudsætte dens Gyldighed.

Inertien viser sig endvidere som en Modstand imod enhver Kraft, der forandrer Legemets Hvile eller Bevægelse. Bærer man f. Eks. en Sten i en tynd Snor og rykker rask opad, kan Stenens Inertimodstand være stor nok til at rive Snoren over; man ser ogsaa tydeligt, hvor stærkt et Par Heste maa trække for at sætte et tungt Vognlæs i Bevægelse, men er Vognen først sat i Gang, udfordres der kun et ringere Træk til at overvinde Luftmodstand og Gnidning.

Af Inertien følger endnu, at ingen Kraft kan gøre sin Virkning paa Legemet uden at behøve Tid dertil, og ligeledes kræves der nogen Tid, før en Virkning, som begynder paa et Sted af Legemet, naar hen til de andre Dele, ligesom Vognene i et Jærnbanetog sættes i Bevægelse, den ene efter den anden, naar Lokomotivet begynder at trække. Naar man taler om momentane Kræfter, mener man saadanne, som frembringe deres Virkning i meget kort Tid, f. Eks. de Kræfter, der fremkomme ved Slag, Stød eller Eksplosioner.

Inertiens Lov er først funden af Italieneren Galilæi, som levede fra 1564 til 1642.

Eks. Hvorfor falder man bagover, naar man sidder paa en Vogn, der sættes i Gang, og forover, naar Vognen pludselig standser?

Man kan faa et Hammerhoved til at sætte sig fastere paa Skaftet, naar man holder dette i Haanden og slaar det mod Bordet. Hvorledes forklares det?

Hvad hjælper Tilløb til?

Hvorledes skal man springe ned af en Sporvogn, som er i Fart, for ikke at falde?

Hvordan kan det være, at et Pistolskud kan gaa igennem et tyndt Bræt, som er stillet ganske løst paa Enden, medens et ubetydeligt Tryk med Fingeren kan vælte Brættet?

Lægges en Kridtpibe paa to udspændte Haar, kan man med et rask Slag slaa Kridtpiben over uden at beskadige Haarene. Hvorledes forklares det?

**4. Maaling af Kræfter.** En af de Kræfter, vi hyppigst have Lejlighed til at iagttage, og som spiller den største Rolle i Naturen, er Tyngdekraften. Den udgaar fra Jorden selv og virker paa alle Genstande, saaledes at disse udøve et Tryk paa deres Underlag eller falde til Jorden, naar Underlaget borttages. Den Retning, hvori Tyngdekraften virker, kan man se ved at hænge et Lod op i en Snor; denne viser da Kraftens Retning, som kaldes lodret eller vertikal og er i Forlængelsen af Jordens Radius til det betragtede Sted. Da Jordens Størrelse er meget betydelig, blive lodrette Linjer i Nærheden af hinanden saa lidt sammenløbende, at de kunne betragtes som parallele.

For at bestemme Størrelsen af den Kraft, hvormed Jorden tiltrækker et Legeme, kan man bruge et Dynamometer, der i en af sine simpleste Former bestaar af en skruedannet Fjeder, som foroven har et Haandtag og forneden ender i en Krog, hvori Legemet kan hænges. Langs Fjederen er der en Maalestok, som er fastgjort foroven; forneden bærer Fjederen en Viser, der kan pege paa Maalestokkens Inddelinger; disse ere afsatte paa de Steder, hvor Viseren peger, naar der hænges 1, 2, . . . . Kilo paa Krogen. Naar saa en anden Genstand hænges paa, vil Viseren angive, med hvilken Kraft Jorden paavirker dette Legeme, eller med andre Ord Legemets Vægt.

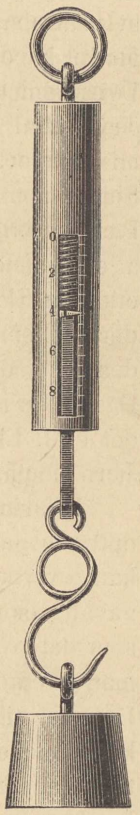

Fig. 1.

Ogsaa andre Kræfter kunne maales med Dynamometret. Dersom man f. Eks. vil bestemme, hvor stærkt et Par Heste maa trække for at holde en Vogn i jævn Gang, saa kan man spænde et Dynamometer ind mellem Vognen og Hammelen og umiddelbart aflæse Trækket. Dette kan ogsaa opfattes, som om vi maale den Modstand, der er imod Vognens Bevægelse; det forstaas ogsaa let, at naar Hestenes Træk er lig med Modstanden, saa ville de ophæve hinandens Virkning, og Vognen paa Grund af Inertien bevare sin Be-

vægelse uforandret. Hvad vi her have set i et Eksempel, gælder i Almindelighed; en Kraft og en Modstand kunne ophæve hinandens Virkning og ere derfor ensartede Størrelser, som maales i samme Enhed.

Trykket mellem to Legemer maales ved at anbringe Dynamometret imellem dem; Maalestokken maa i Forvejen være inddelt med Hensyn til Sammentrykning af Fjederen paa samme Maade som før ved Fjederens Udvidelse.

**5. Loven om Kraft og Modkraft eller Aktion og Reaktion.** Naar der fra et Legeme udgaar en Kraft, som paavirker et andet, vil der altid fra det andet Legeme udgaa en lige saa stor Kraft, der paavirker det første i modsat Retning. Enhver ved saaledes at naar man trykker Haanden mod en Væg, mærker man et Modtryk, og anbringer man mellem Haanden og Væggen et Dynamometer, kan man enten sige, at man maaler Haandens Tryk mod Væggen eller Væggens Modtryk. Trækker man i en fastgjort Snor, mærker man et Træk i modsat Retning. Sidder man i en Baad og trækker i et Tov, som er bundet til en Pæl, saa vil Modkraften trække Baaden ind til Pælen; paa Grund af et lignende Modtryk kan man stage en Baad frem i Vandet, eller en Slæde paa Sneen. Ror man en Baad, fremkommer der mellem Aarerne og Vandet en Virkning og Modvirkning, den ene driver Vandet tilbage, den anden Baaden frem. Ogsaa for Kræfter, der virke paa Afstand, gælder Reglen, det er f. Eks. ikke alene Magneten, som tiltrækker et Stykke Jærn, men dette tiltrækker ogsaa Magneten.

Erfaringen viser saaledes i mange Tilfælde, at Kræfterne optræde parvis og modsat rettede, ligesom man ogsaa ofte kan overbevise sig om, at de to Kræfter ere lige store; navnlig er dette indlysende ved Tryk og Modtryk, saaledes som det ovenfor er omtalt, ligesom det ogsaa er klart, at man ved at udspænde en elastisk Snor imellem to Legemer tilvejebringer en fuldstændig gensidig Tiltrækningskraft imellem dem, saaledes at bægge Legemer ville nærme sig til hinanden, naar man slipper dem. Men det bedste Bevis for Lovens Rigtighed er, ligesom overalt i Fysiken, at Regninger, der gaa ud fra denne Forudsætning, føre til Resul-

tater, som stemme med Virkeligheden. Man maa derfor sige, at denne Lov angiver en almindelig Egenskab ved alle Kræfter, som findes i Naturen. Naar Jorden tiltrækker en Sten, maa denne altsaa ogsaa tiltrække Jorden med den samme Kraft. At denne Tiltrækning ikke mærkes, kommer af, at den er for lille til at give den store Jord en kendelig Bevægelse; og saaledes ville de to lige store Kræfter i mange Tilfælde have meget forskellige Virkninger paa de to Legemer.

Man kan let se, at dersom der i Naturen gaves Kræfter af en anden Beskaffenhed, vilde det føre til meget overraskende Resultater. Kunde man f. Eks. finde to Legemer, af hvilke kun det ene tiltrak det andet, og man fastgjorde dem i to Punkter $A$ og $B$ paa en cirkelformet Skive, der kunde dreje sig om sit Centrum, saa vilde den omtalte Tiltrækning bevirke, at Skiven uafladelig drejede sig rundt.

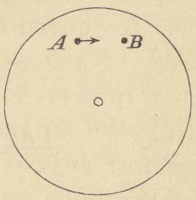

Fig. 2.

Loven om Kraft og Modkraft er først funden af Englænderen Isaak Newton, der levede fra 1643 til 1727.

**6.** Den nærmere Undersøgelse af Kræfternes Virkninger paa Legemerne deles i Ligevægtslære og Bevægelseslære.

## Ligevægt af faste Legemer.

**7.** Naar flere Kræfter virke paa et Legeme, siger man, at de holde hinanden i Ligevægt, dersom Legemet befinder sig i ganske den samme Tilstand, som om ingen af disse Kræfter vare til Stede.

Dersom det er alle de tilstedeværende Kræfter og Modstande, som holde hinanden i Ligevægt, saa vil Legemet paa Grund af Inertien blive i Hvile, hvis det fra Begyndelsen af er det, eller det vil fortsætte den Bevægelse, det har, med uforandret Retning og Hastighed. Betingelserne for Ligevægt, som vi nu i det følgende ville lære at kende, blive de samme, hvad enten der er Tale om Ligevægt under Hvile eller Ligevægt under Bevægelse.

**8.** To Kræfter, anbragte paa samme Punkt af et Legeme, ville holde hinanden i Ligevægt, dersom de ere lige store og gaa i modsatte Retninger.

Eks. Hvilke Kræfter holde hinanden i Ligevægt, naar en Kugle ligger paa et vandret Bord, eller naar den ruller med jævn Hastighed hen ad Bordet uden Modstand?

Naar man holder en Genstand i Haanden og bevæger denne skraat opad med jævn Hastighed, i hvilken Retning maa da Haandens Tryk paa Legemet gaa?

**9.** Dersom to Kræfter $P$ og $Q$ virke paa samme Punkt og i samme Retning, kan man holde Ligevægt imod dem ved Hjælp af en tredje Kraft $S$, Supplementkraften, som maa være $= P + Q$ og rettet lige imod disse. Vi lære heraf, at to ens rettede Kræfter $P$ og $Q$ virke som een Kraft $=$ deres Sum og i samme Retning; ligeledes ser man, at to modsat rettede Kræfter $P$ og $S$ virke som een $=$ deres Differens og i samme Retning som den største. Anvendes disse Resultater paa flere Kræfter, der have samme Angrebspunkt og gaa i samme eller modsatte Retninger, faar man den Regel, at saadanne Kræfter virke som en enkelt Kraft $=$ Summen af alle de givne, naar de regnes positive eller negative, eftersom de gaa i den ene eller anden Retning; denne enkelte Kraft, som kan træde i Stedet for flere, kaldes deres Resultant; de enkelte Kræfter kaldes Komposanterne.

To lige store og modsat rettede Kræfter, som virke paa forskellige Punkter af et Legeme, kunne ogsaa holde hinanden i Ligevægt, naar de gaa i Forlængelse af hinanden. Heraf følger, at en Kraft beholder samme Virkning, naar den flyttes i sin egen Retning, dersom Legemet antages at være fuldkommen stift.

Det ser undertiden ud, som om Aktion og Reaktion holdt hinanden i Ligevægt; at dette dog er umuligt, følger af, at de virke paa hver sit Legeme. Naar f. Eks. en Kraft $P$ trykker et Legeme ned mod et Underlag, saa faar man altid en Reaktion, der frembringer Ligevægt; men denne Ligevægt finder ikke Sted mellem Aktionen og Reaktionen, men mellem Reaktionen og den oprindelige Kraft, $P$, hvilke bægge virke paa samme Legeme.

**10. Kræfternes Parallelogram.** Anbringe vi to lige store Kræfter i samme Punkt, under en vis Vinkel, vil det paa Grund af Symmetrien være indlysende, at man kan holde Ligevægt imod dem ved Hjælp af en Supplementkraft, der er rettet modsat Vinklens Halveringslinje og har en passende Størrelse; de to Kræfters Resultant gaar derfor langs ad

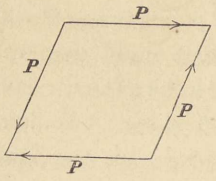

Fig. 3.

Halveringslinjen. Dersom man altsaa paa hver af de to modstaaende Vinkelspidser i en Rombe anbringer to Kræfter $P$ langs Siderne, saa maa disse 4 Kræfter holde hinanden i Ligevægt, idet de kunne sammensættes til to Resultanter, som ophæve hinanden.

Ved Hjælp af denne Sætning kunne vi nu finde Resultanten af to hvilke som helst Kræfter, der danne en Vinkel.

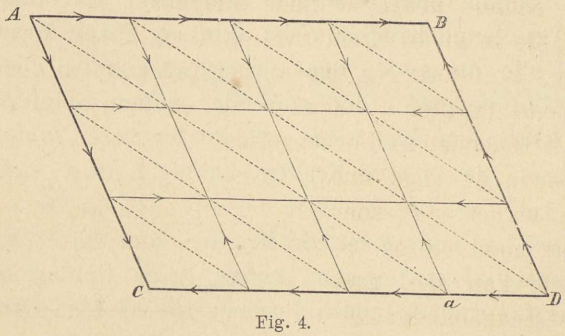

Fig. 4.

Lad os afbilde Kræfterne ved de to Linjer $AB$ og $AC$, idet disse afsættes i Retning af Kræfterne og indeholde det samme Antal Længdeenheder, som Kræfterne indeholde Kraftenheder; kaldes denne Enhed $m$. kunne vi som Eksempel tage $AB = 4\,m$ og $AC = 3\,m$. Dersom vi da i det fjerde Toppunkt $D$ af det Parallelogram, som bestemmes ved $AB$ og $AC$, anbringe to nye Kræfter, lige store og parallele med de oprindelige men rettede modsat, kunne vi bevise, at alle fire Kræfter holde hinanden i Ligevægt. De kunne nemlig deles i Stykker, som alle ere $= m$. og til Angrebspunkter for disse kunne vi vælge de Punkter, som dele Siderne i 4 og 3 lige store Dele. Det vil nu ikke frembringe nogen Forandring i Legemets Tilstand, om man i hvert af disse Delingspunkter anbringer en Kraft $m$ parallel med Parallelogrammets andre Sider, naar blot de to Kræfter $m$ langs ad samme Delingslinje gaa i modsatte Retninger. Nu vil der være Ligevægt mellem de to Kræfter i $A$ og de to i $a$, idet $A$ og $a$ ere Toppunkter af en Rombe, og ligeledes mellem Kræfterne ved Endepunkterne af de andre punkterede Linjer. Da alle Kræfterne saaledes ophæve hinanden, maa Resultanten af $AB$ og $AC$

være modsat Resultanten af $DC$ og $DB$, hvilket medfører, at bægge Resultanter maa være rettede langs ad Parallelogrammets Diagonal.

Vi have her forudsat, at de to Kræfter vare kommensurable. Det er imidlertid ligegyldigt, enten de ere det eller ej, thi de Værdier, vi faa for Kræfterne ved at maale dem, ere altid kommensurable; kunne vi nemlig maale med 1 mg Nøjagtighed, vil denne Størrelse 1 mg være fælles Maal for Kræfterne.

Der staar endnu tilbage at finde Størrelsen af Resultanten. Kaldes de to givne Kræfter $P$ og $Q$ og deres, foreløbig ubekendte, Resultant $R$, saa er der Ligevægt mellem $P$, $Q$ og Supplementkraften $S$, der er lig og modsat af $R$ og altsaa gaar i Diagonalens Forlængelse.

Man kan imidlertid her lige saa godt tænke sig, at det er $P$, som holder Ligevægt mod $Q$ og $S$, men for at dette kan ske, maa $P$ være modsat Diagonalen i $Q$'s og $S$'s Parallelogram. Man kan da tegne dette Parallelogram ved fra Punktet $C$ at trække en Parallel med $S$ indtil den skærer $P$'s Forlængelse i $D$; en Linje derfra parallel med $Q$ giver Parallelogrammet, hvis fundne Side let ses at være = Diagonalen i $P$'s og $Q$'s Parallelogram. Denne Diagonal giver altsaa baade i Henseende til Størrelse og Retning Resultanten $R$ af $P$ og $Q$. Danne disse to Vinklen $v$, faar man af en af Trekanterne:

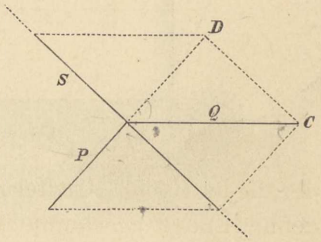

Fig. 5.

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\,\cos v;$$

er Vinklen ret, bliver $R^2 = P^2 + Q^2$. Da $\cos v$ altid ligger mellem $+1$ og $-1$ vil $R$ være $< P + Q$ men $> P - Q$.

Er der flere Kræfter, som virke paa samme Punkt, sammensættes først de to, derefter disses Resultant og den tredje osv.

Man kan overbevise sig om Rigtigheden af denne Sætning ved at ophænge en Vægt ($P''$) i to Snore, som føres over Trisser ($M$ og $N$) og bære to andre Vægte. Naar man nu sammensætter de to af Kræfterne til et Parallelogram, vil

man altid finde, at Diagonalen bliver lig og modsat rettet den tredje Kraft. (Figuren viser et af Pinde sammensat Parallelogram, der indstiller sig af sig selv).

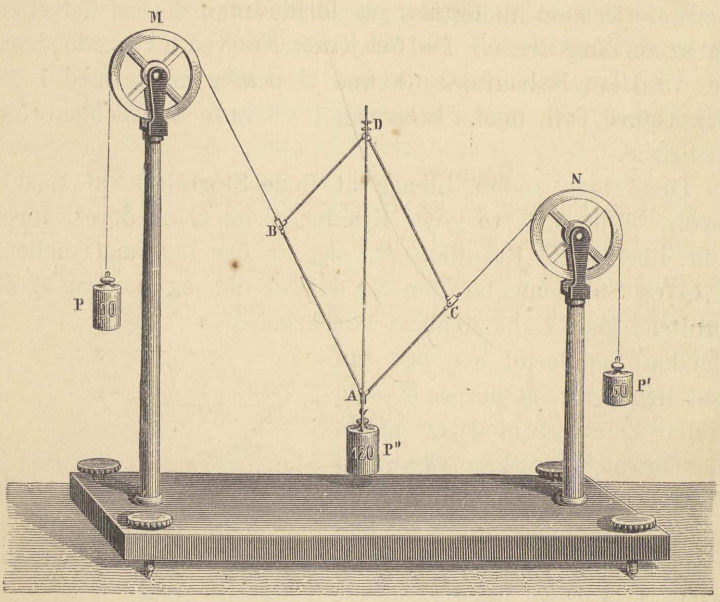


Fig. 6.

**II. Kræfters Opløsning.** Omvendt kan enhver Kraft $P$ opløses i to Komposanter $X$ og $Y$, naar disse blot bestemmes saaledes, at $P$ er Diagonal i deres Parallelogram. Og da et saadant er bestemt ved 3 Stykker, og Diagonalen $P$ er given, kan man vælge 2 andre Stykker vilkaarlig, enten Retningerne af $X$ og $Y$ eller deres Størrelser og ved Hjælp af disse konstruere og beregne Parallelogrammet. Vil man f. Eks. have, at $X$ og $Y$ skulle være vinkelrette paa hinanden, og at den ene af dem skal danne Vinkel $v$ med $P$, faar man $X = P \cos v$ og $Y = P \sin v$.

Ønsker man ved Fældningen af et Træ, at dette skal falde i en bestemt Retning, kan man lægge et Tov omkring Træet og trække i de to Ender deraf, saaledes at Trækkenes Resultant gaar i den forlangte Retning.

Lader man de to Komposanter $X$ og $Y$ danne en meget stump Vinkel, kunne de blive betydelig større end den oprindelige Kraft. Man anvender dette til Knæpressen, der bestaar af to Stænger, forbundne ved et Led; Stængernes Ender støtte mod to Flader og forhindres i at glide langs disse. Ved et ringe Træk efter Vinklens Halveringslinje kan man udøve et stort Tryk mod Fladerne.

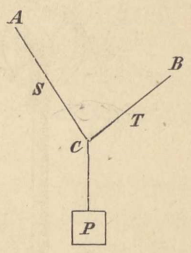

Fig. 7.

## Opgaver.

1. I to Punkter $A$ og $B$ er der fastgjort en tynd Snor, som i Punktet $C$ bærer Vægten $P$. Find Trækkene $S$ og $T$ i de to Snorstykker, naar Vinklerne mellem Snorene ere bekendte.

Res. $$\frac{P}{sin(S\,T)} = \frac{S}{sin(P\,T)} = \frac{T}{sin(P\,S)}.$$

2. Man har igen den samme Snor og Vægt, men i Stedet for at binde Vægten fast i $C$, hænger man den i en lille Ring, som kan glide paa Snoren. Find Snorens Spænding og konstruer Ligevægtsstillingen.

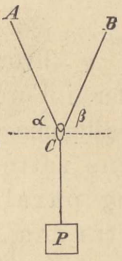

Fig. 8.

Naar der er Ligevægt, maa Vægten $P$ trykke Ringen vinkelret ind mod den Krumning, Snoren har paa dette Sted, ellers vilde Ringen glide; men naar Trykket er normalt mod Snoren, spændes den lige meget til bægge Sider. Vi kalde nu Spændingen $T$, opløse Kræfterne efter en lodret og en vandret Akse og faa derved:

$$T\cos\alpha = T\cos\beta \text{ eller } \alpha = \beta$$

$$\text{og } 2\,T\sin\alpha = P \text{ eller } T = \frac{P}{2\,\sin\alpha}.$$

3. Bevis, at tre Kræfter, som holde hinanden i Ligevægt, gaa gennem samme Punkt.

4. Paa to faste Punkter, hviler en vægtløs Cirkel, som i et Punkt af Periferien bærer en Vægt. Hvorledes lægger Cirklen sig?

**12. Parallele Kræfter.** For at sammensætte to parallele Kræfter $P$ og $Q$ med Angrebspunkterne $A$ og $B$, tilføje vi først to lige store, modsatte Kræfter $m$ i $A$ og $B$. Resultanten af $P$ og $m$ konstrueres; ligeledes Resultanten af $Q$ og $m$; Angrebspunktet for dem bægge flyttes til deres Skæringspunkt $D$, hvor de to Resultanter atter opløses i de oprindelige Komposanter. I Punktet $D$ findes da 4 Kræfter, af hvilke de to lige store $m$ ophæve hinanden, medens $P$ og $Q$ sammensættes til en Resultant = deres Sum; denne flyttes igen til Angrebspunktet $C$. Af et Par ligedannede Trekanter faas nu:

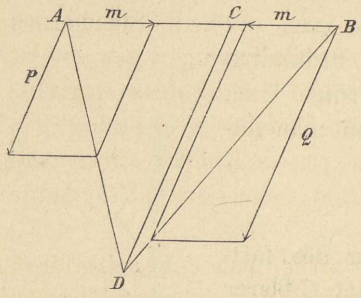

Fig. 9.

$$\frac{CD}{Q} = \frac{BC}{m} \quad \text{og} \quad \frac{CD}{P} = \frac{AC}{m},$$

hvoraf $Q.BC = P.AC$,

der i Forening med den givne Længde $AB$, tjener til at bestemme $C$'s Beliggenhed. Vi lære heraf, at to parallele, ens rettede Kræfter have en Resultant = deres Sum og parallel med dem paa et saadant Sted, at Afstanden deles i Stykker omvendt proportionale med Kræfterne.

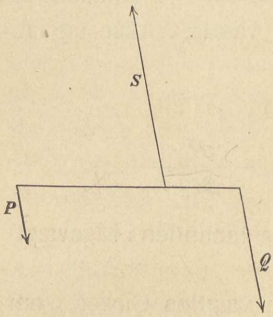

Fig. 10.

Dersom man til $P$ og $Q$ føjer deres Supplementkraft $S$, som er lig og modsat deres Resultant, saa er der Ligevægt; men dette kan ogsaa opfattes, som om det er $P$, der holder Ligevægt mod $Q$ og $S$; heraf følger, at Resultanten af de to parallele, modsat rettede Kræfter $Q$ og $S$ maa være = og modsat $P$, altsaa ligge uden for den største, gaa i samme Retning som denne og være = de to givnes Differens. Kendes Afstanden $a$ mel-

lem Angrebspunkterne for $S$ og $Q$, beregnes Afstanden mellem $P$ og $S$ af Ligningen $Px = Q\,a$, og da $P = S-Q$, bliver $x = \frac{Q\,a}{S-Q}$.

**13. Svingkræfter.** Af de to sidste Ligninger ses det, at hvis $S$ og $Q$ ere lige store, bliver $P = 0$ og dens Angrebspunkt uendelig langt borte. Dette betyder med andre Ord, at to lige store, parallele, modsat rettede Kræfter kunne ikke sammensættes til en enkelt Resultant; man siger, at saadanne Kræfter udgøre en Svingkraft.

En Svingkraft kan, naar den virker paa et Legeme, meddele dette en omdrejende Bevægelse (dog ikke altid om en Akse, som er vinkelret paa Svingkraftens Plan). Man bør opfatte Svingkraften, ikke som to, men som een Kraft, der er uensartet med de tidligere omtalte, saakaldte translatoriske Kræfter, og som følgelig ikke kan maales i disses Enhed, Pund eller Kilo.

Den vinkelrette Afstand mellem Svingkraftens to enkelte Kræfter, kaldes dens Arm, og Produktet af Armen og en af Kræfterne kaldes Svingkraftens Moment.

**14. Svingkræfters Forandring og Sammensætning.** To Svingkræfter i samme Plan, som dreje i modsatte Retninger, ophæve hinanden, dersom de have samme Moment.

Lad Svingkræfterne være $PaP$ og $QbQ$, hvor $P\,a = Q\,b$. Vi tænke os de to af Kræfterne flyttede til Skæringspunktet $A$, de to andre til Skæringspunktet $B$ (Fig 11.). Nu er $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$, men Armene ere Højder i Parallelogrammet $A\,B$, og disse forholde sig som Siderne $\beta$ og $\alpha$, hvoraf følger $\frac{P}{Q} = \frac{\beta}{\alpha}$. Men naar $P$ og $Q$ ere proportionale med Parallelogrammets Sider, kunne de afbildes ved disse, og der vil være Ligevægt mellem de 4 Kræfter, idet man faar to Resultanter, bægge = Diagonalen $A\,B$ og rettede modsat.

Naar den ene Svingkraft holder Ligevægt mod den anden, har den altsaa samme Virkning som den modsatte af denne; eller en Svingkraft kan ombyttes med en

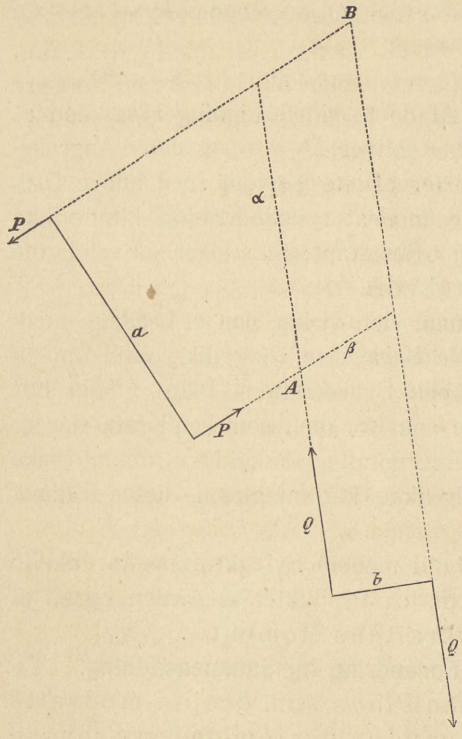


Fig 11.

anden i samme Plan, naar de have samme Moment og dreje i samme Retning. Man kan herved faa den nye Svingkraft til at indeholde en hvilken som helst Arm man vil, naar blot Kræfterne selv rette sig derefter, og ligeledes omvendt.

To Svingkræfter med Momenterne $P\,a$ og $Q\,b$, som dreje i samme Retning og i samme Plan, kunne sammensættes til en, hvis Moment er lig deres Sum. Man kan nemlig omdanne Svingkraften $Qb$ til en anden med Armen $a$, hvorved Kraften selv bliver $\frac{Q\,b}{a}$; lægges de to Svingkraftarme $a$ ovenpaa hinanden, kan man ved hver Ende deraf addere de to Kræfter $P$ og $\frac{Q\,b}{a}$, hvorved faas en eneste Svingkraft med Momentet $\left(P + \frac{Q\,b}{a}\right) a = P\,a + Q\,b$. Denne Regel udvides til et hvilket som helst Antal Svingkræfter i samme Plan; de kunne sammensættes til en eneste, hvis Moment er Summen af alle de andres, idet man regner Momenterne positive eller negative, eftersom de dreje i den ene eller anden Retning.

Omvendt kan en Svingkraft med Momentet $M$ deles i $M$

lige store Svingkræfter, hver med Momentet *1*, eller med andre Ord, Momentet $M$ er Maal for Svingkraften.

**15. Flytning af en enkelt Kraft.** En enkelt Kraft kan nu flyttes parallel med sig selv, naar man tilføjer en bestemt Svingkraft. Legemets Tilstand forandres nemlig ikke, ved at man i Punktet $A$ anbringer to modsatte Kræfter $+P$ og $\div P$, som ere lige og parallele med den givne Kraft $P$; men disse tre Kræfter kunne opfattes som den enkelte Kraft $+P$ og en Svingkraft $P$, $\div P$, hvis Moment er Produktet af den oprindelige Kraft og dens vinkelrette Afstand fra det Punkt, hvortil den flyttes. Dette Produkt kaldes ogsaa den oprindelige Krafts Moment med Hensyn til det nye Punkt.

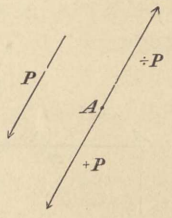

Fig. 12.

**16. Ligevægtsbetingelserne for et Legeme, som er paavirket af flere Kræfter i samme Plan.** Det simpleste Tilfælde er, at alle disse Kræfter gaa gennem samme Punkt; man kan da sammensætte alle Kræfterne paa en nær til en Resultant efter Reglen om Kræfternes Parallelogram, og Betingelserne blive, at denne Resultant baade er lige stor med den ene tiloversblevne og er rettet lige modsat. Men for det meste er det nærmere, fra først af at opløse alle Kræfterne hver i to Komposanter langs ad to vilkaarlige, men bekvemt valgte Akser, som ere vinkelrette paa hinanden. De enkelte Komposanter paa hver Akse kunne da adderes, og naar Summerne kaldes $X$ og $Y$, faa disse atter tilsidst en Resultant $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Men denne Resultant maa være $= 0$, hvad der kun kan ske, naar baade $X = 0$ og $Y = 0$.

Her ere Kræfterne regnede med Fortegn. Dersom man vil undgaa det, kan man sige, at paa hver Akse maa Summen af de Kræfter, der gaa den ene Vej, være lig Summen af dem, der gaa den anden Vej.

Lad os derefter betragte det Tilfælde, hvor de tilstedeværende Kræfter virke paa forskellige Punkter af samme Legeme. Man flytter da først alle Kræfterne hen til et og samme vilkaarlige, men bekvemt valgte Punkt, hvorved der maa tilføjes visse Svingkræfter, ifølge § 15. Betingelserne

blive, at der er Ligevægt mellem alle de enkelte Kræfter for sig, som i det forrige Tilfælde, men desuden at alle Svingkræfterne holde hinanden i Ligevægt, hvad der finder Sted, naar Summen af de Momenter, der dreje den ene Vej, er = Summen af dem, der dreje den anden Vej.

**Opgave.**

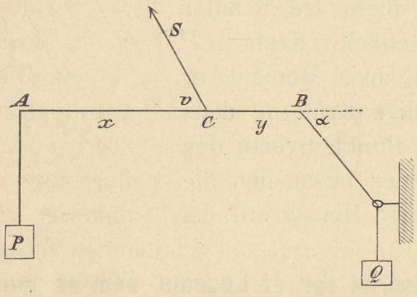


Fig. 13.

5. $A\ B$ er en Stang af Længde $l$ med saa ringe en Vægt, at man ikke behøver at tage Hensyn dertil. I $A$ fastgøres Vægten $P$, i $B$ bindes en Snor, som føres under Vinklen $\alpha$ ned igennem en Øsken og bærer Vægten $Q$. Man kan forhindre det hele i at bevæge sig ved at anvende en vis Kraft $S$ paa et bestemt Punkt $C$ af Stangen og i en bestemt Retning. Disse Betingelser skulle bestemmes.

Kræfterne flyttes til $C$, hvor de opløses langs $AB$ og vinkelret derpaa. Man faar her Betingelserne:

$$S\ cos\,v = Q\ cos\,\alpha \quad \text{og} \quad S\ sin\,v = P + Q\ sin\,\alpha.$$

At de fremkomne Svingkræfter skulle holde hinanden i Ligevægt, giver Ligningen:

$$P\ x = Q\ y\ sin\,\alpha.$$

Tillige er $x + y = l$.

Disse 4 Ligninger tjene til at finde $x$, $y$, $S$ og $v$.

**17. Ligevægtsbetingelserne for Legemer, som ere i Forbindelse med andre.** Dersom Legemet ikke er fuldstændig frit, men har en fast Akse, hvorom det kan dreje sig, flytter man Kræfterne til et Punkt i denne Akse, og naar denne da er solid nok til at taale ethvert Tryk af Kræfterne, bliver der kun een Betingelse at søge, nemlig at Svingkræfterne skulle holde hinanden i Ligevægt.

Har Legemet kun et Punkt fast, gælder det samme, naar Kræfterne flyttes til dette Punkt; den Resultant, alle de enkelte Kræfter faa, viser, hvor stort et Tryk det faste

Punkt maa taale, og i hvad Retning dette Tryk gaar. Punktet udøver da et Modtryk eller Reaktion imod Legemet lig med og modsat det Tryk, Legemet udøver paa Punktet; ophører dette at være fast, vil et saadant Modtryk, frembragt paa anden Maade, kunne vedligeholde Ligevægten.

Rører et Legeme en plan Flade i et Punkt, kan man betragte dette som til Dels fast, idet der her kan gøres Modstand imod et normalt Tryk, men ikke imod Tryk, parallele med Fladen, dersom denne er fuldstændig glat; et skraat Tryk kan opløses i et, vinkelret paa Fladen, og et, parallelt dermed, og af disse er det kun det første, som kan ophæves ved Fladens Modtryk. For at Legemet da kan være i Ligevægt, er det nødvendigt, at alle de enkelte Kræfter, naar de flyttes til Berøringspunktet, give en Resultant vinkelret paa Fladen, samt at alle Svingkræfterne holde hinanden i Ligevægt. Den paa Fladen vinkelrette Resultant angiver Størrelsen baade af Legemets Tryk paa Fladen og af dennes Modtryk paa Legemet. Man kan ogsaa her tænke sig Fladen borte, naar man i Stedet derfor paa Legemet anbringer en Kraft = det omtalte Modtryk.

Ganske det samme finder Sted, dersom to Legemer, som hver ere paavirkede af nogle Kræfter, berøre hinanden og ere i Ligevægt. Hvert Legeme virker paa det andet, men bægge Virkninger ere lige store, modsatte og vinkelrette paa den fælles Tangentplan i Berøringspunktet.

Naar der nu spørges om Ligevægtsbetingelserne for flere Legemer, der paa en eller anden Maade ere forbundne med hinanden, saa søges Betingelserne for hvert Legeme for sig, idet man foruden de umiddelbart bekendte Kræfter paa hvert Legeme tænker sig anbragt de foreløbig ubekendte Reaktioner, som Nabolegemerne eller faste Punkter kunne udøve; herved bliver nemlig hvert Legeme at betragte som fuldstændig frit. Ved Elimination af disse Reaktioner findes de virkelige Betingelser; tillige kan man bestemme Reaktionernes Størrelser.

Dersom Ligevægt slet ikke kan finde Sted, vil det vise sig, ved at de fundne Resultater ere meningsløse, dersom f. Eks. en Sinus eller Cosinus bliver $> 1$, eller en Kvadratrod imaginær. Men det er ogsaa nødvendigt, at Reaktionerne

maa gaa fra hvert Legeme imod det andet, det vil sige, at de beregnede Værdier skulle blive positive i den Retning.

## Opgaver.

Hvor der i de følgende Opgaver forekomme Reaktioner mellem Legemer, ville vi, naar det ikke kan misforstaas, betegne dem ved de samme Bogstaver som de Punkter, hvor de findes.

6. En Stang uden Vægt hviler paa 2 Understøtningspunkter $A$ og $B$, der befinde sig i samme vandrette Linje; Stangen bærer Vægten $P$, som hænger i Afstandene $a$ og $b$ fra $A$ og $B$. Find Trykkene i disse Punkter.

I $A$ og $B$ udøves Reaktionerne $A$ og $B$ lodret opad mod Stangen; flyttes alle Kræfterne til $C$, faas de to Ligninger:

$$A + B = P \text{ og } A\,a = B\,b \text{ hvoraf}$$

$$\frac{A}{b} = \frac{B}{a} = \frac{P}{a+b}$$

$$\text{eller } A = \frac{P\,b}{a+b} \text{ og } B = \frac{P\,a}{a+b}.$$

Denne Opgave forekommer i Praksis, naar to Personer ved Hjælp af en Stang bære en Byrde, som hænger paa Stangen. De Dele af Byrden, hver bærer, ere omvendt proportionale med deres Afstande fra Byrden.

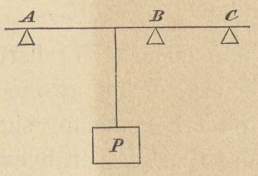

Fig. 14.

7. Den samme Stang som før hviler paa tre Punkter, $A$, $B$ og $C$ i Afstandene $a$, $b$ og $c$ fra Byrdens Ophængningspunkt. Naar Kræfterne samles i Ophængningspunktet, faar man:

$$P = A + B + C \text{ og } A\,a = B\,b + C\,c.$$

Disse to Ligninger ere ikke tilstrækkelige til at bestemme $A$, $B$ og $C$, d. v. s. Reaktionerne afhænge tillige af andre Omstændigheder, som f. Eks. hvor meget Stangen bøjer sig, hvor meget Understøtningspunkterne give efter o. lign.

8. To lige lange Stænger uden Vægt ere fastgjorte ved bevægelige Hængsler i $A$ og $B$, og paa samme Maade forbundne med hinanden ved $C$. Midt paa Stængerne hænge Vægtene $P$. Find Trykkene i $A$, $B$ og $C$, naar Stængernes Længde er $2\,l$ og Vinklen med den vandrette Linie $\alpha$.

I $C$ er Tryk og Modtryk lige store og modsat rettede; de maa derfor paa Grund af Symmetrien være vandrette, da der ikke kan tænkes nogen Aarsag, hvorfor den ene Stang skulde trykke ned paa den anden, og denne op paa den første. I $B$ gaar Trykket $B$ under Vinkel $x$ med den vandrette Linje, i $C$ trækkes den højre Stang til venstre. Kræfterne flyttes til $B$ og opløses vandret og lodret. Man faar herved: $C = B \cos x$, $P = B \sin x$, $P l \cos \alpha = 2 C l \sin \alpha$, hvoraf atter faas:

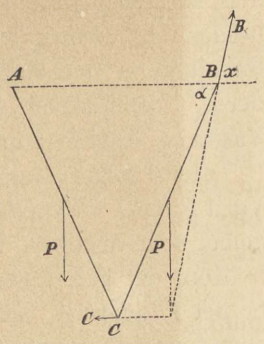

Fig. 15.

$$C = \frac{P}{2\ tg\ \alpha},\quad tg\ x = 2\ tg\ \alpha \text{ samt}$$

$$B = \sqrt{P^2 + C^2} = P\sqrt{1 + \frac{1}{4\ tg^2\ \alpha}}.$$

9. En Stang $A\ E$ uden Vægt er 3 Meter lang og deles ved Punkterne $B$, $C$ og $D$ i 4 lige store Dele. I Punkterne $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ hænges Vægtene 1, 2, 3, 4, 5 Kilo. Hvor skal man understøtte Stangen, for at den kan være i Ligevægt? Dersom men beholder det samme Understøtningspunkt og hænger 1 Kilo til i Punkterne $A$, $B$, $D$, $E$, hvor meget skal man da hænge til i Punktet $C$, for at der kan vedblive at være Ligevægt?

Res. $2^m$ fra $A$ og $\div$ 4 Kilo.

**18. Tyngdepunkt.** Vi have hidtil talt om Legemer med saa ubetydelig Vægt, at vi ikke behøvede at tage Hensyn dertil; men da dette naturligvis sjeldent er Tilfældet, skulle vi nu se, hvorledes man regner med den. Da Vægten af hver enkelt Del af Legemet er den Kraft, hvormed Tyngden trækker den lodret ned imod Jorden, saa kunne alle disse Vægte sammensættes efter Reglen om parallele Kræfter. Man faar derved en Resultant, som er = Summen af de enkelte Deles Vægte, og

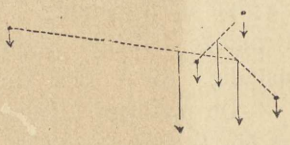
Fig. 16.

hvis Angrebspunkt bliver det samme, hvorledes Legemet end holdes, idet nemlig Angrebspunktet for to parallele Kræfters Resultant er uafhængigt af den Vinkel, Kræfterne danne med deres Forbindelseslinje. Resultanten er det hele Legemes Vægt, og Angrebspunktet kaldes Legemets Tyngdepunkt.

Heraf følger straks, at man altid kan tænke sig et Legemes Vægt forenet i Tyngdepunktet og betragte de øvrige Dele af Legemet som vægtløse. Er saaledes et Legeme ophængt i en Akse, hvorom det kan dreje sig, og kun paavirket af Tyngden, saa er det i Ligevægt, naar Tyngdepunktet enten er lodret over eller lodret under eller i Aksen, eftersom der i disse Stillinger er Ligevægt mellem Vægten og Aksens Reaktion. I første Tilfælde er Ligevægten ustadig; forstyrres den nemlig ganske lidt, vil den Svingkraft, som fremkommer, naar Vægten flyttes ind til Aksen, dreje Legemet endnu mere, indtil det naar en ny Ligevægtsstilling. Er derimod Tyngdepunktet lodret under Aksen, vil Ligevægten være stadig; hvis den nemlig forstyrres, vil Svingkraften dreje Legemet tilbage. (Cardansk Ophængning af Kompasser og Skibslamper). Er endelig Tyngdepunktet i Aksen, som f. Eks. ved et Hjul, er Legemet i ligegyldig Ligevægt.

Hviler et rundt Legeme paa et vandret Bord, kan det kun være i Ligevægt, naar Tyngdepunktet er lodret over Berøringspunktet. En Kugle er derfor altid i ligegyldig Ligevægt paa en horizontal Plan. Et Æg har Ligevægtsstillinger paa bægge Enderne og paa Siden. At de to første ere ustadige, forstaas bedst ved at lægge Mærke til, at Tyngdepunktet i disse Stillinger ligger højere end i Nabostillingerne; forstyrres altsaa Ligevægten, falder Tyngdepunktet, og Tyngden selv bringer det til at falde endnu mere. Ligger derimod Ægget paa Siden, er Tyngdepunktet i sin laveste Stilling, og Ligevægten derfor stadig. Ved en lignende Betragtning kan man i mange Tilfælde afgøre, om en Ligevægt er stadig eller ustadig. (Se f. Eks. Opg. 10.)

De ustadige Ligevægtsstillinger er det i Praksis umuligt at faa Legemerne til at indtage, medmindre andre Omstændigheder som Gnidningsmodstand eller lign. komme til Hjælp;

ellers vil nemlig den allerringeste Afvigelse straks bevirke, at Legemet søger hen i en helt anden Ligevægtsstilling.

Dersom et Legeme hviler paa en horizontal Plan, saaledes at det har flere Punkter i denne Plan, saa er det i Ligevægt, naar den lodrette Linje fra Tyngdepunktet falder indenfor Understøtningsfladen, hvorved forstaas hele den Flade, der begrændses af de yderste Understøtningspunkter, f. Eks. det Rektangel, der dannes af 4 Bordben. Staar Bordet paa en skraa Flade og hindres det paa en eller anden Maade i at glide ned, saa vil det heller ikke vælte, saa længe den lodrette Linje fra Tyngdepunktet træffer indenfor Understøtningsfladen.

Eks. Hvorfor kan man ikke staa paa det ene Ben, naar man har den Side lige tæt op ad en Væg?

Hvorledes maa man flytte Kroppen eller Benene for at rejse sig fra en Stol?

Hvorfor er det vanskeligere at staa paa eet Ben end paa to?

Hvorledes hjælper Armene med til at holde Balancen, naar man gaar hen ad et Balancerbræt?

Hvorfor strækker man den ene Arm ud, naar man bærer en tung Byrde i den anden?

Hvorfor hælder man sig bagover, naar man gaar ned ad en Bakke?

En Synaal kan staa paa Spidsen, naar man stikker den igennem en Prop, og i to Sider af denne fastgør en Gaffel skraat nedad. Hvad er Grunden hertil?

Hvorfor vælter et Læs Hø lettere end en tom Vogn, naar de to Hjul køre ned i en Grøft?

**19. Beregning og Konstruktion af Tyngdepunktet.** For at beregne Beliggenheden af et Legemes Tyngdepunkt maa man baade kende dets Form og vide Besked paa, hvor stor Vægt de forskellige Dele af det have; det er nemlig en bekendt Sag, at lige store Stykker af forskellig Beskaffenhed, f. Eks Træ og Jærn, ikke veje lige meget. Vi ville dog her kun tale om homogene, det vil sige ensartede Legemer. Det

bliver da kun Formen, vi have at tage Hensyn til; om de enkelte Dele veje meget eller lidt, er ligegyldigt. Vi komme derved ogsaa til at tale om Tyngdepunktet af Flader og Linjer, skønt disse ingen Vægt have.

Særlig i Opgaverne forudsætte vi, at Legemerne ere homogene.

I et Parallelogram er Tyngdepunktet i Diagonalernes Skæringspunkt.

En Trekant kan ved Linjer uendelig nær ved hinanden og parallele med en af Siderne deles i Strimler, hvis Tyngdepunkt maa ligge i Midten, altsaa paa en Median i Trekanten. Paa denne maa hele Trekantens Tyngdepunkt da ligge, og da det ogsaa ligger paa de andre Medianer, maa det være deres Skæringspunkt.

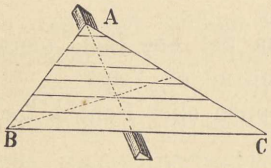

Fig. 17.

Et Tetraeder deles ved Planer parallele med en Grundflade og uendelig tæt ved hinanden i smaa Skiver, hvis Tyngdepunkter tilsammen danne den Linje, som fra Tetraedrets Toppunkt gaar til Grundfladens Tyngdepunkt; hvor denne Linje skærer de tre andre af samme Art, ligger Tetraedrets Tyngdepunkt. Fra Stereometrien vides det, at dette Punkt deler de omtalte 4 Linjer i Stykker, der forholde sig som 3 til 1, det mindste nærmest Grundfladen. Tage vi nu en hvilken som helst Pyramide, kan denne deles i tresidede, hvis Tyngdepunkter alle ligge i Afstanden $^1/_4$ Gange Højden over Grundfladen; i samme Afstand ligger det søgte Tyngdepunkt, og det ligger tillige i den Linje, som fra Toppunktet trækkes til Grundfladens Tyngdepunkt. Det samme gælder om en Kegle. Man taler undertiden ogsaa om Tyngdepunktet for to adskilte Legemer, hvorved man mener det Punkt, der bestemmes ved at sammensætte de to Legemers Vægt.

I mange Tilfælde er man nødt til at finde Tyngdepunktet ved Forsøg, især naar Legemerne ikke ere homogene eller have noget vanskeligere Former. Lad os tage et meget fladt Prisme. Man ophænger det i en Akse gennem bægge

Grundfladerne; Legemet drejer sig, til Tyngdepunktet er lodret under Aksen, og denne Retning vises ved en Snor med et Lod i; gøres dette en Gang til, faas et Punkt bestemt ved Skæring af to Linjer. Fra dette Punkt trækkes Prismets Akse, og i den er Legemets Tyngdepunkt.

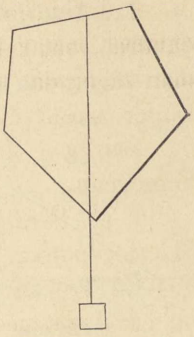

Fig. 18.

En anden Fremgangsmaade kan anvendes ved Legemer, som have en længere Akse, f. Eks. en Kanon. Den hviler paa sine Tapper $A$, og ved at anbringe en passende Vægt $P$, holdes Kanonen i Ligevægt i den vandrette Stilling. Kaldes nu Kanonens Tyngdepunkt $T$, og er dens Vægt $Q$, har man som Betingelse for Ligevægt:

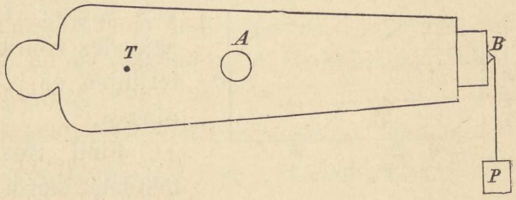


Fig. 19.

$$Q \,.\, AT = P \,.\, AB,$$ hvoraf findes $AT$.

## Opgaver.

10. To paa hinanden vinkelrette Planer have deres Skæringslinje i en vandret Plan og danne Vinklerne $\alpha$ og $90 - \alpha$ med denne; paa Planerne hviler en Stang (Vægt $P$), saaledes at den er vinkelret paa Planernes Skæringslinje; find Stangens Vinkel med de givne Planer og Planernes Reaktioner. Er Ligevægten stadig eller ustadig?

Res. $\alpha$ og $90 \div \alpha$, $P \sin \alpha$, $P \cos \alpha$.

11. En Stang $AB$, af hvilken hver Centimeter vejer $p$ Gram, er ved et Hængsel fastgjort i $A$; $c^{\text{cm.}}$ derfra hænger Vægten $Q^{\text{gm.}}$; en Kraft $P^{\text{gm.}}$ virker lodret opad i $B$ og holder Stangen vandret. Dersom Stangens Længde er $l^{\text{cm.}}$, hvor stor maa da $P$ være? Og hvilken Længde maa Stangen have, for at $P$ kan blive saa lille som muligt?

Res. $P = \frac{Qc}{l} + \frac{pl}{2}$; $l = \sqrt{\frac{2\,Qc}{p}}$.

12. Hvorfor er det meget vanskeligere at holde en Stang vandret, naar man holder den i en af Enderne, end naar man tager den paa Midten?

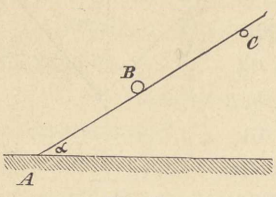

Fig. 20.

13. En Stang ($P$, $2\,l$) holdes under Vinkel $\alpha$ mod en vandret Plan ved Hjælp af to faste Støttepunkter $B$ og $C$ i Afstanden $a$ fra hinanden; beregn Reaktionerne.

Res. $A = P,\ B = C = \frac{l\,P\,\cos\alpha}{a}$.

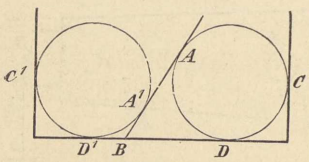

Fig. 21.

14. En Stang ($P$, $2\,l$) og to ens Kugler ($Q$) ere i Ligevægt, saaledes som Figuren viser. Centerlinjen er $c$ og Stangens Hældning $\alpha$.

Find Reaktionerne og den mindste Værdi, $Q$ kan have.

Res. $A = A_1 = \frac{Pl}{c}$, $C = C_1 = \frac{Pl}{c}\ \sin\alpha$.

$B = P$, $D = Q + \frac{Pl\,\cos\alpha}{c}$, $D_1 = Q - \frac{Pl\,\cos\alpha}{c}$.

Betingelsen er $Q \gtrless \frac{Pl\,\cos\alpha}{c}$.

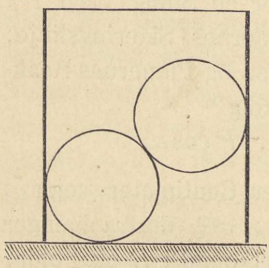
Fig. 22.

15. En hul Cylinder ($Q$, Radius $r_1$) uden Bund staar paa en vandret Flade. Indeni ligger der to ens Kugler ($P$, $r$) som Figuren viser. Hvormeget maa Cylindren veje, for at den ikke skal vælte?

Res. $Q > 2\,P\,.\,\frac{r_1 - r}{r_1}$.

16. Beregn Tyngdepunktet for fire Vægte ($P$, $Q$, $R$, $S$), som ere anbragte paa en ret Linje i bekendte Punkter.

Vi tænke os i Tyngdepunktet Supplementkraften til de 4 givne, hvorved der bliver Ligevægt; naar Afstanden fra $P$

til Tyngdepunktet kaldes $x$ og til de andre Punkter $q$, $r$, $s$, har man til Bestemmelsen af $x$:

$$x\,(P + Q + R + S) = Qq + Rr + Ss.$$

17. Find Tyngdepunktet for Solen og Jorden, naar deres Afstand sættes til 20000000 Mile, og Solen vejer 320000 Gange saa meget som Jorden. (Solens Diameter = 190000 Mile).

Res. $62\frac{1}{2}$ Mil fra Solens Centrum.

18. En Trekant har selv ingen Vægt, men i Toppunkterne er der fastgjort Vægte, proportionale med de modstaaende Sider; find Tyngdepunktet.

Res. Den indskrevne Cirkels Centrum.

19. En Trekant deles i to Dele ved en Linje gennem Midten af Medianen $m$ og parallel med Grundlinjen. Find de to Deles Tyngdepunkter.

Res. Afstandene fra Toppen ere $\frac{1}{3}\,m$ og $\frac{7}{9}\,m$.

20. Konstruer Tyngdepunktet i en vilkaarlig Firkant.

**20. Vægtstangen** er en Stang eller et andet Legeme, som kan dreje sig om en fast Akse, og hvorpaa der virker flere Kræfter. Vi ville antage, at Kræfterne alle ligge i en Plan ⊥ Drejningsaksen; Ligevægtsbetingelsen faas da ved at flytte alle Kræfterne til Aksens Centrum, Hvilepunktet, og naar dette er fast, bliver den eneste Betingelse, at alle de fremkomne Svingkræfter holde hinanden i Ligevægt. Kræfternes lodrette Afstande fra Hvilepunktet kaldes deres Arme, og Momenterne kaldes ofte de statiske Momenter. Der er altsaa Ligevægt, naar Summen af de statiske Momenter, der dreje den ene Vej, er lig Summen af dem, der dreje den anden Vej. Man skelner imellem enarmede og toarmede Vægtstænger, eftersom Kræfterne virke paa samme eller modsatte Sider af Hvilepunktet.

Dersom Vægtstangen er uligearmet, og Kraften virker paa den længste Arm, kan den holde Ligevægt mod en større Modstand, og er Kraften lidt stærkere, end Ligevægten fordrer, vil den dreje Vægtstangen, og Modstanden overvindes; herpaa beror Anvendelsen af Løftestænger, Brækjærn, Tænger,

Nøddeknækkere, Havesakse, Metalsakse, Kniven i en Brødskæremaskine osv.

Dersom Kraften virker paa den korteste Vægtstangsarm, maa den være større end Modstanden. Da de Muskler, som bevæge vore Lemmer, altid tage fat tæt ved Leddet, maa de udfolde en stor Kraft, men kunne til Gengæld ved en ringe Sammentrækning frembringe en stor Bevægelse af Lemmerne.

Ex. Hvorfor er det vanskeligt at holde Armene vandret udstrakte?

Hvorfor er det vanskeligere at hænge i bøjede Arme end i strakte?

**21. Vejning.** Vægtstangen anvendes til forskellige Vejningsredskaber. Stangen selv gives da hyppig Form som en Rombe, og man sørger først for, at Hvilepunktet $H$ og Tyngdepunktet $T$ komme til at ligge i den korte Diagonal, medens Skaalerne hænges ved Enderne $A$ og $B$ af den lange Diagonal. Lad os antage, at den ene Skaal med sine Lodder vejer $P$, og den anden med sin Genstand, der skal vejes, $P + p$; Vægtstangen stiller sig da skraat, og vi ville beregne Udslaget $x$. Vi sætte $CA = CB = a$, $HC = c$, $HT = t$ og Stangens Vægt $= v$. Kræfternes Arme blive Projektionerne af Linjerne $DA$, $DB$ og $HT$ paa den vandrette Linje gennem $H$; de to første Linjer danne hermed Vinkel $x$, den sidste $90 - x$; man har derfor:

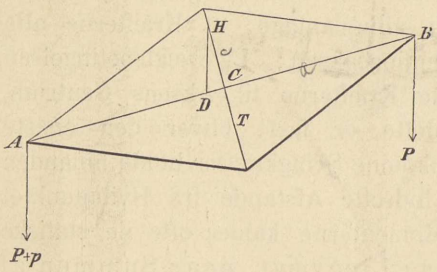


Fig. 23.

$$(P + p)(a - c\ tg\ x)\ cos\ x = P(a + c\ tg\ x)\ cos\ x + v\ t\ sin\ x,$$

hvoraf findes

$$tg\ x = p \cdot \frac{a}{(2P + p)\ c + v\ t}.$$

Nu forlanger man af en fin Vægt, at den skal give et tydeligt Udslag for en ringe Overvægt $p$; dette kan opnaas, naar man faar Tælleren i Brøken stor og Nævneren lille, det vil sige, naar $a$ er stor, $c$, $v$ og $t$ smaa. Det første,

en stor Vægtstangsarm, kan man sagtens skaffe, men det er ikke hensigtsmæssigt at benytte sig for meget deraf, da Vægtstangen i det Tilfælde let bøjer sig. Størrelsen $c$ gør man i Reglen $= 0$, hvorved man (teoretisk) faar den Fordel, at Vægtskaalen er lige fintmærkende for store og smaa Vejningsgenstande, efterdi Udslaget bliver uafhængigt af $P$; i Praksis vil Vejningen dog blive lidt mindre nøjagtig for store Ting, da disse ville bevirke en Bøjning af Armene og give $c$ en vis Værdi. Stangens Vægt $v$ skal endvidere være lille, hvad der opnaas ved at skære noget af Romben ud, saa at Stangen kun bestaar af en tynd Ramme, der er afstivet ved Tværstykker paa forskellige Steder. Endelig sørger man for, at $t$ er lille, det vil sige, at Tyngdepunktet er saa nær ved Hvilepunktet som muligt; for at opnaa det bedste Resultat heraf, anbringer man oven paa Romben, i Forlængelse af den

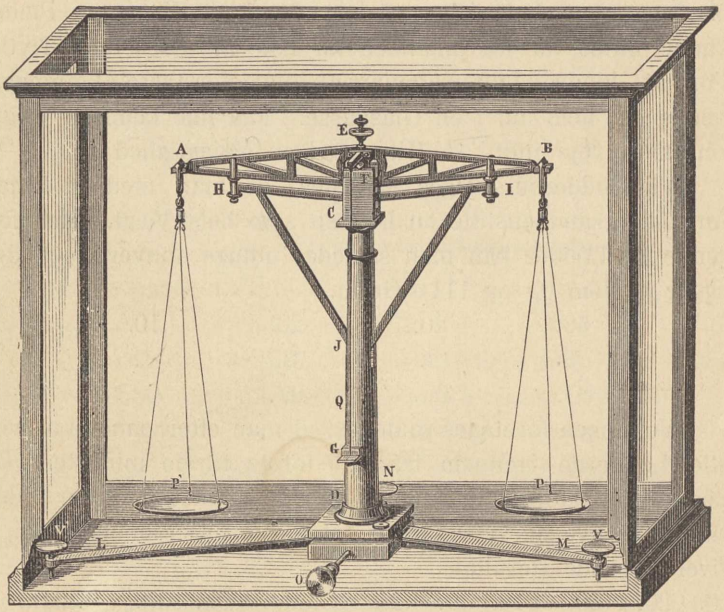


Fig. 24.

korte Diagonal en tynd Stilk, paa hvilken man kan skrue en lille Vægt op og ned og derved flytte hele Tyngdepunktet.

Desuden bærer Vægtstangen en Viser, som peger paa en inddelt Bue, hvorpaa man iagttager Udslagene. Disse ere, naar de blot ere smaa, ifølge Formlen proportionale med Overvægten, og naar man altsaa en Gang ved Forsøg har fundet, hvilken Overvægt der svarer til et Udslag af en Inddeling paa Buen, kan man altid af Udslaget omtrent vide, hvor mange Lodder man endnu maa lægge paa eller tage fra for at opnaa Ligevægt.

Det er en Selvfølge, at man saa vidt muligt maa undgaa alle Modstande mod Bevægelse af Vægtstangen; for at gøre Gnidningsmodstanden ringe, anbringer man ved Hvilepunktet paa hver Side af Romben en skarp Staalkile med Kanten nedad, og disse Kiler vugge da paa et plant Underlag af Staal; paa lignende Maade sættes ved Enderne af Romben et Par Staalkiler med Kanten opad, og paa disse vugge nogle Plader, som bære Skaalerne. Naar Vægtskaalen ikke bruges, har man en Indretning, hvorved disse Kiler og Plader kunne løftes ud fra hinanden for ikke at slides uden Nytte. For at hindre Luftstrømninger i at forstyrre Vejningen, sættes det hele ind i en Glaskasse. Paa fine kemiske Vægte kan man veje indtil $^1/_2$ Kilo med en Nøjagtighed af $^1/_{10}$ mg.

Vægtlodderne vælges saaledes, at man med et ringe Antal kan sammenstille en hvilken som helst Vægt. Med følgende 12 Lodder kan man saaledes udtage enhver Vægt, der ligger mellem 0,1 og 111,0 Gram.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 50. | 20. | 20. | 10. |
| 5. | 2. | 2. | 1. |
| 0,5. | 0,2. | 0,2. | 0,1. |

Vejningen foretages saaledes, at man efterhaanden prøver alle Lodderne igennem fra de største til de mindste. Er Loddet for stort, tager man det af; er det for lille, lader man det blive og gaar saa til det næste. Dersom en Vejning giver følgende Resultat:

50. 20. (20.) (10.) 5. (2.) 1. (0,5.) 0,2. 0,2. (Baance),

hvor de paalagte, men igen aftagne Lodder ere satte i Parantes, saa vejer Legemet 76,4 Gram.

Ere Vægtstangens Arme ulige lange, vejer man naturligvis fejl, men det gør ikke noget, naar man kun skal

bestemme Forholdet mellem forskellige Vægte som f. Eks. i Kemien, hvor man ofte skal undersøge, hvor mange Procent af et Stof, der findes i en vis Blanding. Dersom man alligevel vil veje rigtigt paa en saadan Vægt, kan man bruge Dobbeltvejningsmetoden; den bestaar i, først at bringe Ligevægt mellem den Genstand, man skal veje, og en hvilken som helst anden Ting, som Hagl (eller lignende), derpaa borttage Genstanden og i Stedet for den lægge Lodder, til der atter er Ligevægt; Legemet og Lodderne veje da lige meget.

Naar man skal veje meget tunge Byrder, maa man indrette Vægtskaalen saaledes, at det er bekvemt at faa Tingen op derpaa; hyppig lader man tillige Lodderne virke paa en 10 eller 100 Gange saa stor Arm som Byrden, hvorved man kan hjælpe sig med mindre Lodder. Indretningen af den sædvanlige Decimalvægt er følgende:

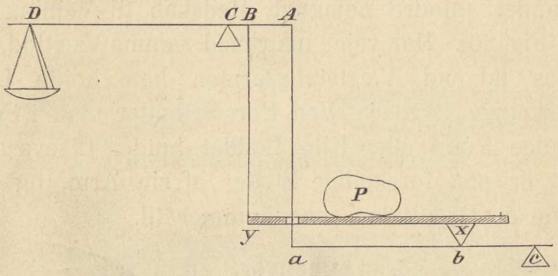


Fig. 25.

Vægtstangen er $A\,B\,C\,D$ med Hvilepunkt i $C$. Fra $A$ gaar en Stang ned til Vægtstangen $a\,b\,c$ med Hvilepunkt i $c$. Byrden $P$ hviler paa en Flade, der er ophængt paa de to Vægtstænger i Punkterne $B$ og $b$. Byrdens Vægt deler sig da i to Dele $x$ og $y$, hvoraf $y$ virker direkte i $B$. $x$ virker først i $b$, men udøver derved i $A$ et Træk, der er $x \cdot \frac{c\,b}{c\,a}$.

Hele Byrdens Moment bliver altsaa

$$y \cdot CB + x \cdot CA \cdot \frac{c\,b}{c\,a},$$

men naar man gjør $\frac{c\,b}{c\,a} = \frac{CB}{CA}$, bliver Momentet

$$y \cdot CB + x \cdot CB = P \cdot CB.$$

Man gør nu Loddernes Arm $CD = 10\ CB$.
Sættes $CD = 100\ CB$, faas en Centesimalvægt.

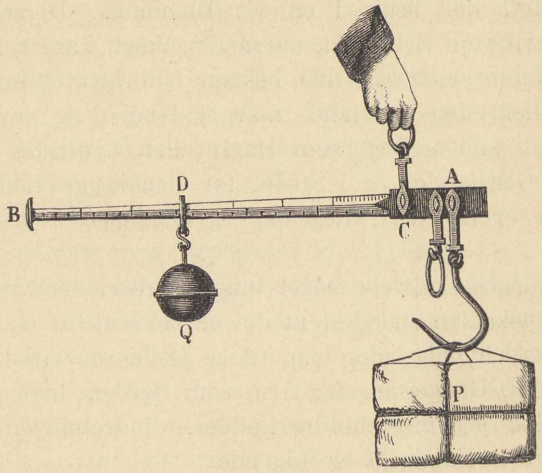


Fig. 26.

Et andet, mindre nøjagtigt, Redskab til Vejning er Bismeren. (Fig. 26). Her vejer man med samme Vægtlod, der ved at skydes ud ad Vægtstangsarmen kan holde Ligevægt mod forskellige Byrder. Ved Forsøg finder man i Forvejen, hvor mange Pund eller Kilo Loddet hoder Ligevægt imod, naar det er paa forskellige Steder af sin Arm, og mærker paa denne de Resultater, man kommer til.

## Opgaver.

21. Bevis, at Maalene paa en Bismer maa være lige langt fra hinanden.

22. Hvorledes stiller en Vægtskaal sig for en vis Overvægt paa den ene Side, naar Tyngdepunktet, Hvilepunktet og Midtpunktet af den Linje, der forbinder Skaalernes Ophængningspunkter, falde sammen?

23. En Cylinder med Længden $2l$ og Radius $r$ bestaar af to kongruente, hver for sig homogene, men ulige tunge Halvdele med Vægtene $P$ og $Q$. Dersom Cylindren ophænges i et Punkt af den Periferi, som adskiller de to Halvdeles Overflader, hvilken Vinkel danner da Aksen med den vandrette Linje?

$$\text{Res. } tg\ x = \frac{P - Q}{P + Q} \cdot \frac{l}{2r}.$$

24. Naar en Genstand vejes paa en uligearmet Vægtskaal, finder man Vægten $P$ eller $Q$ Kilo, eftersom Genstanden ligger paa den ene eller den anden Skaal. Find den virkelige Vægt.

Res. $\sqrt{PQ}$ Kilo.

25. Fire Stænger ere forbundne ved Hængsler og danne et Parallelogram. De vandrette Stænger kunne dreje sig om deres Midtpunkter; paa de lodrette Sider er der fastgjort Tværstykker, som bære to lige store Vægte. Bevis at der er Ligevægt. Dette Princip bruges i Robervals Vægt, som ses i Figuren.

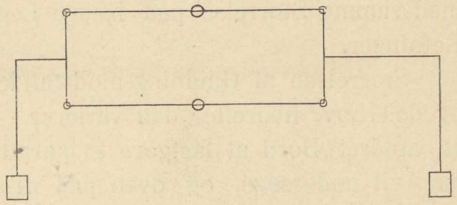

Fig. 27.

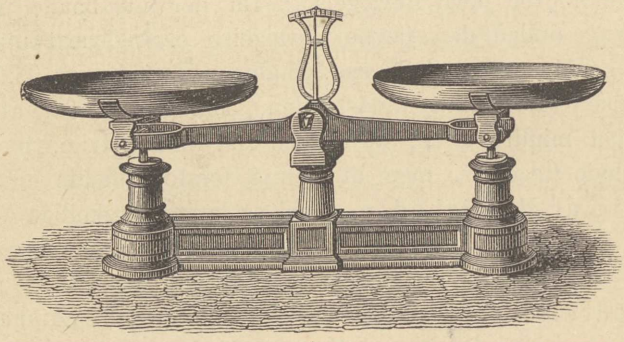

Fig. 28.

**22. Gnidning eller Friktion.** Naar et Legeme trykkes skraat ind mod et andet, kan Trykket opløses i to Komposanter, en normal og en langs Berøringsfladen; dersom nu al Virkning mellem Legemerne var normal, som vi hidtil have antaget, vilde den tangentielle Del af Trykket faa det ene Legeme til at glide hen ad det andet uden Modstand, men Erfaringen viser, at Legemerne kunne gøre mer eller mindre Modstand mod denne Bevægelse, eller med andre Ord, at der ogsaa mellem Legemerne er en Virkning langs

ad Berøringsfladen. Denne Modstand, Gnidningsmodstanden, skyldes Legemernes Ujævnheder og er derfor ubetydelig ved meget jævne og glatte Legemer, hvorimod den ved ujævne Legemer ofte kan være stor nok til aldeles at forhindre Legemernes Bevægelse i Forhold til hinanden (se Opg. 32). Den virker, efter Loven om Aktion og Reaktion, med samme Størrelse paa bægge Legemer, men i modsatte Retninger.

Størrelsen af Gnidningsmodstanden i forskelige Tilfælde og den Lov, hvorefter den varierer, kan man finde ved paa et vandret Bord at fastgøre to parallele Strimler af det Stof, man vil undersøge, og oven paa disse sætte en lille Kasse, hvis Bund er enten af samme eller et andet Stof. Trækker man nemlig ved Hjælp af et Dynamometer denne Kasse hen ad Skinnerne, vil Dynamometret først vise, hvad Kraft der skal til netop at overvinde Gnidningsmodstanden, saa Legemet kommer i Bevægelse, og dernæst hvor stor en Kraft der skal til at vedligeholde en jævn Bevægelse. Da der nu baade under Hvile og under den jævne Bevægelse er Ligevægt mellem Kraft og Modstand (§ 7), saa maaler man i bægge Tilfælde Størrelsen af Gnidningsmodstanden. Man har fundet, at den er noget mindre under Bevægelse end under Hvile, navnlig ved bløde Legemer, men at den i første Tilfelde er uafhængig af Hastigheden. Ved at lægge forskellige Vægtlodder i Kassen har man fundet, at Gnidningsmodstanden baade under Hvile og Bevægelse er proportional med det lodrette Tryk paa Fladen; ved at forandre Skinnernes Bredde har man fundet, at Berøringsfladens Størrelse ingen Indflydelse har paa Gnidningsmodstanden, hvad der stemmer med, at Trykket paa hvert enkelt Sted bliver mindre, naar Berøringsfladen bliver større. Man regner derfor, at Gnidningsmodstanden kan sættes $= \mu R$, hvor $R$ er det normale Tryk og $\mu$ en Konstant, som man kalder Gnidningskoefficienten, og som naturligvis har meget afvigende Værdier for de forskellige Legemer. Der er som Resultat af mange Forsøg udarbejdet Tabeller over $\mu$'s Værdi i de forskellige Tilfælde; vi skulle her anføre nogle Eksempler:

| | i Hvile | i Bevægelse |
|---|---|---|
| Egetræ paa Egetræ med parallele Trevler . . . | 0,62 | 0,48 |
| Egetræ paa Egetræ med Trevlerne over Kors . | 0,54 | 0,34 |
| Støbejærn paa Smedejærn | 0,19 | 0,18 |
| SmedejærnpaaSmedejærn | 0,13 | 0,13 |
| Støbejærn paa Messing . | 0,26 | 0,21 |
| Træ paa Træ med Smørelse af Tælle . . . . . | *cr.* 0,19 | 0,07 |
| Træ paa Metal med Smørelse af Tælle . . . . . | *cr.* 0,12 | 0,08 |
| Metal paa Metal med Smørelse af Olie . . . | *cr.* 0,12 | 0,06 |

Dersom vi i en Opgave om Ligevægt skulle tage Hensyn til Gnidningsmodstanden, saa maa vi, naar to Legemer berøre hinanden, foruden de to lige store og modsatte Reaktioner $R$ tilføje to lige store Kræfter $\mu R$, en paa hvert Legeme, i Tangentplanen og i modsatte Retninger, saaledes at hver af dem søger at standse sit Legemes Bevægelse i Forhold til det andet.

## Opgaver.

26. Et Legeme ligger paa en Flade, som med den vandrette Plan danner en Vinkel $x$; hvor stor kan $x$ være, naar Gnidningskoefficienten er $\mu$?

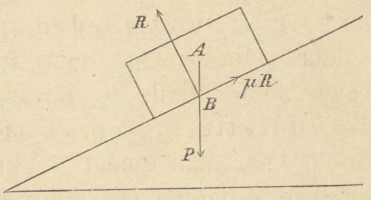

Fig. 29.

Legemets Vægt $P$ virker i Tyngdepunktet $A$; derfra trækkes en lodret Linje, som skærer Skraaplanen i $B$, I dette Punkt maa Gnidningsmodstanden og Planens Reaktion virke, for at de 3 Kræfter kunne holde hinanden i Ligevægt; man har da:

$$P \cos x = R \text{ og } P \sin x = \mu R,$$

hvoraf $tg\ x = \mu$.

Man kan saaledes beregne $x$, naar man kender $\mu$, eller omvendt ved Forsøg finde $x$ og deraf $\mu$.

Naar vi lade Reaktionen virke i $B$, saa er Meningen, at alle de enkelte Reaktioner, som virke normalt over hele Berøringsfladen, maa have en Resultant i $B$; hvorledes de enkelte Dele deraf ere fordelte, kan ikke beregnes, da det afhænger af Overfladernes Beskaffenhed (se Opg. 7). Hvis den lodrette Linje fra $A$ ikke traf indenfor Understøtningsfladen, blev Ligevægten umulig, og Legemet vilde vælte, hvad der stemmer med en Regel, vi fandt om Tyngdepunktet.

Dersom Vinkel $x$ er mindre end den Værdi, som faas af $tg\,x = \mu$, kan Legemet naturligvis ogsaa blive liggende, og der kommer i dette Tilfælde kun en Del af den hele Gnidningsmodstand til Anvendelse.

27. En Stang $(P)$ staar op ad en Væg i en skraa Stilling, men vinkelret paa Gulvets og Væggens Skæringslinje, Gnidningsmodstanden ved Væggen kaldes $\lambda$, ved Gulvet $\mu$; find den mindste Vinkel, Stangen kan danne med Gulvet.

$$\text{Res. } tg\,x = \frac{1 - \lambda\,\mu}{2\,\mu}.$$

Det ses heraf, at Vinklen bliver mindre, naar $\lambda$ eller $\mu$ vokser, samt at Stangen kan staa skraat, selv om $\lambda = 0$, men ikke naar $\mu = 0$

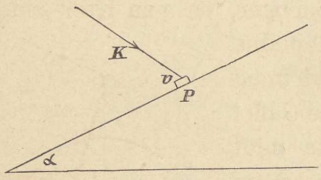

Fig. 30.

28. Et Legeme $(P)$ ligger paa en Plan med Hældningen $\alpha$; Gnidningskoefficienten er $\mu$. Hvad er den mindste Kraft, som kan bevæge Legemet opad, idet den trykker ind imod Skraaplanen under Vinklen $v$, og hvor stor er Reaktionen?

Hvor stor kan $v$ være, naar Legemet virkelig skal bevæges opad?

$$\text{Res. } K = \frac{P\,(\mu\,\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos v - \mu\,\sin v},$$

$$\text{R} = \frac{P\cos\,(v - \alpha)}{\cos v - \mu\,\sin v}, \quad cotg\,v = \mu.$$

29. Vi have det samme Legeme og den samme Skraaplan som i forrige Opgave. Gnidningen er ikke tilstrækkelig til at holde Legemet i Hvile paa Planen; paa Legemets

Tyngdepunkt anvendes der en vandret Kraft, som netop er tilstrækkelig til at opnaa Ligevægt; find den og Trykket paa Skraaplanen samt det Sted, hvor hele dette Tryk kan tænkes at virke. — Specielt $\mu = 0$, $\mu = tg\ \alpha$.

Kaldes Perpendikulæren fra Tyngdepunktet paa Skraaplanen $a$, og det søgte Punkts Afstand fra Perpendikulærens Fodpunkt $x$, bliver Resultatet:

$$K = \frac{P\ (\sin\alpha - \mu\ \cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\ \sin\alpha}$$

$$R = \frac{P}{\cos\alpha + \mu\ \sin\alpha}, \quad x = a\ \mu.$$

30. Naar man iagttager den største Vinkel $v$, som kan faas ved Toppen af et almindeligt Korthus, hvad er da Gnidningskoefficienten mellem Kortene og Bordet, naar man antager, at Trykket mellem bægge Kortene er vandret?

Res. $^1/_2\ tg\ \frac{v}{2}$.

31. En Cylinder (Radius $r_1$) ligger tværs hen over en anden Cylinder ($r$) i Ligevægtsstillingen. Bevis, at Ligevægten er stadig, naar $r_1 < r$, og Gnidningsmodstanden er tilstrækkelig til at forhindre Glidning.

32. Om en vandret Axe $A$ lige over Centrum af et Hjul (Radius $r$) drejer der sig 2 Stænger, en paa hver Side af Hjulet, og de ere forneden forbundne ved Tværstykket $B$, som ligger ind imod Periferien. Vægten af den beskrevne Gaffel er $P$, og dens Tyngdepunkt ligger midt mellem $A$ og $B$; naar nu Vinklerne $v$ og $\alpha$ paa Figuren ere bekendte, og Gnidningskoefficienten mellem Gaflen og Hjulet kaldes $\mu$, hvor stor en Svingkraft skal der da til at dreje Hjulet i den ved Pilen angivne Retning, og hvor maa man vælge Punktet $B$, for at en Drejning af Hjulet kan være ganske umulig i denne Retning?

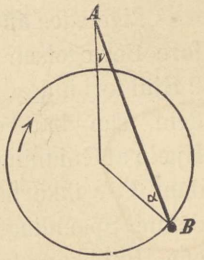

Fig. 31.

Res. $\frac{P\ \mu\ r\ \sin v}{2\ (\sin\alpha - \mu\ \cos\alpha)}$, $tg\ \alpha \lessgtr \mu$.

**23. Gnidningens Nytte.** Det vil allerede af Opgaverne ses, at Gnidningsmodstanden spiller en Rolle i det daglige Liv; Ting, som ligge paa en skraa Flade, eller som staa stillede skraat op ad en Mur, kunne ved Hjælp af Gnidningen blive i Hvile; Søm, Skruer og Kiler blive siddende af samme Grund; vævede Sager vilde falde fra hinanden uden Gnidningsmodstand, enhver Ting, vi holde i Haanden, vilde let glide ud, dersom der ingen Gnidningsmodstand var, omtrent som det er Tilfældet med en Aal. Uden Gnidningsmodstand kunde vi vanskelig staa, som f. Eks. paa glat Is, og aldeles ikke gaa, idet det ene Ben vilde glide tilbage, medens det andet gik frem, og der vilde ikke være nogen som helst Kraft til at føre os frem, dersom al Virkning mellem os og Jorden var normal paa denne; kun naar vi selv kunne trykke skraat ned mod Jorden, kan denne give os et skraat Modtryk. Det skyldes paa samme Maade Gnidningsmodstanden, at Hestene kunne trække en Vogn. Naar et Lokomotiv trækker et Tog, saa skyldes det Gnidningsmodstanden ved Lokomotivets Hjul, at det gaar frem, medens det er fordelagtigst, at alle de øvrige Vogne bevæge sig med saa ringe Modstand som muligt; man kan i Almindelighed sige, at Modstanden ved Lokomotivhjulene maa være større end hele det Træk, Lokomotivet skal udøve, i modsat Fald løbe Hjulene rundt paa Stedet; det forstaas derfor, at tunge Lokomotiver kunne trække længere Tog end lette.

Ligeledes anvendes Gnidningsmodstanden ofte til at overføre Bevægelsen fra en Maskindel til en anden; naar saaledes 2 Hjul forbindes, ved at en Rem eller et Tov er lagt uden om dem, saa kan det ene faa det andet til at gaa rundt ved Hjælp af Gnidningen; her vil denne nemlig bevirke, at et saadant Tov ikke faar samme Spænding overalt, og det er ved denne Spændingsforskel i de forskellige Snorstykker, at det ene Hjul kan faa det andet til at bevæge sig. Lægges et Tov flere Gange omkring en fastliggende Valse eller Bjæke, kan Spændingsforskellen vokse overordentlig stærkt, saa et ringe Træk i den ene Ende af Tovet kan holde en meget tung Byrde, som er fastgjort til den anden Ende. Man anvender dette til uden Fare at sænke en tung Genstand, det

man lidt efter lidt løsner Tovet. Om Bord paa Skibe anvendes den samme Fremgangsmaade i flere Tilfælde.

Det er ligeledes en almindelig Anvendelse af Gnidningsmodstanden, naar man bremser et Hjul for at hindre det i at løbe rundt; den almindeligste Bremse er en Træklods, som passer til Hjulets Omkreds, og som trykkes ind imod denne.

**24. Formindskelse af Gnidningsmodstanden.** Vi have ved nogle af de foregaaende Eksempler oplyst, hvilken Fordel man kan have af Gnidningsmodstanden; men paa den anden Side gælder det ved de fleste Bevægelser om at formindske denne Modstand saa meget som muligt. Ved Bevægelsen af de enkelte Dele paa Maskiner og andre Redskaber opnaar man dette ved Hjælp af Smørelse; ved Træ bruges dertil Tælle, ved Metal Olie; Gnidningskoefficienten kan da ved Metal synke til 0,06. Modstanden formindskes ogsaa meget betydeligt, naar man lader Legemerne rulle mod hinanden i Stedet for at glide; derved løftes nemlig Ujævnhederne ud af hinanden. Man har ved Forsøg fundet, at denne Modstand ogsaa er proportional med Trykket, men tillige omvendt proportional med Radius i den Cirkel, som ruller, og at den vokser noget med Hastigheden. En tung Byrde flyttes altsaa lettere, naar man lægger den paa runde Træstykker og bruger disse som en Slags Hjul. Af samme Grund sætter man Hjul under Vogne og under tunge Møbler. Ganske vist bliver der altid en glidende Modstand ved Hjulets Akse, men dels kan man her bruge Smørelse, og dels faar denne Modstand mindre at sige, fordi den virker saa nær ved Centrum og derfor faar et ringe Moment. En Vogn er desto mere letløbende, jo tyndere Hjulakserne ere, og ifølge Loven om den rullende Gnidningsmodstand, jo større Hjul den har. Hele Gnidningskoefficienten for den Modstand, en god Vogn har at overvinde, kan man omtrent sætte

= 0,03 à 0,04 paa god Stenbro eller Chaussé,

og 0,1 paa en daarlig Vej.

For en Jærnbane faar man omtrent 0,005.

**25. Arbejde.** At udføre et Arbejde er at bevæge et Legeme imod en stadig virkende Modstand. Det er et Arbejde at løfte en Vægt, fordi Tyngdekraften

gør Modstand og maa overvindes; at trække en Vogn, fordi Gnidningsmodstanden skal overvindes; at skære Brænde osv.

Den Enhed, hvormed man maaler et Arbejde, kaldes Kilogrammeter, hvorved man forstaar det Arbejde, som skal til for at bevæge et Legeme $1^m$, naar Modstanden er 1 Kilo. Det er uden videre forstaaeligt, at et Arbejde vokser proportionalt med Modstanden og med Vejen; naar disse da udtrykkes i de sædvanlige Enheder Kilo og Meter og betegnes ved $M$ og $r$, bliver Arbejdet

$$A = M\,r,$$

saafremt Legemet bevæges lige i modsat Retning af den Modstand, der overvindes. Danner derimod Vejen og Modstanden den stumpe Vinkel $180-v$, kan man opløse $M$ i to Komposanter $M\cos v$ og $M\sin v$; den sidste er vinkelret paa Bevægelsen og kan derfor hverken hindre eller fremskynde den, saa at Arbejdet bliver:

$$A = M\,r\,\cos v.$$

Men dette Udtryk kan ogsaa betragtes som Produktet af hele Modstanden $M$ og Vejens Projektion derpaa, hvad der er bekvemmere, naar man har en Modstand af konstant Størrelse og Retning, medens Vejen er en krum Linje; man kan da dele denne Vej i smaa retlinede Stykker, som hvert for sig projiceres paa den konstante Retning, hvorved Summen af alle de enkelte smaa Arbejder igen bliver Produktet af Modstanden og hele Vejens Projektion derpaa. Løftes f. Eks. en Vægt fra et Punkt til et andet, maales Arbejdet ved Vægten Gange det andet Punkts lodrette Højde over det første; om Vejen gaar mere eller mindre skraat, om den er lige eller krum, er i denne Sammenhæng ligegyldigt.

Dersom den arbejdende Kraft virker umiddelbart paa samme Legeme som Modstanden, og bevæger det med jævn Hastighed, saa maa (efter § 7) Kraften være lig Modstanden, saa at man ogsaa kan maale Arbejdet ved Kraften Gange den Vej, den bevæger Legemet, eller hvis de to Retninger danne en Vinkel med hinanden, ved Kraften Gange Vejens Projektion derpaa.

Selv om et Legeme ikke er paavirket af nogen ydre Modstand, maa man alligevel udføre et Arbejde, for at sætte

det i Bevægelse, fordi Legemets Inertimodstand skal overvindes; da denne Inertimodstand, som vi senere skulle se, er lige saa stor som Kraften, kan man ogsaa i dette Tilfælde maale Arbejdet ved Kraften Gange Vejen.

**26. Maskiner.** I Reglen bruger man Maskiner til at udføre Arbejde, det vil sige Redskaber, som gøre det muligt at anvende Kraften paa en bekvemmere Maade eller paa et andet Sted end der, hvor Arbejdet egentlig skal udføres. Vi skulle nu beskrive de simpleste af disse Maskiner, og tillige undersøge Ligevægtsbetingelsen mellem Kraft og Modstand under den jævne Bevægelse, idet vi stadig erindre, at denne Betingelse bliver den samme som under Hvile, naar vi ikke tage Hensyn til Gnidning og andre Modstande, som først opstaa under Bevægelsen.

**27. Vinden** eller **Spillet** er en cylindrisk Valse, som kan drejes om sin Akse. Paa Valsen er der fastgjort et Tov, som lægges nogle Gange omkring Periferien og i Enden paavirkes af den Modstand, det gælder om at overvinde. Lad os tage det simple Tilfælde, at Aksen er vandret, og Tovet bærer en Byrde $B$; vi ville foreløbig tænke os, at der paa Enden af Valsen er befæstet et større Hjul, om hvis Periferi der er lagt et andet Tov i modsat Retning af det første. Spørgsmaalet er nu: hvor stor en Vægt $K$ maa man hænge paa dette Tov, for at den kan holde Ligevægt mod Byrden eller løfte den under en jævn Drejning af Valsen?

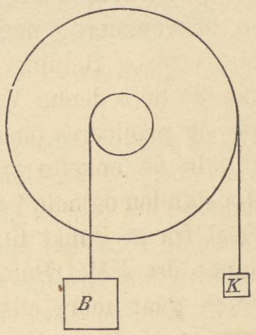

Fig. 32.

Ligevægtsbetingelsen findes ved at flytte $K$ og $B$ ind til Aksens Centrum; man faar da, naar Valsens og Hjulets Radier kaldes $r$ og $R$, Betingelsen:

$$B\,r = K\,R,$$

hvoraf det ses, at $K$ bliver desto mindre, jo mindre man gør Forholdet $\frac{r}{R}$.

Lade vi nu Valsen gøre en hel Omdrejning, saa løftes $B$ gennem Højden $2\pi r$, medens $K$ falder gennem Vejen $2\pi R$. Den første Bevægelse kræver Arbejdet $B.\ 2\pi r$, men da dette ifølge Ligevægtsbetingelsen er $= K.\ 2\pi R$, ser man, at Arbejdet lige saa godt kan maales ved Produktet af Kraften og dens Vej.

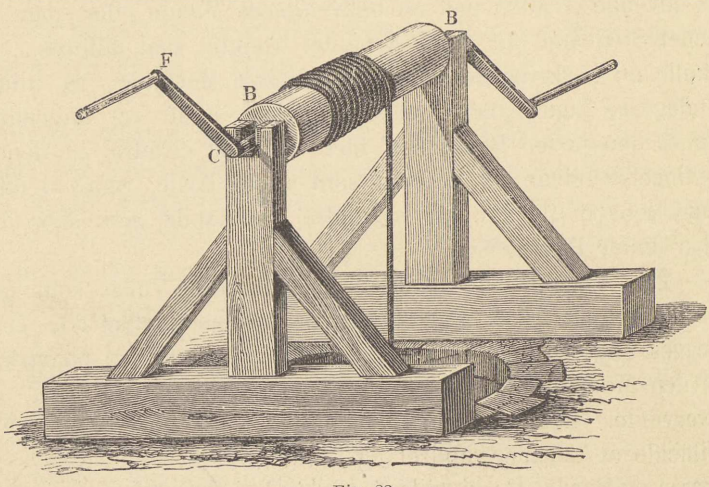


Fig. 33.

I Reglen bevæges Vinden ikke ved en faldende Vægt, men derimod ved en Haandkraft, som virker paa et Sving, der udgaar fra Valsen. Muskelkraften maa da udrette det samme Arbejde som den faldende Vægt; jo større Svinget er, desto mindre kan Kraften være, men desto større bliver ogsaa den Vej, Kraften skal virke igennem. Spil med vandret Akse kaldes Bradtspil, Spil med lodret Akse Gangspil; bægge Slags anvendes meget i det daglige Liv, f. Eks. paa Skibe, eller til at hejse Vand op af en Brønd; ligeledes er en Hestegang et Gangspil.

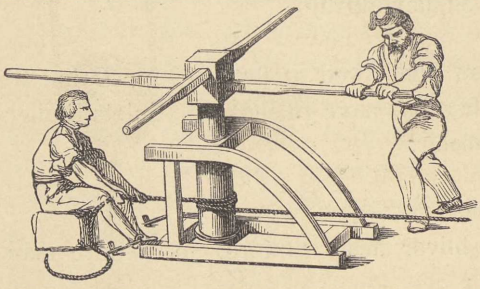

Fig. 34.

**28. Trissen** er en flad, cirkelformet Skive, der kan dreje sig om sin Akse og i Randen har en Rende, hvori et Tov kan ligge. Trissens Akse er fastgjort i en Gaffel, og eftersom denne er fast eller bevægelig, kaldes Trissen fast eller løs. Et Tov, som ligger om en Trisse, har samme Spænding i

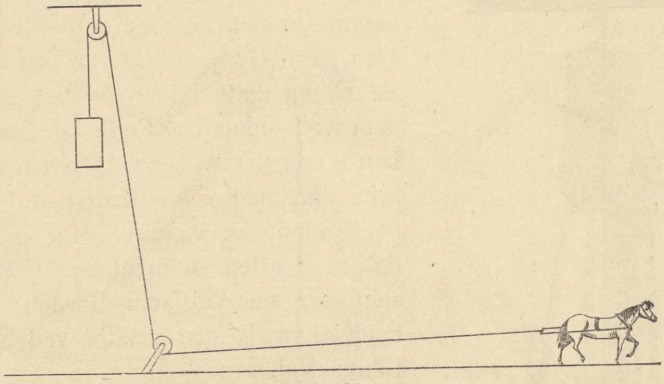

Fig. 35.

bægge sine Stykker, saafremt vi ikke tage Hensyn til Gnidningen ved Aksen; deraf følger, at man ved den faste Trisse ikke opnaar nogen Formindskelse af Kraften, men kun den Fordel, at man kan anvende den i den bekvemmeste Retning. Figuren viser, hvorledes et vandret Træk kan bruges til at løfte en Byrde.

Er Trissen løs og bærer i sin Gaffel Byrden $B$, saa vil, i Tilfælde af Ligevægt, hvert Snorstykke bære det halve, dersom Snorene ere parallele; naar Kraften $K$ da er det halve af $B$, kan den holde Ligevægt mod Byrden eller løfte den med jævn Hastighed. Er denne løftet et Stykke $r$, da er hver Snor forkortet dette Stykke, og Kraften har gennemløbet Vejen $2\,r$. Det udførte Arbejde er $B\,r$, men da dette $= K\,.\,2\,r$, saa kan Arbejdet ogsaa her maales ved Produktet af Kraften og dens Vej. Ved en anden, men fast Trisse kan man lade $K$ virke, i hvad Retning man vil.

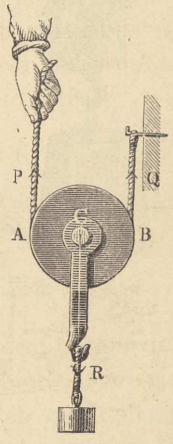


Fig. 36.

Ofte sættes flere Trisser i samme Gaffel, bedst ved Siden af hinanden; en saadan Forbindelse kaldes en Blok, flere Blokke danne et Trisseværk eller en Talje. Figuren viser et saadant med 2 treskaarne Blokke. Er der ingen Gnidning, have alle Snorstykker atter samme Spænding; der er 6 Stykker, som bære Byrden $B$, hver bærer da $^1/_6$ $B$, og dette bliver = den Kraft, som ved den frie Ende af Snoren kan holde Ligevægt mod Byrden eller løfte den med jævn Hastighed. Ved en lignende Betragtning som før ses det, at Kraften gennemløber 6 Gange saa stor en Vej som Byrden; Arbejdet kan da igen maales ved Kraft Gange Vej.

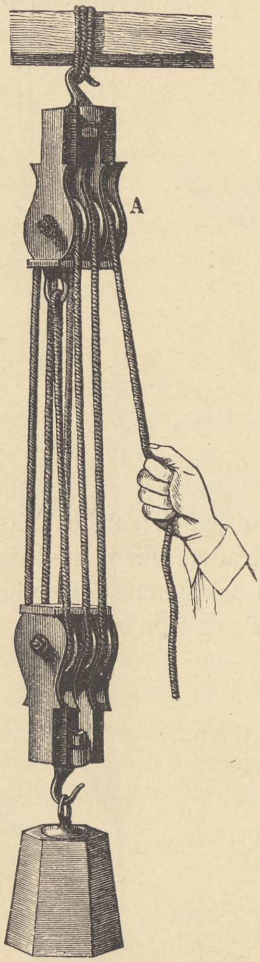

Fig. 37.

Differenstrissen bestaar af en fast Trisse, som har to Skiver med forskellig Radius, samt en løs Trisse, der bærer Byrden; om begge Trisserne gaar en Kæde paa den Maade, Fig. 38 viser. Kraften $K$ virker nedad paa Kæden til venstre, men det er umuligt at faa Ligevægt her, uden at der er en betydelig Gnidningsmodstand mellem Kæden og Trissen, da Byrden ellers kunde synke, idet den løse Kæde forkortes. For nu at være sikker paa at have Gnidning nok, har man i Stedet for Render i Trisseskiverne anbragt fremstaaende Spidser paa Periferierne, og i Stedet for et Tov anvendes der en Metalkæde, dannet af Ringe, som lægge sig over Spidserne paa Trisserne. Kaldes Spændingen i Kæden paa de 3 Dele $K$, $L$ og $N$, den faste Trisses Radier $R$ og $r$, og betragter man alle Kædestykkerne som parallele

og tager intet Hensyn til deres Vægt, hvorved Spændingen i det ene Stykke Kæde er $= 0$, saa faas Ligevægtsbetingelsen for den faste Trisse

$$KR + Lr = NR$$

og for den løse Trisse

$L + N = B$ samt $L = N$, hvoraf faas:

$$K = \frac{R - r}{2R} \cdot B.$$

Med dette Trisseværk kan man gøre $K$ lille, naar $R$ og $r$ ere omtrent ens store; det anvendes ligesom det forrige til at hejse tunge Byrder op, og har foruden sin Simpelhed den Fordel, at man ved at trække i den anden Del af den fri Kæde kan sænke den løse Trisse, som paa Grund af Gnidning ikke falder af sig selv, naar den skal ned.

Er den faste Trisse drejet en Gang rundt, saa har Kraften bevæget sig en Vej $= 2\pi R$; Snoren $N$ er forkortet $2\pi R$, Snoren $L$ derimod forlænget $2\pi r$, hvorved Byrden er løftet $^1/_2 (2\pi R - 2\pi r)$. Det udførte Arbejde er $B\pi (R - r)$ eller ifølge Ligevægtsbetingelsen $K . 2\pi R$, hvoraf følger den sædvanlige Regel om Arbejdets Udmaaling.

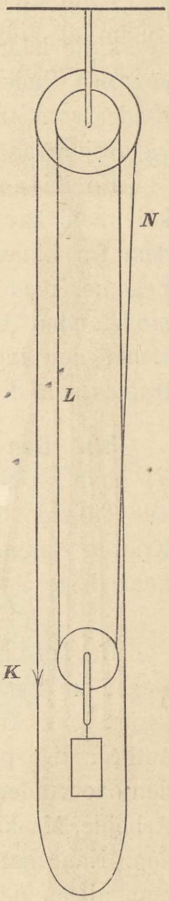

Fig. 38.

**29.** En **Skraaplan** bruges tit til at løfte en tung Byrde. Kaldes dennes Vægt $P$, Skraaplanens Hældning $\alpha$, og anvender man en Kraft $K$ parallel med Skraaplanen, faar man i Tilfælde af Ligevægt:

$$K = P \sin \alpha.$$

Ogsaa her gælder Reglen om Arbejdets Udmaaling ved Kraften. Bevæges Byrden nemlig en Vej $r$ op ad Skraaplanen, kræves dertil Arbejdet $P . r \sin \alpha$, idet $r \sin \alpha$ er Vejens Projektion paa Modstandens Retning, men det nævnte Produkt er netop lig $Kr$.

Man anvender ofte en Skraaplan til at trille en tung Byrde op paa en Vogn eller til med Varsomhed at lade den

falde ned; ligeledes til at trække Skibe op paa Land, naar de skulle istandsættes; og for at opnaa yderligere Kraftbesparelse lader man i dette Tilfælde desuden gerne den Kæde, som trækker Skibet, gaa om Valsen paa et Gangspil, og drejer saa dette ved store Stænger gennem Valsen.

En Kile er et tresidet Prisme med en meget spids Vinkel, som kan bevæges ind mellem to Legemer for at fjerne dem fra hinanden eller for at presse dem fast mod andre Legemer med et stort Tryk; den vil i Reglen ved Gnidningsmodstanden blive siddende paa det Sted, hvor man har slaaet den ind. Søm, Knive, Naale osv. kunne ogsaa betragtes som Kiler.

**30. Den almindelige Ligevægtsbetingelse ved Maskiner.** Vi have nu set en Del Eksempler paa Maskiner og have i alle Tilfælde bevist, at Arbejdet ligesaa godt kan maales ved Kraften Gange dens Vej, som ved Byrden Gange dens Vej; naar disse Veje kaldes $r$ og $s$, faar man altsaa

$$Kr = Bs.$$

Denne Ligning betegner imidlertid noget mere, end en Regel om Arbejdets Udmaaling; den angiver nemlig Ligestorheden af 2 Arbejder. Thi $Kr$ betegner det Arbejde, Kraften udfører lige paa det Sted, den tager fat paa Maskinen, idet den overvinder dennes Reaktion, som ogsaa er $K$; og $Bs$ er det Arbejde, Maskinen udfører paa det Sted, den tager fat paa Byrden. Naar man skal have løftet en Byrde en bestemt Højde, maa man altsaa udføre det samme Arbejde, hvad enten man tager direkte fat paa Byrden eller man løfter den ved at tage fat i Tovet paa et Trisseværk. Ved Maskiner sparer man derfor intet Arbejde, men man kan udføre det med en mindre Kraft, og man kan anvende denne paa en bekvemmere Maade.

Da Reglen om de to Arbejders Ligestorhed har bekræftet sig i alle Tilfælde, plejer man at gaa ud fra den ved Undersøgelsen af vanskeligere Maskiner; Ligevægtsbetingelsen faas da næmt af Ligningen $Kr = Bs$.

Vi ville undersøge et Par nye Maskiner paa denne Maade.

**31. Tandhjulsforbindelser.** En Vinde bevæges ofte derved, at Valsen er forsynet med et stort Tandhjul, hvis

Tænder gribe ind mellem Tænderne paa et mindre, et saakaldet Drev, som drejes ved et Haandsving. Vi spørge da om, hvor stor en Kraft der skal anvendes paa Haandsvinget for med jævn Hastighed at løfte Byrden $B$, som hænger paa Valsen. Vi kalde Valsens Radius $r$, Haandsvingets $R$ og

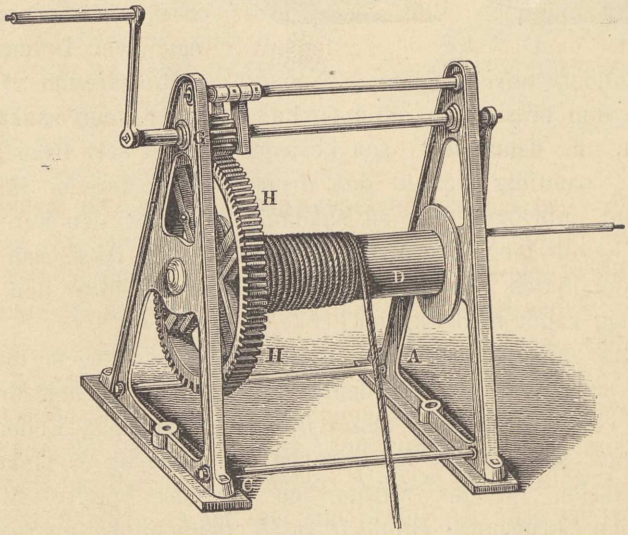


Fig. 39.

Tændernes Antal paa det store og lille Hjul $N$ og $n$. Naar Valsen er drejet en Gang rundt, er Byrden løftet Vejen $2\pi r$, men Kraften har gennemløbet Vejen $2\pi R \cdot \frac{N}{n}$; ifølge Reglen om Arbejdets Udmaaling har man da

$$B \cdot 2\pi r = K \cdot 2\pi R \cdot \frac{N}{n} \text{ eller}$$

$$K = B \cdot \frac{n\,r}{N\,R}.$$

**32. Skruen.** Tænke vi os en retvinklet Trekant viklet om en Cylinder, saa at den ene Katete falder paa Periferien af Cylindrens Grundflade, saa danner Hypotenusen en Skruelinje. En enkelt Skruegang er den Del deraf, som gaar

fra en Frembringer rundt om Cylindren tilbage til samme Frembringer, og det Stykke, som derved afskæres paa denne, kaldes Skruegangens Højde. En Skrue er nu en Cylinder med en ophøjet Skruegang paa; den bevæges i en tilsvarende Skruegang, som er skaaren ind i en hul Cylinder, den saakaldte Møtrik. Er denne fast, saa bevæges Skruen selv frem eller tilbage, samtidig med at den drejes rundt; dersom Skruen derimod anbringes paa en saadan Maade, at den kun kan drejes rundt men ikke flytte sig langs ad sin Akse, saa kan Møtriken flyttes i denne Retning, naar man hindrer den i at dreje sig rundt med Skruen.

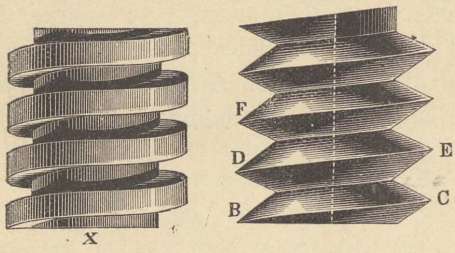

Fig. 40.

Naar Møtriken er fast, og Skruen, hvis Akse er lodret, bærer en Byrde $B$, vil denne løftes, naar Skruen drejes rundt ved en Kraft $K$, som virker vinkelret paa Enden af en Stang, der udgaar fra Skruens ene Ende og er vinkelret paa Aksen. Drejes Skruen en Omgang rundt, vil $B$ løftes en Skruegangs Højde $h$, og $K$ gennemløbe en Cirkelperiferi $2\pi R$; anvendes den sædvanlige Regel, faar man:

$$B \,.\, h = K \,.\, 2\pi R.$$

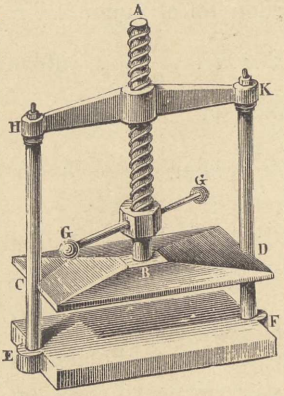

Fig. 41.

Skruen anvendes overordentlig meget, f. Eks. til at løfte meget vanskelige Genstande, saasom Stigrøret i en artesisk Brønd, hæve Lofter eller Tage paa en Bygning, (Dunkraft), eller til at udøve store Tryk som ved Prægning af Mønter; fremdeles til at skrue forskellige Stykker Træ sammen, idet Skruen selv skærer sin Møtrik i Træet og bliver siddende fast paa Grund af Gnidningen. Den anvendes ogsaa til nøjagtig Udmaaling eller Inddeling af Linjer;

naar nemlig Skruegangens Højde er meget lille, flyttes Skruen kun et lille Stykke i Retning af Aksen ved en hel Omdrejning, og forsynes Skruehovedet med en stor cirkelrund Skive, som er inddelt i lige store Dele, kan man dreje Skruen en bestemt Del af en hel Omdrejning. Er f. Eks. Skruegangens Højde $1^{mm}$, og Cirklen delt i 1000 Dele, kan man ved at dreje en af disse Dele flytte Skruen $^1/_{1000}$ Millimeter i Retning af sin Akse. Herpaa beror Delemaskinen, som anvendes til Inddeling af nøjagtige Maalestokke, og Sfærometret (Fig. 42) til Udmaaling af Legemers Tykkelse.

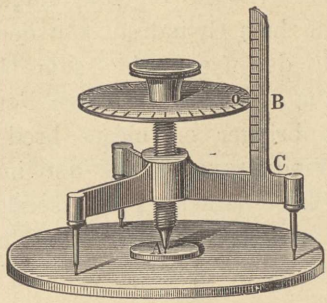

Fig. 42.

Den saakaldte Arkimedes'ske Skrue er en Maskine til at løfte Vand ved Udtørring af Søer eller desl. Lad os tænke os en Cylinder, hvorom der lægges et Rør i Form af en Skruegang. Dersom Cylindren drejes om en Diameter gennem Punktet $A$ saa stor en Vinkel, som Skruelinjens Stigning er, saa bliver Skruelinjen selv vandret i dette Punkt og de tilsvarende paa samme Frembringer. Hælder man Cylindren endnu mere,

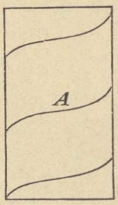

Fig. 43.

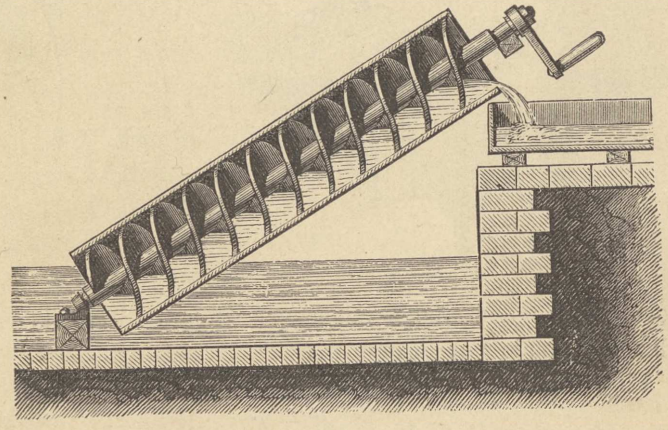
Fig. 44.

ville Punkter til højre for de nævnte faa vandrette Tangenter og derfor ligge lavere end Nabopunkterne. Paa disse Steder kan f. Eks. en lille Kugle blive liggende, og ved Drejning af hele Cylindren kan den løftes, idet den stadig løber hen til det nye Punkt, som bliver det laveste. I Praksis giver man Skruen en anden Form, idet man uden paa Cylindren anbringer en meget bred men flad Skruegang, ligesom en Vindeltrappe, eller det indvendige af et Sneglehus; denne Skrue stilles i en passende Skraaning og drejes rundt inden i en hul Cylinder, som slutter temmelig nøje til Yderkanten af Skruebladene.

## Opgaver.

33. En Differensvinde (Fig. 45) har forskellig Radius $R$ og $r$ paa de to Halvdele af Valsen; de to Ender af en Snor, som ved Hjælp af en løs Trisse bærer Byrden $B$, ere viklede om de to Halvdele af Valsen, saaledes at den ene Snorende

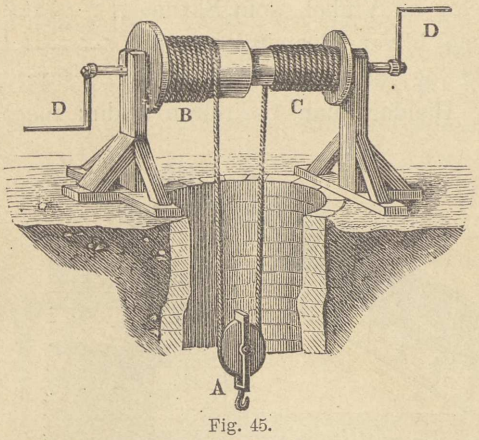


Fig. 45.

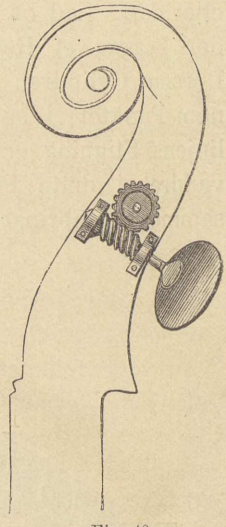

Fig. 46.

løber af, naar den anden løber paa. Kraften $K$ virker paa sædvanlig Maade paa Armen $a$.

Find Ligevægtsbetingelsen.

$$\text{Res. } K = \frac{R - r}{2\,a} \cdot B.$$

34. Hvilket Tryk kan man udøve med en Skrue, hvis Skruegangs Højde er $1^{mm}$, naar en Kraft af 20 Kilo virker paa en Arm af Længde $2^{m}$?

Res. Noget over 250000 Kilo.

Hertil er imidlertid at bemærke, at der ikke er taget Hensyn til Gnidningsmodstanden, som kan forandre Forholdet meget betydeligt. (Se Opg. 262).

35. En Valse med Tandhjul bevæges undertiden ved en »Skrue uden Ende«, hvis Gænger gribe ind i Tændernes Mellemrum. Dette anvendes f. Eks. til at spænde Strængene paa en Kontrabas (Fig. 46). Find Kraftens Størrelse.

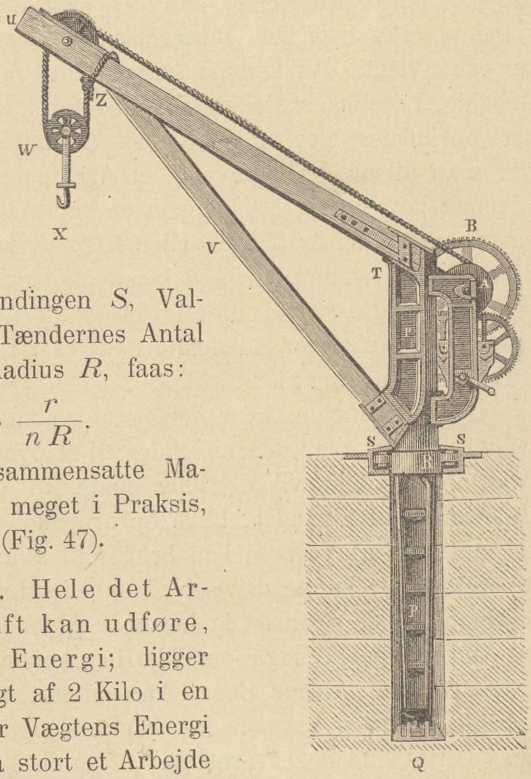

Fig. 47.

Kaldes Spændingen $S$, Valsens Radius $r$, Tændernes Antal $n$ og Kraftens Radius $R$, faas:

$$K = S \cdot \frac{r}{nR}.$$

Forskellige sammensatte Maskiner anvendes meget i Praksis, f. Eks. en Kran (Fig. 47).

**33. Energi.** Hele det Arbejde, en Kraft kan udføre, kaldes dens Energi; ligger saaledes en Vægt af 2 Kilo i en Højde af $10^{m}$, er Vægtens Energi 20 kgm., thi saa stort et Arbejde have vi set, at Vægten ved sit Fald kan udrette et andet Sted, naar den virker paa en af de ovennævnte Maskiner.

Naar en hvilken som helst Kraft $K$ ved at bevæge sig

gennem Vejen $r$ udfører Arbejdet $Kr$, bliver dens Energi saa meget mindre, men hvis Arbejdet udelukkende har bestaaet i at løfte en Vægt $B$ gennem Højden $s$, saa har denne Vægt derved faaet sin Energi forøget med $Bs$; da nu $Bs = Kr$, se vi, at den Energi, Kraften mister, vindes igen i det løftede Legeme, og saa længe dette bliver paa sin Plads, beholder det sin Energi uforandret. Man kan saaledes opspare Energi ved at løfte Legemer.

Lad os derefter antage, at Kraftens Arbejde alene har bestaaet i at sætte et Legeme i Bevægelse. Dette bliver derved i Stand til selv at udføre Arbejde; hvis det f. Eks. kommer ind paa en ujævn Flade, kan det overvinde Gnidningsmodstanden, eller hvis dets Bevægelse ledes opad, kan det løfte sin egen Vægt. Vi komme senere til at bevise, at hele det Arbejde, Legemet saaledes kan udrette, igen er lig med det, der oprindelig blev anvendt paa at sætte det i Bevægelse. Har man altsaa dertil anvendt et Arbejde paa 24 Kgm., kan Legemet bevæge sig $8^m$ ind paa en vandret Flade, hvor Gnidningsmodstanden er 3 Kilo, eller $12^m$, hvis Modstanden er 2 Kilo. Hvis Legemet derimod ingen Modstand møder, vil det beholde sin Hastighed uforandret og derfor ogsaa hele sin Energi; man siger da, at denne bevares i Legemet i Form af Bevægelsesenergi.

Der er Tilfælde, hvor det ser ud, som om Energien forsvandt, f. Eks. naar den anvendes til at overvinde Gnidningsmodstanden. Man vil dog her finde, at de Legemer, som glide langs ad hinanden, blive opvarmede, og da det er en bekendt Sag, at Varmen kan bruges til at udføre Arbejde, — store Maskiner kunne drives ved ophedet Luft eller Damp —, ser man, at de opvarmede Legemer indeholde Energi. Man har ved mange Forsøg, som ikke her kunne anføres, fundet, at det Arbejde, denne Energi kan udføre, netop er lig det Arbejde, hvorved Varmen fremkom. Energien er altsaa ogsaa i dette Tilfælde bevaret med uforandret Størrelse. Hvad vi her have set i nogle enkelte Tilfælde, har man ved Iagttagelser og Beregninger fundet gældende i mange andre, saa at man kan betragte det som en almindelig Lov, at enhver Energi, der anvendes til at udføre Arbejde, altid kommer

frem igen paa et andet Sted, ofte under andre Former, men hverken større eller mindre. Summen af al den Energi, der findes i Naturen, maa derfor være konstant.

For at anvende Reglen rigtig, maa man imidlertid lægge Mærke til, at der sædvanlig udføres flere Arbejder samtidig, og fremkommer ny Energi paa flere Steder. Naar saaledes en Kraft bevæger en Maskine, maa den foruden at udføre det tilsigtede Nyttearbejde tillige sætte de omliggende Luftdele i Bevægelse og overvinde Gnidningsmodstanden ved Akserne osv.; den hertil anvendte Energi kommer vel frem igen paa forskellige Steder i Form af Bevægelsesenergi og Varme, men da man ikke er i Stand til at udbytte den, bliver Følgen, at der praktisk taget gaar Energi til Spilde. For altsaa at holde en Maskine i jævn Gang, maa man, hvad enten den udfører Nyttearbejde eller ej, dog stadig tilføre den Energi udefra; ophører man dermed, kan Maskinen kun vedblive at bevæge sig saa længe, indtil den Bevægelsesenergi, den en Gang har faaet, er helt opbrugt til at overvinde de uundgaaelige Modstande. I de Tilfælde, hvor det gælder om at faa en Bevægelse standset saa hurtigt som muligt, frembringer man derfor en kunstig Modstand, der kan opsluge en Mængde Energi; Jernbanevogne, der ere i Fart, standses ved at bremse Hjulene stærkt.

Det vil af det foregaaende være forstaaeligt, at det er umuligt at konstruere et saakaldet perpetuum mobile, hvorved man forstaar en Maskine, som, naar den en Gang var sat i Bevægelse, skulde vedblive at bevæge sig uden nogen yderligere Tilførsel af Kraft. Mange Mennesker have, paa Grund af mangelfuldt Kendskab til Energiens Vedligeholdelse, ment, at det kunde ske ved at lade Maskinen under en vis Del af sin Bevægelse løfte en Vægt, der under en anden Del af Bevægelsen igen kunde falde og derved fremskynde Maskinens Gang. Den eneste Mulighed for et saadant perpetuum mobile vilde være, om man kunde finde Kræfter af lignende Beskaffenhed, som er omtalt i Slutningen af § 5, men saadanne Kræfter kendes ikke.

En ganske anden Sag er det, at man kan bruge Kræfter, som altid ere til Raadighed i Naturen, til at holde Maskiner

i uafbrudt Gang. Et Vandløb kan f. Eks. uden Sandsning drive et Mølleværk; Vandfald kunne bruges til at drive store Fabrikanlæg; Solvarmen kan bruges, ligesom Ebbe og Flod osv., men her er det netop den i Naturen tilstedeværende Energi, vi gøre nyttig i forskellige Øjemed.

**34. Arbejdets Værdi.** Medens Størrelsen af et Arbejde ikke afhænger af den Tid, i hvilken det udføres, saa er det klart, at denne Tid netop har meget at sige, naar det gælder om at bedømme et Menneskes eller et Dyrs Arbejdsdygtighed eller maale, hvor meget der kan udrettes af en Maskine, der drives ved Damp eller Vand eller paa anden Maade. Man har fundet, at en kraftig Hest, som arbejder 8 Timer af Døgnet paa den for dens Muskelkraft bekvemmese Maade, hvortil hører, at den gaar temmelig langsomt og ilke op ad Skraaninger, omtrent kan udføre et Arbejde paa 75 kgm. (480 $\overline{a}$') i Sekundet; en Kraft, som arbejder med deme Hastighed, kaldes derfor en Hestekraft.

En Mands Arbejdshastighed svarer omtrent til $^1/_{10}$ Hestekraft, naar han arbejder jævnt 8 Timer om Dagen; for en kort Tid kan han arbejde dobbelt saa hurtigt, men hele Dagsarbejdet bliver ikke større. Man har fundet, at den Maade, hvorpaa en Mands Dagsarbejde bliver størst, er, naar han, ved at gaa op ad en Stige eller Trappe, kun løfter sin egen Vægt uden at bære nogen Byrde og derefter lader sig fire ned ved et Hejseapparat, idet han samtidig løfter den Byrde, det egentlig gælder om at faa hævet. Derfor er Trædehjulet en fordelagtig Maskine, men det anvendes sjeldent.

Arbejdets Pris retter sig meget efter Maaden, hvorpaa det faas. Hver Hestekraft, der leveres af en større Dampmaskine, regnes at koste ca. 8 Øre Timen, hvorimod det samme Arbejde, udført af Mennesker, koster meget mere.

**35. Muskelarbeide, Anstrængelse og Træthed.** Naar man bærer en tung Byrde og holder den ganske rolig, saa er det selvfølgelig ikke noget Arbejde efter Ordets fysiske Betydning; men de fleste ville dog bruge denne Benævnelse, og det med en vis Ret; man har nemlig i det væsentlige den samme Fornæmmelse i sine Muskler, naar man holder en Byrde, og naar man løfter den. Denne Fornæmmelse er det,

man i daglig Tale kalder Arbejde, men for ikke at bruge dette Ord i en Betydning, der er forskellig fra den fysiske, ville vi foretrække Ordet Anstrængelse. Det fordrer altsaa en Anstrængelse baade at sammentrække sine Muskler og at holde dem sammentrukne; men kun i første Tilfælde udføres der et ydre Arbejde. Anstrængelsen skyldes fra først af Viljen, som paavirker Musklen gennem Nerven, og denne Viljesanspændelse er baade nødvendig til at sammentrække Musklen og til at vedligeholde Sammentrækningen. Det er dog sandsynligt, at der ikke herved tilføres Musklen nogen væsentlig Energi, men at Nervevirksomheden kun frigør den Energi, som findes opsamlet i Musklen, ligesom man udløser Energien i Krudtet, naar man trækker i Aftrækkeren paa en Bøsse. Lad os antage, at man anvender den samme Energi til at holde en tung Byrde en vis Tid og til at løfte en noget mindre, saa viser det sig, at man i bægge Tilfælde faar en Varmeudvikling i Musklen som Erstatning for den tabte Energi, men da der i sidste Tilfælde er udført et ydre Arbejde, bliver Varmeudviklingen mindre i Forhold dertil. (Dette behøver dog ikke at gælde den hele Varmeudvikling i Legemet, da den væsentlig afhænger af Blodomløbet, som forøges ved Arbejde).

Ligesom Energien tilføres Dampmaskinen med Kullene, saaledes tilføres den Legemet gennem Føden, hvis Næringsstoffer optages af Blodet og føres rundt med det til de Steder, hvor der er Brug for dem, eller hvor de skulle opsamles. Naar Musklen har forbrugt sine Næringsstoffer, bliver den træt, og naar hele Beholdningen af Energi er opbrugt, kan end ikke den største Nerveanspændelse faa Musklen til at trække sig sammen. Den maa først udhvile sig, det vil sige samle ny Næring.

Ogsaa uden for den organiske Verden kender man saadanne Kræfter, der ligesom Muskelkraften kun kunne vedligeholdes ved en stadig Tilførsel af Energi, selv naar Kraften ikke arbejder. Det er saaledes Tilfældet med den Magnetkraft, man kan frembringe ved at føre en elektrisk Strøm i flere Vindinger omkring et Stykke Jærn (en Elektromagnet); Magnetismen varer kun, saa længe Strømmen gaar. Dersom

Magneten ikke arbejder men kun holder et Stykke Jærn tiltrukket, vil den Energi, som findes i den elektriske Strøm, og som skyldes Zinkens Opløsning, udelukkende frembringe Varme. Naar Magneten derimod tiltrækker et Stykke Jærn og løfter det op til sig, faar man udført et ydre Arbejde og Varmeudviklingen bliver derfor mindre.

Saadanne energiforbrugende Kræfter som dem, Muskler og Elektromagneter kunne udfolde, ere naturligvis forholdsvis kostbare; thi det er Energien, som koster Penge, hvorimod man ellers kan have en Kraft for Ingenting. Naar man for Eks. hænger en Byrde paa en Krog, da har man Bærekraften gratis, men vil man have en Mand eller en Elektromagnet til at holde den, maa man betale derfor, i Sølv eller Zink.

## Opgaver.

36. Et Vandfald giver hvert Sekund 15 Hektoliter Vand og har en Faldhøjde af $5^m$. Hvor mange Hestes Kraft?

Res. 100 Hk.

37. En Vogn, som med Læsset vejer 1000 Kilo, trækkes $100^m$ op ad en Skraaning, hvis Stigning er $^1/_{16}$, Gnidningskoefficienten $= 0{,}06$. Hvor stort er Arbeidet?

Res. 12250 Kgm.

Anm. I denne og flere andre Opgaver sættes *cos* til en lille Vinkel $= 1$.

38. Hvor mange Hestes Kraft har et Lokomotiv, som trækker et Tog med Vægten 91 Tons (à 1000 Kilo) op ad en Skraaning med Stigningen $^1/_{35}$, naar Gnidningskoefficienten er $= {}^1/_{200}$ og Hastigheden $6^m$ i Sekundet? (Semmering Jærnbanen).

Res. $244^2/_5$ Hk.

39. En Hest trækker en Jærnbanevogn af Vægt 5 Tons gennem en Strækning af $10^m$ med en Kraft af 60 Kilo; hvilken Energi indeholder Vognen, og hvor langt løber den, naar Hesten spændes fra, idet Gnidningskoefficienten sættes $= {}^1/_{200}$.

Res. 350 Kgm., $14^m$.

40. Dersom en Jærnbanevogn har en saadan Hastighed, at den kan løbe $600^m$, hvor langt kan den da løbe, naar

der bremses, hvorved Gnidningskoefficienten forandres fra 0,005 til 0,12?

Res. 25m.

41. En Vinde med Vægt $P$ bevæges med jævn Hastighed af Kraften $K$, som virker lodret nedad paa et Hjul med Armen $R$, Byrden virker ogsaa nedad paa Armen $r$; de Tapper, hvorom Vinden drejer sig, have Radien $\rho$, og Gnidningskoefficienten er $\mu$.

Find $K$:

Res. $K = \frac{B(r + \rho\mu) + P\rho\mu}{R - \rho\mu}$.

42. Naar en Vinde drejes ved Haandsving, i hvilken Stilling af Haandsvinget bevirker da Gnidningsmodstanden, at Kraften maa være størst eller mindst? Drejes Vinden ved Tandhjul, paa hvilket Sted bør man da anbringe Drevet?

43. Bremsedynamometret anvendes for at maale, hvilket Arbejde en eller anden Maskine kan udrette, f. Eks. et Vandhjul, en Dampmaskine eller andre. De fleste Maskiner ere indrettede saaledes, at de sætte en Hovedakse i omdrejende Bevægelse, og derfra overføres saa Arbejdet til de egentlige Arbejdsmaskiner. Naar man nu vil maale en Maskines Arbejdskraft, lader man Aksen gaa uden at trække andre Maskindele, og lægger saa om den Klodser med cirkeldannede Fordybninger, som ved Bolte kunne skrues saa fast sammen,

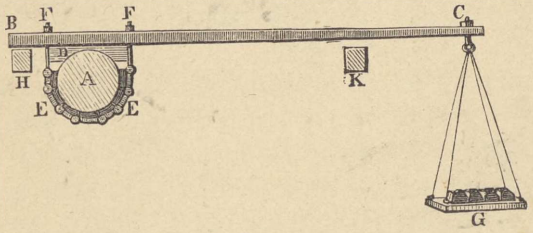


Fig. 48.

som man vil. Naar nu Maskinaksen drejes rundt, ville Klodserne og den lange Stang, som er befæstet dertil, ogsaa drejes, men forhindres i at komme ret langt med, idet Stangen møder et af de faste Støttepunkter $H$ og $K$. Man skruer nu Klodserne saa fast sammen, at Maskinen bevæger sig med sin sædvanlige Hastighed og hænger paa Stangen en

Vægt $P$, indtil Stangen selv kan holde sig fri over $H$ og $K$, medens Aksen drejes rundt inden i Klodserne. I dette Tilfælde holder $P$ Ligevægt mod Gnidningen ved Aksen, og Maskinens Arbejde er under hver Omdrejning at overvinde Gnidningsmodstanden gennem en Vej = Aksens Periferi, men Produktet af disse to Størrelser er, paa Grund af Ligevægtsbetingelsen, lig med $P. 2 \pi r$, naar $r$ er $P$s Arm med Hensyn til Aksens Centrum. Dette Produkt er derfor Maskinens Arbejde under en enkelt Omdrejning af Aksen. Gøres der $n$ Omdrejninger i Minuttet, bliver Arbejdet i et Sekund:

$$\frac{n. P. 2 \pi r}{60}$$

og dette divideret med 75 er Maskinens Hestekraft.

Et andet Dynamometer se Opg. 259.

## De molekulære Kræfter i faste Legemer.

**36. Delelighed.** Som bekendt kunne alle faste Legemer deles i mindre Dele, og denne Deling har man kunnet drive meget vidt; en Sølvstang af $3^{cm}$ Tykkelse og $20^{cm}$ Længde, som var forgyldt, lod sig saaledes trække tyndere, indtil den fik en Længde af 100 Mile, Forgyldningen var endda kendelig, skønt Guldets Tykkelse kun beløb sig til $^1/_{100\,000}{}^{mm}$. Ligeledes viser Naturen selv os Eksempler paa høj Grad af Delelighed; naar Moskus fordamper, kan Lugten fylde et meget stort Rum, uden at Mængden svinder synderligt.

Der er, navnlig i Kemien, Forhold, som tyde paa, at der er en absolut Grændse for Legemernes Delelighed, og skønt man ved Forsøg ikke er naaet til denne Grændse, tænker man sig dog alle Legemer bestaaende af meget smaa Dele, Molekyler, der ikke kunne deles yderligere ved mekaniske Midler, og som holdes sammen til et Hele ved Hjælp af en Tiltrækning mellem dem selv indbyrdes; det er denne Sammenhængskraft eller Cohæsion, man maa overvinde, naar man vil dele eller sønderrive et Legeme eller udvide det, som det let kan lade sig gøre med Kautschuksnore. Da alle Legemer ogsaa kunne sammentrykkes noget, men gøre Modstand derimod, maa Molekylerne kunne komme nærmere til hinanden, end de ere i naturlig Tilstand, og Modstanden imod Sammentrykningen forklarer man som

en Frastødning, der opstaar mellem Molekylerne indbyrdes, naar deres Afstande blive mindre end sædvanlig.

Disse molekulære Kræfter ville nu, naar et Legeme befinder sig i naturlig Tilstand og er overladt til sig selv, frembringe en stadig Ligevægtstilstand mellem Legemets Molekyler. Det er sandsynligt, at disse derved ordne sig paa en vis regelmæssig Maade i hvert enkelt Stof; herpaa tyder f. Eks., at en Mængde faste Stoffer udskille sig i bestemte regelmæssige Former, Krystaller, naar man opløser dem og bagefter lader Opløsningsmidlet fordampe; og disse Krystaller have ofte forskellige fysiske Egenskaber i forskellige Retninger.

I mange porøse Legemer som Svampe, Sukker, Klatpapir, findes der tydelige Mellemrum, hvorigennem Luftarter og Vædsker kunne trænge. Som oftest ere disse Mellemrum eller Porer dog saa smaa, at man kun kan se dem middelbart; man kan blæse gennem et Stykke Brænde, Kvægsølv kan presses gennem Træ, ja ved et stærkt Tryk kan man endog presse Vand igennem Metaller, som f. Eks. Sølv.

**37. Formforandring.** Naar der paa et Legeme virker ydre Kræfter, ville disse forandre den Ligevægtstilstand, som hidtil var opnaaet ved de molekulære Kræfter alene; de enkelte Molekyler ville da forandre deres indbyrdes Stilling, saa at Legemet faar en anden Form. Eftersom denne Forandring er forholdsvis lille eller stor, kalder man Legemerne haarde eller bløde; fra det haardeste, Diamant, er der jævn Overgang til de blødeste, som Voks, Ler, Smør og lign., og disse danne atter Overgang til de flydende Legemer, hvor den ringeste ydre Kraft kan forandre Molekylernes Ligevægtstilstand i en meget kendelig Grad.

Der er ligeledes megen Forskel paa, hvor store Forandringer Legemerne kunne taale uden at gaa i Stykker. Til de skøreste høre Glas, især naar det er pludselig afkølet (Glastaarer), Svovl, Kandis, Zink ved en bestemt Temperatur o. s. v.; saadanne Legemer kunne pulveriseres; andre som Kautschuck og Læder ere meget seje og kunne taale store Formforandringer. Mange Metaller som Guld,

Sølv, Kobber, Bly ere ligeledes i høj Grad smidige. En Blykugle kan man næmt hamre ganske flad. Mønter faa Præg ved at lægge det glatte Metalstykke mellem to Former, som presses sammen ved en Skrue, Knæpresse eller lignende. Tykke Metalplader strækkes ved at passere mellem to Valser under et stærkt Tryk; ved gentagen Valsning kan man faa dem tyndere og tyndere; Bladguld bliver tilsidst hamret ganske tyndt. Metaltraad frembringes ved at trække Stænger gentagne Gange gennem mindre og mindre Huller. Ved at indsmelte en Platintraad i en Sølvstang, trække det ud og opløse Sølvet i Salpetersyre frembringer man Traad saa tynd, at den kun kan ses under Mikroskop eller ved at glødes; den anvendes til Minesprængning. Nogle Metaller kunne underkastes alle disse

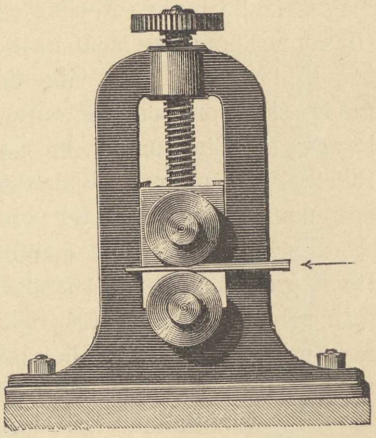

Fig. 49. Valsning.

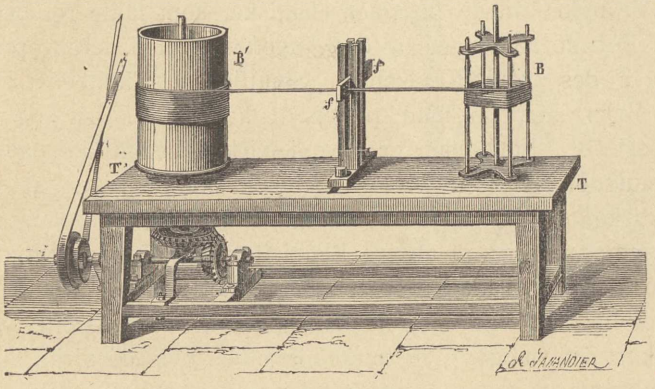


Fig. 50. Traadtrækning.

forskellige Behandlinger i kold Tilstand; men da de derved blive mere haarde og skøre, maa de udglødes, naar Opera-

tionen skal gentages. Andre Metaller behandles bedst varme; Smedejærn bliver saaledes i Glødhede saa blødt, at det kan smedes, valses, trækkes osv. Det samme gælder ogsaa andre Stoffer, som Glas, der ved Opvarmning til henimod Smeltepunktet bliver saa sejt og blødt, at det kan klippes og blæses i alle mulige Former, eller rulles ud til Plader (store Glasruder), omtrent som naar man ruller Kagedej.

Ved stærke Tryk ville de blødeste Metaller næsten forholde sig, som om de vare flydende. Naar man saaledes lægger en Blyklump i en Cylinder med et mindre Hul i Bunden, og udøver et stærkt Tryk derpaa med et Stempel, kan man presse Blyet ud som en sammenhængende Straale; og anbringer man midt i Hullet en mindre Prop, saa bliver Blyet presset ud som et langt Rør ligesom Makaroni; Proppen maa selvfølgelig fastgøres ved nogle Tværstænger, som Blyet maa passere, men Metallet lukker sig straks paa den anden Side, saa Røret bliver fuldstændig sammenhængende.

**38. Elasticitet.** Erfaringen viser, at naar et Legeme paa Grund af ydre Kræfter underkastes en Formforandring, og denne ikke overskrider visse Grændser, saa vil Legemet, naar Kræfterne ophøre at virke, vende tilbage til sin oprindelige Form. Denne Egenskab kaldes Elasticitet, men de forskellige Legemer have den i ulige Grad. Efter sædvanlig Sprogbrug kalder man kun de Legemer elastiske, som taale ret betydelige Formforandringer og dog bagefter antage deres oprindelige Form, som Kautschuk, Staalfjedre, Elfenben, Fiskeben osv., medens man plejer at kalde Bly, Ler og lign. uelastiske. Forholdet er dog i Virkeligheden det, at alle Legemer inden for visse Grændser kunne siges at være elastiske, men Grændserne ere undertiden meget snevre. Det er vanskeligt at angive Elasticitetsgrændsen nøjagtigt, da flere Ting have Indflydelse paa den; det kan f. Eks. godt ske, at et Legeme viser sig elastisk, naar de ydre Kræfter virke en kort Tid, medens de samme Kræfter, hvis de virke længe, frembringe en varig Formforandring.

Paa Legemernes Elasticitet beror Anvendelsen af Fjedre i Ure, Vogne, Sofaer, Dynamometre, ligeledes Anvendelsen af Kautschukvarer og Propper.

Formforandringer i faste Legemer kunne navnlig fremkomme ved Strækning, Sammentrykning, Bøjning eller Snoning.

**39. Strækning og Sammentrykning.** For at finde de Love, som gælde for Strækningen, har man fastgjort en Traad eller Stang af det Legeme, der skulde undersøges, saaledes at den hang lodret og i sin nederste Ende kunde bære Vægtlodder af forskellig Størrelse; hver Gang kunde det da umiddelbart maales, hvor meget Traaden strakte sig, og ved at tage Vægtlodderne bort kunde man se, om Traaden atter antog sin oprindelige Længde. Man har paa denne Maade fundet, at indenfor Elasticitetsgrændsen er Strækningen $s$ ligefrem proportional med Stangens Længde $l$ og med de spændende Vægte $P$, men omvendt proportional med Gennemsnitsfladen $f$, eller

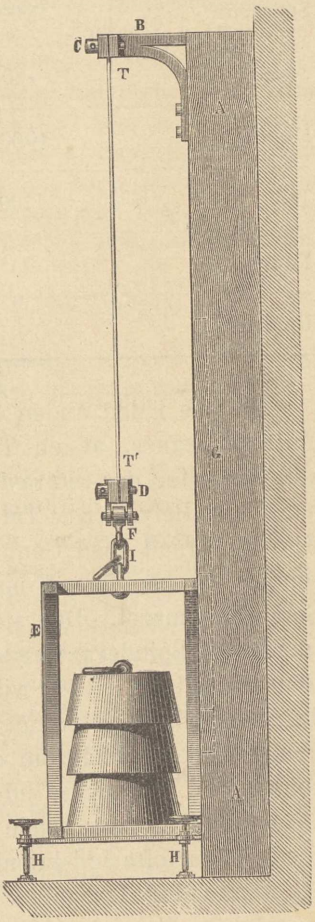


Fig. 51.

$s =$ en Konstant Gange $\frac{l\,P}{f}$.

Betegnes Konstanten ved $\frac{1}{\alpha}$, faar man

$$s = \frac{l\,P}{\alpha\,f};$$

$\alpha$ kaldes Elasticitetskoefficienten.

Den følgende Tabel angiver i den første Søjle Elasticitetskoefficienten for enkelte Stoffer, idet $f$ er udtrykt i Kvadratmillimeter, og $P$ i Kilo, medens $l$ og $s$ kun behøve at være ens benævnte.

| | Etasticitets-koefficient. Kilo pr. 1 □ mm | Elasticitets-grændse. Kilo pr. 1 □ mm | Fasthedskoefficient. Kilo pr. 1 □ mm |
|---|---|---|---|
| Smedejærn | 20000 | 15 | 40—70 |
| Støbejærn | 12000 | 10 | 10 |
| Staal | 20—30000 | indtil 60 | indtil 80 |
| Messing | 10000 | 13 | 50 |
| Træ | 1100 | 2 | 9 |
| Kautschuk | 0,1 | 0,5 | |
| Hampetov | | | *cr.* 5. |

Tallene i den anden Søjle angive, hvor mange Kilo man omtrent regner, at en Traad med Gennemsnittet 1 □ mm kan bære, før der indtræder en vedvarende Forlængelse, som har nogen Betydning. Tallene i sidste Søjle vise, hvor mange Kilo en Traad med Gennemsnit 1 □ mm kan bære uden at sønderrives; en Traad med Gennemsnittet *f* □ mm bærer *f* Gange saa meget. Den største Fasthedskoefficient har Cocontraade og Spindevævstraade; hvis en saadan Traad havde Gennemsnittet 1 □ mm, vilde den kunne bære 500 Kilo. De Tal, som findes i bægge de sidste Søjler, gælde for Metallernes Vedkommende om deres haardeste Tilstand, hvori de komme ved at trækkes ud til Traade; naar de ved Glødning blive blødere, kan baade Elasticitetsgrændsen og Fasthedskoefficienten ofte indskrænkes til Halvdelen eller Tredjedelen.

Ogsaa for Legemers Sammentrykning kan man bruge ovennævnte Formel, og Koefficienten er den samme som ved Strækning. Derimod er det Tryk, hvorved Legemerne knuses eller brydes, ofte meget forskelligt fra den Vægt, som kan sønderrive dem.

Ved skruedannede Fjedre har man ogsaa fundet Forlængelsen proportional med Trækket. Derfor faa Dynamometre med den Slags Fjedre samme Afstand mellem Delingsstregerne.

**40. Bøjning.** Anbringer man en prismatisk Stang i horizontal Stilling og lader den bære en eller flere Vægte, saa vil Stangen bøjes, og de Reaktioner, som herved fremkomme mellem Molekylerne, ville holde Ligevægt mod de Kræfter, der frembringe Bøjningen. Hvis Stangen kun er fastgjort i den ene Ende, ville de øverste Lag af Stangen strækkes, de nederste Lag derimod sammentrykkes; er Stangen understøttet i bægge Ender, bliver det modsatte Tilfældet, men under alle Omstændigheder kan man ved Hjælp af de Love, som bleve omtalte i forrige §, beregne, hvor meget Stangen bøjer sig for bestemte Kræfter, og hvor stor en Vægt Stangen kan bære; disse Resultater afhænge naturligvis af Stangens Længde og Gennemsnit. Lad os antage, at dette er et Rektangel med Bredde $b$ og Højde $h$, medens Længden af Stangen er $l$. Naar Stangen saa spændes fast i den ene Ende og i den anden bærer Vægten $P$, medens der ikke tages Hensyn til Stangens egen Vægt, saa vil den fri Ende bøje sig et Stykke under den horizontale Linje, som kan bevises at være lig med

$$\frac{4\,P\,l^3}{\alpha\,b\,h^3},$$

hvor $\alpha$ er den samme Elasticitetskoefficient som i forrige §. Den Vægt, Stangen kan bære uden at brydes i Stykker, udtrykkes derimod ved

$$\frac{\beta\,b\,h^2}{6\,l},$$

hvor $\beta$ er den i Tabellen angivne Fasthedskoefficient; i bægge Formler ere alle Linjer udtrykte i Millimetre og Kraften i Kilo. Dersom en Stang er løst understøttet ved bægge Ender, kan den uden at brydes bære 4 Gange saa stor en Vægt paa Midten. I bægge Tilfælde bliver Stangens Bæreevne dobbelt saa stor, dersom Vægten fordeles jævnt over hele Længden. Det ses af Formlerne, at Rektanglets Højde formindsker Bøjningen og forøger Fastheden i langt højere Grad end Bredden, hvilket hidrører fra, at jo længere de øverste og underste Dele ligge fra hinanden, desto mere maa de strækkes og sammentrykkes. Det samme er Tilfældet, naar Stangen har andre Gennemsnit; de Jærnbjælker, som i Praksis anvendes meget f. Eks. til at bære Lofter eller Broer, giver man derfor saadanne Gennemsnit, at det meste af Materialet ligger ved Over- og Underkanten, hvorved man opnaar, at Bjælkens Modstand ved Anvendelsen af en vis Mængde Materiale bliver saa stor som muligt. Det hyppigst anvendte Gennemsnit af saadanne Bjælker ses af hosstaaende Figur.



Fig 52.

Det forstaas nu ogsaa, hvorfor man giver selve Stangen i Vægtskaalen en forholdsvis stor Udstrækning i Højden, og hvorfor det ikke svækker Stivheden synderligt at tilspidse den som en Rombe og bortskære noget af det inderste.

**41. Snoning.** Med Hensyn til Snoningen af Traade eller Stænger

med cirkulært Gennemsnit har man baade ved Beregning og ved Forsøg fundet, at Snoningsvinklen kan udtrykkes ved Formlen

$$\varphi = \frac{S\,l}{\gamma\,r^4},$$

hvor $S$ er den Svingkrafts Moment, som bevirker Snoningen, og $l$ og $r$ Traadens Længde og Radius; $\gamma$ er en ny Konstant. For en bestemt Traad ere altsaa $\varphi$ og $S$ proportionale.

**42.** Kendskab til Legemernes Formforandringer og Elasticitetsforhold er af Vigtighed ved de fleste Bygningsforetagender, idet alle Dele maa være saa stærke, at de kunne taale de Tryk, de skulle udholde, uden Fare for Sønderbrydning. Men det gaar selvfølgelig ikke an at belaste Legemerne lige til Grændsen for, hvad de kunne taale. Den Regel, man følger, er at Legemerne aldrig maa belastes ud over Elasticitetsgrændsen, da Overskridelse af denne vil forringe Legemernes Fasthed; til yderligere Sikkerhed bydes de forskellige Materialer kun en Brøkdel af denne Belastning.

**43. Vedhængning eller Adhæsion.** Den Sammenhængskraft, der virker mellem et Legemes Molekyler, ytrer sig kun, naar Molekylerne ere i meget kort Afstand fra hinanden. Er Legemet brudt i Stykker, ville de enkelte Dele af det ikke mere holde hinanden fast, selv om man sætter dem sammen igen, fordi de to Overflader efter Bruddet ikke svare nøjagtig til hinanden. Vil man altsaa have to forskellige Legemer til at hænge sammen til et, maa man sørge for, at Overfladerne, som lægges paa hinanden, ere fuldkommen ens. Saaledes kunne to Spejlglasplader, som lægges paa hinanden, holde hinanden godt fast, fordi Fladerne ere plane; et Signet kan ofte hænge fast ved Lakket, som det trykkes ned i. Endnu bedre faar man to Legemer til at holde sammen, naar man foruden at afpasse Fladerne efter hinanden, fylder de uundgaaelige Mellemrum med et flydende Stof, der bagefter kan styrkne. Herpaa beror al Limning, Klistring, Lodning og lign., og man opnaar det bedste Resultat ved at bruge saa lidt Fyldemateriale som muligt. Ligeledes ville de ovennævnte Glasplader hænge bedre sammen, naar man aander paa dem.

Vedhængningen mellem to Legemer tiltager, naar disse blive nogen Tid i Berøring med hinanden. Naar saaledes to slebne Messingplader med Haandtag og af Størrelse 50 $\square^{cm}$ fettes ganske ubetydeligt og derefter presses sammen og hen-

ligge nogle Dage, kunne de tiltrække hinanden saa stærkt, at to Mennesker ikke kunne trække dem fra hinanden; naar Pladerne ere gode, behøves der et Træk paa 100—150 Kilo paa hver Side. Vedhængningen har Indflydelse paa Gnidningsmodstanden og er rimeligvis Aarsag til, at Gnidningskoefficienten er større ved Overgang fra Hvile til Bevægelse end under selve Bevægelsen.

Det beror paa Vedhængningen, at bløde Legemer f. Eks. to Voksklumper kunne æltes sammen, eller at to Stykker glødende Smedejærn kunne svejses sammen til et, idet Overfladerne ved Hamring bringes til at slutte tæt til hinanden.

Det skyldes ligeledes Vedhængningen, at Støv kan hænge paa Væggene, og at man kan skrive med Blyant og Kridt. (Plettering, Fortinning, Maling o. s. v.)

## Opgaver.

44. Fiskebens Elasticitetskoefficient er 600. Hvor meget udvides en Stang paa 24 cm Længde, 8 mm Bredde og 2 mm Tykkelse, dersom den bærer 50 Kilo i lodret Stilling?

Res. $^5/_4$ mm.

45. Hvorledes findes af de to første Søjler i Tabellen den største Udvidelse, en Stang kan faa, uden at Elasticitetsgrændsen overskrides?

46. Hvilken Vægt kan en Messingtraad af 2 mm Diameter bære uden at briste?

Res. 157 Kilo.

47. Hvor tyk maa en Messingtraad være for at bære 200 Kilo med en Sikkerhedsgrad = $^1/_5$ af, hvad den kan taale uden at briste?

Res. Diameter cr. 5 mm.

48. En Staaltraad af Diameter 2 mm vejer under Vand 20 Gram for hver Meter. Dersom en saadan Traad sænkes ned i Vand, hvor langt kan den da naa ned uden at briste? Fasthedskoefficienten sættes = 70.

Res. cr. 11000 m.

Kunde den naa længere, hvis den var tykkere paa hele sin Længde?

---

## Vædskers Ligevægt.

**44.** En Vædske adskiller sig fra et fast Legeme derved, at der er meget mindre Sammenhæng mellem de enkelte Dele, og ved at disse kunne bevæges mellem hinanden, uden at Vædsken ophører at være et Hele. Efter den Lethed, hvormed denne Bevægelse sker, kalder man Vædskerne let eller tungt flydende (Spiritus, Sirup). Vi ville i det følgende kun tale om Vædsker, der kunne betragtes som »fuldkommen flydende«, det vil sige saadanne, hvor Modstanden mod Molekylernes Bevægelse er forsvindende lille.

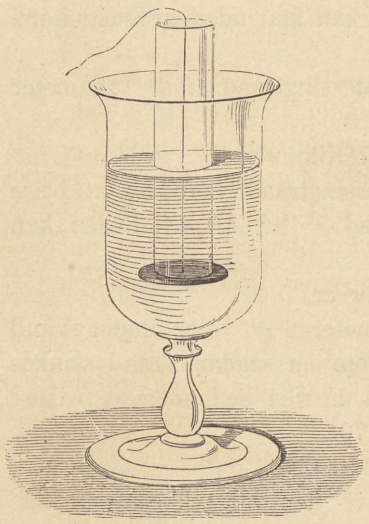

Fig. 53.

Paa Grund af Tyngdekraften vil enhver Vædske, som staar rolig i et Kar, udøve et Tryk paa Karret, og dette Tryk virker ikke alene paa Bunden men ogsaa paa Siderne og opad, dersom Karret har en saadan Form, at dette kan lade sig gøre. At disse Tryk virkelig finde Sted, viser sig, ved

at Vædsken løber ud af ethvert Hul, som findes paa Karret. Man ser ogsaa tydeligt det opadgaaende Tryk ved Boyles Ventil (Fig. 53), som bliver siddende, naar den slutter tæt til Cylindren og med denne nedsænkes i Vand.

Staar Vædsken rolig, maa Overfladen være vinkelret paa Tyngderetningen eller vandret, thi ellers vilde de øverste Vanddele paa Grund af Tyngdekraften glide ned ad den skraa Flade.

Der gives Tilfælde, hvor Vædskedelene paavirkes af andre Kræfter end Tyngden; i saadanne Tilfælde maa Overfladen af en lignende Grund som før paa ethvert Sted være vinkelret paa Resultanten af de Kræfter, som paavirke Molekylerne.

**45. Trykkets Størrelse.** For at finde den Lov, hvorefter en Vædskes Tryk forandrer sig, ville vi tænke os et Kar med et cylinderformet Udløbsrør, hvori der sidder et Stempel. Er der nu Vædske i Karret, kunne vi holde den i Ligevægt ved at trykke med en vis Kraft ind paa Stemplet. Betingelsen derfor finde vi ved at tænke os Stemplet bevæget ganske lidt indad, hvorved det udførte Arbejde maa være lige saa stort som den Energi, Kraften anvender dertil. Kaldes Stemplets Areal $A$, dets Tyngdepunkts Dybde under Vædskens Overflade $h$ og den Vej, det bevæges, $r$, saa er der gennem Højden $h$ løftet en Vædskemængde med Rumfang $Ar$; dens Vægt er proportional dermed, altsaa $= \alpha A r$, idet $\alpha$ er en Konstant, og det udførte Arbejde bliver $\alpha A r h$. Den af Kraften anvendte Energi er $Pr$, dersom $P$ betegner Trykket paa Stemplet; man faar derved

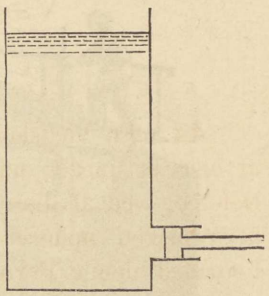

Fig. 54.

$$P = \alpha A h.$$

Denne Ligning viser, at Trykket for samme Stempel og samme Vædske kun afhænger af den lodrette Højdeforskel mellem den fri Overflade og Stemplets Tyngdepunkt; om Cylindren med Stemplet er vandret eller skraa eller anbragt paa et Siderør i opadgaaende Stilling, om den sidder umiddelbart paa Karret eller er forbunden dermed ved et længere Rør, det er

altsammen ligegyldigt, Trykket paa en bestemt Flade bliver i alle Tilfælde lig med Vægten af en Vædskesøjle, der har dette Areal til Grundflade, og hvis Højde er den lodrette Dybde, hvori Arealets Tyngdepunkt ligger under Vædskens Overflade. Det Punkt, hvori Trykket kan tænkes samlet, kaldes Trykcentret. Naar Fladen er vandret eller meget dybt nede, falder Trykcentret sammen med Tyngdepunktet. Konstanten $\alpha$ er forskellig for de forskellige Vædsker; den Værdi, den faar, naar man regner med Enhederne Gram og Centimeter, bliver netop den, vi senere lære at kende under Navn af Vægtfylde.

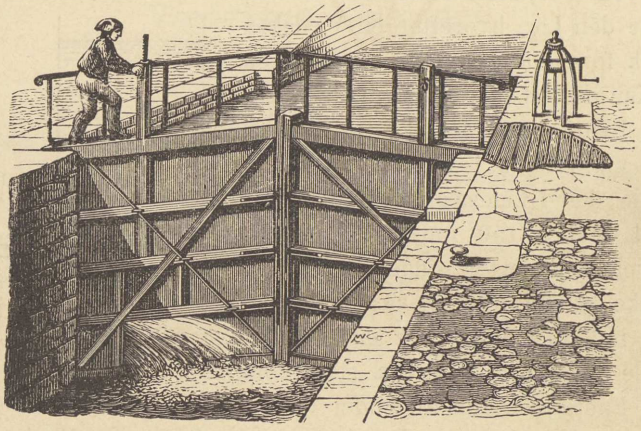

Fig. 55.

I store Dybder er Trykket meget betydeligt; derfor maa Dokportene, som i Ebbetiden skulle holde paa det Vand, der løber ind i Dokken under Flodtid, være meget solide; ligeledes Sluseporte (Fig. 55). At Trykket er uafhængigt af Karrets Vidde, har man anvendt til med en ringe Vædskemængde at udtrække Saften af visse Plantedele, idet de indesluttes i en Beholder, paa hvilken der skrues et langt tyndt Rør, som tillige med Beholderen fyldes med Vædsken.

**46. Bundtrykket, Pascals Kar.** Den i det foregaaende fundne Lov vises for Bundtrykkets Vedkommende ved Pascals Kar. Paa en Ring, som bæres af et Stativ, kan man skrue forskellige Kar uden Bund; Ringen er paa Undersiden

sleben plan, saa at en Metalplade kan lukke tæt for Karret, naar den presses op mod Ringen ved Hjælp af en Vægtstang og Lodder. Ved at benytte forskellige Kar og hælde Vand i dem, indtil Bundpladen falder fra, vil man altid faa den samme Trykhøjde, naar blot Lodderne ere de samme.

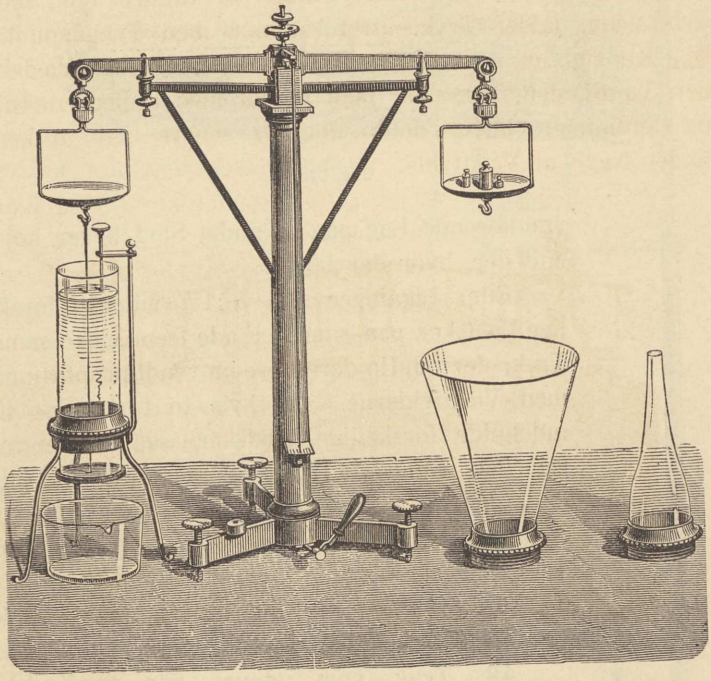

Fig. 56.

**47. Niveauflader.** Det følger af den nylig fundne Lov, at Trykket i en Vædske er ens overalt i samme vandrette Plan; enhver saadan Flade kaldes en Niveauflade. Ved den fri Overflade er der intet Vædsketryk, den er altsaa selv en Niveauflade, og naar man forbinder flere Beholdere ved Sideledninger, saa Vædskerne i dem udgøre et Hele, maa alle de fri Overflader ligge i samme vandrette Plan. Herpaa grunder sig f. Eks. Nivelerapparatet (Fig. 57), Vaterpasset, Anlæg af Vandværk og Vandstandsrøret ved Dampkedler. Dersom flere Vandmasser i Naturen, Brønde, Søer eller Aaer, staa i Forbindelse med hinanden, vil Vandet

søge at stille sig lige højt i dem alle. At Vandet kan stige op i en artesisk Brønd, beror paa, at det underjordiske

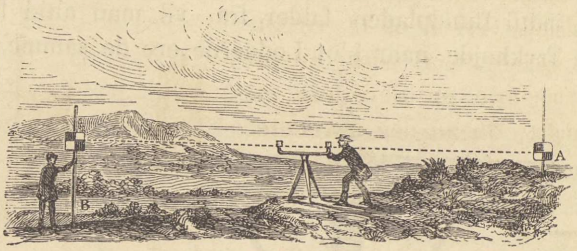


Fig. 57.

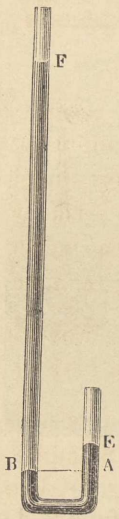


Fig. 58.

vandførende Lag paa et andet Sted ligger højere end der, hvor der bores.

Efter Ligningen $P = \alpha A h$ ville to forskellige Vædsker paa samme Flade frembringe samme Tryk, dersom Højderne ere omvendt proportionale med Vægtfylderne. Og hvis to forbundne Kar indeholde forskellige Vædsker, saa tænker man sig den vandrette Plan gennem deres Skilleflade, og det er da, i Tilfælde af Ligevægt, nødvendigt, at Vædskerne over denne udøve samme Tryk paa det samme Areal, hvilket kræver, at de lodrette Højder over den nævnte Plan forholde sig omvendt som Vædskernes Vægtfylder (Fig. 58).

**48. Tryk, som udøves paa en Vædskes Overflade udefra.** Det er en bekendt Erfaring, at naar man fylder en Flaske helt med Vand, sætter Proppen paa og derpaa slaar denne ned mod Vandet, saa springer Flasken; dette viser, at Trykket forplanter sig ned i Vædsken og ud til Siderne. Ligeledes kan man sprænge store Klodser af Jærn eller Sten ved at bore et Hul i dem, fylde dette med Vand og drive en tætsluttende Jærnkile derned. (Cartesianske Djævle).

For at finde Reglen i dette Tilfælde, tage vi to forbundne Rør, i hvilke der findes en Vædske, som afspærres i bægge Rør af tætsluttende Stempler. For ikke at tage Hensyn til Tyngden, tænke vi os foreløbig Vædsken uden

Vægt. Paa hvert Stempel ville vi udøve et Tryk, saaledes at der er Ligevægt, og Betingelsen derfor findes som sædvanlig. Kaldes Stemplernes Arealer $A$ og $B$, og de paa disse hvilende Tryk $P$ og $Q$, vil en lille Bevægelse $r$ af det første Stempel medføre en Bevægelse $s$ af det andet; da nu den anvendte Energi maa være lig det udførte Arbejde, bliver $Pr = Qs$, men Rumfanget $Ar$ maa være lig Rumfanget $Bs$, saa Ligevægtsbetingelsen bliver

$$\frac{P}{A} = \frac{Q}{B}.$$

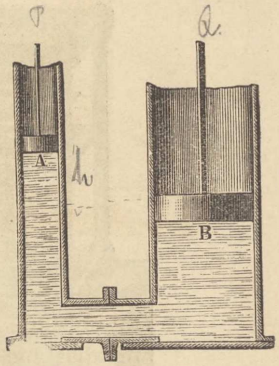

Fig. 59.

Trykkene ere altsaa proportionale med Arealerne, eller med andre Ord, et Tryk, som udøves paa et vist Areal, forplanter sig gennem Vædsken med uforandret Størrelse til ethvert andet lige saa stort Areal. Tager man nu Hensyn til Vædskens Vægt, bliver Trykket paa det nederste Stempel saa meget større, som svarer til Niveauforskellen $h$ mellem $A$ og $B$; man faar derved $\frac{Q}{B} = \frac{P}{A} + \alpha h$. Forsøgene godtgøre Lovens Rigtighed.

Herpaa grunder sig den hydrauliske Presse, som væsentlig bestaar af to forbundne Beholdere med ulige store Stempler. Ved at bevæge det lille ned, løftes det store op, og det kan derved udøve et betydeligt Tryk mod en ovenover liggende Flade, (Fig. 60). For at kunne løfte det store Stempel mere og mere maa den lille Cylinder forsynes med Ventiler ligesom en Trykpompe. Til yderligere Kraftbesparelse kan det lille Stempel bevæges ved en Vægtstang. Saadanne Presser anvendes i Klæde-, Papir-, Sukker-, Olie- og Stearinfabrikker; fremdeles til at krumme Panserplader og til at løfte meget tunge Byrder, indtil 1 Million Kilo. Det samme Princip anvendes til at prøve Styrken af Dampkedler, Tove og Kæder.

Forsøg have vist, at naar Vædsker underkastes et stort Tryk, formindskes deres Rumfang, det vil sige, at Delene

presses nærmere til hinanden. Forandringen er meget ubetydelig (knap $^1/_{20\,000}$ for en Atmosfæres Tryk) og derfor ikke

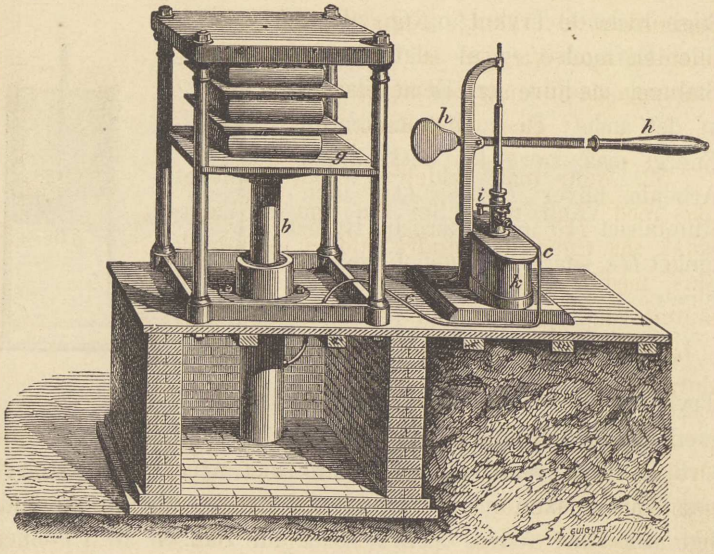


Fig. 60.

let at iagttage ved smaa Tryk, men den Elasticitet, som Molekylerne udfolde ved Sammentrykningen, er netop Skyld i, at Trykket forplanter sig i alle Retninger. Dersom man tager det Apparat, som blev omtalt i Slutningen af § 45 og lukker Røret forneden med en Hane, saa bevarer Vandet i Beholderen den Spændkraft, der svarer til den forrige Trykhøjde.

## Opgaver.

49. Hvor stort er Trykket paa Bunden og paa Sidefladen af et cylindrisk Kar, naar det har Diametren 1 dm, og Vandet staar $^1/_2$ m højt?

Res. 3,927 Kilo; 39,27 Kilo.

50. Hvilket Tryk vilde en Fisk, hvis Overflade sættes til 1 □ dm, være underkastet i en Dybde af 8 Kilometer (omtrent 1 Mil), forudsat at Vandets Vægtfylde i den Dybde er uforandret?

Res. 80000 Kilo.

51. Et Stigbord i en Sluse har Bredden $1^m$, Højden $^3/_4{}^m$ og vejer 10 Kilo, naar det er nedsænket i Vand. Vandet staar $^5/_8{}^m$ over Stigbordets Overkant. Naar Gnidningskoefficienten mod Væggen er 0,6, hvilken Kraft skal man da anvende for at hæve Stigbordet?

Res. 460 Kilo.

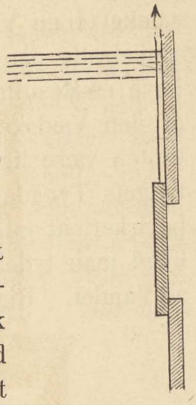

Fig. 61.

52. Naar man fylder et opad tilspidset Glas med Vand og stiller det paa en Vægtskaal, saa vejer det mindre end et cylindrisk Glas med samme Vidde forneden og med samme Vandstand inden i, skønt Bundtrykket i bægge Tilfælde er ens. Hvorledes forklares det?

53. En plan Flade befinder sig nede i Vand. Bevis, at Vandtrykkets Komposant i en bestemt Retning er lig det Tryk, som Vandet kunde udøve paa det Areal, der fremkommer ved at projicere den oprindelige Flade paa en Plan gennem dens Tyngdepunkt vinkelret paa den givne Retning.

Særligt skal det bevises, at det nedadgaaende Tryk paa en lille skraa Flade er lig Vægten af det Vand, som ligger lodret over den.

54. En plan Flade holdes i en skraa Stilling i Vand. I ethvert Punkt af Fladen oprejses en Vinkelret lig med Punktets Afstand fra Overfladen. Vis at Vægten af det derved bestemte Rumfang Vand har samme Størrelse som hele Trykket paa Fladen, og at Trykcentret er Projektion af Rumfangets Tyngdepunkt.

55. I en hydraulisk Presse er det lille Stempel $2^{cm}$ i Diameter; det er anbragt paa en Vægtstang, som bevæges, ved at en Mand trykker med 25 Kilo paa et Sted af Vægtstangen, som er 10 Gange længere fra Hvilepunktet end det Sted, hvor Stemplet er anbragt. Det store Stempel bringes derved til at udøve et Tryk af 36000 Kilo. Hvilket Gennemsnit har det?

Res. $24^{cm}$.

**49. Arkimedes' Princip.** Ethvert Legeme, som er nedsænket i en Vædske, modtager fra alle Sider Tryk, der ere vinkelrette paa Overfladen; alle disse Tryk maa nødvendigvis have en Resultant, og da Trykkene netop kunne bære Vægten af den Vædskemængde, Legemet har fortrængt, maa Resultanten være lig denne Vægt og gaa lodret op gennem Rumfangets Tyngdepunkt; denne Resultant kaldes Opdriften og bevirker, at ethvert Legeme vejer mindre i Vand end i Luft, hvad man tydeligt mærker, naar man løfter en tung Sten op af Vandet. Rigtigheden af Arkimedes' Lov kan man paavise ved at hænge en hul Cylinder op under den ene Skaal paa en Vægtstang og derunder en massiv Cylinder, som passer i den forrige. Naar man nemlig afbalancerer bægge Dele, vil man finde, at Vægten formindskes, dersom man lader den massive Cylinder hænge ned i Vand, og at Ligevægten atter bringes til Veje, naar man fylder Vand i Hylstret.

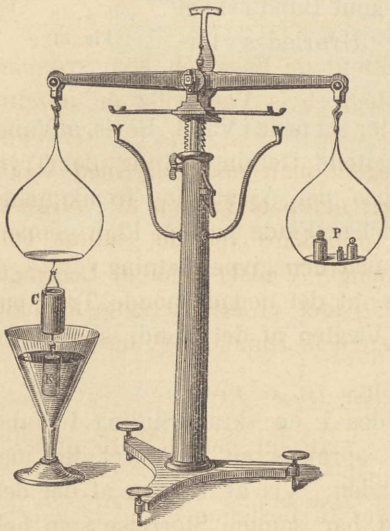

Fig. 62.

Det kan ofte ske, at Opdriften er større end Legemets egen Vægt; naar et saadant Legeme nedsænkes i Vædsken og overlades til sig selv, vil det stige op til Overfladen og lægge sig i en saadan Stilling, at det fortrængte Vand netop vejer lige saa meget som Legemet, og da Opdriften er rettet gennem den fortrængte Vædskes Tyngdepunkt, maa dette ligge i samme lodrette Linje som Legemets eget Tyngdepunkt; thi kun da kunne de to Kræfter, Opdrift og Vægt, holde hinanden i Ligevægt. Legemet kan derfor kun ligge i bestemte Stillinger paa Vædskens Overflade, og der gives her baade stadige, ustadige og ligegyldige

Ligevægtsstillinger. Det kan bevises, at Ligevægten altid er stadig, naar Legemets Tyngdepunkt er neden under den fortrængte Vædskes; det er derfor, at Skibe ballastes, og at den tungeste Del af Ladningen lægges i Bunden; naar Legemets Tyngdepunkt derimod er det øverste, kan Ligevægten være enten stadig eller ustadig.

**50. Vægtfylde.** Ved et Legemes Vægtfylde forstaar man det ubenævnte Tal, som angiver Forholdet mellem Legemets Vægt og Vægten af et lige saa stort Rumfang destilleret Vand ved 4° Varme. Betegne vi Vægtfylden ved $f$, Legemets Vægt ved $p$, Vandets ved $a$, have vi altsaa

$$f = \frac{p}{a}$$

Størrelsen $a$ er = Opdriften; de Legemer, som svømme oven paa Vand, ere altsaa dem, hvis Vægtfylde er mindre end 1.

I denne Sammenhæng regner man sædvanlig med Vægtenheden Gram, og da nu 1 gr. netop er Vægten af en Kubikcentimeter Vand, saa vil $a$ udtrykkes ved det samme Tal, som Rumfanget af den fortrængte Vædske eller af Legemet, naar dette maales i cub.$^{cm}$. Idet vi altsaa regne med de omtalte Enheder og kalde Legemets Rumfang $r$, have vi

$$f = \frac{p}{r} \quad \text{eller} \quad p = fr.$$

Af det sidste Udtryk ser man, at den i § 45 omtalte Konstant $\alpha$ netop er Vægtfylden.

Formlen $p = fr$ anvendes til Bestemmelse af Legemers Rumfang, naar man forud har fundet deres Vægt og Vægtfylde, eller til Beregning af Vægten, naar Rumfanget og Vægtfylden ere bekendte.

**51. Bestemmelse af Vægtfylden.** For at bestemme et fast Legemes Vægtfylde vejer man det først paa sædvanlig Maade; derefter hænges det ved en tynd Metaltraad eller et Hestehaar, som ikke suger Vand til sig, op i en Krog paa den ene Vægtskaal og vejes nedsænket i Vand; Vægttabet er da Opdriften, og divideres den ind i Vægten, faar man Vægtfylden. Herved er dog at bemærke, at dersom det anvendte destillerede Vand har en anden Varmegrad end 4°, saa maa

der foretages en lille Rettelse ved det fundne Resultat. Det Forhold, der er fundet, er nemlig, naar $t$ er Varmegraden,

$$f_t = \frac{p}{a_t};$$

betegner nu $\delta_t$ Vægtfylden af Vand ved $t^0$, saa har man

$$\delta_t = \frac{a_t}{a_4}$$

og derved den rette Vægtfylde af Legemet ved Forsøgstemperaturen

$$f = f_t \cdot \delta_t .$$

Det er altsaa nødvendigt for alle Tilfældes Skyld, at man kender Vægtfylden af destilleret Vand ved forskellige Varmegrader; hvorledes man i det Hele taget finder Vægtfylden af Vædsker, skal nedenfor vises.

Hvis Legemet er opløseligt i Vand, maa man først bestemme dets Vægtfylde i Forhold til en anden Vædske, hvori det ikke opløses, og saa multiplicere det fundne Resultat med Vædskens Vægtfylde.

Dersom Legemet svømmer oven paa Vand, kan man forbinde det med et andet Legeme, f. Eks. et Stykke Bly med bekendt Vægt og veje bægge tilsammen under Vand. Det derved fundne Vægttab $a$ er Vægten af det Vand, bægge Legemer fortrænge. Herfra maa da subtraheres Vægten af det Vand, som Blyet alene fortrænger, og som findes ved en ny Vejning eller ved Beregning; er dette $b$, bliver den søgte Vægtfylde

$$f = \frac{p}{a - b}$$

En anden Maade at bestemme Vægtfylden paa er ved at anvende en Flaske eller et Glas (Pyknometer, Fig. 63), hvis Vægt $q$ man kender, naar den er fyldt med Vand. Man kommer Legemet, hvis Vægt er $p$, i Flasken og fylder den derefter med Vand; dersom Vægten heraf er $Q$, vil $q + p - Q$ være Vægten af en Vandmængde med samme Rumfang som Legemet, hvis Vægtfylde derfor er

$$f = \frac{p}{q + p - Q}.$$

Det kommer ved Forsøg af denne Art an paa, hver Gang at have Flasken nøjagtig fuld; den lukkes derfor med en tilsleben Glasprop, som tillige ofte indrettes som et Termometer; naar saa Proppen sættes ned i Halsen af den helt fyldte Flaske, vil der presses en Del Vand ud gennem et lille Udløbsrør, hvorved der altid bliver den samme Mængde tilbage. Flasken maa selvfølgelig tørres godt af, og der maa tages Hensyn til det anvendte Vands Varmegrad. Ved denne Fremgangsmaade finder man navnlig Vægtfylden af fint fordelte Ting, som Sand eller lign.

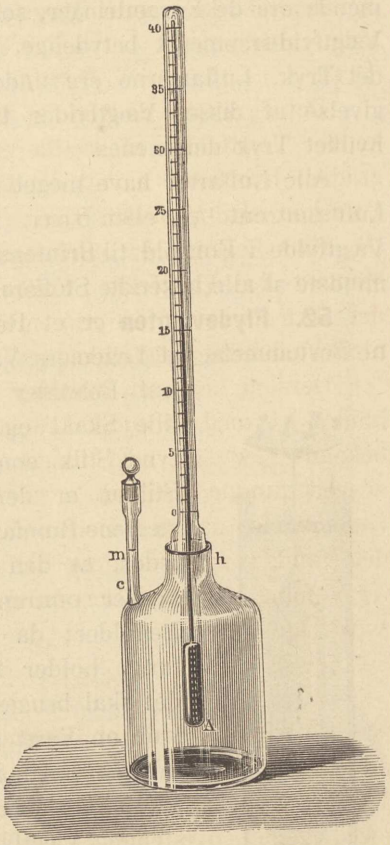

Fig. 63.

Vædskers Vægtfylde bestemmes bedst ved Hjælp af en lignende Flaske; dersom denne vejer $m$, naar den er tom, $q$ naar den er fyldt med Vand, og $p$ naar den er fyldt med en anden Vædske, vil dennes Vægtfylde være

$$f = \frac{p - m}{q - m}.$$

Luftarters Vægtfylde findes ligeledes ved Hjælp af en Flaske eller Kolbe, som er forsynet med en tætsluttende Hane. Man vejer Kolben fyldt med Luftarten, hvorefter denne pompes ud ved Hjælp af en Luftpompe, og Kolben vejes lufttom, endelig vejes den fyldt med Vand, og af disse Resultater beregnes Vægtfylden.

Det er flere Gange omtalt, at man ved Vægtfyldebestemmelser maa tage Hensyn til Varmegraden. Da Varmen som

Regel udvider alle Legemer, ville Vægtfylderne være mindre ved højere Varmegrader. Forandringerne ere imidlertid smaa for de faste Legemers Vedkommende, noget større for Vædskernes. For destilleret Vand har man fundet, at den samme Vægtmængde har sit mindste Rumfang ved 4° C; ifølge Definitionen har dette Vand Vægtfylden 1, ved alle andre Varmegrader er Vægtfylden mindre. For Luftarters Vedkommende ere de Forandringer, som Varmegraden frembringer i Vægtfylden, meget betydelige, og da det samme gælder om det Tryk, Luftarterne ere underkastede, maa man ved Angivelse af disses Vægtfylder tilføje, hvilken Varmegrad og hvilket Tryk der menes.

Alle Luftarter have meget smaa Vægtfylder; atmosfærisk Luft omtrent $^1/_{774}$ eller 0,0013; man plejer at udtrykke deres Vægtfylde i Forhold til Brintens, hvis Vægtfylde 0,00009 er den mindste af alle bekendte Stoffers. (Se mere herom § 67 og 70).

**52. Flydevægten** er et Redskab, som særlig anvendes til Bestemmelse af Legemers Vægtfylde. Den bestaar af en hul Beholder $A$, som forneden bærer en lille Skaal og forlænges opad i en meget tynd Stilk, som bærer en anden Skaal; paa Stilken er der et tydeligt Mærke. Flydevægtens Rumfang og Vægt ere afpassede saaledes, at den svømmer oven paa Vand og synker omtrent til Midten af den tomme Beholder; da den nederste Skaal er særlig tung, holder Apparatet sig lodret. Naar det skal bruges, bestemmer man først, hvor stor en Vægt $Q$ man maa lægge paa den øverste Skaal, for at Flydevægten kan synke til Mærket paa Stilken. Vil man saa bestemme Vægtfylden af et lille fast Legeme, kan man bruge Flydevægten selv til at veje Legemet, idet dette lægges paa den øverste Skaal sammen med saa mange Vægtdele $q$, at Vandet igen staar til Mærket. Vægten er da $Q - q$. Derefter flyttes Legemet til den underste Skaal, hvorved Flydevægten

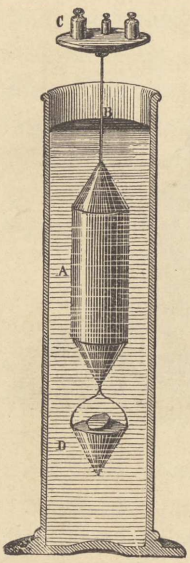

Fig. 64.

stiger, men ved yderligere at lægge nogle Vægtdele $m$ til paa den øverste Skaal bringes den atter til at synke til Mærket; $m$ er derfor Legemets Opdrift, og dets Vægtfylde er

$$f = \frac{Q - q}{m}.$$

Skal Flydevægten bruges til Bestemmelse af en Vædskes Vægtfylde, maa man kende dens egen Vægt $P$; derefter bestemmes, hvilken Vægt $Q$ der faar Flydevægten til at synke til Mærket, naar den svømmer i Vand, og ligeledes den Vægt $S$, som faar den til at synke til Mærket i den anden Vædske; den lille Skaal forneden er i dette Tilfælde unødvendig. Den søgte Vægtfylde bliver

$$f = \frac{P + S}{P + Q};$$

thi den fortrængte Vædske har bægge Gange ens Rumfang og vejer netop lige saa meget som Flydevægten med Lodderne.

**53. Flydevægten med uforanderlig Vægt** har Form, som hosstaaende Figur viser, og bestaar ogsaa af en hul Beholder med Ballastkugle, men ender foroven i en længere og noget tykkere Stilk. Man kan ved dette Redskab meget let og hurtigt kende Forandringer i en Vædskes Vægtfylde; thi jo tungere Vædsken er, desto højere flyder Apparatet derpaa, da det altid fortrænger et Rumfang Vædske, der vejer lige saa meget som det selv. Det bruges hyppigt til at undersøge, om Mælk er forfalsket, og til at prøve Fortyndingen af Spiritus. I første Tilfælde vil Flydevægten synke desto dybere, jo mere Vand der er kommen i Mælken, da dennes Vægtfylde er større end Vands; det omvendte er Tilfældet med Spiritus. Paa de her til Lands brugelige Brændevinsmaalere er Stilken delt i 16 saakaldte Grader, som skal forstaas paa den Maade, at f. Eks. 7° Brændevin er dannet af 7 Rumfang Spiritus og 9 Rumfang Vand. Paa lignende Maade anvendes denne Slags Flydevægte til at prøve Saltopløsningers Koncentration og Syrers Vandholdighed. Man kan ogsaa indrette dem til

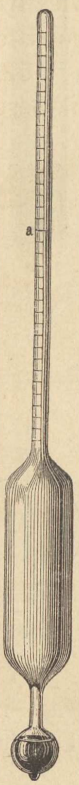

Fig. 65.

direkte at aflæse Vægtfylden, idet man afsætter denne paa de Steder af Stilken, hvortil man ved Forsøg har fundet, at den synker i Vædsker med bekendte Vægtfylder.

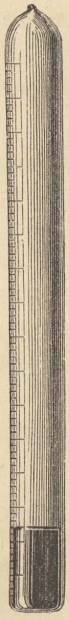

Fig. 66

Fig. 66 viser en simpel Flydevægt, som man kan eftergøre af et Reagensglas med lidt Kvægsølv i.

Tabel over enkelte Legemers Vægtfylde:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Platin | 22. | Flintglas | cr. $3^1/_2$. |
| Guld | 19,3. | Flaskeglas | cr. $2^1/_2$. |
| Bly | 11,4. | Aluminium | 2,6. |
| Sølv | 10,5. | Is | 0,9. |
| Kobber | 8,9. | Kork | cr. $^1/_4$. |
| Messing | 8,4. | Kvægsølv | 13,6. |
| Staal | cr. 7,8. | Mælk | 1,03. |
| Smedejærn | cr. 7,8. | Havvand | 1,026. |
| Støbejærn | cr. 7,2. | Petroleum | 0,84. |
| Tin | 7,3. | Absolut Alkohol | 0,8. |
| Zink | 7.2. | Æter | 0,7. |

Af Luftarterne mærkes

| | | | |
|---|---|---|---|
| Atmosfærisk Luft | 0,0013. | Brint | 0,000 09. |

Med Brintens Vægtfylde som Enhed har man

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ilt | 16. | Klor | 35,5. |
| Kvælstof | 14. | Ammoniak | 8.5. |
| Atmosfærisk Luft | 14,4. | Kulsyre | 22, |

alt ved samme Varmegrad og Tryk.

## Opgaver.

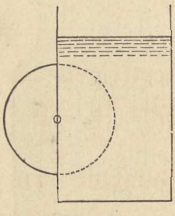

Fig. 67.

56. En Cylinder af Form som en Slibesten, der kan dreje sig om en vandret Akse, rager halvt ind i en Vandbeholder gennem et firkantet Hul, hvis Rande slutte tæt til Cylindren. Vil nu Opdriften bevirke, at Cylindren drejer sig rundt, saa der fremkommer et perpetuum mobile?

57. Paa en Vægtskaal staar der et Glas Vand, som er bragt i Ligevægt ved Lodder paa den anden Skaal. Hvad sker der, naar man stikker Fingeren ned i Vandet?

58. Hvorledes omdannes Formlen $f = \frac{p}{r}$, naar man

regner med Enhederne Kilo og Kubikmeter; hvad bliver Formlen til, naar man tager Kilo og Liter?

59. En Flydevægt svømmer i Vand, men synker i Petroleum. Naar den ligger roligt paa Vand, og man langsomt hælder Petroleum ovenpaa, hvorledes forandrer da Flydevægten sin Stilling?

60. Hvor stor en Del af et Legeme, hvis Vægtfylde er $< 1$, er under Vand?

61. Hvor mange Gange er Kvægsølv vægtfyldigere end atmosfærisk Luft?

Res. c. 10500.

62. En Liter konc. Svovlsyre vejer 1,533 Kilo, hvad er dens Vægtfylde?

63. Hvor lang er en Kobbertraad, som vejer 1 Kilo og er $2^{mm}$ tyk?

Res. $35{,}8^{m}$.

64. Hvad kan et Menneske løfte i Luften, naar han i Vand kan løfte en Byrde paa 150 Kilo af en Vægtfylde $2^1/_2$?

Res. 90 Kilo.

65. Den Del af et Isbjærg, som er over Vand, har Form som et retvinklet Parallelepipedum med Højden $5^{m}$, Længden $200^{m}$ og Bredden $100^{m}$. Hvilken Byrde kunde det bære uden at synke helt under Vand? (Vandreblokkene fra Istiden).

Res. 100 Millioner Kilo.

66. Hvor megen Kork behøves der til at bære et Legeme oppe, som vejer 72 Kilo og har Vægtfylden 1,2?

Res. 4 Kilo.

67. En Blanding af Guld og Sølv har Vægtfylden 16. Dersom Guldets Vægtfylde sættes til 20, Sølvets til 10, i hvilket Forhold ere da Metallerne blandede?

Det antages, at Blandingen har samme Rumfang som Delene tilsammen.

Res. 3 Gange saa meget Guld som Sølv.

68. Et Stykke Messing vejer 16,8, et Stykke Voks 1,94. Bægge Dele tilsammen veje under Vand 14,74. Hvad er Voksets Vægtfylde?

Res. 0,97.

69. Stilken paa en Flydevægt med uforanderlig Vægt er over det Nulpunkt, hvortil den synker i Vand, inddelt i lige store Grader. Dersom det Rumfang, som svarer til en Grad, er $^1/_{100}$ af det Rumfang, som er under Nulpunktet, hvad er da Vægtfylden af en Vædske, hvori Flydevægten synker til Mærket 25?

Res. $^4/_5$.

70. Hvorledes kan man paa en Flydevægt af samme Art finde Forholdet mellem 1 Grads Rumfang og Rumfanget under Nulpunktet?

**54. Sammenhængskraft, Vedhængning, Overfladespænding.** Skønt Sammenhænget mellem en Vædskes Molekyler er ringe, kan man dog let mærke det f. Eks. ved at lægge en ren Glasplade paa Vand og derefter rive den fra; man mærker herved tydeligt en Modstand, og da Glaspladen bagefter er befugtet af Vandet, er det netop dettes Sammenhængskraft, man har overvundet. Dette simple Forsøg viser desuden, at der imellem Glasset og Vandet maa findes en Vedhængning, som er endnu større, siden Vanddelene rives fra hinanden. Ved andre Stoffer, som Glas og Kvægsølv eller fettet Glas og Vand, er Forholdet et andet; gør man nemlig med disse det samme Forsøg, mærker man atter en Modstand, men da Pladerne i disse Tilfælde ikke befugtes, er det Vedhængningen, man overvinder, medens Vædskens Sammenhæng er større end denne.

Sammenhænget i Vædskerne maa betragtes som en Tiltrækning mellem de mindste Dele. Man forestiller sig det bedst, som Vædskemolekylerne vare nogle smaa elastiske Kugler, forbundne to og to med udspændte elastiske Snore. Derved sammenpresses hele Vædsken, idet Molekylerne klemmes ind mod hinanden. Da Trykket overalt skyldes de gensidige Tiltrækninger mellem Molekylerne, maa det tabe sig ved Vædskens Grændser og kan derfor ikke virke paa Bunden eller Siderne af det Kar, hvori Vædsken findes, og heller ikke paa Legemer, der ere nedsænkede deri.

I Vædskehinder fremkommer der paa Grund af Sammenhængskraften en ejendommelig Spænding, som man lettest

forstaar ved at tænke sig Hinden som et enkelt Lag af Smaakugler forbundne ved udspændte elastiske Snore. En saadan Hinde vil altid søge at trække sig sammen, og hvis den er plan, kan den kun være i Ligevægt, naar den er fastgjort ved Randen. Man ser dette tydeligt ved følgende Forsøg. *A B C* forestiller en Ramme af Form som en Sektor, *C D* er en bevægelig Radius. Naar Rummet *B C D* fyldes med en Hinde af Sæbevand, mærker man Spændingen, thi slipper man Radien, trækker Hinden sig sammen og tager den med sig. Paa samme Maade vil Hinden i en Sæbeboble*) søge at trække sig sammen, hvorved den udøver et Tryk paa den indelukkede Luft. Jo mere krum Hinden er, desto større er dette Tryk; Sæbeboblen antager derfor altid Form af en Kugle, thi kun den kugleformede Overflade kan overalt udøve det samme Tryk. Hvis Sæbeboblen endnu sidder paa Kridtpiben, og man tager denne ud af Munden, vil Spændingen i Hinden bevirke, at den trækker sig sammen, indtil den bliver plan.

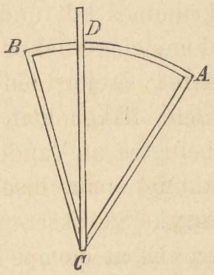

Fig. 68.

Hvad der sker med en Hinde, finder ogsaa Sted i det yderste Lag af Molekyler i enhver Vædskemasse, det vil sige i Overfladen; denne kan derfor betragtes som en udspændt elastisk Hinde. Heraf følger, at Vædsken altid antager Kugleform, naar dens Vægt er ubetydelig som ved smaa Draaber, eller naar den ophæves ved at anbringe Vædsken i en anden Vædskemasse af samme Vægtfylde. Paa denne Maade kan en større Oliemængde bringes til at flyde i en passende Blanding af Spiritus og Vand, og den vil da altid antage Kugleformen.

Paa lignende Maade som Draaber i Luften ville ogsaa smaa Luftbobler i Vand forme sig som Kugler, og Luften vil være underkastet et Tryk, som bliver større og større,

*) En Opløsning af grøn Sæbe i Vand eller endnu bedre af medicinsk Sæbe ($^1/_{30}$) i destilleret Vand, hvortil sættes lidt Glycerin ($^1/_8$), er særlig tilbøjelig til at danne seje og varige Hinder.

jo mindre Kuglen er. Dette viser sig tydeligt, naar man prøver paa at puste Luft ned i Kvægsølv gennem et Rør, der ender i en fin Spids; den udtrædende Luftblære vil møde en Modstand, som det er meget vanskeligt at overvinde.

Overfladespændingen er ogsaa Aarsag til, at en Synaal kan ligge paa Vand uden at synke, idet Overfladen blot krummes lidt under Naalen. Overfladen viser tillige en ejendommelig Stivhed; thi naar Synaalen i Forvejen er magnetiseret, drejer den sig ikke hen i den magnetiske Meridian; men stikker man den ind i et Stykke Papir, saa det hele befugtes af Vandet, drejer den sig straks. Af samme Grund kunne smaa Insekter gaa paa Vand uden at synke i. Et mærkeligt Eksempel paa Overfladestivheden er den Evne, Olie har til at dæmpe Bølgebevægelsen. Endog meget oprørt Vand bliver hurtig roligt, naar der udkastes en Del Olie derpaa, idet denne udbreder sig som et tyndt Lag.

**55. Vedhængning til Siderne af et Kar.** Naar en Vædske staar rolig i et Kar, vil Overfladen paa Grund af Vedhængningen sjelden blive vandret ved Karrets Sider. Lad os nemlig betragte et Molekyl i Overfladen i en Afstand fra Karret, som er mindre end den største Afstand, hvori den molekulære Virkning kan finde Sted. Karrets Tiltrækning maa da paa Grund af Symetrien være vinkelret paa Sidefladen, Vædskemolekylerne maa tilsammen trække nedad til

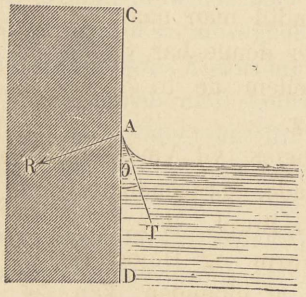


Fig. 69.

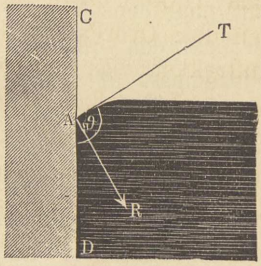


Fig. 70.

højre (se Fig. 69 og 70), og endelig paavirkes Molekylet af Tyngden. Overfladen maa være vinkelret paa Resultanten af de tre Kræfter, men denne kan have forskellig Ret-

ning i de forskellige Tilfælde, og derfor ser man, at naar Vedhængningen til Karret har Overhaand, hvad der er Tilfældet med Vand og Glas, saa krummer Vandet sig op langs Glassets Side; men naar Vædskens Sammenhængskraft er den overvejende, som ved Glas og Kvægsølv eller fettet Glas og Vand, saa krummer Vædsken sig nedad og skyr Glasset.

**56. Haarrørsvirkning eller Capilaritet.** Naar man sætter et fint Rør, et saakaldet Haarrør ned i en Vædske, som befugter det, vil man se Vædsken blive suget et Stykke op i Røret. Paa Grund af Vedhængningen vil Vædsken inde i Røret nemlig stille sig med en hul Overflade, dersom Røret er saa snevert, at Vædskens Krumninger ved de modsatte Sider naa hinanden, og Spændingen i den hule Overflade vil da løfte Vædsken. Jo snævrere Røret er, desto mere hul bliver Overfladen, og desto højere stiger Vædsken (indtil et Par Decimetre). Idet den krumme Flade løfter Vædsken, maa den naturligvis tage fat i Rørets Sider og tynge det lige saa meget ned. (Fig. 71.)

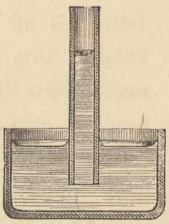

Fig. 71.

Bortset fra det molekulære Tryk, der skyldes Smaadelenes gensidige Tiltrækninger, og som ikke kan virke udadtil, maa man have atmosfærisk Tryk inde i Røret i Højde med den ydre Overflade. Højere oppe i Røret maa Trykket blive mindre, indtil man naar den hule Overflade. Lige over denne har vi Luftrykket, og Forskellen mellem de to Tryk bæres af Overfladens Spænding.

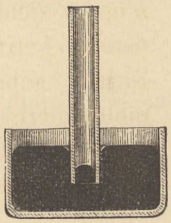

Fig. 72.

Hvis Haarrøret ikke befugtes, vil Vædsken stille sig med en udbuet Overflade, og Spændingen deri vil trykke Vædsken ned i Røret. (Fig. 72.)

Hvorledes Overfladens Form og Højdeforskellen af Vædsken afhænge af hinanden, kan vises ved Apparatet Fig. 73, der bestaar af 2 forbundne Rør, af hvilke det ene er et Haarrør. Hælder man Vand i til et vist Punkt *a* i det vide Rør, stiger det af sig selv til Toppen *b* i det snevre

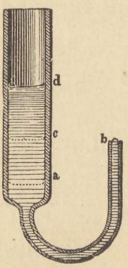


Fig. 73.

og staar der med en hul Overflade. Staar Vandet ved *c* bliver Fladen ved *b* plan, og hvis man hælder endnu mere i det vide Rør, bliver Overfladen ved *b* udbuet og løber ikke ud, saa længe Trykhøjden *b d* ikke er for stor. Forsøget lykkes bedst, dersom Haarrøret har tynde Vægge, thi ellers breder Vandet sig ud foroven, og Overfladen kan ikke blive meget udbuet, uden at der flyder Vand ud.

Den Højde, hvori Haarrørsvirkningen kan bære en Vædskesøjle, som befugter Røret, er kun afhængig af Rørets Vidde paa det Sted, hvor den indvendige Overflade befinder sig; om Røret nedenfor er videre, gjør intet til Sagen, men man maa i det Tilfælde først fylde Røret, enten ved Sugning eller ved at trykke det ned i Vædsken, til Haarrøret faar fat.

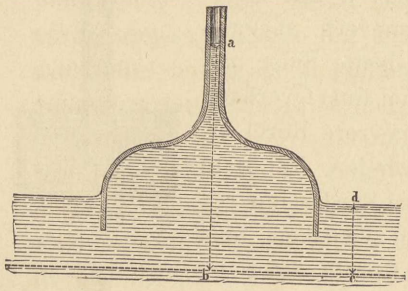

Fig. 74.

Dersom et Haarrør ikke rager saa langt op over Vandet, som Haarrørskraften kan løfte dette, saa maa man ikke tro, at Vandet strømmer ovenud. Den indvendige Overflade antager blot en anden Form, som ovenfor vist. Dersom Vandet løb ud af Haarrøret, havde man i Virkeligheden et perpetuum mobile, idet man fik Vandet løftet uden Anvendelse af Energi.

**57.** Haarrørsvirkningen spiller en ikke ubetydelig Rolle. Enhver ved f. Eks., hvorledes et Stykke Sukker, en Svamp, Klatpapir o. lign. porøse Legemer ere i Stand til at suge Vand til sig, eller at Olien trænger op gennem Lampevægen. Ligeledes er Haarrørsvirkningen Aarsag til, at Fugtigheden udbreder sig jævnt i Jordbunden, eller at Mure blive fugtige, naar Grunden er det, eller at Drænrør kunne optage Vandet fra de dybere Jordlag.

Virkningen er ikke ens stærk ved forskellige Vædsker; Vand stiger saaledes meget højere i helt rene Glasrør end Spiritus; ere Rørene ikke helt rene, befugtes de ikke saa godt af Vand, og Haarrørsvirkningen er da tydeligere ved

Spiritus. Ligeledes er den Hurtighed, hvormed Vædsken stiger, forskellig i forskellige Tilfælde; Petroleum stiger hurtigere i en Væge end almindelig Olie, hvorfor Beholderen i en Petroleumslampe kan være temmelig langt under Flammen.

Porøse Legemer kunne indsuge en Mængde Vædske og forandre derved ofte deres Rumfang; Hampesnore og Tove blive tykkere og kortere, idet Vandet presser de enkelte Dele fra hinanden. Disse Formforandringer foregaa med stor Kraft, Klædesnore kunne briste i Regnvejr, Vinduer bulne ud i fugtigt Vejr og klemme haardt, Træ og Pap krummer sig, naar det ikke er ens vaadt paa bægge Sider, Stene kunne sprænges ved at drive Trækiler ind i dem og gøre disse vaade. Omvendt forandres Rumfanget ogsaa ved Udtørring, Møbler revne, naar de ere lavede af fugtigt Træ og komme ind i en tør Stue, Baller blive utætte i tørt Vejr, o. s. v.

Vil man forhindre Vandet fra at trænge ind i fine Porer i et Legeme, kan man gøre dette fettet; herpaa beror Anvendelsen af Olieklæder og Fedtstøvler. Da Kvægsølv ikke befugter Glas og flere andre Stoffer, har det ingen Tilbøjelighed til at løbe ind i snevre Aabninger. Lægger man f. Eks. paa Bunden af en Skaal lidt Bomuld og derpaa et Stykke Kork og holder dette nede, mens man hælder Kvægsølv i Skaalen, kan man godt slippe Korken, uden at den stiger, idet Kvægsølvet ikke løber ind underneden og derfor ikke kan bevirke nogen Opdrift. Stikker man en Finger ned i Kvægsølvet langs med Skaalens Side, mærker man af samme Grund, at Fingeren trykkes ind imod Kanten.

**58.** Dersom to smaa Ting, der befugtes, svømme paa Vand saa nær ved hinanden, at der er en kendelig Haarrørsvirkning imellem dem, ville de nærme sig til hinanden. Thi naar Fladen *B* er i Højde med Overfladen *A C*, vil der her være atmosfærisk Tryk; over *B* vil Trykket være mindre, mens Lufttrykket virker uforandret udefra. I et lufttomt Rum er Trykket i Fladen *A B C* lig 0; over *B* maa der altsaa være et negativt Tryk, det vil sige, at Vædsken i dette Tilfælde

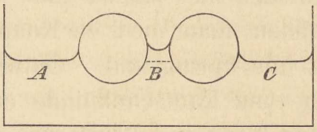

Fig. 75.

suger Legemerne sammen. Man forstaar nu, hvorfor Smaating, som svømme paa Vand, gærne løbe samme og lægge sig ved Kanten.

Hvis de to betragtede Legemer ikke befugtes, ville de ogsaa nærme sig til hinanden, da der i det Tilælde er et større Vædsketryk udvendig fra.

**59. Opløsning, Blanding, Diffusion, Endosmose.** Tiltrækningen mellem et fast Legeme og en Vædskes Molekyler kan være saa stor, at den overvinder Sammenhængskraften i det faste Legeme, hvorved dette opløses i Vædsken. Den Mængde, som kan opløses, afhænger foruden af Stoffets Beskaffenhed tillige af Varmegraden og tiltager i Reglen med denne. Er der opløst saa meget, som det er muligt, kaldes Opløsningen mættet. Afkøles en saadan eller fordamper noget af Vædsken, vil en Del af det faste Stof atter udskilles, ofte i regelmæssige Former, de saakaldte Krystaller.

Mellem to Vædsker kan Tiltrækningen ogsaa være saa stor, at hver Vædskes Sammenhængskraft overvindes, og Vædskerne blande sig. Kommer man Vand i et Glas og forsigtig hælder Rødvin ovenpaa, bliver denne i Begyndelsen staaende øverst, da den har mindst Vægtfylde, men efter nogen Tids Forløb vil man alligevel finde, at bægge Vædsker ere ligelig blandede. En saadan Blanding, der foregaar af sig selv uden Hensyn til Vægtfylden, kaldes Diffusion, og dersom Vædskerne diffundere gennem en porøs Hinde, f. Eks. en Blære, kalder man den Endosmose. I dette Tilfælde har Hinden betydelig Indflydelse paa, hvilken Vædske der gaar hurtigst igennem. Fylder man Spiritus i et lille Glas og binder en Blære over og sætter den ned under Vand, vil man efter nogen Tids Forløb finde, at Blæren er udvidet, idet Vandet gaar lettere gennem denne end Spiritus; stikker man med en Knappenaal Hul i Blæren, dannes der et lille Springvand. Omvendt gaar Spiritus lettere gennem en tynd Kautschukhinde end Vand. Endosmosen spiller en stor Rolle ved Planternes Ernæring, idet Vædskerne optages fra Jorden og stige gennem Cellevæggene i Planternes Indre. En lignende Betydning har Endosmosen for Dyr og Mennesker ved Ernæringen.

Naar to Vædsker blandes, iagttager man ofte, at Blandingen har et mindre Rumfang end bægge Vædsker tilsammen før Blandingen; det er Tilfældet med visse Metallegeringer; ligeledes i høj Grad med Spiritus og Vand. Saaledes giver 60 L. Spiritus og 40 L. Vand kun 95 L. Blanding.

## Opgaver.

71. Til en Ring af Metaltraad binder man en Sytraad og paa Enden af denne en Løkke, som hænger frit i Ringen. Det hele dyppes i Sæbevand, som danner en Hinde, hvori Traaden med Løkken ses. Naar man stikker den Del af Hinden i Stykker, som er inden i Løkken, hvad sker da?

72. Et Rør deler sig i to Grene, paa hver sættes en lille Kautschukslange og i disse 2 Kridtpiber. Paa hver blæser man en Sæbekugle ved skiftevis at holde paa Slangerne. Dersom Sæbekuglerne ere af forskellig Størrelse, og man tillukker Rørets fri Ende men ikke Forbindelsen mellem Piberne, bliver den mindste Kugle mindre og den største større. Hvad er Grunden dertil og hvormed ender Formforandringerne? (Disse ere mest kendelige, naar der er stor Forskel paa Kuglerne).

73. Paa Udkanten af et Bord lægges noget Vand, oven paa dette et Kort, saaledes at Halvdelen rager uden for Bordet. Dersom Kortet er befugtet, bevæger det sig helt ind paa Bordet. Hvad er Grunden dertil?

74. Hvis to smaa Legemer svømme nær ved hinanden paa Vand, og det ene befugtes men det andet ikke, saa vil Vandet indvendig hverken stige saa højt ved det ene Legeme eller trykkes saa dybt ned ved det andet, som Tilfældet er udenfor. Vis, at Legemerne fjerne sig fra hinanden.

Det er af denne Grund, at man ofte har vanskeligt ved at tage befugtede Smaating, som svømme paa Vand, med Fingrene, idet disse ere noget fettede og sky Vandet. Derimod tager man let et Stykke Haar, som flyder paa Vand, da Haaret selv er fettet.

75. I en Beholder med Siderør og Stempel er der hældt Vand. Hvorfor kan Vedhængningen til Stemplet ikke forandre det Tryk, man maa udøve derpaa for at holde det inde?

# Luftarters Ligevægt.

**60.** Luftarter ere ligesom Vædsker flydende Legemer, idet de enkelte Dele med største Lethed kunne bevæge sig imellem hinanden; men Forskellen bestaar i, at Luftdelene ikke have nogen kendelig Sammenhængskraft, hvorimod deres Udvidekraft ikke synes at have nogen Grændse; et bestemt Rumfang Luft kan nemlig udbrede sig over et hvilket som helst Rum det skal være. Omvendt kan man ved at forøge Trykket sammenpresse en indelukket Luftmasse meget betydeligt.

Betragte vi først Atmosfæren eller det Lufthav, som omgiver Jorden, indse vi let, at den paa Grund af sin Vægt maa udøve et Tryk paa hele Jordens Overflade og paa alle de Ting, som befinde sig der. Dette Tryk virker i enhver Retning, vinkelret paa den Flade, vi betragte, og er saa stort som Vægten af en Luftsøjle, hvis Grundflade er det betragtede Areal, lagt vandret, og hvis Højde naar op til Atmosfærens Grændse. Stige vi højere op i Luften, bliver Trykket altsaa mindre, dog ikke efter saa simpel en Lov som i Vædsker, hvor Trykforandringen er proportional med den tilbagelagte Højde. Luftens Tæthed aftager nemlig stærkt, jo højere man kommer op; til lige store Højdeforandringer svarer derfor Luftsøjler med forskellig Vægt.

Luftens Tryk er ens i fri Luft og inde i Værelser eller lignende Rum, da disse ved større eller mindre Aabninger staa i Forbindelse med den fri Atmosfære. Men selv om

man tilvejebringer et fuldkommen lufttæt Rum og deri afspærrer atmosfærisk Luft, vil dennes Tryk dog være det samme som udenfor, idet Luften, før den blev indelukket, var underkastet et Tryk af den øvrige Atmosfære, hvorved den blev sammentrykket saa meget, at dens Udvidekraft netop holdt Ligevægt mod dette Tryk.

Paa Grund af den ubegrændsede Udvidekraft kan ingen Luftmasse være i Ligevægt, uden at den er underkastet et Tryk fra alle Sider. Fri Overflader kunne derfor ikke findes, men skal en bestemt Luftmængde opbevares, maa det ske i helt lukkede Beholdere. Er en saadan paa et eller andet Sted forsynet med en Cylinder med Stempel, vil et Tryk paa dette sammenpresse Luften, hvorved enhver anden lige saa stor Del af Beholderens Overflade modtager et Tryk af samme Størrelse som det, der bliver udøvet paa Stemplet.

Det Tryk, som Atmosfæren eller en anden Luftmasse udøver paa Overfladen af Vand, vil ifølge en tidligere Regel om Trykket i Vædsker forplante sig gennem hele Vandmængden, saa at Trykket nede i denne i Virkeligheden bliver Summen af Lufttrykket og det, der hidrører fra Vædskens Vægt.

**61. Lufttrykkets Størrelse** er først funden af Italieneren Torricelli. Han brugte dertil et Glasrør af henved $1^{m}$ Længde, som var lukket i den ene Ende; dette fyldte han med Kvægsølv, og medens han med Fingeren holdt for den aabne Ende af Røret, vendte han det om og stak det ned i en Skaal med Kvægsølv. Det viste sig derved, at Vædsken sank noget i Røret men blev staaende i en Højde af omtrent $76^{cm}$ over den udvendige Vædskeoverflade. Da der ikke findes nogen Luft inden i Røret, kan man deraf slutte, at det er Vægten af selve Kvægsølvsøjlen, som holder Ligevægt mod Lufttrykket udvendig, som om det var to forbundne Beholdere, fyldte med forskellige flydende Legemer. Man siger derfor, at Lufttrykket er omtrent $76^{cm}$, eller at Luften trykker lige saa stærkt som en Kvægsølvsøjle af den Højde. Paa 1 $\square^{cm}$ hviler der derfor et Tryk = Vægten af 76 $cub^{cm}$ Kvægsølv, som vejer $76 \cdot 13{,}6 = 1033$ gr. $= 1{,}033$ Kilo. Dersom Glasrørets Højde er mindre, f. Eks. $50^{cm}$, vil man finde, at

Kvægsølvet, naar Forsøget udføres, slet ikke synker i Røret, men at Luften presser det op imod Rørets lukkede Ende, saaledes at der fremkommer en Reaktion fra Glasset, som i Forbindelse med Vægten af Kvægsølvet holder Ligevægt mod Luftens Tryk udvendig.

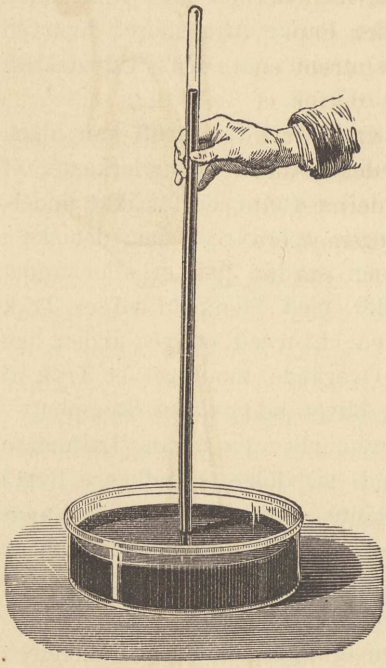

Fig. 76.

Gør man et tilsvarende Forsøg med andre Vædsker, maa Glasrørets Længde være meget større, da de Højder, hvori forskellige Vædsker staa, forholde sig omvendt som deres Vægtfylder. Med Vand vilde man omtrent finde Højden $13{,}6 \cdot 76^{cm} = 10{,}33^{m}$, og Lufttrykket vil være i Stand til at holde Ligevægt imod Vægten af en saadan Vandsøjle. Det er derfor let at forstaa, hvorfor Vandet ikke løber ud af en Flaske eller et Glas, som fyldes og sættes med Mundingen under Vand. Har man en Beholder med meget snever Hals fyldt med Vand, kan man endogsaa i fri Luft vende den helt paa Hovedet, uden at Vandet løber ud; af et fyldt Anker løber der intet ud, naar Hanen aabnes, med mindre Spunset løsnes. Medens det er Lufttrykket, som i disse Tilfælde bærer Vædskesøjlerne, er det en medvirkende Omstændighed, at Udløbsaabningen er snever, thi ellers vil Vædsken løbe ud ved den ene Side og Luften ind ved den anden. Hvis en Beholder er forsynet med et Udløbsrør, som vender noget opad, kan dette være temmelig vidt, uden at Vædsken løber ud, som det f. Eks. er Tilfældet med visse Blækhuse og Gasometre (Fig. 99). Tager man et Glas og binder det over med et Stykke Tyl, kan man fylde og tømme Glasset, som om det var helt aabent; men fylder man det og lægger en Glasplade over, vender det om og holder Pladen

horizontal, kan man tage denne bort, uden at Vandet løber ud; ligeledes kan Vandet blive staaende i et omvendt Glas, naar det dækkes med et Stykke Papir eller Pap.



Fig. 77.

Et voksent Menneske har omtrent en Overflade af $1^1/_2$ □$^m$ og lider derfor et Tryk af over 15000 Kilo. At dette Tryk kan taales, har sin Grund i, at det for det første virker fra alle Sider, dernæst at alle Hulheder og Vædsker i Legemet ere i Forbindelse med Atmosfæren, saa at Trykket i Legemets Indre er det samme. Naar Folk stige til Vejrs i Luftballoner, vil dette indvendige Tryk i Legemet foraarsage Blødninger paa de Steder, hvor Hud og Aarer ere finest, f. Eks. i Næsen. Blodkoppers Virkning beror ogsaa paa det Tryk, som finder Sted i Legemets Indre. Vore Lemmer bæres til Dels af Lufttrykket, idet de forskellige Dele af Leddene passe saa tæt til hinanden, at der ingen Luft kan komme ind imellem dem.

**62. Barometre.** Lufttrykket er ikke ganske konstant, og for bekvemt at kunne iagttage dets Størrelse har man indrettet forskellige Slags Barometre.

1) Fortins Kapselbarometer er et Torricellisk Rør, som er fastgjort til en Beholder med

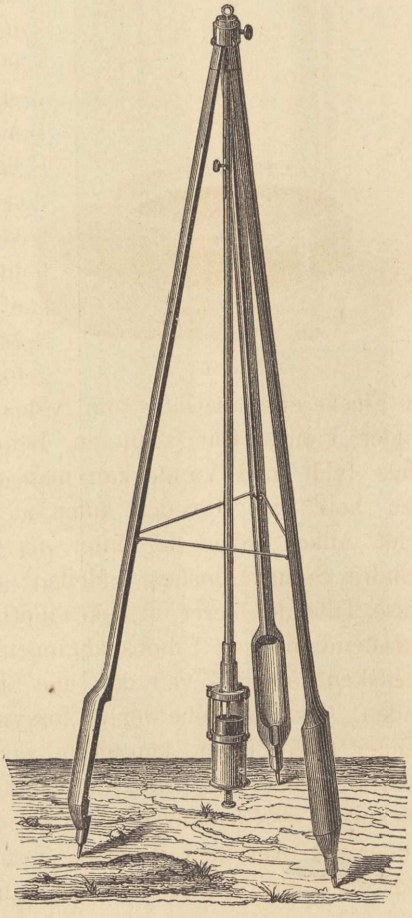

Fig. 78.

Kvægsølv, hvori den aabne Ende af Røret dyppes ned. Ved Fyldningen af dette og andre Barometre sætter der sig altid en Del Luftblærer paa Glasset, som fjernes ved at koge Kvægsølvet, imedens Røret holdes i en skraa Stilling, idet Dampene ville rive Luften med sig. Opvarmningen begynder fra oven; det er bedst at forbinde den aabne Ende med en Luftpompe, saa Kogningen kan ske i et luftfortyndet Rum; paa denne Maade koger Kvægsølvet nemlig roligt og de giftige Dampe fjernes.

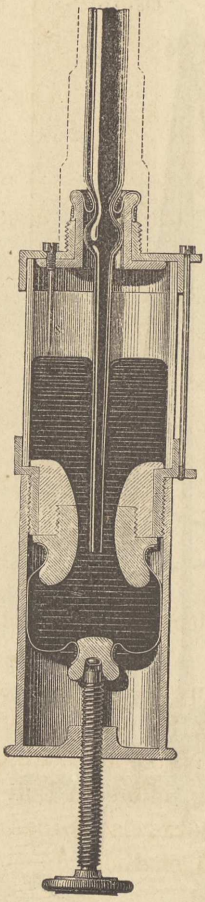

Fig. 79.

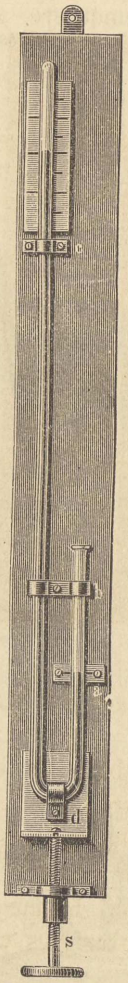


Fig. 80.

For at maale Højden er Barometret forsynet med en fast Maalestok, hvis Nulpunkt er i samme vandrette Linje som en Elfenbens Spids, der er fastgjort under Laaget paa Beholderen. Dennes Bund er en Pose af Skind, som ved en Skrue kan trykkes op eller ned, saa at Kvægsølvets Overflade i Beholderen ved hver Aflæsning kan bringes til at staa ved Spidsen, det vil sige Maalestokkens Nulpunkt (Fig. 79). Drejes Skruen langt op, kan Kvægsølvet bringes til at fylde hele det lange Rør, og naar Barometret da vendes paa Hovedet, kan det bekvemt transporteres uden at lide Skade; det kaldes derfor ogsaa Rejsebarometret. (Fig. 78).

2) Hævertbarometret er afbildet i Fig. 80; Maalingen sker ved at forskyde selve Barometerrøret, indtil Kvægsølvets fri Overflade staar ved Mærket a, der angiver Nulpunktet af den faste Maalestok. Man kan ogsaa maale Afstandene

fra et vilkaarligt Punkt midt paa Barometret til den øverste og nederste Kvægsølvoverflade og addere disse Højder.

3) Til almindeligt Brug indretter man det sædvanlige Stuebarometer (Fig. 81). Da Maalestokken er fast, vil man ved Aflæsningen begaa en lille Fejl, undtagen naar Kvægsølvet i den aabne Gren netop er i samme vandrette Linje som Maalestokkens Nulpunkt. Naar den aabne Gren er meget videre end den lukkede, bliver Fejlen dog ringe.

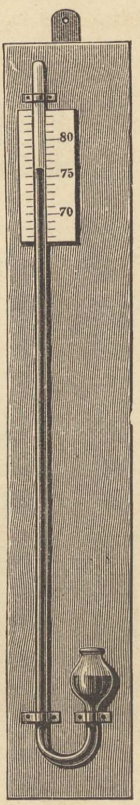


Fig. 81.

4) Huyghens Barometer har Form, som Fig. 82 viser. I den aabne Gren er der farvet Spiritus over Kvægsølvet, og naar dette hæver eller sænker sin Overflade lidt, vil Spiritusens fri Overflade bevæges et stort Stykke. Maalestokken afsættes ved Sammenligning med et andet nøjagtigt Barometer. I Tidens Løb fordamper noget af Spiritusen, og paa Grund af Vedhængningen vil noget sive ned ad Glasset og tilsidst komme op i den lukkede Gren, hvor det vil fordampe. Dette Barometer er derfor mindre nøjagtigt men viser smaa Forandringer i Lufttrykket meget kendeligt.

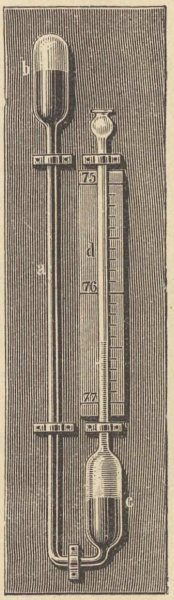


Fig. 82.

5) Aneroidbarometre (Metalbarometre) indrettes paa en af de Maader, som Figurerne 83 og 84 vise. I det første er der en flad, næsten lufttom Daase *B B* af elastisk Metal, som trykkes sammen eller udvider sig, eftersom Lufttrykket bliver større eller mindre. Denne Bevægelse forøges ved Hjælp af Vægtstænger og overføres ved en Kæde til en

Akse, som bærer en Viser, der kommer til at gennemløbe en temmelig stor Bue ved smaa Lufttrykforandringer.

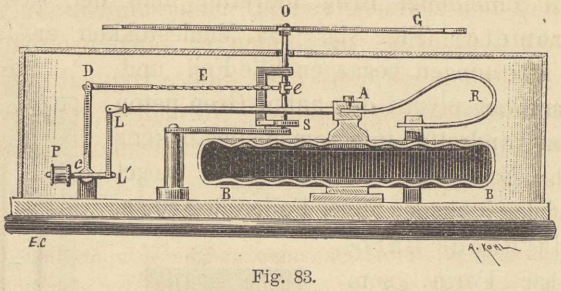


Fig. 83.

I det andet Aneroidbarometer anvendes et bøjet, lufttomt Rør, som ved forøget Lufttryk bøjer sig mere sammen, da dets yderste Side nødvendigvis er lidt større end den inderste; omvendt retter det sig, paa Grund af Elasticiteten, lidt ud ved formindsket Lufttryk. Disse smaa Forandringer kunne gøres mere tydelige ved Tandbue og Tandhjul med Viser, saaledes som det ses i Fig. 84.

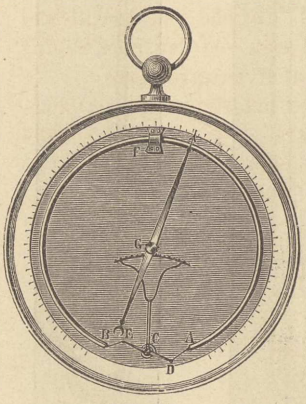

Fig. 84.

6) For at følge de Forandringer, som foregaa med Lufttrykket i længere Tid, har man paa nogle meteorologiske Stationer selvtegnende Barometre. Der kan hertil anvendes et lige Barometerrør af Jærn*), som efter at være fyldt og vendt om og sat ned i en Skaal med Kvægsølv hænges op paa den ene Arm af en Vægtstang. Ved større Lufttryk stiger Kvægsølvet inde i Røret, synker altsaa i Skaalen, hvorved det ophængte Rør faar en mindre Opdrift og et større Indhold af Kvægsølv, saa det tynger Vægtstangsarmen lidt ned. Det er denne Bevægelse, som gøres tydeligere ved Hjælp af nogle Vægtstænger, af hvilke den sidste er forsynet med en

*) Kvægsølv angriber og opløser de fleste Metaller med Undtagelse af Jærn.

Stift, som tegner en Linje paa en Papirsflade, der føres forbi ved Hjælp af et Urværk.

Det Maal, man anvender ved Barometerstandens Angivelse, er sædvanlig Centimeter, og Højden er gennemsnitlig 76 cm men kan variere 4—5 cm til hver Side. Hyppigt anvendes ogsaa som Maal franske Tommer. Normaltrykket bliver da 28 Tommer, svarende til 29 danske Tommer med Variationer paa henimod 2 Tommer til hver Side.

**63.** For at aflæse Barometerstanden nøjagtigt er der forskellige Ting at tage Hensyn til. Først maa man undgaa en »parallaktisk« Fejl, d. v. s. man maa vogte sig for at holde sit Øje over eller under den vandrette Flade gennem Kvægsølvets Top, da man i saadanne Tilfælde vilde se denne projiceret paa et forkert Sted af Maalestokken. For at undgaa denne Fejl kan man til Maalestok bruge en Glasplade, hvis ene Halvdel, f. Eks. den venstre, er belagt med Spejlfolie; naar Maalestokken er nøjagtig lodret, og Barometerrøret staar lige bag ved Adskillelsen mellem den belagte og ubelagte Halvdel, skal man ved den rette Stilling af Øjet se dettes Spejlbillede lige ved Siden af Kvægsølvtoppen.

For at aflæse Brøkdele af Maalestokkens Inddelinger bruger man, som i mange andre Tilfælde af lignende Art, en Nonius (Fig. 85). Denne er en mindre, forskydelig Maalestok, dannet ved at tage 9 af de oprindelige mindste Inddelinger og dele dette Stykke i 10 lige store Dele.

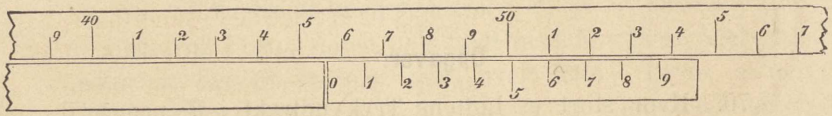

Fig. 85.

Noniens Nulpunkt stilles lige ud for Kvægsølvtoppen, hvorved man i Reglen vil finde, at en af de andre Delingsstreger, f. Eks. den 6te, staar lige ud for en af Hovedmaalestokkens Streger. Kvægsølvtoppen er da $^6/_{10}$ af en Inddeling over den nærmest lavere Streg.

Der maa ogsaa tages Hensyn til Haarrørsvirkningen, idet man ved Forsøg med andre lige saa vide Glasrør finder, hvor meget Overfladens Krumning kan trykke Kvægsølvet ned. For Rør af Vidden 4—6 mm er »Depressionen« omtrent 1 mm, for Rør af 15 mm Vidde omtrent 0,1 mm.

Endelig maa der tages Hensyn til Varmens Indflydelse. Denne udvider Kvægsølvet, gør altsaa dets Vægtfylde mindre, saa det stiger til en større Højde. Man plejer derfor af den iagttagne Højde at beregne den saakaldte reducerede Barometerstand, hvorved forstaas den Højde, hvortil Kvægsølvet vilde staa, hvis Temperaturen var 0° men Trykket uforandret.

Kaldes den reducerede Højde $h_0$ cm, den ved Temperaturen $t^0$ iagttagne $h_t$ cm, og betragter man i bægge Tilfælde Grundfladen 1 □ cm, saa bliver $h_0$ cub cm og $h_t$ cub cm Rumfangene af en og samme Vægt Kvægsølv ved forskellige Temperaturer, hvoraf følger, efter en Sætning i Varmelæren,

$$h_t = h_0 (1 + 0{,}00018t),$$

idet Kvægsølvets Udvidelseskoefficient er 0,00018.

Heraf faas

$$h_0 = \frac{h_t}{1 + 0{,}00018\,t} = h_t (1 - 0{,}00018\,t),$$

da $0{,}00018\,t$ er lille.

Ogsaa Maalestokken selv udvides en Ubetydelighed ved Varmen, men forskelligt efter dens Beskaffenhed og efter den Maade, hvorpaa den er anbragt.

Glasrørets egen Udvidelse er uden Betydning, da en Vædskes Tryk i et Rør er uafhængigt af dettes Form.

Der er endnu en Ting, man ved meget nøjagtige Barometermaalinger maa tage Hensyn til. Da Tyngdekraften paa de forskellige Steder af Jorden nemlig ikke er ens, vil et bestemt Legemes Vægt ikke være ganske konstant. Er nu Forholdet mellem Tyngdekraften paa to Steder $\alpha$, vil Vægten af 1 cub cm Kvægsølv paa disse Steder ogsaa have Forholdet $\alpha$, og de Højder, hvortil Kvægsølvet maa stige for at holde Ligevægt mod det samme Lufttryk, staa i Forholdet $\frac{1}{\alpha}$.

## Opgaver.

76. Hvor stort er Luftens Tryk udtrykt i ℔ paa 1 □ Tomme og paa 1 □ Fod?

Res. cr. 14 ℔ og cr. 2000 ℔.

77. Hvor stor bliver Vægten af den Luft, som er i en Stue med Dimensionerne 6 m, 4 m og $3^1/_2$ m (Højden), og hvor stort er Luftens Tryk paa Gulvfladen?

Res. 109,2 Kilo, 247920 Kilo.

78. Paa Grund af Gnidningsmodstanden flytter Kvægsølvet i et Barometer sig ikke lige let ved Randen og i Midten. Hvilken Fejl i Barometerstanden opstaar der herved? Naar man banker paa Glasset, hvorledes bevæger Kvægsølvet sig da i Røret?

79. Naar man filtrerer en Vædske og stiller en omvendt Flaske med samme Vædske paa den Maade, Fig. 86 viser,

hvorledes forklares det da, at Filtret stadig staar fyldt til samme Højde?

80. Fra Bunden af en Cylinder løftes et tætsluttende Stempel uden Vægt saa højt, at der fremkommer et luftomt Rum paa $R$ Cubikmetre. Naar Lufttrykket pr. Kvadratmeter er $P$ Kilo, skal det bevises, at Arbejdet er $PR$ Kgm.

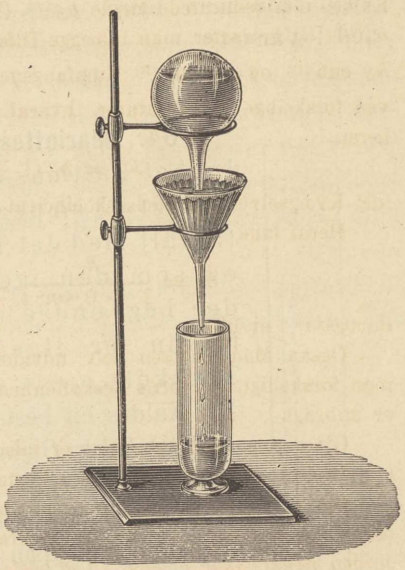

Fig. 86.

81. Hvor stort er Trykket paa et Stempel i en Dampmaskine, naar dets Areal er 6 $\square^{dm}$, og Maskinen arbejder med 2 Atmosfærers Tryk? Hvis Stempelslaget er $^1/_2{}^m$ og der gøres et enkelt Slag i Sekundet, hvor mange Hestekræfter har da Maskinen?

Res. cr. 1240 Kilo, cr. $8^1/_4$ Hkfr.

82. I en Skaal med Kvægsølv stilles et omvendt Glas af vilkaarlig Form, enten helt fyldt med Kvægsølv eller saaledes, at der er lufttomt oven over dette. Bevis, at den Kraft, som behøves for at holde Glasset, kan udtrykkes, enten ved Vægten af Glasset + det løftede Kvægsølv ÷ Opdriften af Glasset, eller ved Vægten af Glasset + alt det Kvægsølv, der findes indenfor Glassets Vægge, ÷ den Opdrift, der bliver, naar vi tænke os alt dette Kvægsølv fast forbundet med Glasset.



Fig. 87.

83. En Glasklokke holdes i omvendt Stilling fyldt med Vand i en større Vandmasse (Fig. 87). Glassets udvendige Gennemsnit er $A$ $\square^{cm}$, og Vægten af Glasset fyldt med Vand er $P^{gr}$; hvor stor en

Vægt maa man bære, naar Glasset synker et Stykke $m^{cm}$ ned i Vandet?

Res. $P - Am$.

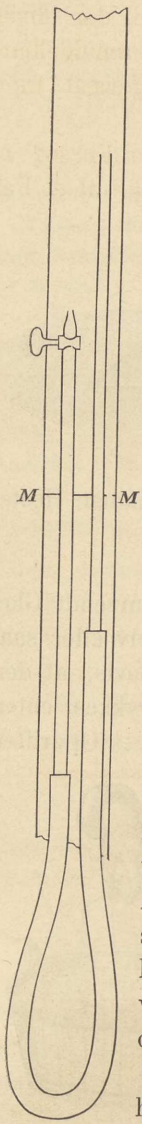


Fig. 88.

**64. Mariottes** eller **Boyles Lov.** En indelukket Luftmasses Rumfang er ved uforandret Temperatur omvendt proportionalt med det Tryk, den er underkastet, og som den igen udøver paa de Vægge, der begrændse den; heraf følger, at Vægtfylden er ligefrem proportional med Trykket.

Kaldes en bestemt Luftmængdes Rumfang $R$ og dens Tryk $B$, har man altsaa:

$$RB = \text{en Konstant.}$$

Ved ringe Tryk kan man vise Rigtigheden af denne Lov paa følgende Maade. En lodret faststaaende Stang af Længde omtrent $2^{m}$ er inddelt i Centimetre; paa den er der befæstet et Glasrør med Hane, medens et andet, aabent Glasrør kan flyttes op og ned ad Stangen, og bægge Rørene ere i Forbindelse med hinanden ved en Kautschukslange. Man aabner først Hanen og fylder Kvægsølv i Rørene indtil en vis Højde, f. Eks. til Mærket $MM$. Derefter lukkes Hanen tæt til, hvorved der er afspærret en Luftmasse af en Længde $l^{cm}$, som er underkastet Atmosfærens Tryk $B^{cm}$. Hæves derefter det bevægelige Rør, formindskes den afspærrede Luftsøjles Længde til $l_1{}^{cm}$, og dens Tryk vil være bestemt ved Atmosfærens Tryk + Trykket af en Kvægsølvsøjle, hvis Længde er Forskellen mellem Vædskens Højde i de to Grene. Er denne Forskel $b_1{}^{cm}$, vil man, under Forudsætning af at Rørene ere cylindriske, ved alle Forsøg finde, at

$$lB = l_1 (B + b_1),$$

hvorved Loven er bevist.

Bevæges det forskydelige Rør nedad, udvides den indelukkede Luft, men Loven vedbliver at

gælde, idet Formlen stadigt passer, naar $b_1$ regnes negativ. Atmosfærens Tryk $B$ kan findes ved Apparatet selv; naar man nemlig, medens Hanen er aaben, løfter det bevægelige Rør saa langt op, at Kvægsølvet stiger lidt over Hanen, derefter lukker denne og sænker det andet Rør, indtil der bliver et lufttomt Rum under Hanen, saa kan man umiddelbart aflæse, hvilken Kvægsølvsøjle der holder Ligevægt mod Atmosfæren.

Med større Tryk er der anstillet nøjagtige Forsøg af Regnault, som brugte to forbundne Rør, det ene af et Par Meters Længde til at lukke foroven med en Hane, det andet aabent og meget langt, idet det blev sammensat af flere Stykker, indtil det fik en Længde af 30m. Det blev befæstet til Muren af et Taarn og til en Slags Mast, som blev bygget oven paa Taarnet; langs Røret blev der indrettet et Hejseværk, hvorfra Iagttageren kunde foretage sine Maalinger. Først blev der hældt saa meget Kvægsølv i Rørene, at det stod til et bestemt Mærke i dem bægge; derpaa blev Hanen lukket og gennem et Tilledningsrør forneden blev der nu presset saa meget Kvægsølv ind i Rørene, at den afspærrede Luft

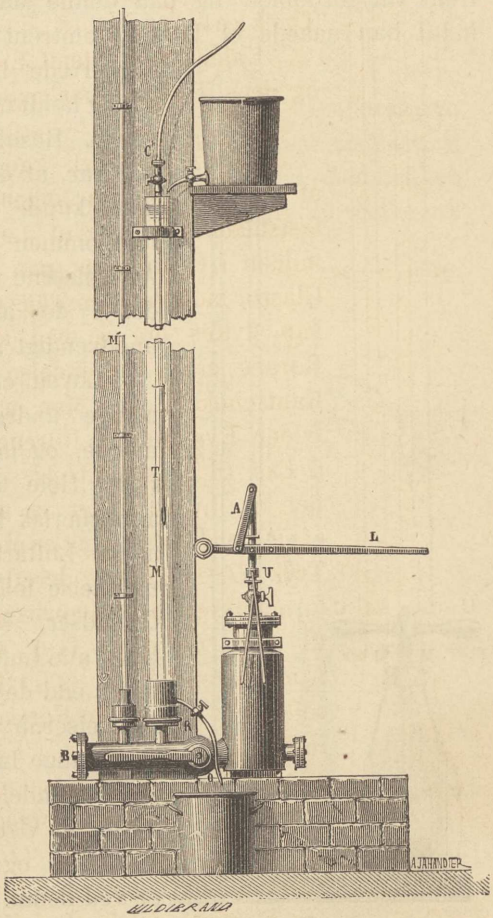


Fig. 89.

blev sammentrykket til det halve Rumfang. Dens Tryk var da bestemt ved Højdeforskellen mellem de to Kvægsølvoverflader + Atmosfærens Tryk, og det viste sig, at Trykket næsten nøjagtigt var dobbelt saa stort som før. Derefter blev der gennem den omtalte Hane i det korte Rør presset Luft ind, indtil Kvægsølvet i denne Gren sank til det oprindelige Mærke, og Luftens Tryk blev igen bestemt ved Højdeforskellen mellem Kvægsølvoverfladerne + Atmosfærens Tryk. Ved paany at presse mere Kvægsølv ind forneden, indtil den afspærrede Luft indtog det halve Rumfang, viste det sig igen, at Trykket omtrent var fordoblet, og paa denne Maade vedblev Regnault, indtil han naaede et Tryk af omtrent 30 Atmosfærer. Den afspærrede Lufts Temperatur blev stadig holdt uforandret ved en Vandstrøm. Resultatet af alle disse Forsøg var, at den Mariotteske Lov vel ikke kunde siges at gælde med fuldkommen Strænghed, men at Afvigelserne dog vare saa smaa, at det i de allerfleste Tilfælde er unødvendigt at tage Hensyn til dem.

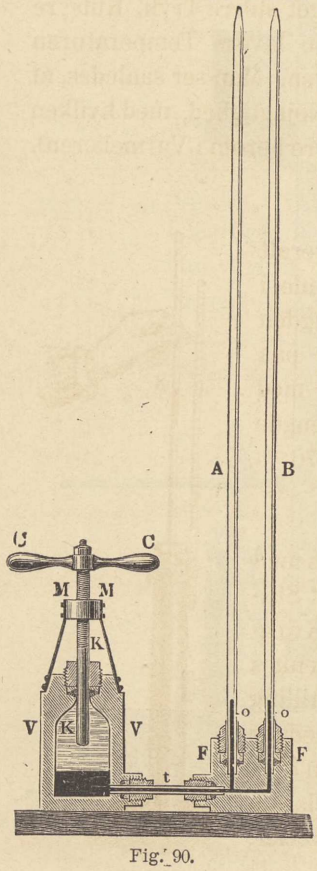

Fig. 90.

Loven er ogsaa undersøgt for mange andre Luftarters Vedkommende, og man har fundet, at den i det Hele taget gælder bedst for atmosfærisk Luft, men at de fleste andre Luftarter dog med stor Tilnærmelse følge den indenfor visse Grændser. Med Undtagelse af Brint blive alle Luftarter sammentrykkede mere, end de efter Loven skulde, og Afvigelserne vokse med Trykket.

Mange Luftarter blive, naar de ved almindelig Temperatur underkastes et vist Tryk, omdannede til Vædsker, og jo nærmere Trykket er ved denne Grændse, desto større ere Afvigelserne fra Mariottes Lov. Man kan se dette ved at fylde to Glasrør, det ene med

Svovlsyrling og det andet med almindelig Luft, og sætte dem i Forbindelse med en Beholder med Kvægsølv, der ved en Skrue presses op i Rørene (Fig. 90). Man ser da i Begyndelsen Kvægsølvet stige lige meget i Rørene, men naar Trykket naar en vis Størrelse, giver Svovlsyrlingen mere efter end den atmosfæriske Luft og fortættes tilsidst til Vædske. Trykket, hvorved dette finder Sted, ses paa det Rør, som indeholder almindelig Luft; er denne nemlig sammenpresset til $^1/_n$ af sit oprindelige Rumfang, er dens Tryk $n$ Atmosfærer. For Svovlsyrling indtræder Fortætningen ved omtrent 3 Atmosfærers Tryk i almindelig Stuetemperatur, men ved $1^1/_2$ Atm. Tryk, dersom Temperaturen er $0^0$. Andre Luftarter, som Svovlbrinte og Ammoniak, fortættes ved noget større Tryk, Kulsyre først ved et betydeligt større, men jo lavere Temperaturen er, desto tidligere indtræder Forandringen. Man ser saaledes, at Temperaturen har Indflydelse paa den Nøjagtighed, med hvilken Mariottes Lov kan siges at gælde. (Mere herom i Varmelæren).

## Opgaver.

84. Et i den ene Ende lukket, overalt lige vidt Glasrør holdes vandret. Inde i Glasset ligger der lidt Kvægsølv af Længden $b^{cm}$, som afspærrer en Luftmængde paa $a^{cm}$. Naar Glasset vendes lodret, med Aabningen op eller ned, hvilken Længde antager da Luftsøjlen? Lufttrykket er $76^{cm}$.

Res. $\frac{76\ a}{76 \pm b}$.

85. Et Barometerrør fyldes til Dels med Kvægsølv og sættes derefter i omvendt Stilling ned i et andet videre Rør med Kvægsølv, saaledes at det kan løftes og sænkes efter Behag (Fig. 91). I en eller anden Stilling indtager Luftmassen Længden $a^{cm}$, medens den løftede Kvægsølvsøjle har Længden $b^{cm}$, og Lufttrykket er $76^{cm}$. Hvilken Relation finder der Sted mellem de nævnte Størrelser.

Res. $a\ (76 - b)$ er konstant.

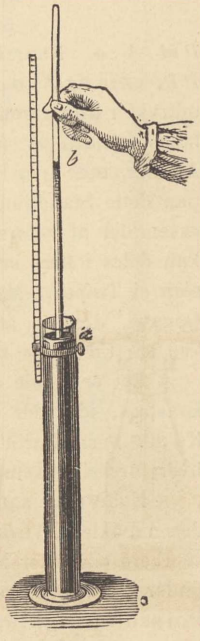


Fig. 91.

86. I hvilken Dybde under Vand vil Luften faa samme Vægtfylde som Vandet?

Res. Omtrent 1 Mil.

**65. Grafisk Fremstilling af Mariottes Lov.** Naar en Luftart sammentrykkes, kan Afhængigheden mellem Trykket og Rumfanget afbildes i et retvinklet Koordinatsystem. De Tal, som angive Rumfangene, maalte i cub$^{m}$, afsættes som Abscisser, og som Ordinater de tilsvarende Tryk, maalte i Kilo pr. $\square^{m}$. Naar de saaledes konstruerede Punkter forbindes ved en Kurve, faar man en ligesidet Hyperbel, dersom Luftarten følger Mariottes Lov, saa at Produktet af Tryk og Rumfang er konstant. Vi kunne ved Hjælp af denne Figur finde det Arbejde, som udkræves til en vis Sammentrykning af Luften, og vi ville tænke os, at denne sker, ved at et Stempel med Areal $A$ $\square^{m}$ presses ind i en Cylinder. Dersom Stemplet kun bevæges et meget kort Stykke $a^{m}$, kan Trykket betragtes som uforandret, og er dette afbildet ved Ordinaten $PM$, bliver Arbejdet $PM . A . a$. Naar Rumfanget samtidig er forandret fra $OP$ til $OP_1$, vil $PP_1$ være lig $A . a$, da bægge betyde Rumfangsformindskelsen. Arbejdet, udtrykt i Kilogrammeter, bliver derfor = Arealet $P_1M$. For større Rumfangsforandringer faas Arbejdet ved at addere en Række tilsvarende Arealer, men hvorledes denne Sum beregnes i Almindelighed, kunne vi paa dette Standpunkt ikke vise. Det vil dog ikke være vanskeligt i Taleksempler at udføre en Beregning med Tilnærmelse, idet det søgte Areal kan deles i flere smallere, af hvilke ethvert uden stor Fejl kan betragtes som et Trapez. Man løser naturligvis paa samme Maade den omvendte Opgave, d. v. s. at beregne det Arbejde en sammentrykket Luftmasse ved sin Udvidelse kan udføre.

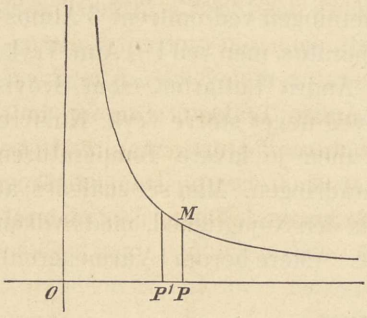

Fig. 92

Det er i hele denne Udvikling nødvendigt, at Temperaturen holdes konstant, idet der ved Sammentrykning udvikles Varme, ved Udvidelse Kulde, men Mariottes Lov gælder kun for uforandret Varmegrad. For hver forskellig Temperatur faas der forskellige ligesidede Hyperbler.

Naar man sammenpresser Luften i en godt isoleret Beholder, hvor den udviklede Varme ikke kan gaa bort, saa maa Lufttrykket vokse stærkere end efter Mariottes Lov. Den Afhængighed, der i dette Tilfælde finder Sted mellem Rumfanget $R$ og Trykket $B$, kan udtrykkes ved Poissons Ligning:

$$R^{1,4} . B = \text{Konstant.}$$

Den hertil svarende Kurve kaldes en adiabatisk Kurve.

**Opgaver.**

87. Hvad bliver Ligningen for den ligesidede Hyperbel, som afbilder Mariottes Lov, dersom den betragtede Luftmasse har Rumfanget 1 cub$^{m}$ ved atmosfærisk Tryk?

Res. $x\,y = 10330$.

88. Hvilket Arbejde udkræves der for at sammentrykke atmosfærisk Luft, som er indelukket i en Cylinder med Grundfladen 2 □ $^{dm}$ og Højden 1$^{m}$, til $^{1}/_{5}$ af sit Rumfang? Temperaturen holdes konstant.

Det nøjagtige Resultat er $332^{1}/_{2}$ Kgm, men ved en tilnærmet Beregning, idet Luften først sammentrykkes til det halve Rumfang, derefter til Tredjedelen osv., findes 348 Kgm.

**66. Manometre.** Til at maale Trykket, som en indelukket Luftmasse er underkastet, anvendes de saakaldte Manometre. Til smaa Tryk bruges et Glasrør af hosstaaende Form (Fig. 93) med Vædske i den nedadgaaende Bugt; den underste Aabning sættes i Forbindelse med den Luft, hvis Tryk skal maales, og dette er bestemt ved Højdeforskellen af de to Vædskesøjler + Atmosfærens Tryk. Er den indelukkede Lufts Tryk mindre end Atmosfærens, er Vædskens Højde størst i den mellemste Gren, og det dertil svarende Tryk maa da subtraheres fra Atmosfærens. Saadanne Manometre med Vand bruges i Gasværker til at maale Gassens Tryk. (Nogle faa Centimetre). Lignende Rør med forskellige Vædsker bruges som »Sikkerhedsrør« ved kemiske Forsøg (Fig. 94). Til større Tryk, saaledes undertiden i Dampkedler, anvendes længere Rør af samme eller lignende Form med Kvægsølv; Rørene ere da

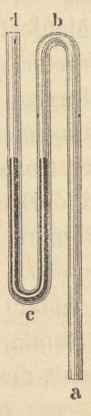

Fig. 93.

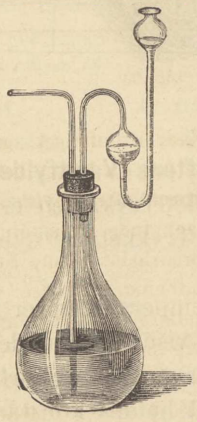
Fig. 94.

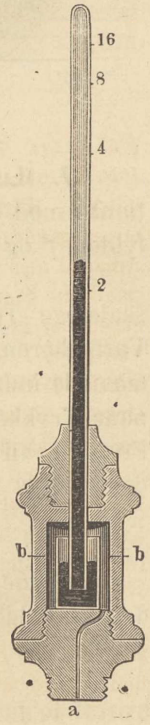

Fig. 95.

ofte af Jærn, og Kvægsølvets Bevægelser gøres kendelige derved, at det bærer et Vægtlod, som er bundet til en Snor, der gaar over en Trisse med Viser. For at undgaa det lange Rør, kan man ogsaa anvende et mindre lukket, hvori der er afspærret nogen Luft over Kvægsølvet. Af denne Lufts Rumfang kan man da ved Hjælp af Mariottes Lov regne sig til det Tryk, den udøver paa Kvægsølvet. Fig. 95 viser en anden Form af det lukkede Manometer.

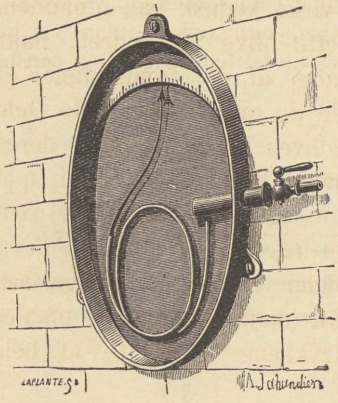

Fig. 96.

Ofte anvendes Metalmanometre, der ligne det i § 62 nævnte, rørformede Aneroidbarometer. Den Damp eller Luft, hvis Tryk skal maales, ledes gennem en Aabning ind i det bøjede Rør, som retter sig mere og mere ud, jo større Trykket er. Maalestokken paa dette Manometer, og i Reglen ogsaa paa det forrige, sættes ved Sammenligning med et andet, der er nøjagtigt.

**67. Luftens Vægtfylde** er ifølge Mariottes Lov proportional med det Tryk, den er underkastet; kaldes altsaa Vægtfylden $f$ og Trykket $B^{cm}$, har man

$$f_0 = \alpha B,$$

saalænge Temperaturen er konstant, lad os antage 0°. I Varmelæren vises det, at det Rumfang, en vis bestemt Luftmængde indtager, er proportionalt med Størrelsen $1 + 0{,}00367\ t$, naar Trykket holdes konstant, og $t$ er Varmegraden; i dette Forhold vil følgelig Varmen formindske Vægtfylden, saa at den ved $t°$ bliver

$$f = \frac{\alpha\ B}{1 + 0{,}00367\ t}.$$

Betegne vi nu ved $F$ Vægtfylden ved 0°, og 76 cm Tryk, den saakaldte Normalvægtfylde, have vi til Bestemmelse af $\alpha$

$$F = \frac{\alpha\ .\ 76}{1},$$

hvoraf følger

$$f = \frac{F\ .\ B}{76\ (1 + 0{,}00367\ t)},$$

som tjener til Beregning af $f$, naar man en Gang for alle kender Normalvægtfylden. Denne findes ogsaa ved Beregning af den samme Formel, idet man under et bestemt Tryk $B$ og bekendt Temperatur $t^0$ anstiller et enkelt Forsøg, som omtalt i § 51, hvorved man direkte finder $f$. Normalvægtfylden $F$ er omtrent $^1/_{774}$ eller 0,0013.

**68. Luftblandinger.** Dersom Rumfangene $R_1, R_2, R_3 \ldots$ af forskellige Luftarter, som ikke virke kemisk paa hinanden, have samme Tryk $B$, saa vil dette blive uforandret, naar Luftarterne blandes paa den Maade, at der fremkommer et Rumfang lig med Summen af alle de oprindelige. De Dele af Trykket, som nu hidrøre fra hver Luftart, kaldes deres Partialtryk; efter Mariottes Lov blive disse

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + \ldots} B \text{ , } \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + \ldots} B \text{ osv.}$$

Da atmosfærisk Luft indeholder omtrent 4 Gange saa stort et Rumfang Kvælstof som Ilt, (naar Rumfangene maales ved samme Tryk), blive Partialtrykkene $^4/_5$ og $^1/_5$ af hele Lufttrykket.

## Opgaver.

89. Et lukket Manometer bestaar af to lige vide Rør. Ved Normaltryk staar der i det lukkede Rør en Luftmasse af Højden $a^{cm}$, og Kvægsølvet er ens højt i bægge Grene; naar Trykket bliver $n$ Atmosfærer, hvilken Længde indtager da Luftsøjlen?

Res. $x = \dfrac{a - 38\,n + \sqrt{(a - 38\,n)^2 + 152\,a}}{2}$.

90. I et Apparat som hosstaaende hælder man Kvægsølv til Mærket $M$ og maaler det Tryk $B_1$, som det afspærrede Rumfang Luft er underkastet. Derefter løftes Skaalen $C$, indtil Kvægsølvet stiger til Mærket $N$, hvorved Luftens Tryk bliver $B_2$, medens Temperaturen holdes konstant, idet Beholderen $D$ er nedsænket i et Kar med Vand. Find Forholdet mellem Rumfangene $MN$ og $MD$.

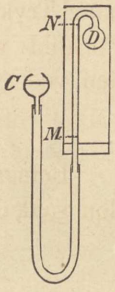

Fig. 97.

Res. $1 - \dfrac{B_1}{B_2}$.

Dersom Apparatet er indrettet saaledes, at man kan bringe et fremmed Legeme ind i $D$, hvorledes finder man da dette Legemes Rumfang i Forhold til $MN$?

(Man bruger undertiden Redskaber af denne Art (Volumenometre) til at finde Rumfanget af Legemer, hvis Vægtfylde er vanskelig at bestemme).

91. Hvorledes kan man forklare det i Fig. 98 afbildede Springvand?

92. Fig. 99 forestiller et Gasometer til Opsamling af Luftarter. De to Beholdere, af hvilke den øverste er aaben, forbindes ved to Rør $a$ og $b$, hvoraf $a$ gaar helt ned til Bunden; $d$ er et lille opadvendt Siderør, som kan lukkes ved en Prop; $e$ er Udløbsrøret for Luften, naar den er opsamlet

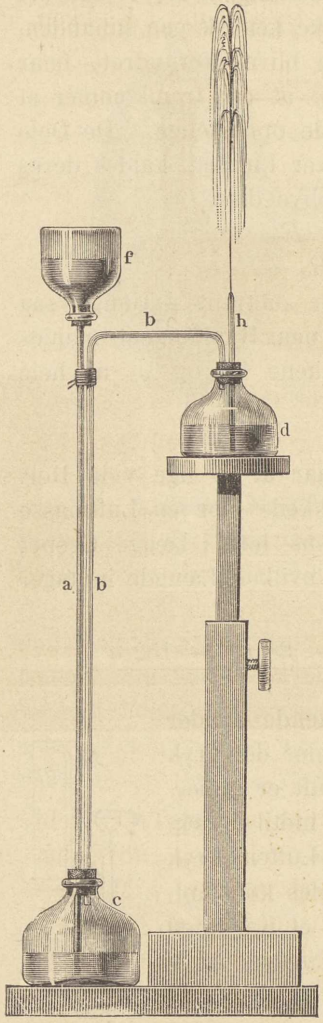


Fig. 98.

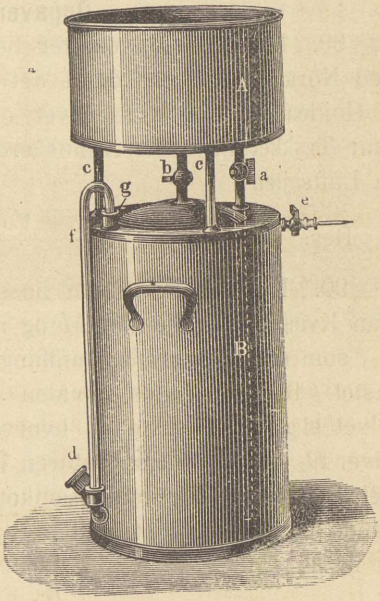


Fig. 99.

i den underste Beholder; *f* er et Vandstandsrør; *c c* ere kun Bærepiller. Hvorledes maa man gaa frem for at opsamle en bestemt Luftart og bagefter faa den til at strømme ud, uden at den blandes med atmosfærisk Luft?

93. I Gasværker bruges Gasometre af Form, som Fig. 100 viser. *A* er en stor Klokke, dannet af Jærnplader; den svømmer i et Vandbassin og styres af 5 Støtter langs Omkredsen. Gennem Røret *R* strømmer Gassen ind i Klokken,

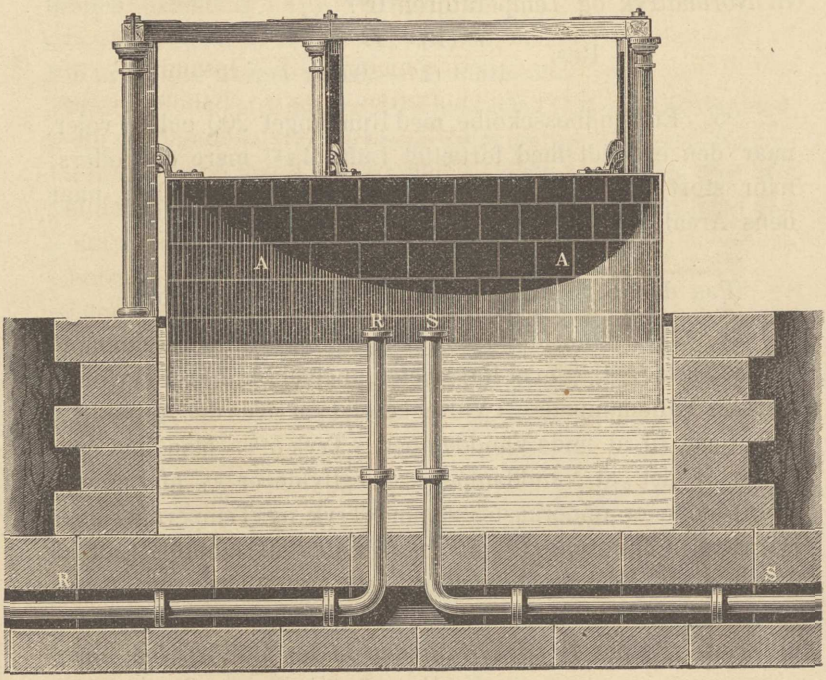


Fig. 100.

og gennem *S* føres den ud i Ledningen med et Tryk, som bestemmes ved Niveauforskellen indvendig og udvendig. Ogsaa til mindre Luftmængder, f. Eks. Kulsyre i Mineralvandsfabrikker, anvendes saadanne Gasometre; de have den Fordel, at man ved Tillægsvægte eller Modvægte paa Klokken kan frembringe forskellige Tryk under Udstrømningen.

Hvis Klokkens Vægt er *P* Kilo og Gennemsnitsarealet *A* □$^{m}$, hvor stor en Modvægt maa man da anvende, for at

Luften kan strømme ud med et Tryk af $a^{cm}$ Vand over det ydre Lufttryk. Der tages intet Hensyn til Tykkelsen af Beholderens Vægge.

Res. $P - 10\ A\ a$.

94. En Luftmængde opsamles i et omvendt Glas over Vand. Atmosfærens Tryk er $B^{cm}$, Varmegraden $t^0$, og Vandet staar $l^{cm}$ op i Glasset. Dersom Luften indtager et Rumfang $r$, hvor stort vilde Rumfanget saa blive, naar det reduceredes til Normaltryk og Temperaturen $0^0$?

Res. $\frac{r\ (13{,}6\ .\ B - l)}{1033\ (1 + 0{,}00367\ t)}$.

95. En Vindbøssekolbe med Rumfanget 200 cub$^{cm}$ vejer, naar den er fyldt med fortættet Luft, $3{,}9^{gr}$ mere end ellers; hvor stort et Tryk behøves der for at aabne Ventilen, naar dens Areal er $^1/_2\ \square^{cm}$?

Res. $7^3/_4$ Kilo.

(Paa denne Maade prøvede Ørsted Mariottes Lov).

96. Den atmosfæriske Luft indeholder altid Vanddampe, og det Tryk $B^{cm}$, som et Barometer angiver, hidrører derfor til Dels fra Vanddampene. I Varmelæren beskrives der Apparater, som tjene til at finde Vanddampenes Tryk $b^{cm}$. Man har endvidere fundet, at Vanddampenes Vægtfylde er $^5/_8$ af Luftens, naar denne er underkastet samme Tryk og Temperatur som Dampene. Der spørges nu om Vægten af 1 cub$^{cm}$ Luft af den nævnte Beskaffenhed eller med andre Ord om denne Lufts Vægtfylde; Temperaturen er $t^0$.

Res. Kaldes Normalvægtfylden af tør Luft $F$, faar man

$$f = \frac{F\ (B - {}^3/_8\ b)}{76\ (1 + 0{,}00367\ t)}.$$

97. Vis, at Luftens Vægtfylde ligger mellem Grændserne 0,0011 og 0,0015, naar den højeste og laveste Temperatur er + 30 og — 20, og Barometerstanden ligger mellem $72^{cm}$ og $80^{cm}$.

**69. Hæverten.** Den enkelte Hævert eller Stikhæverten er et lige Rør, forneden og foroven snevert, men videre paa Midten. Stikkes den ene Ende ned i en Vædske, medens

man formindsker det indvendige Tryk ved Sugning, stiger Vædsken, og naar man med Fingeren lukker for Hæverten, kan man løfte den med sit Indhold; er Hævertens nederste Aabning lille, er det tilstrækkeligt at sætte Fingeren for den øverste. Trykket formindskes inde i Hæverten enten ved at suge med Munden eller ved Hjælp af en lille elastisk Ballon. Stikhæverten bruges meget i Kemien til at udtage et bestemt Rumfang af en Vædske.



Fig. 101.

Den togrenede Hævert bestaar af et bøjet Rør, der bruges til at lede Vædske fra en Beholder over i en anden; den maa først fyldes, hvad der sædvanligt sker ved Sugning. Stilles nu Hæverten i to Kar med Vædske, som Fig. 102 viser, kan man tænke sig Lufttrykket ved

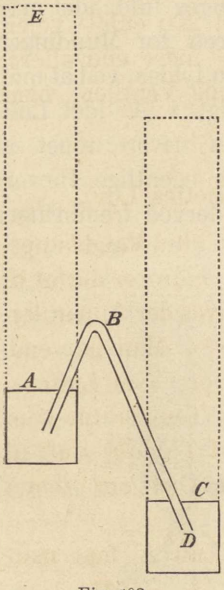


Fig. 102.

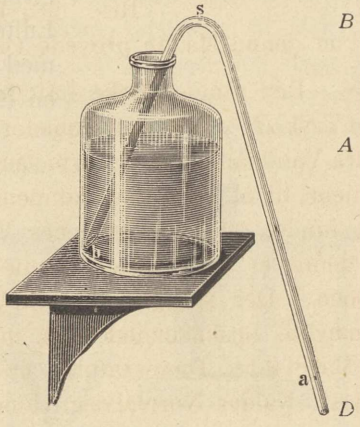


Fig. 103.

*A* og *C* erstattet af en Vædskesøjle, der giver samme Tryk, og Forholdet er derfor, som om man blot havde to forbundne Kar, hvori Vædsken stod ulige højt. Denne vil altsaa løbe fra Karret *A* til *C*, saafremt Hævertens øverste Punkt *B* ligger under *E*; Betingelsen derfor er, at Vædskesøjlen mellem *A* og *B* maa trykke mindre end Atmosfæren. En Hævert, som bruges til Vand, kan altsaa være indtil 10 m høj, til Kvægsølv 76 cm; i et lufttomt Rum kan Hæverten ikke bruges.

Det er unødvendigt, at Mundingen *D* er under Vand,

naar der blot ikke kommer Luft ind i Hæverten. Dette sker ikke, naar Mundingen er nogenlunde snever, eller naar Vædsken løber hurtigt. For at Vædsken skal løbe ud ved $D$, maa dette Punkt ligge under Vandspejlet $A$ (Fig. 103).

Vil man bevare en uforandret Udløbshastighed, lader man Hæverten svømme paa Vædsken, hvorved opnaas, at $D$ hele Tiden er i samme Dybde under Vandspejlet i Karret.

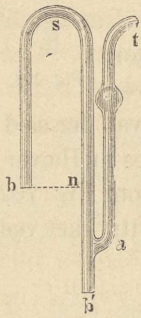

Fig. 104.

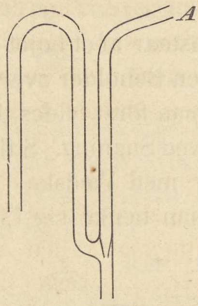

Fig. 105.

Hvis man vil undgaa at faa Vædske ind i Munden ved Sugningen, giver man Hæverten en af hosstaaende Former. Den første maa suges fuld, idet man sætter Fingeren for Mundingen $b_1$; den anden fyldes, ved at man blæser kraftigt i $A$, idet Luftstrømmen da river noget af Luften i den egentlige Hævert med sig og derved frembringer en Sugning.

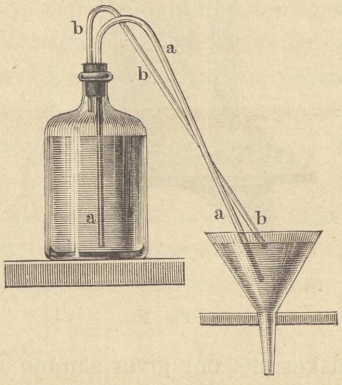

Fig. 106.

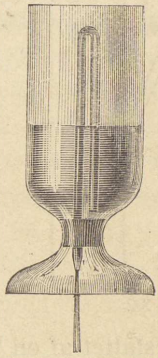
Fig. 107.

Fig. 106 viser en Anvendelse af Hæverten til at vedligeholde et konstant Niveau i et Filter.

Tantalusbægeret (Fig. 107) er indeni forsynet med en Hævert, hvis øverste Punkt er lidt lavere end Bægerets Rand, og hvis korte Gren udmunder ved Bunden, medens den lange gaar igennem Bægerets Fod. Naar dette bliver helt fyldt med Vand, tømmes det straks gennem Hæverten. Lader man

Vand stadig strømme ind i Bægeret, men mindre end der kan løbe ud af Hæverten, vil Følgen blive, at Bægeret fyldes og tømmes med Mellemrum den ene Gang efter den anden. Paa denne Maade forholder det sig rimeligvis med de intermitterende Kilder, som findes nogle Steder; man antager, at de ere Mundinger af hævertformede Afløb fra underjordiske Rum, som afvekslende fyldes ved Tilløb og tømmes gennem Hæverten.

**70. Opdriften i Luft, Luftballoner.** Ethvert Legeme maa i Luften have en Opdrift af Størrelse som den fortrængte Lufts Vægt, og det maa altsaa blive saa meget lettere. Den virkelige Vægt af 1 Kilo Fjer er derfor større end af 1 Kilo Bly, naar de ere afvejede i Luften, da det første fortrænger mere Luft end det andet.

Opdriften i Luft kan vises ved et Dasymeter, hvorved man forstaar en Vægtstang, som paa den ene Arm bærer en meget stor, hul og let Kugle, men paa den anden en lille tung Genstand. Hvis der bringes Ligevægt til Veje i en vandret Stilling af Vægtstangen, vil man se den store Kugle stige, saasnart Luftens Tryk og dermed dens Vægtfylde og Opdriften bliver større, og omvendt naar Lufttrykket bliver mindre. Dette Apparat kan saaledes tjene som en Art Barometer.

Opdriftens Foranderlighed er meget forstyrrende ved Bestemmelsen af Luftarters Vægtfylde; men Regnault har omgaaet Vanskelighederne ved at benytte to lige store Beholdere, hvoraf den ene blot er Modvægt mod den, hvori Luften vejes (Fig. 108).

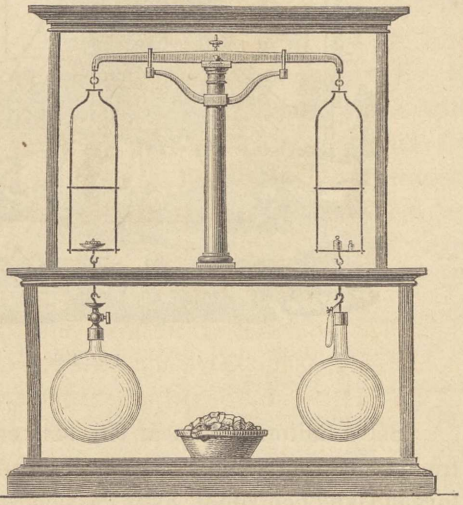

Fig. 108.

Hvis et Legemes Opdrift er større end dets Vægt, vil det

stige og kommer først i Ligevægt i et Luftlag af samme Vægtfylde som det selv. Blæser man saaledes Sæbebobler med Gas eller Brint, stige de hurtigt og højt. Man kan ogsaa lave smaa, forneden aabne Balloner af tyndt Papir og faa dem til at stige, naar man under Aabningen ved en tynd Jærntraad fastgør en Svamp eller lidt Bomuld, dyppet i Spiritus, og lader denne brænde, hvorved Luften udvides og fortyndes i Ballonen.

Efter disse Principper konstrueres de egentlige Luftballoner. Efter Opfinderne, som levede i forrige Aarhundredes Slutning, kalder man dem Montgolfierer, naar de stige paa Grund af den indelukkede Lufts Opvarmning, Charlierer, naar de stige, fordi de ere fyldte med en let Luftart.



Fig. 109.

Selve Ballonen laves af Tøj, som er ferniseret eller gennemtrængt med Kautschuk. Montgolfiererne have forneden en ringformet Gang helt rundt, hvor Passagererne kunne være, og hvorfra Ilden passes. Ved Charliererne befinde Passagererne sig i

en Kurv, den saakaldte Gondol, der bæres af et Net af Tovværk, som omslutter Ballonen selv. Nu om Stunder bruges kun de sidste, og de fyldes enten med Brint (Fig. 109) eller Belysningsgas; den første har mindst Vægtfylde og tillader derfor Anvendelsen af noget mindre Balloner, men Brinten er temmelig dyr og trænger let gennem Tøjet ud i Luften. Da Ballonen efterhaanden kommer op i Luftlag med mindre Tryk, vil den indvendige Luft udvide sig; derfor fyldes Ballonen ikke helt, og til yderligere Betryggelse mod den Fare, der vilde være, hvis Tøjet revnede, lader man Ballonens nederste, tynde Del være aaben. For senere hen at kunne stige efter Behag, medtages der Ballastsække med Sand, som kunne kastes ud, hvorved Vægten formindskes; for at kunne dale igen, har Ballonen foroven et Hul, der lukkes af en indadgaaende Ventil, som ved Hjælp af en Snor kan aabnes fra Gondolen, saa Brinten eller Gassen slipper ud. Foruden de Farer, der kunne opstaa ved Uheld eller Uagtsomhed, er der altid Vanskelighed ved Nedstigningen; for at den ikke skal ske med for stærk Fart, medtages der en lang Ende Tov, som befæstes til Gondolen og ved at slæbe paa Jorden dels bevirker en betydelig Gnidningsmodstand og dels letter Ballonen, saa den ikke daler saa pludseligt. Desuden udkastes der ogsaa Ankere for at holde sig fast paa et bestemt Sted.

Rejser med Luftballoner ere til Dels foretagne for at anstille forskellige Iagttagelser i de højere Luftlag; den største Højde, der er naaet, er noget over en Mil. Ligeledes ere Balloner anvendte i Krigstilfælde, f. Eks. under den fransktydske Krig i 1870. Det er først i den sidste Snes Aar lykkedes at finde saadanne Forbedringer, at det har været muligt at styre en Ballon i bestemte Retninger. Dertil udkræves, at den har en egen Bevægelse og ikke udelukkende driver med Vinden. I det Øjemed har man givet selve Ballonen en langstrakt tilspidset Form, hvorved Modstanden mod Egenbevægelsen formindskes i Længderetningen. Desuden er den forsynet med en Skrue, der drejes ved en lille Dampmaskine eller ved Haandkraft og i de seneste Forsøg ved Elektricitet; Ballonen bevæges herved frem gennem

Luften, ligesom et Skrueskib i Vand. Endelig behøves der et Ror, hvortil der anvendes et lille Sejl. Ved disse Forbedringer er det virkelig lykkedes at bevæge og styre



Fig. 110.

Luftballonen med en Hastighed af cr. 10 Kilometre i Timen dog ikke i Retninger, der afvige meget fra Vindens, naar den er stærk.

## Opgaver.

98. Et cylindrisk Rør af Længde $1^{m}$ har i Bunden en lille Aabning, saa at Luften ikke kan komme ind gennem den, samtidig med at der løber Vand ud. Røret fyldes med Vand, og naar Vandspejlet atter er sunket $475^{mm}$, sætter man Fingeren for den øverste Ende. Hvor langt synker Vandet endnu?

Res. Til Midten af Røret.

99. Naar en Blykugle vejer 10 Kilo i Luften, hvor meget vil dens Vægt da tiltage i det lufttomme Rum?

Res. $1{,}_{14}^{gr}$.

100. Vejer en Blære lige meget, naar den er klemt flad, og naar den er pustet op? Hvordan gaar det med dens Vægt, naar den er fyldt med Kulsyre eller med Brint?

101. Et Legeme har i Luft Vægten $P$ og Vægtfylden $f$; hvad er dets Vægt i det lufttomme Rum, naar Luften har sin Normalvægtfylde?

Res. $P\left(1 + \frac{0{,}0013}{f}\right)$

102. Bevis, at den Opdrift, som faar en Luftballon til at stige, holder sig konstant, saa længe Ballonen ikke er helt udspændt, skønt den omgivende Luft har mindre Vægtfylde højere oppe.

103. En Luftballon har Form som en Kugle med Diameter $10^{m}$. Tøjet, hvoraf den er lavet, vejer $200^{gr}$ for hver $\square^{m}$. Hvor stor er dens Stigkraft, naar den er fyldt halvt med ren Brint (Vægtfylde $^{1}/_{14}$ af Atmosfærens), og naar den er fyldt helt med Belysningsgas (Vægtfylde $^{1}/_{2}$).

Res. 253 Kilo, $277^{1}/_{3}$ Kilo.

**71. Højdemaaling ved Barometret.** Vi have set, at Barometerstanden ikke er den samme paa to Steder, der ligge i forskellig Højde over Jorden. Dersom Luftens Vægtfylde ikke aftog opad, maatte Barometerfaldet forholde sig til de to Steders Højdeforskel, ligesom Luftens Vægtfylde til Kvægsølvets; Barometret vilde med andre Ord falde $1^{cm}$, naar man steg $105^{m}$ gennem et Luftlag med normal Vægtfylde. Men denne Forudsætning kan man ikke gøre uden ved meget

smaa Højdeforskelle, f. Eks. 1 m. Lad os kalde Barometerstanden udtrykt i Centimetre ved Jordens Overflade $B_0$, i 1 m Højde $B_1$, i 2 m Højde $B_2$ osv., og Luftens Vægtfylde paa de tilsvarende Steder $f_0, f_1, f_2$, osv. Antage vi foreløbig, at Temperaturen er 0°, have vi

$$\frac{B_0\,\text{cm} - B_1\,\text{cm}}{100\,\text{cm}} = \frac{f_0}{13{,}6} = \frac{0{,}0013\ B_0}{76\ .\ 13{,}6}$$

(efter § 67), hvoraf faas:

$$B_1 = B_0 \left(1 - \frac{0{,}13}{76\ .\ 13{,}6}\right) = \alpha\ .\ B_0,$$

idet $\alpha$ er Parentesens konstante Værdi, som er en Ubetydelighed mindre end 1. Paa samme Maade faas

$$B_2 = \alpha\ .\ B_1 = \alpha^2\ B_0$$
$$B_3 = \alpha\ .\ B_2 = \alpha^3\ B_0$$

o. s. v.

I en Højde af $n$ Metre haves da

$$B_n = \alpha^n\ .\ B_0,$$

hvoraf

$$n = \frac{log\ B_n - log\ B_0}{log\ \alpha} = \beta\ (log\ B_0 - log\ B_n),$$

idet $\frac{1}{log\ \alpha}$ betegnes ved $-\beta$.

Dersom man vilde tage Hensyn til Luftens Temperatur, maatte man vide, hvorledes den forandrede sig i forskellige Højder, men da det er vanskeligt at komme til Kundskab derom, nøjes man med at foretage en lille Rettelse i den fundne Formel. Man bestemmer nemlig Middeltemperaturen $\frac{t_n + t_0}{2}$ paa det højeste og laveste Sted, og da Luftens Vægtfylde herved vil formindskes i Forholdet $1 + 0{,}00367\ \frac{t_n + t_0}{2}$, multiplicerer man den ovenfor fundne Værdi for $n$ med denne Størrelse. Da Atmosfæren desuden indeholder Vanddampe, hvis Vægtfylde er mindre end Luftens, vil $n$ endda være for lille, og der kan bødes noget paa denne Fejl ved at forhøje Koefficienten 0,00367 til 0,004.

Værdien af Konstanten $\beta$ kan let udregnes, naar man har de nøjagtige Værdier af de Størrelser, der indgaa deri,

men det er bedre at finde den ved Forsøg, idet man anvender Formlen i et Tilfælde, hvor Højden forud er beregnet paa anden Maade. Det har ved saadanne Forsøg vist sig, at man faar de bedste Resultater ved at tillægge $\beta$ Værdien 18400, hvorved Formlen bliver:

$n = 18400\ (log\, B_0 - log\, B_n)\ (1 + 0{,}002\ (t_0 + t_n))$ Meter;

Formlen giver Resultater, som ere nøjagtige indtil faa Metre. Da $log\, B_0 - log\, B_n = log \frac{B_0}{B_n}$, er det ligegyldigt, i hvilken Enhed $B_0$ og $B_n$ maales.

### Opgaver.

104. Hvilket Lufttryk er der i en Højde af $73{,}6^{km}$ (omtrent 10 Mil), under Forudsætning af at den i § 71 fundne Formel gælder i den Højde og Temperaturen er 0?

Res. $0{,}076^{mm}$.

105. I hvilken Højde er Lufttrykket halvt saa stort som ved Jordens Overflade? I hvilken Højde er det $^1/_{10}$?

Res. $5539^m$, $18400^m$.

**72. Luftpomper.** Vi ville først omtale den Pompe (Fig. 111), som bruges til at fortynde Luften. Dens Pomperør eller »Støvlen« maa være nøjagtig cylindrisk indvendig, og Stemplet slutte tæt. I Bunden er der en Ventil, som aabner sig opad og blot bestaar af et Stykke ferniseret Silkebaand, som er udspændt over en Aabning*); Stemplet selv er gennemboret og ligeledes forsynet med en Silketøjs Ventil, der ogsaa aabner sig opad.

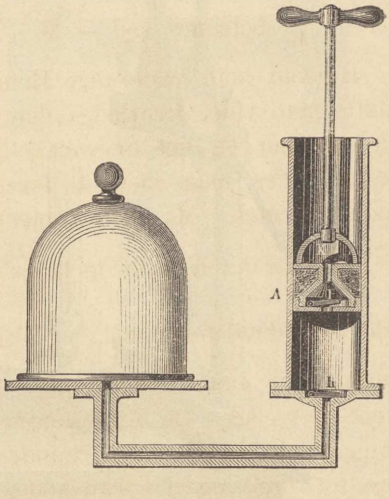

Fig. 111.

*) Ventilerne i Figuren ere ligefrem Klapper.

Bundventilen lukker for en Kanal, der udmunder midt paa en plan Flade, »Tallerkenen«; herpaa sættes en Glasklokke med plansleben Rand, der smøres med lidt Tælle, hvorved den slutter lufttæt, saa Luften kan pompes ud af den. Det forstaas let, hvorledes et opadgaaende Stempelslag suger Luft fra Klokken, og et nedadgaaende Slag trykker Luften ud gennem Stemplet og op i Støvlens øverste Del, der staar i Forbindelse med Atmosfæren. Til Luftpompen hører desuden en lille Trykmaaler (*H*, Fig. 112), som i Almindelighed har Form af et Hævertbarometer med lige lange Grene, hver paa omtrent 10 cm Længde. Det indelukkes i en Glasklokke, der staar i Forbindelse med Sugekanalen; først efter nogle Stempelslag vil Kvægsølvet begynde at synke. Ventilerne gives undertiden andre Former, som det ses af Fig. 113. I Støvlens Bund er der et kegledannet Hul, som kan lukkes ved en Prop af samme Form. Denne Prop sidder paa en Stang,

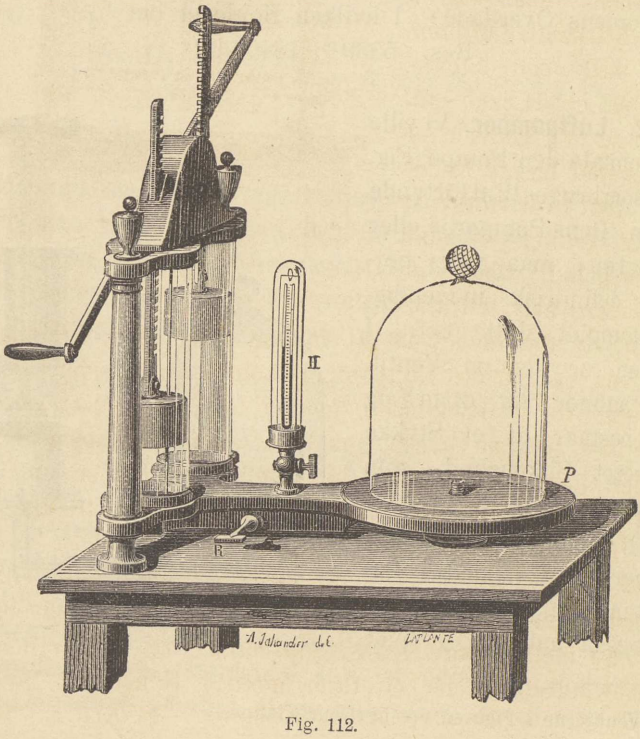


Fig. 112.

der gaar lufttæt gennem Stemplet; naar dette gaar op, løfter det ved Gnidningsmodstandens Hjælp Stangen og Proppen et lille Stykke, indtil et foroven anbragt Tværstykke paa Stangen støder mod Laaget.

Hyppigt bruger man dobbeltvirkende Luftpomper. Fordelen derved er ikke blot en hurtigere Fortynding af Luften, men de ere meget lettere at holde i Gang, da Atmosfærens Tryk altid understøtter det ene Stempels Bevægelse lige saa meget, som det gør Modstand mod det andet.

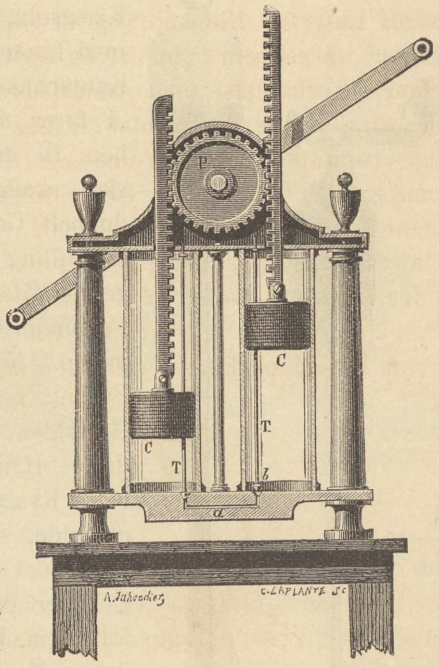


Fig. 113.

Man har ogsaa dobbeltvirkende Luftpomper med een Støvle. Stemplet er da ikke gennemboret, og Støvlen er lukket ved bægge Ender men ved hver forsynet med 2 Ventiler, en udad og en indad. Bægge de sidste føre hen til Tallerkenen, og det er nu let at forstaa Maskinens Virkemaade.

Ved de nævnte Luftpomper kommer man snart til en Grændse for Fortyndingen, nemlig naar den tilbageværende Luft ikke trykker stærkt nok til at aabne Ventilerne. Man bruger derfor undertiden i Stedet for Ventiler en Hane med dobbelt Gennemboring. Naar Stemplet trækkes op, skal Hanen staa saaledes, at der er Forbindelse mellem Støvlen og Kanalen, men naar Stemplet, der i dette Tilfælde er helt, gaar ned, stilles Hanen saaledes, at den giver Forbindelse mellem Støvlen og Atmosfæren. Der bliver dog ved denne Indretning let et Rum mellem Hanen og Støvlens

Bund, og i dette bliver der ved hvert Stempelslag nogen Luft tilbage. (Det skadelige Rum).

Den Luftpompe, som frembringer den største Fortynding, er Geislers Kvægsølvpompe. Den bestaar væsentlig af to rummelige Beholdere med Kvægsølv, som staa i Forbindelse med hinanden ved en bøjelig stærk Kautschukslange. Fra Beholderen *A* fører der et Rør *r* med Hane hen til det Rum, hvoraf Luften skal skaffes bort. Hanen har en dobbelt Gennemboring, saa den i en Stilling giver fri Gang for Luften gennem Røret, og i en anden aabner Forbindelse fra *A* til Atmosfæren ved *p*. Naar Hanen stilles i sidste Stilling, og Beholderen *B* løftes, vil *A* fyldes med Kvægsølv. Derpaa drejes Hanen, og *B* sænkes, men idet Kvægsølvet i *A* begynder at falde, suges der Luft fra Røret *r* og det Rum, det fører hen til. Derefter drejes Hanen atter, og *B* løftes, saa Luften undslipper, og paa denne Maade vedbliver man. Man har ved disse Pomper kunnet frembringe en Fortynding, hvor Trykket kun beløb sig til $^1/_{10}{}^{mm}$. Da det er sent og trættende at arbejde med Kvægsølvpompen, anvendes den i Reglen kun, naar de andre Pomper ikke kunne udrette mere, og naar det kommer an paa at drive Fortyndingen til den yderste Grændse.

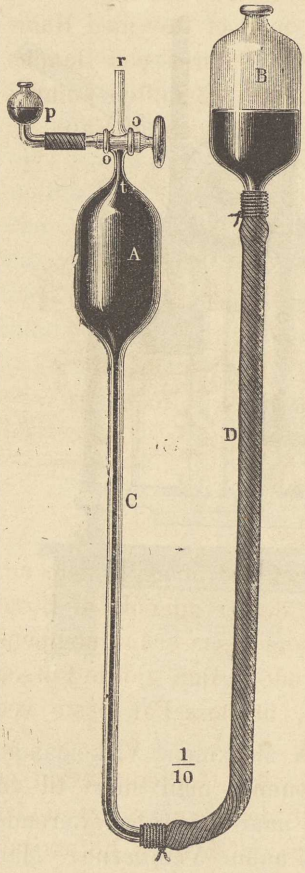

Fig. 114.

**73. Forsøg med Luftpompen.** Hvis den Glasklokke, hvoraf Luften pompes ud, og Tallerkenen ere nøjagtig plane, vil man efter nogle Pompeslag se Trykmaaleren falde og mærke, at Klokken sidder meget fast, idet Atmosfæren trykker

med en betydelig Vægt paa den. For at taale dette Tryk, maa Klokkerne være stærke og fuldstændig afrundede.

Lægger man Haanden over Kanalens Munding, mærker man det indvendige Tryk i Aarerne.

De Magdeborgske Halvkugler ere to tætsluttende hule Kuglekalotter, den ene forsynet med et Rør med Hane, og bægge med stærke Haandtag. De smøres paa Randen med Tælle for at slutte tæt til hinanden, og Luften pompes ud af dem, idet Røret skrues paa Mundingen af Kanalen;

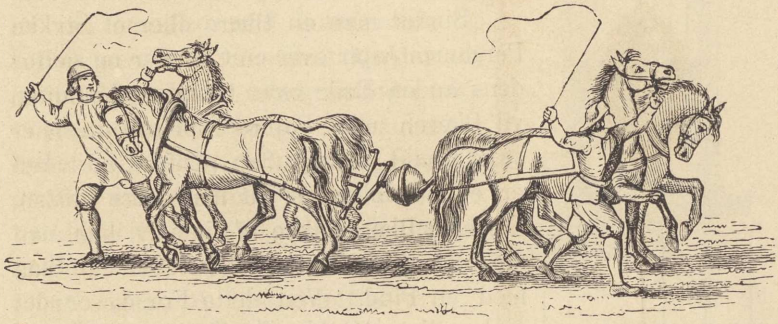

Fig. 115.

der vil nu behøves et betydeligt Træk for at skille dem ad. Apparatets Navn skriver sig fra, at det er udtænkt af Borgmester Otto Gerike i Magdeborg, som ogsaa er Luftpompens Opfinder (midt i det 17de Aarhundrede). Han gjorde Forsøg med et Par Halvkugler, saa store, at flere Par Heste ved hver Side ikke kunde skille dem ad.

Lægges en lukket Blære, af hvilken Luften næsten er trykket ud, under Glasklokken, vil den svulme op under Pompningen. Omvendt vil en Blære, af hvilken Luften udpompes, trykkes saa flad af Atmosfæren, at det ikke er muligt at trække de to Sider fra hinanden.

Stiller man hosstaaende Glas og Flaske under Glasklokken, vil Luften fra Flasken boble op gennem Vandet, der er i Glasset, og ophæves Luftfortyndingen igen, løber Vandet ind i Flasken.



Fig. 116.

Sammensætter man et Apparat som det,

Fig. 117 viser, og pomper Luften ud ved *A*, ser man ved *B* et kraftigt Springvand.

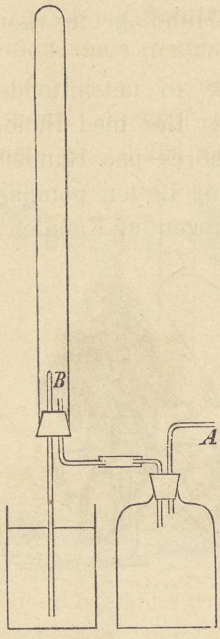

Fig. 117.

En Skaal med Sæbevand og lidt Skum ovenpaa fyldes helt med Skum under Glasklokken, naar den bliver lufttom.

En Klase af fuldstændig hele Konfektrosiner svulmer op som Druer, naar Trykket ophører udvendig, og et rynket Æble uden Huller paa Skallen bliver glat. Af et Æg med et lille Hul paa løber Hviden ud.

Binder man en Blære eller et Stykke Pergamentpapir over en Cylinder og sætter dens anden Ende over Kanalens Munding, vil Blæren eller Papiret springe med et stort Knald, naar Luften pompes ud. Det er en Selvfølge, at alt maa være lufttæt. Springer Blæren ikke af sig selv, kan man faa den til det ved et ubetydeligt Slag med en Pind. Ved dette Forsøg er det nødvendigt at lukke for Trykmaaleren, da den ellers let kommer i Uorden ved den pludselige Trykforandring.

Dækker man en lignende Cylinder med et tætsluttende Trælaag, som har en Fordybning, og lægger Kvægsølv i denne, vil der ved Luftfortyndingen opstaa en fin Regn af Kvægsølv.

Ender Cylindren i en Metalring, som er sleben skarp, og man lægger et Æble derpaa, vil der under Pompningen udskæres et Stykke deraf.

Mange Ting, som filtreres, løbe meget langsomt gennem Filtret; det gaar i saa Fald hurtigere, naar man fortynder Luften under Filtret. (Hertil bruges dog sædvanligt de saakaldte Vandluftpomper, der skulle omtales senere.)

Holdes et Stykke Træ under Vand, medens man fortynder Luften over dette, ser man Luftblærer undvige fra Træet saa at Vandet bagefter kan løbe ind i Porerne, og det viser sig da, at Træets Vægtfylde er bleven større end Vandets.

Sættes et lille fintmærkende Dasymeter under Glasklokken, ville nogle faa Pompeslag bringe den store Kugle til at synke.

Til at veje Luften bruges en Kolbe med Hane; den vejes først fyldt med Luft, derefter lufttom, og vil man bestemme Luftens Vægtfylde, vejes Kolben ogsaa fyldt med Vand.

Der er endnu flere Forsøg med Luftpompen, som skulle omtales paa de Steder, hvor de høre hjemme.

**74. Fortætningspomper** indrettes paa lignende Maade som Fortyndingspomperne, men Ventilerne aabne sig den modsatte Vej, og dersom der anvendes Haner, maa de stilles saaledes, at de ved Stemplets indadgaaende Bevægelse give Forbindelse med Pomperøret og Kanalen, men ved Stemplets udadgaaende Bevægelse tillade den atmosfæriske Luft at strømme ind under Stemplet. Hvis det er en Klokke, hvori Luften skal fortættes, sættes den paa Tallerkenen, men maa fastholdes ved et betydeligt Tryk udefra og være meget stærk for ikke at springe.

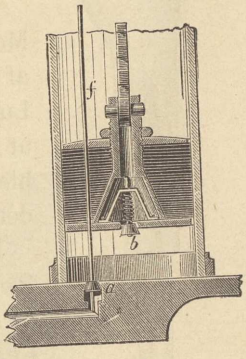

Fig. 118.

**75. Anvendelser af Luftpomperne.** Fortyndingspompens vigtigste Anvendelse er i Lavtryks-Dampmaskiner; endvidere anvendes den til Fabrikation af kunstig Is. Til Ventilation i underjordiske Gange bruges ofte en Art Sugemaskiner, hvis Indretning ligner Luftpompens.

Fortættet Luft kan man anvende som Bevægkraft, f. Eks. Hyldebøsser, Vindbøsser o. lign. De sidste have i Geværkolben en meget stærk Jærnbeholder med indadgaaende Ventil (Fig. 119); naar Beholderen er fyldt med sammenpresset Luft, kan man ved Hjælp af Aftrykkeren slaa Ventilen tilbage og lade lidt Luft slippe ud, som saa er i Stand til at drive en lille Kugle ud af Geværløbet. Jærnbeholderen fyldes med Luft ved at skrue Kolben af Geværet og fastgøre den paa Enden af et Rør, hvori der kan bevæges et Stempel uden Gennemboring. Ved Stemplets ene Bevægelse presses Luft ind i Kolben og ved den anden slipper der igen Luft ind i Pomperøret mellem Stemplet og Kolben, idet Pomperøret har et Hul paa Siden lidt indenfor den yderste Stilling, Stemplet kommer i. (Fig. 119). Vindbøssen

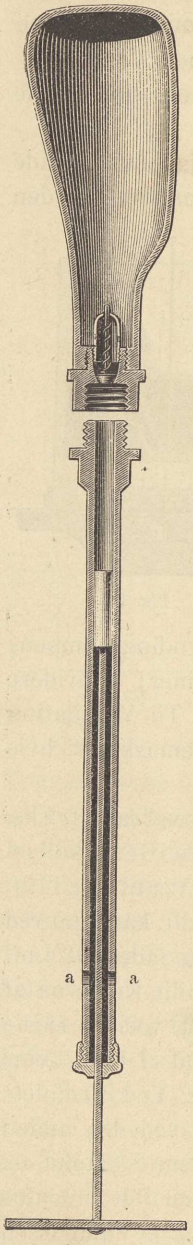

Fig. 119.

er farlig at have med at gøre, da Luften inde i Kolben kan sprænge denne, især dersom den er fyldt i kold Luft og bagefter bringes ind i Varmen. De have den Fordel, at der kan skydes mange Skud med samme Ladning i Kolben, og at de ikke frembringe noget Knald.

Ved Boringen af Tunnelen gennem Mont Cenis bleve Boremaskinerne drevne af fortættet Luft, som sendtes ind af en Luftpompe, der var opstillet udenfor. Efter at Luften havde virket ved sit Tryk i Maskinen, blev den sluppen ud og ventilerede med det samme inde i Tunnelen.

I nogle store Byer har man indrettet Rørposter. Med disse befordres Breve og Smaapakker, der indelukkes i en rund Kasse, som passer i et Rør, der forbinder Endestationerne. Ved en af disse frembringes der enten Luftfortynding eller Fortætning i Røret, hvorved Kassen befordres med overordentlig stor Hastighed, 1 Kilometer i faa Sekunder. Det er ligeledes forsøgt at bygge atmosfæriske Jærnbaner efter samme Princip. Mellem Skinnerne, som Vognen løb paa, var der anbragt et Rør, i hvilket der bevægede sig et Stempel, som var fastgjort paa Vognen ved en Stang. Hvor denne gik gennem Røret, havde dette en Udskæring langs hele sin Udstrækning, og den derved opstaaede Rende dækkedes af en Række Ventiler, som aabnedes af Stangen og lukkede sig igen ved deres Vægt. Disse Jærnbaner vare altfor dyre og anvendes ikke mere.

**76. Vandpomper.** Sugepompens Stempel, den saakaldte Spand, er gennemboret og har en Ventil, der aabner sig opad; i

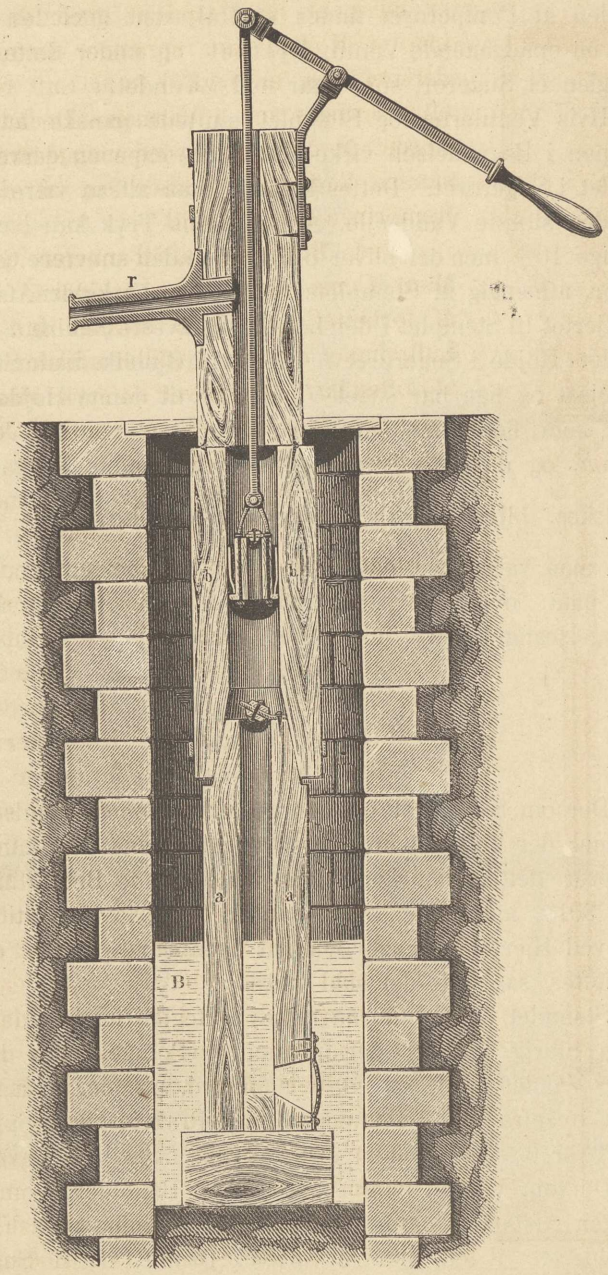


Fig. 120.

Bunden af Pomperøret findes et Hul, der ligeledes lukkes med en opadgaaende Ventil, Hjertet, og under dette er der i Reglen et Sugerør, som naar ned i Vandet.

Hvis Ventilerne og Stemplet sluttede ganske tæt, vilde Pompen i Begyndelsen virke som Luftpompe og derved løfte Vandet i Sugerøret. Dettes Længde maa altsaa være mindre end den største Vandsøjle, Atmosfærens Tryk kan bære, det vil sige $10^m$, men der bliver tillige en anden snevrere Grændse derfor, afhængig af Stemplets Stillinger. Vi kalde Afstanden fra Hjertet til Stemplet i den højeste og laveste Stilling $a_1$ og $a_2$, Vandets Højde i Sugerøret $h^m$ i et vist Øjeblik, naar Stemplet er højest og lige har suget Vandet op til denne Højde. Den Luft, som findes mellem Hjertet og Stemplet, har Trykket $10 - h$, og da dens Rumfang under Stemplets Nedgang formindskes, bliver Trykket ifølge Mariottes Lov $(10 - h)\,\frac{a_1}{a_2}$; dette maa være stort nok til at aabne Stempelventilen, d. v. s. det maa overgaa Atmosfærens Tryk. Heraf udledes Betingelsesligningen

$$(10 - h)\,\frac{a_1}{a_2} > 10$$

eller

$$h < 10\left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right)$$

Dersom Sugerøret er mindre end denne Grændseværdi, kommer der Vand op over Hjertet; hvor langt det kan suges op over dette, kan findes ved en lignende Betragtning (Se Opg. 301); men naar blot Spanden i sin laveste Stilling er nær ved Hjertet, trænger Vandet igennem Spanden og kan saa løftes, saa højt det skal være.

Stemplet og Ventilerne tættes i Reglen med Læder, men slutte aldrig lufttæt; derfor maa en Pompe, naar den har »tabt« Vandet, først »spædes« paany, d. v. s. der maa hældes Vand ovenfra ned i Pomperøret. I Praksis gøres Sugerøret ikke over $6—7^m$ og Stempelslaget ikke over $^1/_2{}^m$.

Dersom Vandet pompes op fra en Beholder, som ligger i nogen Afstand, lægges der helst en Ledning med Fald fra Beholderen til en mindre, gravet Brønd, hvori Sugerøret sættes. Man undgaar derved at anvende Arbejde til at be-

væge den Vandmasse, som stadig skal strømme gennem Ledningen.

Trykpompen (Fig. 121) har helt Stempel, som ved sin nedadgaaende Bevægelse presser det Vand, der er suget op over Hjertet *a*, ud gennem en Sideventil *b*; denne aabner sig udad i et Stigrør, der leder Vandet derhen, hvor det skal bruges. Trykpompen gøres i Almindelighed lille men meget stærk, da Trykhøjden sædvanlig er stor.

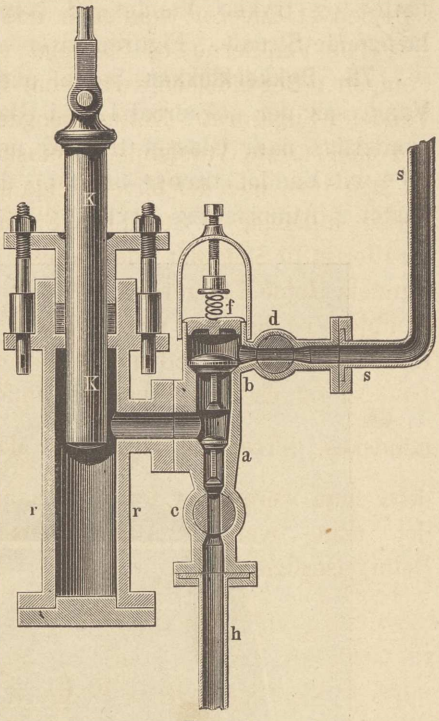

Fig. 121.

**77. Brandsprøjten** bestaar af en Trykpompe, hvis Stigrør gaar ind i en Vindkedel, d. v. s. en lukket stærk Beholder, fra hvis Bund der udgaar et Rør. Saa snart Pompen har drevet saa meget

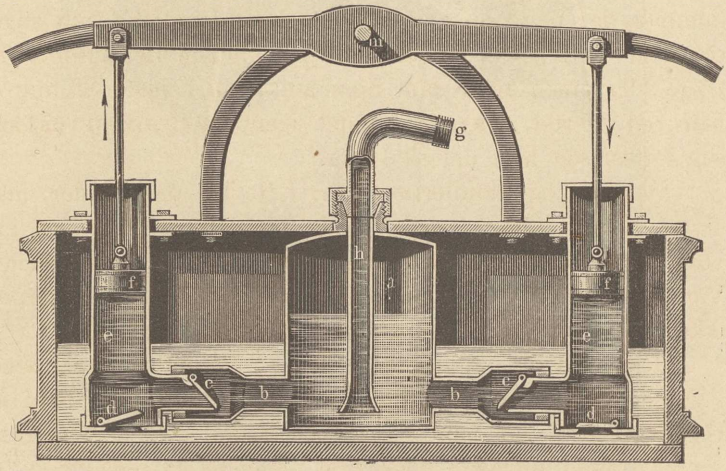

Fig. 122.

Vand ind i Vindkedlen, at Udløbsaabningen er bleven afspærret, vil Luften derinde ved fortsat Pompning blive fortættet og trykke Vandet ud gennem Røret i en sammenhængende Straale. Figuren viser en dobbeltvirkende Sprøjte.

**78. Dykkerklokken.** Sætter man et omvendt Glas oven paa Vand, saa der afspærres Luft i Glasset, vil Vandet ikke stige synderlig, naar Glasset trykkes ned. Først i en Dybde af $10^m$ vil Vandet trænge halvt op deri, idet Luften er underkastet 2 Atmosfærers Tryk.

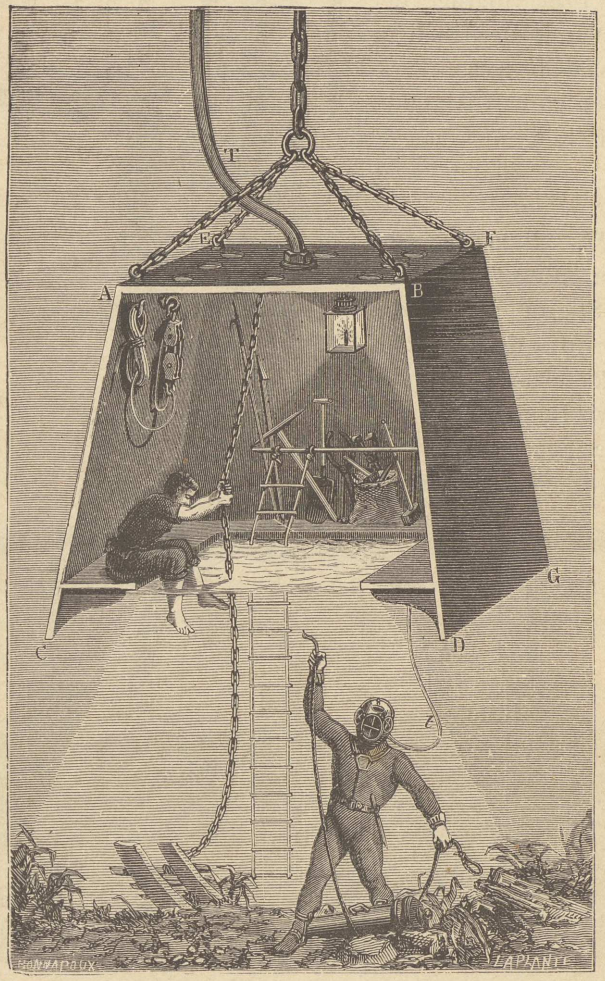


Fig. 123.

En Dykkerklokke er en stor Jærnkasse, der paa samme Maade sænkes ned i Vandet. Indeni sidde Dykkerne, og efterhaanden som Kassen kommer dybere, pompes der gennem en Slange ovenfra Luft ned i den, saa Vandet slet ikke stiger derinde. Den Kulsyre, som Arbejderne udaande, slipper bort forneden eller gennem en Ventil, medens Luftpompen foroven arbejder uafbrudt. Det er dog paa Grund af det store Tryk, Luften bliver underkastet, ikke muligt at opholde sig i en Dykkerklokke i meget lang Tid, især paa dybt Vand. Arbejderne i Klokken kunne ved Slag paa Jærnpladerne give Signaler, der let høres foroven. I klart Vand behøves der ikke kunstigt Lys, da Klokken i Oversiden har Glasruder, som opfange Dagslyset, men i mudret Vand og om Natten medtages der Lys.

Hvis Arbejdet medfører, at Dykkerne skulle bevæge sig frit omkring, bruges Dykkerhjælmen. Dykkerne iføres da en Dragt af Kautschuk og faa Hjælmen over Hovedet; bægge Dele fastgøres tæt til en ringformet Plade, som lægges om Halsen. I Hjælmen pompes Luft fra oven, og den fordærvede Luft gaar bort gennem en Ventil, hvis Aabning dækkes af en fin Rist. Paa Fødderne faar Dykkeren Sko med meget tunge Blysaaler. Desuden fører han ofte en Lygte med sig, som staar i Forbindelse med Atmosfæren ved to Slanger, en til at føre Luft ned og en til at føre den brugte Luft op; nu bruges ogsaa elektriske Lamper.

Dykkere anvendes ofte til Vandbygningsarbejder, f. Eks. Bropiller, til at efterse Skibe i Bunden, til at bjærge strandet Gods, osv.

## Opgaver.

106. Rumfangene af Støvlen og Klokken i en Luftpompe forholde sig som 2 til 3. I hvilket Forhold staar Luftens Tryk under Klokken efter 10 Pompeslag til Atmosfærens Tryk?

Hvor mange Pompeslag behøves der for at frembringe et Tryk af $1^{mm}$?

Res. $0{,}6^{10} = 0{,}006$; 13.

107. Hvis en Fortætningspompe har samme Størrelse af Støvlen og Glasklokken som i forrige Opgave, i hvilket Forhold er da Luften fortættet efter 6 Slag?

Res. 5 Gange.

108. I en Sugepompe befinder Udløbstuden sig i en Højde af $h^{m}$ over Vandspejlet. Find det Tryk, der virker imod Stemplets Bevægelse.

Res. Under Opgangen er Trykket konstant og beløber sig til $1000h$ Kilo for hver $\square^{m}$ af Stemplets Areal; under Nedgangen er Trykket 0.

109. Dersom Stempelslaget i en Sugepompe er $s^{m}$, og der gøres et Slag op og ned i hvert Sekund, hvor mange Hestekræfter behøves der da for hver $\square^{m}$ af Stempelarealet, idet man i Praksis regner, at kun $^{2}/_{3}$ af Kraften bliver nyttig. Tuden er $h^{m}$ over Vandspejlet. — Hvilken Vandmængde giver Pompen i Sekundet, dersom $s = {}^{1}/_{2}{}^{m}$, og Stempelarealet er 2 $\square^{dm}$?

Res. $20\,hs$; 10 Kilo.

110. Hvorledes er Arbejdet fordelt under Stemplets Op- og Nedgang i en Trykpompe?

111. En Dykkerklokke har Højden $1^{1}/_{2}{}^{m}$, Længden og Bredden er $2^{m}$; den er dannet af Jærnplader, hvoraf hver $\square^{cm}$ vejer $40^{gr}$. Hvad vejer den, og hvad vejer den Luft, som fylder den, naar den er sænket paa en Dybde af cr. $20^{m}$? Hvor stor er den Opdrift, den er underkastet?

Res. 6400 Kilo, 23,4 Kilo, 6000 Kilo.

**79. Vedhængning mellem faste Legemer og Luftarter.** Ligesom Vædsker vise en større eller mindre Vedhængning til faste Legemer, saaledes gaar det ogsaa med Luftarter.

Denne Vedhængning bliver især meget kendelig ved porøse Legemer, der kunne indsuge store Mængder af Luft. Lægger man saaledes et Stykke glødende Trækul oven paa Kvægsølv og stiller et omvendt Glas derover, vil man see, at efterhaanden som Kullet afkøles, stiger Kvægsølvet i Glasset. At Kullet skal være glødende eller i al Fald nylig udglødet, beror paa, at det ellers i Forvejen har indsuget den Luft, det kan, men ved Glødningen jages den atter ud.

Andre Luftarter indsuges i højere Grad end atmosfærisk Luft. Forsøget er saaledes mere paafaldende, naar man først fylder et Glas over Kvægsølv med Kulsyre eller endnu bedre med Ammoniak og derefter stikker Kullet ned under Glassets Munding (Fig. 124).

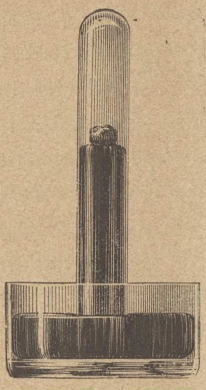

Fig. 124.

Ved en saadan Indsugning eller Absorption af Luftarter udvikles der Varme, som undertiden kan blive meget betydelig; man har Eksempler paa, at større Mængder pulveriseret Kul, som bruges i Krudtfabrikationen, ved denne Varme ere komne i Brand. Ligeledes kan Mel undertiden komme i Brand af sig selv eller endog eksplodere, naar det henligger i større Bunker.*)

Hvis den fortættede Luftart er brændbar, kan denne ogsaa antændes ved den udviklede Varme. Man har anvendt dette i Platinfyrtøjet, der var meget i Brug, før Tændstikkerne bleve opfundne (for omtrent 50 Aar siden). Det er et Brintudviklingsapparat, der kan sammenstilles af et Lampeglas og et Cylinderglas, som Figur 125 viser; i den snevre Del af Lampeglasset lægges der en Kautschukplade og oven paa den nogle Zinkstykker. Naar Kautschukslangen *A* klemmes sammen, trykker Brinten den fortyndede Svovlsyre ned under Zinken, hvorved Luftudviklingen standses, indtil der bruges af den Brint, der er opsamlet. (Proppen i Cylinderglasset maa ikke slutte tæt). Ud for Røret *B* er der fastgjort et Stykke Platinsvamp**), d. v. s. meget porøst Platin, og naar Brinten strømmer ud paa den, antændes den af sig selv. Endog i almindelig Tilstand

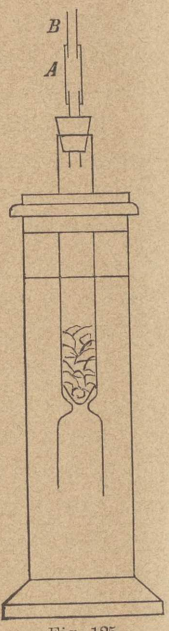


Fig. 125.

*) Hermed maa ikke forveksles den Varme, der kan udvikles ved Gæring eller Forraadnelse af organiske Stoffer, f. Eks. i en Høstak.

**) Platinsvamp laves ved langsom Glødning af sammenpresset Platinsalmiak.

kan Platin indsuge en betydelig Mængde Brint, og det samme gælder om flere andre Metaller.

Alle Legemer ere omgivne af et fortættet Luftlag, som man kan iagttage paa forskellig Maade. Skriver man f. Eks. med en spids Pind paa en Vindusrude og bagefter aander paa den, ses Skriften tydeligt, idet Luftlaget bliver skrabet til Side, og Vanddampene fortættes mest paa de rensede Steder. Det er ikke let at faa det omtalte Luftlag helt bort, og det er især det, som volder Vanskelighed ved Udkogningen af fyldte Barometerrør. Dette Luftlag spiller ogsaa en Rolle ved Vandets Kogning, idet denne indtræder ved en højere Temperatur end sædvanlig, naar Luften er helt skaffet bort. Renser man saaledes et Prøveglas ved Kogning med stærk Svovlsyre og bagefter skyller det ud, vil Vand ikke komme i Kog deri, før Temperaturen er nogle Grader over 100; lader man da Vandet gaa af Kog igen og drysser nogle Jærnfilspaaner derned, begynder Kogningen atter paa Grund af den Luft, som Spaanerne føre med sig.

**80. Indsugning af Luft i Vædsker.** Mange Vædsker kunne indsuge forskellige Luftarter, og man har ved Iagttagelser fundet den Lov, at det Rumfang Luft, en vis bestemt Vædskemængde kan indsuge, er uafhængigt af Trykket, men aftager med voksende Temperatur (Daltons Lov); den indsugede Lufts Vægt er derfor ved konstant Temperatur proportional med Trykket. Ved Indsugning af Blandinger maa man for hver Luftarts Vedkommende regne med dens Partialtryk.

Skønt der kun er indsuget en ringe Mængde Luft i almindeligt Vand, kan man dog se den indsugede Luft undvige som smaa Blærer, naar et Glas koldt Vand kommer ind i en varm Stue. Kulsyre indsuges i rigeligere Mængde; ved 15° Varme indsuges et lige saa stort Rumfang, som Vandet selv har. Man kan se Indsugningen tydeligt ved at fylde et Prøveglas halvt med Vand og Resten med Kulsyre; sætter man Fingeren for og ryster godt, indsuges der saa megen Luft, at Glasset hænger fast ved Fingeren, og at Vandet stiger et kendeligt Stykke, naar der aabnes for Glasset under Vand.

Vand, som indeholder Kulsyre, har Evne til at opløse adskillige faste Stoffer, som det ellers ikke kan holde opløst.

Saaledes indeholder almindeligt kulsyreholdigt Drikkevand navnlig opløst kulsur Kalk, som ved Kogningen udfældes og sætter sig fast som Sten paa Kedlerne. Kulsyreholdigt Vand har tillige en forfriskende Smag; herpaa beror Anvendelsen af forskellige mineralske Vande som Seltservand og deslige. Det almindelige Sodavand er sædvanligt Brøndvand, hvori der er opløst lidt tvekulsurt Natron og Kogsalt, og hvori der er presset Kulsyre ved stærkt Tryk. Til smaa Flasker anvendes et Tryk af 5—6 Atmosfærer, til Sifoner det dobbelte.

De Luftarter, som indsuges stærkest i Vand, ere Klorbrinte og Ammoniak. For den førstes Vedkommende viser man det smukkest ved et lille Apparat, som Fig. 126 viser. Flasken fyldes i opret Stilling med Klorbrinte, derefter lukkes den med en Prop, hvorigennem der gaar et Rør, og naar dettes Munding sættes ned i Vand, der er farvet blaat med Lakmus, ser man et kraftigt Springvand, som Syren farver rødt. Vil man vise Ammoniakkens Indsugning, kan man over Kvægsølv fylde et lille Glas med denne Luftart og ved Hjælp af en Stikhævert bringe en Draabe Vand ind i Glasset; dette vil da hurtig fyldes med Kvægsølv, idet Luften indsuges. Man har fundet, at et Maal Vand kan indsuge indtil henimod 1000 lige saa store Rumfang Ammoniak.



Fig. 126.

### Opgave.

112. Ved Undersøgelsen af den Luft, som Vand indsuger fra Atmosfæren, finder man, at der er omtrent dobbelt saa meget Kvælstof som Ilt. Idet nu Atmosfæren bestaar af $^1/_5$ Ilt og $^4/_5$ Kvælstof efter Rumfanget, spørges der om Forholdet mellem de Rumfang af de to Luftarter, som vilde indsuges af Vand, dersom det var i Berøring med hver Luftart for sig, og disse vare underkastede det samme Tryk under Indsugningen.

Res. Dobbelt saa megen Ilt som Kvælstof.

**81. Diffusion og Endosmose af Luftarter.** To forskellige Luftarter blandes altid med hinanden uden Hensyn til Vægtfylden. Man kan vel opsamle Kulsyre i et aabent Glas, og Brint i et, som ogsaa er aabent men omvendt; efter nogen

Tids Forløb ville Luftarterne dog være blandede med Atmosfæren. Paa samme Maade gaar det, hvor der ved Gæring dannes Kulsyre, eller hvor den strømmer ud af Jorden; den tunge Luft bliver en Tid staaende men spredes derefter i Atmosfæren. Kun naar Kulsyren stadig bryder frem som i Hundegrotten ved Neapel og undertiden i Brønde og Kældere, eller naar den uafbrudt udvikles som i Gæringskælderne, kan den tunge Luftart holde sig nede ved Bunden som et Lag, der virker kvælende paa Dyr og Mennesker men kan opdages forud, ved at et brændende Lys slukkes, eller ved at Kalkvand bliver uklart deri.

Den Hastighed, hvormed forskellige Luftarter diffundere i hinanden, er omvendt proportional med Kvadratroden af Vægtfylden.

Igennem porøse Stoffer foregaar der ogsaa en Endosmose af Luftarter, og denne spiller en vigtig Rolle i Aandedrættet, da Luftens Ilt i Lungerne træder over i Blodet, som derpaa fører den rundt i Legemet. Brint gaar let gennem mange Stoffer, hvad der er uheldigt for dens Anvendelse til Luftballoner. Man kan ved følgende Forsøg overbevise sig om, at Brinten ved Endosmose trænger hurtigere gennem porøse Stoffer end atmosfærisk Luft. I en tohalset Flaske med Vand anbringes gennem Propperne et Rør og en Tragt, som Fig. 127 viser. Paa Tragten kittes en Lercylinder af den Slags, som bruges til galvaniske Elementer, og over denne holdes et Bægerglas, som fyldes med Brint. Straks efter ser man et Springvand op af Røret.

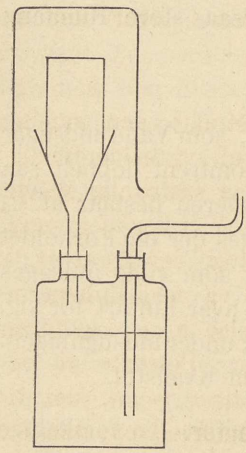

Fig. 127.

Endog Metaller kunne lade Luftarter gaa igennem sig. Støbejærn lader med Lethed i varm Tilstand Kulilte gaa igennem, hvorfor Luften i en Stue, hvor Kakkelovnen er meget varm, bliver trykkende. Ogsaa i kold Tilstand gaar almindelig Luft gennem Støbejærn, saa at en Plade af dette Metal ikke engang kan lukke tæt for et lufttomt Rum.

# Bevægelseslære.

**82.** Vi ville begynde med den simpleste Form af Bevægelse, nemlig den fremadskridende eller translatoriske, det vil sige en saadan, hvor alle de enkelte Dele af Legemet i hvert Øjeblik have lige store og parallele Bevægelser.

**83. Jævn Bevægelse.** En Bevægelse kaldes jævn, naar Legemet i lige store Tider gennemløber lige store Vejlængder. Vejen $r$ bliver da proportional med Tiden $t$, hvori den er gennemløbet, eller

$$r = h\,t,$$

hvor $h$ er konstant, saa længe vi betragte den samme Bevægelse. Det er netop denne Konstant, vi kalde Hastigheden, og vi bestemme dens Størrelse paa sædvanlig Maade ved at beregne den af to sammenhørende Værdier af $r$ og $t$. Tage vi f. Eks. et almindeligt Jærnbanetog, der kører cr. 4 Mil eller 30 Kilom. i Timen, og regne vi med Enhederne Meter og Sekund, faa vi til Bestemmelse af $h$ Ligningen $30000 = h \cdot 60 \cdot 60$, hvoraf $h = 8\frac{1}{3}$. Betragte vi Bevægelsen i 1 Sekund, bliver Ligningen til $r = h$, det vil sige, at Hastigheden udtrykkes ved samme Tal som den i 1 Sekund gennemløbne Vej. Det omtalte Jærnbanetog har altsaa en Hastighed af $8\frac{1}{3}$ m i Sekundet.

Den følgende Tabel angiver den omtrentlige Hastighed ved nogle almindelige Bevægelser, udtrykt i Meter i Sekundet.

| | |
|---|---|
| En god Fodgænger . . . . . | cr. 1,6. |
| En Hest i Trav . . . . . | » 2,2. |
| En Væddeløbshest . . . . . | » 12. |
| Rhinen mellem Worms og Mainz | » 1. |
| Sædvanlig Vind . . . . . | » 3. |
| Heftig Storm . . . . . | » 30—40. |
| En Geværkugle . . . . . | » 500. |
| Jorden i dens Bane om Solen . | » 30000$^{m}$ = 4 Mil. |
| Lyden . . . . . | » 340$^{m}$. |
| Lyset . . . . . | » 40000 Mil. |

**84. Ujævn Bevægelse.** Ved en ujævn Bevægelse maa der altid være en Kraft, der virker paa Legemet; ved Hastigheden i et vist Øjeblik forstaar man da den Hastighed, hvormed Legemet vilde bevæge sig videre, dersom Kraften i dette Øjeblik ophørte at virke. I enkelte Tilfælde er man virkelig i Stand til at finde Hastigheden ved pludselig at fjærne den bevægende Kraft (Faldmaskinen, § 92), men i Almindelighed kan man ikke bære sig saaledes ad. Man finder da Hastigheden ved at betragte Bevægelsen som jævn i den nærmest paafølgende lille Tid; er Vejen i $^{1}/_{1000}$ Sekund $a$, da bliver Hastigheden 1000 $a$, og det kan ikke afvige meget fra den sande Værdi, da Kraften i saa kort Tid ikke kan forandre Bevægelsen synderlig. Ved at tage Tiden tilstrækkelig lille kan man paa denne Maade faa Hastigheden bestemt med en hvilken som helst Nøjagtighed.

Saaledes finder man i Praksis Projektilers Hastighed paa de forskellige Steder af deres Bane (endog inde i Kanonen), idet man anbringer to Metaltraade et Stykke fra hinanden, saaledes at Kuglen maa sønderrive dem, naar den udskydes. Gennem hver Traad gaar der en elektrisk Strøm, som ved sin Afbrydelse frembringer en Induktionsgnist, der slaar over paa en roterende Skive og sætter et Mærke paa den. Af Afstanden mellem de to Mærker og af Skivens Omdrejningshastighed kan man finde Tiden; er den f. Eks. $^{1}/_{200}$ Sekund, og vare de to Metaltraade stillede $2^{1}/_{2}$ Meter fra hinanden, da blev Projektilets Hastighed 500$^{m}$ paa det Sted i Banen.

**85. Grafisk Fremstilling af Bevægelser.** Det er ofte bekvemt at afbilde to Størrelser, der afhænge af hinanden, ved i et retvinklet Koordinatsystem at konstruere en Kurve, hvis Koordinater betegne de to Størrelser.

Vi ville som Eksempel først tage en jævn Bevægelse og afsætte Tiderne som Abscisser og de dertil svarende Veje som Ordinater; da vi nu have Ligningen $r = h\,t$, hvor $h$ er konstant, bestemmes der i dette Tilfælde en ret Linje, hvis Tangens er $h$.

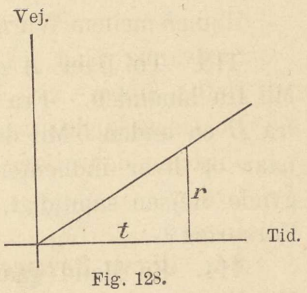

Fig. 128.

Vi kunne ogsaa afbilde Afhængigheden mellem Hastighed og Tid, idet Tiden tages til Abscisse og Hastigheden til Ordinat. Ved den jævne Bevægelse faar man derved bestemt en ret Linje parallel med Abscisseaksen i Afstanden $h$. Da den gennemløbne Vej $r$ bliver lig $h\,t$, vil den i dette Tilfælde udtrykkes ved samme Tal som Arealet af det tegnede Rektangel.

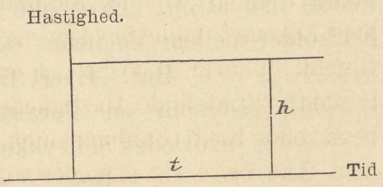

Fig. 129.

Afbilde vi i en ujævn Bevægelse Afhængigheden mellem Hastigheden og Tiden, faa vi en eller anden Linje $A\,B$. I en uendelig lille Tid $C\,D$ kan Hastigheden betragtes som konstant $= CE$, og den i denne Tid gennemløbne Vej er da afbildet ved Arealet $C\,D\,F\,E$, der ikke afviger kendeligt fra et Rektangel. Ved paa denne Maade at dele Tiden $t$ i uendelig smaa Dele bliver hele Vejen udtrykt som en Sum af uendelig mange smalle Arealer, der tilsammen give Arealet $O\,A\,B\,M$.

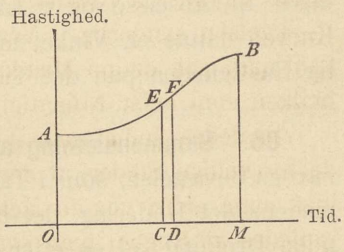

Fig. 130.

Vi skulle senere se, at der endnu er andre Størrelser ved en Bevægelse, som man med Fordel kan afbilde paa lignende Maade. Men i alle Tilfælde, hvor man anvender

denne saakaldte grafiske Metode, maa man vel vogte sig for at tro, at den Kurve, man tegner, har noget at gøre med Legemets Bane; hvad Form denne har, om den er ret eller krum, er i denne Sammenhæng ligegyldigt.

### Opgaver.

113. To Byer $A$ og $B$ ligge ved samme Landevej 10 Mil fra hinanden. Fra $A$ rejser en Mand 7 Mil om Dagen, fra $B$ en anden 5 Mil daglig, bægge i samme Retning. Hvornaar og hvor indhenter den første den anden, hvis de begynde Rejsen samtidigt, eller hvis den sidste har 2 Dages Forspring?

114. En Mand gaar langs ad en Sporvej. Hvert andet Minut møder han en Sporvogn, og hvert sjette Minut indhentes han af en. Hvor ofte køre Sporvognene, og hvad er Forholdet mellem Vognenes og Mandens Hastighed?

Res. Hvert tredje Minut; 2.

115. Dersom en Bevægelse foregaar efter Ligningen $r = \alpha t^2$, hvorledes udtrykkes da Hastigheden ved Tiden?

Res. $h = 2 \alpha t$.

(Find først den Vej, Legemet gennemløber i en uendelig lille Tid).

116. Vis, at naar man afbilder en Bevægelse, idet $t$ tages til Abscisse og $r$ til Ordinat, saa vil en Tangent til Kurven danne en Vinkel med Abscisseaksen, hvis Tangens er lig Hastigheden paa det Tidspunkt.

**86. Sammensætning af Bevægelser.** Dersom et Legeme har en Bevægelse, som i Tiden $t$ kunde føre det fra $A$ til $C$, medens det Underlag, det hviler paa, i samme Tid forskydes uden Drejning ad en eller anden Vej fra $A$ til $B$, saa maa Legemet efter denne Tids Forløb være kommen til den fjerde Vinkelspids $D$ af det Parallelogram, som bestemmes af de rette Linjer $A\,B$ og $A\,C$ (Vejenes Parallelogram). Man kan altsaa sammensætte Vejene efter en

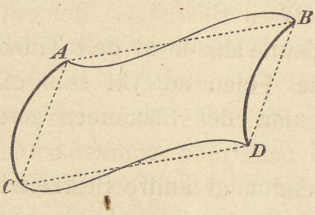

Fig. 131.

lignende Regel som Kræfter. Dersom man vil vide, ad hvilken Linje Legemet har gaaet, kan man paa $AB$ og $AC$ afsætte de i 1, 2, 3 osv. Sekunder gennemløbne Veje og sammensætte dem. Hvis de to Bevægelser hver for sig ere retlinede og

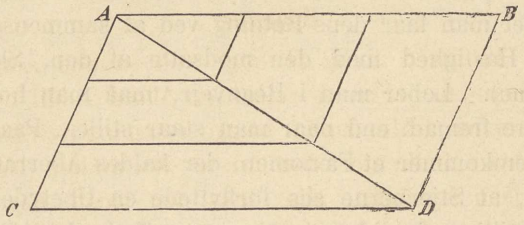


Fig. 132.

jævne, ville de saaledes tegnede Parallelogrammer blive ligedannede, og Legemet vil derfor hele Tiden holde sig i Diagonalen $AD$. I dette Tilfælde ville Vejene i en vis Tid være proportionale med Hastighederne, saa man ogsaa kan afbilde disse ved et af Parallelogrammerne. (Hastighedernes Parallelogram).

Naar et Legeme samtidig har flere jævne Bevægelser med bekendte Hastigheder, kan man ogsaa finde Resultanten af Vejene og af Hastighederne paa lignende Maade som Resultanten af flere Kræfter, nemlig ved at projicere de givne Størrelser paa to vilkaarlige Koordinatakser, og sætte Resultantens Projektion lig Summen af Komposanternes.

Hastigheder i ujævne Bevægelser sammensættes paa samme Maade som jævne, da enhver Bevægelse kan betragtes som jævn, naar Tiden er tilstrækkelig lille.

**87. Relative Bevægelser.** Det hænder ofte, at et Legemes Bevægelse iagttages fra en Genstand, der selv bevæger sig. Man finder da den »relative« Bevægelse ved at tænke sig, at Iagttageren og Legemet fik tilføjet en Hastighed, der var lig og modsat rettet Iagttagerens. Dette kan nemlig ikke forandre deres Stillinger i Forhold til hinanden, og da Iagttageren nu holdes paa samme Sted, saa bliver det netop den søgte relative Bevægelse, man faar, naar man sammensætter Legemets virkelige Bevægelse med den tænkte tilbagegaaende. Dersom Legemet er i Hvile, synes det altsaa at bevæge sig

tilbage med en Hastighed, der er lig Iagttagerens. Naar man f. Eks. kører paa Jærnbane, ser man Landskabet bevæge sig forbi i den modsatte Retning; naar man rejser med Dampskibe i stille Vejr, bliver Røgen tilbage, som om man havde Modvind, og naar det blæser, synes Vinden at komme mere forfra, idet man faar dens Retning ved at sammensætte dens virkelige Hastighed med den modsatte af den, Skibet har. (Passaterne). Løber man i Regnvejr, maa man holde Paraplyen mere fremad, end naar man staar stille. Paa lignende Maade fremkommer et Fænomen, der kaldes Aberrationen og bestaar i, at Stjernerne ses forflyttede en Ubetydelighed ud af deres Stilling, fordi Lysstraalerne træffe Jorden i Bevægelse.

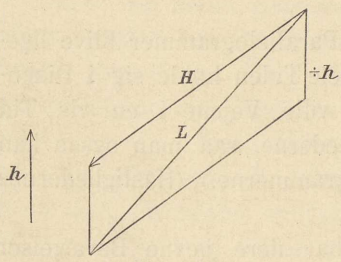

Fig. 133.

Er Lysets Hastighed $H$ og Jordens $h$, saa skal $H$ sammensættes med $\div h$ for at give den Retning $L$, hvori Lyset synes at komme. Af Stjernens iagttagne Forflyttelse og Jordens bekendte Hastighed har man beregnet Lysets og fundet samme Resultat som ad andre Veje.

I Virkeligheden kendes kun relative Bevægelser, da Jorden selv bevæger sig paa forskellig Maade, og ikke en Gang Solen og Fiksstjernerne ere faste.

**88. Kræfters Uafhængighed af Bevægelse.** Vi have i det foregaaende sammensat Bevægelser uden Hensyn til de Kræfter, som ere nødvendige for at frembringe dem.

Dersom et frit Legeme har en Hastighed, der i Tiden $t$ vilde føre det fra $A$ til $B$, og samtidig paavirkes af en Kraft, der kunde føre det fra $A$ til $C$, hvis Legemet udgik fra Hvile, saa viser Erfaringen, at Legemet efter de $t$ Sekunder kommer til den fjerde Vinkelspids $D$ i Parallelogrammet, saafremt Kraften i den Tid ikke har forandret sin Størrelse og Retning. Legemet føres altsaa frem af Inertien, samtidig med at Kraften udøver sin uforandrede Virkning paa det.

Ligeledes viser Erfaringen, at to Kræfter virke paa et Legeme uafhængige af hinanden.

## Opgaver.

117. En Baad ros tværs over en Flod, altid vinkelret ind mod Bredden, med en given Hastighed, og drives samtidig af Strømmen afsted med en anden bekendt Hastighed. Naar Baaden begynder sin Bevægelse paa et bestemt Sted, hvor lander den da paa den anden Bred?

118. Dersom Baaden skal bevæges fra $A$ til $B$, kan det ske ved at ro den i en vilkaarlig Retning f. Eks. $A\,C$ og stadigt parallel med denne. Naar Strømmens Hastighed er bekendt, hvor hastigt skal der da ros?

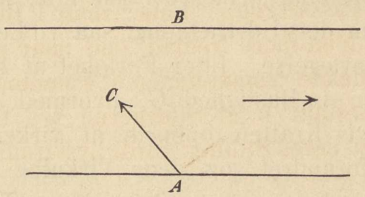

Fig. 134.

119. Dersom man kun kan ro med halv saa stor en Hastighed, som der krævedes i forrige Tilfælde, i hvilken Retning maa det da ske, for at Baaden kan bevæge sig fra $A$ til $B$? Strømmens Hastighed er stadig bekendt.

120. En Person i et Jærnbanetog skyder i en Retning vinkelret paa Banen mod et Maal, der er 300 m borte. Hvor rammer han? Bøssekuglens Hastighed er 60 Gange saa stor som Togets.

Res. 5 m foran Maalet.

121. Dersom en Bøssekugle skydes igennem de to modstaaende Vinduer i en Jærnbanevogn, hvilken Forskel er der da paa Kuglens virkelige Retning og den Retning, hvori Passagererne i Vognen mene, at Kuglen har bevæget sig?

122. Dersom Jordens Bevægelsesretning danner Vinkel $v$ med den tilsyneladende Sigtelinje til en Stjerne, og Lysets og Jordens Hastigheder kaldes $H$ og $h$, hvorledes findes da den Vinkel, Stjernen synes at flytte sig?

Res. $sin\ \alpha$ eller $\alpha = \frac{h}{H}\ sin\ v.$

123. En Stjerne i Retning af Ekliptikas Pol ses i Aarets Løb at beskrive en Cirkel med Radius $20^1/_4$". Find Lysets Hastighed. (Skønt Jordbanens Radius er 20000000 Mile, saa er denne Størrelse dog forsvindende mod

Afstandene til Fiksstjernerne, saa at Linjer til en af disse fra forskellige Steder i Jordbanen kunne betragtes som parallele. Res. cr. 40600 Mile.

**89. Jævnt voksende Bevægelse.** Naar en Kraft af konstant Størrelse og Retning virker paa et Legeme, som vi foreløbig tænke os saa lille, at vi ikke behøve at bryde os om dets Udstrækning, saa vil Legemet faa en stadigt voksende Bevægelse. Efter Forløbet af 1 Sekund vil det have opnaaet en vis Hastighed $G$, hvormed det kunde bevæge sig videre, hvis Kraften ophørte at virke. Men da Kraften vedbliver uforandret, og dens Virkning er uafhængig af Bevægelsen, vil den i næste Sekund meddele Legemet en lige saa stor Hastighed, der adderes til den forrige; dette gentages hvert Sekund, og Legemet har derfor efter $t$ Sekunders Forløb Hastigheden

$$h = G\,t.$$

Størrelsen $G$ kaldes Bevægelsens Acceleration, og Bevægelsen kaldes »jævnt voksende«, idet vi herved forstaa, at Hastigheden vokser proportionalt med Tiden. Afbilde vi Bevægelsen ved en Kurve, hvor hvert Punkt har Ordinaten $h$ og Abscissen $t$, faa vi en ret Linje gennem Begyndelsespunktet under en Vinkel, hvis Tangens er lig $G$. Den Vej, som tilbagelægges i Tiden $t = OA$, afbildes ved Arealet af Trekanten $OAB$ (ifølge § 85), og da $AB = Gt$, faar man altsaa Vejen

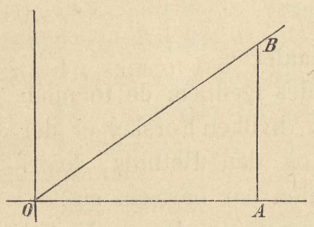

Fig. 135.

$$r = \tfrac{1}{2}\,G\,t^2.$$

Af de to fundne Ligninger dannes ved Elimination af $t$ Ligningen

$$h^2 = 2\,Gr.$$

Et Eksempel paa en Bevægelse af denne Art er det fri Fald i det lufttomme Rum; den Kraft, hvormed Jorden paavirker et Legeme under Faldet, er nemlig uforandret lig

Legemets Vægt. Den Acceleration, hvormed dette Fald foregaar, er ens for alle Legemer, idet man ved Forsøg med Luftpompen har fundet, at selv meget forskellige Legemer, som Fjer og Metal, falde lige hurtigt; vi ville senere faa at se, at det samme kan vises ved Hjælp af Pendulet. Det fri Falds Acceleration kalder man ogsaa Tyngden; den betegnes altid ved Bogstavet $g$, og man har (ved Hjælp af Pendulet) fundet $g = 9{,}8^{\text{m}}$.

**90. Masse.** Paa Grund af Loven om Bevægelsernes Uafhængighed af hinanden ser man, at dersom Kraften $K$ meddeler et Legeme Accelerationen $G$, vil $2K$ frembringe Accelerationen $2G$ osv., eller med andre Ord, $K$ og $G$ ere proportionale, saa længe vi have med det samme Legeme at gøre. Man kan derfor sætte

$$K = MG,$$

hvor $M$ er en Størrelse, hvis Værdi er konstant for hvert enkelt Legeme og faas af det simple Tilfælde, hvor Legemet falder frit med Accelerationen $g$ under Paavirkning af sin egen Vægt $P$; man har i det Tilfælde $P = Mg$ eller

$$M = \frac{P}{g}.$$

Konstanten $M$ er altsaa en bestemt Brøkdel af Legemets Vægt; den kaldes Legemets Masse. $P$ skal maales i Kilo, $g$ i Metre.

**91.** Dersom vi have flere smaa Legemer med Masserne $m_1$, $m_2$ osv., og de alle skulle bevæges med Accelerationen $G$ i samme Retning, saa udkræves dertil de parallele Kræfter $k_1 = m_1 G$, $k_2 = m_2 G$ osv. Under Bevægelsen ville alle Legemerne blive i de samme indbyrdes Afstande, og det vil derfor ikke forandre Forholdet, dersom vi forbinde dem alle fast med hinanden ved Stænger uden Vægt. Men i dette Tilfælde kan man i Stedet for $k_1$, $k_2$ osv. sætte deres Resultant, som gaar i samme Retning og har Størrelsen

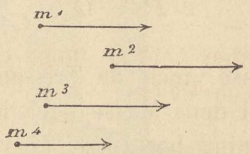

Fig. 136.

$$K = k_1 + k_2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots)\, G = M\, G,$$

idet $M$ er hele den forenede Masse. Angrebspunktet for $K$ er

alle de enkelte Legemers fælles Tyngdepunkt, eftersom de enkelte Kræfter ere proportionale med Vægtene, idet man har $k_1 = m_1 G = P_1 \frac{G}{g}$. Hvad der her er vist for et endeligt Antal Smaalegemer, gælder ogsaa for uendelig mange; skal man altsaa meddele et eller andet Legeme en fremadskridende, jævnt voksende Bevægelse, maa man i Tyngdepunktet anbringe en konstant Kraft $K = M G = \frac{P}{g} G$.

**92. Forsøg over Faldlovene.** Dersom vi ved Forsøg ville overbevise os om Rigtigheden af Faldlovene, maa vi vælge et Tilfælde, hvor Accelerationen ikke er større, end at vi kunne følge Legemet i dets Bevægelse. Den simpleste Maade er at lade Legemet falde ned ad en Skraaplan; hvis denne har Hældningen $\alpha$, er nemlig Accelerationen langs ad Planen $G = g \sin \alpha$, hvor $g$ er det fri Falds Acceleration. Er $\alpha$ en ganske lille Vinkel, kan $G$ let indskrænkes til nogle faa Centimetre, og man kan umiddelbart iagttage de i forskellige Tider gennemløbne Veje. Paa denne Maade ere Faldlovene først paaviste af Galilæi.

Man kan ogsaa anvende Atwoods Faldmaskine, der bestaar af en høj, lodret staaende, inddelt Stang, som foroven bærer en let Trisse, om hvilken der er lagt en tynd Snor med lige store Vægte $P$ i hver Ende ($m$ og $n$ i Fig. 137). Hænger man nu en Tillægsvægt $Q$ paa den ene Side, fremkommer der en jævnt voksende Bevægelse, idet $Q$ er den konstante bevægende Kraft. Dersom vi undlade at tage Hensyn til Trissen, maa Accelerationen beregnes aff Formlen $Q = \frac{2P + Q}{g} \cdot G$, idet $\frac{2P + Q}{g}$ er den accelererede Masse, men da Trissens Rotation ogsaa er jævnt voksende, skal dens Masse ligeledes accelereres, og det af den nævnte Ligning beregnede $G$ vil ikke stemme med Forsøgene. Det er derfor bedre ved et foreløbigt Forsøg at finde $G$, idet vi iagttage, hvor stor en Bevægelse der foregaar f. Eks. i 4 Sekunder; vi kunne da af Ligningen $r = \frac{1}{2} G \cdot 16$ beregne $G$. Lad os antage, at $G$ bliver 6 af de Længdeenheder,

hvori Stangen er inddelt; det gælder da at vise, at de to Formler

$$r = 3t^2 \text{ og } h = 6t$$

ere rigtige for alle Værdier af $t$.

Overvægten $Q$ gives en langagtig Form, saa at den under Bevægelsen kan blive liggende paa en Ring, som kan skydes langs op ad Stangen, hvorimod $P$ bevæger sig gennem Ringen, indtil den støder mod en forskydelig Plade, der er anbragt længere nede. Sekunderne mærkes ved et Pendul, hvis Slag kunne høres. Dersom vi nu ville prøve Formlernes Rigtighed for $t = 3$, anbringes Ringen ved Mærket $3 \cdot 3^2 = 27$; Loddet med Overvægten fastholdes fra Begyndelsen ved Mærket 0 foroven, og vi lade Bevægelsen begynde i samme Øjeblik, Pendulet gør et Slag; vi høre da netop Overvægten blive liggende paa Ringen, samtidig med at Pendulet mærker 3 Sekunder. Fra dette Øjeblik af fortsættes Bevægelsen med jævn Hastighed, der ifølge Formlen skulde være $h = 18$; sættes altsaa den Plade, som ses paa Stangen, 36 Inddelinger under Ringen, høres Vægtens Slag mod Pladen, samtidig med at Pendulet mærker

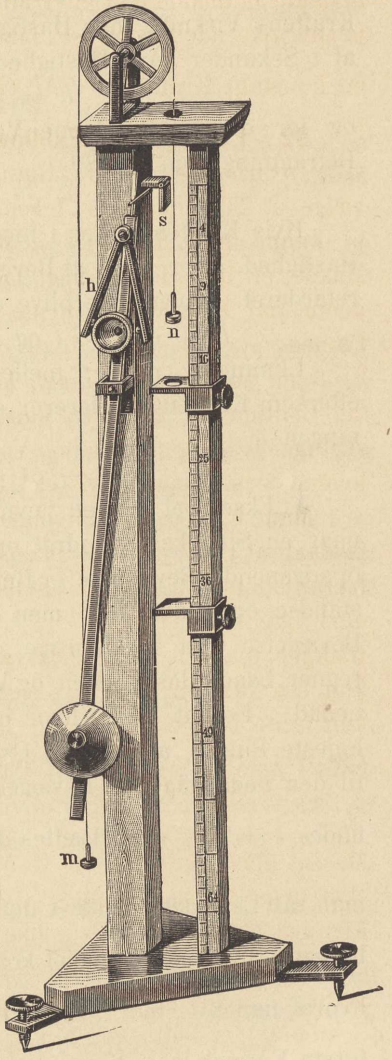


Fig. 137.

2 Sekunder til. Disse Prøver kunne ændres paa mange Maader, men vi ville altid finde Formlerne bekræftede saa nøjagtigt, som det kan ventes i Betragtning af de Modstande, der ere imod Bevægelsen. (Morins Faldmaskine).

**93.** Dersom et Legeme faar en jævnt voksende Bevægelse med Accelerationen $G$, men ved Begyndelsen af Kraftens Virkning har Hastigbeden $c$, vil det efter Forløbet af $t$ Sekunder have Hastigheden

$$h = c + Gt,$$

og for den gennemløbne Vej finder man ved den samme Betragtning som i § 89

$$r = ct + {}^1/_2\, Gt^2.$$

Hvis Kraften virker i modsat Retning af den oprindelige Hastighed, siger man, at Bevægelsen er jævnt aftagende eller retarderet. Formlerne blive da

$$h = c - Gt \text{ og } r = ct - {}^1/_2\, Gt^2.$$

Eliminerer man $t$ mellem de to Ligninger, faar man, eftersom Kraften accelererer eller retarderer Bevægelsen, Ligningen

$$h^2 - c^2 = \pm 2Gr.$$

Et Eksempel paa en jævnt aftagende Bevægelse har man, naar en Sten kastes lodret opad, idet Tyngden $g$ under den opadgaaende Bevægelse er Retardationen; tilsidst vil Legemet standse og vende om, men ogsaa under den nedadgaaende Bevægelse kan man bruge de samme Formler, naar man regner baade Hastigheden og Vejen positive opad og negative nedad. For at finde, hvor og hvornaar Legemet er paa sit højeste Punkt, altsaa paa Overgangen fra den opadgaaende til den nedadgaaende Bevægelse, sætter man $h = 0$, hvoraf findes $t = \frac{c}{g}$, og indsættes dette i den anden Formel, finder man, at Legemets Højde i dette Øjeblik er $= \frac{c^2}{2g}$. Vil man beregne, hvornaar Legemet kommer tilbage igen, sættes $r = 0$, hvoraf findes $t = \frac{2c}{g}$, og ved at indsætte denne Værdi i den første Formel faas $h = -c$. Af disse Resultater ser man, at et Legeme bruger den samme Tid til at stige som til at

falde igen, og at det kommer tilbage med den samme Hastighed, som det begyndte med. (Opg. 129). Dette gælder imidlertid ikke mere, naar man tager Hensyn til Luftmodstanden.

Hvis et Legeme sættes i Bevægelse og derefter møder en eller anden Modstand, bliver Bevægelsen ligeledes aftagende, og den vil aftage jævnt, ifald Modstanden er konstant, som f. Eks. ved Gnidning.

## Opgaver.

124. Hvor længe er en Sten om at falde ned fra Toppen af Strasborg Kirketaarn, hvis Højde er 125 m, og hvilken Hastighed opnaar Stenen?

I dette og de følgende Eksempler regnes $g = 10$ m, og der tages intet Hensyn til Luftmodstanden.

Res. 5 Sekunder, 50 m.

125. Fra hvilken Højde maatte en Geværkugle falde for at opnaa samme Hastighed som ved et Skud (500 m), og hvor mange Sekunder vilde der medgaa til Faldet?

Resultaterne blive $12^1/_2$ km og 50 Sek. men afvige paa Grund af Luftmodstanden meget fra Virkeligheden.

126. Fra samme Punkt falde to Legemer, det sidste, naar det første har gennemløbet Vejen $a$; hvad er Afstanden mellem Legemerne $t$ Sekunder, efter at det sidste har begyndt at falde?

Res. $a + \sqrt{2\,a\,g}\;t$.

127. Hvad vejer et Legeme, hvis Masse er 1?

Res. $g$ Kilo.

128. Naar en Kugle skydes lodret i Vejret med Hastigheden 400 m, hvor længe og hvor langt vil den da stige, og hvilken Hastighed og Højde har den efter Forløbet af den halve Tid?

Resultaterne blive 40 Sek., 8 Km., 200 m, 6 Km. men afvige atter meget fra Virkeligheden.

129. En Sten kastes lodret op og falder ned igen efter Forløbet af 12 Sekunder. Hvor langt har den været oppe, og med hvilken Hastighed blev den udkastet?

Res. 180 m, 60 m.

130. Bevis, at et Legeme, som kastes lodret opad og falder igen, har samme Hastighed bægge Gange, det er i samme Højde.

131. To Legemer befinde sig i samme Vertikal, men i Afstanden $a$ fra hinanden. I samme Øjeblik falder det øverste uden Begyndelseshastighed, og det nederste kastes lodret op; de mødes paa Midten af Vejen; med hvilken Hastighed er det nederste kastet opad?

Res. $\sqrt{a\,g}$.

132. Et Legeme glider hen ad en vandret Plan, hvor Gnidningskoefficienten er $\mu$; Begyndelseshastigheden er $c$. Bestem Bevægelsen.

Res. $h = c - \mu g t$, $r = c t - {}^1/_2\, \mu g t^2$.

133. Et Legeme bevæger sig paa en vandret Flade og møder en konstant Modstand; Begyndelseshastigheden er 80$^m$, Modstanden saa stor, at Legemet taber den halve Hastighed ved at gennemløbe 120$^m$; hvor længe har Legemet været om denne Bevægelse?

Res. 2 Sekunder.

**94. Kastebevægelsen.** Dersom et Legeme kastes fra et Punkt $O$ skraat opad med Hastigheden $c$ under Vinklen $\alpha$ med den vandrette Plan, kan man ved Konstruktion finde Legemets Plads efter Forløbet af en vis Tid, f. Eks. 3 Sekunder; man afsætter nemlig op ad den skraa Linje Stykket $3\,c$, og fra $O$ lodret nedad Stykket ${}^1/_2\, g \,.\, 3^2$, og med disse to Linjer som Sider tegnes et Parallelogram, i hvis modstaaende Vinkelspids $M$ Legemet befinder sig. Sædvanlig bestemmer man imidlertid ved Reg-

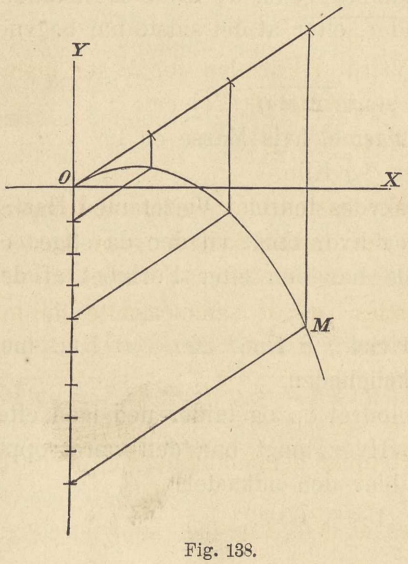


Fig. 138.

ning Bevægelsen langs ad to Koordinatakser, hvis positive Retninger vælges som sædvanligt. Man faar derved for det første Hastigheden parallel med Abscisseaksen

$$h_1 = c \cos \alpha,$$

og parallel med Ordinataksen

$$h_2 = c \sin \alpha - g t;$$

endvidere den gennemløbne Vejs Projektion paa Akserne

$$x = c \cos \alpha \, . \, t \quad \text{og}$$

$$y = c \sin \alpha \, . \, t - {}^1/_2 \, g t^2,$$

hvorved Legemets Bevægelse og Beliggenhed er bestemt til en hvilken som helst Tid.

Legemet er paa det øverste Sted i sin Bane, naar Hastigheden parallel med $Y$ Axen er $= 0$, det vil sige, naar

$$t = \frac{c \sin \alpha}{g}.$$

Ved at indsætte denne Værdi for $t$ findes Koordinaterne $\xi$ og $\eta$ til Banens højeste Punkt, nemlig

$$\xi = c^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad \text{og} \quad \eta = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2 g}.$$

Det Tidspunht, da Legemet anden Gang naar Abscisseaksen, findes ved at sætte $y = 0$; man finder

$$t = \frac{2 c \sin \alpha}{g},$$

og ved at indsætte denne Værdi i Formlen for $x$ ser man, at den i horizontal Retning gennemløbne Vej er

$$\frac{c^2 \sin 2 \alpha}{g} = 2 \xi \, .$$

Naar altsaa flere Legemer kastes i forskellige Retninger med samme Hastighed, vil det række længst, som kastes under Vinklen $45^0$.

Hastigheden i Banen findes ved at sammensætte de to Hastigheder $h_1$ og $h_2$ og bliver

$$h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \sqrt{c^2 - 2 c g t \sin \alpha + g^2 t^2} = \sqrt{c^2 - 2 g y},$$

hvoraf

$$c^2 - h^2 = 2 g y,$$

hvor $y$ er den i vertikal Retning gennemløbne Vej, regnet positiv opad.

Banens Form bestemmes af dens Ligning, som faas ved

at eliminere $t$ mellem de to Formler for $x$ og $y$. Er f. Eks. $\alpha = o$, faar man

$$x^2 = -\frac{2\,c^2}{g}\,y,$$

det vil sige, Banen er en Parabel med Toppunkt i $O$. For en anden Værdi af $\alpha$ maa Banen ogsaa blive en Parabel, hvis Toppunkt ligger i Punktet $(\xi, \eta)$, hvor Bevægelsen er vandret med Hastigheden $c \cos \alpha$.

Som Eksempel kunne vi nævne, at en Genstand, som man lader falde ud af et Vindu i en Jærnbanevogn, vil gennemløbe et Stykke af en halv Parabel, skønt det for en Iagttager inde i Vognen ser ud, som om det var et Fald i en ret Linje; Sidebevægelsen i Parablen er nemlig lig med Vognens Bevægelse. Noget lignende finder Sted ved ethvert frit Fald, naar man husker paa, at Jorden drejer sig om sin Akse; thi naar Legemet begynder at falde, har det samme Bevægelse mod Øst som Jorden og træffer derfor ved sit Fald det Punkt, som ligger lodret nedenunder. Nøjagtige Forsøg, som ere udførte ved at lade Legemer falde ned i dybe Skakter, have dog vist en lille Afvigelse Øst for det Punkt, som angives ved en Lodlinje (c. $3^{cm}$ i en Dybde af $150^{m}$); Grunden hertil er, at Legemerne i Faldet træffe Steder, som ligge nærmere ved Jordens Akse og derfor have en mindre Omdrejningshastighed.

En Kugle, som skydes ud af en Bøsse, bevæger sig ogsaa i en Parabel og skal fra Begyndelsen af have en Retning oven over Sigtelinjen til det Maal, man vil træffe. Man har derfor paa Bøsseløbets bageste Ende et Visir, som er højere end Sigtekornet paa den forreste Ende; Kuglen kommer da til at beskrive en Bue i Luften, før den anden Gang træffer Sigtelinjen. Visirets Højde maa være desto større, jo længere det Maal er borte, som skal træffes. I den fuldstændige Teori om udskudte Kuglers Bevægelse er det nødvendigt at tage Hensyn til Luftens Modstand; paa Grund af denne naar Kuglen hverken saa højt eller saa langt, som det er beregnet i det foregaaende, og Banen bliver mere stejl paa den nedadgaaende Del.

**95. Fald paa Skraaplan og krumme Baner.** Danner en Skraaplan Vinkel $\alpha$ med den vandrette Flade, vil et Legeme, som uden Modstand glider ned ad Planen, faa Accelerationen $g \sin \alpha$, idet denne Størrelse er Tyngdens Komposant i den Retning. Bevægelsen foregaar derfor efter Formlerne

$$h = c + gt \sin \alpha$$

og

$$r = ct + {}^1/_2\, gt^2 \sin \alpha,$$

idet $c$ er Begyndelseshastigheden.

Dersom Legemet fra Begyndelsen af bevæger sig opad, bliver det jævnt retarderet, og Formlerne blive de samme, med Undtagelse af at Plustegnene maa forandres til Minustegn.

I bægge Tilfælde finder man ved Elimination af $t$ Ligningen

$$h^2 - c^2 = \pm 2\, gr \sin \alpha$$

eller

$$h^2 - c^2 = \pm 2\, g\, a,$$

hvor $a = r \sin \alpha$ betyder Vejens lodrette Projektion. Denne Formel gælder ogsaa om krumlinede Bevægelser; naar vi nemlig dele den krumme Linje i uendelig smaa Dele, der hver for sig betragtes som Skraaplaner, og kalde disses lodrette Projektioner $a_1$, $a_2$, $a_3$ . . . ., Hastighederne ved Enden af de smaa Skraaplaner $h_1$, $h_2$, $h_3$ osv., faa vi

$$h_1^2 - c^2 = \pm 2\, g\, a_1$$
$$h_2^2 - h_1^2 = \pm 2\, g\, a_2$$
$$h_3^2 - h_2^2 = \pm 2\, g\, a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_n^2 - h_{n-1}^2 = \pm 2\, g\, a_n,$$

hvoraf ved Addition

$$h_n^2 - c^2 = \pm 2\, g\, (a_1 + a_2 + \ldots a_n).$$

Naar nu Endehastigheden betegnes ved $h$ og hele den krumme Banes lodrette Projektion ved $a$, faas atter Ligningen

$$h^2 - c^2 = \pm 2\, g\, a.$$

Af denne Formel lære vi den vigtige Regel, at naar et Legeme bevæger sig uden Modstand under Paavirkning af Tyngdekraften paa en krum Linje eller paa en Skraaplan, saa vil den Forandring, der foregaar med Hastighedens Kvadrat, kun afhænge af Bevægelsens lodrette Projektion og

være den samme, som naar Legemet bevæger sig dette Stykke Vej frit i en lodret Linje. Endvidere ses det, at naar vi betragte en opadgaaende og nedadgaaende Bevægelse med samme lodrette Projektion, saa vil Hastighedens Kvadrat i første Tilfælde formindskes lige saa meget, som det forøges i det andet Tilfælde. Det følger heraf, at dersom et Legeme falder uden Begyndelseshastighed fra et bestemt Punkt paa en krum Bane f. Eks. en Halvcirkel, vil det løbe igennem det laveste Punkt og stige til samme Højde, som det kom fra. Løber et Legeme, under Paavirkning af Tyngdekraften, afvekslende op og ned, vil det alle Vegne, hvor det befinder sig i en bestemt vandret Plan, have samme Hastighed.

## Opgaver.

134. En Kanonkugle udskydes med Hastigheden 600 m under Vinklen 15°; hvor langt vilde den naa, hvis der ingen Luftmodstand var?

Res. 18 Km.

135. Under hvilken Vinkel maa en Kugle udskydes med Hastigheden $c$ for at træffe et Maal i Afstanden $a$?

Res. $\sin 2\alpha = \frac{ag}{c^2}$

136. I samme Øjeblik kastes fra et Punkt flere Legemer alle med Hastigheden $c$ men i forskellige Retninger, medens Legemet $M$ falder frit ned mod Jorden. Bevis, at alle de førstnævnte Legemer paa et vilkaarligt Tidspunkt ligge paa en Kugle med $M$ til Centrum, og find Radien.

Res. $R = ct$.

137. I en lodret staaende Cirkel trækkes Korder, enten fra det øverste eller nederste Punkt; bevis, at de alle gennemløbes i samme Tid af et Legeme, som kun paavirkes af Tyngdekraften.

138. Et Legeme glider ned ad en Skraaplan; hvilken Hældning maa Skraaplanen have, for at den vandrette Projektion af den i en vis Tid gennemløbne Vej kan blive saa stor som muligt?

Res. 45°.

**96. Bevægelsesmængde.** Formlerne for Hastigheden ved den jævnt voksende og jævnt aftagende Bevægelse kunne skrives

$$\pm (h - c) = Gt,$$

og naar man multiplicerer denne Ligning med $M$, faar man

$$\pm (Mh - Mc) = Kt.$$

Produktet af Massen og Hastigheden kaldes Legemets Bevægelsesmængde, og Formlen siger da, at Tilvæksten eller Tabet af Bevægelsesmængde er lig med Kraften Gange Tiden. Sætningen kan udvides til at gælde, ogsaa naar Kraften er foranderlig, idet man tænker sig Tiden delt i uendelig smaa Dele, og i hver af disse betragter $K$ som konstant. Paa denne Maade faar man

$$\begin{aligned} \pm (Mh_1 - Mc) &= K_1 t_1 \\ \pm (Mh_2 - Mh_1) &= K_2 t_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \pm (Mh - Mh_{n-1}) &= K_n t_n, \end{aligned}$$

hvoraf ved Addition:

$$\pm (Mh - Mc) = K_1 t_1 + K_2 t_2 + \dots K_n t_n.$$

Summen paa højre Side af Lighedstegnet kunne vi ganske vist ikke beregne nærmere, men dersom vi have to Legemer, som bevæge sig under Paavirkning af samme Kraft i samme Tid, kunne vi slutte, at bægges Bevægelsesmængder undergaa samme Forandring. Det er f. Eks. Tilfældet, naar en Kanon afskydes; Kuglen og selve Kanonen ville da faa samme Bevægelsesmængde, og i samme Forhold som Kanonens Masse er større end Kuglens, vil dens Hastighed blive mindre. Ligeledes ville to Legemer, som uden Begyndelseshastighed gensidig tiltrække hinanden, virke paa hinanden med samme Kraft i samme Tid og i et hvilket som helst Øjeblik have samme Bevægelsesmængde. Paa lignende Maade gaar det, naar to Legemer bevæge sig lige imod hinanden og støde sammen; under Stødet er Virkning og Modvirkning ens, og bægge Legemer tabe lige meget i Bevægelsesmængde.

**97. Levende Kraft** eller **Bevægelsesenergi.** Vi fandt ved den jævnt voksende og jævnt aftagende Bevægelse Formlen

$$\pm (h^2 - c^2) = 2Gr.$$

Ved Multiplikation med den halve Masse bliver Ligningen til

$$\pm (^1/_2 M h^2 - {}^1/_2 M c^2) = Kr.$$

Det halve Produkt af Massen og Hastighedens Kvadrat kaldes Legemets levende Kraft, og Forandringen heri er altsaa lig med den accelererende eller retarderende Kraft Gange Vejen; levende Kraft er derfor ikke en Størrelse af samme Art eller Benævning som en bevægende Kraft. Den samme Sætning gælder ogsaa, dersom Legemets Bevægelsesretning danner en Vinkel med Kraften $K$, saafremt man i Stedet for $r$ regner med den gennemløbne Vejs Projektion paa Kraftens Retning. Vi fandt nemlig ved Bevægelsen paa en Skraaplan og paa en krum Bane Formlen

$$\pm (h^2 - c^2) = 2 g a$$

og ved Kastebevægelsen

$$c^2 - h^2 = 2 g y,$$

hvor $a$ og $-y$ netop var Vejens Projektion paa Kraftretningen.

Formlen kan udvides til at gælde ogsaa om variable Kræfter paa samme Maade som i forrige §, naar vi dele den gennemløbne Vej i uendelig smaa Dele; vi faa derved

$$\pm (^1/_2 M h^2 - {}^1/_2 M c^2) = K_1 r_1 + K_2 r_2 + \ldots K_n r_n.$$

I det Tilfælde, at Bevægelsen er voksende, betyder $K_1 r_1 + K_2 r_2 + \ldots$ den Energi, som Kraften anvender for at bevæge Legemet, og Formlen viser da, at Legemets Forøgelse i levende Kraft er lige saa stor som den anvendte Energi. Er Bevægelsen aftagende, virker $K$ som Modstand, og $K_1 r_1 + K_2 r_2 + \ldots$ betyder det Arbejde, Legemet under sin Bevægelse udfører. Formlen viser, at dette Arbejde er lig med Legemets Tab i levende Kraft. Ved disse Sætninger er det bevist, at Energien bevares uforandret i det bevægede Legeme, og at den levende Kraft netop er Maalet for Bevægelsesenergien.

Vi kunne altsaa ved at bevæge et Legeme opsamle Energi, der kan bruges ved en anden Lejlighed, og i Virkeligheden finder dette meget hyppigt Sted i det daglige Liv. Det sker f. Eks., naar vi med en Hammer slaa et Søm ind i en Væg; medens der skal et meget stort Tryk til at faa Sømmet ind, hvis man virker umiddelbart paa det, kan en lille Hammer drive Sømmet ind, naar den træffer det med

en stor Hastighed. Naar en Kugle skydes ud af en Bøsse, udvikler Krudtet ved sin Eksplosion en stor Mængde Energi, som opsamles i Kuglen og senere atter afgives af denne. Naar der lukkes for Dampen i et Lokomotiv, som bevæger et Tog, indeholder dette en Energi, som maales ved Togets levende Kraft, og først naar denne helt er opslugt af Modstandene, standser Toget. Naar man skal sætte en Maskine i Gang, medgaar der for det første Energi til at give alle dens Dele den Hastighed, de skulle have; for det andet maa der anvendes Energi til at overvinde Gnidningsmodstandene o. lign. samt udføre det Nyttearbejde, man vil have af Maskinen. For at vedligeholde en jævn Gang maa man altsaa stadig tilføre en Energi af samme Størrelse som disse Arbejder. Da dette sjælden nøjagtigt finder Sted, kunde Følgen let blive, at Maskinen fik en meget ujævn Gang; derfor anbringer man sædvanligvis paa en af Hovedakserne et stort og tungt Svinghjul, som ved at bevæges hurtigere kan opsamle Energi, hvis der udvikles mere, end der er Brug for, og omvendt afgive Energi, hvis der behøves mere, end Kraften kan levere.

Dersom vi to Gange med samme Krudtladning skyde forskellige Kugler ud af den samme Kanon, vil Summen $K_1 r_1 + K_2 r_2 + \ldots$ være ens for bægge Kugler, og derfor forlade de Løbet med samme levende Kraft, saa at deres Hastigheder forholde sig omvendt som Kvadratroden af deres Masser.

## Opgaver.

139. Hvilken Kraft kan ved at virke uforandret i 8 Sekunder give et Legeme paa 20 Kilo Hastigheden $12^{m}$?

Res. $K = 3$ Kilo.

140. Hvilken Hastighed faar et Legeme, som vejer 100 Kilo, naar det i 5 Sekunder paavirkes af en Kraft, der er 14 Kilo?

Res. $7^{m}$.

141. Dersom en Kugle med Vægten $30^{gr}$ skydes ud af en Bøsse, hvis Løb er $80^{cm}$ langt, og derved faar Hastigheden $400^{m}$, hvor stor en Kraft har da Krudtet gennemsnitlig

virket med, og hvor længe har Kuglen været om at passere Løbet?

Res. 300 Kilo, $^1/_{250}$ Sekund.

142. Hvis en Kanonkugle med Vægten 15 Kilo forlader Løbet med Hastigheden 800$^m$, hvor stor er da dens Energi; og dersom Kanonen kunde fyres af hvert 5te Minut, hvor mange Hestekræfter havde man da til Raadighed?

Res. 480 000 Kgm. $21^1/_3$ Hkft.

143. Bevis, at naar en Sten falder, opnaar Jorden samme Bevægelsesmængde som Stenen, men kun en levende Kraft, der er forsvindende lille.

144. Dersom et Vandløb i hvert Sekund giver 25 Hektoliter Vand, som løber med Hastigheden 0,8$^m$, hvor mange Hestes Kraft har Vandløbet da?

Res. $1^1/_{15}$ Hkft.

145. Vi ville antage, at en Hammer, som vejer 1 Kilo, falder med Hastigheden 10$^m$ paa et Søm. Hvor stort er det Arbejde, Hammeren udfører, idet den driver Sømmet ind?

Res. 5 Kgm.

Modstanden bliver naturligvis større og større, jo længere Sømmet trænger ind; en vis Vægt, som lægges oven paa Sømmet uden Hastighed, og som er mindre end den største Modstand, kan derfor trykke Sømmet lige saa langt ned, idet dette i Begyndelsen faar en voksende Bevægelse, men senere, naar Modstanden er bleven større end den bevægende Vægt, faar en aftagende Hastighed og tilsidst standser. Der spørges da, hvilken Vægt der behøves for at udføre det samme Arbejde som Hammeren, naar Sømmet drives 2$^{cm}$ ned?

Res. 250 Kilo.

146. Et Jærnbanetog har Hastigheden 8$^m$ i det Øjeblik, der spærres for Dampen, og Modstanden mod Bevægelsen er $^1/_{200}$ af Togets Vægt. Hvor langt løber Toget, inden det standser?

Res. 640$^m$.

147. En Jærnbanevogn vejer 5 Tons og har Hastigheden 5$^m$; hvor stor en Modstand skal man ved Hjælp af Bræmsen

skaffe til Veje, for at Vognen skal standse efter at have gennemløbet $50^m$?

Res. 125 Kilo.

**98. Inertimodstand.** Ifølge Inertien gør ethvert Legeme Modstand imod at faa sin Bevægelse forandret. Man kan let ved Forsøg overbevise sig herom; bærer man nemlig en Vægt i en elastisk Snor og rykker den pludselig opad, ser man, at Snoren forlænges. Den forøgede Spænding, som er Anledning hertil, hidrører fra, at der ved den ene Ende virker en bevægende Kraft og ved den anden Ende Legemets Inertimodstand. Da disse i Forening spænde Snoren, maa de være lige store. Paa samme Maade vil i alle Tilfælde et Legemes Inertimodstand være lig og modsat den Kraft eller Resultanten af de Kræfter, som accelerere Legemet, ganske i Overensstemmelse med Loven om den ligestore Virkning og Modvirkning.

I mere sammensatte Tilfælde, hvor konstante Kræfter og Modstande frembringe en jævnt voksende eller jævnt aftagende Bevægelse, løser man Opgaven simplest ved at tænke sig anbragt paa Legemets Tyngdepunkt to ens Kræfter $M\,G$ og $\div\, M\,G$ i samme og modsat Retning af Bevægelsen, idet $M$ er Legemets Masse og $G$ den foreløbig ubekendte Acceleration. Disse to Kræfter kunne ikke i nogen som helst Maade forandre Legemets Bevægelse, og man kan da lige saa godt forestille sig, at det er Kraften $M\,G$, som bevirker hele Bevægelsen, og den modsatte $\div\, M\,G$ maa derfor holde Ligevægt mod alle de virkelig tilstedeværende Kræfter og Modstande og har følgelig samme Størrelse som Inertimodstanden. Spørgsmaalet er derved omdannet til en Ligevægtsopgave, der behandles som sædvanlig.

Er der flere Legemer, som paa en eller anden Maade ere forbundne med hinanden, behandles hvert for sig, idet man tager Hensyn til de Reaktioner, Gnidninger og Spændinger, som hidrøre fra Forbindelsen mellem Legemerne. Ved Beregningen af disse indbyrdes Virkninger mellem Legemerne faar man, ligesom i Ligevægtslæren, Betingelser

for, at det, man gaar ud fra, virkelig kan finde Sted; Reaktionerne maa nemlig gaa fra hvert Legeme ind imod det andet; Spændingerne maa ikke overstige, hvad Snorene kunne taale o. lign.

Vi ville nu nærmere oplyse dette ved nogle Eksempler.

## Opgaver.

148. Et Legeme glider ned ad en Skraaplan med Hældningen $\alpha$, idet det paavirkes af Tyngdekraften og Gnidningsmodstanden, hvis Koefficient $\mu$ ifølge det tidligere omtalte er uafhængig af Hastigheden. Find Lovene for Bevægelsen.

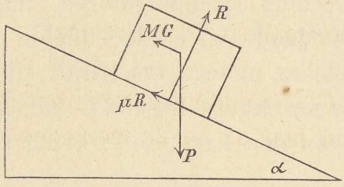

Fig. 139.

Af de to Kræfter $MG$, som skulle tilføjes, vil den nedadgaaende alene kunne udføre Bevægelsen; der skal derfor være Ligevægt mellem den opadgaaende $MG$, Vægten $P$, Planens Reaktion $R$ og Gnidningsmodstanden $\mu R$.

Paa sædvanlig Maade findes da

$$\mu R + MG = P \sin \alpha$$

og

$$P \cos \alpha = R,$$

hvoraf

$$G = \frac{P \sin \alpha - \mu P \cos \alpha}{M} = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

og Bevægelsen foregaar efter Formlerne

$$h = g t (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

og

$$r = {}^1/_2 g t^2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

149. Et Legeme med Massen $M$ trækkes ved Hjælp af en elastisk Snor af Kraften $K$ hen ad en vandret Flade uden Gnidningsmodstand. Find Accelerationen samt Spændingen i Snoren, og hvor meget denne udvider sig.

Paa Legemet tilføjes de to Kræfter $MG$ og $\div MG$; den sidste holder Ligevægt mod Snorens Spænding, der er lig $K$; Accelerationen er altsaa $\frac{K}{M}$. Det ses i dette Eksempel tydeligt, at Inertimodstanden virkelig er til Stede og hjælper til at spænde Snoren, hvis Udvidelse kan findes af Formlen i § 39. Er $K$ stor, bliver Snorens Spænding ogsaa stor, og for en vis Værdi kan Snoren briste; det er bekendt,

at man ofte med et kraftigt Ryk kan rive Snoren over uden at bevæge Legemet, skønt Snoren maaske med Lethed kunde bære Legemet, naar det hang roligt.

150. Paa et vandret Bord, hvor der ingen Gnidning er, ligger et Legeme ($P$) og oven paa det et andet ($p$); fra det første gaar der en Snor parallel med Bordet over en Trisse og bærer Vægten $Q$. Bestem Bevægelsen og find, hvor stor Gnidningskoefficienten $\mu$ maa være mellem de to Legemer, for at det øverste kan følge med.

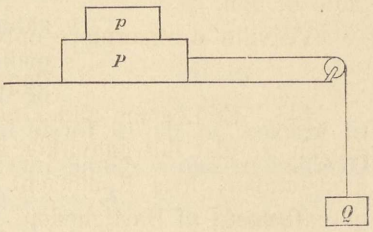

Fig. 140.

Den fælles Acceleration er $G$, Spændingen i Snoren $T$, Legemernes Masser $M, m, N$; man faar da for de tre Legemer Ligevægtsbetingelserne:

$$N\,G + T = Q,\ M\,G + \mu p = T,\ m\,G = \mu p;$$

heraf beregnes

$$G = \frac{Q}{P + p + Q}\,g,\ T = \frac{Q\,(P + p)}{P + p + Q},\ \mu = \frac{G}{g}$$

For at Bevægelsen virkelig kan komme i Stand, maa altsaa Gnidningskoefficienten være lig eller større end den Værdi, der er beregnet for $\mu$, og Snoren maa være saa stærk, at den kan taale den beregnede Spænding.

151. Naar man holder en Sten i den flade Haand og bevæger denne til Siden, hvorfor følger Stenen da kun med, naar man bevæger Haanden langsomt?

Hvorpaa beror det, at naar man lægger et Kortblad over Mundingen af en Flaske og en Tiøre paa Kortet, kan man knibse Kortet bort, saa Tiøren falder i Flasken?

Hvad er Grunden til, at man kan ryste Frugt ned af Træer, og hvorfor ringer en Klokke, naar man bevæger den hurtigt?

152. Et Glas med Vand har Vægten $P$ og bevæges horizontalt af Vægten $Q$ (Fig. 141); bevis, at Vandets Overflade stiller sig skraat, og find den Vinkel, som den danner med en horizontal Plan.

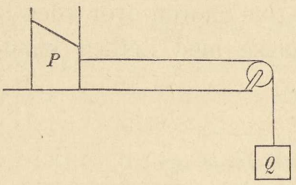

Fig. 141.

Hele Accelerationen bliver $G = \frac{Q}{P+Q} g$, og naar vi tage et Molekyl i Overfladen, hvis Masse kaldes $m$, skal der være Ligevægt mellem Vægten $m\,g$, Kraften $\div\, m\,G$ og de øvrige Molekylers Tryk. Hertil kræves, at de to første have en Resultant vinkelret paa Overfladen; denne danner derfor med Horizontalen en Vinkel, hvis Tangens er $= \frac{G}{g} = \frac{Q}{P+Q}$.

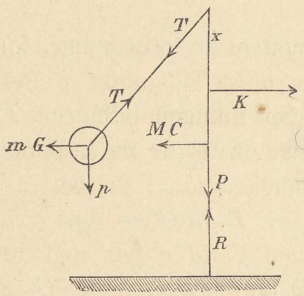

Fig. 142.

153. En Stang ($P$, $2\,l$) bærer foroven i en Snor et lille Legeme ($p$). Stangen er lodret og støtter sig paa en vandret, glat Flade; den bevæges af en given Kraft $K$ parallel med Fladen, men saaledes at den stadig holder sig lodret. Bestem Bevægelsen og den Vinkel, som den udspændte Snor danner med Stangen, tilligemed Snorens Spænding og det Sted, hvor Kraften $K$ maa virke.

Paa Figuren ses det, hvilke Kræfter der holde hinanden i Ligevægt paa de to Legemer, og Resultaterne blive:

$$G = \frac{K}{P+p} g\,,\ tg\,\alpha = \frac{K}{P+p}\,,\ T = p\sqrt{1 + \frac{K^2}{(P+p)^2}}$$

$$x = \frac{P\,l}{P+p}.$$

Det ses, at Spændingen er større end $p$; selv om Snoren altsaa kan bære Legemet i rolig Tilstand, kan det gerne være, at den brister under Bevægelsen.

154. Find Spændingen i Snoren paa Atwoods Faldmaskine.

Res. $\frac{2\,P\,(P+Q)}{2\,P+Q}$

155. En ligearmet Vægtstang med Hvilepunktet i $H$ bærer to Trisser, over hvilke der er lagt en Snor med ligestore Vægte $p$; det hele holdes i Ligevægt af en Modvægt.

Hænger man nu en Overvægt $q$ paa den mellemste Snor, i hvis Forlængelse $H$ ligger, vil der fremdeles være Ligevægt, dersom man ved en eller anden Indretning forhindrer Snoren i at bevæge sig over Trisserne; men lader man denne Bevægelse foregaa, stiger Modvægten til venstre. Hvorledes forklares det, og hvor meget maa Modvægten forøges for at bringe Ligevægt igen under Faldet?

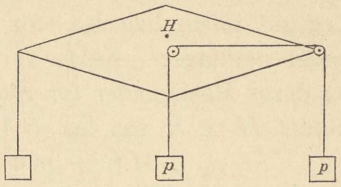

Fig. 143.

Res. $\frac{p\,q}{2\,p+q}$

156. Vis, at paa et hvilket som helst Tidspunkt af Bevægelsen paa Faldmaskinen er Energien vedligeholdt.

157. Naar et Glas Vand falder frit, hvad er da Vandets Tryk paa Bunden af Glasset og Trykkene inde i Vandet?

Res. 0.

158. Bevis, at naar et Glas med Vand glider ned ad en Skraaplan uden Gnidning, stiller Vandets Overflade sig parallel med Skraaplanen.

---

## Stødet.

**99.** Naar et Legeme under sin Bevægelse støder imod et andet, fremkommer der en Virkning og Modvirkning, som forandrer bægge Legemers Bevægelse. Vi ville væsentlig tale

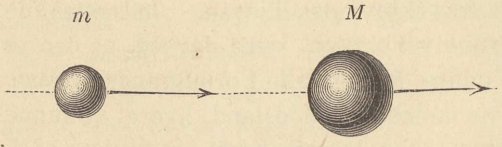

Fig. 144.

om det simple Tilfælde, hvor bægge Legemer ere Kugler, som bevæge sig i Retning af deres Centerlinje.

Virkning og Modvirkning ere i ethvert Øjeblik lige store i modsat Retning, hvoraf følger (§ 96), at naar Hastigheder

og Bevægelsesmængder regnes med Fortegn, saa vil det ene Legeme miste lige saa stor en Bevægelsesmængde, som det andet modtager. Kalde vi de to Kuglers Masser $M$ og $m$ og deres Hastigheder før Stødet $C$ og $c$, Hastighederne efter Stødet $H$ og $h$, saa faa vi Ligningen

$$M C + m c = M H + m h,$$

idet Summen af Bevægelsesmængde er den samme før og efter Stødet. Til Bestemmelse af $H$ og $h$ kræves der imidlertid en Ligning til, men denne bliver ikke den samme for alle Legemer.

**100. Uelastiske Legemer.** Antage vi, at de to Legemer ere fuldstændig uelastiske, vil Følgen blive, at de ved Stødet forandre hinandens Form og derefter bevæge sig videre med fælles Hastighed uden at virke mere paa hinanden. Kalde vi denne fælles Hastighed $f$, antager ovenstaaende Ligning Formen

$$M f + m f = M C + m c,$$

hvoraf

$$f = \frac{M C + m c}{M + m};$$

have Legemerne samme Masse, bliver $f = \frac{C + c}{2}$; ere deres Bevægelsesmængder fra først af lige store med modsat Tegn, faas $f = 0$.

Vil man ved Forsøg overbevise sig om Formlens Rigtighed, bruger man Kugler af Bly, Ler eller Voks, som i ethvert Fald kun have en meget ringe Elasticitet. Man hænger saadanne to Kugler op i Snore, der ere befæstede i samme Punkt, fjerner den ene en Vinkel $\alpha$ og lader den falde, hvorved den vil træffe den anden med en Hastighed $c = \sqrt{2\,g\,r\,(1 - \cos\alpha)}$, idet $r$ er Snorenes Længde; $C$ er 0 og $f$ beregnes atter af den Vinkel, Kuglernes Tyngdepunkt fjerner sig fra Ligevægtsstillingen. Indsættes de saaledes fundne Værdier i Formlen, viser det sig, at den er rigtig.

For at udføre den omtalte Formforandring maa der overvindes en vis molekulær Modstand, hvoraf vi kunne slutte, at der under Stødet tabes levende Kraft. Størrelsen af dette Tab er

$$\tfrac{1}{2} M C^2 + \tfrac{1}{2} m c^2 - \tfrac{1}{2} (M + m) f^2;$$

indsættes heri den ovenfor fundne Værdi for $f$, faar man

$$\tfrac{1}{2} \frac{M m (C - c)^2}{M + m},$$

der altid er positivt.

**101. Elastiske Legemer.** Tage vi nu det modsatte Tilfælde, hvor bægge Kuglerne ere fuldkommen elastiske, det vil sige, at de efter Stødet atter antage deres oprindelige Form, saa vil den levende Kraft, som bruges under den første Del af Stødet til at sammentrykke dem, frembringes igen, naar de udvide sig; vi faa derfor Ligningen

$$^1/_2 M C^2 + {}^1/_2 m c^2 = {}^1/_2 M H^2 + {}^1/_2 m h^2,$$

som kan skrives

$$M(H^2 - C^2) = m(c^2 - h^2);$$

ved Division med Formlen i § 99, der kan skrives

$$M(H - C) = m(c - h),$$

faas

$$H + C = c + h,$$

og af disse to findes

$$H = \frac{2mc + (M - m)C}{M + m}$$

og

$$h = \frac{2MC - (M - m)c}{M + m}.$$

Disse Formler kunne prøves med Kugler af Elfenben paa samme Maade som de forrige. Ere Masserne lige store, faas $H = c$ og $h = C$, det vil sige, Legemerne bytte Hastigheder. Er det stødte Legeme $M$ i Hvile før Stødet, faar man $H = \frac{2mc}{M+m}$ og $h = \frac{(m-M)c}{M+m}$. Dersom $M$ tillige er uendelig stor i Forhold til $m$, det vil sige, at $M$ er ubevægelig, bliver $h = -c$, eller med andre Ord, et elastisk Legeme, som træffer en fast elastisk Væg i normal Retning, springer tilbage med samme Hastighed, som det kom med. Støder det derimod an under en Vinkel, idet det bevæger sig i Retning $AB$, maa vi opløse Hastigheden $BC$ i to, en tangential, som vedvarer uforandret, og en langs Normalen, som forandres til en lige saa stor i modsat Retning. Efter Stødet kan Legemets to Hastigheder derfor afbildes ved Linjerne $BE$ og $BD^1$, som give en Resultant $BC^1$, der danner samme Vinkel med Fladen som den oprindelige Hastighed.

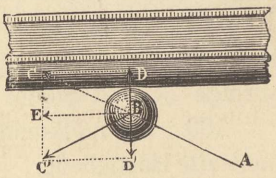

Fig. 145.

## Opgaver.

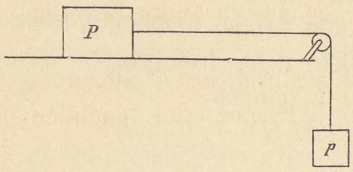

Fig. 146.

159. Paa et glat Bord ligger et Legeme ($P$), som trækkes af Vægten $p$ ved Hjælp af en uelastisk Snor. Fra Begyndelsen løfter man Legemet $p$ et Stykke op og lader det derpaa falde, hvorved det efter nogen Tids Forløb ogsaa sætter $P$ i Bevægelse. Bevis, at den Hastighed, bægge Legemer have i et vist Øjeblik, er den samme, som de vilde have haft efter samme Tids Forløb, dersom Faldet var begyndt, uden at $p$ blev løftet.

160. Ophænger man en Træklods i en temmelig lang Snor og afskyder en Geværkugle i vandret Retning ind imod Klodsen, kan man af Udslaget bestemme Kuglens Hastighed. Kaldes Klodsens Masse $M$, Kuglens $m$, dens Hastighed $x$, Udslaget $\alpha$, og ligger de forenede Legemers Tyngdepunkt i Afstanden $l$ fra Ophængningspunktet, faar man

$$x = \frac{2\,(M+m)}{m}\sqrt{g\,l}\,\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

161. En uelastisk Masse $m$ med Hastigheden $c$ indhenter en anden ($M$, $C$); hvor megen Energi modtager $M$ ved Stødet, naar dens Masse betragtes som uendelig i Forhold til $m$?

Res. $m\,C(c-C)$.

Dette har Betydning ved Beregning af Møllehjuls Virkning, dersom Vandet sætter dem i Bevægelse ved Stød.

162. Bevis, at naar to fuldkommen elastiske Legemer have lige store Bevægelsesmængder i modsat Retning, saa springe de ved Stødet tilbage med uforandrede Hastigheder.

163. To fuldkommen elastiske Kugler have lige store og modsatte Hastigheder. Hvilket Forhold maa der være mellem Masserne, for at den ene kan blive i Hvile efter Stødet?

Res. $M$ bliver liggende, dersom $M = 3\,m$.

164. En Række elastiske Kugler, $A$, $B$, $C$, $D$, med samme Masse $M$ ligge stille i en Linje. Den yderste $D$ træffes af en elastisk Kugle $E$ med Massen $m$. Hvilke Bevægellser finde Sted efter Stødet?

Res. Er m $>$ $M$, skilles alle Kuglerne ad og bevæge sig frem.

Er $m = M$, bevæger $A$ sig, og de andre blive liggende.

Er $m < M$, bevæger $A$ sig frem og $E$ tilbage.

Hvis man i Stedet for $E$ tager to Kugler efter hinanden, hver med Massen $M$, hvad sker da?

**102.** De færreste Legemer kunne betragtes enten som fuldstændig uelastiske eller fuldstændig elastiske. Forholdet bliver derfor i Virkeligheden det, at der i den sidste Del af Stødet udvikles en mindre levende Kraft, end der bruges i den første Del, saa at der praktisk taget gaar Energi til Spilde ved ethvert Stød. Da mange Legemer tillige blive mindre stærke ved Rystelser, er det en Hovedregel ved alle Maskiner saa vidt muligt at undgaa Stød. Møllehjul give saaledes den største Nyttevirkning, naar Vandet ledes jævnt ind paa Skovlene og afgiver sin levende Kraft uden at støde.

For at beregne den Hastighed, delvis elastiske Legemer faa efter Stødet, ville vi betegne den levende Kraft, som vindes igen i Stødets anden Del ved $e^2$ Gange den, som mistes i den første Del. Vi have derved Ligningerne

$$M C + m c = M H + m h$$

$$\text{og } M C^2 + m c^2 = M H^2 + m h^2 + (1 - e^2) \frac{M m (C - c)^2}{M + m}.$$

Multipliceres den sidste med $M + m$ og subtraheres Kvadratet af den første Ligning, faar man efter en lille Reduktion

$$(H - h)^2 = e^2 (C - c)^2.$$

Da det stødte Legeme fra Begyndelsen af har en mindre Hastighed end det stødende, men tilsidst en større, maa man ved Kvadratrodsuddragningen faa

$$H - h = e (c - C),$$

som i Forbindelse med Ligningen

$$M H + m h = M C + m c$$

tjener til Bestemmelse af $H$ og $h$.

**Opgave.**

165. Vil man bestemme Værdien af Konstanten $e$ i Formlen $H - h = e (c - C)$ ved det delvis elastiske Stød, kan man lade en lille Kugle falde lodret ned paa et fast Underlag af samme Art. Forholdet mellem den Hastighed, hvormed den springer tilbage, og den, hvormed den træffer Underlaget, er netop $e$. Bevis det.

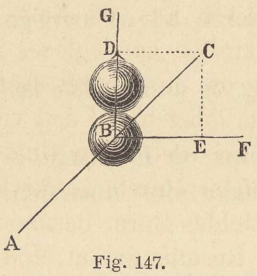

Fig. 147.

**103. Det ucentrale Stød.** Hosstaaende Figur viser to Billardkugler, af hvilke den ene ligger stille og træffes af den anden *B*, som har en Bevægelse mod *C*. Da Kuglerne ere glatte, er Virkningen mellem dem normal; den forreste løber derfor bort i Retning af *D G*, medens den bagerste bevæger sig i en anden Retning (mod *E*). Støder man derimod til en Billardkugle med en krittet Stok, kan man udøve et Stød, som ikke er normalt, hvorved der kan fremkomme mærkelige Forhold. Træffer Stødet f. Eks. et Punkt paa Undersiden af Kuglen, tænke vi os i Centrum anbragt to lige store modsatte Kræfter, hvilket ikke forandrer Forholdet; den ene af disse fører Kuglen frem, medens den anden i Forening med den oprindelige Kraft danner en Svingkraft, som faar Kuglen til at rotere i tilbagegaaende Retning, samtidig med at den løber frem. Da der nu paa Billardet altid er nogen Gnidning, kan det indtræffe, at den fremadskridende Bevægelse standses førend den roterende, og man vil da se, at Kuglen efter at have løbet et Stykke frem, ligger stille et Øjeblik og derefter løber tilbage.

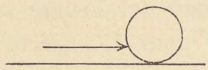
Fig. 148.

---

## Krumlinede Bevægelser, Rotationer.

**104.** Overalt, hvor man iagttager, at et Legeme bevæger sig i en krum Bane, maa der være en bevægende Kraft til Stede, ellers vilde Legemet paa Grund af Inertien faa en retlinet Bevægelse. Denne bevægende Kraft kan opløses i to Komposanter, den ene langs Banen, den anden vinkelret derpaa. Den første, Tangentialkraften, vil accelerere eller retardere Bevægelsen, eftersom den gaar i samme eller modsat Retning af den Bevægelse, der finder Sted, og naar den er 0, bliver Bevægelsen jævn. Den anden Komposant, Normalkraften, bevirker Krumningen af Banen, kan derfor aldrig blive 0 og er altid rettet indad mod

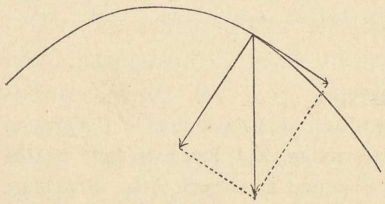
Fig. 149.

Kurvens hule Side. Forestiller Fig. 149 f. Eks. en Kastebevægelse, ser man, hvorledes Tyngdekraften kan opløses i de to nævnte Komposanter. Tænke vi os et vandret Rør bøjet som en Ellipse og en lille Kugle, som løber inde i det, vil denne bevæge sig med jævn Hastighed, hvis der ingen Gnidning er, og den eneste bevægende Kraft er Rørets Modtryk mod Kuglen, som vi vide er normalt. Holdes Røret derimod lodret, vil den bevægende Kraft være Resultanten af Modtrykket og Vægten, og i det Tilfælde vil ogsaa Tangentialkraften faa en bestemt Værdi i ethvert Punkt af Banen.

**105. Normalkraft eller Centripetalkraft.** Vi ville her kun tale om det simpleste Tilfælde af krumlinet Bevægelse, nemlig den, som foregaar i en Cirkel med jævn Hastighed, saa Tangentialkraften er 0. Vi stille os da den Opgave at finde, hvor stor Normalkraften $K$ maa være for at bevæge en lille Masse $m$ med Hastigheden $h$ i en Cirkel med Radius $r$. Paa Grund af Inertien vilde Legemet i en uendelig lille Tid $t$ gennemløbe Vejen $AB$ med jævn Hastighed, og for at Legemet kan blive paa Cirklen, maa Normalkraften derfor i samme Tid bevæge det et Stykke $AC$, saaledes at Figuren $ABDC$ bliver et Parallelogram. Da Normalkraften ikke forandrer sig, sker Bevægelsen $AC$ med Accelerationen $\frac{K}{m}$, og man har derfor, naar den lille Vinkelbevægelse $\alpha$ udtrykkes i Buemaal,

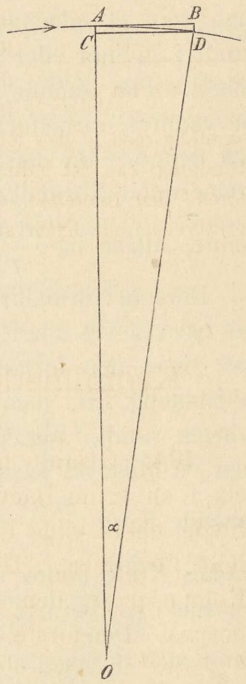

Fig. 150.

$$ht = AB = r\,tg\,\alpha = r\,\alpha$$

og $\frac{1}{2}\frac{K}{m}t^2 = AC = r\,(1-\cos\,\alpha) = 2\,r\,sin^2\,\frac{1}{2}\,\alpha = \frac{1}{2}\,r\alpha^2$,

hvoraf ved Elimination af $\alpha$

$$K = \frac{m\,h^2}{r}.$$

Kender man Omløbstiden $T$, hvori hele Cirklen gennemløbes, har man ifølge Formlen for den jævne Bevægelse $h = \frac{2\pi r}{T}$, hvorved faas et andet Udtryk for Normalkraften, nemlig

$$K = \frac{4\pi^2 r m}{T^2}.$$

**106. Centrifugalkraft.** Naar et Legeme bevæger sig med jævn Hastighed i en Cirkel under Paavirkning af en Normalkraft eller midtpunktsøgende Kraft, gør det paa Grund af sin Inerti en Modstand imod saaledes stadig at føres ud af den retlinede Bane (Tangenten). Denne Inertimodstand føler man som et udadgaaende Træk, naar man svinger en Sten rundt i en Snor eller Slynge; man kalder det et Centrifugaltræk. Paa samme Maade vil en Kugle, der løber rundt i en vandret, cirkelformet Rende udøve et Centrifugaltryk paa denne. Da disse Træk og Tryk fremkomme som Reaktioner imod Normalkraften, maa de være lige saa store som denne, altsaa lig $\frac{m h^2}{r}$ eller $\frac{4\pi^2 r m}{T^2}$.

Dersom Normalkraften ophører, og Legemet bliver frit, vil det bevæge sig udad efter Tangenten, saaledes som en Sten gør, naar den forlader Slyngen. Dersom Legemet ikke er fuldstændig frit, men f. Eks. kan glide paa en Stang, der svinges rundt, saa kan det ikke gaa bort efter Tangenten men vil alligevel bevæge sig udad; thi der behøves en indadgaaende Kraft $\frac{m h^2}{r}$ for at holde det paa sin Plads, men en saadan Kraft findes ikke. Det er ligeledes indlysende, at Legemet vil bevæge sig udad, selv om der virker en Modstand mod Bevægelsen, naar denne blot er mindre end $\frac{m h^2}{r}$.

Skønt disse Tryk og Bevægelser kun skyldes Legemets Inerti, vil det dog se ud, som om de hidrørte fra en midtpunktflyende Kraft, der udefra tog fat paa Legemet. Denne tilsyneladende Kraft kaldes Centrifugalkraften og maales ved de Tryk og Træk, man tror den er Aarsag til. Navnlig vil en, der selv deltager i Kredsbevægelsen, let se en Centrifugalkraft i Inertien. Ethvert Legeme, han binder i en Snor, vil han se bevæge sig udad og stramme Snoren;

holder han Legemet i Haanden, vil han føle Centrifugaltrykket, og slipper han det, vil det nok fjerne sig efter Tangenten, men da Iagttageren i den nærmeste Tid derefter følger Cirklen med den samme tangentielle Hastighed som Legemet, vil han i Begyndelsen se dette bevæge sig udad efter Radiens Forlængelse, som om det var paavirket af en midtpunktflyende Kraft.

Ved Beregning af Opgaver, som handle om Cirkelbevægelse med jævn Hastighed, er det lettest at tænke sig anbragt paa Legemet to lige store og modsatte Kræfter, hver lig $\frac{m\,h^2}{r}$ eller $\frac{4\,\pi^2\,r\,m}{T^2}$, den ene efter Radien og den anden i modsat Retning; dette forandrer ikke den Bevægelse, som finder Sted, men da den af de tilføjede Kræfter, som virker indad, alene kunde frembringe den samme Bevægelse, saa maa der være Ligevægt mellem alle de virkelig tilstedeværende Kræfter og den tænkte udadgaaende Kraft, Centrifugalkraften.

**107. Forsøg og Anvendelser af Centrifugalkraften.** Til Forsøg over Centrifugalkraften anvendes den saakaldte Centrifugalmaskine, som ses i hosstaaende Figur, hvor der paa

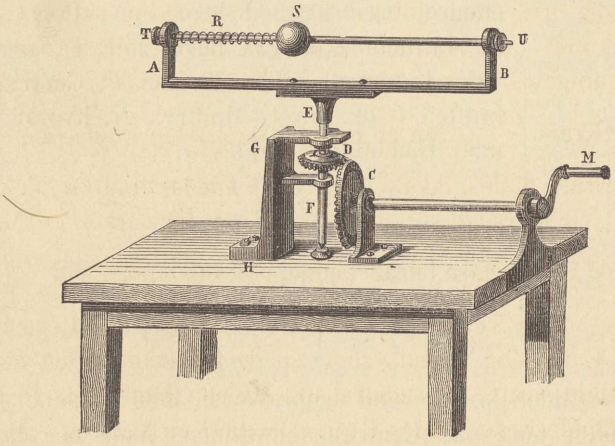


Fig. 151.

et Bord er anbragt en lodret Akse, der kan sættes i hurtig Omdrejning, og hvorpaa man kan skrue forskellige Apparater.

Sættes der f. Eks. en Ramme med en udspændt Traad, hvorpaa en Kugle kan glide, saa vil denne under Omdrejningen bevæges ud mod Ydersiden; er der nu anbragt et lille Dynamometer paa dette Sted, kan man umiddelbart maale Centrifugaltrykket og saaledes vise, at det virkelig har Størrelsen $\frac{4\pi^2 r m}{T^2}$.

Tager man en Ramme, som indeholder et skraat Rør, hvori der er et Par Hagl eller lign., ville disse ved en vis

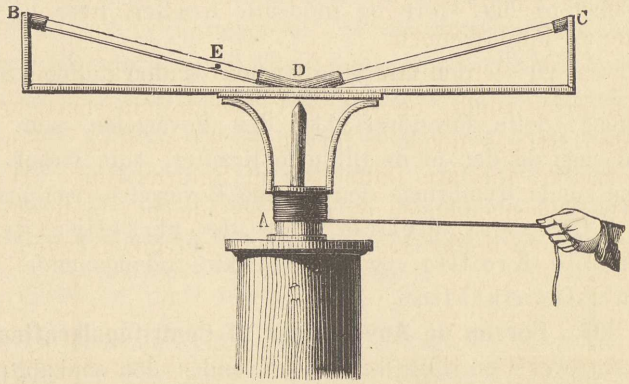


Fig. 152.

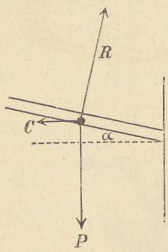


Fig. 153.

Omdrejningshastighed løbe op i Røret; for at de nemlig kunne ligge rolig, maa der være Ligevægt mellem Vægten $P$, Centrifugalkraften $C$ og Rørets Modtryk $R$, hvoraf faas, naar Hældningen kaldes $\alpha$,

$$P = R \cos \alpha \text{ og } \frac{4\pi^2 r m}{T^2} = R \sin \alpha$$

$$\text{og heraf } \frac{4\pi^2 r m}{P T^2} = tg\, \alpha$$

$$\text{eller } T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r}{g\, tg\, \alpha}};$$

er Omløbstiden kortere end denne Værdi, løbe Haglene opad.

Sætter man paa Centrifugalmaskinens Akse en elastisk Fjeder, der er bøjet som en Cirkel, vil den under Rotationen antage en fladtrykt Form (Fig. 154). Dersom den Antagelse er rigtig, at Jorden en Gang har været flydende, kan den have faaet sin fladtrykte Form af lignende Aarsag. Den Centrifugal-

kraft, som virker paa ethvert Legeme ved Jordens Overflade, giver sig til Kende derved, at den formindsker Tyngden, eftersom man gaar fra Polerne hen imod Ækvator.

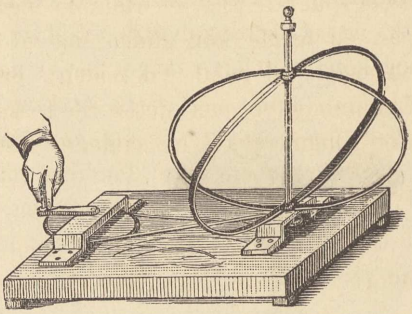

Fig. 154.

Hvis man anbringer en Oliedraabe i Spiritus af samme Vægtfylde og stikker en Pind igennem den, saa vil den antage en lignende fladtrykt Form, naar Aksen drejes rundt, og ved en vis Omdrejningshastighed vil Draaben slynges udad og forvandles til en Ring. Forsøget kan maaske forklare Dannelsen af Saturns Ring. Dog er det Overfladespændingen og ikke Massedelenes indbyrdes Tiltrækning, som holder Ligevægt mod Centrifugalkraften.

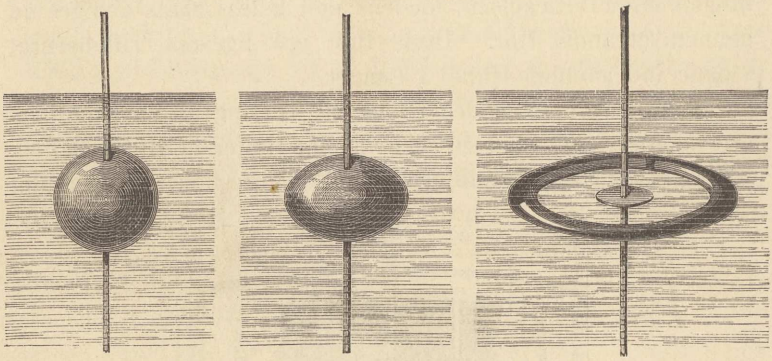

Fig. 155.

Anbringer man paa Centrifugalmaskinen et Glas med Vand, vil man under Omdrejningen se dette synke i Midten og stige ved Siderne, idet Overfladen overalt skal være vinkelret paa Resultanten af Tyngdekraften og Centrifugalkraften. (Smlgn. Opg. 334). Foregaar Omdrejningen tilstrækkelig hurtigt, vil Centrifugalkraften blive saa overvejende, at Vædskens indadvendte Overflade næsten bliver cylindrisk. Overalt i en saadan Vædske vil der være Centrifugaltryk, der ere analoge med de Tryk, Tyngden frembringer; derfor faar ethvert

Legeme, som nedsænkes i Vædsken, en »Opdrift« indad, som er lig »Centrifugalvægten« af den fortrængte Vædskemasse, og som kan blive meget betydelig ved en hurtig Omdrejning.

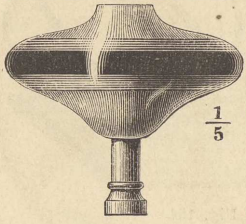

Fig. 156.

Et Stykke Træ vil af den Grund lægge sig paa Vandets Inderflade, og centrifugerer man to Vædsker, der ikke blande sig, f. Eks. Vand og Kvægsølv, vil den mest vægtfyldige lægge sig yderst (Fig. 156).

En vigtig Anvendelse af de forskellige Centrifugalfænomener har man gjort i Centrifugerne. Mælkecentrifugen bestaar af en Cylinder, hvis Laag har et stort Hul i Midten, gennem hvilket man lader den friske Mælk strømme ind, samtidig med at Centrifugen drejes rundt. Fløden vil da skilles ud og lægge sig inderst, hvor den slynges ud gennem et Rør, der lige dypper ned i den og vender Aabningen imod Bevægelsen, medens den fedtfri Mælk slynges ud gennem et andet Rør. Disse Rør ere ligesom Tilløbsrøret stukne ind gennem Hullet i Laaget.

Centrifuger anvendes ogsaa til Tørring af Vadsketøj og ere da forsynede med en Mængde fine Huller i Cylinderfladen. Naar Centrifugaltrykkene ere blevne stærke nok, til at Vandet

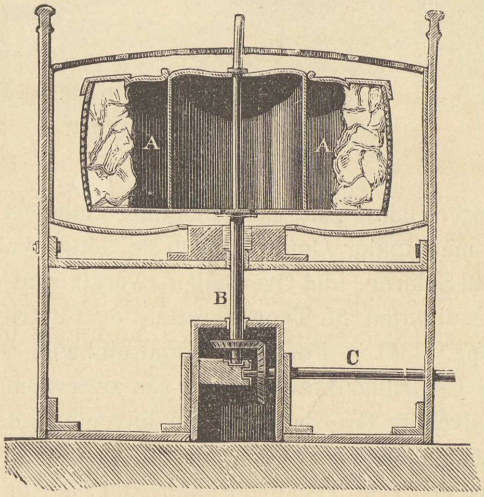

Fig. 157.

kan overvinde Gnidningsmodstanden og Vedhængningen til Tøjet, bliver det slynget ud af Hullerne i Centrifugen og gaar bort efter Tangenten. Ganske paa samme Maade skilles i Sukkerfabrikkerne Siruppen fra Sukkeret.

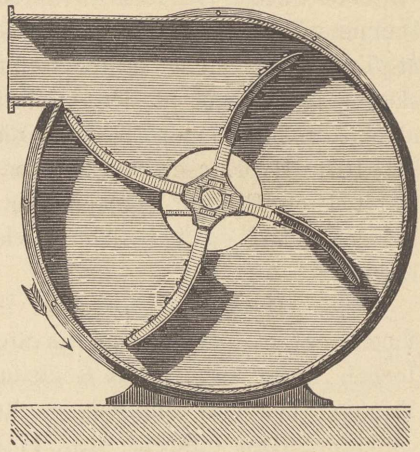

Fig. 158.

Centrifugalblæseren (Fig. 158) er et Skovlhjul, der drejes hurtigt rundt inden i en Cylinder, som har et Udløbsrør paa den krumme Flade, hvorigennem Luften kan slynges ud. Naar der ved Hjulets Akse i Cylindrens Grundflader er Aabninger, hvor ny Luft kan strømme til, frembringes der en stadig Luftstrøm. Man benytter saadanne Maskiner til Ventilation af Minegange og til Indblæsning af Luft i Smelteovne. I Kornrensemaskiner bruges ligeledes en Centrifugalblæser til at kaste Avnerne bort fra Kornet. Centrifugalblæseren kan ogsaa bruges til at frembringe en Sugning og derved løfte Vand.

## Opgaver.

166. Dersom en Vægt paa 1 Kilo fastgøres i Enden af en Snor paa en Meters Længde, og denne svinges rundt paa et vandret, glat Bord med en Hastighed af 4 Gange i Sekundet, hvilken Spænding er der da i Snoren? Dersom denne brister, i hvilken Retning og med hvilken Hastighed bevæger da Vægtloddet sig? (Slyngen).

Res. Spændingen = cr. 64 Kilo, $h$ = cr. 25 m.

Da Spændingen ved en hurtig Omdrejning bliver betydelig, maa hurtigt roterende Apparater konstrueres meget solidt. Det kan hænde, at Møllesten springe i Stykker under Gangen, ligeledes Centrifuger, hvorved ofte foraarsages Ulykkestilfælde.

Ved ekscentriske Skiver, som f. Eks. anvendes meget i Dampmaskiner, vil Centrifugalkraften bevirke, at Aksen lider et Tryk, som idelig skifter Retning. For at undgaa dette skærer man noget af den bredeste Del af Skiven bort, saa at Massen bliver mere ligelig fordelt omkring Aksen.

167. Hvorfor hælder en Hest sig indad, naar den løber rundt i en Cirkus? Paa hvilket Sted af Hesten maa en Berider staa, og i hvilken Hældning maa han holde sit Legeme?

168. Hvorledes forholder Centrifugalkraften sig til Vægten af et Legeme ved Ækvator, og hvor hurtigt maatte Jorden dreje sig, for at Centrifugalkraften kunde være lig Vægten. (Jordens Omkreds = 40000000 m).

Res. omtrent $^1/_{290}$; 17 Gange hurtigere.

169. Et Glas med Vand, som bæres i en Snor, kan man let svinge rundt i en lodret Cirkel, uden at Vandet løber ud. Hvad er den mindste Hastighed, hvormed Glasset kan passere den øverste Stilling?

Paa dette Sted er Bevægelsen et Øjeblik hverken accelereret eller retarderet, og naar Snorens Længde er $l$, finder man Betingelsen

$$h \overline{\overline{>}} \sqrt{l\,g}.$$

170. Hvor højt maa Udgangspunktet ligge i hosstaaende Rutschebane, for at Vognen skal gennemløbe hele Cirklen?

Res. Det halve af Radius over Cirklens øverste Punkt.

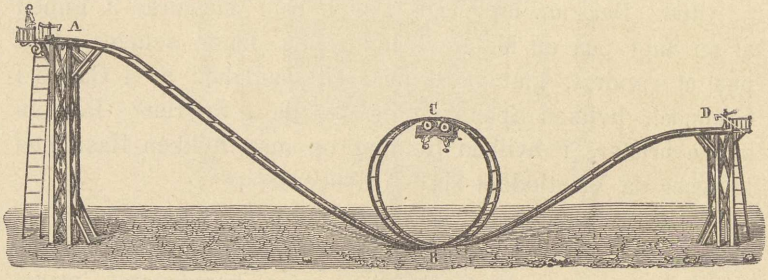


Fig. 159.

Hvis Forsøget gøres med en Kugle, forandres Resultatet en Del paa Grund af Kuglens Rotation.

171. Paa Centrifugalmaskinen anbringes en Ramme med en vandret Traad, paa hvilken der sidder to bevægelige Kugler, forbundne ved en Snor; i hvilket Tilfælde blive Kuglerne siddende, naar Rammen drejes rundt?

Res. Deres Tyngdepunkt skal være i Rotationsaksen.

172. Hvilken Hastighed maatte en vandret udskudt Kanonkugle have for at bevæge sig i en Cirkel rundt om Jorden? Der tages intet Hensyn til Luftmodstanden.

$$\text{Res. } h = \sqrt{g r} = 10^4 \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

173. En lodret stillet Stang drejer sig om sin egen Akse og bærer i sin øverste Ende en Snor af Længde $l$, hvortil der er fastgjort et lille Legeme. Under Rotationen svinger Snoren ud; hvilken Afhængighed er der imellem Udsvinget $\alpha$ og Omløbstiden $T$?

$$\text{Res. } g T^2 = 4 \pi^2 l \cos \alpha.$$

Dersom Stangen bærer flere Kugler, skal det bevises, at disse alle stille sig i samme vandrette Plan.

**108. Vinkelhastighed, Inertimoment.** I et roterende Legeme ville de forskellige Dele have Hastigheder, som ere proportionale med Afstandene fra Aksen. Drejer Legemet sig nemlig Vinklen $\alpha$ (udtrykt i Buemaal) i den uendelig korte Tid $t$, vil et Punkt i Afstanden $r$ fra Aksen gennemløbe Vejen $r \alpha$ og have Hastigheden $\frac{r \alpha}{t}$, men $\frac{\alpha}{t}$ er ens for alle Punkter. Denne Størrelse kaldes Vinkelhastigheden og skal i det følgende betegnes ved $\varphi$. Vi have derfor et enkelt Punkts Hastighed

$$h = r \varphi,$$

og dersom Rotationen er jævn, bliver Forholdet mellem Vinkel $\alpha$ og $t$ det samme som mellem hele Omløbet $2\pi$ og den dertil anvendte Tid $T$, saa at

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}.$$

Dersom vi søge den levende Kraft, som et roterende

Legeme har, maa vi addere alle de enkelte Deles levende Kræfter; vi faa paa denne Maade

$$^1/_2\, m_1 h_1^2 + {}^1/_2\, m_2 h^2{}_2 + \ldots = {}^1/_2\, (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots)\, \varphi^2,$$

hvor den Sum, som findes inde i Parentesen, kaldes Legemets Inertimoment med Hensyn til Drejningsaksen. Vi betegne i det følgende Inertimomentet ved $I$ og have saaledes for den levende Kraft Udtrykket

$$^1/_2\, I\, \varphi^2.$$

Indsætter man $\varphi = \frac{h}{r}$, bliver den levende Kraft $^1/_2 \frac{I}{r^2} h^2$, som om Legemet havde Massen $\frac{I}{r^2}$, og denne var anbragt i Afstanden $r$.

Inertimomentet og den levende Kraft vokse ikke blot med Massen selv, men ogsaa med dens Afstand fra Aksen; jo større bægge Dele ere, desto vanskeligere er det at meddele Legemet en Rotation med en vis Hastighed, men til Gengæld bevarer Legemets Inerti bedre den opnaaede Hastighed, og det bliver vanskeligere for andre Kræfter at forandre den tilstedeværende Bevægelse. Derfor lægges den største Del af Massen i et Svinghjul ude ved Omkredsen. Dersom Legemet har en simpel Form, kan man beregne Inertimomentet; vi skulle senere se, hvorledes det paa en let Maade lader sig bestemme ved Forsøg.

## Opgaver.

174. En Sten kastes med Hastigheden $c$ under Vinkel $\alpha$; find Krumningsradius til det første Punkt af Parablen.

Res. $\frac{c^2}{g \cos \alpha}$.

175. Et Hjul har Diametren $1^m$, Hjulkransen vejer 50 Kilo, medens den øvrige Del af Hjulet kun har en ubetydelig Vægt. Hvilken levende Kraft har Hjulet, naar det roterer 2 Gange i Sekundet?

Res. cr. 100 Kgm.

176. Et Hjul med Vægt $P$ og Inertimoment $I$ drejer sig om en vandret Akse med Radius $r$, hvor Gnidningskoefficienten er $\mu$; naar man giver Hjulet en Vinkelhastighed $\varphi$

og derefter overlader det til sig selv, hvor mange Omdrejninger udfører det da, inden det standser?

$$\text{Res.} \quad \frac{I\varphi^2}{4\pi r\mu P}.$$

177. En Cylinder ($P$, $r$, $I$) ruller uden at glide ned ad en Skraaplan med Hældning $\alpha$. Hvorledes udtrykkes Hastigheden, naar den gennemløbne Vej er $a$? (Tyngdekraftens Arbejde sættes lig den fremkomne levende Kraft). Hvor stor er Accelerationen ned ad Planen? Specielt antages hele Massen samlet i Centrum eller i Periferien. Hvor stor maa Gnidningskoefficienten være for at hindre Cylindren i at glide?

$$\text{Res.} \quad h^2 = \frac{2r^2 a g P \sin\alpha}{r^2 P + Ig}, \quad G = \frac{r^2 P \sin\alpha}{r^2 P + Ig} g,$$

$$g \sin\alpha, \ {}^1/_2 g \sin\alpha, \ \mu \geq \frac{Ig \operatorname{tg}\alpha}{Pr^2 + Ig}.$$

**109. Inertimomentets Betydning.** Inertien i et roterende Legeme vil ikke blot søge at bevare Hastigheden uforandret men ogsaa bevirke en Modstand imod Forandring af de Planers Retning, hvori alle de enkelte Dele bevæge sig. Denne Modstand kan ofte blive betydelig, naar Omløbstiden er lille og Legemets Inertimoment ikke for ringe. Den bedste Maade, hvorpaa man kan iagttage dette, er ved Hjælp af hosstaaende Apparat, der bestaar af en flad Skive $a$, som langs Periferien er forsynet med en tung ringformet Masse, saa dens Inertimoment bliver temlig stort; Skiven har en Akse $b$, som kan dreje sig i en Ring $c$.

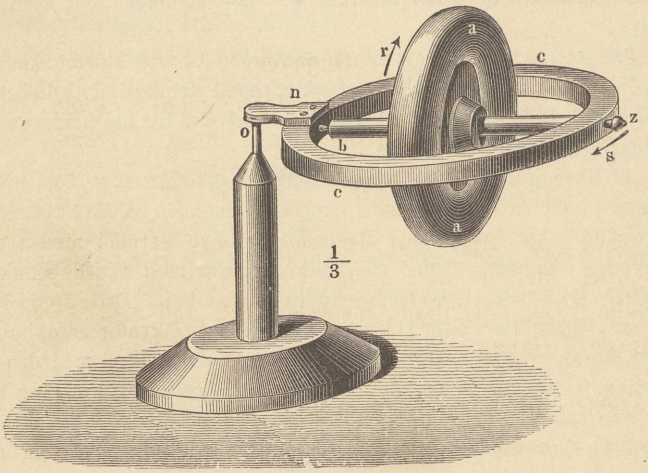


Fig. 160.

Naar man nu sætter Skiven i hurtig Omdrejning ved at vikle en Snor om Aksen *b* og trække den rask af igen, saa vil man mærke en ejendommelig Modstand, naar man holder Apparatet i Haanden og drejer det. Man har en Følelse, som om Apparatet var levende; Skivens Inertimodstand vil nemlig frembringe en Svingkraft, som virker helt paa tværs af den Retning, man drejede i. Hænges Ringen op paa en Spids *o*, vil Tyngdekraften faa Apparatet til at falde lidt, men derved frembringer Skiven som sagt en Svingkraft, der bevæger den i en vandret Plan; ved denne Bevægelse opstaar der en ny Svingkraft, som fører Skiven med Ringen lodret op igen. Resultatet bliver saaledes, at Apparatet slet ikke falder men derimod drejer sig rundt paa den Spids, hvorpaa det hviler. Prøver man paa at trykke Ringen nedad, vil den komme til at dreje sig endnu hurtigere paa Spidsen, og hvis man fremskynder denne Drejning med Haanden, ser man, at Ringen hæver sig opad, saa at Skivens Akse danner en spids Vinkel med Vertikalen og altsaa ved Drejningen beskriver en Kegleflade omkring den vertikale Linje.

Naar en Top eller en Snurre drejer sig paa sin Spids, faar den en Bevægelse af ganske den samme Beskaffenhed; den falder ikke, selv om Aksen staar skraat, men denne beskriver en Kegleflade omkring den vertikale Linje, medens Toppen selv drejer sig om Aksen.

Naar man triller en Mønt hen ad et Bord, falder den ikke om, skønt man vanskeligt kan faa den til at staa roligt paa Kanten; det er atter Inertien, som er Aarsag hertil, og naar Mønten hælder noget til Siden, vil den til Trods for Tyngdekraften heller ikke falde men blot løbe i en krum Linje. Af lignende Grund kunne Folk ride paa Bicykler men ikke holde stille paa dem; løber man paa Skøjter, kan man ved at hælde sig til Siden bevirke, at man kommer frem i en krum Bane.

De roterende Legemers Inerti er Aarsag til den større Skudsikkerhed, man opnaar ved Rifler. Blykuglen vil nemlig inde i Løbet blive presset ind i Riffelgangene, saa at den foruden den fremadskridende ogsaa faar en omdrejende Bevægelse.

Et Eksempel paa en Bevægelse af lignende Art som Toppens eller Snurrens have vi i det Fænomen, som i Astronomien kaldes Præcessionen. Det bestaar i, at Jordaksen i Stedet for at blive parallel med sig selv, drejer sig saaledes, at den efterhaanden peger mod alle de Punkter af Himmelkuglen, som ligge $23^1/_2{}^0$ fra Ekliptikas Pol. Dette fremkommer ved, at Jorden er fladtrykt, saa at der langs Ækvator er ophobet en større Masse, men Ækvator danner en Vinkel paa $23^1/_2{}^0$ med den Plan, Ekliptika, i hvilken Solen altid befinder sig; dennes Tiltrækning vil nu søge at faa den omtalte ophobede Masse ved Ækvator til at ligge i Ekliptika, eller med andre Ord rejse Jordaksen vinkelret paa denne

Plan, og denne Virkning i Forening med den daglige Rotation er Skyld i Præcessionen. Ogsaa Maanen har af lignende Grund nogen Indflydelse paa det omtalte Fænomen.

## Svingende eller oscillerende Bevægelse.

**110.** Dersom et Legeme befinder sig i Punktet $A$ uden Begyndelseshastighed, men tiltrækkes hen imod Punktet $O$ af en Kraft, som er proportional med Afstanden derfra, vil Legemet faa en accelereret Bevægelse, indtil det har naaet Punktet $O$; derefter vil Bevægelsen blive retarderet og helt ophøre, naar Legemet har fjernet sig en Vej $OC = OA$. Her vender Legemet og udfører den samme Bevægelse i omvendt Retning, og hvis der ingen Modstand var, vilde disse Svingninger fortsættes i det uendelige.

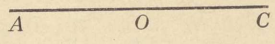

Fig. 161.

Et Legeme, der bevæger sig paa denne Maade, kan under hele Bevægelsen betragtes som Projektion af et andet, der gennemløber Halvcirklen $AYC$ med jævn Hastighed. Idet vi antage, at bægge Legemer have samme Masse $m$, vil der nemlig til Vedligeholdelse af den jævne Cirkelbevægelse behøves en Normalkraft $\frac{\pi^2 a m}{T^2}$, idet $a$ er Radius og $T$ den Tid, hvori Halvcirklen gennemløbes. Men Cirkelbevægelsen kan hele Tiden tænkes opløst i en lodret og en vandret Bevægelse, hver frembragt af Normalkraftens to Komposanter i disse Retninger. I et vilkaarligt Punkt $Y$ vil den vandrette Komposant være $\frac{\pi^2 a m}{T^2} \sin u = \frac{\pi^2 x m}{T^2}$, naar $OX$ kaldes $x$. Naar nu tillige det først omtalte Legeme $m$ svinger fra $A$ til $C$ under

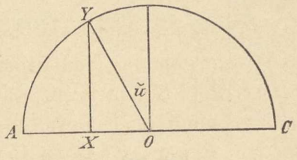

Fig. 162.

Paavirkning af en Kraft proportional med Afstanden fra $O$, vil denne Kraft i Punktet $X$ kunne udtrykkes ved $\alpha x$, hvor $\alpha$ er en Konstant. Hvis altsaa de to Legemer samtidig udgaa fra $A$, og man sætter $\frac{\pi^2 m}{T^2} = \alpha$, saa maa de hele Tiden følges ad paa den Maade, at det ene er Projektion af det andet. Af den sidste Ligning findes derfor den Tid, hvori Legemet svinger fra $A$ til $C$,

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

uafhængig af Udsvingets Størrelse.

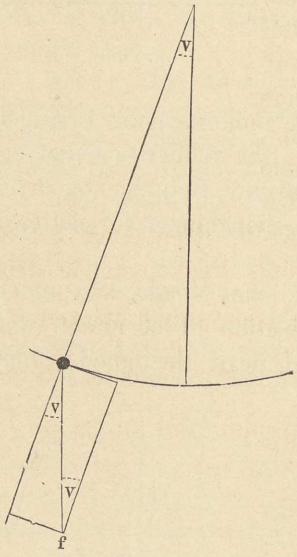

Fig. 163.

**III. Pendulet.** Et vigtigt Eksempel paa en Bevægelse af denne Art have vi i Pendulet, hvorved man forstaar et Legeme, som er ophængt i en Akse, hvorom det kan udføre Svingninger, naar det paavirkes af visse Kræfter. Vi ville først tage det simpleste Tilfælde, nemlig det enkelte Pendul, som bestaar af en lang tynd Traad, hvis Vægt vi ikke behøve at tage Hensyn til, og som i Enden bærer et ganske lille Legeme med Vægten $p$. Fjernes dette Pendul fra sin Ligevægtsstilling, vil den Kraft, som paavirker det, og som er lig dets Vægt, kunne opløses i to Komposanter, af hvilke den ene kun spænder Traaden, medens den anden, $p \sin v$, fremskynder det lille Legeme i sin Bane; dersom vi indskrænke os til at betragte saa smaa Udsving, at vi kunne sætte Sinus lig Vinklen, udtrykt i Buemaal, bliver den bevægende Kraft langs ad Banen $= p \frac{x}{l}$, hvor $x$ er Buen og $l$ Pendulets Længde. Da dette Udtryk er proportionalt med $x$, foregaar

Bevægelsen efter den Lov, der blev udviklet i forrige Paragraf, og idet $\alpha = \frac{p}{l}$, bliver Svingningstiden

$$T = \pi \sqrt{\frac{m\,l}{p}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

I Reglen afviger Pendulets Form kendeligt fra det, vi hidtil have betragtet, idet Massen har en større Udstrækning; vi kunne imidlertid vise, at Svingningerne foregaa efter samme Lov. Den bevægende Kraft er nemlig hele Legemets Vægt $p$, som kan forenes i Tyngdepunktet $T$, der antages at ligge i Afstanden $l$ fra Hvilepunktet $H$. Har et saadant, sammensat Pendul drejet sig en vis Vinkel, vil Tyngdekraftens Arbejde derfor være det samme som ved et enkelt Pendul med Længden $l$, naar det har drejet sig den samme Vinkel, og der maa altsaa i bægge Tilfælde være opnaaet samme levende Kraft. Men ifølge § 108 er denne for det sammensatte Penduls Vedkommende den samme, som om der i Tyngdepunktet var anbragt Massen $\frac{I}{l^2}$, naar $I$ er Inertimomentet. Vi kunne derfor beregne Svingningstiden af den første Formel ovenfor ved at sætte $\frac{I}{l^2}$ i Stedet for $m$ og faa derved

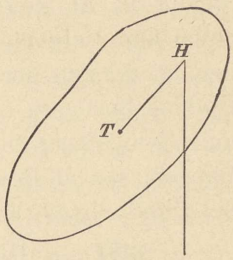

Fig. 164.

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{p\,l}};$$

Nævneren $p\,l$ er den Svingkraft, som paavirker Pendulet, naar det holdes vandret.

Denne Formel tjener ogsaa til Beregning af Inertimomentet, naar man har iagttaget Svingningstiden.

Ved Sammenligning med den Formel, der gælder om det enkelte Pendul, finder man, at naar dette skal have samme Svingningstid som et sammensat, maa dets Længde $L$ være

lig med $\frac{g I}{p l}$; denne Størrelse kaldes det sammensatte Penduls reducerede Længde. En Akse, som i denne Afstand kan lægges parallel med Drejningsaksen, saaledes at Tyngdepunktet ligger i de to Parallelers Plan, kaldes Svingningernes Akse. Det kan bevises, at denne altid ligge lavere end Tyngdepunktet, og dersom man gør den til Drejnigsakse, kan det ligeledes bevises, at den reducerede Længde o Svingningstiden blive de samme som før.

**112. Pendulets Anvendelser.** 1. Pendulet er de bedste Middel til at regulere et Urs Gang; Drivkrafte, som enten kan være et faldende Lod eller en spændt Fjede, vilde nemlig, dersom den fik Lov til at virke uafbrudt, bevæge alle Hjulene hurtigere og hurtigere, men man benytter nuet Penduls Svingninger til med regelmæssige Mellemrum at standse Gangen, saa at Bevægelsen hver Gang begynder forfi. Fra det Sted, hvor Kraften virker, overføres Bevægelsen ved Hjælp af Tandhjul og Drev til flere Akser, hvorved der opnaas hurtige Omdreninger, skønt Loddet falder meget langsom. Paa en passende Akse anbringes der et Tandhjul med Tænder af en særegen Form, et saakaldte Hemværkshjul $H$*), og over ette er der igen en Akse, som ved den en Ende $F$ bærer en Bøjle $E G$ med indabøjede Ender, og som ved den anden Ende har en gaffelformet Forlængelse, mellem hvi Grene $C$ et Pendul $A B$ kan svinge. Naa dette er i en af sine Yderstillinger, vil en af Bøjlens Ender gribe ind i Hemværkshjulet og derved standse hele Uværket, me i det Øjeblik, Pendulet gaar gennem sin Hvilestilling, vil Tandhjulet dreje sig, indil Bøjlens anden Ende paany standser Gangen. For hver dobbelt Svingning, Pendulet gør,

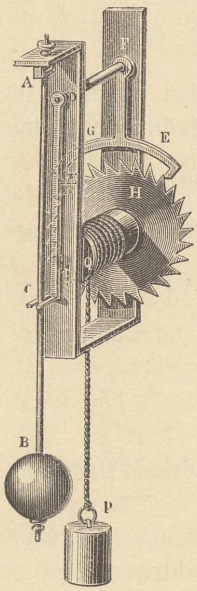

Fig. 165.

*) I Figuren bliver dette direkte sat i Bevægelse af et Lod.

drejer Hemværkshjulet sig saaledes en Tand frem; har det 30 Tænder, og Pendulet er et Sekundpendul, gaar Hjulet derfor en Gang rundt i et Minut, saaledes at Aksen kan bære en Sekundviser. Medens Pendulet regulerer Urets Gang, er det omvendt Urets bevægende Kraft, der vedligeholder Pendulets Svingninger, idet dette hver Gang i Yderstillingerne faar et Stød af Hemværkshjulet, naar Svingningen skal til at begynde. Minutviseren er befæstet paa en Akse, som drejer sig 60 Gange saa langsomt som Hemværkshjulet, og Timeviseren sidder paa en hul Akse, der omslutter Minutviserens, og som ved Hjælp af nye Tandhjulsforbindelser bringes til at dreje sig 12 Gange saa langsomt. Gaar Uret for langsomt eller hurtigt, maa man gøre Pendulet kortere eller længere; det bestaar derfor i Reglen af en Stang, som forneden bærer en tung Linse, der kan flyttes op og ned ad Stangen. Da Temperaturen forandrer Pendulstangens Længde, vil et Ur gaa langsommere i Varme end i Kulde, hvis man ikke anvender et af de saakaldte Kompensationspenduler, hvis Øjemed netop er at udelukke Varmens Indflydelse paa Pendullængden.

Det simpleste af disse (Fig. 166) er indrettet saaledes, at Tværstykket $a\,b$ foroven bærer de to Jærnstænger $R$, der forneden ere forbundne ved Stykket $f\,g$, og fra dette udgaar der to Zinkstænger $T$, der igen ved Forbindelsesstykket $c\,d$ bære Jærnstangen $S$, som gaar frit gennem $f\,g$ og bærer det tunge, lindseformede Legeme. Ved $0^0$ kan man udtrykke Pendullængden ved $R + S - T$, og kaldes Udvidelseskoefficienterne $\alpha$ og $\beta$, bliver Længden ved $t^0$ $(R + S)\,(1 + \alpha\,t) - T\,(1 + \beta\,t)$. For at dette kan være det samme som det forrige, maa man have

$$(R + S)\,\alpha = T\,\beta,$$

hvoraf Stængernes Længde beregnes.

I Lommeure sker Reguleringen ved et særegent Tandhjul, hvis Bevægelse regelmæssig afbrydes af »Uroen«, som er et lille Svinghjul, der sættes i ligetidige Svingninger ved Hjælp af en Spiralfjeder. Uroens Akse bærer enten en Bøjle

eller et Legeme af anden Form, som ved Svingningerne kan gribe ind mellem Tænderne paa det omtalte Hjul.

2. Taktmaaleren eller Metronomen bestaar af et lille Urværk, som reguleres ved et Pendul; dette er temlig kort men har en Forlængelse op over Hvilepunktet, og paa denne er der anbragt en Skydevægt, hvis større eller mindre Afstand fra Hvilepunktet gør Svingningstiden længere eller kortere. Pendulet er indrettet saaledes, at dets Slag kunne høres tydeligt, hvorved det angiver en bestemt Takt.

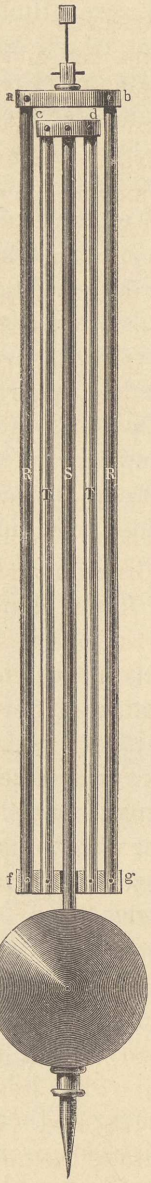

Fig. 166.

3. Ved Hjælp af Pendulet finder man Accelerationen ved det fri Fald eller Tyngden $g$. Af Formlen $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ faas nemlig $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$. Tiden $T$ bestemmes ved at hænge det Pendul, man vil anvende, op foran et nøjagtigt Ur, som er reguleret ved astronomiske Iagttagelser, og hvis Pendul svinger 1 Gang i Sekundet; i nogen Afstand er der opstillet en Kikkert med Traadkors, og ved Hjælp af den lægger man nøje Mærke til, hver Gang de to Penduler samtidigt gaa gennem Ligevægtsstillingen. Uret viser da, hvor mange Sekunder der forløber mellem to saadanne Sammentræf, og hvis man tæller Antallet af Svingninger af det Pendul, der bruges til Forsøget, faas derved Svingningstiden. Den reducerede Længde faas bedst ved at anvende et Pendul af særegen Form, det saakaldte Reversions-



Fig. 167.

pendul (Fig. 167). Det bestaar af en Stang, som hen imod Enderne bærer to mod hinanden vendte Knivsægge, og to forskydelige Vægte, den ene mellem Knivsæggene, den anden udenfor. Pendulet kan bringes til at svinge, idet det lægges med en af de skarpe Ægge paa et haardt Underlag. Man flytter Skydevægtene, indtil Svingningstiderne blive de samme, enten Pendulet svinger paa den ene eller den anden Æg, og Afstanden mellem disse er da den reducerede Længde. Man har paa denne Maade fundet, at Tyngden ikke er ens over hele Jorden, den vokser lidt fra Ækvator hen imod Polerne og er mindre paa høje Bjærge; derimod er den ens for alle Legemer, thi man faar samme Resultat, hvilket Materiale man end anvender til Pendulet. Ved Ækvator er $g = 9{,}78^{m}$, i Paris $9{,}81^{m}$ og hos os $9{,}815^{m}$ eller 31,27 Fod. (Se mere herom § 124).

4. Foucault har i 1851 paavist Jordens Akseomdrejning ved Hjælp af et meget langt og tungt Pendul. Sættes nemlig et saadant i Svingninger, vil det paa Grund af Inertien vedblive at svinge i samme Plan, medens Jorden drejer sig nedenunder, saafremt Underlagets Bevægelse og andre Hindringer ikke faa nogen Indflydelse paa Svingningerne. Pendulet, der bestaar af en lang tynd Metaltraad, som bærer en tung Kugle, ophænges derfor paa en Spids; det trækkes først ud i en Yderstilling og fastholdes ved en tynd Traad, indtil det hænger fuldkommen roligt; derpaa brændes Traaden over, og Pendulet begynder sine Svingninger. Paa denne Maade kan man opnaa, at Svingningerne foregaa i en Plan, hvilket er af største Vigtighed, thi hvis Pendulet faar en lille Bevægelse til Siden, vil det udføre en Art elliptiske Svingninger, hvor Storaksen tilmed efterhaanden forandrer sin Retning uafhængig af Jordens Drejning. Hvis Bevægelsen nu foregaar, som den skal, i en Plan, vil det alligevel tage sig ud, som om denne Plan drejer sig i samme Retning som Solens daglige Bevægelse, idet Jordens Akseomdrejning foregaar i den modsatte Retning. For at iagttage Drejningen, forsynes Pendulkuglen forneden med en Spids, som kan afsætte et Mærke i en lille Vold af

Sand eller Mel, som er dannet paa det Sted, hvor Pendulet er i sin Yderstilling*).

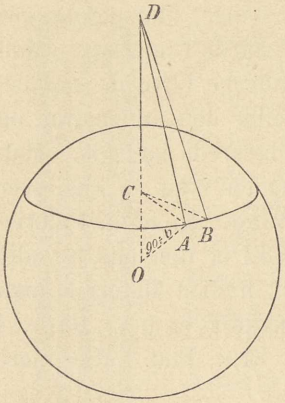

Fig. 168.

Størrelsen af Drejningen kan beregnes paa følgende Maade. Dersom Forsøget gøres paa Stedet $A$ under Breddegraden $b$, vil dette Sted i en vis Tid dreje sig hen til $B$, og naar Tiden er kort nok, kan man betragte bægge Seders Horizonter som sammenfadende med den Plan, der dannes af de to Middagslinjer $A\,D$ og $B\,D$. Den Vinkel, som Pendulets uforandrede Svingningsretning danner med Middagslinjen, maa undergaa samme Forandring, som Middagslinjens Retning selv, det vil sige, naar Jorden drejer sig Vinklen $A\,C\,B = \alpha$, ser det ud, som om Svingningsretningen drejer sig Vinklen $A\,D\,B = \beta$. Men nu har man

$$A\,B = C\,A\,.\,\alpha = D\,A\,.\,\beta$$

$$\text{eller} \quad \beta = \alpha\,.\,\frac{C\,A}{D\,A} = \alpha\ \sin\ b.$$

Fortsættes Bevægelsen i længere Tid, vil man faa

$$\beta_1 = \alpha_1\ \sin\ b,\ \beta_2 = \alpha_2\ \sin\ b \quad \text{o. s. v,}$$

$$\text{hvoraf} \quad \beta_1 + \beta_2 + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)\ \sin\ b,$$

saa at den samme Regel gælder om en større Drejning. Iagttagelserne bekræfte denne Beregning.

### Opgaver.

178. Find Længden af et enkelt Sekundpendul i Kjøbenhavn.

Res. 994 mm eller 38 Tommer.

*) Endnu bedre er det i Stedet for den omtalte Vold at anvende en Metalplade, hvorpaa der lægges et Stykke Papir, som er befugtet med tyndt Klister, hvori der er opløst lidt Jodkalium. Naar man saa forbinder Enderne af en kraftig Induktionsrulle med denne Plade og med Pendulets Ophængningspunkt, kan man lade en Induktionsgnist springe over fra Pladen til Pendulets Spids, naar dette er i sin Yderstilling. Herved farves Klistret blaat af det Jod, som udskilles ved Strømmen.

179. Hvor langt maatte et Pendul være for at svinge en Gang i Minuttet?

Res. Næsten $^1/_2$ Mil.

180. Paa to Steder af en Linje, som danner Vinkel $\alpha$ med den vandrette Plan, er der befæstet tynde Snore, som bære et lille tungt Legeme. Find den Tid, Legemet bruger til at udføre en lille Svingning, naar dets Afstand fra Skraalinjen er $l$.

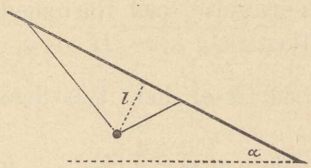


Fig. 169.

Res. $\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}$.

Ved Forsøg af denne Art kan man vise Svingningstidens Afhængighed af Kraften.

181. En homogen cylindrisk Stang, som er ophængt i Endepunktet, har Svingningstiden $T$; hvad bliver Svingningstiden for det Pendul, man faar, naar to saadanne Stænger befæstes til hinanden, saaledes at de danne en ret Vinkel med lige lange Ben, og man hænger denne Vinkel op i sit Toppunkt og lader den svinge i sin egen Plan?

Res. $T \sqrt[4]{2}$.

182. Hvorledes forholde Svingningstiderne sig for to ligedannede Penduler af samme Stof, som ere ophængte i tilsvarende Punkter?

Res. Som Kvadratroden af det lineære Forhold.

183. En Stang uden Vægt kan svinge om et Punkt i Afstanden $l$ fra den nederste Ende, hvor der findes et lille tungt Legeme. Langs Stangen kan man skyde et andet lille Legeme $A$ af samme Vægt, og der spørges om, 1) hvor stor Svingningstiden bliver, naar $A$ anbringes i Afstanden $a$ fra Hvilepunktet, 2) hvor $A$ skal befæstes, for at Svingningstiden kan blive saa kort som muligt, 3) hvad Svingningstiden bliver, naar $A$ sættes i denne Afstand over Hvilepunktet?

Res. 1) $\pi \sqrt{\frac{l^2 + a^2}{g\,(l + a)}}$, 2) Afstand fra Hvilepunktet $= l\,(\sqrt{2} - 1)$, 3) $\pi \sqrt{\frac{2\,l}{g}}$.

184. Hvorledes bestemmes Hastigheden og Udsvingets Størrelse paa et bestemt Tidspunkt i en Pendulsvingning?

Ved at betragte Svingningen som Projektion af en Cirkelbevægelse med Hastigheden $H$ findes i Punktet $X$ Pendulets Hastighed $h = H \cos u$, og Afstanden fra $O$ er $x = a \sin u$, naar $a$ er hele Udsvinget. Men nu er $H = \frac{\pi a}{T}$, og endvidere maa $\frac{u}{\pi} = \frac{t}{T}$, naar $t$ er den Tid, Pendulet behøver for at svinge fra $X$ til sin Hvilestilling eller omvendt. Man faar derfor

$$h = \frac{\pi a}{T} \cos \frac{\pi t}{T} \text{ og } x = a \sin \frac{\pi t}{T}.$$

185. Dersom et Legeme $(P)$ svinger om en vandret Akse i Afstanden $l$ fra Tyngdepunktet og udfører $n$ smaa Svingninger i Minuttet, hvor stort er da Inertimomentet?

$$\text{Res. } I = \frac{3600\, P l}{\pi^2 n^2}.$$

186. Dersom den Akse, med Hensyn til hvilken man søger Inertimomentet, gaar gennem Tyngdepunktet, maa man, for at faa Legemet til at svinge, et eller andet Sted derpaa fastgøre en lille tung Masse; hvis denne vejer $p$ og er i Afstanden $a$ fra Tyngdepunktet, hvilken Formel tjener da til Beregning af $I$, naar Legemet gør $n$ Svingninger i Minuttet?

$$\text{Res. } I = \frac{3600\, p a}{n^2 \pi^2} - \frac{p}{g} a^2.$$

187. Længden af et Foucaults Pendul er $12^{\text{m}}$ og hele Svingningsbuen $2^{\text{m}}$; Drejningen iagttages, ved at Pendulet i sin Yderstilling tegner et Mærke paa en cirkelformet Vold. Hvilken Afstand bliver der imellem to Mærker ved Siden af hinanden, naar Forsøget gøres her til Lands?

Res. $0{,}1^{\text{mm}}$.

**113. Cykloiden.** Dersom et Legeme bevæger sig paa en lodret stillet Cirkel under Paavirkning af Tyngden, vil Bevægelsen foregaa efter samme Love, som gælde for Pendulet; Svingningerne blive altsaa ligetidige, naar de kun ere smaa.

Den Linje, som beskrives af et Punkt paa en Cirkelperiferi, der ruller hen ad en ret Linje, kaldes en Cykloide. Om den kan man

bevise, at et Legeme, som falder ned ad den under Paavirkning af Tyngden, altid bruger den samme Tid til at naa det nederste Punkt, paa hvilket Sted Faldet end begynder. Den samme krumme Linje har en anden mærkelig Egenskab, idet man nemlig ogsaa kan bevise, at dersom et Legeme skal bevæge sig ved Hjælp af Tyngdekraften fra et eller andet Punkt $A$ til $B$, saa sker Bevægelsen i den kortest mulige Tid, naar Legemet falder paa en Cykloide, der har sit øverste Punkt i $A$.

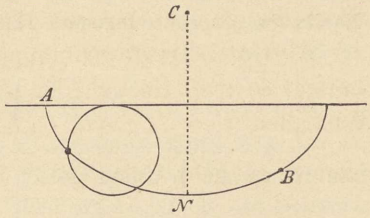

Fig. 170.

**114. Andre Former af Penduler.** Den Svingkraft, som fører et almindeligt Pendul tilbage til sin Hvilestilling, er for en lille Fjerningsvinkel $v$

$$p\ l\ sin\ v \text{ eller } p\ l\ v.$$

Nævneren, som findes i Formlen $T = \pi \sqrt{\frac{I}{p\,l}}$, er altsaa det konstante Forhold mellem Svingkraften og Fjerningsvinklen, udtrykt i Buemaal. Om Svingkraften hidrører fra Tyngden eller en anden Aarsag, er imidlertid ligegyldigt, naar den blot er proportional med Udslaget.

Bringes f. Eks. en vandret Magnetnaal ud af sin Ligevægtsstilling, vil Jordmagnetismen paavirke den i konstant Retning og med uforandret Størrelse, ligesom Tyngden paavirker et almindeligt Pendul; man indser derfor paa samme Maade, at den Svingkraft, som drejer Naalen, ved smaa Udslag er proportional med disse. Kaldes det konstante Forhold mellem Svingkraften og Udslaget $S$ og Naalens Inertimoment $I$, bliver Svingningstiden

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{S}}.$$

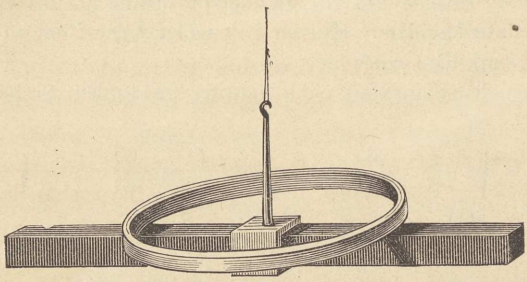
Fig. 171.

Kender man ikke $I$, kan man gøre et andet Forsøg, idet man paa Naalen lægger en umagnetisk Ring med Massen $m$ og Radius $r$; man vil da have

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{I + m r^2}{S}}.$$

$I$ og $S$ kunne bestemmes af de to Ligninger. $S$ er i Virkeligheden den Svingkraft, hvormed Jorden paavirker Naalen, naar den holdes vinkelret paa sin Ligevægtsstilling.

Der gives Tilfælde, hvor Proportionaliteten mellem Svingkraften og Udslaget vedvarer, selv om dette bliver stort. Hænger man saaledes en tynd cylindrisk Traad op i en lodret Stilling og lader den forneden bære et Legeme, saa vil der ved Snoning af Traaden opstaa en Modstand, der er proportional med Snoningsvinklen, saa længe Elasticitetsgrændsen ikke overskrides. Overlader man altsaa Traaden til sig selv, vil den udføre Svingninger, der blive ligetidige, selv om de ere store.

Af lignende Grund udføre elastiske Fjedre ligetidige Svingninger.

### Opgaver.

188. I et $U$-Rør af samme Gennemsnit overalt findes der en Vandsøjle af Længde $l$. Find den Tid, som bruges til en Svingning, naar Vandets Ligevægt forstyrres.

Vi kalde Vægten af hver Længdeenhed af Vandsøjlen $p$. Den variable Afstand fra Ligevægtsoverfladen til en af de Overflader, der findes under Bevægelsen, kaldes $x$. Trykket bliver da $2 p x$, og Massen, der skal bevæges, $\frac{p l}{g}$, hvoraf efter § 110 findes: $T = \pi \sqrt{\frac{l}{2 g}}$.

189. En Magnetnaal udfører under Paavirkning af Jordmagnetismen alene 16 Svingninger i Minuttet, men hvis den tillige paavirkes af den ene Pol af en meget lang Magnetstang, som holdes i den magnetiske Meridian 10 cm fra Naalen, gør den 44 Svingninger i Minuttet, og er Magnetpolen 20 cm borte, udføres der 26 Svingninger i hvert Minut Beregn Forholdet mellem de Svingkræfter, $S_1$ og $S_2$, Magnetpolen vilde udøve i de to Tilfælde paa Naalen, dersom denne holdtes vinkelret paa den magnetiske Meridian. Hvilken Lov udledes deraf om en Magnetpols Virkning i forskellige Afstande?

Kaldes den Svingkraft, som hidrører fra Jorden, $S$, har man Ligningerne

$$\frac{60}{16} = \pi \sqrt{\frac{I}{S}}, \quad \frac{60}{44} = \pi \sqrt{\frac{I}{S+S_1}}, \quad \frac{60}{26} = \pi \sqrt{\frac{I}{S+S_2}},$$

hvoraf faas $\frac{44^2}{16^2} = \frac{S+S_1}{S}$ og $\frac{26^2}{16^2} = \frac{S+S_2}{S}$

eller $\frac{S_1}{S_2} = \frac{44^2 - 16^2}{26^2 - 16^2} = 4.$

190. Udfører et vandret Pendul Svingninger alene paa Grund af Ophængningstraadens Snoningsmodstand, har man i Svingningernes Ligetidighed det bedste Bevis for, at Snoningsmodstanden virkelig er proportional med Udsvinget, selv om dette er stort. Den Svingkraft, som angiver Modstanden, kan altsaa udtrykkes ved $S = \alpha v$ (§ 41), hvor $v$ er Vinklen, udtrykt i Buemaal, og $\alpha$ en Konstant, som kan findes ved Iagttagelse af Svingningstiden. Gør Pendulet f. Eks. $n$ Svingninger i Minuttet, hvorledes beregnes da $\alpha$?

Res. $\alpha = \frac{I n^2 \pi^2}{3600}$.

---

## Den almindelige Tiltrækning (Attraktion).

---

**115. De Keplerske Love.** I Oldtiden og Middelalderen var det den almindelige Mening, at Jorden var det faste Centrum i Verdensrummet, og at alle Himmellegemernes Bevægelser foregik omkring dette Centrum. Skønt enkelte fremragende Mænd i de Tider havde en anden Opfattelse, der mere nærmede sig til den rette, var dog Nikolaus Kopernikus (født i Østpreussen Aar 1473, død 1543) den første, som bestemt udtalte den Anskuelse, at alle Planeterne, Jorden iberegnet, bevæge sig omkring Solen. Imidlertid var hans Kendskab til de virkelige Bevægelser dog temlig mangelfuldt, og hans Opfattelse beroede ikke alene paa Iagttagelser men til Dels ogsaa paa filosofiske Betragtninger. Det var rimeligvis dette, som gjorde, at Tyge Brahe (født i Skaane 1546, død 1601 i Prag) forkastede Kopernikus's System, idet han antog Jorden for Centrum for Maanens og Solens Baner, medens derimod Planeterne skulde bevæge sig omkring Solen. Skønt Tyge Brahes Opfattelse var urigtig, blev det alligevel ham, der gav Stødet til den rette Forstaaelse af Himmellegemernes Bevægelser, idet han ved sin Død efterlod sig en stor Mængde, efter den Tids Begreber meget nøjagtige Iagttagelser af Planeternes (særlig Mars's) tilsyneladende Bevægelser. Disse bleve nemlig af Tyge Brahes Enke over-

ladte til hans Discipel, Johannes Kepler (født i Würtemberg 1571, død 1630), og det lykkedes ham efter mange Aars Arbejde paa Grundlag af Tyge Brahes Iagttagelser at finde de Love, hvorefter Planetbevægelserne foregaa, nemlig de saakaldte tre Keplerske Love. Disse ere følgende:

1) Enhver af Planeterne beskriver en Ellipse, i hvis ene Brændpunkt Solen befinder sig;
2) For enhver af Planeterne beskriver Radius vektor Arealer, som ere proportionale med de dertil anvendte Tider; (ved Radius vektor forstaas Linjen mellem Solen og Planeten).
3) For to forskellige Planeter forholde Omløbstidernes Kvadrater sig lige som tredje Potens af deres Middelafstande (det halve af Ellipsens Storakse).

Paa Grund af Solens Stilling i alle Planetbanerne antog Kepler endvidere, at der fra Solen maatte udgaa en Kraft, som var Aarsag til Bevægelserne, og han opstillede forskellige Hypoteser, om at denne Kraft svækkedes enten i Forhold til Afstanden eller dennes Kvadrat. Der var i det hele taget paa den Tid mange Videnskabsmænd, som beskæftigede sig med dette Spørgsmaal, men det blev kun til løse Antagelser og filosofiske Teorier, indtil Newton paaviste den rette Tiltrækningslov og ved Hjælp deraf matematisk beviste Nødvendigheden af de Keplerske Love.

**116. Maanens Bevægelse.** Newtons Undersøgelse af Tiltrækningen blev foranlediget ved, at han en Gang, da han saa et Æble falde ned fra et Træ, kom til at tænke over, hvor langt den Kraft kunde række ud fra Jorden, og han satte sig da for at prøve, om Maanens Bevægelse om Jorden kunde forklares ved Hjælp af den samme Kraft. Kaldes Maanens Masse $m$, dens Afstand fra Jordens Centrum $R$ og dens Omløbstid $T$, og antages Banen for en Cirkel, maa den Kraft, som behøves for at frembringe Bevægelsen, være lig $\frac{4\pi^2 R m}{T^2}$, og den Acceleration, som derved meddeles Maanen indad mod Jorden, bliver altsaa $\frac{4\pi^2 R}{T^2}$.

Ved Jordens Overflade er Legemernes Acceleration $g$,

og nu sluttede Newton, at dersom bægge Accelerationer hidrøre fra den samme Tiltrækning af Jorden, maa de forholde sig omvendt som Kvadraterne af Afstandene fra Jordens Centrum, paa samme Maade som f. Eks. Lys og Lyd. Saadanne Virkninger, der udgaa fra et Punkt i alle Retninger, svækkes nemlig i omvendt Forhold af Afstandens Kvadrat, fordi Virkningerne efterhaanden fordeles paa større Kugleflader, hvis Arealer vokse med Radiens Kvadrat, saa hvert enkelt Sted paavirkes svagere i samme Forhold. Kaldes altsaa Jordens Radius $r$, gælder det om at prøve Rigtigheden af Ligningen

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot g.$$

Talværdierne af de Størrelser, som indgaa i denne Ligning, vare paa den Tid, Newton først prøvede sin Opfattelse af dette Forhold, ikke nøjagtig bekendte, og han kom derfor ikke til et tilfredsstillende Resultat; først mange Aar senere bleve de omtalte Størrelser nøjagtigere bestemte, og ved at regne med disse Værdier fandt han da sin Antagelse fuldstændig bekræftet. De Værdier, vi nu kende for Størrelserne, ere omtrent følgende:

$2\pi r = 40000000^{\text{m}}$, $R = 60\,r$, $T = 27^1/_3$ Dag, $g = 9{,}8^{\text{m}}$.

Det næste Skridt var at undersøge, om Planeternes Bevægelser lade sig forklare paa lignende Maade ved at antage, at Solen udøver en Tiltrækning paa dem, det vil sige, om det er muligt ud fra en saadan Tiltrækning at bevise de Keplerske Love.

**117. Centralbevægelse, den anden Keplerske Lov.** Man kalder det Centralbevægelse, naar et Legeme bevæger sig under Paavirkning af en Kraft, som udgaar fra et fast Punkt, og det kan bevises, at i enhver Centralbevægelse maa den anden Keplerske Lov være tilfredsstillet, hvorledes end Kraften forandrer sig.

Lad nemlig det Legeme, som bevæger sig, i et givet Øjeblik være i $P$ (Fig. 172) og have Hastigheden $h$; i Løbet af de uendelig smaa Tider $t$ og $^1/_2\,t$ vilde det da paa Grund af sin Inerti kunne gennemløbe Vejene $PB = h\,t$ og $PA = {}^1/_2\,h\,t$, men i de samme Tider vil Tiltrækningen, som

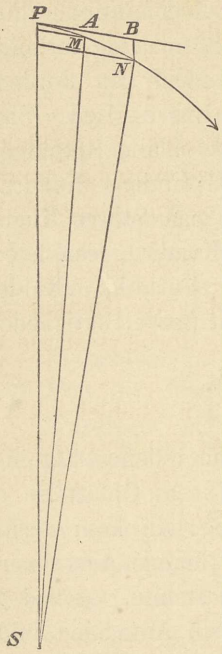


Fig. 172.

udgaar fra $S$, bringe Legemet til at gennemløbe visse Vejlængder hen imod $S$, saa det i Virkeligheden kommer til Punkterne $N$ og $M$. (Fjerde Vinkelspids i Parallelogrammerne). Da nu Tiden er uendelig lille, ville de af Radius vektor beskrevne Arealer kunne opfattes som Trekanter, nemlig $SPN$ og $SPM$, men disse have fælles Grundlinje, og Arealerne forholde sig da som Højderne, det vil sige som 2 til 1; i den samme Tid beskrives der følgelig det samme Areal, og i forskellige Tider ere de beskrevne Arealer proportionale med disse Tider.

Til at bevise den første og den tredje Keplerske Lov er det derimod nødvendigt at kende Størrelsen af Tiltrækningskraften.

### Opgaver.

191. Bevis, at en Planets Hastighed paa hvert Sted er omvendt proportional med Perpendikulæren fra Solen paa Tangenten til det betragtede Punkt.

192. Bevis, at Radius vektor er omvendt proportional med Kvadratroden af den i en bestemt lille Tid gennemløbne Vinkel.

Sætningen kan anvendes til at finde Forholdet mellem Jordens Afstand fra Solen paa forskellige Tider, idet man observerer Solens tilsyneladende Bevægelse.

**118. Newtons Tiltrækningslov.** Efter Newtons Antagelse er den Tiltrækning, Solen udøver paa en Planet, for det første omvendt proportional med Afstandens Kvadrat; endvidere er Kraften, som bevæger Planeten (se § 90) proportional med dennes Masse, men ifølge Loven om Virkning og Modvirkning maa der i den anden Retning være en lige saa

stor Kraft, der bevæger Solen og er proportional med dens Masse. Kraften kan derfor udtrykkes ved

$$K = \frac{k\,M\,m}{r^2},$$

hvor $M$ og $m$ ere Solens og Planetens Masser, $r$ Afstanden mellem dem og $k$ en Konstant, hvis Værdi man har fundet $= 643 \cdot 10^{-12}$, naar der regnes med Meter og Kilo. (Se § 121).

## Opgaver.

193. Paa hvilket Sted mellem Jorden og Maanen er Tiltrækningen ens imod bægge Legemer? Jordens Masse er omtrent 80 Gange Maanens.

Res. Paa et Sted, som deler Afstanden i Forholdet 9 til 1.

194. Bevis den tredje Keplerske Lov under Forudsætning af, at Planetbanerne ere Cirkler. (Benyt Newtons Formel og Formlen for Centripetalkraften.)

$$\text{Res. } k\,M = \frac{4\,\pi^2\,r^3}{T^2}.$$

**119. Planeternes Beliggenhedsenergi.** Den Bevægelse, Solen faar paa Grund af en Planets Tiltrækning, er kun ubetydelig, hvorfor vi ville tænke os Solen som fast. For nu at finde Planetens Bevægelse ville vi først vise, hvorledes dens Beliggenhedsenergi forandres med Afstanden.

Tænkes Planeten flyttet et uendelig lille Stykke fra Afstanden $r$ til Afstanden $r_1$ ($> r$), kan Kraften gennemsnitlig sættes til

$$\frac{k\,M\,m}{r\,r_1},$$

og Arbejdet bliver

$$\frac{k\,M\,m}{r\,r_1}(r_1 - r) = k\,M\,m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Vedbliver man saaledes at flytte Planeten længere og længere ud i det uendelige, bliver hele Arbejdet

$$A = k\,M\,m\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) \ldots - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$= \frac{k\,M\,m}{r}.$$

Betegne vi altsaa ved $\gamma$ Planetens Beliggenhedsenergi, naar den er uendelig langt borte, vil den i Afstanden $r$ have Beliggenhedsenergien

$$\gamma - \frac{k\,M\,m}{r}.$$

Den samme Regel vil gælde om ethvert Legeme, som bevæger sig under Paavirkning af en Kraft, der er omvendt proportional med Afstandens Kvadrat.

**120. Den første og tredje Keplerske Lov.** Hvis en Planet i Afstanden $r$ fra Solen har Hastigheden $h$, vil hele dens Energi være udtrykt ved

$$^1/_2 m h^2 + \gamma - \frac{k M m}{r};$$

paa Grund af Energiens Vedligeholdelse er dette Udtryk konstant, og man har derfor

$$^1/_2 h^2 - \frac{k M}{r} = E,$$

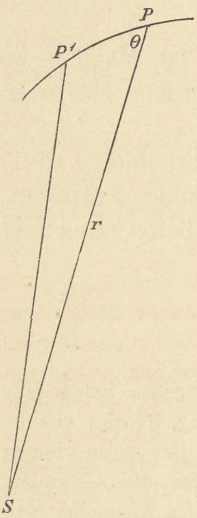


Fig. 173.

hvor $E$ er Betegnelsen for en ny Konstant, forskellig for hver Planet. Derson den krumme Linje i hostaaende Figur betyder et Stykke af en Planetbane, og $P$ og $P_1$ Planetens Steder i to Øjeblikke med den uendelig lille Tidsforskel $t$, saa er Vejen $P P_1 = h t$, og efter den idligere beviste anden Keplerske Lov maa Arealet $S P P_1$ være proportionalt med Tiden, det vil sige

$$^1/_2 h t . r \sin\theta = \beta,$$

hvor $\beta$ er en Konstant, og $\theta$ betyder Vinklen mellem Radius vektor og Tangenten. Vi have altsaa

$$h = \frac{2\beta}{r \sin\theta},$$

som indsat i den tidligere fundne Ligning giver

$$\frac{2\beta^2}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{k M}{r} = E$$

eller $2\beta^2 = (k M r + E r^2) \sin^2\theta$.

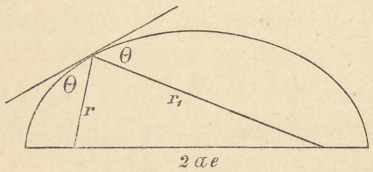


Fig. 174.

Denne Ligning, som giver en Relation mellem Radius vektor og dennes Vinkel med Tangenten, kunne vi vise, svarer til et Keglesnit med det ene Brændpunkt i $S$*). Fra Geometrien vides det nemlig, at i disse Kurver halverer Tangenten Brændstraalernes Vinkel eller Nabovinkel, saa at vi faa

*) Til Ligningen svarer der for en bestemt Værdi af $E$ og $\beta$ kun een Kurve. Bestemme vi nemlig den Værdi af $\theta$, som svarer til en vis Værdi af $r$, kunne vi tegne et uendelig lille Stykke af Kurven; derved faas det følgende $r$ og deraf paa ny $\theta$ o. s. v. Ved Ligningen findes nok to Værdier af $\theta$, men disse bestemme den samme Kurve i omvendt Omløbsretning.

$4a^2e^2 = r^2 + r_1^2 \pm 2rr_1 \cos 2\theta$ og $r_1 \pm r = 2a$; elimineres $r_1$, faa vi Ligningen

$$a^2(e^2 - 1) = (\mp 2ar + r^2)\sin^2\theta,$$

der er identisk med den ovenfor fundne, naar

$$\frac{a^2(e^2 - 1)}{2\beta^2} = \frac{\mp 2a}{kM} = \frac{1}{E}.$$

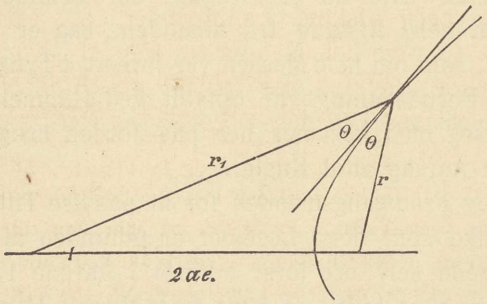


Fig. 175.

Vi faa saaledes to Ligninger, hvoraf $a$ og $e$ kunne bestemmes; hvis $E$ er en positiv Størrelse, maa $e > 1$, det vil sige, Banen er en Hyperbel; hvis $E$ er negativ, bliver Banen en Ellipse, og hvad Planeterne angaar, har man hidtil kun iagttaget elliptiske Bevægelser. Kalder man da en Planets hele Omløbstid $T$, kan man derved finde et Udtryk for den ovennævnte Konstant $\beta$; idet Banens Areal er $\pi ab$ eller $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, har man nemlig

$$\pi a^2\sqrt{1-e^2} = \beta T,$$

og ovenstaaende Proportion bliver derved til

$$\frac{a^2(e^2-1)}{2\left(\frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}\right)^2} = -\frac{2a}{kM}, \text{ hvoraf}$$

$$4\pi^2\frac{a^3}{T^2} = kM = \text{konstant}.$$

Herved er altsaa den sidste Keplerske Lov bevist.

**121. Cavendish's Forsøg.** Det er senere lykkedes at vise, at det ikke alene er Himmellegemerne, som tiltrække hinanden, men at der mellem hvilke som helst to Legemer her paa Jorden finder en Tiltrækning Sted efter Newtons Lov. Der kan imidlertid ofte blive betydelig Forskel paa Afstandene mellem de forskellige Dele af Legemerne; saa-

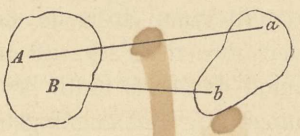


Fig. 176.

ledes ses det f. Eks. af Fig. 176, at Virkningerne langs $A\,a$ og $B\,b$ ere forskellige baade i Størrelse og Retning, og Resultanten af alle disse Tiltrækninger følger i Almindelighed ikke nogen simpel Lov. Derimod kan det bevises, at hvis Legemerne ere meget langt fra hinanden i Forhold til deres Størrelse, eller hvis de ere Kugler, der befinde sig i en hvilken som helst Afstand fra hinanden, saa er Virkningen den samme, som om hele Massen var forenet i Tyngdepunktet. Den første Forudsætning var opfyldt ved Himmellegemerne, og ved Forsøg med Legemer her paa Jorden bruger man af den nævnte Aarsag altid Kugler.

Ideen og Fremgangsmaaden for at paavise Tiltrækningen mellem hvilke som helst Legemer er udfunden af Mitchel, men Forsøgene selv ere først udførte i Aarene 1797—98 af Cavendish, efter hvem de have faaet Navn. Han brugte en meget tynd Stang af Træ, hvis Masse var ubetydelig, men ved Enderne var der fastgjort to ens Kugler af Bly, og Stangen var i sit Midtpunkt ophængt ved en lang, tynd Sølvtraad, som hang i Loftet af Værelset; uden om Stangen blev der anbragt en Glaskasse for at hindre Luftstrømningerne i at sætte den i Bevægelse. I samme vandrette Plan befandt der sig to ens, meget tunge og store Kugler, som vare fastgjorte i Enderne af to lodrette Stænger, der foroven vare forbundne ved et vandret Tværstykke af samme Længde som den Vægtstang, der bar de smaa Kugler. Midten af Tværstykket var lodret over Midten af Vægtstangen, og Tværstykket med de store Kugler kunde ved Hjælp af nogle Trisser og en Snor drejes om en lodret Akse, hvorved disse Kugler kom til at bevæge sig i en vandret Cirkel med Vægtstangen til Diameter. Ved Begyndelsen af Forsøget bleve de to store Kugler stillede $90^0$ fra de smaa, og disses Ligevægtsstilling iagttoges fra et andet Værelse ved Hjælp af en Kikkert, som gik gennem Muren. Iagttageren kunde da ved den omtalte Snor dreje de store Kugler hen imod de smaa, hvorved det viste sig, at disse ogsaa bevægede sig noget hen imod de store, indtil der indtraadte Ligevægt mellem Tiltrækningen og Ophængningstraadens Snoningsmodstand.

Betegner Figur 177 denne Ligevægtsstilling, er Tiltrækningen mellem Kuglerne $A$ og $B$ udtrykt ved $\frac{k\,m\,M}{r^2}$, hvor $m$ og $M$ ere Masserne af den lille og den store Kugle, og $r$ Afstanden $A\,B$; mellem Kuglerne $C$ og $D$ er der den samme Virkning. Naar $l$ er Vægtstangens Længde, og $v$ Vinklen mellem $C\,A$ og $D\,B$, danne Kræfterne en Svingkraft med Momentet

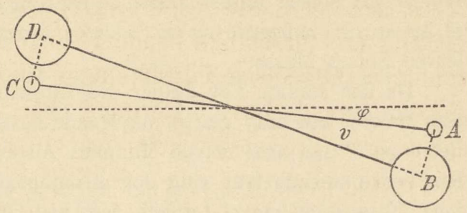

Fig 177.

$$\frac{k\,m\,M\,l\,\cos\,{}^1\!/_2\,v}{r^2}.$$

Ved Tiltrækningen mellem $B$ og $C$ og mellem $D$ og $A$ fremkommer der en anden Svingkraft, men den er saa ubetydelig, at det ikke behøves at tage Hensyn til den. Nu er det tidligere fundet, at den Svingkraft, som skal til for at sno en Traad inden for Elasticitetsgrændsen, er proportional med Snoningen. Kaldes derfor Traadens Snoningsvinkel $\varphi$, bliver Svingkraften $\alpha\,\varphi$, hvor $\alpha$ er en Konstant, der i Forvejen maa bestemmes, f. Eks. ved at anbringe paa Vægtstangen en bekendt Svingkraft og maale, hvor stor en Vinkel den derved bliver drejet. (En anden Maade se Opg. 190). Man har altsaa Ligningen

$$\frac{k\,m\,M\,l\,\cos\,{}^1\!/_2\,v}{r^2} = \alpha\,\varphi$$

i hvilken $v$, $\varphi$ og $r$ maales ved Iagttagelser gennem Kikkerten, medens $M$, $m$, $l$ og $\alpha$ i Forvejen ere bestemte. Ligningen tjener altsaa til at finde den absolute Tiltrækningskonstant $k$, og da der baade af Cavendish og andre senere Iagttagere bestandig er funden den samme Værdi, har man med det samme et Bevis for, at den Lov, som er lagt til Grund for Forsøgene, er rigtig. Talværdien for $k$ bliver, naar man regner med Meter og Kilo, omtrent

$$k = 643\,.\,10^{-12};$$

det er paa Grund af denne ringe Værdi, at man sædvanlig ikke mærker Tiltrækningen mellem de forskellige Legemer. Ved Bjærge, især naar de ligge frit, kan den dog mærkes, idet Lodlinjen derved bringes til at afvige noget fra den rigtige Stilling. Det iagttages, naar man ved astronomiske Maalinger beregner Polhøjderne eller de geografiske Bredder af et Sted Nord og Syd for Bjærget; man faar derved en større Breddeforskel end ved direkte Maaling paa Jorden uden om Bjærget.

**122. Himmellegemernes Masser.** Vi fandt i Slutningen af § 120 Formlen

$$\frac{4\,\pi^2\,a^3}{T^2} = k\,M,$$

hvor $M$ var Solens Masse; indsættes for $a$ og $T$ Middelafstand og Omløbstid for en af Planeterne og for $k$ den i forrige § fundne Værdi, beregnes derved Solens Masse.

Da den samme Lov gælder om Tiltrækningen mellem en Planet og dens Maane, kan man paa denne Maade ogsaa finde Massen af en Planet, idet $a$ og $T$ saa skal betyde Maanens Afstand og Omløbstid. For Jordens Vedkommende faar man dog et nøjagtigere Resultat ved at udtrykke dens Tiltrækning paa et Legeme her ved Overfladen; kaldes Legemets Vægt nemlig $p$ og dets Masse $\mu$, medens Jordens Masse er $m$ og Radius $r$, har man

$$p = \frac{k\,m\,\mu}{r^2} \text{ eller } g = \frac{k\,m}{r^2},$$

hvoraf $m$ bestemmes.

Man finder, at Solens Masse er omtrent 320 000 Gange saa stor som Jordens og 1000 Gange saa stor som Jupiters.

Massen af de Planeter, som ingen Maane have, kan bestemmes ved Hjælp af de Uregelmæssigheder, Perturbationer, som de fremkalde i deres Naboplaneters Bevægelser. Forholdet ved Planeternes Bevægelser er nemlig ikke slet saa simpelt, som vi hidtil have forudsat, idet de ikke alene tiltrækkes af Solen, men ogsaa af hverandre indbyrdes. Skønt disse Tiltrækninger ere ubetydelige i Forhold til Solens paa Grund af dennes overvejende store Masse, kunne de dog bestemmes ved nøjagtige Iagttagelser.

At Perturbationerne finde Sted efter den sædvanlige Tiltrækningslov, har man i den nyere Tid faaet et mærkeligt Bevis paa, idet Franskmanden Leverrier har opdaget Planeten Neptun ved Hjælp af dens Perturbationer af Uranus's Bevægelse. Han søgte nemlig at forklare nogle Uregelmæssigheder i dennes Bane ved at antage Tilstedeværelsen af en ny Planet uden for Uranus og var i Stand til at beregne baade Bevægelsen og Massen af denne formodede Planet; den blev ogsaa virkelig funden paa det af Leverrier angivne Sted af Himlen.

| | Middelafstand i Millioner Mile | Banens Ekscentricitet | Omløbstid | Diameter i Mile | Masse i Forhold til Jordens | Vægtfylde | Tyngde paa Overfladen i Forhold til g | Rotationstid |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Solen | | | | 184000 | 320000 | 1,4 | 27,5 | 25 Dage |
| Merkur | 7,7 | 0,2 | 88 Dage | 650 | 0,08 | 7,5 | 0,5 | 1 Dag |
| Venus | 14,5 | 0,007 | 225 Dage | 1640 | 0,8 | 4,9 | 0,9 | 1 Dag |
| Jorden | 20 | 0,017 | 1 Aar | 1720 | 1 | 5,4 | 1 | 1 Dag |
| Mars | 30 | 0,09 | 1,9 - | 930 | 0,1 | 3,9 | 0,4 | 1 Dag |
| Planetoiderne | 40—70 | 0,02-0,4 | 3-8 - | indt. 140 | | | | |
| Jupiter | 104 | 0,05 | 12 - | 19200 | 310 | 1,3 | 2,6 | 10 Tim. |
| Saturn | 190 | 0,05 | 30 - | 16400 | 92 | 0,7 | 1,1 | 10 Tim. |
| Uranus | 384 | 0,05 | 84 - | 7300 | 15,8 | 1,1 | 0,9 | |
| Neptun | 600 | 0,01 | 165 - | 7600 | 18,5 | 1,2 | 1 | |
| Maanen | 51000 Mil | 0,055 | 27 1/3 Dag | 470 | 0,012 | 3,3 | 0,16 | |

**123.** Ifølge Loven om Virkning og Modvirkning ville to hvilke som helst Legemer med Masserne $M$ og $M_1$ bægge tiltrække hinanden, og Kraften have vi fundet udtrykt ved $\frac{k M M_1}{r^2}$, naar $r$ er Afstanden. Den Acceleration, hvert Legeme faar, findes ved at dividere Kraften med Massen,

$$\text{altsaa} \quad G = \frac{k M_1}{r^2} \quad \text{og} \quad G_1 = \frac{k M}{r^2},$$

$$\text{hvoraf} \quad \frac{G}{G_1} = \frac{M_1}{M} = \frac{a}{a_1},$$

naar $a$ og $a_1$ betegne Legemernes Afstande fra deres fælles Tyngdepunkt.

Dersom nu de to Legemer fra først af overlades til sig selv uden Begyndelseshastighed, ville de falde ind imod hinanden efter en vis Lov med voksende Hastigheder, men i en uendelig lille Tid ville baade den gennemløbne Vej $\frac{1}{2} G t^2$ og den opnaaede Hastighed $G t$ være proportionale med Afstanden fra Tyngdepunktet, og denne Proportionalitet vedvarer under hele Bevægelsen, hvoraf Følgen bliver, at Tyngdepunktet ligger fast.

Dersom man derimod fra Begyndelsen af giver Legemerne en vis Hastighed, saa kan man bevise, at Følgen bliver den, at Tyngdepunktet enten bevæger sig i en ret Linje med jævn Hastighed eller ligger stille, medens de to Legemer bevæge sig i Keglesnit omkring Tyngdepunktet.

Anvendes dette nu paa Himmellegemerne, ser man, at det egentlig ikke er Planeten, som bevæger sig om Solen, men bægge bevæge sig i Ellipser om deres fælles Tyngdepunkt, og det samme gælder om en Planet og dens Maane. Men i alle Tilfælde, som virkelig forekomme, er Hovedlegemet saa mange Gange større end det andet, at Tyngdepunktet enten ligger inde i det første Legeme eller tæt ved det, hvorfor dets Bevægelse kun bliver ringe.

Betragte vi nu flere Legemer, f. Eks. Solen, Jorden og Maanen, kan det igen bevises, at deres fælles Tyngdepunkt enten ligger stille eller bevæger sig jævnt i en ret Linje, medens de enkelte Legemer bevæge sig paa en meget indviklet Maade; det samme gælder, hvis vi tale om alle Legemer, der høre til vort Solsystem, men selve Solens Bevægelse om det fælles Tyngdepunkt er yderst ringe paa Grund af dens overvejende store Masse. Endnu mere indviklet bliver Bevægelsen, dersom vi i vor Betragtning medtage de øvrige Fiksstjerner; vi maa da slutte, at de alle bevæge sig omkring deres fælles Tyngdepunkt i meget store Baner, der paa et mindre Stykke tage sig ud som rette Linjer. Dette Centrum for alle Fiksstjernernes Bevægelser ligger efter Mädlers Beregninger i »Syvstjernen«, og Tyngdepunktet for hele vort Sol- og Planetsystem bevæger sig for Tiden hen imod Stjernebilledet Herkules.

**124. Tyngden paa Jorden.** Paa de forskellige Steder af Jorden er Tyngden ikke ganske ens, for det første fordi alle Legemer paavirkes af en Centrifugalkraft, som fremkommer ved Jordens Rotation, og dernæst fordi Jorden ikke nøjagtig er en Kugle.

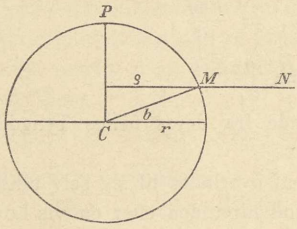

Fig. 178.

For et Legeme $\mu$, der befinder sig ved Ækvator, er Centrifugalkraften $\frac{4\pi^2 r\mu}{T^2}$, og Legemet vil derved faa en Acceleration $\gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, som gaar i modsat Retning af Tyngden og formindsker den. Ved at indsætte Talværdierne for Jordens Radius og Omløbstid finder man, at $\gamma$ er omtrent $3^1/_2$ cm, eller hvis den udtrykkes i Forhold til $g$, finder man paa det nærmeste

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{290} \text{ eller } \gamma = \frac{g}{290}.$$

Dersom vi gaa ud fra, at Jorden er en Kugle, finde vi paa samme Maade Centrifugalkraftens Acceleration $\gamma_1$ for Breddegraden $b$, idet vi regne med Parallelcirklens Radius $\rho = r \cos b$ i Stedet for $r$. Naar nu $\gamma_1$, der virker i Retningen $MN$, sammensættes med $g$, der virker langs $MC$, saa vil der fremkomme en Resultant, som ikke er vinkelret paa Jordens Overflade. Den største Del af denne bestaar af Vand, og det er sandsynligt, at Jorden tidligere har været helt flydende, men ved ethvert flydende Legeme, som er i Ligevægt, maa Overfladen være vinkelret paa Resultanten af de virkende Kræfter, hvad der i dette Tilfælde vil sige, at vor Antagelse om, at Jorden var en Kugle, ikke kan være rigtig. Vi kunne endvidere af den omtalte Resultants Stilling slutte, at Jorden maa blive fladtrykt ved Polerne, og skønt Tiltrækningen saa ikke længere ytrer sig, som om hele Jordens Masse var forenet i Centrum, vil dog den forskellige Afstand fra dette Centrum være en anden medvirkende Grund til, at Tyngden vokser fra Ækvator hen imod Polerne.

Man har ved omhyggelige Pendulforsøg fundet, at den

Lov, hvorefter Tyngden varierer af de to nævnte Aarsager, udtrykkes med stor Nøjagtighed ved Formlen

$$g = 9{,}831 \left(1 - \frac{1}{200} \cos^2 b\right),$$

hvor $g$ er Tyngden under Breddegraden $b$; et Legeme, som ved Polen vejede 200 Kilo, vilde altsaa ved Ækvator kun veje 199 Kilo.

Paa enkelte Steder af Jorden har man dog fundet smaa Afvigelser fra Formlen, hvad man forklarer ved særlige Forhold i Jordskorpen paa disse Steder, idet der kan findes underjordiske Hulheder eller Masser med paafaldende ringe eller stor Vægtfylde. I Omegnen af Moskov f. Eks. er Tyngden noget mindre, end den skulde være efter Formlen; det samme er Tilfældet i Himmalaya, hvorimod den paa enkelte Steder i Kaukasus er paafaldende stor. Paa samme Sted af Jorden er Tyngden ens hele Aaret rundt, altsaa uafhængig af andre Himmellegemers Stilling.

Naar man fjerner sig fra Jorden, vil dens Tiltrækning paa ethvert Legeme eller Legemets Vægt aftage i samme Forhold, som Kvadratet paa Afstanden til Centrum vokser. Det samme gælder selvfølgelig om Tyngden; kaldes altsaa Jordradien $r$ og Højden over Jordens Overflade $h$, faar man Tyngden paa dette Sted

$$g_1 = g \cdot \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{r}\right)^2} = \frac{g}{1 + 2 \cdot \frac{h}{r}} = g\left(1 - \frac{2h}{r}\right).$$

Da man ikke er i Stand til at hæve sig ret højt op fra Jorden, bliver Tyngdens Variation af denne Grund meget ringe, og det er ogsaa derfor, at de højere Potenser af $\frac{h}{r}$ ere udeladte i Formlen. Alligevel har det været muligt at bekræfte Teorien ved Forsøg, idet man i øverste Etage af en Bygning anbragte en fin Vægt, hvis ene Skaal hang i en lang Snor. Det viste sig da, at lige store Lodder, der laa paa de to Skaale, ikke vejede lige meget.

Gaar man ned i Jorden, skulde Tyngden aftage, indtil den blev 0 i Jordens Centrum, idet man faar mere og mere Jord over sig. (Se Opg. 197). Det viser sig imidlertid, at

Tyngden tiltager i de Dybder, man har kunnet naa til. Aarsagen hertil er, at de øverste Jordlag have en ringe Vægtfylde; naar man kommer ned i Jorden, nærmer man sig altsaa til de Dele, der udøve den største Tiltrækning.

## Opgaver.

195. Bevis, at to ensartede, ligedan beliggende Flader eller Legemer med ubetydelig og ens Tykkelse udøve samme Tiltrækning paa Lighedspunktet.

196. Bevis, at en Kugleskal, som er ensartet og lige tyk paa alle Steder, ingen Tiltrækning udøver paa et indvendigt Punkt.

Lægger man med det givne Punkt som Toppunkt en Kegleflade med uendelig lille Toppunktsvinkel og forlænger den ud over Punktet, saa afskæres der paa Kugleskallen to smaa Flader, hvis Tiltrækninger ere lige store og modsatte.

197. Hvis Jorden antages at være homogen, hvor stor bliver da Tyngden $h^{\mathrm{m}}$ under Overfladen?

Ved at benytte Resultatet fra forrige Opgave og udtrykke Massen af den Kugle, der har Radius $r—h$, i Forhold til hele Jordens Masse, finde vi

$$g_1 = g\left(1 - \frac{h}{r}\right).$$

198. Hvor meget formindskes Tyngden en Mil oven over Jordens Overflade, naar man ser bort fra Centrifugalkraften? (Jordens Radius er cr. 860 Mil).

Res. $^1/_{430}$.

199. I hvilken Højde vil Luftens Vægt ophæves af Centrifugalkraften?

Res. I en Afstand fra Jordens Centrum $= \sqrt[3]{290}$ Gange Jordens Radius.

200. Beregn den Indflydelse, Centrifugalkraften har paa Tyngden ved Jordens Overflade.

Med de samme Betegnelser som i § 124 have vi $\gamma_1 = \gamma \cos b = {}^1/_{290}\, g \cos b$, og denne skal sammensættes med den Tyngde $G$, som der vilde være, hvis Jorden var en

Kugle, der ikke roterede. $\gamma_1$ opløses derfor i to Komposanter, en normal og en tangential, men da den sidste saa godt som ingen Indflydelse har paa Resultatet, faar man med Tilnærmelse

$$g = G\,(1 - {}^1/_{290}\ cos^2 b).$$

201. Hvor mange Gange er Jordens Masse større end Massen i 1 Kilo?

Ved Hjælp af Ligningen $g = \frac{k\,m}{r^2}$ og $1 = \mu g$ finder man, naar man indsætter Talværdierne for $g$, $k$ og $r$,

$$\frac{\text{m}}{\mu} = \text{noget over 6 Kvadrillioner.}$$

202. Hvilken Formel tjener til Beregning af et Himmellegemes Gennemsnitsvægtfylde?

$$\text{Res. } f = \frac{g\,M}{1000\ .\ {}^4/_3\ \pi\ R^3},$$

naar Talværdierne udtrykkes i de sædvanlige Enheder.

203. Hvor stor bliver Jordens Vægtfylde, dersom den antages ens alle Vegne?

Res. omtrent 5,6.

204. Bevis, at Tyngden eller det fri Falds Acceleration paa forskellige Himmellegemers Overflader er proportional med Radien og med Vægtfylden.

205. Hvor mange Kilo er Tiltrækningen mellem Jorden og Solen?

Man har Ligningerne $x = \frac{k\,M\,m}{a^2}$, $k\,M = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{T^2}$, $g = \frac{k\,m}{r^2}$, hvorved $x$ findes udtrykt ved bekendte Størrelser. Ved at indsætte $k = 643\ .\ 10^{-12}$, $a = 2\ .\ 10^7\ .\ 7530$, $T = 365^1/_4\ .\ 24\ .\ 60^2$ og $r = \frac{2}{\pi}\ 10^7$ findes $x =$ omtrent 3700 Trillioner Kilo.

**125. Ebbe og Flod eller Tidevande.** Ved Kysterne til de store Have iagttager man en regelmæssig og periodisk Forandring af Vandstanden, saaledes at der imellem to paa hinanden følgende Højvande forløber henved $12^1/_2$ Time. Ved aabne Kyster ere disse Forandringer ikke synderlig store, ved smaa Øer, der ligge midt i de store Have, omtrent $1^{\text{m}}$. Inde i Havbugter med brede Mundinger kan Vandet derimod stige til meget betydelige Højder; ved Havnene i Kanalen mellem Frankrig og England kan der være en Forskel af omtrent $6^{\text{m}}$ mellem Høj- og Lavvande, i Bristolbugten $20^{\text{m}}$. I Havarme med snævre Indløb, som Middelhavet, mærkes disse

Forandringer kun meget lidt, ligeledes i Østersøen; i Indsøer, selv det Kaspiske Hav, ere de ganske umærkelige.

Allerede Newton forklarede dette Fænomen ved den Tiltrækning, Maanen og Solen udøve paa Jorden. For bedre at forstaa dette ville vi først tænke os, at 3 Punkter $A$, $B$ og $C$ i samme indbyrdes Afstand tiltrækkes hen imod et fjerde Punkt $D$ i deres Forbindelseslinje efter den sædvanlige Tiltrækningslov; Punkterne komme da til at bevæge sig ulige meget, $C$ mest og $A$ mindst, og deraf bliver Følgen, at Afstandene $AB$ og $BC$ bægge blive større, eller hvis Bevægelserne bedømmes af en, som følger med Punktet $B$, saa ses bægge de to andre Punkter at fjerne sig fra Midten. Dette anvendes nu paa Jorden og Maanen, idet Jordens Centrum svarer til Punktet $B$, medens Punkterne $C$ og $A$ ere de to Steder af Jorden, som have Maanen i Zenit og Nadir. Medens Maanens absolute Tiltrækning bevirker den tidligere omtalte Bevægelse af Jorden om dens og Maanens fælles Tyngdepunkt, saa vil den relative Forskel paa Tiltrækningerne forandre Jordens Figur, ifald Delene ved Overfladen kunne bevæge sig. Tænke vi os altsaa Jorden helt omflydt af Vand, saa vil der rejse sig to Flodbølger paa de Steder, hvor Maanen staar i Zenit og Nadir, medens der er Ebbe langs den tilsvarende Storcirkel; og under Jordens daglige Rotation ville Flod og Ebbe bevæge sig rundt om Jorden i Retning fra Øst til Vest i den Tid, som forløber mellem to øvre Kulminationer af Maanen, det vil sige i 24 Tim. 50 Min.

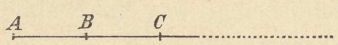


Fig. 179.

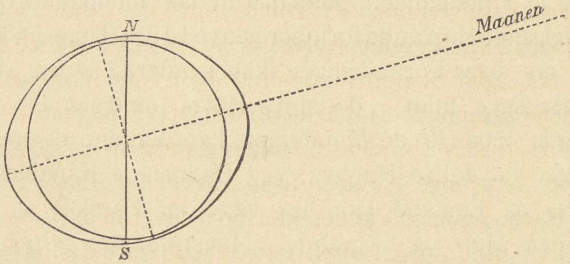


Fig. 180.

Ved Betragtning af Fig. 180 ses det, at under den daglige Rotation vil et Sted paa Jorden faa Flod, hver Gang Maanen er i Meridianen, men de to Højvande behøve ikke at være lige store. Paa høje Breddegrader forsvinder al Forskel mellem Flod og Ebbe.

Det er ikke Maanen alene, som frembringer disse Virkninger; Solen har ogsaa Indflydelse, men skønt dens Tiltrækning er mangfoldige Gange større end Maanens, bliver dens Virkning dog ringere, idet det her kun kommer an paa Forskellen mellem Tiltrækningerne af de forskellige Punkter paa Jorden, og denne Forskel er mindre for Solens Vedkommende paa Grund af dens store Afstand. Imidlertid mærkes Solens Indflydelse tydeligt ved den Forskel, der bliver paa Flodbølgernes Højde, enten Solen og Maanen understøtte hinanden i deres Virkning eller de modarbejde hinanden. Det første finder Sted ved Ny- og Fuldmaane, Floden kaldes da Springflod; det sidste, som kaldes Nipflod, finder Sted ved Kvarterskifterne. Til andre Tider vil Solen naturligvis ogsaa have sin Indflydelse, og de Flodbølger, som den og Maanen frembringe, smelte sammen til en i en Mellemstilling, saa at den tidligere nævnte Regel, om at Højvandet skulde indtræffe, naar Maanen kulminerede, ikke bliver nøjagtig. Der er desuden andre Aarsager til Afvigelse fra denne Regel; dels er der nemlig Modstand mellem Vanddelene indbyrdes, idet de skulle bevæges, og dels afbrydes Flodbølgen paa sin Vej omkring Jorden af Landene, og dernæst tager det Tid for en Bevægelse, som opstaar ude paa det store Hav, at naa til Kysterne og ind i Fjorde og Bugter. Hvert Sted faar derfor sin »Havnetid«, hvorved forstaas den Tid, der forløber fra Maanens Kulmination, til Højvandet indtræder. Ved mange Havnesteder spiller Ebbe og Flod en stor Rolle; naar Flodbølgen nemlig kommer, løber Vandet ind i Havnen, og Skibene kunne flyde derind af sig selv; ja endog i Floder som Temsen kan Højvandet trænge langt op og føre Skibene med sig; omvendt kunne disse drive ud med Ebben. I mange Havne svinder Vandet helt bort ved Ebbetid, og Skibene ligge tørt paa Bunden; skal dette undgaas, maa Skibet ind i Dokken, som er et Bassin, hvor Højvandet kan trænge ind,

og som derefter kan lukkes ved svære, tætte Porte, saa Vandet bliver der i Ebbetiden. Omvendt kan man i de saakaldte tørre Dokker holde Vandet ude ved Flodtid.

Den Forskel paa Tiltrækningen, som bevirker Ebbe og Flod, er i sig selv saa ringe, at det ikke har været muligt at paavise den Forandring, som et enkelt Legemes Vægt derved lider.

---

## Potential.

**126.** Lad os i et Punkt $C$ tænke os en Masse $m$, der frastøder en Masseenhed i Punktet $A$ med en vis Kraft $K$. Hvis Masseenheden bevæger sig fra $A$ uendelig langt bort, kan den udføre et vist Arbejde $V$, som kaldes Kraftens eller Legemet $m$'s Potential i Punktet $A$.

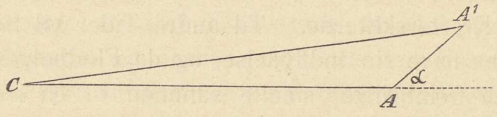


Fig. 181.

Dersom Masseenheden kun bevæger sig den uendelig lille Vej $A A_1 = a$, udfører den Arbejdet $K a \cos \alpha$; er $V_1$ Potentialet i Punktet $A_1$, har man altsaa

$$V = K a \cos \alpha + V_1$$

eller

$$\frac{V_1 - V}{a} = - K \cos \alpha,$$

det vil sige, at Potentialtilvæksten ved en uendelig lille Bevægelse, divideret med den gennemløbne Vej, er lig med Kraftens Projektion paa Bevægelsesretningen, med modsat Tegn.

Er Masseenheden paavirket af flere Kræfter, som udgaa fra flere Legemer, der hver for sig give Potentialerne $v_1$, $v_2$, $v_3$ ..., bliver det hele Potential $V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$; om hver enkelt Kraft gælder den nylig viste Sætning om dens Afhængighed af Potentialforandringen, og ved Addition ser man derfor, at den ogsaa gælder, naar alle Virkninger tages under et.

Alle de Punkter, hvor visse Kræfter frembringe samme Potential, danne tilsammen en Niveauflade; da Potentialet ikke forandres langs en saadan Flade, maa Kraftens tangentielle Komposant være 0, eller med andre Ord, Kraften er altid normal paa en Niveauflade.

Ved Bevægelsen af en Masseenhed fra en Niveauflade med Potentialet $V$ til en anden med Potentialet $V_1$, udfører den Arbejdet $V - V_1$. Er den Masse, som bevæger sig, $M$, blive alle Kræfter, som virke paa denne, $M$ Gange saa store, og den udfører altsaa Arbejdet $M\ (V - V_1)$

Dersom den Kraft, der er Tale om, er en Tiltrækning, udkræves der et Arbejde for at bevæge Masseenheden uendelig langt bort, men naar vi i dette Tilfælde betragte baade Kraften og Potentialet som negative, blive Regningerne ganske de samme som i forrige Tilfælde.

**127.** Vi skulle nu se et Par Eksempler paa, hvorledes man kan regne med Potentialet, og ville da kun tale om Kræfter, der virke efter den sædvanlige Lov om Afstandskræfter, det vil sige omvendt som Afstandens Kvadrat. Naar Kraften regnes positiv udad, har man $K = \mp \frac{k\,m}{r^2}$, hvor øverste Tegn gælder om Tiltrækning, nederste om Frastødning. Ifølge Udviklingen i § 119 bliver Potentialet i de to Tilfælde

$$V = \mp \frac{k\,m}{r}.$$

Nu have vi i Opgave 196 set, at et Punkt indenfor en homogen, lige tyk Kugleskal tiltrækkes ens stærkt til modsatte Sider, saa at alle de Kræfter, der virke paa det, give Resultanten 0. Men heraf følger, at Potentialforandringen fra Punkt til Punkt inden for Kugleskallen ogsaa er 0, Potentialet altsaa konstant. Værdien deraf kan derfor findes ved at tænke sig Masseenheden i Centrum; betegne vi ved $\mu$ den Masse, som findes i en Fladeenhed af Kugleskallen, bliver Potentialet derfor

$$V = -\frac{k\,\mu \,.\, 4\,\pi\,\varrho^2}{\varrho} = -\,4\,\pi\,k\,\mu\,\varrho,$$

idet $\varrho$ er Radius. Kaldes hele Kugleskallens Masse $m$, bliver Potentialet

$$V = -\frac{k\,m}{\varrho}.$$

Ville vi beregne Potentialet i et Punkt $A$ uden for Kugleskallen, tage vi først et uendelig tyndt Bælte $p\,p$, som er vinkelret paa Centerlinjen $A\,C$. Et saadant Bælte har Sidelinjen $p$ og Radius $r\,sin\,\alpha$, saa Arealet bliver $2\,\pi\,r\,sin\,\alpha\,.\,p$. Bæltets Potential er altsaa, idet $\mu$ har samme Betydning som før,

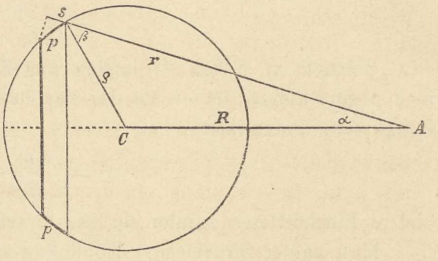

Fig. 182.

$$v = -\frac{k\,\mu \,.\, 2\,\pi\,r\,sin\,\alpha\,.\,p}{r} = -\,2\,\pi\,k\,\mu\,p\,sin\,\alpha.$$

Betegner $s$ Projektionen af $p$ paa Linien $r$, faar man $p = \frac{s}{\sin \beta}$, som giver $v = -2 \pi k \mu s \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

Nu har man

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\varrho}{R},$$

hvoraf

$$v = -\frac{2 \pi k \mu s \varrho}{R}.$$

Deles hele Kugleskallen i uendelig tynde Bælter, og adderes deres Potentialer, faar man Summen

$$V = -\frac{2 \pi k \mu \varrho}{R} (s + s_1 + s_2 + \ldots);$$

men ved at svinge alle Linjerne $r$ og $s$ ned paa Centerlinjen, ser man, at $s + s_1 + s_2 + \ldots = 2\varrho$, hvorved faas

$$V = -\frac{4 \pi k \mu \varrho^2}{R}, = -\frac{k m}{R},$$

det vil sige, at Potentialet har samme Værdi, som om hele Kugleskallens Masse var forenet i Centrum. Heraf følger da igen, at den samme Regel gælder om Tiltrækningen selv. Det samme udvides let til at gælde om en massiv Kugle. (Se § 121 i Begyndelsen).

**128.** Læren om Potentialet finder megen Anvendelse i Teorien om Elektriciteten. Man tænker sig her altid, at den Elektricitetsenhed, som svarer til den omtalte Masseenhed, er positiv Elektricitet. Hvis $m$ da betyder en anden Elektricitetsmængde, positiv eller negativ, i Afstanden $r$, bliver Kraften altid udtrykt ved

$$K = \frac{\alpha m}{r^2},$$

idet $\alpha$ er en Konstant, og $m$ ved sit Fortegn angiver, om det er Frastødning eller Tiltrækning. Potentialet er

$$V = \frac{\alpha m}{r}.$$

Betragte vi altsaa en kugleformet Konduktor med Radius $\varrho$, ladet med positiv Elektricitet $m$, vil der paa Overfladen og i ethvert indvendigt Punkt være Potentialet

$$V = \frac{\alpha m}{\varrho},$$

idet al Elektriciteten samler sig paa Overfladen.

Man kalder Størrelsen $V$ Konduktorens Potential, og dens Betydning er det Arbejde, som en Enhed af positiv Elektricitet udfører, naar den frastødes fra Kuglens Overflade uendelig langt bort, eller hvad der er det samme, ned i Jorden.

Man kan indse, at Overfladen paa en hvilken som helst Konduktor

maa være en Niveauflade; thi Kraften maa staa vinkelret paa Fladen, naar Elektriciteten er kommen i Ro. Paa samme Maade kan man indse, at Havet maa danne en Niveauflade, ligeledes Vædskeoverfladen i en Centrifuge.

Hvis to Konduktorer med samme Potential befinde sig saa langt fra hinanden, at de ikke kunne fordele Elektriciteten i hinanden, og de forbindes ved en lang Metaltraad, vil der ingen Elektricitet strømme over fra den ene til den anden, idet der fordres lige store Arbejder for at flytte en Elektricitetsenhed fra den ene Konduktor til den anden i Analogi med Ligevægtsbetingelsen ved Maskiner. Har Konduktorerne derimod forskellige Potentialer, strømmer der Elektricitet fra den, der har højest Potential, over til den anden; Potentialforskellen er det Arbejde, som udføres af hver Elektricitetsenhed, der gaar fra den ene Konduktor til den anden; den benævnes ofte elektromotorisk Kraft.

## Vædskers Bevægelse.

**129. Torricellis Lov.** Naar en Vædske løber ud af et Hul i Bunden paa et Kar, maa den ved selve Udløbet have samme Hastighed, som om den var falden gennem Vædskens Højde. Enhver Vædskedel maa nemlig, idet den forlader Karret, ifølge Principet om Energiens Vedligeholdelse have en levende Kraft lig med det Arbejde, som kræves for at løfte den tilbage til Vædskens Overflade. Kaldes altsaa Vægten af en lille Vædskedel $p$, dens Udløbshastighed $h$ og Højden af Vædsken i Karret $l$, saa er

$$^1/_2 \frac{p}{g} h^2 = p\,l \text{ eller } h = \sqrt{2\,g\,l}.$$

Hvis det udvendige Tryk paa Vædskeoverfladen er større end ved Udløbsaabningen, kan man tænke sig det overskydende Tryk fremkommen ved en vis Vædskesøjle, hvis Højde saa maa adderes til den, der virkelig findes.

Er Udløbsaabningen i Siden af Karret, gælder den samme Regel, naar Aabningen er lille; for større Aabninger bliver Loven mere indviklet. Ogsaa for smaa Aabninger, der vende opad, gælder Reglen, og hvis der ingen Modstand fandtes, skulde Vandet derfor springe til samme Højde, hvortil det staar i Karret. Paa Grund af Gnidningen og de faldende Vanddraabers Modstand er dette dog ikke Tilfældet. Man

faar det højeste Springvand, naar Straalen rettes en lille Smule skraat.

**130. Forsøg over Torricellis Lov, Mariottes Flaske.** Til Forsøg over Udløbet af Vædsker maa man først sørge for en uforandret Trykhøjde. I Stedet for at hælde Vand i Karret hele Tiden, kan man anvende Mariottes Flaske (Fig. 183), gennem hvis Prop der gaar et Rør, som ender oven over Udløbsaabningen. Den Vædske, som findes i Røret, løber først ud, hvorved der bliver atmosfærisk Tryk ved Punktet $a$ og i hele den vandrette Flade, som kan lægges derigennem. Udløbet finder derfor Sted, som om Karret var aabent, og Vædsken deri kun stod til denne Højde; mens Vædsken løber ud, bobler Luften ind gennem Aabningen $a$, saa den indvendige Lufts Tryk og Vædsken over dette Punkt tilsammen frembringe atmosfærisk Tryk. Udløbet fra et saadant Kar sker dog noget stødvis; det bliver bedre, naar man ved $b$ fastgør et Rør, som ledes ned paa Bunden af et andet aabent Glas, fra hvilket det egentlige Udløb finder Sted. I dette Glas stiller Vædsken sig i Højde med $a$, saafremt Udløbsaabningen derfra ikke er for stor.

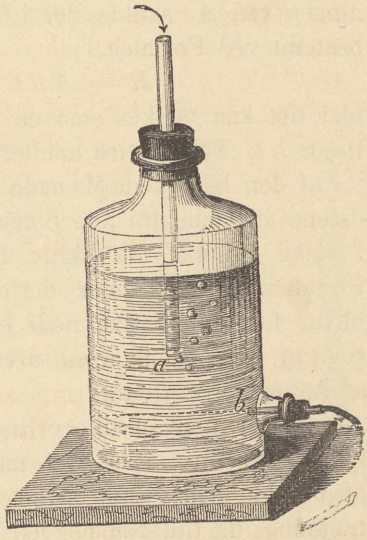

Fig. 183.

Vil man nu prøve Torricellis Lov, kan det ske ved Betragtning af de Parabler, som vandret udkastede Vædskestraaler danne. Enhver Parabels Form er nemlig bestemt ved Begyndelseshastigheden, idet dens Ligning bliver

$$y^2 = \frac{2h^2}{g} x \text{ eller } y^2 = 4lx,$$

naar $x$-Aksen regnes ned ad, og $l$ er Trykhøjden. Opfanger man Straalen et Sted ikke for langt fra Udløbet og maaler

$y$, $x$ og $l$, ser man, at Reglen paa det nærmeste slaar til, især naar Udløbet finder Sted gennem et Hul i en tynd Væg uden Tilsætningsrør; længere borte fra Udløbet forandres Parablens Form paa Grund af Luftmodstanden.

**131. Udløbsmængden.** Betegne vi Arealet af Udløbsaabningen ved $A$, skulde der i Tiden $t$ løbe et Rumfang $R$ ud, bestemt ved Formlen

$$R = A\,h\,t = A\,t\,\sqrt{2\,g\,l},$$

idet det kan tænkes som en Cylinder med Grundflade $A$ og Højde $h\,t$. Forsøg vise imidlertid, at der kun kommer omtrent 0,6 af den beregnede Mængde. Grunden hertil er, at Vædskedelene strømme fra alle Sider hen imod Udløbsaabningen og i selve Udløbet faa skraa Retninger ind imod Midten af Straalen. Denne lider derfor en Sammentrækning og bliver først et Stykke nede cylindrisk; man finder ved Forsøg, at dens Gennemsnitsareal paa dette Sted netop er 0,5 af Aabningens Areal.

Sætter man et lille cylindrisk Rør for Udløbsaabningen, lykkes det ofte, især ved mindre Tryk, at faa Vædsken til at udfylde hele Røret. Herved undgaas Straalens Sammentrækning, og Udløbsmængden forøges, hvorimod Hastigheden formindskes. Ved store Tryk har Straalen mere Tilbøjelighed til at antage ganske samme Form, som om der intet Rør var til Stede, og ofte kan en fuld Straale, som passerer et lille cylindrisk Rør, ved en ubetydelig Anledning, f. Eks. en Rystning, trække sig sammen og gaa frit igennem Røret.

Ved Beregning af Udløbsmængder maa Udtrykket $A\,h\,t$ altsaa multipliceres med en vis Konstant, Udløbskoefficienten; denne er, som ovenfor angivet, omtrent 0,6 for Udløb i en tynd Væg, men omtrent 0,8, naar Udløbet finder Sted i en tyk Væg eller gennem et kort, cylindrisk Rør.

I de senere Aar er der gjort Forsøg med at presse faste Legemer, endog flere Slags Metaller gennem mindre Aabninger i cylindriske Beholdere. Metallerne bleve lagte i Lag paa Bunden af Karret og derefter udsatte for overordentlig store Tryk. Paa den Maade blev der frembragt en Straale af de faste Stoffer, og der viste sig en lignende Sammentrækning af den, og de forskellige, oprindelig vandrette Lag i

Cylindren gik efterhaanden over til koncentriske og cylindriske Lag i Straalen; ogsaa Is kunde paa denne Maade presses gennem en Aabning. Overhovedet viste disse Forsøg, at ved meget store Tryk forholde faste Legemer sig paa lignende Maade som flydende, forplante f. Eks. et Tryk i alle Retninger, og man har ved disse Iagttagelser ment at finde Forklaringen paa de Bevægelser, som iagttages af Isbræer, der glide ned ad Bjærgene.

**132. Straalens Form.** En lodret faldende Straale bliver efterhaanden tyndere, idet Vanddelenes Hastighed bliver større under Faldet, og der i en bestemt lille Tid maa passere lige megen Vædske gennem ethvert Tværsnit, saa snart som Straalen har antaget en stadig Form. I en vis Afstand fra Udløbet bliver Straalen uklar og afvekslende tykkere og tyndere og splittes derpaa i Draaber. Frembringer man en stadig Vandstraale i et mørkt Værelse og oplyser den ved elektriske Gnister, ser man paa Grund af disses Kortvarighed kun den Tilstand, hvori Straalen er i et eneste Øjeblik. Det viser sig derved, at de omtalte Udvidelser og Indsnevringer hidrøre fra, at Straalen allerede er delt i Draaber, der stadig skifte Form, som Fig. 184 viser.

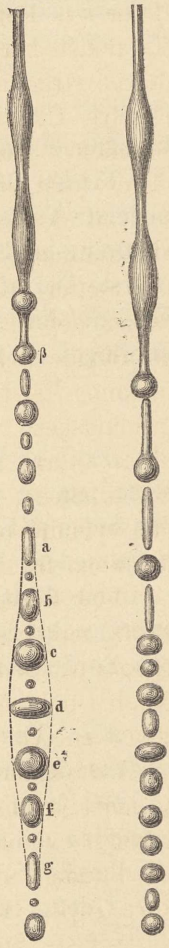

Fig. 184.

**133. Bevægelse i Rør.** Naar en Vædske løber ud gennem et langt, vandret og cylindrisk Rør, saa vilde den, hvis der ingen Hindringer var, bevare sin Udløbshastighed uforandret, og de enkelte Dele vilde bevæge sig paa Grund af Inertien, saaledes at Trykket var ens i hele Røret. Nu er der imidlertid altid Gnidningsmodstand dels mellem Vædskedelene indbyrdes og dels mellem Vædsken og Røret. Hastigheden bliver derfor mindre end den, der svarer til Trykhøjden, og hele Vejen igennem maa der være et Trykoverskud,

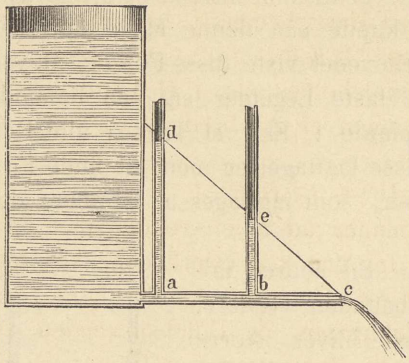


Fig. 185.

som driver Vædsken udad, hvad der ogsaa kan ses ved paa forskellige Steder at anbringe lodrette Rør, der kunne tjene som Trykmaalere (Fig. 185). Det Tryk, som i et Vandværk driver Vandet ud i Ledningerne i Byen, vil saaledes formindskes i større Afstande, og Vandet vil ikke stige til samme Højde, som naar det stod roligt i Ledningerne.

Finder Udløbet Sted gennem lange lodrette Rør, ville de nederste Vædskedele fremskynde de øverstes Bevægelse, ifald Gnidningsmodstanden ikke er for stor. Derved opstaar i den øverste Del af Røret en Art Sugning, som giver sig til Kende ved, at der strømmer Luft ind, hvis der paa dette Sted anbringes en Aabning paa Røret.

## Opgaver.

206. Et Kar af Højde $b$ holdes helt fyldt med Vand og staar paa et vandret Bord. Dersom der anbringes et Hul paa Siden af Karret i Afstanden $a$ fra oven og et i Afstanden $a$ fra neden, bevis da, at de to Vandstraaler træffe Bordet i samme Afstand fra Karret. Paa hvilket Sted maatte man anbringe Aabningen, for at Straalen kunde naa saa langt hen paa Bordet som muligt?

Res. Paa Midten af Karret.

207. Vandet i et Kar holdes stadig i Højden $0{,}5^{m}$, medens det løber ud af en Aabning i Bunden med Arealet $1\,\square^{mm}$; hvor stor er Udstrømningshastigheden og Udløbsmængden i 5 Minutter, dersom Aabningen er i en tynd eller tyk Væg?

(I dette og de følgende Taleksempler regnes $g$ for $10^{m}$).

Res. $4^{m}$; 720 $cub^{cm}$; 960 $cub^{cm}$.

208. En almindelig Haandsprøjte har et Stempel paa

4 □ cm. Hvilket Tryk maa der udøves paa dette, for at Vandet skal sprøjte ud med Hastigheden 10 m?

Res. 2 Kilo.

209. Hvilken Energi indeholdes der i et Vandfald paa 3 m Højde, naar Vandstrømmen er 2 m bred og 0,5 m dyb og løber med Hastigheden 1 m?

Res. 40 + 2/3 Hkft.

210. Naar Vand strømmer ud af en rektangulær Sideaabning, som ikke ligger for nær ved Overfladen, kan man beregne Udløbshastigheden ved Hjælp af den Trykhøjde, som der er paa Midten af Aabningen, og Udløbsmængden ved Hjælp af en Udløbskoefficient, der omtrent er 0,6.

Dersom en Dam, hvis Dybde er 1 1/2 m, ved den ene Ende helt nede ved Bunden har et Stigbord af Bredde 1/2 m, og dette løftes 1/2 m, hvor mange Hestekræfter har man da at raade over, idet det forudsættes, at Dammens Tilløb netop er lig med Udstrømningsmængden?

Res. 12,5 Hkft.

211. Hvorledes kan man indse, at Vædskeoverfladerne i de lodrette Rør paa Apparatet i § 133 maa ligge i en ret Linje med Udløbsmundingen?

**134. Vandluftpompen.** Vandets Bevægelse anvendes ofte til Sugning for paa en simpel Maade at frembringe et luftfortyndet Rum. Fig. 186 viser et dertil indrettet lille Apparat, som ved en Gummislange nemt kan anbringes paa enhver Vandhane. Idet Vandstrømmen indsnevres paa Vejen fra *A* til *B*, vil dens Hastighed forøges, hvorved den suger Luft gennem *L*. Saadanne Pomper bruges meget i Laboratorier. Naar Vandets Trykhøjde er stor nok (cr. 12 m), kan man opnaa en Luftfortynding ned til Vanddampenes Tryk ved den Temperatur. (Christiansens Luftpompe).



Fig. 186.

Sugningen og Luftfortyndingen kan ogsaa opnaas ved en faldende Kvægsølvsøjle, og

man kan, naar dens Længde er omtrent 1 m, naa til et meget ringe Lufttryk. (Sprengels Luftpompe). Fig. 187 viser tillige, hvorledes man kan opsamle den Luft, som suges med.

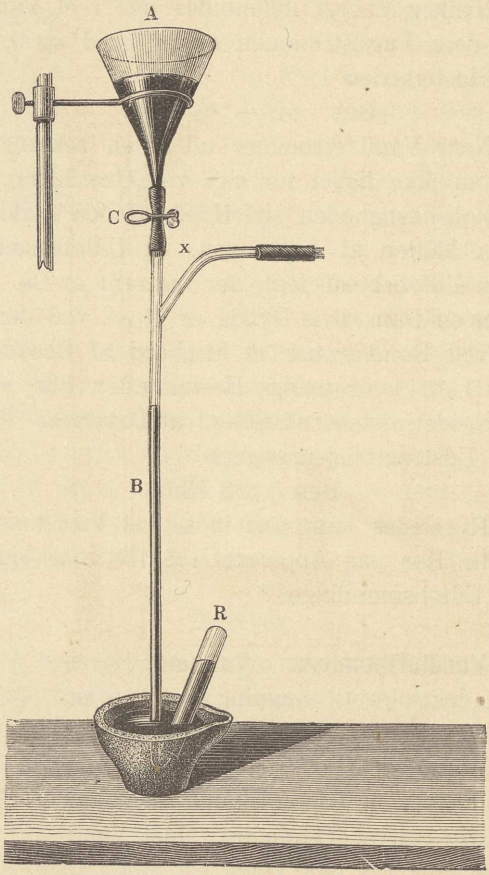


Fig. 187.

Retter man en kraftig Straale mod en Vandoverflade, ser man, at den river en Mængde Luft med sig ned under Vandet. Denne Vedhængning af Luft ved en Vandstraale har man benyttet til at indrette et Blæseapparat, som Fig. 188 viser. Den Luft, Straalen fører med sig, kommer ind gennem Aabningerne *A* og samler sig efterhaanden i Rummet *B*, hvorfra den saa strømmer ud. Der kræves hertil et større Tryk over *A*, end Figuren viser, helst ikke mindre end 10 m Vandtryk; Faldrøret behøver ikke at være højere end 1 m. Der faas paa denne Maade en rigelig Luftmængde uden stort Brug af Vand, men Luftens Tryk er ikke større end et Par Decimeter Vandtryk.

Man kan ogsaa frembringe en Luftstrøm ved Hjælp af Sugningen. Fig. 189 viser f. Eks. et Apparat, der anvendes til stadig at lade frisk Luft boble op igennem Vandet i Akvarier, hvad der er nødvendigt for Fiskenes Aandedræt. Vandet ledes ind ad det øverste Rør *A*; under Faldet gennem det nedadvendte Rør, som er forsynet med en eller flere Sløjfer, suger Vandet Luft ind ad Siderøret *L*, saa at den faldende Vandsøjle er afbrudt

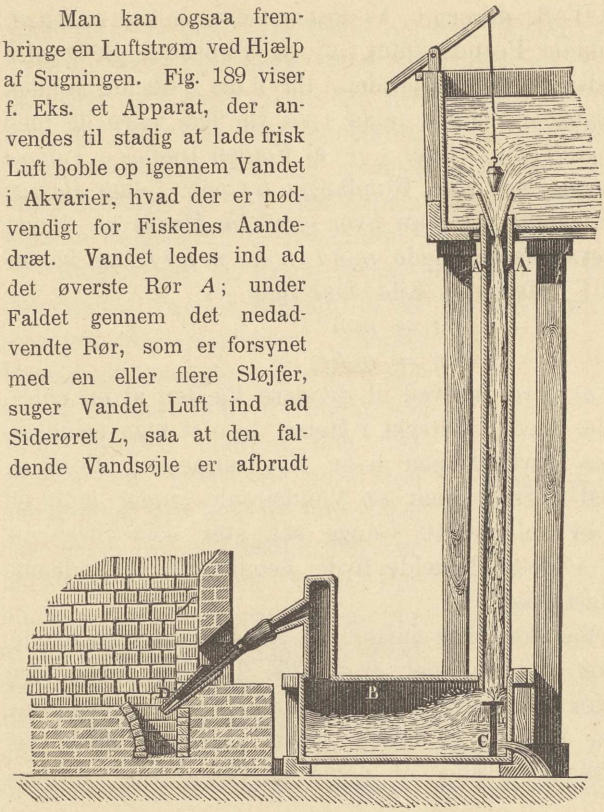


Fig. 188.

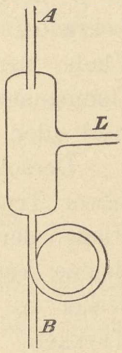


Fig. 189.

af Luftblærer. Faldrøret, som helst maa være langt, udmunder i et Kar, som Fig. 190 viser. I dette Kar skilles Vand og Luft; det første strømmer ud ved *C*, medens Luften passerer gennem *M* og bobler op ved *N*. De forskellige Overflader stille sig, som de punkterede Linjer vise.

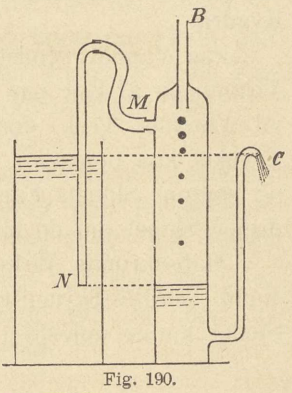


Fig. 190.

**135. Vædskers Tryk og Modstand.** Naar en stadig Strøm af Vædske bevæger sig vinkelret ind paa en plan Flade, ud-

øver den et Tryk derpaa. Vi kunne beregne Størrelsen a dette Tryk under Forudsætning af, at Vædskens Bevægels aldeles standses ved Modstanden, thi i det Tilfælde vil de Bevægelsesmængde, Vandet taber i en vis Tid, være lig me Trykket Gange Tiden. Hver $\square^m$ af Fladen træffes i Tiden $t$ af en Vædskemængde med Rumfanget $h\,t$ cub$^m$, naar Hastig heden er $h^m$; indeholder nu hver cub$^m$ en Masse $m$, blive den tabte Bevægelsesmængde $m\,h\,t\,.\,h = m\,h^2\,t$, og kaldes Trykket paa $\square$ Metren $p$ Kilo, faar man

$$p\,t = m\,h^2\,t$$

eller

$$p = m\,h^2.$$

Massen $m$ beregnes ved at dividere Vægten af en cub$^n$, udtrykt i Kilo, med $g$ udtrykt i Metre, og det maa erindres, at $p$ betyder Trykket paa hver Kvadratmeter. Formlen bekræftes ved Forsøg, naar en Vandstraale støder mod en Flade, der er mindst 10 Gange saa stor som Straalens Gennemsnit; i dette Tilfælde flyde nemlig alle Vanddelene bort uden Hastighed.

Dersom Vædsken ikke mister hele sin Bevægelsesmængde, bliver Trykket mindre; det er f. Eks. Tilfældet, naar den Flade, der gør Modstand, har en saadan Form, at Vædske delene kunne undvige til Siden Hvis derimod Fladen bevirker en Tilbagekastning af nogle af Vanddelene, forøges Trykket.

Bevæger et Legeme sig gennem Vand, møder det ogsaa en Modstand, som er afhængig af Legemets Form men, i det mindste med Tilnærmelse, proportional med Hastighedens Kvadrat.

Paa Vandets Modstand mod et Legemes Bevægelse beror Virkningen af Ror paa Skibe. Drejes Roret nemlig til Siden, vil Vandets Tryk derpaa som sædvanlig være normat; Trykket kan opløses i to Komposanter, en, som gaar bagud og sagtner Skibets Fart lidt, og en, som gaar til Siden og drejer Skibet om en lodret Akse gennem Tyngdepunktet.

Skibsskruens Virkning beror ogsaa paa Vandets Modstand. Drejes Skruen rundt, ville Trykkene paa de forskellige Steder kunne opløses i Komposanter parallele med Aksen og

vinkelrette derpaa. De sidste ophæve hinandens Virkninger, men de første ville drive Skibet frem, ligesom en Proptrækker gaar ind i en Prop, naar den drejes rundt. For at Vandet kan faa Tid til at gøre Modstand, er det nødvendigt at gøre Skruens Stigning stor og at dreje den meget hurtigt. Der anvendes ikke en hel sammenhængende Skrueflade, men kun enkelte Dele deraf, de saakaldte Skrueblade.

Kaster man en Kugle skraat ned mod en Vandflade, vil den under Vandet komme til at bevæge sig i en Retning nærmere ved Overfladen. Tænkes Hastigheden nemlig opløst i en lodret og vandret Del, vil Vandet, saa længe Kuglen ikke er helt nedsænket deri, fortrinsvis gøre Modstand imod den lodrette Bevægelse, saa denne Del af Hastigheden særlig bliver formindsket. Dette i Forbindelse med Lysbrydningen gør, at man maa sigte under det Maal, man vil træffe, naar man skyder ned i Vand. Kastes Legemet meget skraat mod Vandfladen, kommer det slet ikke ned under denne men kastes tilbage derfra i en anden Retning. (Slaa Smut).

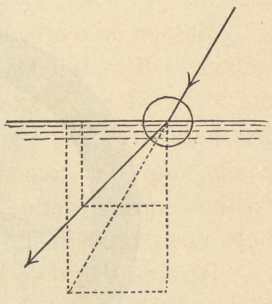

Fig. 191.

## Opgaver.

212. Dersom en Vædske, hvoraf hver cub$^{m}$ har Massen $m$, bevæger sig med Hastigheden $h$ $^{m}$ ind imod en Flade paa $A$ $\square^{m}$, og Bevægelsesretningen danner Vinkel $\alpha$ med Fladens Perpendikulær, hvor stort er da det normale Stød?

Res. $A\, m\, h^{2} \cos^{2} \alpha$.

213. Bevis, at det Tryk, en Vandmasse ved sin Bevægelse udøver paa en Flade, som er vinkelret paa Bevægelsesretningen, er dobbelt saa stort som det Tryk, der kunde udøves af en rolig Vandmasse, naar dens Vandspejl laa i en Højde over Fladens Tyngdepunkt, som var lig den til Bevægelseshastigheden svarende Trykhøjde.

**136. Vandkraft.** Den Energi, som indeholdes i en stadig Vandstrøm, f. Eks. i en Flod eller i et Vandfald, udbyttes ved forskellige Maskiner, af hvilke de simpleste ere de sædvanlige Møllehjul. Har Strømmen kun ringe Fald men fører en rigelig Vandmængde, bruges Underfaldshjul, hvor Vandet ledes ind forneden paa Hjulet, der er forsynet med store Kamme eller Skovle. Ere disse plane, virker Vandet til Dels ved Stød, hvorved vi have set, at der altid gaar levende Kraft tabt; man faar derfor kun en Nyttevirkning af

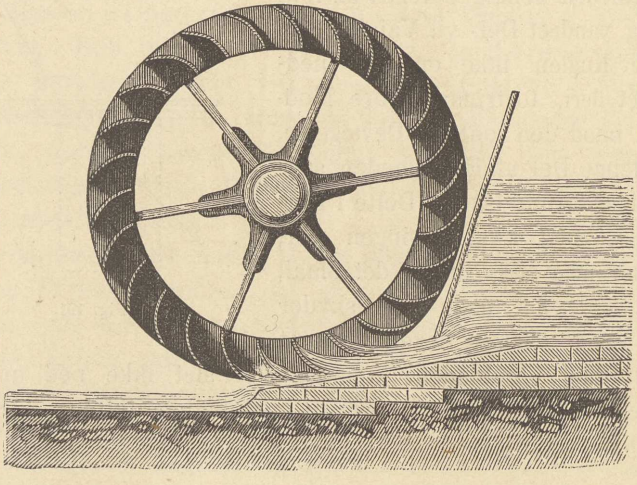

Fig. 192.

højst 30 pCt. Men naar Skovlene have en passende Krumning, og Vandet ledes ved Hjælp af et skraat Stigbord (Fig. 192) ind paa dem, kunne Stødene undgaas, og Nyttevirkningen kan stige til det dobbelte. Har man et højt Fald, bruges Overfaldshjul (Fig. 193), der optage Vandet i en Art Kasser langs Omkredsen, saaledes at Vandet ved sin Vægt driver Hjulet rundt. Disse Hjul kunne drives med en ringe Vandmængde og give en Nyttevirkning af indtil 75 pCt; de bevæge sig kun med ringe Hastighed. Der anvendes ogsaa Brysthjul eller Sidehjul, hvor Vandet ledes ind paa

Siden af Hjulet og virker dels ved den Hastighed, det har opnaaet i Forvejen, og dels ved at falde gennem Hjulets halve Højde. Undertiden anvendes Strømhjul, der ligefrem drives rundt, ved at Vandet i en Aa eller Flod støder mod Skovlene; de give kun ringe Nyttevirkning. Ofte benyttes horizontale Vandhjul, f. Eks. det saakaldte Reaktionshjul

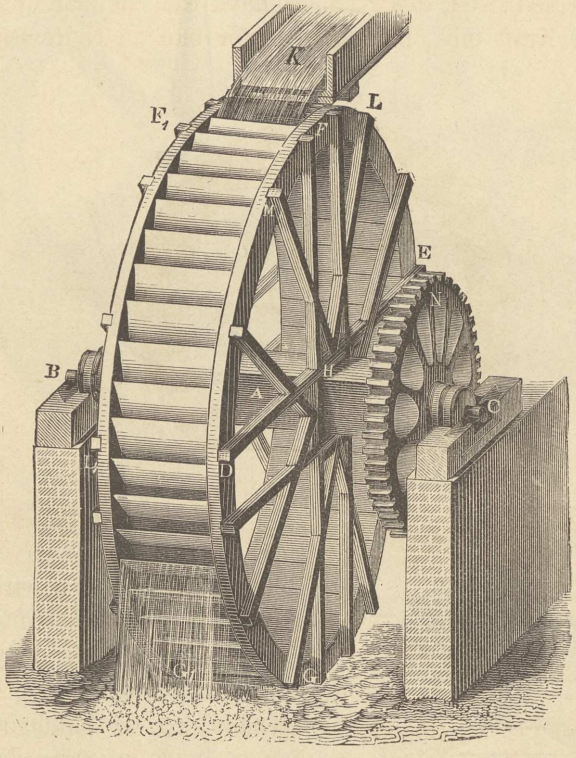


Fig. 193.

(Segners Hjul), hvor man anvender det samme Princip som i Fig. 194, hvor Vandet fra Beholderen løber ud af Sideaabningerne og ved sit Tryk drejer Hjulet rundt i modsat Retning. Hyppigere anvendes den egentlige Turbine, som bestaar af et vandret Hjul med Skovle $AA$, der ere krummede, som det ses paa Fig. 195. Hjulet befinder sig inde i

en lodret Cylinder, og i denne er der over Hjulet anbragt Ledeskovle *B B*, hvorved Vandet, før det træder ind paa

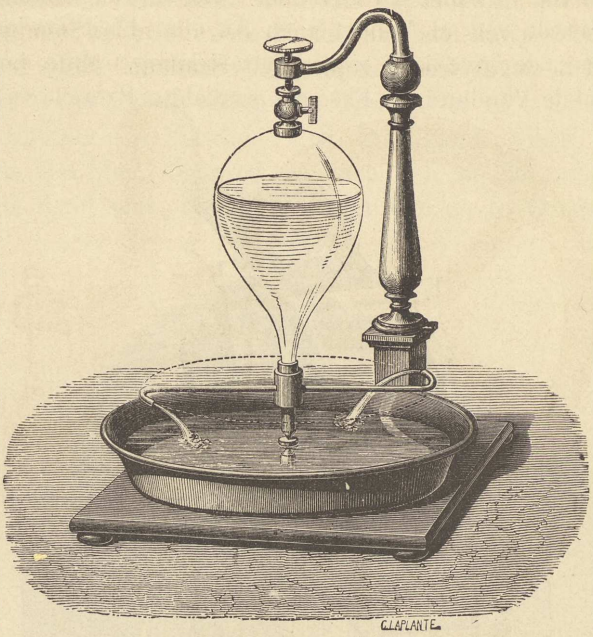


Fig. 194.

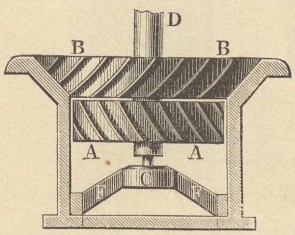


Fig. 195.

selve Hjulet, faar en saadan Retning, at det kan virke paa den bedste Maade. Turbinerne anvendes navnlig, hvor man har høje Fald med ringe Vandmængde, og de kunne give en Nyttevirkning af indtil 75 pCt.; er Faldet meget stort, kan Hjulet nøjes med en lille Diameter, endog mindre end 1 m. De befinde sig helt under Vand og ere ofte slet ikke synlige ovenfra.

Det kommer ved alle disse Hjul an paa at undgaa Stød og at udbytte al den tilstedeværende Energi, hvad der kræver, at alt Vandet maa ledes ind paa Hjulet og forlade det igen med ringe Hastighed.

Man har ogsaa indrettet andre Vandmotorer eller Vandsøjlemaskiner, der virke paa lignende Maade som Dampmaskiner, idet Vandet ved Hjælp af en Gliderindretning ledes afvekslende ind paa hver Side af et Stempel, som derved bevæges frem og tilbage. Saadanne Motorer kunne

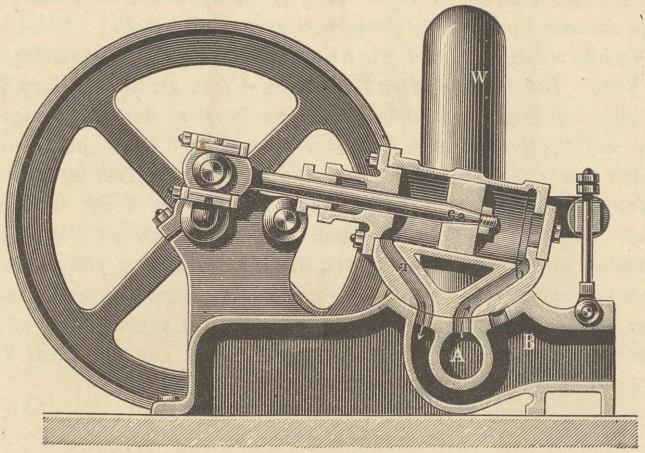


Fig. 196.

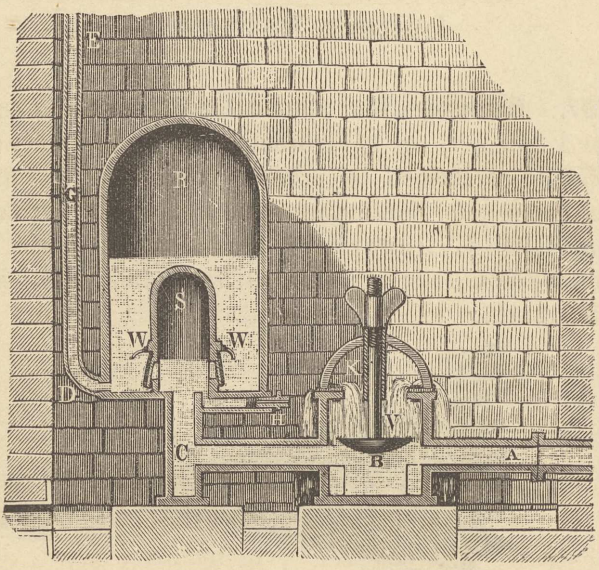


Fig. 197.

give en Nyttevirkning af 70 pc. De konstrueres i alle Størrelser efter den tilstedeværende Kraft og anvendes meget i den mindre Industri, f. Eks. i Schweitz, hvor der mange Steder er rigelig Vandkraft.

En af de simpleste Vandmotorer er afbildet i Figur 196. Vandet ledes gennem Vindkedlen *W* til Røret *A*, hvorfra det føres ind i Cylinderen, medens Spildevandet føres bort gennem Røret *B*.

Vandvædderen eller Stødhæverten (Fig. 197) anvendes til at løfte Vand. Den bestaar af en Rørledning *A B C*, gennem hvilken Vandet kan løbe ind i en Vindkedel *W W*; paa Røret er der en indadgaaende Ventil ved *B*, hvorigennem Vandet i Begyndelsen løber ud, men naar Ventilen paa Grund af Udstrømningen føres med og lukker for Aabningen, vil Vandet, som nu er i Fart, aabne Vindkedlens Ventil og strømme derind. Efter Stødet faar det Vand, som er i Røret, en tilbagegaaende Bevægelse, idet Luften i *S* er bleven sammenpresset, og ved denne suges Rørventilen atter ned, hvorefter Virkningen begynder paa ny. Fra Vindkedlen udgaar der et Stigrør, hvorigennem Vandet presses op til en større Højde, end det kom fra, men selvfølgelig er det kun en Del af Vandet, som løftes, en anden Del løber bort gennem Ventilen.

---

## Luftens Bevægelse.

**137. Blæsning.** Den almindelige Blæsebælg, som den bruges i Smedjer, ses af Figuren; Luften suges ind i den ene Afdeling *B* af Bælgen og presses derfra ind i den anden *A* og fra denne ud i Mundingen ved Hjælp af en Vægt udvendig. Ofte anvendes Cylinderblæseren, der er indrettet som en Fortætningspompe, eller Centrifugalblæseren, som er omtalt i § 107.

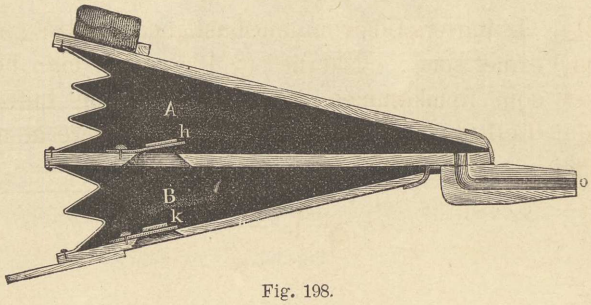


Fig. 198.

Man har fundet, at den udtrædende Luftstraale lider en Sammentrækning ligesom Vandstraaler, og at korte Rør ved Mundingen forøge den udtrædende Luftmængde.

I mange Tilfælde frembringes der Sugning ved Luftstrømme. De almindelige Eau de Cologne Forfriskere eller Blomstersprøjter bero paa denne Virkning. Det samme er Tilfældet med Lokomotivets Blæserør, det vil sige det Rør, hvorigennem den brugte Damp stødes ud i Skorstenen; den derved frembragte Sugning forøger Trækket paa Ildstedet, saa Lokomotivet kan nøjes med en mindre Skorsten.

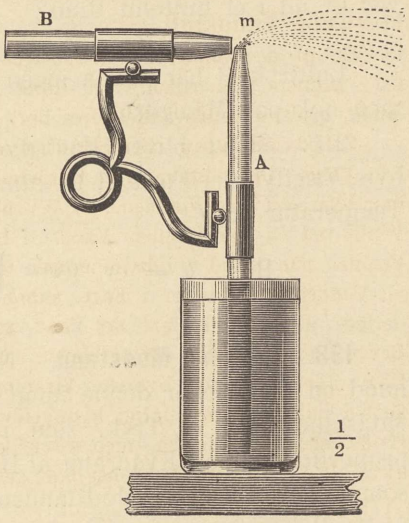

Fig. 199.

Blæser man gennem den smalle Ridse, der dannes mellem to udstrakte Fingre, og holder et Stykke Papir under Haanden, suges dette op mod Fingrene. Forsøget kan ogsaa gøres med et lille Apparat som hosstaaende; blæser man gennem Røret, suges den yderste Papflade indad.

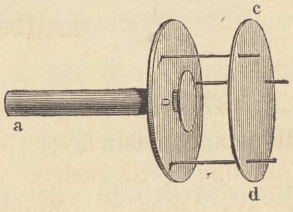

Fig. 200.

## Opgaver.

214. Luftarters Udstrømningshastighed kan beregnes efter samme Formel som Vædskernes (§ 129), naar man betragter Trykket som fremkommet ved Vægten af en Luftsøjle af konstant Tæthed. Det er imidlertid bekvemmere at anvende Formlen

$$h = \sqrt{\frac{2\,p}{m}},$$

hvor $p$ er Trykket paa hver $\square^m$, udtrykt i Kilo, og $m$ Massen af 1 cub$^m$. Hvorledes findes denne Formel af den første?

215. Med hvilken Hastighed strømmer atmosfærisk Luft ved $0^0$ ud i et lufttomt Rum?

Res. $h$ = cr. 400$^m$.

Lufttrykket har altsaa ingen Indflydelse paa Hastigheden men nok paa Mængden.

216. Hvad bliver Hastigheden for en anden Luftart, hvis Vægtfylde i Forhold til atmosfærisk Luft er $f$, og hvis Temperatur er $T^0$?

$$\text{Res. } h = \text{cr. } 400^m \sqrt{\frac{1 + 0{,}00367\ T}{f}}$$

**138. Luftens Modstand.** Naar en Luftstrøm bevæges imod en Flade eller denne imod Luften, fremkommer der en Modstand eller et Tryk, som i Reglen tilnærmelsesvis er proportionalt med Kvadratet af Hastigheden; ved meget langsomme Bevægelser er Modstanden dog kun proportional med første Potens, og ved meget hurtige Bevægelser vokser den i stærkere Forhold end Kvadratet. Modstanden er endvidere afhængig af Legemets Form. Ved en plan Flade, som er vinkelret paa Bevægelsesretningen, finder man ved Anvendelse af Formlen i § 135 $p = \frac{1{,}3}{g} h^2$, idet $p$ er Trykket eller Modstanden paa hver $\square^m$, og $\frac{1{,}3}{g}$ betyder Massen i 1 cub$^m$ atmosfærisk Luft; det stemmer imidlertid bedre med Forsøg at sætte

$$p = 0{,}1\ h^2.$$

En Kugle lider samme Modstand som en plan Flade, hvis Areal er $^2/_5$ af Storcirklen. Luftmodstanden kan ofte blive betydelig, naar Hastigheden er stor. Meteorstene, som komme fra det tomme Verdensrum ind i Jordens Atmosfære, blive ved Modstanden ophedede paa Overfladen til Glødning, idet en Del af deres levende Kraft omsættes til Varme. Store Hjul, som dreje sig hurtig rundt, lide betydelig Modstand; Jernbanetog gaa langsommere imod Vinden. Det er bekendt, at man lettest bevæger en Flade paa Kant gennem Luften.

En almindelig Snurre (en Skive med en Akse igennem) kan dreje sig i længere Tid i et lufttomt Rum end i fri Luft.

Naar et Legeme falder paa Grund af Tyngden, vil Luftmodstanden forsinke Faldet, og dersom den bliver lige saa stor som Legemets Vægt, er der ikke længere nogen accelererende Kraft, hvorfor Legemets Bevægelse bliver jævn fra det Øjeblik af. Beregningen viser imidlertid, at dette Tidspunkt aldrig naas, men der bliver saaledes for ethvert Legeme en Grændse for, hvor stor en Faldhastighed det overhovedet kan opnaa. Betragte vi en Kugle med Vægtfylde $f$ og Radius $r$, bestemmes Grændsen ved

$$^2/_5 \pi r^2 . 0{,}1 . h^2 = {}^4/_3 \pi r^3 . 1000 f$$

idet $r$ og $h$ udtrykkes i Metre, og $1000 f$ angiver Vægten af 1 Kubikmeter. Herved faas

$$h = \alpha \sqrt{f r} ,$$

idet $\alpha$ betyder en Konstant. Jo større og vægtfyldigere et Legeme er, desto større Faldhastighed kan det altsaa opnaa, og omvendt ville smaa og lette Legemer, f. Eks. Regndraaber, kun opnaa en forholdsvis ringe Faldhastighed. Luftskippere medtage ofte en Faldskærm, der bestaar af stærkt Tøj, udspændt som en Regnskærm, fra hvis Rand der udgaar Snore, som bære en Ring eller Kurv, hvori et Menneske kan holde sig under Faldet. Skærmen maa foroven have et Hul, hvoraf den sammenpressede Luft kan strømme ud.

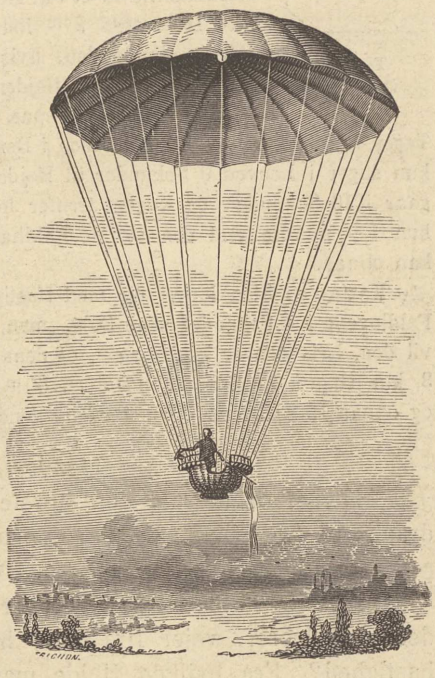

Fig. 201.

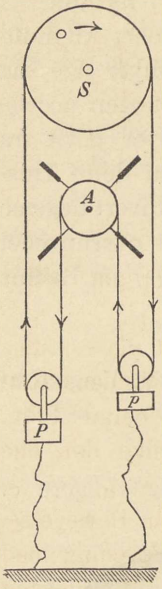

Fig. 202.

Man benytter Luftmodstanden ved Vindfang til at vedligeholde en konstant Omdrejningshastighed. Figuren viser en simpel Maade, hvorpaa dette kan opnaas. Paa Aksen $A$ er der foruden Vindfanget anbragt en Skive, hvorom der gaar en endeløs Snor, der tillige er ført om to løse Trisser og om et Svinghjul $S$. De løse Trisser bære Vægtene $P$ og $p$, hvoraf $P$ er størst, saa at den søger at falde; men ved at dreje Hjulet $S$ i i Pilens Retning kunne Vægtlodderne nogenlunde holdes paa deres Plads. Der udøves saaledes om Aksen $A$ et stadigt Træk $= \frac{P-p}{2}$, hvorfor Omdrejningen snart bliver jævn.

Paa lignende Maade anvendes Vindfang i de Urværker, som bevæge astronomiske Kikkerter, saa de følge med Stjernerne, da sædvanlige Pendulure gaa stødvis.

Som Eksempler paa, hvor meget Luftmodstanden kan forandre Legemers Bevægelse, skulle vi anføre Resultaterne af et Par Beregninger. Skydes en Blykugle med Diametren 2 cm lodret opad med en Hastighed af 400 m, skulde den, hvis der ingen Modstand var, i 40 Sekunder stige til Højden 8000 m og derefter falde igen i 40 Sekunder og paa ny opnaa Hastigheden 400 m. Tages Luftmodstanden derimod med i Beregningen, viser det sig, at den kun stiger i henved 9 Sekunder til Højden 724 m, hvorefter Faldet foregaar i 16 Sekunder, og Kuglen træffer Jorden med Hastigheden 60½ m, kun 1 m mindre end den største Faldhastighed, som den overhovedet kan opnaa.

Kastes en Sten lodret op med Hastigheden 40 m, skulde den efter Faldlovene i 4 Sekunder stige 80 m, men paa Grund af Luftmodlstanden vil den, hvis den er kugleformet, og dens Diameter er 4 cm og Vægtfylden 3, kun stige i 3⅓ Sekund til Højden 60 m og derefter falde i 3⅔ Sekund og opnaa Hastigheden 30 m, medens dens største Faldhastighed er 45 m.

## Opgaver.

217. Hvor stor er den største Faldhastighed, en Regndraabe af 4 mm Diameter kan opnaa?

Res. cr. 8 m.

218. En Faldskærms Diameter er 10 m. Skærmen med det, den bærer, vejer 100 Kilo; hvad er dens største Faldhastighed? Fra hvilken Højde maatte et Menneske springe ned paa Jorden for at opnaa samme Hastighed?

Res. cr. 3½ m, cr. 0,6 m.

**139. Anvendelser af Vindens Kraft.** Sejlskibe føres frem ved Vindens Tryk paa Sejlet. Det er bekendt nok, at selv om Vinden blæser skraat ind forfra, kan Skibet dog gaa frem, naar Sejlet har den rette Stilling. Vindens Tryk paa Sejlet er nemlig normal og kan derfor opløses i to Komposanter, en i Skibets Længderetning og en vinkelret derpaa. Det er kun den første, som faar noget videre at sige, da Skibet gør altfor stor Modstand mod at bevæges til Siden.

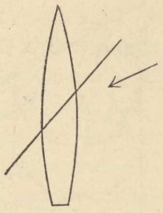

Fig. 203.

Vindens Tryk driver Møllevinger rundt, idet disse stilles saaledes, at deres Bevægelse er vinkelret paa Vindens Retning, og da Vingerne ere stillede skraat mod denne Plan, kan Trykket opløses i to Komposanter, af hvilke den ene frembringer Drejningen.

Den almindelige Drage er ogsaa Eksempel paa Bevægelse, frembragt af Vinden. Vindens normale Tryk i Forening med Trækket i Snoren kan bringe Dragen til at stige. Er Blæsten ikke stærk nok, kan man forøge dens Tryk ved at løbe med Dragen imod Vinden.

Det har ofte været forsøgt at konstruere Flyvemaskiner men er endnu ikke lykkedes. Det er indlysende, at Luftmodstanden spiller en stor Rolle i Fuglenes Flugt, og det er rimeligt, at Flyveevnen ikke nær saa meget beror paa Anvendelsen af Kraft som paa Færdighed. Mange Fugle, der netop flyve særlig godt, f. Eks. Storken, kunne bevæge sig lange Strækninger i forskellige Retninger blot ved at forandre Vingernes og Halens Stillinger ubetydeligt. Det er i saadanne Tilfælde Inertien, som fører Fuglene frem, og Faldet undgaas ved en hensigtsmæssig Benyttelse af Luftmodstanden, ligesom Drager af denne Aarsag kunne stige, skønt de ved Snoren trækkes nedad.

Et andet Eksempel paa, hvorledes Luftmodstanden kan fremkalde særegne Bevægelser, har man i et almindeligt Legetøj, der bestaar af 4 smaa Vinger, dannede af et let Materiale og befæstede paa en Akse, ligesom et Sæt Møllevinger eller en Dampskibsskrue. Naar Aksen sættes løst paa et Skaft, og dette drejes hurtigt rundt, løfte Vingerne sig i Vejret.

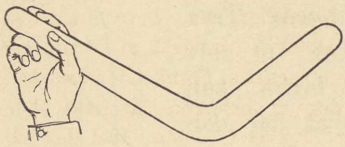

Fig. 204.

Nogle australske Folkeslag anvende et ejendommeligt Kastevaaben, den saakaldte Bumerang (Fig. 204). Den bestaar af et fladt Stykke Træ, som er en lille Smule vindskævt, saaledes at naar den lange Gren lægges paa et Bord, rager den korte Grens Ende lidt over Bordet. Naar den kastes skraat opad og samtidig faar en hurtig Rotation i sin egen Plan, vil den bevæge sig i en Bue op i Luften, men vender saa igen og falder, hvis Kastet var rigtigt, ned paa samme Sted, som den kom fra. En lille Papmodel kan man ved et Knips med Fingeren faa til at udføre lignende Baner.

---

## Luftarternes Teori.

**140.** For at forklare de forskellige Egenskaber ved Luftarterne, har man opstillet den Antagelse, at de enkelte Molekyler ere i uafbrudt Bevægelse imellem hinanden i alle mulige Retninger. Da Luftarterne ikke vise noget Sammenhæng, paavirkes Molekylerne alene af Tyngden, hvis Indvirkning dog maa betragtes som forsvindende, saa at Bevægelsen foregaar i rette Linjer. Støder et Molekyl mod et andet eller træffer det et fast Legeme, sker der en Tilbagekastning, der antages at finde Sted efter Lovene for elastiske Legemer, saa at der ingen levende Kraft gaar til Spilde. Efter denne Opfattelse forstaas det let, at Luftarterne udbrede sig over et hvilket som helst Rum, og at forskellige Luftarter altid diffundere i hinanden; ligeledes forklares Lufttrykket ved Molekylernes Stød mod de Legemer, der findes i Luften.

Et enkelt Molekyls Hastighed og Retning vil uophørlig forandre sig ved Sammenstødene, men da Molekylernes Antal, selv i et lille Rumfang, maa være umaadelig stort, og det samme gælder om Antallet af Stød i en lille Tid (se § 142), saa er det sandsynligt, at der i ethvert Øjeblik findes saa at sige alle mulige Arter af Bevægelse, og at det altid er det samme Antal Molekyler, der bevæge sig i en bestemt Retning, selv om det ikke er de samme Individer. Under denne Forudsætning kunne vi tale om en Middelhastighed $h$ af Molekylerne og ville da søge at finde denne. Massen i 1 cub$^{m}$ Luft kalde vi $M$, og vi betegne ved $m_1$, $m_2$, $m_3$ . . . de Dele deraf, som bevæge sig i enkelte bestemte Retninger, saa at

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$$

Tænke vi os nu et Sted i Luften en Tærning med Sideflade $A$ □ m og betragte vi foreløbig kun de Molekyler, som bevæge sig i en enkelt Retning, saa vil denne Strøm af Molekyler træffe 3 af Tærningens Sideflader, og Trykkene derpaa kunne beregnes efter Formlen for Vædskers Tryk $p = mh^2$ i § 135. Herved er dog at bemærke, at naar Molekylerne ere fuldstændig elastiske, bliver Trykket fordoblet, idet den stødende Luftstrøm undergaar den dobbelte Forandring i Bevægelsesmængde. Desuden maa der tages Hensyn til, at Luftstrømmen danner visse Vinkler $\alpha$, $\beta$ og $\gamma$ med Perpendikulærerne paa Tærningens Sideflader, hvorved Trykkene formindskes i Forholdene $cos^2\alpha$, $cos^2\beta$ og $cos^2\gamma$. (Se Opg. 212). Man faar saaledes Trykkene

$$p_1 = A \cdot 2m_1 h^2 cos^2\alpha,$$
$$q_1 = A \cdot 2m_1 h^2 cos^2\beta,$$
$$r_1 = A \cdot 2m_1 h^2 cos^2\gamma,$$

hvoraf ved Addition, idet $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$,

$$p_1 + q_1 + r_1 = A \cdot 2m_1 h^2.$$

Anvendes denne Betragtning paa enhver Strøm af Molekyler, faas tillige en Række Ligninger af Formen

$$p_2 + q_2 + r_2 = A \cdot 2m_2 h^2.$$
$$p_3 + q_3 + r_3 = A \cdot 2m_3 h^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

og ved Addition faar man da alle Trykkene tilsammen paa Tærningens 6 Sideflader, nemlig

$$A \cdot 2Mh^2.$$

Da de 6 Tryk ere lige store, bliver hvert af dem $^1/_3 AMh^2$, og naar vi ved $P$ betegne Lufttrykket paa 1 □ m, faa vi

$$P = {}^1/_3 Mh^2,$$

som kan tjene til Beregning af $h$, naar $P$ og $M$ kendes. Hastigheden $h$ er ikke en Middelhastighed i sædvanlig Betydning, men den Hastighed, hvormed alle Molekyler maatte bevæge sig for at udøve det Tryk, som virkelig finder Sted.

Tage vi Brint under Normaltryk og ved Temperaturen $0^0$, have vi omtrent

$$P = 10330 \text{ og } M = \frac{1{,}3}{9{,}8 \cdot 14{,}4},$$

hvoraf findes

$$h = \text{cr. } 1834\text{m}.$$

I Luftblandinger maa hver Luftart udøve sit Tryk uafhængig af de andre; man faar derfor

$$P_1 = {}^1/_3 M_1 h_1^2$$
$$P_2 = {}^1/_3 M_2 h_2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

eller naar hele Trykket paa 1 □ m kaldes $P$,

$$P = {}^1/_3 M_1 h_1^2 + {}^1/_3 M_2 h_2^2 + \ldots$$

Kaldes hele Massen i Kubikmetren $M$, kan man sætte

$$P = {}^1/_3 M h^2,$$

naar man ved $h^2$ forstaar $\frac{M_1 h_1^2 + M_2 h_2^2 \ldots}{M_1 + M_2 \ldots}$. Denne, rent teoretiske Hastighed kaldes Luftblandingens Molekularhastighed. For atmosfærisk Luft faas omtrent

$$h = 483\,\text{m}.$$

Den Formel, vi i disse Tilfælde have fundet for Molekularhastigheden, er ikke identisk med den, der i Opg. 214 blev beregnet for Luftens Udstrømningshastighed gennem et Hul; Aarsagen dertil er, at de Molekyler, som befinde sig i Aabningen, bevæge sig spredt til alle Sider.

**141.** Ifølge Mariottes Lov forandre Størrelserne $P$ og $M$ sig i samme Forhold for hver Luftart, naar Temperaturen bliver uforandret. Molekularhastigheden kan altsaa for en enkelt Luftart kun afhænge af Temperaturen. Hvis 1 cub$^m$ Brint ved 0° har Massen $M$, vil det samme Rumfang af en anden Luftart med Vægtfylden $f$ (i Forhold til Brintens som Enhed) have Massen $\frac{fM}{1 + \alpha t}$ ved $t^0$ Graders Varme og det samme Tryk $P$, idet $\alpha$ er Udvidelseskoefficienten 0,$_{00367}$. Man faar derfor i Almindelighed Formlen $P = {}^1/_3 \frac{fM}{1 + \alpha t} h^2$ eller

$$h = \sqrt{\frac{3P}{M} \cdot \frac{1 + \alpha t}{f}} = 1834 \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{f}}.$$

Dersom Luftarternes Udvidelseskoefficient vedbliver at være konstant ved en hvilken som helst lav Temperatur, og man sætter $t = -\frac{1}{\alpha}$ $= -273°$, saa bliver $h = 0$, det vil sige, at ved denne Temperatur, det absolute Nulpunkt, ere alle Molekyler i Hvile, og Luftarterne ville da intet Tryk udøve og ikke strømme ud af Aabninger. Man regner ofte Temperaturen ud fra dette Nulpunkt; betegnes den ved $T$, bliver $T = 273 + t$, og den ovenstaaende Formel forandres til

$$h = 1834 \sqrt{\frac{\alpha T}{f}} = 111 \sqrt{\frac{T}{f}}.$$

Nu ved man fra Kemien, at Luftarternes Normalvægtfylder ere de samme som deres Molekyltal, udtrykte ved Brintens som Enhed*); $f$ betegner derfor ogsaa Vægten af et Molekyl i Forhold til Brintmolekylets Vægt. Kaldes denne sidste $p$ Kilo, faar man af forrige Ligning et enkelt Luftmolekyls levende Kraft

$$E = {}^1/_2 \frac{pfh^2}{g} = {}^1/_2 \frac{111^2}{9{,}8} pT = 629\, pT.$$

---

*) Denne vigtige Sætning, Avogadros Lov, kan ogsaa udtrykkes saaledes: lige store Rumfang af Luftarter ved samme Tryk indeholde lige mange Molekyler.

At Luftarter have samme Temperatur, vil altsaa sige, at ethvert Molekyl har samme levende Kraft, og en Opvarmning bestaar i at forøge denne. Da Varmen saaledes bestaar i Bevægelse, indses det, at man ved mekanisk Arbejde kan frembringe Varme og ifølge Loven om Energiens Vedligeholdelse netop en bestemt Mængde Varme ved et bestemt Arbejde. Man har ved Forsøg fundet, at et Arbejde paa 428 kgm kan frembringe 1 Varmeenhed.

Til at opvarme et Molekyl med Vægten $pf$ 1°, vil der ifølge Varmelæren behøves en Varmemængde $= pfx$, idet $x$ er Varmefylden ved konstant Rumfang. Efter ovenstaaende Ligning vil der behøves et mekanisk Arbejde lig 629 $p$, hvoraf altsaa følger Ligningen

$$428\ pfx = 629\ p$$

eller

$$fx = 1{,}5,$$

det vil sige, at Produktet af en Luftarts Vægtfylde og Varmefylde er konstant. Man har ved Forsøg virkelig fundet dette Produkt konstant men $= 2{,}4$. Man forklarer Overskuddet som hidrørende fra indre Bevægelser af de enkelte Atomer, der sammensætte Molekylet, idet saadanne ogsaa maa kræve en Tilførsel af Energi udvendig fra.

**142.** Teorien er fremdeles anvendt for at forklare andre Love om Luftarterne, f. Eks. angaaende Gnidning, Varmeledning m. m., og det er ikke blot lykkedes at forklare bekendte Ting men endogsaa ved Regning at finde nye Egenskaber og Love, som Erfaringen senere har bekræftet.

Det har ogsaa været muligt med stor Sandsynlighed at beregne adskillige herhen hørende Talstørrelser. Om Molekylerne i den atm. uft, for hvilke $h = 483^{m}$, har man saaledes fundet, at Middelværdien af den Vejlængde, der beskrives mellem to Sammenstød, er $0{,}000\,095$ mm, hvoraf atter beregnes, at et Molekyl lider 4700 Millioner Sammenstød i Sekundet. Molekylets Diameter er beregnet til $0{,}000\,000\,3$ mm, og der findes 21000 Billioner Molekyler i 1 cub$^{mm}$. Af disse Molekyler veje 10000 Trillioner 1 Gram.

Paa Grund af den korte Vejlængde, Molekylerne tilbagelægge mellem to Sammenstød, kan man forklare sig den Langsomhed, hvormed f. Eks. Røg udbreder sig i Luften, og ligeledes, at Luftarter lede Varmen daarligt.

## Bølgebevægelse.

**143. Vandbølger.** Naar man kaster en Sten i Vandet, vil der opstaa ringformede Bølger, der bevæge sig udad til alle Sider som stadig voksende Cirkler. Hver Bølge bestaar af en Forhøjning, som kaldes Bølgebjærget, og en Fordybning, Bølgedalen, som følger bagefter. Der dannes i Alm. flere Bølger efter hinanden men med aftagende Styrke, og Vandet bliver snart roligt overalt, idet Bølgerne blive lavere, samtidig med at de vokse i Omkreds. Paa lignende Maade vil en hvilken som helst anden Forstyrrelse af Vandoverfladen frembringe Bølger, f. Eks. naar Vinden blæser paa Havet.

Kaster man en Prop i Vand, som er i Bølgegang, vil man se Bølgerne løbe hen under den og sætte den i vuggende Bevægelse, fremad i Bjærgene, tilbage i Dalene, saa den i Virkeligheden kommer til at bevæge sig i en lodret Kreds, hvis Plan staar vinkelret paa Bølgeryggen. Da Proppen følger Vanddelenes Bevægelse, maa denne foregaa paa samme Maade; en stadig fremadskridende Bevægelse af den hele Vandmasse finder altsaa ikke Sted. Kaster man en Række Propper paa Vandet og frembringer Bølger paa dette, vil man se, hvorledes den ene Prop efter den anden bliver greben af Bevægelsen. Naar den første Vanddel har fuldført et helt Kredsløb, vil Bevægelsen være naaet et vist Stykke frem, og

den Vanddel, som her begynder sin Bevægelse, vil nu stadig følge sammen med den første. Afstanden mellem to saadanne Vanddele, som altid ere i samme Svingningstilstand, kaldes en Bølgebredde. Hvorledes disse kredsformede Bevægelser kunne give fremadskridende Bølger, vil forstaas af følgende Figur.

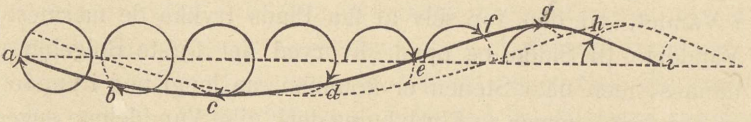


Fig. 205.

*a*, *b*, *c* . . . . *i* betegne en Række Vanddele i Overfladen, som ligge $^1/_8$ Bølgebredde fra hinanden i Retning af Bevægelsen, d. v. s. vinkelret paa Bølgeryggen. Bølgen kommer fra venstre, og naar *a* har udført et helt Omløb i den Retning, Pilen angiver, har *b* kun gennemløbet $^7/_8$, *c* $^6/_8$ Omløb osv., og *i*, som ligger en Bølgebredde fra *a*, skal lige til at begynde sin Bevægelse. Forbindes alle Punkterne, faas en Bølgelinje, bestaaende af en langstrakt Dal, og et noget kortere Bjærg. Hvorledes end Bølgerne ere opstaaede, vil Kredsbevægelsen altid foregaa i den Retning, Figuren viser, saaledes at Bevægelsen bliver fremadskridende i Bjærget og tilbageskridende i Dalen; man ser tillige, at Bjærget løfter sig paa Forsiden og sænker sig paa Bagsiden. Paa Grund af disse Bevægelser vil Bølgelinjen skride frem, hvad man tydeligt ser, naar man tegner Kurven $^1/_8$ Svingningstid senere (den punkterede Linje i Figuren). I den Tid *t*, som hver Vanddel bruger til et Omløb, skrider Bølgen en Bredde *b* fremad; er Hastigheden *h*, følger heraf Formlen

$$b = h\,t.$$

Hastigheden afhænger af forskellige Omstændigheder. Saaledes bliver Bølgens Hastighed mindre paa lavt Vand; navnlig vil Bundens Nærhed bevirke, at Bølgedalen skrider langsommere frem end Bølgebjærget, hvorved dette kommer til at kaste sig som en Brænding ud over Dalen.

De største Bølger, man har iagttaget, have omtrent en Højde af 10 m og en Bredde af 100 m, hvoraf Hastigheden kan

beregnes til cr. $12^{m}$ under Forudsætning af, at Bevægelserne ere Cirkler, hvad de i Almindelighed ere paa dybt Vand. (Se Opg. 348).

Bølgebevægelsen gaar ogsaa ned i Dybden, men taber sig der efterhaanden.

Vi mangle endnu at vise, hvorledes Kredsbevægelserne opstaa og vedligeholdes i Bølgen. Naar man kaster en Sten i Vandet, vil den for selv at faa Plads trykke de nærmeste Vanddele til Siden og opad, hvorved det første Bølgebjærg dannes; men naar Stenen er kommen saa langt ned i Vandet, at der fremkommer en Fordybning deri, ville Vanddelene suges tilbage og nedad og saaledes frembringe en Bølgedal. Bølgerne paa Havet opstaa ved Vinden, som først danner en fin Krusning paa Overfladen. De Smaabølger, som gaa i samme Retning som Vinden, ville da stadig vokse, fordi Vindtrykket forstærker den fremadskridende Bevægelse i Bjærget, hvorimod den tilbagegaaende Bevægelse i Bølgedalen foregaar i Læ. Ude paa Havet løbe Bølgerne derfor i Vindens Retning, hvorimod de ved Land altid løbe indad selv ved Fralandsvind, fordi Landet giver Læ. Naar Bølgebevægelsen først er tilvejebragt, kan Tyngdekraften og Vandets eget Tryk vedligeholde den. En Vandpartikel i et Punkt $a$ af Overfladen

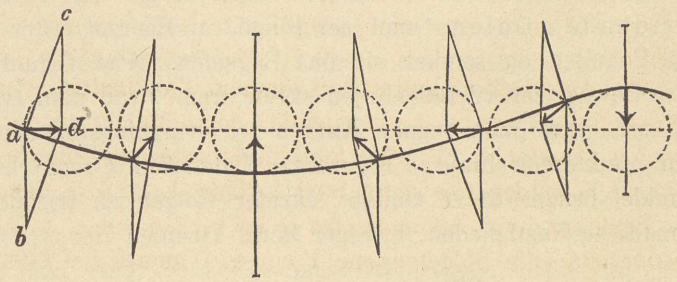


Fig. 206.

vil nemlig være paavirket af sin Vægt $a\,b$ og et Normaltryk $a\,c$ fra den underliggende Vandmasse; disse to Kræfter maa have en saadan Størrelse, at deres Resultant bliver en midtpunktsøgende Kraft $a\,d$, som vil kunne vedligeholde den kredsformede Bevægelse. Normaltrykket $a\,c$ er selvfølgelig

størst i Bølgedalen. Vandbølgerne ville dog hurtigt tabe sig paa Grund af Gnidningsmodstand mellem Vanddelene, dersom den bevægende Kraft ophører at virke.

**144. Vekselvirkning eller Interferens. Staaende Bølger.** Naar man kaster to Stene i Vandet eller paa anden Maade frembringer to forskellige Bølgesystemer, ville disse gaa igennem hinanden, og paa det Sted, hvor de gribe sammen (interferere), vil den ene Bølge lægge sig oven paa den anden, saaledes at to Bjærge give et højere Bjærg og to Dale en dybere Dal, medens et Bjærg og en Dal ville svække hinanden. Vandoverfladen vil derved faa en mere sammensat Form paa Interferensstederne; men man vil dog ofte kunne adskille de enkelte Bølgesystemer fra hinanden, navnlig naar der er stor Forskel paa deres Retning eller deres Størrelse. Paa Havet kan man saaledes tydelig se store Bølger med en Overflade, der er kruset af Smaabølger. Naar derimod to fuldstændig ens, retryggede Bølgesystemer gaa lige mod hinanden, vil man ikke længere kunne skelne de enkelte Systemer paa Interferensstedet, og der dannes, hvad man kalder staaende Bølger.

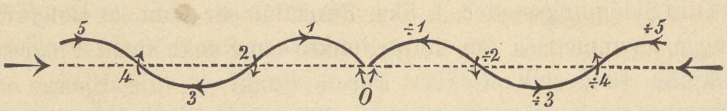


Fig. 207.

Figuren viser et lodret Snit gennem Vandfladen, vinkelret paa Bølgeryggene, i det Øjeblik, de to Bølger møde hinanden i Punktet 0. Vi ville først undersøge den Interferens, som nu begynder paa dette Sted. Naar 1, 2, 3 ... betegne de Punkter, hvis Afstande fra 0 er $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, ... Bølgebredde, da ville Bølgetoppene 1 og ÷ 1 mødes i 0 efter $^1/_4$ Svingningstid og danne et Bjærg af dobbelt Højde. Naar der i alt er gaaet $^2/_4$ Svingningstid, ville 2 og ÷ 2 møde hinanden, saa man faar sædvanlig Vandstand. $^1/_4$ Svingning senere falde Bølgedalene 3 og ÷ 3 sammen og frembringe dobbelt Dal o. s. v. Bjærg og Dal af dobbelt Højde skifte stadig.

Hvad Vanddelenes Bevægelse i Punkt 0 angaar, ser man

af Pilene i Fig., at de vandrette Hastigheder i Bølgetoppene (1 og ÷ 1 o. s. v.) ville ophæve hinanden, naar disse Toppe mødes, og ligesaa de modsatte Hastigheder i Dalene (3 og ÷ 3 o. s. v.), da Bevægelserne overalt i tilsvarende Punkter foregaa symmetrisk fra højre og venstre. De lodrette Hastigheder (i 2 og ÷ 2 o. s. v.) ville derimod altid forstærke hinanden. Vanddelene i Punktet 0 svinge altsaa lodret op og ned i en ret Linje.

Paa samme Maade som i Punkt 0 gaar det i ethvert andet Punkt, der ligger et lige Antal kvart Bølgebredder fra 0, f. Eks. i Punkt 2; thi Bølgerne ligge ogsaa symmetrisk om dette Punkt, naar man (med Fingrene eller med et Stykke Papir) skjuler Bølgestykket 0 4. $^2/_4$ Svingningstid efter at Bølgerne ere stødte sammen i 0, vil Interferensen begynde i 2, saa at Vanddelene i dette Punkt nu ere i samme Tilstand, som Vandet i 0 var for $^1/_2$ Svingningstid siden. Da Vanddelene i 0 ogsaa fremdeles ville være $^1/_2$ Svingning foran 2, ser man, at der er Bjærg i 0, naar der er Dal i 2, og omvendt.

Hvad angaar de Punkter, der ligge midt imellem de lodrette Svingningssteder, f. Eks. Punkt 1, ser man, at Bølgerne ligge usymmetrisk om dette Punkt, naar man (med Fingren) skjuler Bølgestykket 0 2. Her i Punkt 1 ville Bjærge og Dale stadig mødes og ophæve hinanden; ligeledes ville de lodrette Hastigheder stedse være modsat rettede. De vandrette Hastigheder ville derimod forstærke hinanden. I dette Punkt og i Punkterne 3, 5 o. s. v., der ligge et ulige Antal kvart Bølgebredder fra 0, ville Vanddelene altsaa udføre vandrette Svingninger med normal Vandstand. Interferensen i Punkt 1 begynder $^1/_4$ Svingningstid efter Sammenstødet i 0, og $^2/_4$ Svingningstid senere begynder Interferensen i 3 paa samme Maade. Vanddelene i Punkterne 1 og 3 ere derfor altid i modsat Svingningstilstand; naar 1 gaar til højre, gaar 3 til venstre. Naar disse Vanddele saaledes svinge ud fra hinanden, frembringe de en Bølgedal imellem sig og Bjærge paa bægge Sider; men naar Vanddelene $^1/_2$ Svingningstid senere bevæge sig ind mod hinanden, trykke de et Bjærg op

imellem sig. Saaledes afhænge de lodrette og vandrette Svingninger af hinanden.

### Opgaver.

219. Hvilken Omløbstid have Vanddelene i en Bølge med Bredden $16^m$ og Hastigheden $5^m$?

Res. 3,2 Sek.

220. Tegn Interferensen mellem to lige store modløbende Vandbølger $^3/_4$, $^4/_4$ og $^5/_4$ Svingningstid efter Sammenstødet.

**145. Huyghens Princip.** Enhver Bølge kan betragtes som fremkommen ved Interferens af uendelig mange Bølger. Stikker man en Stok ned i Vandet, opstaar der kredsformede Bølger, og bevæger man den deri, vil den paa ethvert nyt Sted frembringe nye Bølger, medens de gamle stadig vokse i Omfang. Naar Stokken saaledes er flyttet fra $A$ til $B$, er den første Bølge vokset til Omkredsen $C\,D$, medens de følgende Bølger ere mindre og mindre. Ved Interferensen mellem alle disse Bølger dannes der de to Bølgerygge $B\,C$ og $B\,D$, da Bølgebevægelserne her falde sammen. Paa alle andre Steder ville Bølgerne derimod svække hinanden. Den samme Form antager Bølgerne efter et Skib. (Aaretag).

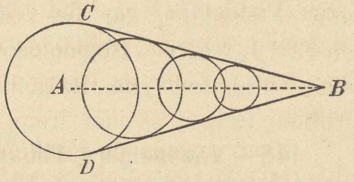

Fig. 208.

Dersom en lodret Plade $A\,B$, som er nedsænket i Vand, paa een Gang trykkes et Stykke ud af sin Stilling, vil Bevægelsen i ethvert Punkt give Anledning til en cirkelformet Bølge, som stadig vokser i Omfang. Ved Interferensen mellem alle disse dannes den enkelte Bølge $a\,b$. Paa samme Maade kunne alle Punkterne i en Bølge $A\,B$ betragtes som Udgangspunkter for nye cirkelformede Bølger, hvorved den oprindelige Bølge efter nogen Tids Forløb naar ud til Stillingen $a\,b$.

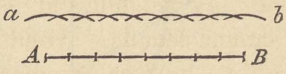

Fig. 209.

Dersom en Bølge støder mod en Væg, hvori der er en snever Aabning, vil den Forstyrrelse, Bølgegangen her frembringer, give Anledning til en Bølge, der med Aabningen som Centrum udbreder sig halvcirkelformet paa den anden Side af Væggen efter Huyghens Princip.

Hvis Aabningen derimod er bred, vil Bølgen væsentlig gaa videre i sin oprindelige Retning, men dog samtidig brede sig noget til Siden, idet Randene ville blive Centrer for nye Bølger.

Paa samme Maade vil Bølgen bøje uden om Forhindringer, fuldstændigt om de smaa, ufuldstændigt om de store, som altsaa paa en Maade ville kaste en Skygge.

Huyghens Princip gælder ikke blot for Vandbølger, men for en hvilken som helst Bølgebevægelse, saaledes ogsaa for de Luftbølger, vi senere skulle omtale. Den Flade, som forener alle de Punkter, der ere i samme Svingningstilstand, kaldes en Bølgeflade. Bølgen skrider altid frem i en Retning, der staar vinkelret paa Bølgefladen. En saadan Linje, langs hvilken Bølgen skrider frem, kaldes en Bølgestraale.

**146. Vandbølgers Tilbagekastning.** Vi kaste en Sten i Vandet i Punktet $P$ og lade Bølgen støde mod en Væg $A\,B$. De forskellige Punkter i denne ville da efterhaanden træffes af Bølgen og derved blive Centre for cirkelformede Smaabølger, der tilsammen ville danne den tilbagekastede Bølge $A\,C\,B$. Man ser straks, at denne Bølgelinje er symmetrisk med den Bølge $A\,D\,B$, som vilde fremkomme, naar Væggen manglede, og som ogsaa kan tænkes fremkommen ved Interferens af Smaabølger. Deraf følger, at den indfaldende Bølge tilbagekastes, som om den var udgaaet fra det symmetriske Punkt $P_1$. De ind-

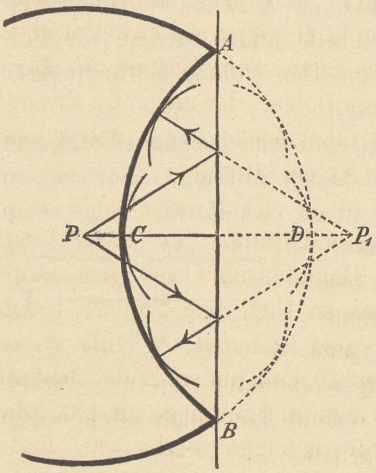

Fig 210.

faldende Bølgestraaler (Bevægelsesretninger) ville følgelig tilbagekastes paa samme symmetriske Maade, saaledes at Indfaldsvinkel og Udfaldsvinkel blive lige store, idet man herved forstaar Vinklerne mellem Bølgestraalerne og Fladens Normal.

Efter samme Lov har man fundet, at Lysstraalerne tilbagekastes. Hvis Fladen $A\,B$ er spejlende, vil man derfor se sit Spejlbillede kaste en Sten i $P_1$, samtidig med at man selv kaster en i $P$. Fra disse to Punkter vil man da se Bølger udbrede sig, indtil de naa hinanden, hvorefter den virkelige Bølge vil tilbagekastes, som om det var Spejlbølgen, der brød frem foran Spejlfladen.

Ved Vandbølgers Tilbagekastning dannes der Interferens af forskellig Art. Det simpleste Tilfælde faar man, naar retryggede Bølger støde lige imod en Væg. Ved Interferensen mellem de indfaldende og tilbagekastede symmetriske Bølger dannes der nemlig staaende Bølger med et lodret Svingningssted lige ved Væggen, som det er udviklet i § 144. (Vandets Skvulpen ved Bolværker).

### Opgaver.

221. Hvorfor ender en Mursten med at give cirkelformede og ikke firkantede Bølger, naar den kastes i Vandet?

222. I et elliptisk Kar med Vædske frembringes Bølger i det ene Brændpunkt $A$. Bevis, at Bølgestraalerne kastes tilbage mod det andet Brændpunkt $B$, og at de cirkelformede Bølger, der udgaa fra $A$, tilbagekastes som Cirkler om $B$.

223. Bevis, at cirkelformede Bølger, der udgaa fra Brændpunktet i et parabolsk Kar, tilbagekastes som retryggede Bølger, der bevæge sig udad i Aksens Retning.

**147. Snorbølger.** Lad os udstramme en lang, blød, temmelig tyk Snor (helst en Bomuldssnor) ved lige store Træk i Enderne og frembringe en Bugt paa Snoren i den ene Ende ved et hurtigt Slag med Haanden; vi ville da se denne Bugt løbe hen ad Snoren til den anden Ende, her vil den kastes om paa den anden Side af Snoren og derpaa løbe tilbage til Udgangspunktet, hvor den igen vender om; dette kan gentage sig flere Gange (Fig. 211).

Naar $p$ betegner det Træk, udtrykt i Kilo, der virker i hver Ende af Snoren, og $m$ den Masse, der er i en Meterlængde, har man ved Beregning fundet Hastigheden i Meter

$$h = \sqrt{\frac{p}{m}},$$

indenfor visse Grændser uafhængig af Bugtens Form og Størrelse.

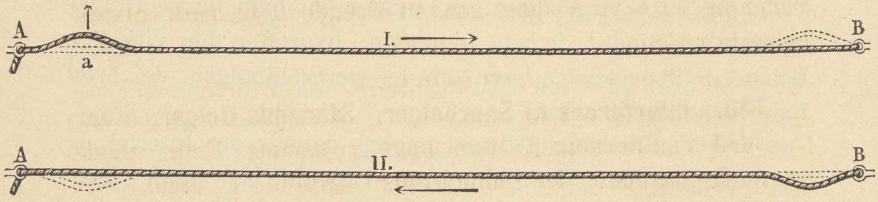


Fig. 211.

Dersom man i en bestemt Takt svinger den ene Ende af Snoren skiftevis til bægge Sider, vil den antage Form af en regelmæssig, plan Bølgelinje, der vil bevæge sig frem med den oven angivne Hastighed. Sammenhængen mellem de enkelte smaa Snordeles Svingninger og den hele fremadskridende Bølgebevægelse ses let af følgende Figur, hvor $a\ b\ c \ldots i$ betegne en Række Punkter, hvis indbyrdes Afstande

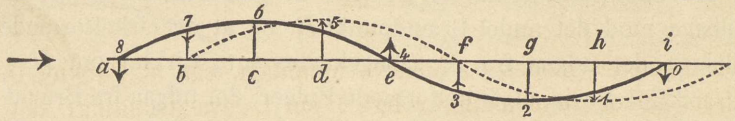


Fig. 212.

er $^1/_8$ Bølgebredde. Bevægelsen begynder med at $a$ sættes i Svingninger paa en Linje, der staar vinkelret paa Snorens Retning, hvorved de følgende Punkter efterhaanden sættes i lignende Svingninger. Punkternes Ligevægtsstilling betegnes ved 0; de Stillinger, der ligge $^1/_8$, $^2/_8$, $^3/_8$ ... Svingning derfra, kaldes 1, 2, 3 .... Naar Punktet $a$ har udført en hel Svingning og er kommen tilbage til Stillingen 8 eller 0, da er Punkt $b$ kun kommen til Stillingen 7 men har en Bevægelse hen imod 8; $c$ er kommen til 6 o. s. v., og Punkt $i$ er endnu i

0 og skal lige til at begynde sin Bevægelse. Forbindes Rækken af Punkter, faas den optrukne Bølgelinje. Bevægelserne gaa udad paa Forsiden af Bugterne og indad paa Bagsiden, hvorved Bølgen flytter sig frem. $^1/_8$ Svingningstid senere er Punkt *a* kommen i Stillingen 1, Punkt *b* i Stillingen 8 o. s. v.; hvert Punkt er nu i den Stilling, hvor det foregaaende Punkt var; Bølgen er altsaa gaaet $^1/_8$ Bølgebredde frem. I en hel Svingningstid *t* vil Bølgen gaa en Bredde *b* fremad, hvoraf følger Formlen

$$b = h\,t.$$

**148. Interferens af Snorbølger. Staaende Bølger.** Naar to Rækker Snorbølger, der ligge i samme Plan, møde hinanden, dannes der Interferens ligesom i Vand. Vi tage kun det Tilfælde, som Figuren viser, at Bølgerne ligge fuldstændig symmetrisk (punktsymmetrisk) om det Punkt 0, hvor de møde hinanden. $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$ ... Svingningstid efter Sammenstødet ville da tilsvarende Bølgedele 1, 2, 3 ... mødes i 0; opad gaaende Bugter ville træffe nedad gaaende, og Svingninger i modsatte Retninger (angivne ved Pile i Fig.)

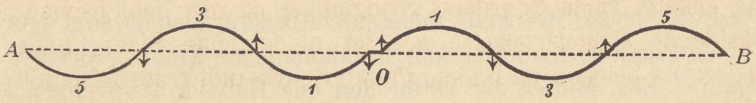


Fig. 213.

ville ligeledes mødes og ophæve hinanden, saa at Punktet 0 altsaa bliver fuldstændig roligt i sin Ligevægtsstilling; det samme gælder Punkterne 2, 4 o. s. v., der ligge et lige Antal kvart Bølgebredder fra 0. I de mellemliggende Punkter 1, 3 o. s. v. ville derimod baade Udsvingene (Bugterne) og Hastighederne (angivne ved Pile) forstærke hinanden, saa at de ville blive dobbelt saa store. Snoren deler sig langs Interferensstedet i svingende Bugter paa $^1/_2$ Bølgebredde, adskilte ved de rolige Punkter 0, 2, 4 o. s. v. Naar een Bugt svinger til den ene Side, ville Nabobugterne svinge til den anden, og alle ville de samtidig naa deres Yderstillinger, idet den staaende Bølgegang netop karakteriseres ved den samtidige Bevægelse af alle Punkterne i Modsætning

til den successive Bevægelse ved de fremadskridende Bølger. Naar Svingningerne foregaa hurtigt, ser man kun de to Yderstillinger, som den svingende Snor indtager med $^1/_2$ Svingningstids Mellemrum; man ser altsaa to Bølgelinjer, der skære hinanden i Punkterne 0, 2, 4...; disse Punkter kaldes derfor Knudepunkter.

Dersom man fra den ene Ende $A$ af en Snor stadig udsender en Række Bølger, medens Snoren er fastgjort i et Punkt $O$, da vil denne Fastgøren have samme Indflydelse paa den indfaldende Bølge $A\,O$, som om denne mødte den punktsymmetriske Bølge $B\,O$. Bølgen $A\,O$ vil derfor tilbagekastes, som om det var Bølgen $B\,O$, der gik videre. Ved Interferens mellem den indfaldende og den tilbagekastede Bølge dannes der staaende Svingninger med et Knudepunkt i $O$. For at en i bægge Ender fastgjort Snor kan blive sat i staaende Svingninger, maa dens Længde være et helt Antal halve Bølgebredder, saa der kan fremkomme Knuder i bægge Ender. Et Eksempel herpaa har man, naar en Violinstreng stryges med en Bue. Der dannes i Reglen kun en enkelt Bugt, men man kan ogsaa frembringe flere Svingningsbugter ved at stryge Strengen, mens man berører den løseligt i et af de Punkter, hvor der kan fremkomme en Knude. Berører man f. Eks. Midten og sætter den ene Halvdel af Strengen i Svingninger ved at stryge den med Buen, da kommer ogsaa den anden Halvdel i Svingninger af sig selv. Man kan nærmest forklare dette ved at antage, at den først dannede Bugt $a$ dels tilbagekastes fra Midtpunktet som en Bugt $b$, dels gaar videre som en Bugt $c$; $b\,c$ danne da to Bugter med staaende Svingninger. (Den svingende Violinstreng har ikke saa afrundet en Form, som Figuren viser, men en mere skarpkantet). Hænger man en Række smaa Papirsstykker (Ryttere) paa Strengen og frembringer flere Svingningsbugter paa den, vil man se, at de kun blive siddende i Knudepunkterne men slynges bort fra Bugterne. Paa denne Maade kan man næmt vise, hvor Strengen deler sig.

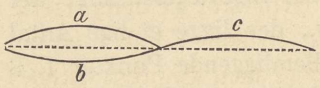

Fig 214.

Vi have hidtil betragtet Snorens Endepunkter som ubevægelige under Svingningerne; dette er imidlertid ikke Tilfældet, naar Snorens Fæste kan give noget efter; ved Udsvingene til bægge Sider vil Snoren nemlig strammes noget mere og trække Endepunkterne lidt til sig, saa disse komme i dobbelt saa hurtige Længdesvingninger. Omvendt kan man sætte en Snor i Tværsvingninger ved at sætte den ene Ende i Længdesvingninger; man anvender bedst en tynd Snor, hvis ene Ende fæstes til Grenen af en Stemmegaffel, som man ved at stryge med en Violinbue kan sætte i store, ret langsomme Svingninger. Den anden Ende af Snoren kan man føre hen over en Trisse og udstramme den ved en Vægt. Snoren vil da komme i staaende Svingninger, naar dens Længde afpasses rigtig i Forhold til Vægten. Man ser tillige, at Svingningsplanerne idelig skifte Retning (Meldes Forsøg).

Naar en Streng paa en af de ovennævnte Maader er sat i staaende Svingninger, vil Spændingen og Inertien vedligeholde disse, indtil de standses af de tilstedeværende Modstande. Man kan bevise, at Svingningstiden ligesom Pendulets er uafhængig af Udsvingets Størrelse. Endskønt Svingningerne ikke give fremadskridende Bølger, ville vi dog beholde Benævnelsen $^1/_2$ Bølgebredde for Længden af en enkelt Bugt.

### Opgave.

224. Paa en lodret Snor, der holdes fast i den ene Ende, saaledes at den blot strammes ved sin egen Vægt, dannes en fremadskridende Bølge. Hvor stor er dens Hastighed $l^{\text{m}}$ fra dens nederste Ende, og hvilken Forskel er der paa Bølgebredden foroven og forneden, naar Snoren sættes i staaende Svingninger?

Res. $h = \sqrt{l\,g}$. Bredden er størst foroven, mindst forneden.

**149. Lysbølger.** Paa Grund af forskellige ejendommelige Interferensfænomener have Hooke og Huyghens opstillet den nu af alle anerkendte Teori, at Lyset er en Bølgebevægelse, og man antager i Almindelighed, at denne finder Sted i et særegent Stof, som gennemtrænger den hele Tilværelse eller

i hvert Fald alle gennemsigtige Legemer, og som har faaet Navn af Æteren.

Af Lysets overordentlig store Hastighed, cr. 40000 Mil eller 300000000$^{m}$ i Sek., kan man formode, at Æteren er meget let og elastisk. Bevægelserne i Æteren skyldes de Molekylsvingninger, som findes i det lysende Legeme, og Ætersvingningerne antages ved en almindelig Lysstraale at foregaa i alle mulige Retninger i en Plan vinkelret paa Straaleretningen. (Det er altsaa Tværsvingninger ligesom i Snore). Ligesom enhver Bevægelse i en Plan kan projiceres paa to Akser og tænkes sammensat af de projicerede Bevægelser, saaledes ogsaa Lyssvingningerne; og denne Opløsning i to plane Bølger lader sig virkelig udføre i Praksis. Naar en Lysstraale træffer en Kalkspatkrystal, vil den nemlig dele sig i to, der hver bevæger sig videre i sin Retning, og ved nærmere Undersøgelse vise sig at være »plansatte«.

To Lysstraaler kunne interferere ligesom andre Bølger. Dette viser sig derved, at to Lysstraaler, der træffe sammen i modsat Svingningstilstand, ville ophæve hinanden, hvis de to Straaler ere lige stærke; Lys og Lys vil frembringe Mørke. Man kan opnaa dette paa forskellige Maader, som alle væsentlig gaa ud paa at dele en Lysstraale i to Dele, hvoraf den ene forsinkes $^1/_2$ Bølgebredde, inden Straalerne igen samles. Ved at maale, hvor meget den ene Lysstraale maa forsinkes for at frembringe Mørke, har man bestemt Lysstraalernes Bølgebredde og fundet

for rødt Lys . . . . . $b = 0{,}0007^{mm}$,
for violet Lys . . . . $b = 0{,}0004^{mm}$.

Herved faas Svingningstiden af Formlen $b = h\,t$, og deraf Antallet af Svingninger i Sekundet

$N$ (rødt) $=$ cr. $400 \cdot 10^{12}$,
$N$ (violet) $=$ cr. $800 \cdot 10^{12}$.

Lysets Brydning, det vil sige Retningsforandring ved Overgangen fra et Stof til et andet, forklares nærmt af den forskellige Hastighed i de to Legemer ved Hjælp af Huyghens' Princip. $A\,B$ (Fig. 215) er Tværsnittet af et Lysbundt, som kastes skraat ned mod Overfladen af et tættere Legeme, for Eksempel Vand, hvor Hastigheden er mindre end i Luften.

Hvert Punkt af Grændsefladen bliver da efterhaanden Udgangspunkt for en stadig voksende kugleformet Lysbølge, og ved Interferensen mellem disse dannes den brudte Straales Bølgeflade. Lad os antage, at Bølgekuglen om $A$ er vokset til Omkredsen $D$ nede i Vandet i den Tid, Lyset oppe i Luften er gaaet fra $B$ til $C$. Tangentplanen $CD$ vil da give os den ny Stilling af den oprindelige Bølgeflade $AB$, og da Bølgen altid gaar frem vinkelret paa Fladen, følger heraf Straaleretningen. Kaldes Lysets Hastighed i de to Stoffer $H$ og $h$, og er den forløbne Tid $t$, faar man

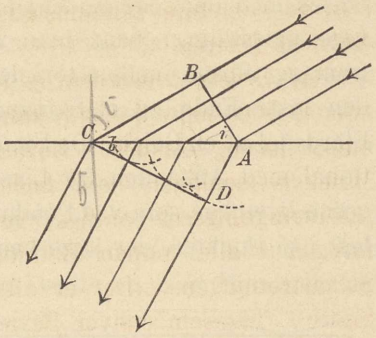

Fig. 215.

$$BC = Ht \text{ og } AD = ht.$$

Fremdeles har man

$$\frac{BC}{\sin i} = \frac{AD}{\sin b},$$

hvor $i$ er Indfaldsvinkel og $b$ Brydningsvinkel, idet man maaler disse Vinkler enten mellem Bølgefladen og den brydende Overflade eller mellem Straalen og Overfladens Normal. Heraf faas Brydningsforholdet

$$\frac{\sin i}{\sin b} = \frac{H}{h}.$$

For Luft og Glas er $\frac{H}{h} = \frac{3}{2}$, for Luft og Vand $\frac{4}{3}$.

**150. Tværsvingninger i Stænger og Plader.** Ligesom man kan frembringe staaende Svingninger i en Snor, saaledes ogsaa i en elastisk Stang; men her er det Elasticiteten og ikke Spændingen, der vedligeholder Svingningerne, og dersom den ene Ende af Stangen er fri, eller maaske bægge to, vil man netop der faa et Svingningssted, hvad man kun sjældent kan faa ved Enden af en Snor. De Steder, hvor Stangen fæstes eller berøres, blive naturligvis altid Knudepunkter. De simpleste Svingninger faar man, naar Stangen

fæstes med den ene Ende i en Skruestik og føres ud af sin Ligevægtsstilling; naar man da slipper den, vil den svinge frem og tilbage mellem to Yderstillinger med et Knudepunkt i den faste Ende og et Svingningssted i den fri, ligesom en Fjerdedel af en Bølge. Da Stangens Elasticitetskraft er proportional med Afstanden fra Ligevægtsstillingen, blive Svingningerne ligetidige som ved Pendulet. Dersom en Stang ophænges løst i to Punkter, der ligge henved $^1/_4$ fra hver Ende, kan man faa den til at svinge, som Fig. 216 viser, med Knuder i Ophængningspunkterne. En svingende Stemmegaffel maa nærmest betragtes som en saadan Stang, der er bøjet som et U, hvorved de to Knudepunkter ere rykkede nær til hinanden. (Se Fig. 217). Medens Grenene svinge ud og ind, vil Skaftet, som sidder paa Midten, svinge op og ned med smaa, men meget kraftige Bevægelser, som ikke forstyrres ved Berøring.

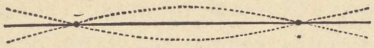

Fig. 216.

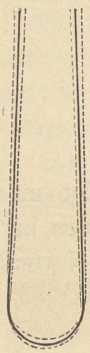

Fig. 217.

Stemmegafler anvendes meget i Lydlæren, men have ogsaa faaet Anvendelse paa andre Omraader, f. Eks. til at afbryde og slutte en elektrisk Strøm i en bestemt Takt. Gaffelgrenene anbringes da mellem Polerne paa en hesteskoformet Elektromagnet, hvorfra Strømmen føres gennem et Berøringssted af Platin over i Stemmegaflen og tilbage til Elementet. Ligesom ved et sædvanligt elektrisk Afbryderapparat vil Strømmen sætte Stemmegaflen i Svingninger, og omvendt ville disse afbryde og slutte Strømmen, saa at den i en bestemt Takt bølger ud i Ledningen. En saadan taktsat Strøm kan nu ved at ledes om en ny Elektromagnet paavirke en anden Stemmegaffel og sætte den i Svingning, saafremt denne Gaffel kan svinge i den samme Takt, hvilket kun kan ske, naar de to Stemmegafler have samme Svingningstal, det vil sige gøre det samme Antal Svingninger i Sekundet, eller naar den sidste Gaffels Svingningstal er et Multiplum af den førstes.

Alle andre Stemmegafler ville blive upaavirkede af den taktsatte Strøm. Danskeren la Cour har vist, hvorledes man kan benytte dette til samtidig at afsende flere Telegrammer paa samme Linje, idet Telegrammerne afsendes med forskellige taktsatte Strømme, hvoraf hver kun virker paa den Station, hvor man har en tilsvarende Stemmegaffel.

Naar en Stemmegaffel svinger for hurtigt, til at man kan følge Bevægelserne, og det er næsten altid Tilfældet, kan man vise Svingningerne ved at sætte en blød Metalstift fast

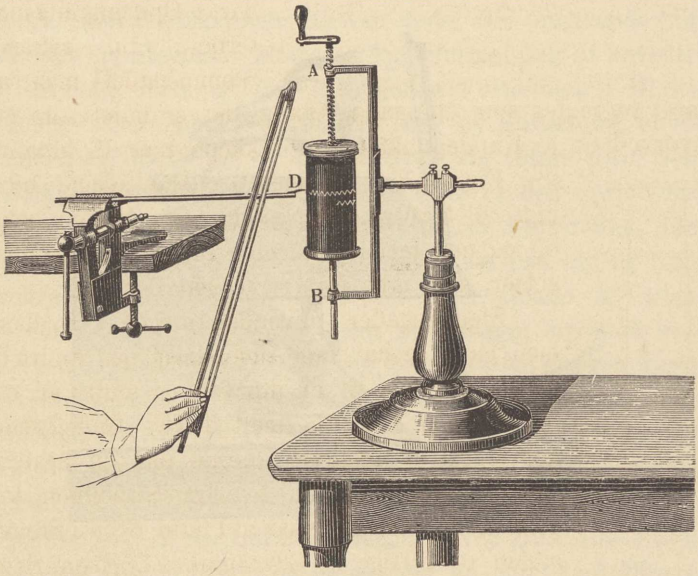


Fig. 218.

paa den ene Gren og føre den svingende Gaffel hurtigt hen over en sodet Glasplade, hvorved Stiften tegner en Bølgelinje derpaa. Endnu bedre er det at fastspænde Gaflen og lade den tegne sine Bølger paa en roterende, sodet Tromle, som under Omdrejningen skruer sig lidt frem, saa Bølgelinjerne ikke gaa tilbage i sig selv. Ved at tælle det Antal Bølger, der kommer i en vis Tid, kan man bestemme Svingningstallet. Fig. 218 viser, hvorledes man paa denne Maade kan afbilde en Fjeders Svingninger. Omvendt kan man

benytte en Stemmegaffel med bekendt Svingningstal til Udmaaling af smaa Tidsrum, naar man indretter det saaledes, at der ved Tidsrummets Begyndelse og Slutning afsættes et Mærke paa den roterende Tromle ved Siden af Gaflens Bølgelinje. Man har da blot at tælle Bølgerne og multiplicere Antallet med Svingningstiden.

Svingninger i en Plade kan man frembringe, naar man fastspænder den i et Punkt og stryger den med en Violinbue. Naar Pladen holdes vandret og bestrøs med Sand, træde Knudelinjerne tydeligt frem, idet Sandet kastes bort fra

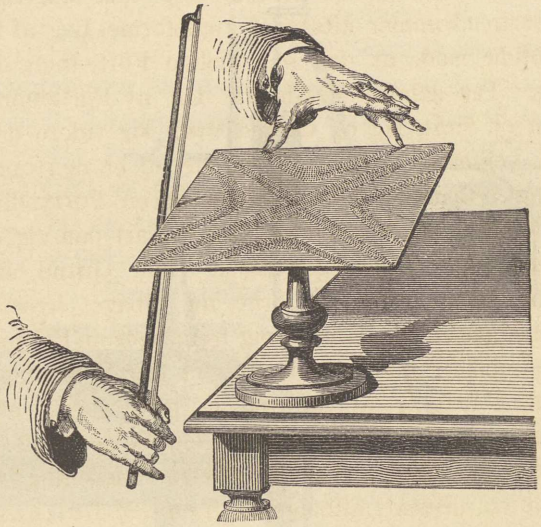

Fig. 219.

Svingningsstederne. Ved at berøre Pladen i forskellige Punkter og forandre Strygningsstedet, kan man faa forskellige Figurer, idet der altid gaar Knudelinjer gennem de fastgjorte og berørte Punkter. Svingningerne ere ledsagede af en Tone, som veksler med Figurerne, hvorfor disse kaldes Klangfigurer (Cladni). For at Figurerne kunne blive simple og tydelige, maa Pladerne være saa regelmæssige som muligt.

En Klokke kan ogsaa sættes i Svingninger ved Strygning med en Violinbue; den deler sig da i Reglen i 4 svingende Sektorer. Svingningerne kunne vises ved at holde

et lille Pendul hen til Randen af Klokken; det vil da kastes bort fra de svingende Steder. Man kan ogsaa vise dem ved at hælde Vand eller bedre Vinaand i Klokken; Vædskens Overflade vil da kruses ud for de svingende Steder men holde sig glat ud for Knudelinjerne.

**151. Længdesvingninger. Fremadskridende Luftbølger.** Ligesom enhver Forstyrrelse i Vandet frembringer Bølger, der bevæge sig udad til alle Sider, saaledes vil ogsaa enhver Bevægelse i Luften forplante sig videre i alle Retninger. Afbrænder man f. Eks. en Portion Krudt, da vil det stærke Lufttryk, som fremkommer derved, drive den omgivende Luft udad; der fremkommer altsaa et kugleformet Lag af fortættet Luft samtidig med, at den oprindelige Fortætning i Midten taber sig. Paa samme Maade vil den ny Fortætning skyde en anden op foran sig og derved flytte sig videre udad som en stadig voksende Kugleskal. Imidlertid er den oprindelige Fortætning i Centrum bleven afløst af en Fortynding, idet Luftmolekylerne have faaet for megen Fart paa sig og have overskredet deres Ligevægtsstilling. Paa Grund af denne Fortynding suges Luftmolekylerne nu tilbage, hvorved Fortyndingen kommer til at flytte sig frem ligesom Fortætningen. Hvert Luftmolekyl udfører saaledes et Par Svingninger frem og tilbage i Retning af Bevægelsen med stærkt aftagende Styrke og kommer hurtigt i Ro, medens Bølgen løber videre.

Medens Vandbølgernes Bevægelse væsentlig skyldes Tyngdekraften, drives Luftbølgerne frem ved Luftens Tryk. Er dette $p$ Kilo pr. $\square^m$, og indeholder en $cub^m$ Luft Massen $m$, da vil en Beregning give os Hastigheden for en hvilken som helst Luftbølge udtrykt i Meter

$$h = \sqrt{1{,}4 \cdot \frac{p}{m}},$$

hvor Konstanten 1,4 skyldes den Opvarmning og Afkøling, der opstaar ved Luftens Fortætning og Fortynding. (1,4 er Forholdet mellem Luftens Varmefylde ved konstant Tryk og konstant Rumfang).

Da $p$ og $m$ efter Mariottes Lov ere proportionale for samme Luftart, bliver Hastigheden uafhængig af Luft-

trykket. Derimod kan det bevises, at den vokser med Temperaturen. (Se Opg. 228).

Ved $0^0$ finder man Hastigheden i atmosfærisk Luft ved at indsætte $p = 10330$ og $m = \frac{1,3}{g}$, hvoraf

$$h_0 = 332^m.$$

Regnault har anstillet Forsøg over Luftbølgers Hastighed i tomme Vandledninger i Paris. Den ene Ende af Røret lukkes med en fast Væg, der er forsynet med et lille Hul, hvorigennem der kan affyres en Pistol. Den anden Ende

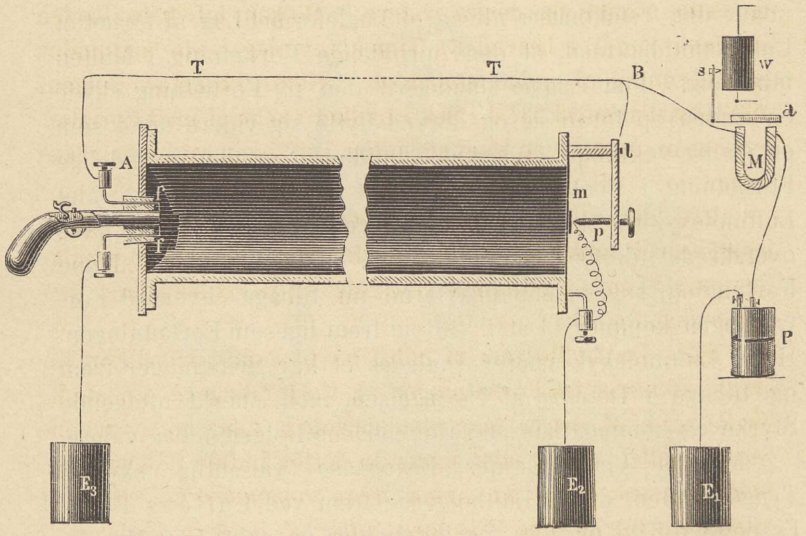


Fig. 220.

lukkes med en tynd Hinde, der kan sættes i Bevægelse af Lufttrykket. I det Øjeblik Pistolen affyres, vil Ladningen sønderbryde en elektrisk Strømledning, hvorved der afsættes et Mærke paa en roterende Tromle. Naar Luftbølgen saa naar hen til den anden Ende af Røret, vil den trykke Hinden udad, hvorved der sluttes en Strøm, der sætter et nyt Mærke paa Tromlen. Af Tromlens Hastighed og Afstanden mellem de to Mærker kan man beregne den forløbne Tid og derved Luftbølgens Hastighed. Det saaledes fundne Resultat stemte næsten fuldstændig med det beregnede.

Et mærkeligt Eksempel paa en vidtrækkende Luftbølge havde man for nogle Aar siden ved et voldsomt Vulkanudbrud paa en lille Ø i Sundastrædet. Det meste af Øen blev ødelagt, og Barometret steg og sank et Par Tommer der i Omegnen. Denne Luftforstyrrelse spredte sig nu hurtigt udad til alle Sider og viste sig efterhaanden paa alle de meteorologiske Instituter, der vare forsynede med selvtegnende Barometre. Af disse Optegnelser kunde man beregne Bølgens Gang, og man fandt, at den netop havde sit Udgangspunkt i Sundastrædet; derfra havde den bevæget sig kredsformigt til alle Sider, var løbet sammen med sig selv i det diametralt modsatte Punkt og derfra videre. Bølgen løb hele Jorden en Gang rundt i henved 34 Timer, og der viste sig endog en Antydning af endnu et Omløb. Heraf beregnes Bølgens Middelhastighed til 327 m i Sek., hvilket stemmer med Formlen, hvis man antager en gennemsnitlig Lufttemperatur af noget under 0 °.

Ved det samme Udbrud spredtes der en saadan Askemængde vidt omkring i Luften, at der fremkom et ejendommeligt rødt Skær over Himlen ved Solens Op- og Nedgang, synligt endog for os.

**152.** De Luftbølger, vi hidtil have omtalt, have kun bestaaet af nogle faa Fortætninger og Fortyndinger. En stadig Nydannelse af Bølger faar man derimod, naar en svingende Stemmegaffel, Streng eller lignende sætter Luften i Bevægelse. Svingningerne blive da ogsaa mere regelmæssige. For at undersøge Forholdene i Bølgen ville vi ligesom tidligere i lignende Tilfælde tage en Række Luftdele *a*, *b*, *c*, *d* . . . *i*, der ligge 1/8 Bølgebredde fra hinanden i Bevægelsesretningen.

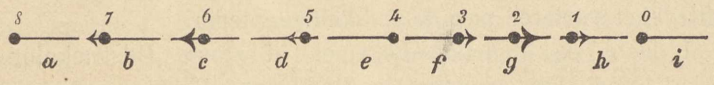


Fig. 221.

Den første Luftdel *a* antages at blive sat umiddelbart i Svingninger af den ene Gren paa Stemmegaflen. De følgende Luftdele ville da efterhaanden blive dragne med ind i Bevægelsen. 0, 1, 2, 3, . . . 8 eller 0 betegne Luftmolekylernes

Stillinger i Løbet af en Svingningstid, regnede ud fra det bagerste Punkt af Svingningslinjerne. Naar da Molekylet $a$ er i Stilling 8, vil $b$ være i Stilling 7 med Bevægelse tilbage mod 8, o. s. v. Betragter man særlig Molekylerne $a$, $e$, $i$, som oprindelig ligge $^1/_2$ Bølgebredde fra hinanden, ser man, at disse for Øieblikket ere i deres Yderstillinger i Færd med at vende, saa at Hastigheden her er 0. Tillige ser man, at $a$ og $e$ ere saa langt fra hinanden som muligt, hvorfor Luften er fortyndet paa dette Stykke, hvorimod $e$ og $i$ ere hinanden nærmest, saa den mellemliggende Luft her er fortættet. Figuren viser fremdeles, at alle Molekylerne i Fortyndingen ere i Færd med at svinge tilbage, medens Hastighederne gaa fremad i Fortætningerne, stærkest i Midten.

Efter Forløbet af $^1/_8$ Svingningstid er ethvert Punkt kommen hen i den Stilling, hvor det foregaaende Punkt var, saa at Bølgen er rykket $^1/_8$ Bredde frem. Man faar derfor som sædvanlig

$$b = h\,t.$$

Da Hastigheden er konstant for alle Bølger, kan man af $b$ finde $t$ og omvendt.

Man har ofte Brug for den reciproke Værdi af Svingningstiden, nemlig Svingningstallet, det vil sige Antallet af Svingninger i Sekundet. Kaldes dette $n$, faas Formlen

$$h = n\,b.$$

Det er undertiden bekvemt at afbilde Luftbølgerne grafisk, idet man i hvert Punkt af den Linje, langs hvilken Bølgen skrider frem, oprejser Ordinater proportionale med Fortætningerne og Fortyndingerne (maalte ved den Forøgelse og Formindskelse i Lufttrykket, som Bølgen bevirker). Man faar derved tegnet en Bølgelinje, der paa en tydelig Maade viser, hvorledes Lufttrykket varierer paa de forskellige Steder.

I faste og flydende Legemer af større Udstrækning, f. Eks. Vand, kan man ogsaa frembringe Bølger, som paa Grund af Elasticiteten forplante sig videre i alle Retninger som Længdesvingninger. Hastigheden vokser med Elasticiteten og aftager med Legemets Vægtfylde. (Se Opg. 349).

**153. Staaende Længdesvingninger.** Naar to Rækker Luftbølger interferere, kan man, dersom Bølgerne ikke ere

altfor stærke, faa Fortætningen paa et vilkaarligt Sted ved at addere de to Bølgers Fortætninger, og Hastighederne paa samme Maade. Vi ville tage det simple Tilfælde, at Bølgerne ere aldeles ens og gaa lige mod hinanden. Vi faa da akkurat det samme Interferensbillede som ved Vandbølger, naar vi ombytte de sidstnævntes Bjærge og Dale med Luftens Fortæt-

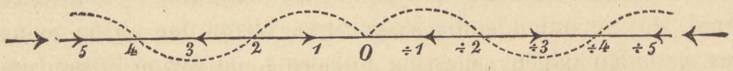


Fig. 222.

ning og Fortynding, og ligesaa Vanddelenes kredsformede Bevægelser med Luftens Længdesvingninger, (der kunne betragtes som fremkomne ved Projektion af Kredsbevægelserne). I Punkterne 0, 2, 4..., som svare til de lodrette Svingningssteder ved Vandbølger, faa vi altsaa skiftevis Fortætninger og Fortyndinger uden Spor af Svingninger; vi sige, at Luften »pulserer«. Med et Udtryk, laant fra svingende Strenge, kalde vi disse Punkter Knudepunkter. Imellem to Knuder ville alle Luftdelene samtidig svinge frem og tilbage med den kraftigste Bevægelse midt i den svingende Luftsøjle (Punkterne 1, 3, 5...); her vil Luften aldeles ikke pulsere, men kun svinge. I alle de øvrige Punkter finde vi derimod baade Pulsering og Svingninger. Hvorledes Tæthedsforandringerne afhænge af Svingningerne, forstaas let. Luftdelene paa to Svingningssteder, der ligge $^1/_2$ Bølgebredde fra hinanden, ere nemlig altid i modsat Bevægelsestilstand; naar Bevægelserne gaa mod hinanden, bliver den mellemliggende Luft selvfølgelig fortættet, og fortyndet, naar Luftdelene $^1/_2$ Svingningstid senere gaa fra hinanden.

Staaende Bølger dannes som sædvanlig bedst ved Tilbagekastning. Naar saaledes en fremadskridende Bølge støder lige mod en fast Væg, da standses Svingningerne paa dette Sted, saa Luften tvinges til at pulsere. Det forholder sig paa samme Maade, som om Bølgen mødte sit Spejlbillede, det vil sige den tilbagekastes som en Fortsættelse af den plansymmetriske Bølge. Ved Interferens med den indfaldende Bølge dannes der staaende Svingninger med et Knudepunkt inde ved Væggen.

En ejendommelig Art af Tilbagekastning finder Sted, naar en Bølge, som løber inde i et aabent Rør, kommer ud til Enden og pludselig ser sig omgiven af Luft paa alle Sider. Fortætningerne, som bleve holdte sammen af Rørets Vægge, faa da Plads til at udbrede sig og tabe sig hurtigt til alle Sider; ligeledes ville Fortyndingerne straks suge Luft til sig, saa snart de komme udenfor Rørets Munding. Paa dette Sted, d. v. s. lidt udenfor Mundingen, bliver der altsaa Svingninger uden nogen væsentlig Pulsering, og denne Forandring virker tilbage paa Bølgerne i Røret og gør Bølgegangen staaende. Det forholder sig altsaa, som om Bølgerne bleve tilbagekastede fra Rørets aabne Ende, saaledes at Fortætningerne kastes tilbage som Fortyndinger og omvendt; eller Tilbagekastningen foregaar med Tabet af $^1/_2$ Bølgebredde, det vil sige, vi tænke os Bølgen tilbagekastet paa sædvanlig Maade som fra en fast Væg, og den tilbagekastede Bølge dernæst forskudt $^1/_2$ Bølgebredde frem eller tilbage.

Det følger af det foregaaende, at et i bægge Ender lukket Rør, hvori Luften skal sættes i staaende Svingninger, maa have en Længde af et lige Antal kvart Bølgebredder, for at der kan fremkomme Knudepunkter ved Enderne; og den samme Længde maa Røret have, naar det er aabent i bægge Ender, for at der her kan komme Svingningssteder. Naar det derimod er aabent i den ene Ende og lukket i den anden, maa dets Længde være et ulige Antal kvart Bølgebredder.

I faste Legemer ville de fremadskridende Længdesvingninger i Alm. meget hurtigt naa Legemets Grændser og ved Tilbagekastning derfra frembringe staaende Bølger. Tilbagekastningen kan foregaa paa de samme to Maader som ved Luft; hvis Legemet er stangformet, vil et frit Endepunkt blive et Svingningssted, hvorimod et fast Punkt vil fremtvinge Pulseren. En af de simpleste Maader, hvorpaa man kan frembringe Længdesvingninger i en Stang, bestaar i at fastspænde den paa Midten og gnide den ene Ende med et harpiksbestrøet Stykke Tøj (Glas gnides med en fugtig Klud); naar man da holder en Elfenbenskugle hen til den anden fri Ende, vil man se den blive slynget bort, i det Stangen faar de kraftigste Svingninger ude i Enderne og et Knude-

punkt i Midten. Dersom man fastholder et langt og vidt Glasrør paa Midten og gnider det paa samme Maade, kunne Svingningerne endog blive saa kraftige, at Røret falder fra hinanden i smaa Ringe.

Man kan paa følgende Maade sætte en Luftsøjle i Svingninger og paavise Knuderne. En Stang $A\,B$ fastgøres paa Midten ved en Prop i et større Glasrør, hvori man har om-




Fig. 223.

rystet lidt Heksemel, hvorefter Røret lukkes i den anden Ende med en Prop $C$, som kan skydes mer eller mindre ind i Røret. Ved at gnide den fri Ende af Stangen sætter man denne i staaende Svingninger paa en halv Bølgebredde, og den anden Ende, som bærer en lille Plade vil da sætte Luften i Svingninger. Naar Luftsøjlens Længde afpasses vil Heksemelet slynges fuldstændig bort fra de svingende Steder og kun lægge sig paa Knudepunkterne i Afstande, der ere Halvdelen af Luftens Bølgebredde. Der viser sig her den Mærkelighed, at man ikke blot faar et Knudepunkt ved den faste Ende af Luftsøjlen men ogsaa ved den bevægelige. Det kommer af, at Luftens Svingninger hurtigt blive saa store i Forhold til Stangens, at Enden af den svingende Stang maa betragtes som forholdsvis fast. Der udgaar nemlig fra dette Punkt stadig nye Luftbølger, som forstærke dem, der vare i Forvejen.

Ved at udmaale Afstanden mellem Knudepunkterne, faar man Bølgebredden $b$ i Luften, og af Stangens Længde kan man faa dens Bølgebredde $B$. Heraf kan man næmt udregne Elasticitetsbølgens Hastighed $H$ i det Stof, hvoraf Stangen bestaar, taget i Forhold til Luftbølgernes Hastighed $h$. Man har nemlig

$$H = n\,B \text{ og } h = n\,b,$$

hvoraf

$$\frac{H}{B} = \frac{h}{b}.$$

Benytter man atmosfærisk Luft, hvis Bølgehastighed er bekendt, kan man finde Hastigheden i et hvilket som helst fast Stof, og ved at fylde Røret med forskellige Luftarter kan man finde Forholdet mellem Hastighederne deri.

---

## Lydlære.

**154. Lydsvingninger.** Lyd er en ejendommelig Fornemmelse, der skyldes en Indvirkning udefra paa Hørenerven, der fra Øret fører Indtrykket ind til Bevidstheden. Den første Aarsag til Lyden er altid en Bevægelse, et Skud, et Fodtrin eller Svingningerne af en Violinstreng eller en Klokke; naar Bevægelsen standser, da ophører ogsaa Lyden. Legemets Bevægelser meddele sig enten umiddelbart eller gennem andre Legemer til Luften, som derved sættes i mere eller mindre regelmæssig Bølgegang, og det er navnlig denne Vekslen mellem Fortætninger og Fortyndinger, som gør Indtryk paa vort Øre.

I de fleste Tilfælde, hvor Lyden er kraftig og ikke altfor kortvarig, kan man iagttage, at den fremkommer ved Svingninger. Man kan vel ikke se de enkelte Svingninger paa en Stemmegaffel, Violinstreng o. lign., da de foregaa for hurtigt, men man kan se, at Legemet dirrer, og Svingningerne kunne ofte vises ved Papirsryttere og Smaapenduler; man kan ogsaa i Reglen føle dem, f. Eks. naar man rører ved Bunden af en Violin eller ved et Klaver. Talestemmen kan føles med Haanden udvendig paa Halsen og de dybere Toner tillige paa Brystet. Naar man hører et kraftigt Musikstykke, kan man med det samme føle, at man fyldes med Svingninger gennem Stolen, man sidder paa; og holder man et Blad Papir i Haanden, ville Luftsvingningerne faa det til at dirre.

Hvor stor Betydning Luften har ved Lydens Bevægelse til Øret, kan man vise ved at anbringe en Spilledaase paa et blødt Tørklæde under Klokken paa en Luftpompe; Lyden

vil da forsvinde, naar Luften pompes ud. Det er imidlertid ikke alene Luften, der kan lade Lyden gaa igennem sig, men alle Legemer, der ikke ere altfor uelastiske, baade faste og flydende, idet de enkelte Dele komme i lignende Længdesvingninger som Luftmolekylerne. Havde man saaledes sat Spilledaasen direkte paa den haarde Tallerken, vilde Lyden ikke forsvinde, naar Luften pompedes bort, fordi den nu kan gaa gennem selve Luftpompen ud til den ydre Luft og videre til Øret. Paa lignende Maade gaar Lyden fra et Værelse til et andet gennem Vægge, Gulv og Loft. Det angives, at Kanonernes Torden kan høres paa meget lang Afstand, naar man lægger Øret til Jorden. Ved den ene Ende af et langt Jærnrækværk kan man tydeligt høre, naar man banker sagte paa den anden Ende. Man har prøvet paa at forbinde to Klaverer, som stod flere Etager over hinanden, ved en lang Træstang, som gik uhindret gennem Huller i Gulvene; naar man da spillede paa det ene Klaver, gik Lyden over i det andet, saa det lød, som om den udgik derfra. Dersom man befæster hver Ende af en lang Traad midt paa et Stykke Svineblære, der anbringes paa et kort aabent Rør, og udstrammer Snoren, kan den overføre Talen fra det ene Sted til det andet ligesom en Telefon. Lægerne undersøge ofte Patienternes Bryst med et »Stetoskop«, der bestaar af et kort Rør, som ender med en lille Tragt, der lægges mod Brystet; den anden Ende har en pladeformet Udvidelse til at lægge mod Øret. Her kan man saa høre, om der er noget i Vejen med Lungerne, Hjærteslaget o. s. v.

Lydsvingningernes Overgang fra det ene Legeme til det andet har navnlig stor Betydning ved Strengeinstrumenter. Strengen selv kan nemlig kun sætte en lille Luftmasse i Bevægelse; man befæster den derfor paa en Resonansbund (Klaveret) eller Resonanskasse (Violinen), som kan overføre Svingningerne til en større Luftmasse. Paa lignende Maade vil en Stemmegaffel først give en kraftig Tone, naar Skaftet sættes mod en Bordplade eller fæstes paa en Resonanskasse (Fig. 224). De bedste Resonanskasser faas af knastfrit Fyrretræ, der er meget elastisk. Violintræet giver man paa hvert enkelt Sted en af Erfaringen bestemt Tykkelse.

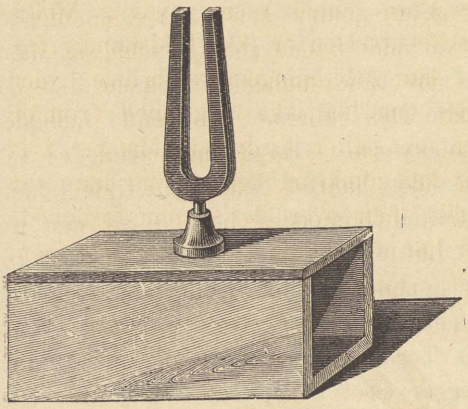

Fig. 224.

Hvorledes Lydsvingningerne kunne overføres gennem Luften fra et Legeme til et andet, kan man vise ved to fuldkommen ens Stemmegafler, som anbringes hver paa sin Resonanskasse i nogen Afstand fra hinanden. Stryges da den ene Gaffel, vil Lyden sætte den anden i Svingninger, som kunne høres, naar man standser den første. Naar Gaflerne ikke have samme Svingningstid, vil man intet høre, da Staalet er for stift til at kunne sættes i Svingninger i en anden Takt end den naturlige. Derimod ville bløde elastiske Hinder paavirkes af en hvilken som helst Lydbølge. Man har benyttet det til at optegne Lydsvingningerne, idet man fæster en Stift paa en saadan Hinde og lader den tegne paa en roterende, sværtet Tromle. Hinden anbringes ved Enden af et parabolsk eller elliptisk Rør, der koncentrerer Lyden. (Se Opg. 223). Med et saadant Apparat (Fonavtograf, Fig. 225), kan man

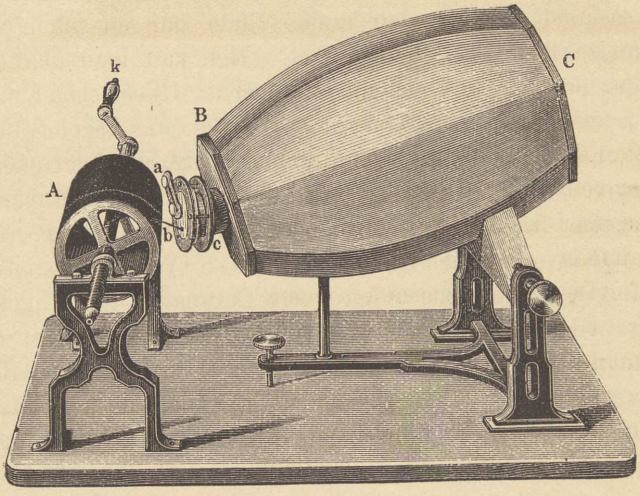


Fig. 225.

undersøge Lydbølgernes Form, men nogen tydelig Afbildning faar man ikke, og Gengivelsen er ikke fuldstændig tro. Ved Edisons Fonograf kan Afbildningen frembringe Lyden igen. Stiftens Bevægelser gaa her ikke langs med Tromlen men lige ind imod den og sætter fordybede Mærker i et Stykke Tinfolie, som er lagt omkring den. Naar man saa bagefter lader Stiften glide hen over de samme fordybede Bølger, vil den Lyd, der har dannet dem, komme frem igen, om end ikke saa tydeligt. (Fig. 226).

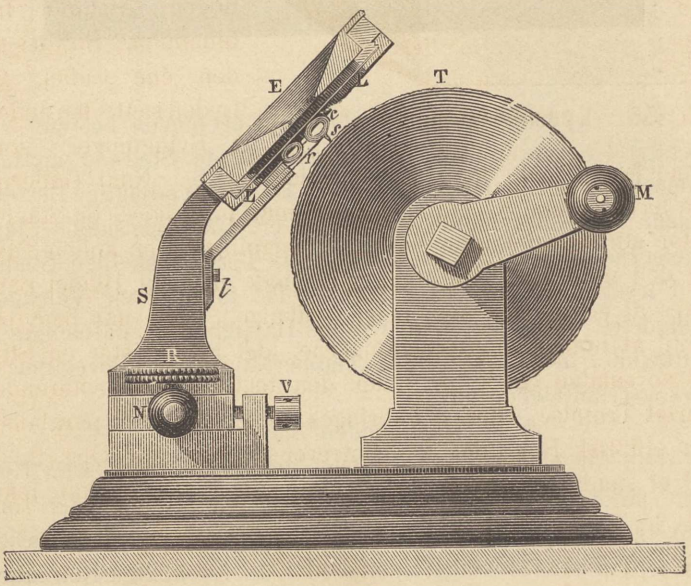


Fig. 226.

Man kan gøre Lydsvingningerne synlige ved at lede Lyden gennem en fin Aabning lige imod en lille, spids Gasflamme. (Andre Flammer du ikke). De fremadgaaende Svingninger i Lyden ville tilføre saa megen Luft, at Flammen ophører at lyse, medens de tilbagegaaende Svingninger lade den blusse frit op. Fig. 227 viser, hvorledes et saadant

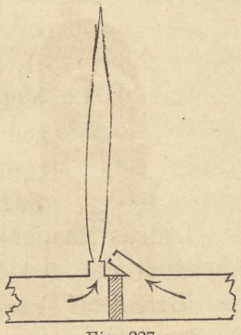

Fig. 227.

Flammeapparat kan indrettes. Naar man svinger Flammen i Luften eller ser den i et roterende Spejl, ville de enkelte Svingninger træde tydeligt frem, som Fig. 228 viser.

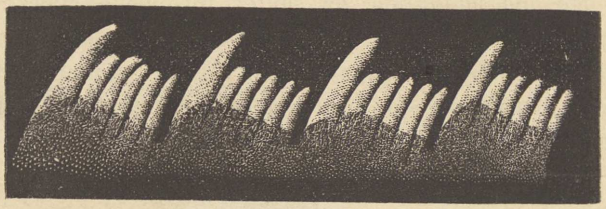

Fig. 228.

**155. Lydens Hastighed** i Luften er bleven bestemt ved at affyre en Kanon paa et fjærntliggende Sted og iagttage Tiden mellem Glimtet og Knaldet. De første nøjagtige Bestemmelser bleve foretagne i Paris for cr. 150 Aar siden. Iagttagelserne bleve gjorte samtidig paa flere forskellige Steder, og Forsøgene fortsattes i længere Tid for at finde Vejrligets Indflydelse. Man fandt, at Lydens Hastighed er uafhængig af Lufttrykket men vokser med Temperaturen; en Udregning af Forsøgsresultaterne gav

Hastigheden $332^{m}$

ved $0^{0}$ i tør og rolig Luft, altsaa det samme Tal, som Regnault fandt; ved højere Temperaturer var Hastigheden omtrent $0{,}6^{m}$ større for hver Grad Celsius. Naar det blæser, faar Lyden en forskellig Hastighed i de forskellige Retninger, idet Vinden fører det hele System af Lydbølger uforandret med sig. Naar $AC$ betegner Blæstens Hastighed og $CB$ Lydens, da vil en Lydbølge, som udgaar fra $A$, efter 1 Sek. naa ud til Kuglefladen $BB$, idet Centrum er blæst hen til $C$ og hele Bølgen er fulgt med. Altsaa bliver $AB$ den resulterende Hastighed i de forskellige Retninger.

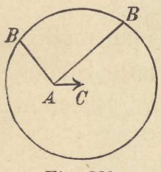


Fig. 229.

Lydens Hastighed i Vand er bestemt i Begyndelsen af Aarhundredet ved Forsøg paa Genfersøen, der blev valgt paa Grund af Vandets Renhed og den store Afstand til Bunden. Lyden frembragtes ved at slaa paa en Klokke, der

var nedsænket under Vandet, samtidig med at noget Krudt antændtes, og i en bestemt Afstand derfra iagttog man Lydens Ankomst ved Hjælp af en Høretragt, der var lukket med en Hinde og gik ned i Vandet. Man fandt Hastigheden 1435$^{m}$ i Sekundet (ved 8° C).

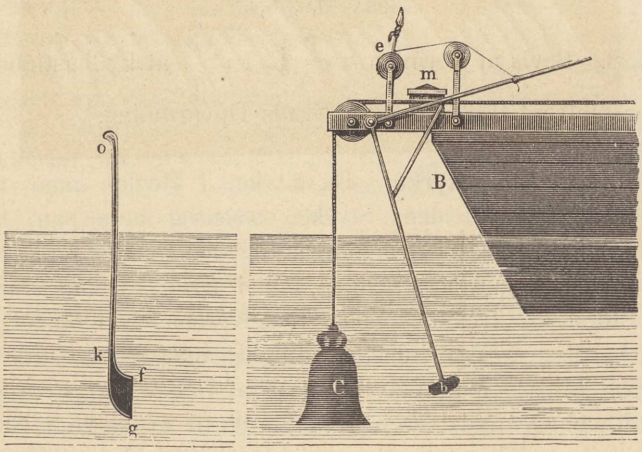


Fig. 230.

Lydens Hastighed i Støbejærn er bleven bestemt ved Forsøg med en lang Rørledning ved at slaa paa en Klokke, der var fastgjort i den ene Ende, og ved den anden Ende iagttage, hvor meget senere Lyden kom gennem Luften end gennem Jærnet. Man fandt deraf Hastigheden godt ti Gange saa stor som i Luft.

## Opgaver.

225. Paa et Sted $A$ affyres Kanonskud, og Tiden mellem Glimtet og Knaldet iagttages paa 3 andre bekendte Steder. Hvorledes konstrueres Lydens Hastighed, samt Blæstens Hastighed og Retning? (Smlgn Fig. 229).

226. Bevis af Formlen $h = \sqrt{1{,}4\,\frac{p}{m}}$, at Lydhastigheden i forskellige Luftarter er omvendt proportional med Kvadratroden af Normalvægtfylden, og find derved Hastigheden i Kulsyre og Brint i Forhold til Luft.

Res. 0,8; 3,8.

227. Ved Forsøg over Støvfigurer i Rør (§ 153) fik Opfinderen (Kundt) med en og samme Rørlængde 32 Støvfigurer i Luft, 40 i Kulsyre og 9 i Brint. Find heraf de to sidste Luftarters Lydhastighed i Forhold til den i atmosfærisk Luft.

Res. 0,8; 3,6.

228. Bevis af Formlen $h = \sqrt{1{,}4\,\frac{p}{m}}$, at Lydhastigheden vokser omtrent $0{,}6^{m}$ for hver Grads Opvarmning.

**156. Lydens Styrke.** Da Lyden i Reglen naar Øret gennem Luften, vil dens Styrke væsentlig bero paa, hvor stærkt Luften er sat i Svingninger, og den maales rent fysisk ved den Energi, som trænger ind i Øret. Denne Energi beror først og fremmest paa Lydgiverens Svingninger; jo stærkere disse foregaa, desto kraftigere maa ogsaa Luftsvingningerne blive. Men det er ogsaa af Betydning, hvor stor en Luftmængde Lydgiveren er i Stand til at sætte i Svingninger; en Violinstreng alene giver saaledes kun en meget svag Tone, men anbragt paa Violinen sætter den denne i Medsvingninger, hvorved en langt større Luftmængde bliver paavirket. Naar Energien er gaaet over paa Luften, vil den spredes i alle Retninger, og idet den gaar ud til større og større Flader, vil den paa hvert Sted aftage i Forhold til disse Flader, d. v. s. aftage med Afstandens Kvadrat. Hvis man kan forhindre Lydens Udbredelse til alle Sider, vil man ogsaa bevare dens Styrke. Paa denne Maade virke Talerør; ligeledes Raaberen, der sender Lyden ud i en bestemt Retning.

Lydens Styrke beror fremdeles paa Beskaffenheden af den Luft, som omgiver Lydgiveren og først bliver sat i Bevægelse af den. Jo tyndere denne Luft er, desto svagere bliver Lyden. Naar man lader en Spilledaase musicere i et brintfyldt Rum, vil Lyden næsten ikke kunne høres. Noget lignende gælder i den tynde Luft paa høje Bjærge, hvor f. Eks. et Pistolskud lyder en Del svagere end nede i Dalen.

Kulden synes at befordre Lydens Rækkevidde; saaledes har man i Polaregnene kunnet føre en Samtale med almindelig

Talestyrke i en Afstand af to Kilometer. Aarsagen hertil er maaske ogsaa den dybe Ro, der hersker i disse Egne. Om Natten forekommer Lyden ogsaa stærkere, maaske af samme Grund, eller fordi Øret skærpes, naar man ikke kan bruge Synet.

Blæsten vil altid svække Lyden, selv om den blæser med, idet den frembringer saa mange forstyrrende Smaalyd. En ejendommelig Virkning af Blæsten, som man først fornylig har opdaget, beror paa, at Lydbølger, som gaa frem imod Vinden, navnlig blive standsede i de øvre Lag, hvor Blæsten er stærkest, saa at Bølgeplanerne blive bøjede noget tilbage. Da nu Lyden altid gaar frem paa tværs af Bølgeplanerne, vil den hæve sig fra Jorden. Paa denne Maade ville Taagesignaler kunne gaa hen over Skibene uden at blive hørte, hvilket kan give Anledning til store Ulykker; man maa derfor anbringe Taagehornet saa højt oppe som muligt for at sende Lydbølgerne ned mod Skibene, ligesom man ogsaa bør anbringe en Mand oppe i Skibets Mast for at høre.

**157. Lydens Tilbagekastning og Bøjning.** Staar man i nogen Afstand fra en Fjeldvæg, Skovrand eller lignende og raaber, faar man Ekkoet tilbage, som om Ens Spejlbillede samtidig havde raabt. Dersom Spejlfladen er uregelmæssig, bliver Billedet forvredet, saa Ekkoet bliver uklart. En saadan uregelmæssig Tilbagekastning fra Skyerne er medvirkende til at frembringe Tordenens Rullen. Af Ekkoets Forsinkelse kan man udregne Spejlfladens Afstand; man har saaledes foreslaaet at udmaale Havets Dybde ved Ekkoet fra Bunden. At Lyden og Lyset tilbagekastes efter samme Lov, kan man vise ved at hænge et Lommeur op foran et stort Spejl og lede de tilbagekastede Lydstraaler gennem en Tragt ind i Øret. Naar man da holder Tragten saaledes, at Lyden bliver stærkest, vil man altid kunne faa Urets Spejlbillede at se, naar man bagefter ser lige ind gennem Tragten. Tilbagekastningen fra Hulspejle kan man vise ved at ophænge et Ur i Brændpunktet, det vil sige midt mellem Spejlet og Centrum; Lyden vil da tilbagekastes som en Lydcylinder ligesom Lyset, og da den ikke spredes til alle Sider, vil den længere bevare sin Styrke. Ved et andet Hulspejl kan man igen samle Bølgerne i eet Punkt, nemlig Brændpunktet for dette Spejl, hvor man da tydeligt vil kunne høre Urets Dikken. Om Spejlene ere stillede rigtigt, kan man først prøve med et

Lys. Dersom man vender Hulspejlene mod en Dør, kan man ved at dreje denne hen i en passende Stilling kaste Lyden fra det ene Spejl hen paa det andet og derved vise den plane Tilbagekastning.

Paa Lydens Tilbagekastning beror Resonansen i store Rum. I Panteons Kældergange i Paris lyder et Slag paa en Tromme som en hel Kanontorden. Tilbagekastningen kan undertiden foregaa saa regelmæssig, at man det ene Sted i Lokalet kan høre, naar man hvisker paa et andet bestemt Sted. Naar de to Punkter ere Brændpunkter i en elliptisk Hvælving eller Sidevæg, er Fænomenet let at forklare (se Opg. 223), men det er sjældent saa simpelt. Gardiner og bløde Tæpper dæmpe Resonansen og maa derfor helst undværes i Musikværelser, hvor det gælder om at forstærke Lyden saa meget som muligt.

Det er vanskeligt at sige, hvorledes man helst skal indrette Bygninger i akustisk Henseende. Man har foreslaaet at give Bagvæggen i Foredragssale en parabolsk Form og anbringe Katedret i Brændpunktet, idet Lydbølgerne da efter Tilbagekastningen gaa lige ind i Salen, saaledes at alle komme til at høre lige godt. (Smlgn Opg. 224). I Teatre angiver man, at den varme Luftstrøm, som opstiger fra Lamperækken foran Scenen, virker som et blødt Tæppe, der tilbageholder en Del af Lyden, og man kan bekræfte det ved et Forsøg; stiller man nemlig et Lommeur i en saadan Afstand, at man endnu netop kan høre det, saa ophører Lyden, naar man stiller en Blikrende med brændende Spiritus op foran. Det er rimeligt, at lignende varme Luftstrømme ude i det fri undertiden kunne formindske Lydens Udbredelse, og man har herved villet forklare, at Lyden kan høres længere bort om Natten end om Dagen.

Dersom en mindre Genstand standser Lyden paa sin Vej, ville Bølgerne gaa uden om den, men dersom den er større, vil den kaste en »Skygge«, hvor der bliver mer eller mindre lydløst. Man kan næmt vise det ved at holde et Lommeur i nogen Afstand og skyde en Bog ind mellem det og Øret. Lyden vil da forsvinde i det Øjeblik, Bogen overskærer Forbindelseslinjen. Ved Rhinfaldet ved Schaffhaussen

skal der være aldeles lydløst indenfor den faldende Vandmasse.

### Opgave.

229. Naar man kan udtale 5 Stavelser i 1 Sekund, hvor langt Ekko kan man da faa fra en Væg, der er 200$^{m}$ borte?
Res. 6 Stavelser.

**158. Toner og Toners Højde.** Den simple, regelmæssige Lyd, som dannes af en Stemmegaffel, Violinstreng o. lign., kaldes en Tone, og det karakteristiske ved den er, at den skyldes regelmæssige, ligetidige Svingninger. Dersom en Lyd bestaar af flere Toner, kaldes den en Klang, f. Eks. en Treklang. Naar man slaar en enkelt Tast an paa Klaveret, kan et godt Øre høre flere Toner; Klavertonen er altsaa egentlig en Klang, og det samme gælder næsten alle andre Toner. Hvis en Lyd er saa sammensat, at man vanskeligt kan høre nogen bestemt Tone eller Klang deri, eller den er saa uregelmæssig, at man ikke kan fastholde nogen bestemt Tone, kalder man den en Støj; dog beror det ofte paa et Skøn, om man vil kalde en Lyd for en Støj eller en meget sammensat Klang, f. Eks. den Lyd, man faar, naar en Mængde Klavertoner samtidig anslaas.

At Tonens Højde beror paa Svingningernes Antal, kan man vise ved at dreje et Tandhjul rundt og holde et Stykke stift Papir hen til Tænderne, saa det faar en Række smaa Stød; man hører da en Tone, hvis Højde stiger med Omdrejningshastigheden; men naar denne er konstant, er Tonhøjden det ogsaa. Man angiver derfor i Fysiken en Tones Højde ved dens Svingningstal.

Medens de dybeste Toner have det mindste Svingningstal, have de omvendt den største Bølgebredde, idet denne bestemmes ved Formlen

$$b = \frac{h}{n},$$

hvor $n$ angiver Tonens Højde, og $h$ er Lydhastigheden i Luften, som er ens for alle Toner, nemlig 332$^{m}$ ved 0$^{0}$ C.

Et Apparat, der særlig egner sig til at frembringe Toner

af en hvilken som helst Højde og maale Svingningstallet, er Sirenen. Den bestaar i Almindelighed af en rund Metaldaase, i hvis Laag der er boret en Kreds af lige store Huller med samme indbyrdes Afstand. Lige over Laaget findes en Skive med tilsvarende Huller, og denne Skive kan paa forskellig Maade sættes i konstant Omdrejning om sin Akse. Ved et Rør, der udmunder i Bunden af Daasen, kan man blæse Luft ind i denne, og naar Hullerne i Laaget og Skiven staa ud for hinanden, kan Luften slippe videre igennem, ellers ikke. Under Skivens Omdrejning vil Luften saaledes slippe igennem i en bestemt Takt, hvorved man faar en Tone. Paa Sirenen findes et Tælleapparat, der kan sættes i Forbindelse med

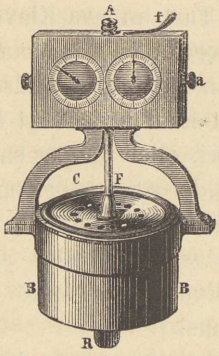


Fig. 231.

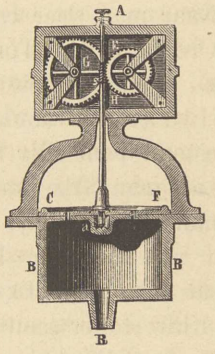


Fig. 232.

Skivens Akse og viser Omdrejningerne. Ved nøjagtige Bestemmelser sætter man Skivens Akse ved et Snorløb i Forbindelse med en anden Akse, der holdes i konstant Omdrejning ved et Urværk eller paa anden Maade. Ellers lader man i Reglen Luftstrømmen selv frembringe Skivens Omdrejning, idet Hullerne ere borede skraat (hen imod Tangenten),



Fig. 233.

men med modsat Hældning i Laaget og Skiven, saaledes som hosstaaende Fig. viser Hastigheden vil da tiltage med Lufttrykket fra Blæsebælgen, som derfor maa afpasses rigtigt.

Skal man nu bestemme Svingningstallet f. Eks. for en Stemmegaffel, da kan man afpasse Sirenens Hastighed saaledes, at den giver samme Tone, og indskyde Tælleværket

til Virksomhed i en vis Tid, medens Omdrejningen holdes konstant. Har Sirenen $p$ Huller og gør $m$ Omdrejninger i Minuttet, faar man $\frac{p\,m}{60}$.

Sirener anvendes til at give Taagesignaler.

En meget simpel Sirene kan man lave sig selv af en gennemhullet Skive, der kan anbringes paa et Rotationsapparat, f. Eks. paa en Centrifugalmaskine, hvor den drejes rundt, medens man blæser Luft gennem et Rør ned mod Hullerne i Skiven.

Naar man hører et Jærnbanetog pibe i det samme, det farer forbi, vil man kunne iagttage, at den høje Tone, man hører, mens Toget nærmer sig, pludselig bliver dybere, idet Toget passerer forbi og igen fjerner sig fra Iagttageren Aarsagen hertil er Bevægelsen. Ligesom man møder flere Sporvogne, naar man gaar dem i Møde, end naar man indhentes af dem, saaledes vil man ogsaa møde flere Lydbølger, naar man gaar dem i Møde, altsaa selv nærmer sig, og det samme vil finde Sted, naar det er Lydgiveren, der nærmer sig Iagttageren. Omvendt vil man blive indhentet af færre Lydbølger i samme Tid, naar man fjerner sig fra Lydgiveren, eller denne fjerner sig fra Øret. (Dopplers Princip.)

**159.** Det er ikke alle ligetidige Svingninger, som frembringe en Tone, f. Eks. ikke Pendulets. Øret kan nemlig kun opfatte Svingningerne som en Lyd, naar Svingningstallet ligger inden for visse Grændser, omtrent mellem 30 og 30000 (svarende til Bølgebredder paa cr. $10^{m}$ og $1^{cm}$), og allerede inden disse Grændser naas, mister Øret sin Evne til at adskille de forskellige Toners Højde. Grændserne veksle meget med Individerne; saaledes er der Mennesker, som ikke kunne høre Insekternes høje Toner, ligesom det ogsaa er almindeligt, at den Mand, der stemmer et Klaver godt i Bassen, vanskelig kan høre Forskel paa de højeste Diskanttoner, og omvendt.

Toner anvendes i Musikken kun i bestemte Forhold eller Intervaller, hvad enten de bruges samtidig eller efter hinanden; og jo simplere disse Talforhold ere, desto bedre harmonere Tonerne. En Tone, som er dobbelt saa høj som

en anden, kaldes dens Oktav, og den lyder som en højere Gentagelse af den første Tone. De benævnes ogsaa i Musikken med samme Bogstav; saaledes betegner man med *C* en Række Toner, hvis Svingningstal ofte sættestil Potenser af 2, nemlig 32, 64 o. s. v. Den Tone, som er $^3/_2$ Gange en anden, kaldes dens Kvint (*C*—*G*); Intervallet »« er altsaa Oktavens Kvint.

En Række Toner, som benyttes i Musikken, kales en Skala. *C*-Dur-Skalaen svarer til Rækken af hvide Taster paa Klaveret. Det følgende Skema indeholder Tonerne i den rene *C*-Dur-kala og viser Forholdet mellem deres Højder og Højden af Tonen *C*, amt Forholdet mellem to Nabotoners Højder.

| Tonens Navn | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *A* | *H* | *c* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Forhold til *C* | Prim | Sekund | Terts | Kvart | Kvint | Sekst | Septim | Oktav |
| | 1 | $^9/_8$ | $^5/_4$ | $^4/_3$ | $^3/_2$ | $^5/_3$ | $^{15}/_8$ | 2 |
| Forh. indbyrdes | $^9/_8$ | $^{10}/_9$ | $^{16}/_{15}$ | $^9/_8$ | $^{10}/_9$ | $^9/_8$ | $^{16}/_{15}$ | |

Intervallerne $^9/_8$ og $^{10}/_9$ kaldes hele Toner; $^{16}/_{15}$ kaldes en halv Tone.

Ved at multiplicere *C*, *D* o. s. v. med $^{25}/_{24}$ (en lille halv Tone) faas Cis, Dis o. s. v., og ved Division med samme Brøk faas Des, Des og de følgende.

Paa Klaveret er der indskudt en sort Tast mellem to hvide overalt, hvor de ligge en hel Tone fra hinanden. Der fremkommer saaledes i en Oktav 12 Mellemrum (halve Toner), som gøres lige store og alle lig $\sqrt[12]{2}$. (Tempereret Stemning).

**160. Interferensfænomener.** Ved en Tones Tilbagekastning fra en fast Væg dannes der staaende Svingninger, som omtalt ved Luftbølgerne. Naar Tonen dannes af en nogenlunde dyb Orgelpibe eller Stemmegaffel, som er anbragt i den ene Ende af et stort Værelse eller en lang Gang, kan man ved den anden Ende høre sig til Beliggenheden af Knuderne og Svingningsstederne ved at stille sig i forskellig Afstand fra Væggen. Tonen lyder nemlig stærkest i Knudepunkterne;

men paa Svingningsstederne, hvor Luften svinger forbi Ørerne uden Forandringer i Lufttryk, høres Tonen kun svagt.

I Værelser, hvor Lydens fri Udbredelse forhindres, vil en Tone sætte Luften i staaende Bølgegang paa en temmelig indviklet Maade. Naar Tonen er dyb, saa at Bølgebredden er stor, kan man derfor ofte høre kendelig Forskel paa dens Styrke, naar man flytter sig fra et Sted i Værelset hen til et andet.

Man kan frembringe staaende Bølger i Rør, naar man afpasser Længden efter Tonens Højde. Holder man f. Eks. en svingende Stemmegaffel eller anden Tonegiver over et Cylinderglas og hælder Vand deri, vil Tonen forstærkes, naar Luftsøjlens Længde er et ulige Antal kvart Bølgebredder thi saa kan hele Luftmassen svinge i Takt med Stemmegaflen, hvorved den Energi, som findes i denne, hurtigt gaar over paa Luften. Finder man den mindste Rørlængde, som forstærker Tonen, da er Bølgebredden 4 Gange saa stor.

En Tone kan ogsaa forstærkes ved et i bægge Ender aabent Rør, men saa maa dets Længde være et lige Antal kvart Bølgebredder, saa der kan komme Svingninger ved Enderne.

Aabne og lukkede Rør, som paa denne Maade bruges til at forstærke en Tone, kaldes Resonansrør. Da de forstærke Tonen, selv om Længden ikke passer fuldstændig, give de ingen nøjagtig Bestemmelse af Bølgebredden. Et bedre Resultat opnaar man med følgende Apparat, der bestaar af et cylindrisk Glasrør med et tæt sluttende Stempel

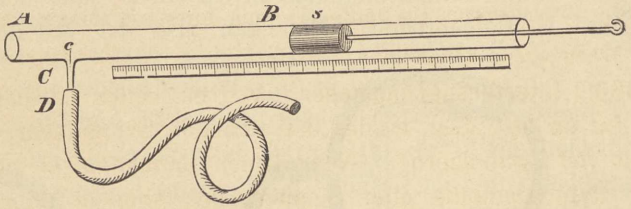


Fig. 234.

og et lille Siderør ved den ene Ende, hvorfra en Gummislange fører hen til det ene Øre, medens det andet lukkes tæt til med en Lakprop. Naar man da stiller Stemplet ved

Sideröret $c$ og trækker det saa langt tilbage, at Stemmegaflen, som toner foran Rørets Munding, slet ikke kan høres, da maa der ved $c$ være et Svingningspunkt uden Spor af Pulseren. Bølgebredden er da 4 Gange Afstanden til Proppen.

Resonansrør af forskellig Form anvendes i mange Musikinstrumenter, hvor man benytter sig af deres Evne til at kunne forstærke Toner (se Orgelpiber § 163); den samme Egenskab gør dem ogsaa særlig brugbare, naar man vil undersøge, hvor vidt en bestemt Tone findes i en Lydblanding.

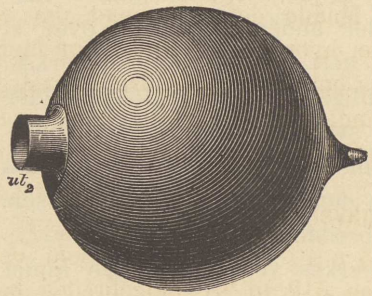


Fig. 235.

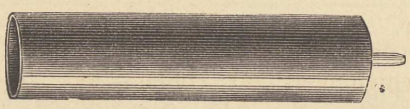


Fig. 236.

Helmholtz's Resonator har Form af en Kugle med en større Aabning til Indgang for Lyden og en mindre Tud til at stikke i Øret; en saadan Resonator forstærker væsentlig kun en eneste Tone, svarende til Kuglens og Aabningens Diametre. Nærmere kan man selv lave sig en Resonator af et Paprør, paa hvis ene, lukkede Ende man anbringer et kort Hørerør; men denne Resonator kan forstærke flere Toner.

Et af de mærkeligste Interferensfænomener bestaar i, at to Toner kunne bringe hinanden til Tavshed, naar den ene forsinkes $^1/_2$ Bølgebredde. Man kan vise det ved at lede

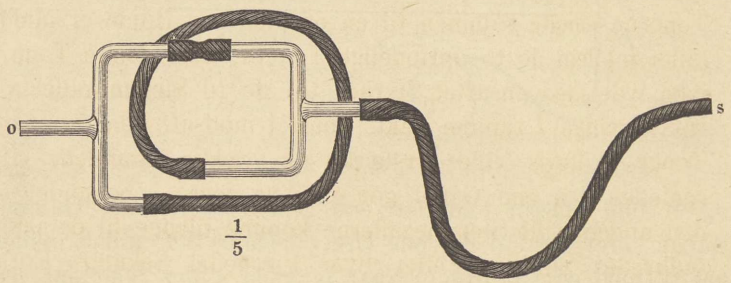


Fig. 237.

Tonen fra en Stemmegaffel ind i et Rør, som deler sig i to Grene, der atter forenes i en; stikker man nu denne Ende i Øret, vil Tonen blive meget svag, naar Forskellen mellem Grenenes Længde er et ulige Antal halve Bølgebredder. Standser man derimod Lyden i den ene Gren, bliver Tonen straks stærkere.

Et lignende Interferensfænomen finder Sted i Rummet omkring en svingende Plade eller Klokke; thi naar der et Sted er Fortynding paa den ene Side, er der Fortætning paa den anden, og disse modsatte Lufttryk ophæve hinanden i Grændsefladen. Paa samme Maade deles Rummet om en tonende Stemmegaffel i 4 Dele, hvoraf hvert andet har modsat Svingningstilstand, medens enhver af Grændsefladerne er tavs. Drejer man Gaflen rundt uden for Øret, hører man tydeligt, hvorledes Tonens Kraft forandrer sig med Stillingen.

### Opgaver.

230. I et snevert Rør (3 á $4^{mm}$ i Diameter) som det, Fig. 234 viser, svarede Tonen 512 til $^1/_4$ Bølgebredde paa $158^{mm}$. Find Lydens Hastighed.

Res. $323^1/_2{}^m$. (Hastigheden er mindre i snevre Rør end i fri Luft).

231. En Staalstang paa $1^m$, som blev fastholdt paa Midten og sat i Længdesvingninger, gav Tonen 2500. Find Stangens Lydhastighed. (Smlgn Opg. 349).

Res. $5000^m$.

**161. Stød.** Vi skulle nu omtale et andet meget vigtigt Interferensfænomen. Lad os tage to næsten ens Stemmegafler og stryge dem med en Violinbue; vi ville da høre Tonerne smelte sammen til en eneste, hvis Højde er Middeltallet mellem de to oprindelige Toners; men denne Tone vil ikke lyde med ensartet Styrke, thi de to Stemmegafler ville snart svinge i samme Takt, snart i modsat, saa de enkelte Toner skiftevis ville forstærke og svække hinanden. Hvis saaledes den ene Gaffel gør 4 Sving mere i Sekundet end den anden, ville Stemmegaflerne komme tilbage til de samme indbyrdes Stillinger efter hver Fjerdedel Sekunds Forløb.

Middeltonen maa derfor blusse 4 Gange op i Sekundet eller give 4 »Stød«, som det kaldes. Denne Vekslen kan man gøre synlig ved at lade den ene Stemmegaffel tegne sine Svingninger paa en sodet Plade, der er fæstet paa en Gren af den anden svingende Gaffel, som Figuren viser.

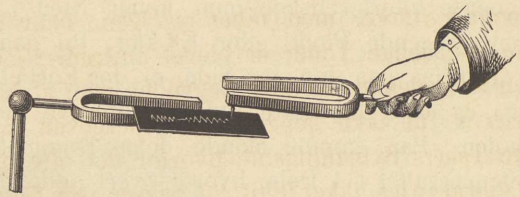

Fig. 238.

Stødene spille en meget stor Rolle ved nøjagtige Maalinger af Toners Højde. Skal man saaledes bestemme Svingningstallet for en Stemmegaffel ved Hjælp af en Sirene, kan man ved Stødenes Hjælp stemme de to Instrumenter fuldstændig ens, eller angive bestemt en mindre Forskel mellem dem ved at tælle Stødene.

Man har konstrueret Tonemaalere, som bestaa af en Række Stemmegafler, den ene 4 Svingninger højere end den anden; skal man ved dette Apparat bestemme en Tones Højde, og finder man, at den ligger mellem Gaffel 304 og 308, idet den giver 1 Stød med den første og 3 med den anden, saa maa Tonens Højde være 305.

Ved Stemmegafler kan man let ændre Tonhøjden ved forskydelige Vægte. Lad os saaledes tage to Stemmegafler, der bægge give samme dybe Tone paa 64 Svingninger i Sekundet, og derpaa forhøje den ene mere og mere. Vi ville da høre flere og flere Stød, tydelig adskilte fra hinanden, indtil der omtrent er 12 i Sekundet, hvorefter de gaa over til en Rullen, der kan høres, indtil Forholdet mellem Tonerne er blevet noget over $^3/_2$. Ved større Forskelle mellem de oprindelige Toner fremkommer der ifølge Königs Iagttagelser igen Stød, men efter en mere sammensat Regel. Benytter man to højere Stemmegafler, f. Eks. paa 256 Svingninger eller mere, og forandrer den ene, vil man ligeledes i Begyndelsen

høre Stødene adskilte og senere som en Rullen. Men naar man derpaa yderligere forøger Forskellen mellem Gaflerne, ville Stødene komme saa hurtigt efter hinanden, at de frembringe en Tone. Denne Tone, som König kalder Stødtone (Kombinationstone), er i Begyndelsen meget svag og kan først høres, naar Stødtallet er blevet cr. 64. Forøges Stødtallet, vokser Tonen i Styrke, men taber sig igen, naar Forholdet mellem de oprindelige Toner er blevet omtrent $^3/_2$ eller derover. Hen imod denne Grændse begynder man at høre en ny Stødtone, hvis Tal ikke længere er Differensen mellem de oprindelige Toners Svingningstal, hvorfor det ofte brugte Udtryk Differenstone ikke fuldt ud passer paa Stødtonerne.

Stødenes Rullen er ved en vis Hurtighed meget ubehagelig for Øret, hvorfor to nærliggende Toner altid lyde disharmonerende. Stødtonen har været kendt længe, da den ofte er meget tydelig, f. Eks. ved Orgler.

Man kan frembringe Stød med een Tone alene f. Eks. ved at fløjte en høj Tone mod Fladen af en Bog, medens man hurtigt nærmer den til sig. Man kan da opfatte det, som om Ens Spejlbillede ogsaa fløjter, samtidigt med at det kommer nærmere med den dobbelte Hastighed. Den vekslende Interferens mellem den faste og den bevægelige Tone frembringer da Stød, som tydeligt kunne høres.

Endnu tydeligere gøres Forsøget med en meget høj og kraftigt tonende Stemmegaffel, af dem König fremstiller, som bevæges frem eller tilbage mod en Væg. Gør man Bevægelsen hurtigere og hurtigere, vil Stødtallet vokse, indtil det til sidst bliver saa stort, at Stødene høres som en dyb Tone, Stødtonen.

**162. Klangfarve.** Medens Tonernes Højde og Styrke beror paa Svingningernes Antal og Størrelse, saa er det Luftsvingningernes forskellige Form eller den Lov, hvorefter Molekylerne svinge, der bestemmer den forskellige Klang eller Klangfarve, hvorved Klaver, Violin, Horn o. s. v. adskille sig fra hinanden. Dette viser sig navnlig tydeligt, naar Luftsvingningerne optegnes ved Fonavtografen, idet forskellige Klange ville give Bølgelinjer af forskellig Form, skarpkantede,

afrundede o. s. v., medens Bugternes Længde kun beror paa Tonhøjden.

Ved Strengeinstrumenter forklares de forskellige Svingningsformer derved, at Strengen, samtidig med at den svinger som et Hele, tillige deler sig i svingende Dele med større Svingningstal f. Eks. i 2, 3, 4 ... Stykker; ja den vil endog paa samme Tid dele sig paa flere af disse Maader. Herved blive Svingningerne meget sammensatte, og det samme vil gælde Tonen, hvad et musikalsk Øre kan overbevise sig om, naar en Klavertone anslaas; foruden den dybere Tone, Grundtonen, som i Reglen er den fremherskende, høres nemlig tillige en Række højere Overtoner, hvis Svingningstal kunne bevises at være Multipla af Grundtonens. Hvad der her er sagt om Strenge, gælder om alle andre Musikinstrumenter; Tonen er sammensat og danner altsaa en Klang.

De Overtoner, som ledsage en Grundtone, kunne med Lethed høres ved Hjælp af Resonatorer, der have den Egenskab at indsuge og forstærke hver sin Tone, naar den findes i den Lydblanding, som gennemkrydser Luften. Ved Hjælp af en Række Resonatorer kan man let bestemme, hvilke Overtoner en Klang indeholder, og det viser sig derved, at enhver tydelig Forskel i Klangfarve hænger sammen med en Forskel i Overtonernes Antal og Styrke.

Lukkede vide Orgelpiber og Stemmegafler, der svinge foran en Resonator, give Toner med faa eller ingen Overtoner, hvorfor disse Toner synes dybere end de virkelig ere, og have en »tom« Klang. Ligeledes frembringes temmelig usammensatte Toner, naar man puster hen over en Flaske, bedst gennem et Rør med en flad Munding, som Fig. 239 viser. I Klavertoner findes navnlig de første Overtoner, hvis Svingningstal ere 2, 3, 4 Gange Grundtonens, i stor Styrke, mens de næsten mangle fuldstændig omtrent fra No. 6. Violintoner indeholde derimod et langt større Antal høje Overtoner, dog med aftagende Styrke. De Toner, som fremkomme ved svingende Plader, Stænger eller Hinder indeholde i Reglen Overtoner, som disharmonere med Grundtonen, idet Svingningstallene ikke staa i simpelt Forhold til hinanden.

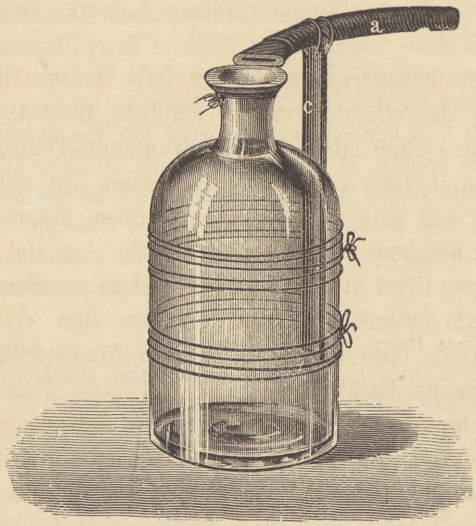


Fig. 239.

Instrumenter af denne Art, saasom Triangler, Metalbækkener, Klokker, Trommer o. lign. spille derfor en underordnet Rolle i Musikken. Medens gode Stemmegafler ved Strygning med Violinbue give usammensatte Toner, faar man ved Slag tillige meget høje uharmoniske Overtoner, som selv et umusikalsk Øre let kan høre. Af særlig Betydning er det, at man kan give Klokker saadanne Former, at Overtonerne blive harmoniske.

Stryger man en god Stemmegaffel, saa den giver en usammensat Tone, og lader den optegne sine Svingninger paa en sodet Plade, faar man en meget regelmæssig Bølgelinje, af hvis Form man kan udlede, at Svingningerne foregaa efter samme Lov som Pendulets. Ved Undersøgelser af denne Art er man kommen til det Resultat, at Øret opfatter alle pendulagtige og tilstrækkelig hurtige Svingninger som usammensatte Toner, medens alle andre Svingninger kunne sønderdeles af Øret, med eller uden Resonatorens Hjælp, i en Række simple usammensatte Toner. I Overensstemmelse hermed lader det sig ogsaa matematisk bevise, at en hvilken som helst Art af Svingninger kan opløses i en Række pendulagtige, og tilmed kun paa een Maade.

Et Apparat, der særlig er i Stand til at frembringe Toner af en bestemt Klangfarve, er Königs Bølgesirene. Den bestaar i sin simpleste Skikkelse af en Skive, hvis Rand er udklippet i Tunger, og

som sættes i Rotation om sin Akse, medens man blæser Luft gennem en smal Spalte, der er anbragt ved Siden af Skiven lige ude ved Periferien. Idet den udtungede Rand passerer forbi Spalten, vil den aabne mere eller mindre for den, saa Luften strømmer igennem i større eller mindre Mængde i en bestemt Takt, hvorved der fremkommer en Tone. Det viser sig nu tydeligt, at denne Tones Klang afhænger af Bølgelinjens Form; en bestemt simpel Bølgelinje giver en aldeles usammensat Tone, hvor man ikke med Resonator kan høre nogen Overtone. Hvis Bølgelinjen derimod konstrueres ved at sammensætte to simple Bølgelinjer, vil den fremkomne Tone vise sig sammensat af de to tilsvarende Enkelttoner og have en dertil svarende Klang.

Königs store Bølgesirene indeholder paa en og samme Akse et større Antal Skiver, hvis Rande ere udtungede som simple usammensatte Bølgelinjer. Antallet af Bølger paa disse Skiver forholde sig som Tallene i Talrækken 1, 2, ... 16, svarende til en Grundtone med indtil 15 Overtoner. Idet hver Skive er forsynet med et Blæserør, hvortil man ved et Klaviatur kan give Luften Adgang i større eller mindre Mængde, er man paa denne Maade i Stand til at frembringe en hvilken som helst Klang, hvis Sammensætning er bekendt. Det er endog lykkedes König at gengive Klangen af enkelte Vokaler.

### Opgaver.

232. Konstruer den Kurve, som kan tegnes paa en roterende Tromle af en Stemmegaffel med pendulagtige Svingninger. (Kurven kan ogsaa betragtes som en grafisk Fremstilling af pendulagtige Svingninger, hvor Tiden er Abscisse og Udsvingene til bægge Sider Ordinater).



Fig. 240

233. Hosstaaende Figur tegnes af en Stift, fæstet midt paa en Violinstreng, der stryges tæt ved den ene Ende. Bortset fra de fine Krusninger bestaar Figuren af rette Linjer. Hvorledes foregaa Midtpunktets Svingninger?

Res. Frem og tilbage med jævn Hastighed, der skifter pludselig i Yderstillingerne.

**163. Musikalske Instrumenter.** 1) Strengeinstrumenter (Klaver, Violin o. s. v). Vi have ved Snorbølger angivet Formlen $h = \sqrt{\frac{p}{m}}$, hvor $p$ er Snorens Spænding

og $m$ Massen i en Meterlængde. Desuden have vi $h = n\,b$ hvoraf følger

$$n = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{p}{m}}.$$

Men ved staaende Bølger, som f. Eks. i Violinstrenge, er hver Bugt $l$ lig med en halv Bølgebredde, hvorved Formlen bliver

$$n = \frac{1}{2\,l}\sqrt{\frac{p}{m}}.$$

Bugten $l$ udgør i Alm. hele Strengens Længde, men kan ogsaa være Halvdelen, Tredjedelen o. s. v., hvorved Tonen bliver 2, 3 . . . Gange saa høj. Ved Strygeinstrumenter kan Tonen forhøjes ved at gøre Strengen kortere, idet Fingrene trykke den ned mod Underlaget. (Klaverstrengenes forskellige Længde). Endvidere vokser Tonhøjden med Spændingen (Klaverstemning), men aftager med $m$, det vil sige naar Strengens Tykkelse eller Vægtfylde bliver større. (Overspundne Strenge paa Klaveret; Modsætning mellem Violin og Bas).

Udsvingets Størrelse har ingen Indflydelse paa Tonhøjden, og det samme gælder om Svingningernes Form; denne bestemmer derimod Klangfarven, som det er udviklet i forrige §. I Klaveret og Violinen fremkommer den forskellige Klang ved den Maade, hvorpaa Strengene bringes til at svinge. Klaverstrenge anslaas gerne i Afstanden $^1/_7$ à $^1/_9$ fra Enden for derved at hindre Dannelsen af de uharmoniske Overtoner, som skulde have Svingningsknuder paa disse Steder. Hammerens Beskaffenhed har ogsaa Betydning; jo haardere den er, desto flere Overtoner og desto skarpere Klang faar man.

Klaveret kan benyttes til flere interessante Klangforsøg. Synger man saaledes en Vokal, lad os sige $A$, kraftigt ind i Klaveret, medens man ved et Tryk paa Pedalen holder Dæmperne borte fra Strengene, da vil hver Deltone i $A$-Lyden opsøge sin Streng og sætte den i Svingninger, saa man nu vil høre den samme Vokal udgaa fra Klaveret.

Dersom man ved et sagte Tryk paa Tangenten til en Tone f. Eks. $c$ fjerner Dæmperen uden at anslaa Strengen

og derpaa kort og kraftigt anslaar det dybere *C*, saa vil denne Tones første Overtone *c* løbe hen til Strengen *c* og sætte den i Svingninger, saa man tydeligt kan høre denne høje Tone, efter at det dybe *C* er forstummet. Hvis man gør det modsatte, nemlig anslaar et Øjeblik det høje *c*, medens den dybere Streng *C* er løs, saa vil Tonen *c* løbe hen til Strengen *C* og dele den i 2 Dele, som give Tonen *c*, saa at denne høje Tone vil fortsættes paa den dybere Streng. De samme Forsøg kunne gøres med *C* og det 3 Gange saa høje *g* o. s. v.

2) Blæseinstrumenter (Læbepiber, Tungepiber). Læbepiberne (Orgel, Fløjte) have faaet deres Navn af, at Tonen frembringes ved at blæse en Luftstrøm mod den skarpe Kant, Læben, paa et Resonansrør. Idet Luftstrømmen udgaar af en spalteformet Aabning paa Blæserøret, antager den Bladform omtrent som en Gasflamme, og ligesom denne bøjer sig for ethvert Luftpust, saaledes er ogsaa Luftstrømmen her meget let bevægelig. Ved Blæsningen forstyrres Luften i Resonansrøret og sættes straks i svage Svingninger, men derved paavirkes den bladformede Luftstrøm saaledes, at den bøjer sig ind i Resonansrøret, naar Svingningerne gaa indad, og ud i Luften, naar Bevægelsen skifter om. Derved understøttes og forstærkes Svingningerne, saa man faar en kraftig Tone.

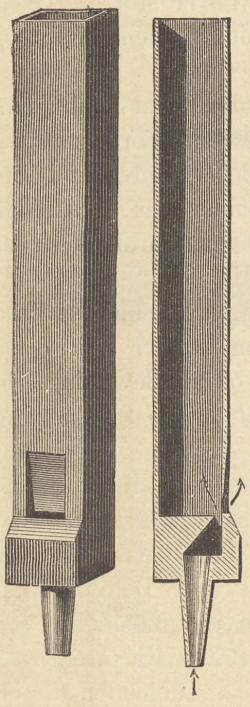

Fig 241.

Hosstaaende Figur 241 viser en Orgelpibe, set saavel fra Siden som i Gennemsnit. Nederst ses Blæserøret, øverst Resonansrøret. Dette kan foroven være lukket eller aabent (som i Figuren); forneden maa det altid betragtes som aabent, selv om Aabningen kun er lille, idet der altid her kommer de kraftigste Svingninger.

Tonens Højde afhænger væsentlig af Resonansrørets Længde, men ogsaa noget af Læbeaabningens Bredde, hvad man benytter ved Stemningen. Klangen er forskellig ved aabne og lukkede Piber (se Opg. 235), men beror som ved alle Blæseinstrumenter meget paa Rørets Materiale, idet Overtonerne lettere bevare deres Styrke i et Metalrør end i et Trærør. Træinstrumenter give derfor blødere Klang end tilsvarende af Metal.

Fløjten er en smal Læbepibe, forsynet med en Række Huller, der kunne lukkes med Klapper eller med Fingrene. Ved at aabne et af disse Huller faas omtrent den samme Tone, som man vilde faa, om Røret blev skaaret over paa det Sted.

Den kemiske Harmonika kaldes et Apparat, man selv kan sammenstille af en Brintflamme (eller Gasflamme), der brænder i et Resonansrør (Fig. 242). Den giver en Tone svarende til Rørets Længde.

Tungepiber (Orgel, Harmonium) have faaet deres Navn, fordi Tonen frembringes ved Svingninger af en elastisk Fjeder, den

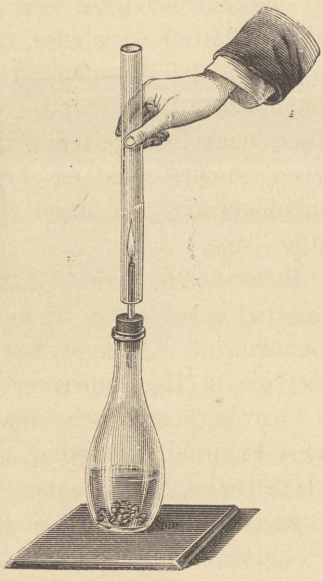

Fig. 242.

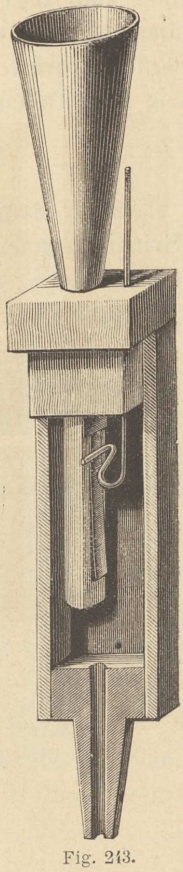

Fig. 243.

saakaldte Tunge. Fig. 243 viser en saadan Pibe, hvor Luftkassen er gennemskaaren for at vise det indvendige. Fjederen passer til et rektangulært Hul i det halvcylindriske Rum, som ses inde i Luftkassen, og som forlænges op i et kegledannet Resonansrør. Fjederen og Luftstrømmen sætte hinanden gensidig i Svingninger, som blive ligetidige paa Grund af Fjederens Elasticitet. Det er ogsaa denne, som bestemmer Tonens Højde, skønt den dog kan forandres noget af Resonansrøret. Ved en forskydelig Metalstang kan man forkorte eller forlænge den svingende Del af Fjederen og saaledes stemme Piben. Tungepiber give i Reglen flere og højere Overtoner end Læbepiberne og have derfor en skarpere Klang.

Ved Hornet frembringes Tonen af Blæserens egne Læber, som tvinges til at svinge i Takt med Hornets Luftsøjle, hvorfor de Toner, som kunne frembringes, forholde sig som Tallene i Talrækken. (Smlgn Opg. 235.)

## Opgaver.

234. Hvorledes kan man undersøge Loven for Strenges Svingninger med hosstaaende enstrengede Instrument (Monokord)?

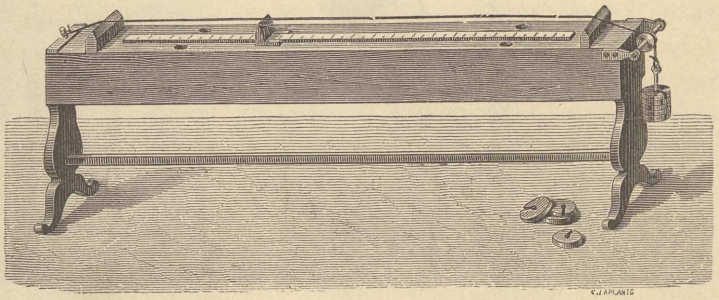

Fig. 244.

235. Ved at blæse stærkere og stærkere i en smal Læbepibe af Længden $l^m$ faas efterhaanden alle de første Toner, som Resonansrøret kan forstærke. Hvor høje ere

disse Toner? (De samme Toner bestemme tilsammen Pibens Klang).

Res. For lukkede Piber er $n = \frac{332}{4\,l}$ . $(1, 3, 5 \ldots)$.

For aabne Piber er $n = \frac{332}{2\,l}$ . $(1, 2, 3, 4 \ldots)$.

236. Find af Pendulformlen (altsaa uden den tillærte Formel $h = \sqrt{\frac{p}{m}}$) Violinstrengens Svingningstid, naar der er befæstet en tung Masse $M$ midt paa Strengen, og man ser bort fra dennes egen Vægt. (Først søges den Kraft $k$, der behøves for at trække $M$ et lille Stykke $x$ ud til Siden).

Res. $k = \frac{4\,x}{l}\,p$; $T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{M\,l}{4\,p}} = \pi\,\sqrt{\frac{M\,l}{p}}$.

Sættes $M = m\,l$, faas et lignende Udtryk som for sædvanlige Strenge, nemlig

$$T = \pi\,l\,\sqrt{\frac{m}{p}}.$$

**164. Den menneskelige Stemme** bestaar dels af Toner (særlig Vokalerne), dels af mere sammensatte Lyde (de fleste Konsonanter). Tonerne dannes i Strubehovedet (Adamsæblet hos Mænd), som er en Udvidelse af Luftrøret; dette udmunder foroven i Svælget; forneden deler det sig i to Grene, Bronchierne, som føre hver til sin Lunge. I Strubehovedet findes Stemmebaandene, der ere et Par Hudfolder, udspændte paa bægge Sider, saaledes at Luften maa passere mellem dem til og fra Lungerne. Fig. 245 viser et vandret Snit gennem Strubehovedet lige over Stemmebaandene, hvis hvide, elastiske Rande ere betegnede med *c c*. Bagtil ere Stemmebaandene befæstede hver til sit lille let bevægelige Bruskstykke, som ved det sædvanlige Aandedræt ere fjernede saa langt som muligt fra hinanden, medens de omvendt ved at klemmes fast mod hinanden fuldstændig

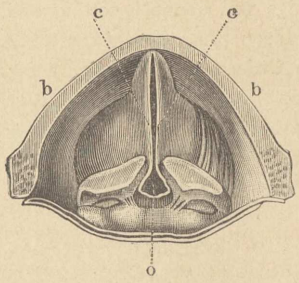

Fig. 245.

spærre for Luften, som man gør, naar man skal hoste. Vil man derimod frembringe en Tone, stilles Stemmebaandene saaledes, at der mellem dem kun dannes en fin Spalte, Stemmeridsen. Den udstrømmende Luft vil da sætte Stemmebaandene i Svingninger og give en Tone, hvis Højde afhænger af Baandenes Stramhed, som gennem Nerverne er underkastet Viljens og Sindsstemningernes Indflydelse.

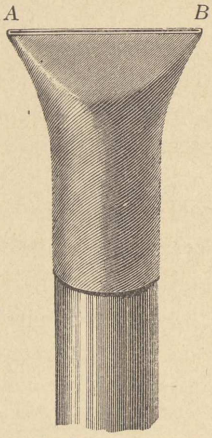

Fig. 246.

Man kan efterligne denne Tonedannelse ved et Rør med en Gummislange paa, som rager lidt udenfor Røret (Fig. 246); trækker man ved *A* og *B*, saa der dannes en Spalte derimellem, og blæser Luft igennem, faas en Tone.

Vokaltonens Klangfarve, det vil sige Forskellen paa *a*, *e*, *i* o. s. v., beror væsentlig paa den Form og Størrelse, man giver Mundhulen, idet enhver Vokal fremkommer ved en bestemt Stilling af Tunge og Læber. Tonhøjden er derimod uafhængig af Mundstillingerne baade i Sang og i Tale; i sidste Tilfælde vil den navnlig bero paa Sindsstemningerne og paa visse nationale Ejendommeligheder, idet Vokaltonerne i Talen samle sig til en Melodi, der er ejendommelig for hvert Land, men lettest at iagttage hos Udlændinge, da man er saa vant til at høre sin egen. Denne Melodi følger til Dels rent musikalske Regler; har man hørt et Musikstykke, taler man sædvanlig bagefter i samme Tonart.

Det er imidlertid ikke Melodien alene, som er ejendommelig for Sproget, men ogsaa Toneholdet, det er den forskellige Maade, hvorpaa (Vokal-) Tonerne ende. Siger man f. Eks. Ordet *Træ* med den for Dansk meget karakteristiske »Stødbetoning«, da bestaar det ejendommelige ved denne Betoning deri, at Vokalen (æ) afbrydes, ved at Stemmeridsen pludselig lukkes fuldstændig; paa samme Maade afbrydes Vokalen i Ordene *Sko*, *Skoen*, *Hus*, *Huset*, *Stol*, *Stolen*, men ikke i *Husene*, *Stolene* o. s. v. I Ordet *Du* gør man det modsatte, idet den korte Vokal afbrydes, ved at Stemmeridsen pludselig aabnes, hvorved der kommer et lille Pust, som man tydeligt kan se, naar man udtaler saadanne Ord foran et tændt Lys.

Medens Munden ved Vokalerne er forholdsvis aaben (mindst ved *I*, *Y*, *U*), er den ved Konsonanterne enten helt lukket eller næsten, saa at der ved Udaandingen dannes en Støj, *S*-Lyd, *F*-Lyd. Denne Konsonantstøj er ofte ledsaget af en Tone, saaledes næsten altid ved Næse-

lydene *M*, *N*, *Ng*, samt ved *L* og flere. Forskellen mellem *F* og *V* er væsentlig, at den første Lyd er tonløs, mens *V* har Tone; Mundstillingen er ellers fuldstændig ens. *S* udtales af os uden Tone; lader man derimod Tonen komme til, faas det saakaldte bløde *S*, som bruges meget i Tysk og Fransk. I Mundstillingerne *P* og *B* ere Læberne samlede paa samme Maade; Forskellen i Udtalen af *Ba* og *Pa* bestaar i, at Vokalen følger umiddelbart efter *B*, mens *P* altid efterfølges af et Pust, hvad man let kan føle, naar man holder Haanden foran Munden, mens man udtaler de to Stavelser.

Et Apparat, som særlig er bestemt til at synliggøre Tonerne i Stemmen, er Fonoskopet; dog viser det kun Tonernes Højde og ikke deres Klang. Figuren viser et saadant Apparat, hvor der foroven findes en lodret Tromle, der sættes i konst. Omdrejning ved en Snor fra Svinghjulet *S*. (Se § 138). Paa Tromlen findes flere vandrette Kredse (0 ... 12), hver bestaaende af en Række sorte og hvide Firkanter, som

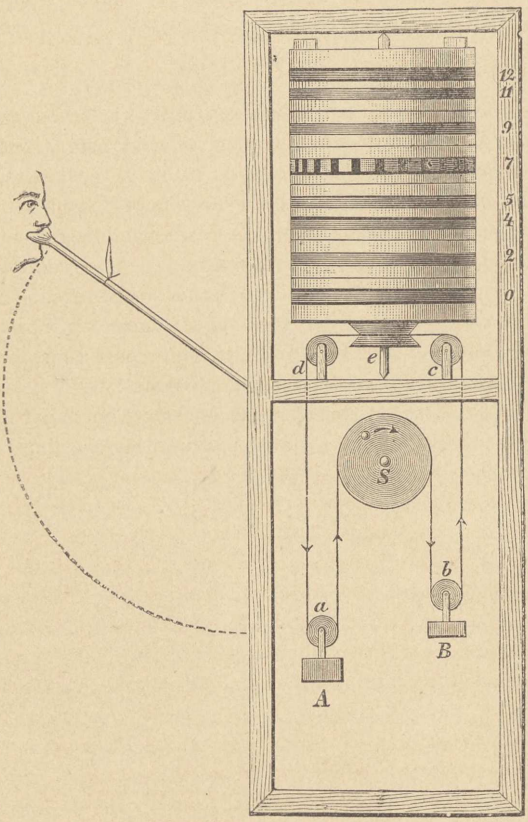


Fig. 247.

Kreds 7 viser; ved den hurtige Omdrejning vise alle Kredse sig graa. Til venstre paa Apparatet ses et Gasrør med en Flamme, som sættes i Svingninger af Lyden paa den Maade, som er vist i Fig. 227. Lad os antage, man synger en Tone paa 100 Svingninger, og at der i en af Kredsene, f. Eks. No. 7, netop gaar 100 sorte Firkanter forbi i Sekundet, da vil denne Kreds træde frem, som om den stod stille. Der skal nemlig være mørkt i Værelset, saa Tromlen kun ses, hver Gang Flammen blusser op. Dersom nu de sorte Firkanter i et saadant Øjeblik staa, som Figuren viser, da vil enhver af dem inden den næste Opblussen naa hen paa den følgende Firkants Plads. Paa disse Steder ser man altsaa hele Tiden sort, og hvidt derimellem, som om Kredsen stod stille. Antallet af Firkanter i de forskellige Kredse er valgt saaledes, at hver af Skalaens Toner viser sig paa sin Kreds. Dersom man synger en af Tonerne lidt for højt eller for dybt, vil Kredsen nok træde tydelig frem, men med en svag Hastighed til en af Siderne, saa at den mindste Urenhed i Tonen straks opdages.

**165. Øret** bestaar af Ørelappen, Øregangen, Trommehulen og det indre Øre.

Ørelappen samler Lyden, som derpaa gaar gennem Øregangen og sætter Trommehinden i Svingninger, som man har kunnet optegne ved en Stift, anbragt paa den. I Trommehulen bag ved Trommehinden findes 3 smaa Ben, Hammeren, Ambolten og Stigbøjlen, af hvilke den første har sit »Skaft« fastvokset i Trommehinden, hvis Svingninger derved direkte overføres paa den. Herfra gaa Svingningerne videre gennem Ambolten til Stigbøjlen, som med sit Fodtrin lukker for en Aabning »det ovale Vindue«, der fører ind i det indre Øre. Dette bestaar af en lille vædskefyldt Hudsæk, omgivet af en Benkapsel af samme Form (Labyrinten), som er indesluttet i Tindingebenet. Labyrinten bestaar af Forgaarden, hvor det omtalte Vindue fører ind, samt 3 halvcirkelformede Kanaler, kaldet Buegangene, og et spiralsnoet Rør, Sneglen. Her i Labyrinten forgrener Hørenerven sig og paavirkes af de Svingninger, hvori Stigbøjlen sætter Øreevædsken.

# Fysikens Historie.

(Væsentlig efter Rosenberger, Geschichte der Physik).

---

Allerede i Oldtiden beskæftigede nogle af de græske Vismænd sig med Fysik; Tales (600 Aar f. Chr.) kendte saaledes Magneternes Tiltrækning og vidste, at Rav kunde blive elektrisk ved Gnidning. Ogsaa Pytagoras (cr. 550) gav sig af med Fysik ved Siden af Matematik. Den første, som har haft nogen Betydning, er imidlertid Aristoteles, som levede cr. 350 f. Chr. Han var en Discipel af Plato og blev først Lærer for Aleksander den store, kom senere til Aten, hvor han underviste en Mængde Disciple, ogsaa i Fysik. Han var dog først og fremmest Filosof, og hele hans Behandling af Fysiken var overvejende filosofisk uden at hente noget Støttepunkt i virkelig Iagttagelse af Naturen. Derfor kommer han ogsaa til meget forkerte Resultater paa mange Punkter; han lærte f. Eks., at store Legemer falde hurtigere end smaa, eller at et Legeme, som kastes ud, fortsætter sin Fart, fordi Luften bagfra trykker det frem. Derimod kendte han Vægtstangsloven og lærte, at Tonerne kom frem ved Bevægelse i Luften, og Ekkoet ved Lydens Tilbagekastning.

Efter Aristoteles udviklede Fysiken sig mere og mere som en matematisk Videnskab, og det er især Optik og Astronomi, som dyrkes. Evklid (cr. 300) fandt Lovene for Lysets Tilbagekastning, skønt han havde den mærkværdige Anskuelse, at Lyset var en Virksomhed, som udgik fra Øjet. Aristark lærte, at Solen og Fiksstjernerne stod stille, medens Jorden bevægede sig. Han fandt endvidere en Metode til Bestemmelse af Solens Afstand i Forhold til Maanens; naar nemlig Maanen ses netop som en Halvcirkel, maa den være Toppunkt for en retvinklet Trekant, hvis Hypotenuse er Linjen fra Solen til Jorden. Ved Udmaaling af en Vinkel i denne Trekant fandt han, at Solens Afstand var 20 Gange Maanens. At Resultatet er saa meget galt, skyldes ikke Princippet, men

derimod at det er vanskeligt at finde det Tidspunkt nøjagtigt, da Maanen er halvt belyst.

Den største Fysiker af den matematiske Retning er Arkimedes. Han var født i Syrakus og levede ogsaa der den meste Tid af sit Liv (omkring Midten af det 3 Aarhundrede f. Chr.). Han var fortrinsvis Matematiker (Beregningen af $\pi$) og betragtede Fysiken som en Gren af Matematiken. Der fortælles adskillige Vidnesbyrd om, hvor optaget han var af sin Videnskab; hans Venner maatte minde ham om at spise og drikke og bade sig, og selv i Badet laa han og tegnede geometriske Figurer i Sandet. Da Kong Hiero havde fattet Mistanke om, at hans Guldkrone var forfalsket, gav han Arkimedes det Hverv at undersøge den. Efter lang og forgæves Overvejelse af denne Opgave, blev han en Gang, da han var i Bad, opmærksom paa Vandets Opdrift og indsaa, at han her havde Midlet til at løse Opgaven; i sin Glæde derover sprang han straks op og løb nøgen gennem Gaderne raabende det bekendte »Hevreka«, jeg har fundet det. Endvidere beviste han Vægtstangsloven, fandt Læren om Tyngdepunktet og Vædskers Tryk, opfandt adskillige Maskiner, saasom Trisseværket, Skruen uden Ende, Vandsneglen og flere. Med nogle af disse udførte han alene Arbejder, som oversteg mange Menneskers forenede Kræfter, og hans Tillid til sine Maskiner var saa stor, at han var vis paa, han kunde bevæge hele Jorden, naar blot nogen kunde skaffe ham et Sted at staa paa. Da Syrakusanerne efter Hiero's Død sluttede sig til Kartagerne og derved kom i Krig med Romerne, bidrog Arkimedes meget til at skade Fjenderne, da de belejrede Byen. Ved Hjælp af hans Maskiner blev der nemlig kastet saa mange Stene ud over Murene, at Romerne tilsidst løb, saa snart de blot saa et Reb eller en Bjælke over Muren, og ved Søsiden havde Arkimedes efter Beretningen lavet et Redskab, en Jærnhaand, som hejsedes ned langs Muren og tog fat i Romernes Skibe og løftede Enden i Vejret, saa Besætningen omkom. En anden bekendt Fabel er, at han ved Brændspejle stak Ild i Romernes Skibe paa lang Afstand. Tilsidst indtog Romerne dog Byen, og Arkimedes blev dræbt af en Soldat midt i sine Studier, der optog ham i den Grad, at han blot bad Soldaten om ikke at forstyrre hans Tegninger.

Samtidig med Arkimedes levede i Aleksandria Eratostenes, der navnlig var Geograf. Han lærte, at Jorden var rund og bestemte endog dens Omkreds forholdsvis nøjagtig, idet han maalte Solens Kulminationshøjder paa samme Dag men paa to Steder, Nord og Syd for hinanden.

Midt i det andet Aarhundrede f. Chr. levede i Aleksandria Heron, der havde megen Interesse for den praktiske Side af Naturlæren; han konstruerede flere Maskiner, blandt andre nogle, som beroede paa Luftarternes Egenskaber, f. Eks. det bekendte Springvand. Han fandt ogsaa den mærkelige Regel, at naar en Lysstraale fra et Punkt tilbagekastes ved et plant Spejl til et andet Punkt, saa er dens Vej den kortest mulige.

Samtidig levede ligeledes i Aleksandria en af Oldtidens berømteste Astronomer, Hippark. Han forklarede Uregelmæssighederne i Maanens og til Dels Planeternes Bevægelser om Jorden ved den Antagelse, at Jorden var stillet ekscentrisk i deres cirkelformede Baner. For Solens Vedkommende bestemte han tillige Periheliets Beliggenhed, og Aarets Længde fandt han, var 365 Dage 5 Timer og 55 Min. Ved Parallaksen fandt han Maanens Afstand temmelig rigtig, men derimod Solens 20 Gange for lille. Ved Udarbejdelsen af et Stjernekatalog fandt han endogsaa Præcessionen. Hipparks Iagttagelser bleve meget benyttede af de følgende Astronomer, blandt hvilke den betydeligste er Ptolemæus, som boede i Aleksandria cr. 120 efter Chr. I sit Hovedværk, Almagest gør han Rede for sin Opfattelse af Verdenssystemet; han betragtede Jorden som stillestaaende, mens alle de bevægelige Himmellegemer beskrev Baner omkring den. For at forklare de tilbagegaaende Bevægelser, lod han Planeterne bevæge sig i smaa Cirkler, Epicykler, og disses Centrer beskrev da de af Hippark udtænkte ekscentriske Cirkler om Jorden. Da dette ikke en Gang var nok til at forklare alle Uregelmæssigheder, indførte Ptolemæus nye Komplikationer, hvorved Systemet blev saa indviklet, at han bemærkede, det var lettere selv at bevæge alle Planeterne end at forklare de Bevægelser, der fandt Sted. Ogsaa Optik beskæftigede Ptolemæus sig med, og hans Autoritet som Videnskabsmand var saa stor, at mange af hans Meninger bleve gældende i lang Tid, og hans Verdenssystem blev opfattet som det rette lige til Kopernikus's og Tyge Brahes Tid.

De nærmeste Aarhundreder efter Christi Fødsel have ingen Videnskabsmænd at opvise, som kunne staa ved Siden af de græske og aleksandrinske Lærde. Kampen mellem Kristendom og Hedenskab optog Sindene, og desuden udøvede det romerske Herredømme en stor Indflydelse. Mange fremragende Mænd drog til Rom, men der var det især praktiske, politiske og statsvidenskabelige Opgaver, som vakte Interessen.

I det 7de Aarhundrede begyndte, som bekendt, Araberne at udbrede deres Herredømme i Middelhavslandene. Da Aleksandria i Aaret 640 blev erobret, var det forbi med den aleksandrinske Videnskabelighed, og skønt Araberne vel have dygtige Mænd at opvise, bestod dog deres Videnskabelighed mere i at studere Fortidens Lærde end i selv at bringe Fremskridt af nogen Betydning. Af de mest fremragende Mænd kan nævnes Geber, der især studerede Kemi, men rigelig blandet med Alkymi og Magi, samt Astronomen Albategnius.

Efterhaanden som der kom mere Ro i de politiske Forhold, og Kristendommen blev Statsreligion i de betydeligste Lande, begyndte Lysten til Videnskabelighed at vaagne igen. De saakaldte Skolastikere indskrænkede sig dog væsentlig til at behandle de religiøse Dogmer. Det gjaldt om at bevise disse ved filosofiske Betragtninger uden nogen Forudsætning, hentet fra Erfaringen, og det forstaas let, hvorledes denne

Fremgangsmaade kunde lede til de besynderligste Opgaver og Forestillinger. Englenes Natur, Sprog, Klædning, Fordøjelse o. s. v. blev drøftet, og Stjernerne bleve bevægede af aandelige Kræfter, sandsynligvis ogsaa af Engle. Videnskabelighed af denne Art førte til at studere Oldtidens filosofiske Systemer, og da derved Aristoteles's Skrifter bleve meget benyttede, fandt Pave Innocens III dette betænkeligt for Kristendommens Sikkerhed og forbød i Aaret 1215 Læsningen af Aristoteles's fysiske Værker. Dette Forbud hjalp dog ikke, og i de følgende Aarhundreder blev dette Studium netop et af de allervigtigste ved Datidens Universiteter, dog saaledes, at det meget mere var Aristoteles selv, som blev studeret, end Naturen. Det trettende Aarhundrede har dog nogle vigtige Opfindelser at opvise, nemlig Kompasset og Krudtet; bægge antages imidlertid for at have været kendte lang Tid før hos Kineserne. I dette Aarhundrede levede ogsaa den berømte engelske Lærde Roger Bacon; han studerede Astronomi og Fysik, navnlig Optik og Matematik, som han betragtede som et uundværligt Hjælpemiddel til Fysiken. Han gjorde Forsøg med Spejle og Linser, hvis Forstørringsevne han opfattede rigtigt som beroende paa Forandringen i Synsvinklen. Hans Hovedfortjeneste er, at han indførte Eksperimentet som den Metode, hvorved man anstiller Iagttagelser, der alene danne Grundlaget for Studiet af Fysiken.

Nikolaus Kopernikus blev født i Torn i Aaret 1473. Allerede fra Begyndelsen af det næste Aarhundrede arbejdede han paa sit store Værk »de revolutionibus orbium coelestium« men holdt det hemmeligt, indtil endelig hans Venner fik ham overtalt til at udgive det, og det første Eksemplar blev rakt ham paa hans Dødsleje i Aaret 1543. Han fremsætter i dette Værk den bekendte Teori, at Jorden drejer sig om sin Akse og bevæger sig omkring Solen, hvilket ogsaa er Tilfældet med Planeterne. De to første Ting havde i Oldtiden ogsaa været lærte af enkelte Mænd, men det sidste var nyt og forklarede paa en simpel Maade Planeternes indviklede Bevægelser. At Fiksstjernerne ingen Parallakse vise, forklarede Kopernikus rigtigt af deres uhyre store Afstande, men han betragtede alle Planetbanerne som ekscentriske Cirkler og maatte, da han ikke kendte Inertiens Lov, tillægge Jorden en særlig Bevægelse, for at Aksen kunde blive parallel med sig selv, da den ifølge Aristoteles's forkerte Bevægelseslære ellers skulde beskrive en Kegleflade med fast Toppunkt i Ekliptikas Akse.

Kopernikus's Opfattelse vandt ikke mange Tilhængere, før Tyge Brahe grundigt havde omstyrtet Ptolemæus's System. Tyge Brahe blev født 1546 paa Knudstorp i Skaane og studerede i sin Ungdom Retsvidenskab i Kjøbenhavn og Leipzig. Dette Studium interesserede ham dog ikke, og han kastede sig derfor over Astronomien og Kemien i Forbindelse med Alkymi og Astrologi. Af afgørende Betydning for hans senere Liv blev Iagttagelsen af »stella nova«, den Stjerne, som i Aaret 1572 pludselig lod sig til Syne i Stjernebilledet Kassiopeja. Paa den

Tid var Tyge Brahe netop optaget af Kemien, men dette Fænomen paa Himlen vakte atter levende Interesse for Astronomien; det forekom ham saa forunderligt, at han næppe vilde tro sine Øjne, men spurgte alle Mennesker, om de ogsaa saa denne Stjerne. Han gav sig derefter til i længere Tid at iagttage Stjernens Beliggenhed og fandt, at den stod stille og ikke viste nogen Parallakse, saa den maatte henhøre til Fiksstjernerne. Han skrev en Bog om sine Iagttagelser, og denne skaffede ham straks stor Berømmelse, og Frederik II. skænkede ham betydelige Indtægter og Øen Hven, hvor han levede fra 1576 til 1597 og observerede paa Uranienborg og Stjerneborg. Efter Frederik II.s Død kom Tyge Brahe i Uenighed med Rigsraaderne, som styrede Landet i Kristian IV.s Mindreaarighed; hans Indtægter bleve ham berøvede, en efter en, og han maatte tilsidst flytte til sin Gaard i Kjøbenhavn, men selv der blev det ham forment at anstille Iagttagelser, og han flyttede da til Rostock, derfra til Wandsbeck og senere til Prag, hvor Kejser Rudolf lønnede ham som Astronom. Han døde dog et Par Aar efter, Aar 1601.

Tyge Brahes Hovedfortjeneste er den Nøjagtighed, hvormed han anstillede sine Observationer. Han undersøgte selv sine Instrumenter, navnlig Inddelingen af Buerne, og lavede sig Tabeller over Delingsfejlene. Han opfandt nye Sigteapparater, de saakaldte Pinnacidier; i Stedet for at sigte gennem et Hul paa hver Ende af den Stang, som drejede sig om Buens Centrum, anbragte han paa den ene Ende en lille firkantet Plade, og paa Okularenden en større Plade, i hvilken der var udskaaren fire smalle Striber, som tilsammen dannede et Rektangel, kongruent med det første; naar han da ved efterhaanden at flytte Øjet hen til de smalle Striber, hver Gang saa Stjernen tangerende Rektanglets Sider, var Sigtelinjen bestemt. Ved disse Forbedringer samt ved at tage Hensyn til Refraktionen opnaaede han en hidtil ukendt Nøjagtighed i Iagttagelserne, og han viste derved, at det Ptolemæiske Verdenssystem ikke kunde forklare de Bevægelser, som fandt Sted. Skønt han indrømmede, at det Kopernikanske System let forklarede Bevægelserne, kunde han dog ikke bestemme sig til at gaa ind paa denne Opfattelse. Aarsagen dertil var foruden hans Tro paa Bibelens Ordlyd væsentlig, at Inertiens Lov var aldeles ubekendt; han mente saaledes, at en Sten, som faldt ned fra et Taarn, ikke kunde falde ved Taarnets Fod, dersom Jorden drejede sig, og det var ikke muligt at finde nogen Kraft, som kunde holde Jorden i parallel Stilling under Omløbet om Solen. Han udtænkte derfor et eget System, ifølge hvilket Maanen og Solen skulde bevæge sig om Jorden, medens de andre Planeter bevægede sig omkring Solen. Af Tyge Brahes talrige og nøjagtige Planetobservationer lykkedes det senere Kepler, som arbejdede sammen med ham i Prag, at udfinde Planeternes virkelige Bevægelser. Tyge Brahe var ogsaa den første, som viste, at Kometerne vare Legemer uden for Atmosfæren, da de nemlig ingen Parallakse viste.

I det 17de Aarhundrede finde vi store Fremskridt i Fysiken, som væsentlig skyldes italienske Videnskabsmænd. En vigtig Aarsag til disse Fremskridt maa søges i den Rolle, som Eksperimenterne nu komme til at spille i den videnskabelige Metode. Den egentlige Grundlægger af den nyere Fysik er Galilæi, som blev født i Pisa i Aaret 1564. Sin første Iagttagelse anstillede han ifølge Beretningen under Gudstjenesten i Domkirken i denne By, idet han ved at tælle sine Pulsslag udfandt, at Lysekronernes Svingninger vare ligetidige. Galilæi blev 1589 Professor i Pisa og udviklede her sin Ligevægtslære paa Grundlag af Arkimedes, medens han fuldstændig forkastede Aristoteles's Bevægelseslære. Denne nød endnu saa stor Anseelse, at Galilæis afvigende Lære blev mødt med Mistillid. Selv hans berømte Forsøg, hvorved han lod forskellige Legemer falde fra Toppen af det skæve Taarn for at vise, at de alle faldt lige hurtigt, søgte hans Modstandere at bortforklare, og Uviljen imod ham blev saa stor, at han maatte fortrække til Padua. Her beskæftigede han sig stadig med Legemernes Bevægelser og udfandt de nøjagtige Faldlove; ved Betragtningen herover var det, at han fandt den overordentlig vigtige Lov om Inertien. Ogsaa Bevægelsen paa en Skraaplan og Kastebevægelsen fandt han Lovene for, og om Pendulet viste han, at Svingningstiden forholdt sig som Kvadratroden af Længden. Han konstruerede ogsaa det første, ganske vist ufuldkomne, Termometer og fandt, at en Tones Højde afhang af Svingningstallet, ja endog de molekulære Kræfter studerede han ved Forsøg oves Bjælkers Fasthed.

Da han i Aaret 1609 hørte om Lippersheys Opfindelse af Kikkerten, gav han sig straks i Færd med at konstruere en saadan og fik ogsaa lavet en, der forstørrede 30 Gange, med hvilken han blandt andet opdagede Jupiters Maaner og Solpletterne. Hans Berømmelse steg herved hurtigt, og i Aaret 1610 blev han kaldet til Professor i Florens, hvor hans Lære dog snart skaffede ham mange Fjender blandt de Aristoteliske Professorer og Jesuitterne. De sidste prædikede endog imod ham i Kirkerne, en af dem begyndte f. Eks. en Prædiken med de Ord: »I galilæiske Mænd, hvorfor staa I og stirre mod Himlen«, og Uviljen steg til Forfølgelse, saa Galilæi maatte drage til Rom for at forsvare sig for Paven. Alligevel blev der udstedt et Forbud mod Kopernikus's Lære og alle de Bøger, som forsvarede den, og Galilæi fik sendt en Meddelelse om dette Forbud, der havde til Følge, at han holdt sig ubemærket i Florens til Aar 1623, da Urban 8. blev Pave. Da denne nemlig var gunstig stemt mod Galilæi, fik han Mod til i Aaret 1632 at udgive et stort Værk, hvori han under Form af Samtaler forsvarer det Kopernikanske System imod en Modstander. Herover vaktes Ejendskabet mod ham paa ny, og hans Uvenner fik Paven paa deres Side ved at bilde ham ind, at han var latterliggjort som en af Personerne i Skriftet. Galilæi maatte drage til Rom, hvor han blev kastet i Fængsel og overgivet til Inkvisitionen, og under Trusler om Pinebænk og Tortur maatte han knælende afsværge

sin Lære; Sagnet fortæller, at da han rejste sig op, stampede han paa Jorden og mumlede de Ord: den bevæger sig alligevel. Først da fik han Lov at vende tilbage, men var Resten af sit Liv stadig bevogtet af Inkvisitionen og blev endog efter sin Død begravet paa et afsides Sted, uden Ligtale og uden noget Mindesmærke paa Graven. I de sidste Aar var han tunghør og blind; han døde 1642.

Samtidig levede en anden af de berømteste Videnskabsmænd, Johannes Kepler, født i Würtemberg i Aaret 1571. Han kom i Aaret 1600 til Prag og arbejdede sammen med Tyge Brahe, og det er paa sit Sted omtalt, at det var dennes Iagttagelser, som gav Kepler det Materiale, hvoraf han udfandt de tre Love om Planetbevægelserne, som bære hans Navn. Foruden disse skylder man Kepler Opdagelsen af flere Ting paa Optikens Omraade; han forbedrede Tyges Lære om Refraktionen, studerede overhovedet Brydningen og Øjets Bygning, han opdagede den fuldstændige Tilbagekastning og var nær ved at finde den rette Brydningslov. Han beskrev, hvorledes en Kikkert maatte kunne indrettes med 2 Samlelinser, men en anden Mand, Scheiner, var den første, som udførte en saadan. Ved Siden af den fremragende Dygtighed som Videnskabsmand besad Kepler en mærkværdig Lyst til Mysticisme; han drev Astrologien med Iver og gav sig af med Vejrforudsigelser; han antog, at Himmellegemerne besad Sjæle, som udførte Akseomdrejningerne; han anvendte megen Møje paa at bringe Planeternes Afstande og Omløbstider i Overensstemmelse med Tonernes Højde eller med Dimensionerne i de 5 regulære Polyedre, af hvilke hvert skulde svare til sin af de bekendte Planeter. Hans private Liv var i høj Grad sørgeligt, han levede ulykkelig med sin første Hustru, og hans Moder var nær ved at blive brændt som Heks; selv var han ogsaa Genstand for Religionsforfølgelse. Han var altid i Pengetrang, og skønt han efter Tyge Brahes Død fik dennes Plads som Kejserens Astronom, havde han Vanskelighed ved at faa sin Løn og levede ofte i den yderste Nød. Han maatte af denne Grund forandre Opholdssted og paatage sig andre Arbejder; han var saaledes Lærer i Linz, boede senere i Ulm og tilsidst i Regensburg, hvor han døde 1630.

Paa denne Tid træffe vi ogsaa betydelige Fremskridt i andre Dele af Fysiken. Englænderen Gilbert (1540—1603) var saaledes den første, som foretog et nøjagtigt Studium af Magnetismen og Begyndelsesgrundene af Gnidningselektriciteten. Italieneren Torricelli (1608—1647), en Discipel af Galilæi, er bekendt som den, der har opdaget Lufttrykket, hvorved den gamle Lære om Naturens Afsky for det tomme Rum (horror vacui) blev tilintetgjort. Tidligere havde man vidst, at der i et tomt Rum kun kunde løftes en Vandsøjle af en vis Højde; man mente derfor, at Naturens Afsky for det tomme Rum dog havde sin Grændse. Urimeligheden i denne Antagelse viste Torricelli ved at iagttage Forandringerne i Højden af den Kvægsølvsøjle, som kunde løftes i et tomt Rør, og han

opfattede det rigtigt som beroende paa Lufttrykkets Forandringer. Det er ligeledes bekendt, at Torricelli fandt Loven om Vædskers Udstrømning gennem smaa Aabninger.

Af andre italienske Fysikere fra denne Periode, Begyndelsen af det 17de Aarhundrede, kan nævnes Grimaldi, der var den første, som bemærkede og undersøgte Lysets Bøjning, og at to Lysstraaler kunde ved Interferens frembringe Mørke; han antyder endog en Forklaring af Fænomenerne ved at sammenligne dem med Bølgebevægelser paa Vand.

I Frankrig og Holland levede paa denne Tid Descartes eller Cartesius, der ved Siden af Fysiken studerede Matematik, — han er bekendt som Opfinder af den analytiske Geometri — og Filosofi, der førte ham til at opstille en selvstændig Teori om Verdenssystemet og de Kræfter, som ere virksomme deri. Ligeledes maa nævnes Pascal (1623—62), der foruden de bekendte Love om Vædskers Tryk gav betydelige Bidrag til Forstaaelsen af Lufttrykket, idet han ved Forsøg viste, at Barometret sank, naar man steg til Vejrs; han foreslog ogsaa at benytte Barometret til Højdemaalinger. Han døde i en ung Alder og hengav sig i sin sidste Tid udelukkende til religiøse Betragtninger.

I Tyskland levede Otto von Gerike (1602—1686). Han var en meget alsidig Mand, baade Ingeniør, Landmand, Brygger, Borgmester i Magdeburg og Diplomat, i hvilken Egenskab han blev brugt i mange Sendelser. Hans Bidrag til Fysikens Udvikling bestaar først og fremmest i Opfindelsen af Luftpompen og de mangfoldige Forsøg, han anstillede dermed. Foruden de Magdeburgske Halvkugler kan nævnes Dasymetret og Vandbarometret; tillige viste han, at Legemer forbruge Luft ved Forbrændingen. Han lavede ogsaa en Art Elektrisermaskine, som blot bestod i en Svovlkugle, der blev drejet rundt, medens en Person holdt Haanden derpaa; Svovlkuglen blev derved elektrisk.

Det Opsving, som Fysiken tog i dette Tidsrum ved Indførelsen af den eksperimentale Metode, gav Anledning til Oprettelsen af flere videnskabelige Selskaber med det Formaal at studere Naturen. De berømteste af disse ere Akademiet i Florens, Royal Society i London og Pariser-Akademiet, og der skriver sig fra disse Selskabers første Tid mange betydningsfulde Fremskridt, f. Eks. angaaende Legemers Udvidelse ved Varmen, Kogning, Frysning, kunstig Kulde, men forholdsvis lidt, som vedrører Magnetisme og Elektricitet. Et af de betydeligste Medlemmer af Florentinerakademiet er Borelli (1608—1679), som har den Fortjeneste ved sine Arbejder og Betragtninger om Planetbevægelserne at have forberedt den nøjagtige Kendskab til Attraktionsloven. Som Medlemmer af det engelske Selskab kan nævnes Boyle (1627—91) og Hooke (1635—1703). Den første var en meget nøjagtig og omhyggelig Eksperimentator men afgiver et Vidnesbyrd om, hvor ensidig Eksperimentet paa denne Tid blev anvendt uden tilstrækkelig Bedømmelse af de

fundne Resultater. Ved sine Undersøgelser af Luftens Tryk og tilsvarende Rumfang udarbejdede han Tabeller over de sammenhørende Værdier af disse Størrelser og dermed lod han sig nøje. En Discipel af ham, Townley, opdagede saa den simple Afhængighed, der er imellem disse Størrelser, men skønt Boyle selv bagefter benyttede denne Opdagelse, er det dog, som bekendt, bleven Franskmanden Mariotte, efter hvem Loven har faaet Navn.

Hooke var en meget genial Videnskabsmand og har givet mange værdifulde Bidrag til Fysikens Fremgang. Han kom ved sine Studier af Lyset, især Interferensen ved tynde Plader, til den rette Opfattelse af Lyset som en Bølgebevægelse, hvor Svingningerne foregaa vinkelret paa Straalen; han fremsatte Læren om den almindelige Gravitation mellem alle Legemer, dog uden at kende den nøjagtige Lov derfor; han studerede Sammenhænget mellem Lufttrykket og Højden over Jordoverfladen og konstruerede Ure, der gik ved Fjedre. Det er imidlertid ikke let at komme til fuld Klarhed over Hookes Fortjenester, da hans Forfængelighed idelig drev ham til at hævde for sig selv al Æren for de store Opdagelser. Han laa uafladeligt i Strid baade med Huyghens og Newton, beskyldte dem bægge for Plagiat og paastod, at de tilsneg sig hans Opdagelser som deres egne.

De to største Fysikere i denne Periode ere dog Huyghens og Newton. Huyghens blev født i Haag 1629 og begyndte sin videnskabelige Løbebane som Jurist men kastede sig dog snart over Matematiken, hvor han foruden andre Ting navnlig er berømt som den egentlige Grundlægger af Sandsynlighedsregningen. Derefter beskæftigede han sig med Kikkertens Forbedring, og det lykkedes ham at opdage en af Saturns Maaner og dens Ring, som Galilæi kun havde opfattet som en ejendommelig Form af Planeten selv. Huyghens konstruerede ogsaa bedre Ure, end man hidtil havde haft, baade Pendulure og Ure med Fjedre; han fandt Formlen for et matematisk og et legemligt Penduls Svingningstid og bestemte derved Tyngdens Acceleration; ja han fandt endog, at Cykloiden er tautokron og konstruerede Penduler, som svinge i en Cykloide; ogsaa Formlen for Centrifugalkraften fandt Huyghens. Det er endvidere almindelig bekendt, at Lysets Bølgeteori skyldes ham, i ethvert Fald den nærmere Udvikling deraf, selv om der var Fænomer, som han ikke ret formaaede at forklare, f. Eks. at Lyset ikke bøjer om Hjørner saadan som Lyden. Det synes ogsaa, som Hooke i nogen Maade har set mere genialt end Huyghens, idet denne troede, at Svingningerne foregik i Straalens egen Retning. Huyghens levede fra 1666 til 1681 i Paris, men forlod denne By ved Ophævelsen af det Nantiske Edikt og vendte tilbage til Haag, hvor han døde 1695.

Isak Newton blev født i Landsbyen Woolsthorpe i England i Aaret 1643. Allerede som Skoledreng morede han sig med at lave forskellige Smaaapparater, som Solure, Vindmøller, Skabe, Borde og lign.

til en ung Pige, han syntes godt om, men i hans 16de Aar bg hans Moder ham hjem, for at han skulde passe hendes Gaard. Han var imidlertid ikke anlagt for Landvæsenet; naar han kom til Købstalen med sine Varer, glemte han dem og opholdt sig i Stedet for hos en Apoteker Clark, der havde et stort Bibliotek, som interesserede Newton mere end Handlen med Korn og Smør. Efter nogen Tids Forløb fik han Lov til at studere og kom til Universitetet i Cambridge, hvor navnlig Matematiken interesserede ham, saa han straks gav sig i Lag med de vanskeligste Værker og udmærkede sig saa meget, at han allerede i Aaret 1669 blev udnævnt til Professor. Da han her holdt Forelæsninger over Optik og bekendtgjorde nogle af sine Opdagelser angaaende Farverne, kom han straks i Strid med Hooke, og denne blev saa bitter, at Newton først i Aaret 1704 efter Hookes Død udgav sit store Værk om Lysets Naturlære. Han udvikler her sine Undersøgelser om Solspektret, de forskellige Farvestraalers ulige Brydning, Legemernes Farver, Farven af tynde Blade, Regnbuen og meget mere. Om Lysets Natur lærte Newton den saakaldte Emissionsteori, at de lysende Legemer udsendte materielle Smaadele, som ramte Øjets Nethinde og frembragte Lysindtrykket, og disse Smaadele antog han, havde forskellig Størrelse, hvorved Farverne fremkom. Den samtidige Tilbagekastning og Brydning forklarede han ved at antage, at Smaadelene periodisk vare visse Forandringer underkastede, saa de snart bleve tiltrukne af de gennemsigtige Legemer og bevægede sig hurtigere inde i disse end udenfor, og snart bleve frastødte, saa de kunde tilbagekastes. Lysets Bøjning uden om smalle Skyggegivere forklarede Newton ved at antage en ny Frastødning fra Legemet, og til sidst tillagde han endog Lysstraalens Smaadele forskellige Egenskaber i forskellige Retninger. Skønt hans Teori saaledes var meget kunstig, var den dog i lang Tid anset for den rigtige, og Huyghens's Bølgeteori fandt i omtrent 100 Aar ingen Tilhængere. Ja selv ind i dette Aarhundrede har Emmissionsteorien holdt sig hos enkelte Mænd, men er nu fuldstændig forladt, da man ved Bølgeteorien lettest og simplest forklarer de mange indviklede Fænomener angaaende Lysets Interferens, og desuden ved direkte Maalinger ved, at Lyset bevæger sig langsommere i Glas og Vand end i Luft, hvad der strider imod Newtons Antagelse men stemmer med Huyghens's.

I Sammenhæng med alle disse Opdagelser angaaende Lyset fortjener det at nævnes, at vor Landsmand Ole Rømer i 1675 opdagede Lysets Hastighed ved Jupiters Drabants Formørkelser, og at Englænderen Bradley i 1728 paa ny fandt den samme Hastighed ved Hjælp af Aberrationen, som han opdagede, idet han anstillede nøjagtige Maalinger for at finde den aarlige Parallakse.

Fra Slutningen af det 17de Aarhundrede til midt i det 18de drives Studiet af Fysiken væsentlig paa matematisk Grundlag, som Følge af at Matematiken paa dette Tidspunkt fik et mægtigt Opsving ved Leib-

nitz's og Newtons Opfindelse af Differentialregningen. Det er derfor naturligt, at det især er den mekaniske Del af Fysiken, som i denne Tid dyrkes. Hermed vokser ogsaa den almindelige Interesse for mekaniske Kunstværker, som viser sig ved de talrige Perpetuum mobile, som foreslaas i dette Aarhundrede, samt de besynderlige automatiske Figurer, af hvilke de berømteste ere Vaucansons Fløjtespiller og hans And, der kunde baske med Vingerne, strække Halsen, skrige og snadre, spise og drikke, ja endog gav en Art Ekskrementer fra sig.

Fra Slutningen af det 17de Aarhundrede skriver Newtons store Opdagelser sig om Tyngden og den almindelige Gravitation. Det fortælles, at han i Aaret 1666 ved at se et Æble falde, først kom paa Tanke om at undersøge Tyngden og dens Virkemaade, og hans første Undersøgelse gjaldt da at udfinde, om det var den samme Naturkraft, som holdt Maanen i sin Bane. Hans Regning førte i Begyndelsen til et benægtende Resultat, og først i Aaret 1682, da Newton blev bekendt med de nye Maalinger, hvorved der var funden en nøjagtigere Værdi for Jordradien, optog han Regningen igen, og da han nu saa, at den vilde føre til det ønskede Resultat, blev han saa overvældet af Glæde, at han ikke formaaede at føre Regningen til Ende, men maatte overlade det til en Ven, som just traadte ind til ham. Skønt det ikke kan nægtes, at flere andre Mænd, som Borelli og Hooke, have bidraget til Løsningen af Spørgsmaalet om Gravitationen, saa er det ubestrideligt, at det først er Newton, som klart og bestemt har matematisk paavist de Love, hvorefter den almindelige Tiltrækningskraft styrer Himmellegemernes Bevægelser, og bevist, at denne Kraft er identisk med Tyngden paa Jorden. Dette udvikler Newton i sit store Værk »principia mathematica philosophiæ naturalis« (1687), der dog ogsaa indeholder en storartet Mængde af andre Sætninger fra Fysiken og Matematiken. Han behandler f. Eks. faldende Legemers Afvigelse mod Øst, Kræfternes Parallelogram, Legemers Bevægelse under Paavirkning af forskellige Kraftlove, giver det matematiske Grundlag for Lydlæren, for Ebbe og Flod, Præcessionen og m. m. Desuden hidrører Princippet om Aktion og Reaktion fra Newton. Han døde 1727 og blev begravet i Westminsterabbediet. Digteren Pope forfattede den bekendte Gravskrift over ham:

Nature and Natures laws lay hid in night,
God said: Let Newton be, and all was light.

Foruden Leibnitz og Newton levede der i dette Tidsrum og senere hen en Mængde andre fremragende Matematikere, som for en stor Del behandlede Opgaver, hentede fra den mekaniske Del af Fysiken, saasom et Legemes Bevægelse paa forskellige Kurver, og flere Legemers Bevægelser, naar de ere forbundne med hinanden. De betydeligste af disse vare de forskellige Medlemmer af Familien Bernoulli (i Basel og i Holland), Euler (født i Basel, men Professor i Petersborg og Berlin),

d'Alembert og Clairaut i Frankrig, indtil endelig Mekaniken fik sin Fuldendelse ved den berømte Lagrange (født 1736 i Turin af franske Forældre, død i Paris 1813).

Dog begynder der paa denne Tid ogsaa andre Opdagelser af Betydning. Saaledes er Franskmanden Sauveur (1653—1716) bekendt for sine epokegørende Undersøgelser om Tonernes Svingningstal, som han bestemte ved Stødene, samt om Overtonerne og Strenges Svingningsbugter og Knuder. Det er saa meget mærkeligere, som Sauveur selv var blottet for musikalsk Sans, han maatte ofte ved sine Undersøgelser tage en Musiker til Hjælp, da han selv ikke kunde bedømme Tonens Højde.

Ogsaa de elektriske Fænomener begynder man i det 18de Aarhundrede at undersøge nærmere. Gray i England (1670—1736) og Dufay i Paris (1698—1739) fandt de to Arter af Elektricitet og Lovene om Tiltrækning og Frastødning, og om Ledning og Isolation. Gray mente endog, at han ved Hjælp af Elektriciteten kunde forklare Planeternes Bevægelser om Solen, ligesom andre før havde ment, at det kunde ske ved Hjælp af Magnetismen. Det er dog først fra Midten af Aarhundredet, at de betydeligere Opdagelser paa Gnidningselektricitetens Omraade begynde, men saa gik det ogsaa saa hurtig, at denne Gren af Fysiken var helt arbejdet igennem i Løbet af 30 Aar. De første, som lavede en ordentlig Elektricermaskine, vare Professor Hausen i Leipzig og hans Discipel Litzendorf, som foreslog at anbringe Glasset saaledes, at det kunde drejes, i Stedet for at holde det i Haanden. De første Leydnerflasker bleve indrettede samtidig af Kleist i Pommern og Musschenbroek og Cunæus i Leyden. De Sidstnævnte tog en lille Flaske med Vædske i og stak et Søm gennem Proppen; naar de da holdt Flasken i Haanden og elektricerede Sømmet, fik de bagefter et Stød ved at berøre dette. Denne Iagttagelse vakte en uhyre Opsigt, og der blev talt i meget overdrevne Udtryk om Stødets Virkninger. Musschenbroek skrev saaledes til Réaumur, at han ikke for hele Frankrigs Krone anden Gang vilde prøve noget saa frygteligt; andre talte om stærke Krampetrækninger, Hede i Blodet, Feber, Næseblod, og at Smerten varede i 8 Dage o. lign. I alle fysiske Laboratorier bleve Forsøgene gentagne, og paa Markeder fik Publikum Lejlighed til at prøve Stød og Slag og Gnister. Interessen var til en Tid saa optaget deraf, at man vilde forklare alle Slags Fænomener derved, som f. Eks. Jordskælv og Vandets Fordampning.

Blandt de betydeligste Mænd i Gnidningselektricitetens Tid maa nævnes Benjamin Franklin og Coulomb. Franklin blev født 1706 i Nærheden af Boston, kom efter en daarlig Skoleundervisning tidlig i Bogtrykker- og Boghandlerlære, hvor han fandt Lejlighed til selv at erhverve sig Kundskaber og Dannelse. Franklin er først og fremmest en praktisk Mand, der er fremmed for alt dunkelt og hemmelighedsfuldt, klar og underholdende i sin Tale baade med Lærde og Ulærde, og for-

staar ved smaa Midler at opnaa store Resultater. I Aaret 1750 foreslaar han at indrette Lynafledere, men det er dog først to Aar senere, at han gør sit bekendte Forsøg med Dragen, som han lod gaa til Vejrs under en Tordenbyge. Hans Drage var befæstet i en Sejlgarnssnor, der endte i en Nøgle, som han holdt fast paa ved en Silkesnor; da Sejlgarnet var bleven vaadt af Regn, kunde han trække Gnister af Nøglen. Forsøget blev nu gentaget mange Steder, og Forslaget om at beskytte Bygninger ved Lynafledere blev drøftet af mange, men der var Uenighed om, hvorvidt man burde aflede Ledningen ned i Jorden eller lade den ende paa Bygningens Sider. Dette vigtige Spørgsmaal fik en tydelig Løsning ved Prof. Richmanns Død i Petersborg; han havde nemlig ladet en Lynafleder ende inde i sin Stue og blev under et Uvejr dræbt af en elektrisk Gnist, som sprang over fra Ledningen.

Franklin var fra Aaret 1757 til sin Død 1790 væsentlig Politiker og gentagne Gange ansat som Udsending i London, hvor han virkede for en Forbedring i de daværende engelske Koloniers Stilling. Efter sin Hjemkomst til Amerika var det ham, som proklamerede Koloniernes Uafhængighed, og senere under Frihedskrigen blev han sendt til Paris, hvor han sluttede Forbundet mellem Frankrig og Amerika. Her tiltrak han sig ved sin ligefremme, ærlige og djærve Optræden alles Opmærksomhed og Beundring, baade hos det store Publikum og hos Lærde, Kunstnere og Digtere, og her var det, at Turgot forherligede ham med det bekendte latinske Vers:

Eripuit fulmen coelo sceptrumqve tyrannis.

Det var ogsaa Franklin, som sluttede Freden med England, og bagefter var han et virksomt Medlem af Kongressen, som ordnede de forenede Staters Forfatning.

Coulomb (i Frankrig 1736—1806) lærte at maale de elektriske og magnetiske Kræfter og fandt, at Virkningerne aftog med Afstandens Kvadrat. Hans Maaleapparater grundede sig paa de Love, han i Forvejen havde fundet om Snoningsmodstanden i Traade.

Vi komme nu til at omtale det 18de Aarhundredes store Opfindelse, nemlig Dampmaskinen. Den første brugelige Maskine blev bygget i Aaret 1711 i Wolverhampton af Newcomen og Cawley, skønt Ideen rimeligvis skyldes Papin i Slutningen af det 17de Aarhundrede. Denne Maskine, som var indrettet til at løfte Vand op af et Bjærgværk, gik ved Atmosfærens Tryk, idet der blev sprøjtet Vand ind under Stemplet, naar Dampen havde løftet det. En Dreng, Humphrey Potter, som var sat til at passe de Haner, der afvekslende skulde lukkes og aabnes, fik det heldige Indfald at forbinde disse Haner med Maskinens andre Dele ved Hjælp af Snore, saa at Maskinen selv kunde besørge Arbejdet ved Lukning og Aabning. Newcomens Maskine kunde imidlertid ikke bruges til noget andet Arbejde, og skønt der snart efter fremkom flere Forslag til Forbedring, blev det dog ikke til noget, før Watt tog sig af Sagen, og

det er derfor ham, hvem det skyldes, at Dampmaskinen fra Slutningen af forrige Aarhundrede har haft den gennemgribende Indflydelse paa saa mange af det praktiske Livs Omraader.

James Watt blev født i Greenock i Skotland i Aaret 1736. Han var som Dreng stille og grublende og holdt meget af at løse matematiske Opgaver; han kunde sidde i Timevis og betragte Dampen fra Tekedlen og more sig med at tage Laaget af og sætte det paa igen og se, hvorledes Dampen kunde gøre det samme. Sit Legetøj pillede han fra hinanden for at se Indretningen indvendig og prøve paa at sætte det sammen igen. Han kom da ogsaa i Instrumentmagerlære og blev senere ansat som Konservator ved Instrumentsamlingen ved Universitetet i Glasgow. Her fik han en Gang en Model af en Newcomens Maskine til Reparation, og det var denne, som gav ham Stødet til at indrette en forbedret Dampmaskine. En af de vigtigste Forandringer, som skyldes Watt, er Kondensatoren, hvorved Afkølingen af Cylindren undgaas; af samme Grund besluttede han at udelukke Atmosfæren fra Stemplet og gøre Maskinen dobbeltvirkende, idet Dampen afvekslende ledes ind paa de to Sider af Stemplet. Stempelstangen havde hidtil været befæstet paa en stor Vægtstang ved Hjælp af en Kæde, hvilket var tilstrækkeligt, fordi den anden Ende af Vægtstangen havde Overvægt, naar Dampen løftede Stemplet. For at Maskinen kunde bruges til forskellige Arbejder, maatte Forbindelsen være fast, og for at faa en lige Bevægelse af Stempelstangen, skønt Vægtstangen drejer sig, konstruerede Watt sit sindrige »Parallelogram«, hvorpaa Stempelstangen er fastgjort. Endvidere fandt han Indretningen af Glideren og frembragte en omdrejende Bevægelse ved Hjælp af Krumtap og Svinghjul; ligeledes hidrører Regulatoren og Indikatoren fra ham. I Aaret 1774 gik Watt i Kompagni med en rig Købmand Boulton og grundlagde med ham en Fabrik i Nærheden af Birmingham, hvorfra der udgik mange Maskiner i den følgende Tid. Watt døde i Aaret 1819.

Vi have set, hvorledes Newtons Indflydelse gjorde sig gældende paa Mekanikens Omraade, men ogsaa i de andre Dele af Fysiken vandt hans Anskuelser stor Autoritet. Newton var en bestemt Modstander af den Cartesianske Filosofi, der vilde forklare alle Virkninger ved Hjælp af Bevægelse i Legemernes Dele, og da nu de forskellige Opdagelser bleve gjorte paa mange Omraader, maatte Newtons Tilhængere tage deres Tilflugt til Hypoteser om Tilstedeværelsen af magnetiske og elektriske Fluida og Varmestof og Lysstof. Troen paa disse imponderable Stoffer holdt sig helt ind i dette Aarhundrede. Opfattelsen af Varmen som Bevægelse hidrører fra Rumford. Han blev født i Rumford i Nordamerika Aar 1753 af fattige Forældre ved Navn Thompson men kom senere til England og Pfalzbayern, hvor han indlagde sig saa store Fortjenester af Industrien, at Kurfyrsten adlede ham under Navn af Grev Rumford; han kom senere til London og Paris, hvor han

døde 1814. Den første Anledning til nærmere Undersøgelser om Varmen var en Iagttagelse, han gjorde 1778, nemlig at et Kanonløb opvarmes mere, naar Kanonen skydes af med løst Krudt end med Kugle; hvis et Varmestof nemlig meddeles til Kanonen, maatte man vente, at der i sidste Tilfælde var mere Tid til, at en større Mængde Varme kunde gaa over fra Krudtet til det faste Legeme. Rumford anstillede saa flere Forsøg, af hvilke de bekendteste bestode i at iagttage og maale den Varmemængde, som udvikledes ved Boring af Kanonløb; og da det her viste sig, at der kunde udvikles en ubegrændset Mængde Varme, sluttede Rumford, at Varmestoffet kunde ikke eksistere, men at Varmen bestod i en Art Bevægelse. Senere gav Fourier (1768—1830) en ren matematisk Teori for Varmens Forplantning i Legemerne.

Teorien om et Lysstof, eller med andre Ord Newtons Emissionsteori, blev endelig omstyrtet ved Youngs og Fresnels Arbejder. Den første levede i England fra 1773 til 1829 og var en meget alsidig og lærd Mand, der beskæftigede sig med alle Fysikens Dele, samt Kemi og Lægevidenskab og mere; han var tillige Musiker, Maler og Sportsmand. Hans Angreb paa Emissionsteorien blev mødt med Uvilje og Modgrunde, og det er egentlig Fresnel (1788—1827), som ved sine Forsøg og Arbejder fuldstændig fik Bølgeteorien til at trænge igennem, idet han matematisk forklarede alle bekendte indviklede Forsøg som Dobbeltbrydning og Plansætning, og desuden af sine Regninger kunde forudsige hidtil ukendte Fænomener.

Endelig fik ogsaa de elektriske og magnetiske Fluida Dødsstødet ved Galvanismens og Elektromagnetismens Udvikling i dette Aarhundrede.

Galvani (1737—1798) var Læge og Professor ved Universitetet i Bologna. Sine første berømte Iagttagelser gjorde han i Forening med nogle Elever i det næstsidste Tiaar af Aarhundredet; et Par Frøben var lagt paa Bordet i Nærheden af Elektricermaskinen, og han iagttog nu, at dersom en Person rørte med en Kniv ved Laarnerven, bevægede Benene sig, hver Gang der blev taget en Gnist af Elektricermaskinen. Galvani anstillede derefter Forsøg, hvorved han viste, at den atmosfæriske Elektricitet kunde frembringe samme Virkning i Frøbenene; derefter gjorde han sine Forsøg i indelukkede Rum og kom derved til det Resultat, at Virkningen bedst fremkom, naar der var en metallisk Ledning fra Nerven til Enden af Benene, samt at Virkningen var ulige god ved Anvendelsen af forskellige Metaller, og at den blev bedst, naar der samtidig var to Metaller til Stede Han forklarede Fænomenerne ved Antagelsen af en dyrisk Elektricitet, som udladede sig gennem Metallerne, men hans Samtidige, Volta, (Professor i Pavia, født 1745, død 1827), udtalte allerede i Aaret 1794 bestemt den Overbevisning, at det var ved Berøringen mellem Metallerne, at Elektriciteten udviklede sig. Dels fandt han Galvanis forskellige Iagttagelser om Metallernes

Nødvendighed afgørende, og dels lykkedes det ham ogsaa ved Hjælp af sit Kondensatorelektroskop at vise Elektriciteten uden at anvende enten Frøben eller andre dyriske Dele, og da han i Aaret 1799 byggede den bekendte Søjle, var det forbi med den dyriske Elektricitet som Kilde til disse Fænomener. Allerede det følgende Aar fandt Nicholson og Carlisle, at Strømmen dekomponerer Vand, og med Opdagelsen af de kemiske Virkninger begynder Striden mellem Voltas Kontaktteori og den kemiske Teori, der sætter de kemiske Virkninger som Aarsag til Strømmen.

Af alle Opdagelser i Fysiken er der næppe nogen, der i saa kort Tid har baaret saa store Frugter som Ørsteds Opdagelse af Elektromagnetismen i Aaret 1820. Hans Christian Ørsted blev født i Rudkøbing Aar 1777 og var fra 1806 til sin Død 1851 Professor i Kjøbenhavn. Han var meget filosofisk anlagt og havde allerede i længere Tid næret den Overbevisning, at Elektriciteten maatte kunne virke paa en Magnetnaal, men først ved nogle Forelæsninger i det nævnte Aar lykkedes det ham at udfinde Betingelsen derfor. Da han straks saa Opdagelsens store Betydning, udsendte han hurtig til de forskellige Universiteter en kortfattet Meddelelse om sine Forsøg, der ogsaa bleve gentagne alle Vegne og vakte en stor Opsigt. Allerede samme Aar konstruerede Schweigger Multiplikatoren, og Ampère gav den bekendte Regel om Figuren, der svømmer i Strømmen; den simple Form, som Reglen antager, naar man anvender den højre Haand i Stedet for en hel Figur, hidrører fra Professor Holten i Kjøbenhavn.

Som omtalt fulgte andre Opdagelser meget hurtigt oven paa Ørsteds, saaledes Ampères Iagttagelse af Strømmes Indvirkning paa hinanden og af Solenoidernes Identitet med Magneter, og efter faa Aars Forløb gav han en fuldstændig Teori for disse Virkninger, der i Forening med Ohms Lov (1827) danner Grundlaget for den matematiske Behandling af Elektricitetens og Magnetismens gensidige Virkninger.

En Mængde af de andre Opdagelser paa Elektricitetens Omraade skyldes Faraday. Han blev født i Nærheden af London i Aaret 1791, kom i Lære hos en Boghandler, hvor han fandt Lejlighed til at lære Kemi og Fysik, og avancerede efterhaanden gennem forskellige Stillinger til Professor i London, hvor han ved sin Død 1867 var Medlem af 68 lærde Selskaber. Af Opdagelser, som skyldes Faraday, kan nævnes Induktionen, som for øvrigt allerede Ampère havde sagt maatte eksistere, endvidere den elektrolytiske Lov, Diamagnetismen, Drejning af plansat Lys ved Elektromagneten og mere. Faraday var aldeles ikke Matematiker men erhvervede sig ved sine talrige Forsøg en meget dybtgaaende Opfattelse af Naturkræfternes Virkninger og deres Forbindelse med hinanden. Han angreb Voltas Kontaktteori og fremhævede med Bestemthed, at de kemiske Virkninger vare Aarsag til den elektriske Strøm; om alle Naturkræfter paastod han, at de aldrig virkede paa

Afstand, men kun ved Mellemled, fra Molekyl til Molekyl. Endvidere mente han, at alle Naturkræfter kunde forvandles til hinanden og i Grunden vare forskellige Former af samme Kraft. Tyngdekraften var den vanskeligste at faa Bugt med; han anstillede Forsøg for at fremkalde Elektricitet ved Tyngden, og skønt disse Forsøg vare forgæves, udtalte han dog det Haab, at Fremtiden ogsaa vilde lære dette saavel som at omsætte andre isolerede Kræfter som f. Eks. Cohæsionen.

I de sidste Aartier har Interessen for en stor Del drejet sig om praktisk at udnytte Elektriciteten. Vi kunne saaledes nævne Telegrafen, af hvilken den første brugelige blev foreslaaet Aar 1835 af Amerikaneren Morse, Telefonen, som i sine forskellige Former er udfunden af Amerikanerne Bell (1877) og Edison, den elektriske Belysning, de elektriske Maskiner af Siemens (Berlin) og Belgieren Gramme.

Paa Optikens Omraade maa fra Aarhundredets Begyndelse navnlig fremhæves Frauenhofer (1787—1826). Han var den første, som nøjere undersøgte Solspektrets Farver og mørke Linjer, væsentlig for at komme til Indsigt i de forskellige Stoffers Dispersionsevne, hvad der var af Vigtighed for ham for at konstruere bedre akromatiske Linser til Brug i store Kikkerter. Frauenhofer undersøgte ogsaa Spektret af Fiksstjerner samt af glødende Legemer og elektriske Gnister, men den egentlige Spektralanalyse hidrører dog fra Bunsen (f. i Göttingen 1811) og Kirchhoff (f. i Königsberg 1824), bægge Professorer i Heidelberg. I Aaret 1860 bekendtgjorde de en Række Undersøgelser om Flammernes Linjespektrer samt om deres Absorption af den samme Farvestraale, som de selv udsende. Hermed var Grundlaget givet til hele Spektralanalysen, der siden den Tid har udviklet sig til saa megen Fuldkommenhed og ført saa mange andre Opdagelser med sig.

Der staar endnu tilbage at omtale den nyere Tids store Opdagelse af Principet om Energiens Vedligeholdelse. Den første, som har givet Bidrag hertil, er Franskmanden Carnot, men da han troede paa et Varmestof, vare hans Ideer ikke korrekte. Der er imidlertid for kort Tid siden udkommen Uddrag af Carnots efterladte Papirer, som vise, at han kort før sin Død (1832) opgav Antagelsen af Varmestoffet og fandt en tilnærmet rigtig Værdi for Varmens mekaniske Ækvivalent. I Aaret 1842 udgav den tydske Læge Mayer nogle »Bemærkninger om Kræfterne«, hvori han udtaler Sætningen om Varmens og Arbejdets Ækvivalens, men da han fremhæver, at Bevægelsen for at blive til Varme maa ophøre at være Bevægelse, have hans Forestillinger ikke været synderlig rigtige. Omtrent samtidig (1843) fremkom der Undersøgelser af Colding i Kjøbenhavn om den samme Genstand, og han fandt ved flere Forsøg en temmelig nøjagtig Værdi for Ækvivalentet. De bedste og mest omfattende Forsøg ere dog foretagne af Joule i Manchester (f. 1818); han har ændret Forsøgene paa mangfoldige Maader og fortsat dem lige ned til de seneste Aar, saa han stadig har opnaaet nøjagtigere Værdier,

hvorved det har vist sig, at det almindelig antagne Tal 424 kgm for 1 Kilogramkalori er noget for lavt; den nøjagtigste Værdi er rimeligvis 428 eller muligvis derover.

Samtidig med Opdagelsen af det bestemte Sammenhæng mellem Varme og Arbejde udvikledes, især af Clausius, Helmholtz og Maxwell, den saakaldte mekaniske Varmeteori, der navnlig for Luftarternes Vedkommende har naaet saa stor en Fuldkommenhed, at man ved Antagelsen af Luftmolekylernes retlinede Bevægelse er i Stand til at forklare en Mængde af deres Egenskaber, baade de rent mekaniske og dem, der angaa deres Forhold til Varmen. Det staar som en Fremtidsopgave at finde alle Naturkræfternes indbyrdes Sammenhæng og muligvis aflede dem alle af Bevægelsesfænomener, som det allerede er forsøgt for Elektricitetens Vedkommende, f. Eks. af Edlund i Sverig.

Da det ved Undersøgelsen af Naturkræfternes Forvandlinger til hinanden har været nødvendigt at foretage mange nøjagtige Maalinger, saa have Omstændighederne ført det med sig, at Maalekunsten er bleven uddannet til en høj Grad af Fuldkommenhed, og at man almindelig har indført de oprindelig af Gauss foreslaaede saakaldte absolute Enheder.

# Opgaver

## til de forskellige Dele af den mek. Fysik.

---

I de følgende Opgaver betegnes Legemernes Vægt ved $P$, $Q$ o. s. v., en Radius ved $r$, en Længde ved $l$ eller $2\,l$, Gnidningskoefficient ved $\mu$ eller $\lambda$; naar de sidste Betegnelser mangle, betragtes Legemerne som glatte.

237. Konstruer Forholdet mellem 4 Kræfter, som virke langs 4 givne Linjer og holde hinanden i Ligevægt.

238. En Stang ($2\,l$) holdes i Ligevægt under Vinkel $x$ mod en lodret Væg ved Hjælp af Støttepunktet $A$ (Afstand $a$) (Fig. 248). Find $x$. — Res. $\sin x = \sqrt[3]{a}$

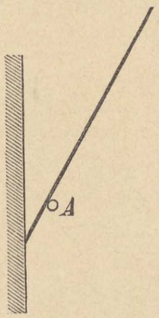

Fig. 248.

239. I en halvkugleformet Skaal ($r$) staar en Stang ($2\,l$). Find Stangens horiz. Hældning $x$ og Betingelsen for, at den hverken falder ned i Skaalen eller udenfor. Konstruer $l$, naar $x$ er given. — Res. $\cos x = l : 8\,r + \sqrt{1/2 + l^2 : 64\,r^2}$; $2\,r > l > r\sqrt{2/3}$.

240. I et kegleformet Glas med den halve Topvinkel $\alpha$ ligge to Kugler ($P$, $Q$) ved Siden af hinanden. Find Centerlinjens Hældning. — Res. $tg\,x = (P - Q) : (P + Q) \,.\, tg\,\alpha$.

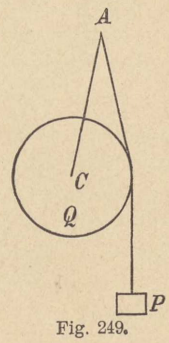

Fig. 249.

241. I $A$ ophænges bevægelig en vægtløs Stang ($A\,C = b$) med en Kugle ($Q$, $r$) samt en Snor med en Vægt $P$. Find Stangens Vinkel med Lodlinjen. (Ligevægtsbetingelsen for Snoren faas ved at betragte det krumme Stykke som fast). — Res. $\sin x = r\,P : b\,(Q + P)$.

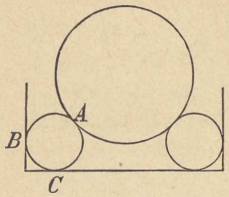

Fig. 250.

242. Tre Cylindre ($p, p, P$) ligge i en Kasse, som Figuren viser. Den skraa Centerlinjes Hældning er $\alpha$. Find alle Trykkene. — Res. $A = P : 2 \sin \alpha$, $B = P : 2 \operatorname{tg} \alpha$, $C = {}^1/_2 P + p$.

243. En regulær Sekskant ($r$) deles i en Trekant og en Femkant. Find Delenes Tyngdepunkter. — Res. ${}^2/_3 r$ og ${}^2/_{15} r$ fra Centrum.

244. Et Legeme hviler paa 3 Punkter; konstruer Trykkene.

245. Det øverste Blad af et Kortspil lægges saa langt ud over det andet som muligt; de to øverste saa langt som muligt ud over det tredje o. s. v. Hvor langt rage Kortene ud over hinanden? — Res. $a$, $a/_2$, $a/_3$ o. s. v., naar $a$ er Kortets halve Længde.

246. Naar et plant Areal drejes om en Akse i Planen uden for Arealet, beskriver det et Rumfang = Arealet Gange dets Tyngdepunkts Bane. (Guldins Regel). Bevises ved at dele Arealet i Strimler, vinkelrette paa Aksen. Anvendes i den følgende Opg.

247. Find Tyngdepunktet i en Halvcirkels Areal. Find Volumen af den Ring, som fremkommer, naar en Cirkel ($r$) drejes om en Linje i Afstanden $a$ fra Centrum. Find Volumen af den Dobbeltkegle, som faas, naar en retvinklet Trekant ($a$, $b$, $c$) drejer sig om Hypotenusen $c$. — Res. Afstand fra Centrum $= 4 r : 3 \pi$; $2 \pi^2 a r^2$; $\pi a^2 b^2 : 3 \sqrt{a^2 + b^2}$.

248. Med hvilken Kraft maa man trykke et Legeme ($P$) ind mod en lodret Væg ($\mu$) for at hindre det i at falde? — Res. $P : \mu$.

249. Tværs hen over en horiz. fast Cylinder ($r$) ligger en vandret tynd Stang ($P$, $2l$). Hvor stor en Vægt kan man hænge paa Stangens ene Ende, uden at den glider? ($\mu = \operatorname{tg} \alpha$). — Res. $P r \alpha : (l - r \alpha)$.

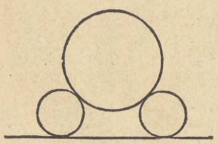
Fig. 251.

250. Tre Cylindre ($p, p, P$; Gnidning $\mu$) ligge, som Fig. viser, paa en vandret Plan (Gnidning $\lambda$). Hvor store maa $\mu$ og $\lambda$ være, naar den skraa Centerlinje danner Vinkel $\alpha$ med Lodlinjen? — Res. $\mu = \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha$; $\lambda = P : (P + 2p) . \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha$.

251. Paa en Vinde (Radius $a$, Byrde $B$) findes en Remskive ($R$), der bevæges ved en Rem fra en mindre Skive ($r$) med et Haandsving ($m$), hvorpaa Kraften $K$ virker. Find $K$ samt Spændingsforskellen $X$ i Remstykkerne. — Res. $X = K m : r = B a : R$.

252. En Rambuk er en tung Klods, der ved sit Fald kan ramme Pæle ned i Jorden. Hvor stor er Jordens Modstand gennemsnitlig, naar Pælen drives $1^{dm}$ ned af en Klods paa $200^{kilo}$, hvis Faldhøjde er $5^m$? — Res. 10000 Kilo, naar al levende Kraft gaar til at overvinde Jordens Modstand.

253. En Slæde glider $10^1/_4$ m ned ad en Skraaning ($tg\ \alpha = {}^9/_{40}$); hvor langt kan den derefter løbe vandret? ($\mu = {}^1/_{50}$). — Res. $102^1/_2$ m.

254. En Mand (75 Kilo) gaar i $^1/_2$ Minut op ad en Trappe, 6 m høj. Hvor mange Hestekræfter? — Res. $^1/_5$ Hk.

255. En Hest trækker med en Kraft af 30 Kilo en Hestegang med Radius 5 m 120 Gange rundt i Timen. Hvilken Hestekraft? — Res. $2\pi : 15$ Hk.

256. Hvad vejer en Vogn, som med 1 Hestekraft trækkes op ad en Skraaning ($sin\ \alpha = {}^1/_{20}$, $\mu = {}^1/_{40}$) med Hastigheden $^1/_2$ m i Sekundet? — Res. 2000 Kilo.

257. En Kugle falder 10 m ned ad en Skraaplan ($sin = {}^4/_5$), hvorefter en lille krum Flade fører den ind paa en Plan, der er $\perp$ paa den første. Hvor langt løber den op, naar Gnidningskoef. er $\mu$? — Res. $10\ (4 - 3\mu) : (3 + 4\mu)$.

258. En tynd Valse ($P$, $r$) hviler med tykkere Tapper ($R$) i 2 Huller ($\mu$). Find den Vægt, som netop kan dreje Valsen, naar Vægten hænger i et Tov om den. Eks. $\mu = r : R$. — Res. $K = R\,P\,\mu : (r - R\,\mu)$; $\infty$.

259. En mindre Kraftmaskines Arbejdshastighed kan findes ved at anbringe paa Aksen en Skive med Snorløb ($R$), hvori lægges en Snor med Vægtene $P$ og $p$, som afpasses saaledes, at de ballancere under Omdrejningen. Hvor mange Hestekræfter, naar der er $n$ Omdrejninger i Minuttet? — Res. $2\,n\,\pi\,R\,(P - p) : 4500$.

260. Dersom et Hjul ($P$) skal gaa saa let som muligt (som f. Eks. ved Faldmaskinen), kan man enten tilspidse Akseenderne (Pinoler) og lægge dem i koniske Fordybninger, eller man kan lægge Aksen ($\varrho$) hen over 4 Friktionshjul ($p$, $R$) med tynde Akser ($r$). Find Forholdet mellem den tabte Energi med og uden Friktionshjul, naar $P$ har gjort et Omløb, idet man ser bort fra den rullende Gnidning og sætter Friktionshjulenes samlede Aksetryk $= P + 4p$ (hvilket dog ikke er fuldstændig nøjagtigt, fordi Trykkene mellem

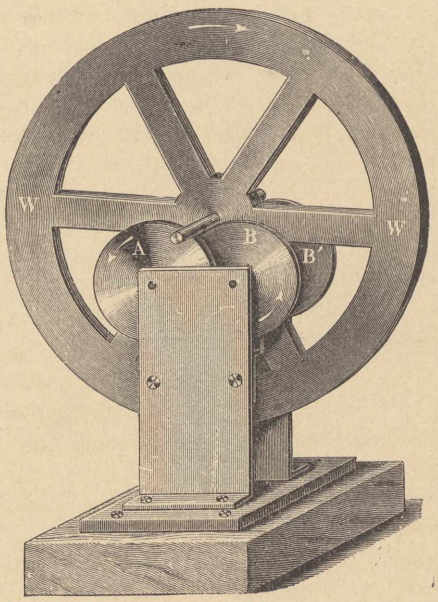


Fig. 252.

$\varrho$ og $R$ ikke ere vertikale. Gnidningskoefficient er $\mu$. — Res. $(P + 4p) : P \,.\, r : R$.

261. Find ved Sammensætning af Kræfter og Reaktioner Ligevægtsbetingelsen for en glat Skrue ($K$. $r$; $B$, $h$).

262. Samme Opgave, men med Gnidning ($\mu$), som antages at virke i Afstanden $\varrho$ fra Aksen (omtrent midt paa Gængerne), Skruelinjens Hældning er $\alpha$. Skruen løftes jævnt. — Res. $Kr = B\varrho\,(\mu \cos\alpha + \sin\alpha) : (\cos\alpha - \mu \sin\alpha) = B\varrho\,(2\pi\varrho\mu + h) : (2\pi\varrho - \mu h)$. Den herved bestemte Værdi af $K$ bliver ofte 10 á 12 Gange saa stor som uden Gnidning.

263. Find Diametren og Forlængelsen af en Smedejærns Stang ($2^{m}$), som bærer 1000 Kilo ($^1/_5$ af Elasticitetsgrændsen). — Res. $2{,}_{06}{}^{cm}$; $0{,}_{3}{}^{mm}$.

264. En Smedejærns Bjælke ($6^{m}$, $3^{cm}$ bred og $15^{cm}$ høj) er fastgjort vandret i den ene Ende; hvor meget kan den bære i den anden Ende, naar man ser bort fra dens egen Vægt, og hvor meget, naar Vægtfylden er 7? Fasthedskoeff. = 60. — Res. 1125 Kilo; $1030^1/_2$ Kilo.

265. En Bjælke, $2^{cm}$ bred, $10^{cm}$ høj, af Støbejærn (Vf. 7) hviler paa bægge Ender. Hvor lang, uden at knække? — Res. $13{,}_{8}{}^{m}$.

266. Hvor meget kan samme Bjælke bære paa Midten, naar den kun er $10^{m}$ lang? — Res. $63^1/_3$ Kilo.

267. En firkantet Smedejærns Stang ($4^{cm}$, $1^{cm}$) afkøles fra $50^0$ til $0^0$ (Udvidelsesk. $0{,}_{000\,012}$). Hvilken Kraft kan forhindre Sammentrækningen? Er Elasticitetsgrændsen overskreden? — Res. 4800 Kilo; nej.

268. Et Cylinderglas (Radius $2^{cm}$, Højde $10^{cm}$) fyldes med Vand. Find det samlede Sidetryk. — Res. $628^{gr}$.

269. Bevis, at hele Trykket paa en krum Flade er lig Trykket paa en lige saa stor plan Flade, der ligger vandret gennem dens Tyngdepunkt.

270. Hvor stort er det samlede Tryk paa et kegleformet Glas Vand? Radius = $3^{cm}$, Højde = $4^{cm}$. — Res. $20\pi^{gr}$.

271. Find (ved Konstruktion) Trykcentret i et Rektangel, hvis ene Side holdes i Vandkanten.

272. Hvad er Forholdet mellem Vægtfylderne af Platin og Brint?

273. Hvad vejer en cylindrisk Kakkelovn uden Laag og Bund? ($h = 1^1/_2{}^{m}$, $r = 30^{cm}$, Tykkelsen = $8^{mm}$). — Res. cr. 165 Kilo.

274. Hvad vejer en Bjælke, $5^{m}$ lang, $20^{cm}$ bred, som synker $10^{cm}$ i Vand? — Res. 100 Kilo.

275. I hvilket Vægtforhold maa Bly og Kork forenes for at faa Vægtfylden 1? — Res. $B : K = 342 : 104$.

276. Find Vf. af 4 Kilo Kobber + 3 Kilo Sølv. — Res. cr. $9^1/_2$.

277. Et Haarrør (helst med tynde Vægge) stilles skraat i Vand og løftes ud af Vandet i denne Stilling. Hvorfor løber der intet ud, naar Røret derpaa stilles lodret?

278. To Plader stilles næsten vandret med en lille Hældning mod hinanden, og imellem dem lægges en Vanddraabe. Hvorfor løber den ind mod Skæringslinjen, naar Pladerne befugtes?

279. Hvor stor er hele Atmosfærens Vægt. — Res. cr. $5^1/_4$ Trillioner Kilo.

280. I et Reagensglas med noget Vand i stikkes et andet, som er ganske lidt smallere; hvorfor falder dette ikke ud, naar det hele vendes om?

281. Et Rør (61cm) fyldes til en Højde af 50cm med Kvægsølv og stilles omvendt med Mundingen 1cm under Kvægsølvet i en Skaal. Find Kvægsølvhøjden i Røret, naar Lufttrykket er 76cm. — Res. 38cm.

282. Fig. 253 viser et selvtegnende Barometer, som bæres ved en Snor af Vægten $P$gr. Det indvendige Gennemsnit foroven er $M$ □cm, det udvendige forneden $N$ □cm. Røret har Længden $l$cm og vejer fyldt med Kvægsølv $Q$gr. Find (ved Hjælp af Opg. 82) Vægten $P$, naar Lufttrykket er $B$cm, og Røret er sænket et Stykke $x$cm ned i Kvægsølvet i Skaalen. Specielt $M = N$. — Res. $P = Q - 13{,}6\ lM + 13{,}6\ (MB + (M-N)x)$.

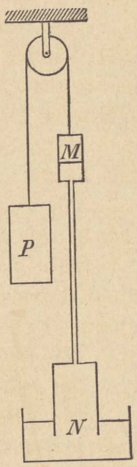

Fig. 253.

283. Udled heraf, hvor meget $x$ forandrer sig, naar Lufttrykket bliver $b$cm større, mens $P$ er uforandret. Specielt $N \gtreqless M$. — Res. $Mb : (N-M)$. Barometret er altsaa mest følsomt, naar $N - M$ er lille.

284. Bevis, at Niveauet i den Skaal, hvori det selvtegnende Barometer dypper ned, ikke forandres med Lufttrykket.

285. Et foroven lukket Rør, hvis Længde er lig Barometerhøjden, føres lodret helt ned i Kvægsølv. Hvor meget forøges den indelukkede Lufts Vægtfylde? — Res. $(1 + \sqrt{5}) : 2$.

286. Flere Luftarter (Rumfang $R_1$, $R_2$ . ., Tryk $B_1$, $B_2$ . .), som ikke virke kemisk paa hinanden, samles i Rumfanget $R$. Find Trykket $B$. Specielt $R = R_1 = R_2$ . . — Res. $RB = R_1 B_1 + R_2 B_2 + . .$

287. Dersom de samme Luftarter have Normalvægtfylderne $F_1$, $F_2$ . . ., hvorledes findes da Blandingens Normalvægtfylde $F$? — Res. $FRB = F_1 R_1 B_1 + F_2 R_2 B_2 + \ldots$ Dersom $B = B_1 = B_2 = . .$, faas $F = F_1 . R_1 : R + F_2 . R_2 : R + \ldots$, saa at Blandingens Vægtfylde bliver lig Summen af Partialvægtfylderne.

288. Et Legeme paa $R$ cubcm vejer $P$gr ved 10° og 75cm Lufttryk. Hvor meget vejer det i det lufttomme Rum, og hvor meget ved $t$° og $B$cm Lufttryk, naar $R$ forbliver uforandret? — Res. $P + {}^1/_{808}\ R$; $P + {}^1/_{808}\ R - 0{,}0013\ RB : 76\ (1 + 0{,}00367\ t)$.

289. Find den sande Vægt af en Genstand (Vægtfylde $f$), der vejes i Normalluft med Lodder ($f_1$), hvis sande Vægt er $P$. — Res. $P\,(1 + 0{,}0013\,(^1/f - {}^1/f_1))$, med tilstrækkelig Nøjagtighed.

290. Forklar Passaterne. Hvorfor vil en rivende Flod, der paa den nordlige Halvkugle løber mod Nord eller Syd, afskære mest af den højre Bred? Hvorfor lide de yderste Skinner mest, naar Togene køre mod Nord og Syd paa en dobbeltsporet Bane?

291. Røgen fra et Lokomotiv, som kører mod Nord, viser, at Vinden tilsyneladende er Øst Nord Øst, naar den iagttages fra Toget. Naar dette drejer mod Vest, faar man mod Forventning Vinden fra den anden Side som Syd Øst Vind. Find Vindens virkelige Retning og Styrke. — Res. $v^0$ Syd for Øst, idet $tg\,v = 1 - \sqrt{^1/_2}$; $\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ Gange Togets Hastighed.

292. Bevis, at en Stjerne, hvis Bredde er $\beta$, paa Grund af Aberrationen i Aarets Løb beskriver en Ellipse med Akserne $40^1/_2$" og $40^1/_2$" $. sin\,\beta$, idet Storaksen er parallel med Ekliptika og vinkelret paa Linjen fra Solen til Stjernen. (Opløs Jordens cirkelformede Bevægelse i to retlinede, den ene parallel med den nævnte Storakse og den anden vinkelret derpaa).

293. Paa to Baner, der staa $\perp$ paa hinanden, bevæge 2 Tog sig mod Skæringspunktet med Hastighederne $\alpha$ og $\beta$ fra Afstandene $a$ og $b$. Find den korteste Afstand mellem Togene og Betingelsen for Sammenstød. — Res. $(a\beta - b\alpha) : \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; $a : b = \alpha : \beta$.

294. To Legemer bevæge sig jævnt i samme Plan; vis, at Tyngdepunktet ogsaa har en jævn Bevægelse.

295. En Mand kører paa en lige Landevej. Hvor skal han staa af for snarest at naa et Hus, som ligger $b^m$ fra Vejen, naar han gaar halvt saa hurtigt, som han kører? — Res. $\sqrt{^1/_3}\,b^m$ fra det Sted af Vejen, der ligger nærmest ved Huset.

296. Naar et Hjul ruller hen ad en Vej, hvorledes findes da Hastigheden af et bestemt Punkt paa Periferien, og hvorledes konstrueres Tangenten til den af Punktet beskrevne Kurve (Cykloiden)?

297. Et Legeme, der udkastes fra et Punkt $O$, beskriver en Parabel. Bevis, at de paa en Korde $OA$ vinkelrette Komposanter af Hastighederne i $O$ og $A$ ere lige store med modsat Tegn.

298. En Sten kastes skraat opad i Retning af en Fugl, som sidder paa en Gren; naar Fuglen i det samme falder ned af Forskrækkelse, hvad er da Betingelsen for, at Stenen træffer den i Faldet? — Res. Den træffer altid, naar den blot kastes saa hurtigt, at den træffer Faldlinjen.

299. En Skraaplan hælder saa meget, at et Legeme netop kan ligge derpaa ($\mu$). Find Retardationen, naar det kastes opad. — Res. $2g\mu : \sqrt{1 + \mu^2}$.

300. To Legemer ($P$ og $p$) kunne bevæge sig, som Fig. viser. *Gnkf.* $= \mu$. Find Accelerationen op eller ned. Hvornaar finde de to Tilfælde Sted? — Res. $\pm g \cdot (p - P (\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha)) : (P + p)$; $p \gtrless P (\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha)$.

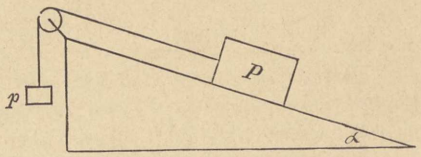

Fig. 254.

301. Stemplet i en Pompe er i sine Yderstillinger $H^m$ og $(H - s)^m$ over Brøndvandet. Naar Vandet er suget $h^m$ op og staar over Hjærtet, hvad er da Betingelsen, for at det kan løftes højere? — Res. $h^2 - h H + 10s > 0$.

302. Eks. $H = 7^m$, $s = 1^m$. Naar Hjærtet ligger i Højde med Vandfladen i Brønden, hvor højt kan Vandet da suges op? Kan Pompen give Vand? Hvis man hælder Vand i Pompen til Højden $5^1/_2{}^m$, kan den da give Vand? — Res. $2^m$, nej, ja.

303. Eks. $H = 5^m$. Sugerøret $= 3^m$. Hvad er det korteste Stempelslag, som vil suge Vand over Hjærtet. Vil Pompen give Vand dermed? — Res. $^3/_5{}^m$, ja.

304. Eks. $H = 6^m$, $s = ^3/_4{}^m$, Sugerøret $= 1^m$. Hvor højt kan Vandet suges op og til hvilken Højde over Hjærtet maa man hælde Vand i Pompen ovenfra, for at den kan give Vand? — Res. $(2 - \sqrt{^3/_2})^m$ over Hjærtet; $(2 + \sqrt{^3/_2})^m$.

305. Et Legeme ($p$) ligger paa et andet, der bevæges lodret op eller ned med Acc. $G$. Find Trykket mellem Legemerne. — Res. $p\ (1 \pm G : g)$. (Naar vort Legeme faar en uregelmæssig Bevægelse, opstaar der indvendig lignende Tryk af foranderlig Størrelse, hvilket muligvis er en medvirkende Aarsag til Søsyge).

306. Tre glatte Legemer ($P$, $P$, $4P$) ere forbundne, som Fig. viser. Naar Legemerne (uden Begyndelseshastighed) have gaaet Vejen $a$, klippes Snoren over ved $A$. Hvor langt bevæge de to Legemer sig videre i den næste lige saa lange Tid, og hvilken Hastighed faa de? — Res. $a$, $o$.

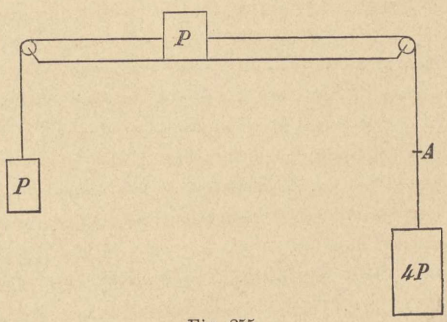

Fig. 255

307. En Kugle ligger paa en Skraaplan ($\angle \alpha$), som bevæges vandret frem med Acc. $G$. Hvornaar løber Kuglen op eller ned? — Res. $G \gtrless g\ tg\ \alpha$.

308. Med hvilken fremadgaaende Acc. $G$ maa man trække et Legeme, som holdes i en Snor (Hældning $\alpha$), naar Legemet lige skal røre en vandret Flade? — Res. $G = g\ cotg\ \alpha$.

309. En lodret, glat Cylinder ($P$, $r$) trækkes ved Hjælp af en vandret Snor hen ad et Bord med Kraften K. Den lodrette Afstand fra Midten af Cylindren til Snoren kaldes $a$. Hvor lille kan $P$ være, uden at Cylindren vælter, og hvad er da Acc.? — Res. $P = K\ .\ a : r$; $G = g\ .\ r : a$.

310. En Stang ($P$, $A\,B = 2l$, $\angle \alpha$) støtter sig paa et vandret glat Bord og er foroven sammenleddet med en vandret Stang ($P$, $A\,C = 2l$), som holdes af en lodret Kraft $K$ i $C$ og en Svingkraft $S$. Find disse Kræfter og find, hvor meget de maa forøges, og hvilken vandret Kraft $X$ man maa tilføje, naar Stængerne skulle bevæges med Acc. $g$ hen ad Bordet. — Res. $K = {}^3/_2\ P$, $(+\ {}^1/_2\ P\ tg\ \alpha)$; $S = 2\ Pl$, $(+\ Pl\ tg\ \alpha)$, $X = 2\ P$.

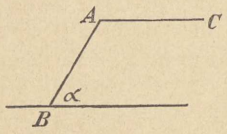

Fig. 256.

311. Et glat tresidet Prisme ($P$, $\alpha$), som ligger paa et vandret Bord, trykkes til Siden af en Stang ($p$), som er anbragt i et lodret glat Rør. Find Accelerationerne og vis, at Energien vedligeholdes. — Res. $G = g\ p\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha : (P\ cos^2\ \alpha + p\ sin^2\ \alpha)$; $G_1 = G\ tg\ \alpha$.

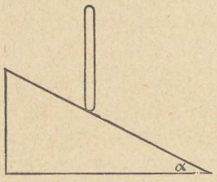

Fig. 257.

312. Samme Prisme bevæges til Siden, ved at et Legeme ($p$) ligger paa det og glider ned ad det. Find Accelerationerne og vis, at det fælles Tyngdepunkt bevæger sig lodret. — Res. $G = g\ p\ cos\ \alpha\ sin\ \alpha : (P + p\ sin^2\ \alpha)$; Legemets Acc. langs Skraaplanen er $g\ sin\ \alpha$ og $\perp$ derpaa $G\ sin\ \alpha$.

313. $n$ lige tunge Kugler ligge lige ved Siden af hinanden med Centrerne i samme vandrette Linje; de ere to og to forbundne ved en uelastisk Snor af Længde $a$. Naar man giver den forreste Kugle Hastigheden $c$ fremad, hvor længe varer det da, inden den sidste sætter sig i Bevægelse? — Res. ${}^1/_2\ n\ (n-1)\ a : c$.

314. $n$ fuldkommen elast. Kugler ligge ved Siden af hinanden med Centrerne i samme vandrette Linje. Hver Kugle har halv saa stor en Masse som den forrige. Dersom man giver den største en Hastighed $c$ ind mod de andre, hvilken Hastighed faar da den sidste? — Res. $({}^4/_3)^{n-1}\ c$.

315. To lige store Kugler med Elasticiteten $e$ (§ 102) bevæge sig langs Centerlinjen, den ene med Hastigheden $c$; hvilken Hastighed maa den

anden have for at blive standset ved Stødet? — Res. $C = -c\,(1+e)\,(1-e)$.

316. En Kugle med Elasticiteten $e$ falder fra en Højde $a$ paa et Underlag af samme Beskaffenhed; find hele den Vej, Kuglen gennemløber, før den kommer i Ro. — Res. $a\,(1+e^2) : (1-e^2)$.

317. Tre fuldk. elast. Kugler ($M$, $\mu$, $m$) ligge med Centrerne i en vandret Linje; $m$ kastes mod $\mu$, som igen sætter $M$ i Bevægelse. Hvor stor maa $\mu$ være, for at $M$ skal faa størst mulig Hastighed? — Res. $\mu = \sqrt{M\,m}$.

318. Et Jærnbanetog løber med Hastigheden $h$ paa en Kurve med Radius $r$ og Sporvidden $a$. Hvor meget maa den yderste Skinne lægges højere end den inderste, naar bægge skulle have samme Tryk? — Res. $a\,h^2 : rg$.

319. En vægtløs Stang ($A\,B = l$) bærer i $B$ en Vægt $p$ og sættes i Bevægelse omkring $A$ paa en vandret glat Plan, derved at en Svingkraft $S$ virker paa Stangen, indtil den har fuldført et helt Omløb. Hvilken Omløbstid har den da opnaaet? — Res. $T = \sqrt{\pi\,p\,l^2 : g\,S}$.

320. Om en fast Trisse ($I$, $r$) er der viklet en Snor, hvis inderste Ende er fastgjort paa Trissen, medens den anden Ende bærer Massen $m$. Med hvilken Acc. falder denne? — Res. $G = m\,r^2\,g : (m\,r^2 + I)$.

321. Med hvilken Acc. falde Lodderne ($p$ og $p+q$) paa Atwoods Faldmaskine, naar man tager Hensyn til Inertimomentet $I$ af Trissen ($r$)? — Res. $r^2\,q\,g : (r^2\,(2\,p+q) + g\,I)$.

322. En Snor fæstes paa en Cylinder ($P$, $r$, $I$), vikles flere Gange om den og fastgøres med den anden Ende lodret over Cylindren. Med hvilken Acc. falder denne, naar den slippes? — Res. $r^2\,P\,g : (r^2\,P + g\,I)$.

323. En Cylinder ($P^{gr}$, $A\,\square^{cm}$) svømmer oprejst i Vand. Naar den trykkes $x^{cm}$ længere ned og slippes igen, hvilken Kraft paavirker da Legemet, hvilken Bevægelse faar det, og hvor længe er det om at gaa tilbage til sin oprindelige Stilling? — Res. $A\,x^{gr}$; pendulagtige Sv.; $\frac{1}{2}\,\pi\,\sqrt{P : g\,A}$, naar $g$ udtrykkes i Centimeter.

324. Legemet $M$ har Inertimomentet $I$ om en Akse gennem Tyngdep. $T$ (Fig. 258) og Momentet $L$ om en dermed $\neq$ Akse gennem $A$ (i Afstanden $a$). Bevis at $L = I + M\,a^2$. — Naar Massen i et vilk. Punkt $P$ kaldes $m$, faar man $L = m_1\,x_1^2 + m_2\,x_2^2 + \ldots = m_1\,(a^2 + r_1^2 - 2\,a r_1\,\cos\alpha_1) + m_2\,(\;) + \ldots = a^2\,(m_1 + \ldots) + (m_1\,r_1^2 + \ldots) - 2\,a\,(m_1\,r_1\,\cos\alpha_1 + \ldots) = M\,a^2 + I$, idet den sidste Parentes bliver 0, naar $T$ er Tyngdepunktet, hvad man lettest ser, naar man tænker sig $a$ vandret og derpaa samler hele Vægten i $T$.

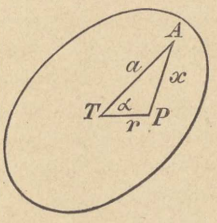

Fig. 258.

325. Et Legemes Inertimoment om en Akse gennem Tyngdepunktet betegnes ofte ved $Mk^2$, hvor $k$ kaldes Gyrationsradius. Hvad er nu et Penduls reducerede Længde, naar det svinger om en Akse $\perp$ med den forrige i Afstanden $a$? — Res. $a + k^2 : a$. — Bevis herved, at Svingningernes Akse er lavere end Tyngdepunktet, og bevis Loven for Reversionspendulet. Hvor skal man vælge Drejningsaksen for at faa de hurtigste Svingninger? — Res. $a = k$.

326. Find et Legemes Slutningshastighed, naar det falder i Afstanden $a$ fra Jordcentret til Afstanden $x$. — Res. $h^2 = 2km\ (1/x - 1/a) = 2gr^2\ (1/x - 1/a)$, hvor $r$ = Jordradien. Eks. find $h$, naar $a = 2r$ og $x = r$, og find den levende Kraft $X$, naar Legemet vejer 1 Kilo. — Res. $h^2 = gr$ ; $X = 1/2 r = 10^7 : \pi$ kgm. (Stjerneskud).

327. Hvorledes maatte en Planets Hastighed afhænge af Solens Masse $M$ og Afstand $r$, for at Bevægelsen kunde ske i en Cirkel? — Res. $h^2 = k\,M : r$.

328. Naar man kender en Planets Omløbstid, Middelafstand og Banens Ekscentricitet, hvorledes udtrykkes da Hastigheden i Periheliet? — Res. $H = 2\pi a : T \cdot \sqrt{(1+e) : (1-e)}$.

329. Udtryk Parametren $p$ i en Planets Bane ved Solens Masse $M$, Periheliets Afstand fra Solen $\varrho$ og Hastigheden $H$ i Periheliet. — Res. $p = 2\varrho^2 H^2 : kM$. (Heraf ses, hvorledes $\varrho$ og $H$ maa afhænge af hinanden, for at Banen kan blive en Cirkel, Ellipse, Parabel eller Hyperbel).

330. Hvorledes kan man benytte Formlerne i § 120 for at finde en Planets Hastighed paa et bestemt Sted af dens Bane, naar denne og Omløbstiden ere bekendte?

331. I Astronomien bestemmes en Planets heliocentriske Bevægelse, saaledes som den vilde tage sig ud, set fra Solen. Da denne ogsaa bevæger sig ind mod Planeten, bliver hele den relative Acceleration, som Planeten faar, $km : r^2 + kM : r^2 = k\,(M + m) : r^2$. D. v. s. at Planeten tiltrækkes, som om Solen var fast og havde Massen $M + m$. Hvilken lille Afvigelse fremkommer der herved i den 3dje Keplerske Lov? (Smlgn. § 120).

332. Hvor meget formindskes Tyngden et Sted paa Fastlandet, hvor Maanen ($m$, $a$) staar i Zenit? Kaldes Jordradien $r$, bliver Forskellen mellem Maanens tiltrækkende Acceleration paa Jordens Overflade og Centrum $\gamma = km : (a-r)^2 - km : a^2 = 2kmr : a^3$ (idet højere Potenser af $r : a$ bortkastes). Heraf faas $\gamma = g : 8640000$

333. Find Forholdet mellem Maanens ($m$, $a$) og Solens ($M$, $A$) Indflydelse paa Tyngdekraften ved Jordens Overflade. Ved at regne som i forrige Opgave faas Forholdet $mA^3 : Ma^3 = 5/2$. I lignende Forhold maa de to Flodbølger staa til hinanden. Det viser sig ogsaa, at Forh. mellem Springflod og Nipflod paa aabent Vand er $(5 + 2) : (5 - 2) = 7/3$.

334. Paa Centrifugalmaskinen anbringes et Glas med Vand, som drejes rundt. Hvilket lodret Gennemsnit faar den krumme Vandflade? — Res. Parabel med Parametren $g\,T^2 : 2\,\pi^2$. (Subnormalen er konstant.

335. Hvad bliver Formlen for Tyngden paa Breddegraden $b$, naar den udtrykkes ved $\angle\, 2\,b$ (§ 124). — Res. $g = 9{,}806\ (1 - {}^1/_{400}\ cos\, 2\,b)$. Hvilken Betydning har Koefficienten $9{,}806$?

336. Naar et Legeme paa Breddegraden $b$ har Vægten $P$, hvad er da dets Vægt under $45^0$? — Res. $Q = P\ (1 + {}^1/_{400}\ cos\, 2\,b)$.

337. Hvilket Tryk maa man udøve paa en $2^m$ høj Vandsøjle, for at Vandet kan løbe ud af et Hul ved Bunden med Hastigheden $20^m$? ($g = 10^m$). — Res. $1{,}8$ Kilo pr. $\square^{cm}$.

338. Naar Udløbet fra en stor Vandmasse finder Sted gennem en Sideaabning ind under et $a^m$ lavere Vandspejl, hvorledes beregnes da Udløbshastigheden? — Res. $h = \sqrt{2\,g\,a}$. (Udløbskoeff. $= 0{,}6$.)

339. Naar den anden Vandbeholder i forrige Opgave har et nyt Udløb i det fri ($b^m$ under det øverste Vandspejl), kaldes den en Vandstue. Find Forskellen $a$ mellem Vandspejlene, naar Udløbsarealerne ere $A$ og $B$, og find Udløbshastigheden i det fri. — Res. $a = b\,B^2 : (A^2 + B^2)$; $h^2 = 2\,g\,b\,A^2 : (A^2 + B^2)$.

340. Et cylindrisk Kar med Vand ($A\ \square^m$, $b^m$) har i Bunden en mindre Aabning ($B\ \square^m$, Udløbskoeff. $= \alpha$). Med hvilken Hastighed synker Vandspejlet? — Res. $\sqrt{2\,g\,b\,.\,\alpha^2\,B^2 : A^2}$ — Vis derefter, at Vandspejlet hele Tiden sænker sig, som om det faldt med konstant Retardation ($g\,\alpha^2\,B^2 : A^2$), og find derved den Tid, hvori Karret tømmes. — Res. $T = \sqrt{2\,b : g}\ .\ A : \alpha\,B$.

341. Hvor højt skal det omtalte Kar fyldes for at løbe ud i en Time (et Vandur), og hvor langt nedenfra skulle Kvartermærkerne anbringes? — Res $b = 6\,480\,000\,g\,\alpha^2\,B^2 : A^2$, ${}^9/_{16}b$, ${}^1/_4 b$, ${}^1/_{16}b$.

342. Med hvilken Hast. strømmer atm. Luft med Trykket $B^m$ Kvægsølv ud i et Rum, hvor Trykket er $b^m$? Temperaturen $= 0^0$. — Res. cr. $400^m\ \sqrt{(B - b : B)}$, hvilket dog kun stemmer med Forsøg, naar $B - b$ er lille.

343. En Luftart, hvis Vægtfylde i Øjeblikket er $f$ Gange Atmosfærens Normalvægtf., strømmer ud i Atmosfæren med et Overtryk af $l^{cm}$ Vand, hvor stor er Hastigheden? — Res. cr. $12{,}8\ \sqrt{l : f}$ Metre. (Blæsning, Gasudstrømning).

344. Med hvilken Hast. strømmer Brint ud i det lufttomme Rum ved $0^0$ C? — Res. cr. $1500^m$.

345. Belysningsgas med Normalvægtfylden $0{,}56$ Gange Atmosfærens strømmer ved $15^0$ C. under et Overtryk af $3^{cm}$ Vand ud igennem et Rør

af $^1/_2$cm Diameter (Koeffic. = 0,9). Hvor megen Gas strømmer der ud i 4 Min.? — Res. cr. $^1/_8$ cub$^m$.

346. Hvor stor bliver Luftmodstanden for en Kugle ($r^m$, $h^m$), naar Lufttrykket er $B^m$? — Res. $^1/_6\ r^2\ h^2\ B$ Kilo.

347. En Meteorsten ($r = 5^{cm}$, $h = 30$ km) bevæger sig gennem Atmosfæren i Højden 36,$^8$km. Hvor stor er Luftmodstanden og Tabet af levende Kraft i $^1/_{100}$ Sek.? — Res. 2850 Kilo; 855000kgm (= cr. 2000 Varmeenheder).

348. Beregn Vandbølgers Hastighed under Forudsætning af en jævn Cirkelbevægelse. Vægten af en Vanddel er $mg$; Reaktionen $R$ fra det øvrige Vand maa staa $\perp$ Vandoverfladen. Resultanten af $mg$ og $R$ giver den midtpunktsøgende Kraft $K$. Man indser først, at Tangenten $s$

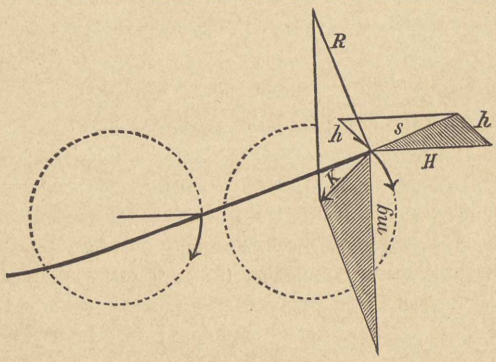


Fig. 259.

til Vandoverfladen er Diagonal i det Hastighedernes Parallelogram, som dannes af Bølgens fremadskridende Hastighed $H$ og Vanddelenes Hastighed $h$ taget i modsat Retning, idet Bølgelinjen kan beskrives af et Punkt paa en Cirkel, der drejer sig med Hastigheden $\div h$ og forskydes med Hastigheden $H$. (Sammenlign Opg. 296). Af de to skraverede Trekanter faas derpaa $K : mg = h : H$. Desuden har man $b = Ht$, $K = mh^2 : r$ og $h = 2\pi r : t$, hvoraf $H = \sqrt{bg : 2\pi} = 1{,}_{25}\sqrt{b}$.

349 Lydhastigheden i en lang Metalstang kan faas af Formlen $h = \sqrt{e : m}$, hvor $e$ er Elasticitetskoeff. i Kilo pr. $\square^m$ og $m$ Massen i hver cub$^m$. Beregn Lydhastigheden i Staal af Vægtfylden 8 og Elasticitetskoeff. 20000 Kilo pr. $\square^{mm}$. — Res. 5000$^m$.

350. Højden af to ens Stemmegafler kan bestemmes ved at gøre den ene lidt dybere med lidt paaklæbet Voks, indtil de give nøjagtigt 4 Stød i Sekundet. Derefter lader man dem tegne deres Svingninger ved Siden af hinanden paa en sværtet Tromle. Find Svingningstallene, naar en Optælling af Svingningerne paa et vist Stykke giver 700 og 714. — Res. 200, 204.

351. Hvilken Højde $n_1$ faar en Tone $n$, naar Lydgiveren nærmer eller fjerner sig med Hastigheden $h^m$? Kaldes Lydhastigheden $H$, faas $n_1 = n\ (1 \pm h : H)$.

352. Imedens to Tog passere hinanden med samme Hastighed, piber det ene, hvilket høres fra det andet Tog, først som en høj, dernæst pludselig som en dybere Tone. Naar Forholdet mellem disse Toners Højde er $^3/_2$, hvor stor Hastighed har da hvert Tog? — Res. $33{,}_2{}^m$.

353. En Stemmegaffel paa 2000 bevæges med Hastigheden $5^m$ ind mod en Væg; hvor mange Stød opstaa ved Interferens med den tilbagekastede Tone? — Res. 60.

---

## De absolute Enheder.

Da Tyngden ikke er ens over hele Jorden, vil Vægten af det samme Legeme være lidt forskellig, dersom det vejes paa flere Steder ved Hjælp af en Fjedervægt, og omvendt, dersom man ved en saadan afvejer 1 Kilo af et bestemt Stof paa forskellige Steder, vil man ikke faa de samme Mængder. For at undgaa denne Anledning til Unøjagtighed og den Besværlighed i Regningen, som kan opstaa derved, har man indført de saakaldte absolute Enheder. Det særegne ved disse er, at man ikke lægger en Vægtenhed men en Masseenhed til Grund, og at alle de Enheder, som bruges i enhver Gren af Fysiken, kunne afledes af 3 fundamentale Enheder, nemlig for

Længde, Masse og Tid.

Den absolute Længdeenhed er Længden af en bestemt Metermaalestok af Platin ved $0^0$, som opbevares i Paris; hyppigere bruges dog nu Hundrededelen deraf, Centimetren, som Enhed.

Den absolute Masseenhed er den Masse, som findes i et bestemt Kilogramlod af Platin, der opbevares i Paris, eller hvad der nu hyppigst bruges, Tusindedelen af denne Masse.

Den absolute Tidsenhed er Sekundet efter Middeltid.

De mest brugte og bekvemmeste fundamentale Enheder ere derfor Centimetren, Grammassen og Sekundet ($C$, $G$, $S$).

Af disse afledes alle andre Enheder. For Hastighedens Vedkommende ses det af Formlen $r = h\,t$, at et Legeme har Hastigheden 1, naar det gennemløber $1^{cm}$ i 1 Sek. Af Formlen $h = G\,t$ ses det, at et Legeme bevæger sig med Accelerationen 1, naar Hastigheden forøges med 1 i hvert Sekund.

Ifølge Formlen $K = MG$ bliver Kraftenheden den, som meddeler Masseenheden Accelerationen 1; denne Kraftenhed kaldes

1 Dyn,

og $10^6$ Dyn kaldes 1 Megadyn.

Da man har et Legemes Vægt $P = Mg$, faar man

Vægten af en Masseenhed $= g$ Dyn,

hvor $g$ gennemsnitlig har Værdien 981. Den Vægt, man til daglig Brug kalder 1 Gram, og hvis Masse efter de heri Bogen hidtil brugte Enheder er $\frac{0{,}001}{9{,}81}$, maa i det absolute ($CGS$) System kaldes 981 Dyn og har Massen 1.

Arbejdsenheden er det Arbejde, som bestaar i at overvinde Modstanden 1 Dyn gennem Vejen 1 cm; Enheden kaldes 1 Dyncentimeter eller

1 Erg;

$10^7$ Erg kaldes 1 Watt, især ved Beregning af det Arbejde, som udrettes af elektriske Strømme.

Det vides fra Varmelæren, at et Arbejde paa 428 Kgm kan opvarme 1 Kilo Vand 1°; den Varmemængde, som kan opvarme et Gram Vand 1° kaldes

1 Gramkalori eller 1 Joule og bliver $= 0{,}428$ kgm.

Eks. Udregn Talværdierne i efterfølgende Tabel.

1 Kilogramlod har Massen 1000, 1 Kilo $= 981\,000$ Dyn.

1 gr $= 981$ Dyn, 1 Dyn $= 1{,}02$ mg, 1 Megadyn $= 1{,}02$ Kilo.

1 Kgm $= 9{,}81 \cdot 10^7$ Erg, 1 Erg $= 102 \cdot 10^{-10}$ Kgm.

1 Damphest $= 736 \cdot 10^7$ Erg $= 736$ Watt.

1 Erg $= 136 \cdot 10^{-12}$ Damphest, 1 Watt $= 136 \cdot 10^{-5}$ Dph.

1 Gramkalori $= 4{,}2 \cdot 10^7$ Erg $= 4{,}2$ Watt.

1 Watt $= 0{,}24$ Gramkalori

1 Erg $= 24 \cdot 10^{-9}$ Gramkalori.