

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*



MATEMATIK

FOR

TEKNISKE SKOLER

AF

N. F. JENSEN

LÆRER

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

O. A. SMITH

ADJUNKT

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

II ALGEBRA



KØBENHAVN

JUL. GJELLERUPS FORLAG

1914

51(022)
51(022)

1.257
13



51 (022)

51(022)

P

MATEMATIK

FOR

TEKNISKE SKOLER

AF

N. F. JENSEN

LÆRER

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

O. A. SMITH

ADJUNKT

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

II ALGEBRA



KØBENHAVN
JUL. GJELLERUPS FORLAG

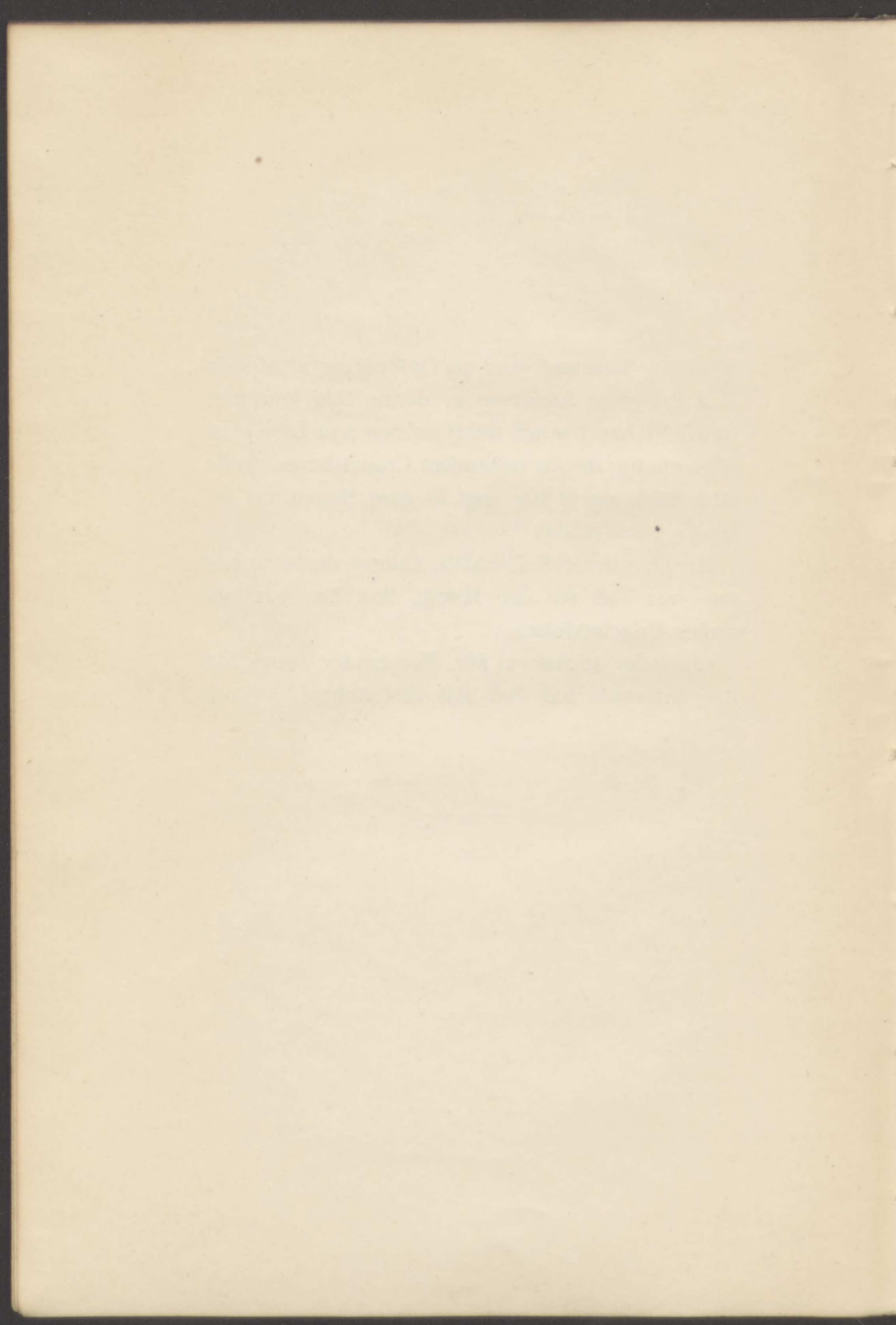
1914

DE FORENEDE BOGTRYKKERIER - AARHUS

EFTER Samraad med og Opfordring af afdøde Professor Andersen er denne Bog kommen frem. Vi har overalt holdt os den nye Læseplan efterrettelig; derfor behandles Logarithmer straks efter Rod, og vi har søgt at gøre Bogen saa let læselig som mulig.

Hr. Overlærer S. Cronfelt, Odense bedes modtage vor Tak for den Hjælp, han har ydet os under Udarbejdelsen.

Ligeledes takker vi Hr. Forstander Jonas for den Interesse, han har vist vort Arbejde.



ROD.

1. Skal man løse Ligningen

$$x^n = a,$$

hvor n er et positivt helt Tal, sker dette ved at sætte

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Ved $\sqrt[n]{a}$, der læses den n^{te} Rod af a , betegnes det Tal, der opløftet til n^{te} Potens giver a .

Sættes altsaa

$$\sqrt[n]{a} = b \dots\dots\dots (1)$$

skal

$$b^n = a \dots\dots\dots (2)$$

Her kaldes a Radikanden, n Rodeksponenten og b Roden.

Af (1) og (2) udledes

$$\sqrt[n]{b^n} = b \dots\dots\dots (3)$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \dots\dots\dots (4)$$

(3) viser:

Hvis man først opløfter et Tal til n^{te} Potens og derpaa uddrager n^{te} Roden, faar man Tallet selv.

(4) viser:

Hvis man først uddrager n^{te} Roden af et Tal og derpaa opløfter det udkomne til n^{te} Potens, faar man Tallet selv.

Disse to Sætninger kan kortelig udtrykkes saaledes:
 Potensopløftning og Roduddragning med samme Eksponenter hæver hinanden.

Naar Rodeksponenten er 2, skriver man ikke $\sqrt[2]{a}$, men blot $\sqrt{a}$. Man kalder saadanne Rodstørrelser for Kvadratrødder, medens de Rodstørrelser, hvis Rodeksponent er 3, kaldes Kubikrødder.

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ thi } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1, \text{ thi } (-1)^5 = -1$$

$$\sqrt[3]{a^{3n}} = a^n, \text{ thi } (a^n)^3 = a^{3n}$$

$$\sqrt{4} = \pm 2, \text{ thi } (+2)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\sqrt[4]{a^4} = \pm a, \text{ thi } (+a)^4 = (-a)^4 = a^4$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \pm a, \text{ thi } (+a)^{2n} = (-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = +a, \text{ thi } (+a)^{2n+1} = a^{2n+1}$$

$$\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a, \text{ thi } (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

Man ser af de 3 sidste Eksempler, at en Rod med lige Eksponent af et positivt Tal har 2 Værdier, der er lige store med modsat Tegn, medens en Rod med ulige Eksponent kun har 1 Værdi, der er positiv, hvis Radikanden er positiv, men negativ, hvis Radikanden er negativ. Derimod kan man *ikke* uddrage en lige Rod af et negativt Tal.

Rodstørrelser med ens Rodeksponenter kaldes ensbenævnte, saasom $\sqrt[n]{a}$ og $\sqrt[n]{b}$; er tillige Radikanderne ens, kaldes Rodstørrelserne ensartede, saasom $p\sqrt[n]{a}$ og $q\sqrt[n]{a}$.

Forinden vi udvikler Regneregler for Rodstørrelser, maa vi indføre Betegnelsen numerisk Værdi af et Tal. Ved den numeriske Værdi af Tallet t forstaas den rene Talværdi.

Den numeriske Værdi af $\sqrt[4]{4}$ er 2.

Den numeriske Værdi af $\sqrt[3]{-8}$ er ogsaa 2.

I de efterfølgende Sætninger forstaas altid den numeriske Værdi.

2. Man uddrager Roden af et Produkt ved at uddrage Roden af hver Faktor for sig.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

thi

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b.$$

Læses fra højre mod venstre faas Sætningen:

Man multiplicerer ensbenævnte Rodstørrelser ved at multiplicere Radikanderne og give den nye Rodstørrelse samme Rodeksponent som de givne.

Eks.

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{20}$$

$$\sqrt[n]{a^{n-p}} \cdot \sqrt[n]{a^{n+p}} = \sqrt[n]{a^{2n}} = \sqrt[n]{(a^2)^n} = a^2$$

$$\sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{6}.$$

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}.$$

Dette sidste Eksempel lærer os, naar vi læser fra venstre mod højre, at man kan flytte en Faktor i Radikanden udenfor Rodtegnet, naar man samtidig uddrager den Rod af den, som Rodeksponenten angiver.

Læser man derimod fra højre mod venstre, ser man, at man kan flytte en Faktor til en Rodstørrelse indenfor Rodtegnet, naar man samtidig opløfter den til den Potens, som Rodeksponenten angiver.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt[n]{a^{n+p}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^p} = a \sqrt[n]{a^p}$$

$$(a+b) \sqrt{a-b} = \sqrt{(a+b)^2 (a-b)} = \sqrt{(a+b)(a^2-b^2)}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} = \sqrt{25-24} = 1$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^p + \sqrt{a^{2p}-a^n}} \cdot \sqrt[n]{a^p - \sqrt{a^{2p}-a^n}} &= \sqrt[n]{a^{2p} - (\sqrt{a^{2p}-a^n})^2} \\ &= \sqrt[n]{a^n} = a. \end{aligned}$$

Man uddrager Roden af en Brøk ved at uddrage Roden af Tæller for sig og Nævner for sig. Altsaa

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

thi

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Læses fra højre mod venstre giver ovenstaaende: Man dividerer to ensbenævnte Rodstørrelser ved at dividere Radikanderne og give den nye Rodstørrelse samme Rodeksponent som de to givne.

Oftest staar man sig ved — særlig i rent numeriske Regninger — at omskrive Brøken saaledes, at Nævneren bliver et Potensstal af den Grad, Rodeksponenten angiver; derved opnaas, at Brøken kun kommer til at indeholde en Rodstørrelse.

$$\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[6]{a^2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{a-b}} \cdot \sqrt[3]{a^2-b^2} = \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(a-b)}{(a-b)}} = \sqrt[3]{(a+b)^2}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{7}{8}} = \sqrt[4]{\frac{7}{2^3}} = \sqrt[4]{\frac{14}{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{14}}{2}.$$

En Rodstørrelses numeriske Værdi bliver uforandret, naar Potenseksponent og Rodeksponent multipliceres eller divideres med samme Tal.

$$\sqrt[np]{a^{nq}} = \sqrt[p]{a^q}$$

thi

$$(\sqrt[p]{a^q})^{np} = ((\sqrt[p]{a^q})^p)^n = (a^q)^n = a^{nq}.$$

$$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^4}.$$

Er Rodeksponenten et sammensat Tal, kan en Roduddragning erstattes af to eller flere paa hinanden følgende Roduddragninger.

$$\sqrt[mp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}$$

thi

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}\right)^{mp} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}\right)^m\right)^p = (\sqrt[p]{a})^p = a.$$

Læses fra højre mod venstre, ser man, at man uddrager en Rod af en Rod ved at multiplicere Rodeksponenterne og lade Radikanden forblive uforandret.

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$$

$$\sqrt[3]{a \sqrt[5]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[15]{a^6} = \sqrt[5]{a^2}.$$

Skal en Roduddragning og en Potensopløftning foretages efter hinanden, er den Rækkefølge, de to Regneoperationer foretages i, ligegyldig.

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$$

thi

$$\left((\sqrt[n]{a})^p \right)^n = \left((\sqrt[n]{a})^n \right)^p = a^p.$$

3. Har man en flerleddet Størrelse, der indeholder Rodstørrelser, kan to eller flere Led i den kun adderes eller subtraheres, hvis de er ensartede eller kan gøres ensartede.

$$\sqrt[4]{2} + 8 \sqrt[4]{2} - 5 \sqrt[4]{2} = 4 \sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$a \sqrt[n]{x^{n+1}} + b \sqrt[n]{x^{n+2}} - c \sqrt[n]{x^{n+3}} = ax \sqrt[n]{x} + bx \sqrt[n]{x^2} + cx \sqrt[n]{x^3} =$$

$$x \sqrt[n]{x} (a + b \sqrt[n]{x} + c \sqrt[n]{x^2}).$$

$$\sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{8} + \sqrt{24\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} + \frac{7}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Skal man multiplicere eller dividere Rodstørrelser, der ikke er ensbenævnte, kan Regningen kun udføres, efter at man først har gjort dem ensbenævnte.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^p} \cdot \sqrt[np]{a^n} = \sqrt[np]{a^{n+p}}.$$

$$\sqrt[8]{16} \cdot \sqrt[12]{36} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{6} = \sqrt[6]{8 \cdot 6} = \sqrt[6]{48}.$$

4. Har man en Brøk, hvis Nævner indeholder Rodstørrelser, kan man undertiden bortskaffe disse Rodstørrelser ved at multiplicere Brøkens Tæller og Nævner med passende Tal. Vi vil her kun betragte særlig simple Tilfælde. Lad Brøken være

$$\frac{a}{b \sqrt[n]{c^p}},$$

hvor b og c ikke indeholder Rodstørrelser og n og p er hele positive Tal samt $n > p$. Vi vil nu multiplicere dens Tæller og Nævner med et saadant Tal $\sqrt[n]{x}$, at Nævneren, efter at være multipliceret med dette, bliver bc . Dette kan opnaas ved, at Størrelsen under Rodtegnet bliver c^n ; x maa da bestemmes ved Ligningen

$$b^p \cdot x = c^n$$

$$x = c^{n-p}$$

Man har altsaa

$$\frac{a}{b \sqrt[n]{c^p}} = \frac{a \sqrt[n]{c^{n-p}}}{bc}$$

Som et andet Tilfælde vil vi betragte Brøkerne

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ og } \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}},$$

hvor a og b ikke begge er Kvadrattal. Multiplicerer man disse Brøkers Tæller og Nævner henholdsvis med

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ og } \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

faar man

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}.$$

2°.

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a+b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b}} =$$

$$\frac{((\sqrt{a} + \sqrt{a+b}) - \sqrt{b}) ((\sqrt{a} + \sqrt{a+b}) + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2}$$

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{a+b})^2 - b}{a+b+2\sqrt{ab}-(a+b)} = \frac{2a+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+b}}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a+b}}{\sqrt{b}} =$$

$$\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{(a+b)b}}{b}.$$

3°. Bortskaf den irrationale Nævner af Brøken

$$\frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt[3]{512}}$$

Da $512 = 8^3$ og $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, kan Brøken omformes til

$$\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 8}$$

Multipliceres nu Tæller og Nævner med $8 + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$, faas

$$\frac{8\sqrt{6} + 10\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{16\sqrt{3} + 13},$$

hvilken Brøk atter reduceres til

$$\frac{480 + 306\sqrt{2} - 130\sqrt{3} - 8\sqrt{6}}{599}$$

ved at multiplicere dens Tæller og Nævner med $16\sqrt{3} - 13$.

5. I Aritmetikken har vi betragtet Potenser, hvis Eksponenter var hele Tal eller 0. Vi skal nu udvide Potensbegrebet til brudne Eksponenter. I den Hensigt benytter vi Sætningen, at en Rodstørrelses numeriske Værdi ikke forandres ved, at Rodeksponent og Potens-

eksponent divideres med samme Tal. Betragter vi Rodstørrelsen $\sqrt[q]{a^p}$, faar vi ved Benyttelse af ovenstaaende Sætning

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{\sqrt[q]{\frac{p}{q}} a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{p}{q}}$$

Vi tager da denne Udledning som Definition og definerer altsaa Potenser med brudten Eksponent ved Ligningen

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

6. Vi vil nu vise, at de samme Regneregler, der gælder for Potenser med hel Eksponent, ogsaa gælder for Potenser med brudten Eksponent.

$$\begin{aligned} 1^0. \quad a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q^s]{a^{ps}} \cdot \sqrt[q^s]{a^{rq}} = \sqrt[q^s]{a^{ps+rq}} = \\ &= a^{\frac{ps+rq}{q^s}} = a^{\frac{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}{1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^0. \quad a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} &= \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q^s]{a^{ps}} : \sqrt[q^s]{a^{rq}} = \sqrt[q^s]{a^{ps-rq}} = \\ &= a^{\frac{ps-rq}{q^s}} = a^{\frac{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}{1}}. \end{aligned}$$

$$3^0. \quad (ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}.$$

$$4^0. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}.$$

$$\begin{aligned} 5^0. \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} &= \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{(a^p)^r}} = \\ &= \sqrt[q^s]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{q^s}}. \end{aligned}$$

Vi mangler endnu at undersøge Rodstørrelser med negativ hel Eksponent og brudten Eksponent. Da vi har defineret Potenser med disse Eksponenter, kan vi umiddelbart overføre det almindelige Rodbegreb paa de ny Rodstørrelser, altsaa

$$\sqrt[m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$$

thi

$$\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)} = a$$

og

$$\sqrt[q]{a} = a^{\frac{q}{p}}$$

thi

$$\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} = a.$$

Til Slutning et Par Eksempler paa foranstaaende Theori:

$$1^{\circ}. \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ a \cdot a \cdot a = a = a.$$

$$2^{\circ}. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{n+p}{np}} = \sqrt[np]{a^{n+p}}.$$

3^o. Reducer Udtrykket

$$y = \left[\frac{a^{\frac{x}{1-x}} \cdot a^{\frac{x}{1+x}}}{a^{\frac{x}{1-x^2}}} \right]^{\frac{1}{x}}$$

Man har da

$$y = \left(a^{\frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x} - \frac{x}{1-x^2}} \right)^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x^2}} = \\ a^{\frac{1+x+1-x-x-1}{(1+x)(1-x)}} = a^{\frac{1}{(1+x)(1-x)}}$$

7. Skal man addere eller subtrahere Potenser, kan dette kun ske, naar de er identiske.

$$3a^3 + 4b^3 - 5a^3 + 7b^3 = -2a^3 + 11b^3$$

$$3a^n + 4a^{n+p} = 3a^n + 4a^n \cdot a^p = a^n (3 + 4a^p).$$

Det er meget hyppigt, at man bruger Potensformlerne omvendt, særlig Formlerne

$$a^{m+p} = a^m \cdot a^p$$

$$a^{m-p} = \frac{a^m}{a^p}.$$

Som en Anvendelse heraf vil vi løse Ligningen

$$2^{x+1} + 2^{x-1} = 2^x + 12$$

$$2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} = 2^x + 12$$

$$2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} - 2^x = 12$$

$$2^x \cdot \frac{3}{2} = 12.$$

$$2^x = \frac{12 \cdot 2}{3}$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3.$$

OPGAVER:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{200}$

2) $(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b}) - (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

3) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

4) $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[p]{a^n} : \sqrt[np]{(a^n)^{n+p} : (a^p)^{n-p}}$

$$5) \quad \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{x}} : \sqrt{\frac{1}{ax}} \cdot \sqrt[6]{x^2 a^5 b} : \sqrt[12]{ab}$$

$$6) \quad \frac{\sqrt{27} \cdot \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[12]{7\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[6]{18}}$$

$$7) \quad (\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}) (\sqrt[6]{2} - 1)$$

$$8) \quad \frac{\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt[3]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$$

$$9) \quad \frac{\sqrt[7]{49}}{\sqrt[7]{7} - 1} - \frac{\left(\frac{\sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7} - 1} \right)^2}{\left(\frac{\sqrt[7]{7}}{\sqrt[7]{7} - 1} \right) - 1}$$

10) $\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} : \sqrt[12]{a} \cdot a^x$. Find x , naar Udtrykkets Værdi skal være 1 for alle Værdier af a .

$$11) \quad \frac{a^3 b^{-4} : (a^{-3} b^6)^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt{a^{-2} b} : \sqrt[6]{a^5 b^2}}$$

reduceres og beregnes for $a = 0,0009$.

12) $\frac{a\sqrt{b} - c\sqrt{d}}{\sqrt{b} - \sqrt{d}} - \frac{c\sqrt{b} + a\sqrt{d}}{\sqrt{b} + \sqrt{d}}$ sammentrækkes, hvorpaa Tælleren opløses i Faktorer.

$$13) \quad \sqrt{4\frac{1}{2}} + \sqrt{10\frac{8}{9}} - \sqrt{1\frac{7}{18}}$$

$$14) \quad \frac{1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ab} + b}$$

$$15) \quad \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a \sqrt[3]{a^2}}}$$

$$16) \quad \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \right) \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \right)$$

$$17) \quad \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}$$

$$18) \quad \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{11} + \sqrt{7} + \sqrt{6}}$$

$$19) \quad \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{21}}$$

20) Find x af Ligningen

$$\sqrt[3]{x \sqrt[4]{a}} = \sqrt[4]{a \sqrt[3]{x}}$$

og gør Prøve.

$$21) \quad \frac{x+y}{\sqrt{a^{x-y}}} \cdot \frac{x-y}{\sqrt{a^{x+y}}} : \left(a^{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}} \right)^2.$$

22) Idet Rumfanget af en Terning med Kanten k er k^3 , skal man vise, at Kanten i den Terning, der dannes ved Sammensmeltning af 2 andre Terninger med Kanterne a og b kan udtrykkes ved

$$\sqrt[3]{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

23) Bevis, at

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

24) Bevis, at

$$a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \right) \left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} \right)$$

$$a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} \right) \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} \right)$$

25) Reducer Udtrykket

$$\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} - \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}.$$

KVADRATRODSUDDRAGNING.

8. I det foregaaende har vi udledet Regneregler for Rodstørrelserne. Men undertiden kræver det praktiske Liv, at man skal beregne saadanne Rodstørrelser med et vist Antal Decimaler. Antag for Eksempel, at man gennem en Beregning har funden, at en Bjælke skal have Længden $7\sqrt[3]{}$ Meter, saa maa man beregne $\sqrt[3]{}$ med nogle Decimaler for derigennem at faa en klarere Besked. Hvorledes dette gøres, skal vises i det efterfølgende.

At beregne Kvadratrodten af et helt positivt Tal N med Fejlgrænsen 1 er at angive 2 paa hinanden følgende positive, hele Tal, hvorimellem $\sqrt{N}$ ligger. Er N et Kvadrattal, bortfalder Spørgsmaalet om Fejlgrænse, da Kvadratrodten i saa Fald selv er et positivt, helt Tal.

For de tocifrede Tals Vedkommende er Opgaven løst tidligere. Vi vil først søge Kvadratrodten af Tal med 3 eller 4 Cifre. Da 100 er det mindste 3-cifrede Tal, der findes, og 9999 det største 4-cifrede Tal, har man

$$10^4 > N \geq 10^2$$

hvoraf

$$10^2 > \sqrt{N} \geq 10.$$

Heraf læres, at Kvadratrodten af et 3- eller 4-cifret Tal enten er et tocifret Tal eller ligger mellem to paa hinanden følgende Tal, af hvilke det laveste er tocifret. Det første finder Sted, hvis — og kun hvis — N er et Kvadrattal; man siger da, at Kvadratrodsuddragningen »gaar op« eller giver »Resten« Nul.

Idet Værdien af det tocifrede Tal, der skrives med a Tiere (a forskellig fra Nul) og b Enere, er $10a + b$, kan Opgaven formuleres saaledes: Bestem de største Værdier af a og b der i Ligningen

$$N = (10a + b)^2 + R$$

kan gøre $R = \text{Nul}$ eller positiv. R (Resten) er altsaa Differencen mellem N og det nærmeste lavere Kvadrattal, ifald det ikke selv er et Kvadrattal.

Ligningen omskrives til

$$N = 100a^2 + 20ab + b^2 + R,$$

$$N \geq 100a^2$$

hvoraf

$$\frac{N}{100} \geq a^2$$

$$\sqrt{\frac{N}{100}} \geq a.$$

Man skal her bruge den største positive hele Værdi for a , som opfylder ovennævnte Betingelse. Det er let at se, at a er et encifret Tal, idet

$$\frac{N}{100} < 10^2.$$

Da a er bestemt, har man

$$N - 100a^2 = 20ab + b^2 + R,$$

som ved Division med $20a$ giver

$$\frac{N - 100a^2}{20a} = b + \frac{b^2 + R}{20a}.$$

hvoraf

$$b \leq \frac{N - 100a^2}{20a}.$$

Her bestemmes b som den største Værdi, der opfylder ovennævnte Betingelse. Her kan b

blive for stor, hvad Udregningen vil vise; man maa da gøre b mindre. Endelig bestemmes R ved

$$R = N - 100a^2 - b(20a + b).$$

Er N Kvadrattal, findes $R = 0$

Regningerne opstilles som følgende Eksempel viser:

$$\begin{array}{rcl}
 a = 9 & | & 3 = b \\
 \sqrt{87} & | & 93 = N \\
 81 & 00 & = 100a^2 \\
 \hline
 20a = 180 &) & 6 \quad 93 = N - 100a^2 \\
 20a + b = 183 &) & 5 \quad 49 = b(20a + b) \\
 \hline
 144 = R = N - 100a^2 - b(20a + b).
 \end{array}$$

Man har altsaa

$$8793 = 93^2 + 144.$$

$$94 > \sqrt{8793} > 93.$$

9. Vi skal nu beregne Kvadratroden af Tal med flere end 4 Cifre. Vi vil antage, at Tallet N indeholder $(2n-1)$ eller $2n$ Cifre. Det mindste $(2n-1)$ cifrede Tal, der findes, begynder med 1 og har $(2n-2)$ Nuller efter Ettallet. (Cifrenes Antal $1 + 2n - 2 = 2n - 1$). Dette Tal er 10^{2n-2} . Det største $2n$ -cifrede Tal bestaar af $2n$ 9-Tal; lægges 1 til dette Tal, faar man det mindste $(2n+1)$ -cifrede Tal, idet dette bestaar af Tallet 1, efterfulgt af $2n$ -Nuller (Cifrenes Antal $1 + 2n$), og dette er 10^{2n} . Man har altsaa

$$10^{2n-2} \leq N < 10^{2n},$$

hvoraf

$$10^{n-1} \leq \sqrt{N} < 10^n.$$

Men heraf læres at Kvadratroden af alle $(2n-1)$ eller $2n$ -cifrede Tal indeholder n Cifre. Vi indeler nu Tallet i Grupper med 2 Cifre i hver fra højre mod venstre. Dog kan Gruppen yderst til venstre kun indeholde 1 Ciffer, hvis N er et $(2n-1)$ -cifret Tal.

Fremgangsmaaden for at finde Kvadratroden er den samme som før. Vi skal vise dette ved et Eksempel.

2	8	2	1
7	96	33	51
4			

$20 \cdot 2 = 40$	396	
$2 \cdot 20 + 8 = 48$	384	$= 48 \cdot 8$

$28 \cdot 20 = 560$	1233	
$28 \cdot 20 + 2 = 562$	1124	$= 562 \cdot 2$

$282 \cdot 20 = 5640$	10951	
$282 \cdot 20 + 1 = 5641$	5641	$= 5641 \cdot 1$

$5310 = R$

Man har da

$$7963351 = 2821^2 + 5310$$

altsaa

$$2822 > \sqrt{7963351} > 2821.$$

10. Skal man uddrage Kvadratroden af en Brøk, kan man *enten* multiplicere Brøkens Tæller og Nævner med det mindste hele Tal, der gør Nævneren til et Kvadrattal og saa uddrage Roden af Tæller for sig og Nævner for sig:

Eks.

$$\sqrt{\frac{5}{32}} = \sqrt{\frac{10}{64}} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

$$\sqrt{7\frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{56}{7}} = \sqrt{\frac{350}{49}} = \frac{\sqrt{350}}{7}$$

eller ogsaa omskriver man Brøken til Decimalbrøk og gaar da frem som ved de hele Tal, idet man inddeler i Grupper med 2 i hver Gruppe fra højre mod venstre. Hvis der er et ulige Antal Decimaler, tilføjer man først et Nul.

Eks.

$$\sqrt{341,446} = \sqrt{341,4460}$$

Gruppeinddelingen bliver da

$$\sqrt{3 \mid 41, \mid 44 \mid 60}$$

Man maa da erindre at sætte Kommaet i den fundne Kvadratrod umiddelbart forinden man trækker den første Gruppe ned, der kommer efter Kommaet. Vi vil udregne Eksemplet

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \mid 8, \mid 4 \mid 7 \\
 \sqrt{3 \mid 41, \mid 44 \mid 60} \\
 1 \\
 \hline
 20 \cdot 1 = 20 \quad) \quad 241 \\
 20 \cdot 1 + 8 = 28 \quad) \quad 224 \\
 \hline
 18 \cdot 20 = 360 \quad) \quad 1744 \\
 18 \cdot 20 + 4 = 364 \quad) \quad 1456 \\
 \hline
 184 \cdot 20 = 3680 \quad) \quad 28860 \\
 184 \cdot 20 + 7 = 3687 \quad) \quad 25809 \\
 \hline
 3051
 \end{array}
 \end{array}$$

Man har da

$$18,48 > \sqrt{341,4460} > 18,47.$$

11. Vi vil nu vise, at den største Rest, man kan faa ved Kvadratrodsuddragning, er det dobbelte af den fundne Rod. Lad N være det givne Tal og a den fundne Kvadratrod samt Resten R ; man har da

$$N = a^2 + R$$

samt

$$a^2 < N < (a+1)^2.$$

Heraf følger

$$\begin{aligned}
 a^2 + R &< (a+1)^2 \\
 a^2 + R &< a^2 + 2a + 1 \\
 R &< 2a + 1,
 \end{aligned}$$

hvoraf

$$R \leq 2a.$$

TILNÆRMET BEREGNING.

12. Da Rodstørrelserne som Regel ikke kan beregnes med fuld Nøjagtighed, har man udviklet Metoder til at beregne et Udtryk, der indeholder saadanne Tal, med en vis Nøjagtighed. At beregne et saadant Udtryk er af stor Vigtighed i det praktiske Liv.

Vi skal først beregne $\sqrt{N}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$, naar N ikke er noget Kvadrattal.

At beregne $\sqrt{N}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$ vil sige, at angive 2 paa hinanden følgende Brøker med Nævneren p , hvorimellem $\sqrt{N}$ ligger.

For nu at beregne $\sqrt{N}$ benyttes følgende Omskrivning:

$$\sqrt{N} = \frac{p\sqrt{N}}{p} = \frac{\sqrt{Np^2}}{p}.$$

Ved bekendte Metoder findes da, idet a er et helt Tal,

$$a < \sqrt{Np^2} < a + 1$$

hvoraf ved Division med p

$$\frac{a}{p} < \sqrt{N} < \frac{a+1}{p}.$$

Hvis man nu kun skal angive $\sqrt{N}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$ er begge Værdier ligegode; thi for dem begge har man

$$\sqrt{N} - \frac{a}{p} < \frac{1}{p}$$

$$\frac{a+1}{p} - \sqrt{N} < \frac{1}{p}$$

da jo

$$\frac{a+1}{p} - \frac{a}{p} = \frac{1}{p}.$$

Skal man imidlertid regne med den fundne Værdi, benytter man den Værdi, hvorpaa Fejlen er mindst. For nu at afgøre, hvilken af disse Værdier man bør benytte, bruger man følgende Sætning:

»Hvis den Rest R , der er funden ved Kvadrat-
rodsuddragningen, er større end a , benyttes
Værdien $\frac{a+1}{p}$; er derimod Resten R mindre
eller lig med a , bruges $\frac{a}{p}$.«

Man kan herigennem beregne $\sqrt{N}$ med et vist
Antal rigtige Decimaler. Skal disses Antal
være n , bliver Fejlgrænsen $\frac{1}{10^n}$.

Vi vil beregne $\sqrt{7}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{11}$.

Man har da

$$\sqrt{7} = \frac{11\sqrt{7}}{11} = \frac{\sqrt{847}}{11}.$$

Ved Kvadratrodsuddragning findes

$$29 < \sqrt{847} < 30.$$

$$\frac{29}{11} < \sqrt{7} < \frac{30}{11}$$

Da $847 = 29^2 + 6$, er Værdien $\frac{29}{11}$ en bedre Tilnærmelses-
værdi end $\frac{30}{11}$, men paa dem begge er Fejlen mindre end $\frac{1}{11}$.

Vi vil endnu beregne $\sqrt{2\frac{1}{3}}$ med 2 rigtige Decimaler.
Fejlgrænsen bliver $\frac{1}{100}$, og man har da

$$\sqrt{2\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{\frac{7}{3} \cdot 10000}}{100} = \frac{\sqrt{23333\frac{1}{3}}}{100},$$

men

$$152 < \sqrt{23333\frac{1}{3}} < 153$$

som ved Division med 100 giver

$$1,52 < \sqrt{2\frac{1}{3}} < 1,53.$$

Her er Værdien 1,53 den nøjagtigste.

Skal man beregne $a/\sqrt{N}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$, flyttes a ind under Rodtegnet og man beregner da $\sqrt{a^2 N}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$.

Skal man beregne en flerleddet Størrelse paa n Led med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$, skal man beregne hvert enkelt Led med Fejlgrænsen $\frac{1}{np}$, hvorpaa man gaar frem som vist ovenfor.

Størrelsen

$$3\sqrt{2} - \frac{5}{7}\sqrt{6} + \frac{1}{100}\sqrt{7}$$

skal beregnes med Fejlgrænsen $\frac{1}{12}$.

Hvert Led skal da beregnes med Fejlgrænsen $\frac{1}{36}$, og man benytter da ovenfor angivne Fremgangsmaade.

Ønsker man at beregne Udtrykket med 2 Decimaler, maa man beregne hvert Led med 3 Decimaler; man kan da her beregne $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ med 3 Decimaler, $\sqrt{6}$ med 3 Decimaler og $\sqrt{7}$ med 1 Decimal.

OPGAVER.

26) $\sqrt{1681} + \sqrt{9801} - \sqrt{7056}$

27) $\sqrt{\frac{361}{841}} + \sqrt{\frac{121}{625}}$

$$28) \quad \sqrt{56169} + 2\sqrt{14161}$$

$$29) \quad \sqrt{12345678987654321}$$

$$30) \quad \sqrt{6092270809}$$

$$31) \quad \sqrt{114,597025}$$

$$32) \quad \sqrt{0,0225} + \sqrt{0,5041} - \sqrt{0,822649}$$

$$33) \quad \text{Beregn } \sqrt{7} \text{ med Fejlgrænsen } \frac{1}{9}.$$

$$34) \quad \sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{2} \text{ skal beregnes med 3 rigtige Decimaler.}$$

$$35) \quad \sqrt{\frac{6\sqrt{2} - \sqrt{56}}{\sqrt{700} + \sqrt{200} + \sqrt{300} + \sqrt{600}}} \text{ bringes paa sin simpleste Form og beregnes med 2 Decimaler.}$$

$$36) \quad \frac{\sqrt{112} - \sqrt{175} + \sqrt{80} - \sqrt{20}}{\sqrt{80} - \sqrt{63} + \sqrt{45} - \sqrt{28}} \text{ reduceres og beregnes med 3 Decimaler.}$$

$$37) \quad 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{5} \text{ beregnes med Fejlgrænsen } \frac{1}{75}.$$

LOGARITHMER.

13. Ved Logarithmen til et Tal a forstaar man den Potenseksponent, man maa give 10 for at den derved fremkomne Potens kan blive lig a ; betegnes Logarithmen til a ved $\log a$, har man altsaa

$$\underline{10^{\log a} = a.}$$

10 kaldes for Logarithmesystemets Grundtal. I dette System vil følgelig

$$\log 100 = 2,$$

thi $10^2 = 100$.

1°. Vis at

$$\log \frac{1}{10} = -1$$

$$\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$$

$$\log 10^n = n$$

$$\log \frac{1}{10^n} = -n.$$

2°. Find $\log \sqrt[3]{100}$, $\log \sqrt[7]{10}$ og $\log \sqrt[n]{10^p}$

3°. Skal vi løse Ligningen

$$10^x = a$$

indses straks, at

$$\underline{x = \log a,}$$

thi ved Prøve faas

$$10^{\log a} = a.$$

4 °. Find x af Ligningen $\log x = a$.

Man har, da

$$\begin{aligned} x &= 10^{\log x}, \\ x &= 10^a. \end{aligned}$$

5 °. $\log x = -a$.

Da jo

$$x = 10^{\log x}$$

haves straks

$$x = 10^{-a} = \frac{1}{10^a}$$

SAMMENSATTE LOGARITHMER.

14. Efter at have defineret Logarithmen skal vi til at se, hvilke Egenskaber Logarithmerne har, og hvorledes man regner med dem. Vi træffer da først de saakaldte 4 Logarithmesætninger.

1) Logarithmen til et Produkt er lig Summen af de enkelte Faktoreres Logarithmer; altsaa

$$\log(ab) = \log a + \log b,$$

thi

$$10^{\log a + \log b} = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = a \cdot b.$$

2) Logarithmen til en Brøk er lig Differensen mellem Tællerens Logarithme og Nævnerens Logarithme, altsaa

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b,$$

thi

$$10^{\log a - \log b} = 10^{\log a} : 10^{\log b} = \frac{a}{b}.$$

3) Logarithmen til en Potens er lig med Potenseksponenten multipliceret med Rodens Logarithme, altsaa

$$\log a^n = n \log a,$$

thi

$$10^{n \log a} = (10^{\log a})^n = a^n$$

4) Logarithmen til en Rodstørrelse er lig Radikandens Logarithme, divideret med Rod-eksponenten, altsaa

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$$

thi

$$10^{\frac{\log a}{n}} = \sqrt[n]{10^{\log a}} = \sqrt[n]{a}.$$

Derimod kan man ikke tage Logarithmen til en flerleddet Størrelse. Skal man beregne en saadan, maa hvert Led beregnes for sig. Vi vil anvende ovenstaaende Sætninger paa nogle Eksempler.

1°. Find x af Ligningen

$$3 \log x = 2 \log a - 2 \log x + \log b$$

$$5 \log x = 2 \log a + \log b$$

$$\log x^5 = \log (a^2 \cdot b)$$

$$x^5 = a^2 \cdot b$$

$$x = \sqrt[5]{a^2 \cdot b}$$

2°. Reducer Udtrykket

$$\frac{\log \sqrt[3]{a \sqrt{a}} \cdot \log \sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a}}}{\log \sqrt{a \sqrt[3]{a}} \cdot \log \sqrt[3]{a^2 \sqrt[5]{a}}}$$

Udtrykket kan direkte omformes saaledes

$$\frac{\log \sqrt[6]{a^3} \cdot \log \sqrt[15]{a^7}}{\log \sqrt[6]{a^4} \cdot \log \sqrt[15]{a^{11}}} = \frac{\log a^{\frac{3}{6}} \cdot \log a^{\frac{7}{15}}}{\log a^{\frac{4}{6}} \cdot \log a^{\frac{11}{15}}} =$$

$$\frac{\frac{3}{6} \log a \cdot \frac{7}{15} \log a}{\frac{4}{6} \log a \cdot \frac{11}{15} \log a} = \frac{21}{44}.$$

3°. Vi vil endnu løse følgende Eksempel: Find x af Ligningen

$$x^{\log x} = a^{\log a}.$$

Tages Logarithmen, faas

$$(\log x)^2 = (\log a)^2$$

altsaa

$$\log x = \pm \log a.$$

Benyttes Fortegnet $+$, faas

$$x = 10^{\log a} = a.$$

medens Fortegnet $-$ giver

$$x = 10^{-\log a} = \frac{1}{10^{\log a}}$$

$$x = \frac{1}{a}$$

Læg endelig Mærke til, at

$$\log x = -\log a$$

giver

$$x = \frac{1}{a}$$

15. Vi har i det foregaaende set, hvorledes man kan benytte Logarithmerne, eller mere korrekt udtrykt, Logarithmesætningerne. Inden vi gaar over til den rent numeriske Regning ved Logarithmer, vil vi først opskrive en Kolonne, for derigennem at se, hvorledes Logarithmerne forandrer sig, naar Tallene forandrer sig.

$$\log \frac{1}{10^n} = -n, \text{ thi } 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

$$\log \frac{1}{100} = -2, \text{ thi } 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

$$\log \frac{1}{10} = -1, \text{ thi } 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$\log 1 = 0, \text{ thi } 10^0 = 1$$

$$\log 10 = 1, \text{ thi } 10^1 = 10$$

$$\log 100 = 2, \text{ thi } 10^2 = 100$$

$$\log 10^n = n, \text{ thi } 10^n = 10^n.$$

Naar nu n vokser ud over enhver given Grænse, vil 10^{-n} blive mindre end enhver opgiven, vilkaarlig lille positiv Størrelse. Men deraf fremgaar, at

$$\log 0 = -\infty$$

Af ovenstaaende Kolonne ser man da, at Logarithmerne til alle ægte Brøker er negative, medens Logarithmerne til alle hele positive Tal og uægte Brøker er positive, og Logarithmen til 1 er lig Nul. Derimod har de negative Tal ingen Logarithmer, idet der ikke eksisterer noget positivt eller negativt Tal, som kan være Logarithme til dem, idet jo enhver Potens af 10, hvis Eksponent er et positivt eller negativt Tal, altid er positiv. Af foranstaaende Kolonne fremgaar endvidere, at Logarithmen til ethvert Tal, beliggende mellem 10 og 100, har Formen $1, \alpha\beta\gamma\delta \dots$, og saaledes videre. Logarithmerne er som Regel irrationale Tal, der ikke kan beregnes med fuld Nøjagtighed. Enhver Logarithmeregning vil derfor som Regel være approximativ. Enhver Logarithme bestaar af et helt Tal, som kaldes Karakteristiken, og en positiv Decimalbrøk, som kaldes Mantissen. For nu at kunne regne med Logarithmer har man beregnet de saakaldte Logarithmetavler, der indeholder Mantisserne til en Række Tal, som Regel til alle hele Tal i Intervallet 1—1000. Derved bliver man i Stand til at finde Logarithmerne til alle Tal, der indeholder 4 Cifre. For at vise det, er det tilstrækkeligt at vise, at man kan finde Logarithmen til ethvert Tal, naar man kender Logarithmen til alle Tal mellem 1 og 10.

Lad nu T_1 være et saadant Tal; man har da

$$1 < T_1 < 10,$$

altsaa

$$0 < \log T_1 < 1,$$

hvoraf følger, at Logarithmen til T_1 maa have Formen

$$\log T_1 = 0, \alpha\beta\gamma\delta,$$

idet vi tænker os Mantissen indeholdende 4 Cifre.

Vi danner saa et Tal, T_n , der har de samme Cifre som T_1 og i samme Orden som dette, men har n Cifre foran Kommaet. T_n vil da fremkomme af T_1 ved i dette at flytte Kommaet $n - 1$ Pladser til højre, altsaa

$$T_n = T_1 \cdot 10^{n-1}.$$

Tages nu Logarithmen, faas

$$\log T_n = \log T_1 + \log 10^{n-1}.$$

$$\log T_n = 0,abcd + n - 1$$

$$\log T_n = (n - 1),abcd.$$

Flytter man derimod Kommaet i T_1 n Pladser til venstre, faar man et Tal, vi betegner ved T_{-n} , og som har de samme Cifre som T_1 , og i den samme Orden, men har n Nuller foran første betydende Ciffer, altsaa

$$T_{-n} = \frac{T_1}{10^n}$$

$$\log T_{-n} = \log T_1 - \log 10^n$$

$$\log T_{-n} = 0,abcd - n.$$

Ved at sammenligne

$$\log T_1$$

$$\log T_n$$

$$\log T_{-n}$$

ser man straks, at de alle tre har samme Mantisse, eller med andre Ord:

Mantissen er uafhængig af Kommaets Plads i Tallet, og at

Naar Tallet har n betydende Cifre foran Kommaet, er Karakteristikken $n - 1$; har Tallet derimod n Nuller foran første betydende Ciffer, er Karakteristikken $-n$.

Der møder os nu ved Logarithmeberegningen to Opgaver, nemlig

at finde Logarithmen, naar Tallet er givet,

og at finde Tallet, naar Logarithmen er givet.

Vi vil udregne nogle Eksempler, idet vi benytter
A. K. Erlangs fir cifrede Tavle.

1^o.

$$x = \frac{7,312^2 \cdot \sqrt[3]{1,02}}{6,732}.$$

Tages Logarithmen, findes

$$\log x = 2 \cdot \log 7,312 + \frac{\log 1,02}{3} - \log 6,732$$

Regningen opstilles saaledes

$$2 \cdot \log 7,312 = 1,7280$$

$$\log \frac{1,02}{3} = 0,0029$$

$$1,7309$$

$$\log 6,732 = 0,8281$$

$$\log x = 0,9028.$$

$$x = 7,995.$$

2^o.

$$x = \frac{2,02^2}{3,03^3}.$$

Man faar

$$\log x = 2 \cdot \log 2,02 - 3 \cdot \log 3,03,$$

altsaa

$$2 \cdot \log 2,02 = 0,6106$$

$$3 \cdot \log 3,03 = 1,4442$$

Her skal man trække et større Tal fra et mindre; da Mantissen skal være positiv, adderer man et positivt Tal til det mindste og trækker det samme Tal fra, hvorved jo Tallets Værdi forbliver uforandret. Adderes her 1 til og trækkes atter 1 fra, staar der

$$2 \cdot \log 2,02 = 1,6106 - 1$$

$$3 \cdot \log 3,03 = 1,4442$$

$$\log x = 0,1664 - 1$$

$$x = 0,1467.$$

3°.

$$x = \sqrt[7]{\frac{3}{4}}$$

$$\log x = \frac{\log 3 - \log 4}{7}$$

$$\log 3 = 0,4771$$

$$\log 4 = 0,6021$$

Her skal man atter trække et større Tal fra et mindre og yderligere igen dividere det udkomne med 7. Da Karakteristikken skal være et helt Tal, kan dette her ske ved, at man adderer 7 til og trækker 7 fra; man finder da

$$\log x = \frac{6,8750 - 7}{7}$$

$$\log x = 0,9821 - 1,$$

hvoraf

$$x = 0,9596.$$

4°. Skal man beregne et negativt Udtryk ved Logarithmer, beregner man Udtrykkets numeriske Værdi ved Logarithmer og giver det udkomne Fortegnet Minus.

$$x = \sqrt[3]{\log 0,1334}$$

$$x = \sqrt[3]{0,0913 - 1}$$

$$x = \sqrt[3]{-0,9087} = -\sqrt[3]{0,9087}.$$

Sættes

$$y = \sqrt[3]{0,9087}$$

faas

$$\log y = \frac{0,9584 - 1}{3} = \frac{2,9584 - 3}{3}$$

$$\log y = 0,9861 - 1$$

$$y = 0,9685,$$

altsaa

$$x = -0,9685.$$

Skal man beregne Værdien af et Bogstavudtryk for opgivne Værdier af de deri indgaaende Bogstaver, maa man først forsøge at reducere Udtrykket saa meget som muligt, inden man indsætter de opgivne Værdier. Er Udtrykket f. Eks. Brøken

$$\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 + 8a + 7},$$

og skal denne beregnes for $a = 1,214$, omskrives Brøken til

$$\frac{(a + 2)(a + 3)}{(a + 1)(a + 7)}.$$

Indsættes nu den opgivne Værdi for a , bliver Udtrykket

$$x = \frac{3,214 \cdot 4,214}{2,214 \cdot 8,214},$$

hvorefter Logarithmerne straks kan anvendes.

Skal man beregne en flerleddet Størrelse ved Logarithmer, maa man beregne hvert Led for sig. Dette skal man dog først gøre, efter at man forgæves har forsøgt at opløse i Faktorer. Man kan der undertiden med Fordel bruge Formlen

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Eks. Beregn

$$x = 7^{-0,51} + \sqrt[3]{(-0,451)^5}$$

ved Hjælp af Logarithmer.

Udtrykket omformes til

$$x = 7^{-0,51} - \sqrt[3]{0,451^5}$$

Sættes nu

$$y = 7^{-0,51}$$

$$z = \sqrt[3]{0,451^5}$$

har man

$$x = y - z.$$

y og z beregnes hver for sig ved Logarithmer; man finder

$$y = 0,3707$$

$$z = 0,2653,$$

hvorefter

$$x = 0,1054.$$

OPGAVER.

38) Beregn $y = 21,23^2 \cdot 56,12^3 : 48,54^3 : 36,17^2$.

39)
$$\sqrt[3]{\frac{5,474}{2,02^2}} - \sqrt[4]{0,1234}$$

40)
$$\frac{1,238^2 - 2,831^2}{6,745 \cdot 0,0123}$$

41)
$$\sqrt[3]{\frac{5,679 \cdot \sqrt[17]{2^{16}}}{8,642 \cdot \sqrt[23]{3^{22}}}}$$

42) $443,2 \cdot 1,04^3 + 772,6 \cdot 1,045^5$

43) Beregn Værdien af $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$, naar $a = 3\sqrt[3]{0,1}$; $b = 0,1\sqrt[3]{3}$

44)
$$\sqrt[3]{\log 0,49} - \sqrt[5]{\log 4,9}$$

45)
$$\sqrt[3]{\frac{\log \sqrt{2} \cdot \log \sqrt[3]{3}}{\log \sqrt{5} \cdot \log \sqrt{6}}}$$

46) Find Værdien af
$$\frac{\log \sqrt[3]{a} \sqrt{a} \cdot \log \sqrt[5]{a} \sqrt[7]{a}}{\log \sqrt[5]{a} \sqrt{a} \cdot \log \sqrt[3]{a} \sqrt[7]{a}}$$

47) Find x af Ligningen

$$(\sqrt{2})^x = (\sqrt{3})^{x+1}$$

48) Beregn Værdien

$$\sqrt[5]{\frac{7,92^3}{(\sqrt[3]{7,92})^2}} - \sqrt[7]{\frac{9,72^4}{(\sqrt[5]{9,72})^3}}$$

49) Find Værdien af Brøken

$$\frac{a^2 - 4}{b^2 - 9}$$

naar a og b bestemmes ved Ligningerne

$$0,2a + 0,3b = 1$$

$$0,3a + 0,2b = 2.$$

50) Idet $2s = a + b + c$, skal man finde Værdien af

$$\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

naar $a = 7,932$, $b = 8,456$, $c = 9,322$.

LIGNINGER AF 2^{DEN} GRAD.

16. Ved en Ligning af 2den Grad forstaar man en Ligning, der har eller kan bringes paa Formen

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

hvor A , B og C ikke indeholder x , og A er forskellig fra Nul . Har Ligningen denne Form, kaldes den en ordnet Ligning af 2den Grad eller en kvadratisk Ligning. For at løse denne dividerer vi med A paa begge Sider af Lighedstegnet og faar da

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0.$$

Sættes nu for Kortheds Skyld $\frac{B}{A} = a$ og $\frac{C}{A} = b$, faas

$$x^2 + ax + b = 0,$$

som vi omformer paa nedenstaaende Maade

$$0 = -x^2 - ax - b \dots (1).$$

Da

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} \dots (2),$$

faar vi ved Addition af (1) og (2)

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b,$$

som ved Kvadratudsdragsning giver

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

og følgelig

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Regnereglen bliver da denne:

Først omformes Ligningen saaledes, at x^2 faar Koefficienten $+1$, og højre Side bliver Nul; x er da lig med den halve Koefficient til x med modsat Fortegn, plus og minus Kvadratroden af den samme Størrelses Kvadrat, efterfulgt af Ligningens sidste Led med modsat Tegn.

Der bliver to Værdier for x , nemlig

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{og} \quad -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Er $\frac{a^2}{4} > b$, bliver Størrelsen under Rodtegnet positiv, og man finder da to ulige store Værdier for x , som kaldes Ligningens Rødder; er $\frac{a^2}{4} = b$, bliver de to Værdier for x lige store, idet den ene bliver $-\frac{a}{2} + 0 = -\frac{a}{2}$, den anden $-\frac{a}{2} - 0 = -\frac{a}{2}$. Er endelig $\frac{a^2}{4} < b$, bliver Størrelsen under Rodtegnet negativ, og Rødderne eksisterer da ikke.

Hvis $a = 0$, bliver Ligningen

$$x^2 - b = 0,$$

og man finder da umiddelbart

$$x = \pm \sqrt{-b}.$$

Er $b = 0$, bliver Ligningen

$$x^2 + ax = 0,$$

som kan skrives

$$x^2 + ax + 0 = 0,$$

og Regnereglen giver da

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 0}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}$$

$$x = \begin{cases} 0 \\ -a. \end{cases}$$

Ligningen kan ogsaa løses uden Brug af Regnereglen, nemlig saaledes

$$x^2 + ax = 0$$

$$x(x + a) = 0,$$

hvoraf

$$\underline{x = 0}$$

og

$$x + a = 0,$$

der giver

$$\underline{x = -a.}$$

Vi vil løse nogle Eksempler

1°. $x^2 + 8x + 7 = 0.$

Da x^2 har Koefficienten $+1$, og højre Side er Nul, kan Regnereglen straks anvendes; man har altsaa

$$x = -4 \pm \sqrt{16 - 7}$$

$$x = -4 \pm 3 = \begin{cases} -1 \\ -7. \end{cases}$$

2°. $5x^2 - 9x - 2 = 0.$

Her maa vi først skaffe x^2 Koefficienten $+1$, altsaa

$$x^2 - \frac{9}{5}x - \frac{2}{5} = 0,$$

hvorefter Regnereglen giver

$$x = \frac{9}{10} \pm \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{2}{5}}$$

$$x = \frac{9}{10} \pm \frac{11}{10} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

3°.

$$\frac{x}{x+1} + \frac{3x-2}{9x+1} = 1.$$

Bortskaffes Brøkerne, faar man

$$x(9x+1) + (x+1)(3x-2) = (x+1)(9x+1),$$

som sammentrækkes til

$$3x^2 - 8x - 3 = 0.$$

Omformes Ligningen til

$$x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{3}{3} = 0,$$

finder man

$$x = \frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} = \begin{cases} \frac{3}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

4°. Find x af Ligningen

$$x(x+a) + a(x-b) = b(x+b).$$

Udføres Multiplikationerne og ordnes Ligningen, faas

$$x^2 + 2ax - bx - ab - b^2 = 0;$$

denne Ligning omskrives til

$$x^2 + (2a-b)x - ab - b^2 = 0.$$

Anvendes Regnereglen, finder man

$$x = -\frac{2a-b}{2} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 4ab + b^2}{4} + ab + b^2}$$

$$x = -\frac{2a-b}{2} \pm \sqrt{\frac{4a^2 + 5b^2}{4}}$$

$$x = -\frac{2a-b \pm \sqrt{4a^2 + 5b^2}}{2}.$$

Disse Værdier for x kan ikke sammentrækkes yderligere.

Er specielt $a = b$, faas

$$x = -\frac{a + 3a}{2} = \begin{cases} -2a \\ a. \end{cases}$$

17. Man kan ved Hjælp af Regnereglen for Løsning af Ligninger af 2den Grad løse en bestemt Klasse Ligninger af højere end 2den Grad, nemlig Ligninger, der har Formen

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0,$$

hvor A , B og C ikke indeholder x .

Vi vil vise Fremgangsmaaden paa et Eksempel, nemlig

$$x^6 - 9x^3 + 8 = 0.$$

Denne Ligning er af 6te Grad med Hensyn til x , men sætter vi $x^3 = y$, faar vi følgende 2den Grads Ligning med Hensyn til y

$$y^2 - 9y + 8 = 0,$$

hvoraf

$$y = \begin{cases} 1 \\ 8. \end{cases}$$

Vi har tilbage at finde x , men

$$x^3 = \begin{cases} 1 \\ 8, \end{cases}$$

som giver

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{1} = 1 \\ \sqrt[3]{8} = 2. \end{cases}$$

RØDDERNES SUM OG PRODUKT.

18. I en 2den Grads Ligning, hvor Koefficienten til x^2 er $+1$, er Røddernes Sum lig med Koefficienten til x med modsat Tegn, og Røddernes Produkt er lig med Ligningens sidste Led med samme Tegn.

Kalder vi Rødderne i Ligningen

$$x^2 + ax + b = 0$$

p og q , skål vi bevise, at

$$p + q = -a$$

$$\text{og } pq = b.$$

Lad

$$p = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$q = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Adderes disse Værdier, findes straks

$$p + q = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = -a.$$

Multiplikerer man Værdierne for p og q , finder man

$$\begin{aligned} p \cdot q &= \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) = \\ &= \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = b. \end{aligned}$$

Naar man har løst en 2den Grads Ligning paa den her angivne Form, bør man altid undersøge, om Sætningerne om Røddernes Sum og Produkt er tilfredsstillet; er det ikke Tilfældet, maa man regne om igen, da det fundne Resultat i saa Fald ikke kan være rigtigt.

1°. Ligningen

$$x^2 - 6x - 1 = 0$$

har Rødderne

$$3 + \sqrt{10} \text{ og } 3 - \sqrt{10},$$

thi

$$(3 + \sqrt{10}) + (3 - \sqrt{10}) = 6,$$

medens

$$(3 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10}) = 9 - 10 = -1.$$

2°. Find en Ligning med Rødderne 7 og -2.

Da

$$7 + (-2) = 5$$

og

$$7 \cdot (-2) = -14,$$

vil Ligningen

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

have de opgivne Værdier til Rødder.

Mere almindeligt vil en Ligning med Rødderne p og q være

$$x^2 - (p + q)x + p \cdot q = 0.$$

Eftervis dette ved direkte Løsning af Ligningen.

Har Ligningen Formen

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

maa man først skaffe x^2 Koefficienten +1, inden man tør benytte Sætningerne om Røddernes Sum og Produkt.

Man faar da

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0.$$

Kaldes dens Rødder m og n , faar man her

$$m + n = -\frac{B}{A}$$

$$m \cdot n = \frac{C}{A}$$

3°. Find x af Ligningen

$$\frac{5}{x} + \frac{2}{3} = \frac{2(x-7)}{x+1} \quad \dots (1)$$

og gør Prøve.

Ligningen bringes paa hel Form og ordnes:

$$4x^2 - 59x - 15 = 0$$

$$x^2 - \frac{59}{4}x - \frac{15}{4} = 0, \quad \dots (2)$$

hvoraf

$$x = \begin{cases} 15 \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ligning (2) er rigtig løst, fordi $15 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{59}{4}$ ∴ Ko-efficienten til x med modsat Fortegn, og $15 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{15}{4}$ ∴ Ligningens sidste Led.

Vil man derimod vide, om Ligning (1) er rigtig løst, maa man naturligvis gøre Prøve paa sædvanlig Maade ved for x efterhaanden at sætte 15 og $-\frac{1}{4}$.

OPLØSNING I FAKTORER AF ET POLYNOMIUM AF 2^{DEN} GRAD.

19. Hvis Ligningen $Ax^2 + Bx + C = 0$ har Rødderne p og q , vil

$$\underline{Ax^2 + Bx + C = A(x-p)(x-q)}.$$

Da

$$p + q = -\frac{B}{A}$$

$$p \cdot q = \frac{C}{A},$$

vil man finde ved Udregning af Produktet

$$\begin{aligned} A(x-p)(x-q) &= A(x^2 - px - qx + pq) = A(x^2 - [p+q]x + pq) = \\ A\left(x^2 - \left(-\frac{B}{A}\right)x + \frac{C}{A}\right) &= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) = Ax^2 + Bx + C, \end{aligned}$$

hvorefter Sætningen er bevist.

1°. Ligningen $x^2 - 5x + 6 = 0$ har Rødderne 2 og 3; altsaa vil

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

2°. $x^2 + x - 2 = (x-1)(x-[-2]) = (x-1)(x+2)$, da $x^2 + x - 2 = 0$ har Rødderne 1 og -2.

3°. Ligningen $6x^2 - x - 1 = 0$ har Rødderne $\frac{1}{2}$ og $-\frac{1}{3}$; deraf følger, at

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 1 &= 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 3\left(x + \frac{1}{3}\right) = \\ &= (2x-1)(3x+1). \end{aligned}$$

4°. Idet $y = x^2 - 8x + 15$, skal man finde, for hvilke Værdier af x y bliver positiv, negativ eller Nul.

Ved Opløsning i Faktorer finder man

$$y = (x - 5)(x - 3).$$

Man danner et Skema, som nedenstaaende viser:

x' Værdier	$x - 5$	$x - 3$	y' Fortegn
$x > 5$	+	+	+
$x = 5$	0	+	0
$5 > x > 3$	—	+	—
$x = 3$	—	0	0
$x < 3$	—	—	+

Af Skemaet fremgaar, at

y bliver positiv, naar enten $x > 5$ eller $x < 3$.

y bliver negativ, naar $5 > x > 3$.

$y = 0$, naar $x = 5$ eller naar $x = 3$.

5°. Bestem de Grænser, mellem hvilke x maa ligge, naar

$$y = 8 - 2x - 3x^2$$

skal være positiv.

Ved Opløsning i Faktorer findes

$$y = -3 \left(x - \frac{4}{3}\right) (x - (-2)).$$

Vi danner Skemaet saaledes

	-3	$x - \frac{4}{3}$	$x - (-2)$	y
$x > \frac{4}{3}$	—	+	+	—
$x = \frac{4}{3}$	—	0	+	0
$\frac{4}{3} > x > -2$	—	—	+	+
$x = -2$	—	—	0	0
$x < -2$	—	—	—	—

Vi ser da af Skemaet, at

$$\frac{4}{3} > x > -2.$$

6°. Forkort Brøken

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}$$

og find Brøkens Værdi for $x = 2$ og $x = 3$.

Da

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

giver

$$x = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

og

$$5x^2 - 7x - 6 = 0$$

giver

$$x = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{5} \end{cases}$$

har man

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6} = \frac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{5(x-2)(x+\frac{3}{5})} = \frac{2x-1}{5x+3}$$

For $x = 2$ finder man Brøkens Værdi $\frac{3}{13}$, naar man indsætter i den forkortede Brøk; indsætter man $x = 2$ i den oprindelige Brøk, finder man, at Brøken antager Formen $\frac{0}{0}$, som er ubestemt. Man siger da, at Brøken

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}$$

for $x = 2$ har den sande Værdi $\frac{3}{13}$.

Grunden til, at den uforkortede Brøk antager Formen $\frac{0}{0}$ for $x = 2$ er, at vi ikke der har bortkastet Faktoren $x - 2$, som bliver 0 for $x = 2$.

For $x = 3$ bliver Brøkens Værdi $\frac{5}{18}$.

20. Ligninger, hvori den ubekendte (x) indgaar under Kvadratrodstegn, kaldes »Ligninger paa irrational Form«. Skal man løse saadanne Ligninger, maa man først bortskaffe Rodtegnene. Vi skal gennem et Par Eksempler vise, hvorledes dette kan lade sig gøre.

$$1^{\circ}. \quad x + \sqrt{x+2} = 10.$$

Isoleres Rodstørrelsen, faar man

$$\sqrt{x+2} = 10 - x,$$

som ved Kvadrering paa begge Sider af Lighedstegnet giver

$$x + 2 = 100 - 20x + x^2,$$

der omformes til

$$x^2 - 21x + 98 = 0,$$

hvoraf

$$x = \frac{21}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 14 \\ 7. \end{cases}$$

Indsætter man de fundne Værdier af x i den givne Ligning — hvad man aldrig maa undlade, naar den givne Ligning indeholder den ubekendte under Kvadratrodstegn — vil man finde, at 7 tilfredsstiller den givne Ligning, medens 14 ikke gør det. 14 vil derimod være Rod i Ligningen

$$x - \sqrt{x+2} = 10.$$

14 siges at være en fremmed Rod i den givne Ligning.

Det er ganske nødvendigt at gøre Prøve, thi Ligningen

$$x - \sqrt{x+2} = 10$$

vil føre akkurat til den samme Ligning

$$x^2 - 21x + 98 = 0,$$

idet nemlig

$$(-\sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{x+2})^2 = x + 2.$$

Ved ovenstaaende Fremgangsmaade løses i Virkeligheden følgende 2 Ligninger

$$x + \sqrt{x+2} = 10$$

og

$$x - \sqrt{x+2} = 10,$$

og ved Prøven afgøres, hvilken Værdi af x , der er Rod i hver af Ligningerne.

2°. Find x af Ligningen

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5} = 5.$$

Isoleres den ene Rodstørrelse, faas

$$\sqrt{2x+5} = 5 - \sqrt{x+2},$$

som ved Kvadrering giver

$$2x+5 = 25 + x+2 - 10\sqrt{x+2},$$

der sammentrækkes til

$$x-22 = -10\sqrt{x+2}.$$

Gentagen Kvadrering giver

$$x^2 - 44x + 484 = 100x + 200$$

$$x^2 - 144x + 284 = 0$$

$$x = 72 \pm \sqrt{5184 - 284}$$

$$x = 72 \pm 70 = \begin{cases} 142 \\ 2. \end{cases}$$

Prøven vil vise, at $x=2$ er Rod i den givne Ligning, medens $x=142$ er Rod i Ligningen

$$-\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5} = 5$$

og altsaa en fremmed Rod.

Eks. Find x af følgende Ligninger:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$7x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$x(x-a) + b(2x-a) = ab$$

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x+2} = \frac{7}{6}$$

$$3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$x + \sqrt{x-1} = 1$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$$

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-2} = 2$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 1$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{7-x}{7+x} + \frac{x+3}{x-3} = \frac{5}{2}$$

For hvilken Værdi af a vil Ligningen

$$x^2 - 8x + 2a + 1 = 0$$

have sine Rødder lige store.

OPGAVER.

51) Bestem m , naar

$$mx^2 + (7-m)x + 2 = 0$$

skal have Roden -2 . Hvor stor bliver den anden Rod?

52) Der købes for 72 Øre Æbler og for 128 Øre Pærer, ialt 24 Stkr. Frugt. Hvor mange faas af hver Slags, naar et Æble koster 1 Øre mere end en Pære?

53) A skal leve for 140 Kr. et vist Antal Dage, men han bruger 60 Øre mere om Dagen, end han maa, derved slipper Pengene op 3 Dage før den fastsatte Tid; hvor lang var den?

54) En Mand købte Gæs for 130 Kr. Ved et Uheld døde 2 for ham, og han tjente derfor kun $10\frac{10}{13}\%$ ved at tage 1 Kr. mere for hver Gaas, end han selv havde givet, da han købte. Hvor mange Gæs købte han, og hvad havde han selv givet i Indkøb for 1 Gaas?

$$55) \quad \frac{49}{2x+6} - \frac{20}{x+2} + \frac{3}{2x+2}$$

sammentælles til een Brøk, hvis Tæller opløses i Faktorer.

$$56) \quad \frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{2}{x^2+6x+5} - \frac{3}{x^2+7x+10}$$

sammentrækkes.

57) Udtrykket

$$\frac{1}{x-2} \left(\frac{3x^2-5x+2}{4(x-1)} - \frac{x^2-x+1}{x+1} \right)$$

bringes paa sin simpleste Form.

58) Find x af Ligningen

$$x+1 = \frac{x+2}{x+3}$$

og gør Prøve med de fundne Værdier af x .

59) Idet a og β er Rødder i Ligningen

$$x^2+ax+b=0$$

skal man uden at løse Ligningen finde Værdien af følgende Udtryk

$$\frac{\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{a\beta}}$$

60) I Ligningen

$$x^2+8x-p=0$$

er den ene Rod 5 Gange saa stor som den anden; find p og begge Rødderne.

61) Idet a og β er Rødder i Ligningen

$$x^3+ax+7=0$$

skal man finde a , naar

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} = \frac{6}{7}$$

$$62) \quad \sqrt{6x-9} - \sqrt{2x-5} = 2.$$

$$63) \quad \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3} = 1.$$

$$64) \quad \sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2} = 1.$$

$$65) \quad \sqrt{20+2x} + \sqrt{17+x} = 1.$$

$$66) \quad \sqrt{x^2 - ax + 4} - \sqrt{x^2 - ax + 1} = 1.$$

$$67) \quad \sqrt{x^2 + 2x - 14} + \sqrt{x^2 - 6x + 18} = 2.$$

$$68) \quad \sqrt{(b-c)x+a} = (\sqrt{b} - \sqrt{c}) \sqrt{x} + \sqrt{a}.$$

69) Idet a og β er Rødder i Ligningen

$$3x^2 - 0,123x - \sqrt[5]{2} = 0$$

skal man beregne Værdien af

$$2^{\alpha+\beta} 3^{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

70) Find x af Ligningen

$$1,3713^{\frac{10}{x}} + 1,3713^{\frac{20}{x}} = 0,11.$$

71) Idet a og β er Rødder i Ligningen

$$x^2 + 16x = 97,29$$

skal Størrelsen

$$y = \sqrt[17]{\alpha^3 \beta^3 + \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2}$$

beregnes.

72) Find x af

$$a^{\log b} \cdot (abx)^{\log x} = 1$$

og gør Prøve.

73) Find x af

$$\sqrt[10]{x} = \sqrt[11,67]{11,67 \sqrt[10]{x}}.$$

74) For hvilke Værdier af x vil y være positiv, negativ eller Nul, naar

$$y = 3x^2 + 7x + 4?$$

75) Find x af Ligningen

$$\sqrt[m+x]{a^{p-x}} = \sqrt[p+x]{b^{m-x}}$$

Eks. $m = p = 9$.

LIGNINGER MED FLERE UBEKENDTE.

21. Vi vil kun betragte Ligninger, der indeholder to ubekendte, og da først undersøge det Tilfælde, hvor den ene Ligning er af 1ste Grad, den anden af 2den Grad med Hensyn til de to ubekendte. Det gælder her som almindelig Regel, at man altid anvender Substitutionsmetoden, aldrig de lige store Koefficienters Metode.

Lad de givne Ligninger være

$$3x - 2y = 5 \dots\dots (1)$$

$$4x^2 + 5y^2 - 2x + y = 6 \dots\dots (2)$$

Af (1) findes

$$y = \frac{3x - 5}{2},$$

som indsat i (2) giver

$$4x^2 + 5 \cdot \left(\frac{3x - 5}{2} \right)^2 - 2x + \frac{3x - 5}{2} = 6,$$

der sammentrækkes til

$$61x^2 - 152x + 91 = 0,$$

hvoraf man finder

$$x = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{91}{61} \end{array} \right.$$

De fundne Værdier af x skal nu indsættes i (1), da der til hver Værdi af x svarer een og kun een Værdi af y . Havde man indsat de fundne Værdier af x i (2)

havde man for hver Værdi af x fundet 2 Værdier for y , i det hele altsaa 4; af disse maatte da de 2 forkastes, da de ikke tilfredsstiller (1).

Indsættes nu her de fundne Værdier for x i (1), finder man

$$y = \begin{cases} -1 \\ -\frac{16}{61} \end{cases}$$

Havde man indsat Værdien $x = 1$ i (2), havde man faaet Ligningen $5y^2 + y - 4 = 0$, der giver

$$y = \begin{cases} -1 \\ -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Her maa Værdien $y = \frac{4}{5}$ forkastes, da $x = 1$, $y = \frac{4}{5}$ ikke tilfredsstiller (1).

SYMMETRISKE LIGNINGER.

22. To Ligninger kaldes symmetriske, naar de bliver uforandrede ved, at man ombytter de ubekendte. Vi vil først behandle de to simpleste symmetriske Ligninger, nemlig

$$x + y = a \dots\dots (1)$$

$$xy = b \dots\dots (2)$$

At disse Ligninger, de saakaldte Grundligninger, er symmetriske ses let, da man faar de samme Ligninger, naar man ombytter x og y .

Af (1) findes

$$x = a - y,$$

som indsat i (2) giver

$$y^2 - ay + b = 0,$$

hvoraf

$$y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

hvilke Værdier efter Indsættelse i (1) giver

$$x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Man faar her de samme Værdier for x og y , men i omvendt Rækkefølge. Naar altsaa y har den ene Værdi, har x den anden og omvendt, men x og y er ikke lige store, undtagen naar $\frac{a^2}{4} - b = 0$.

Man kan ogsaa — og fiksere — finde x og y som Rødder i Ligningen

$$z^2 - az + b = 0,$$

da man ifølge Sætningerne om Røddernes Sum og Produkt har

$$x + y = a$$

$$xy = b.$$

Find x og y af Ligningerne

$$x + y = 12$$

$$xy = 35.$$

Man finder da x og y som Rødder i Ligningen

$$z^2 - 12z + 35 = 0$$

$$z = \begin{cases} 5 \\ 7. \end{cases}$$

Altsaa

$$x = \begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 7 \\ 5. \end{cases}$$

Har man mere udviklede symmetriske Ligninger, finder man som Regel først $x + y$ og $x \cdot y$, idet man kan omskrive de givne Ligninger saaledes, at

disse kun indeholder ovennævnte Størrelser, og derpaa x og y .

Man maa her særlig mærke sig følgende Omskrivning

$$\underline{x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.}$$

Vi skal gennemregne et Eksempel:

$$x^2 + y^2 - 3xy + x + y = 0 \dots\dots (1)$$

$$x + y + xy = 11 \dots\dots (2).$$

Sættes $x + y = p$ og $x \cdot y = q$, omskrives Ligningerne til følgende:

$$p^2 + p - 5q = 0$$

$$p + q = 11.$$

Bortskaffes nu q af disse Ligninger, faas

$$p^2 + 6p - 35 = 0,$$

som giver

$$p = \begin{cases} 5 \\ -11, \end{cases}$$

hvortil svarer

$$q = \begin{cases} 6 \\ 22. \end{cases}$$

For at finde x og y maa man løse følgende 2 Sæt Grundligninger

1)

$$x + y = 5$$

$$xy = 6$$

som giver

$$x = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \quad y = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

og

2)

$$x + y = -11$$

$$xy = 22$$

som giver

$$x = \frac{-11 + \sqrt{33}}{2}, \quad y = \frac{-11 \mp \sqrt{33}}{2}.$$

Har de opgivne symmetriske Ligninger Formen

$$x^n + y^n = a$$

$$x^p y^p = b,$$

hvor n og p er hele Tal, vil vi ved at gaa frem paa ovennævnte Maade komme til Ligninger af højere Grad. Har man saaledes forelagt Ligningerne

$$x^3 + y^3 = 19 \dots (1)$$

$$xy = -6 \dots (2)$$

vil vi, idet

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

føres til Ligningen

$$p^3 + 18p - 19 = 0,$$

som er en Ligning af 3die Grad, vi ikke kan løse.

Vi opløfter (2) til 3die Potens, og faar da

$$x^3 y^3 = -216$$

og har nu to Ligninger, der er symmetriske med Hensyn til x^3 og y^3 .

Ved Løsning af disse finder man

$$x^3 = \begin{cases} 27 \\ -8, \end{cases} \quad y^3 = \begin{cases} -8 \\ 27 \end{cases}$$

og altsaa

$$x = \begin{cases} 3 \\ -2, \end{cases} \quad y = \begin{cases} -2 \\ 3. \end{cases}$$

OPGAVER:

76) Find x og y af

$$3x - 2y = 1$$

$$x^2 - y^2 + xy - 2y + 3 = 0.$$

77)

$$2x - y = -1$$

$$x^2 + y^2 = xy + 4y + x + 2.$$

$$\begin{aligned} 78) \quad & 3x + y = 10 \\ & 3x^2 + y^2 = 28. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 79) \quad & 3x + 5y = 36 \\ & 3x^2 + 5y^2 = 192. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 80) \quad & 2x + 3y = 13 \\ & x^2 + xy - 2y^2 = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 81) \quad & 5x - y = 3 \\ & x^2 + 2y^2 - 3xy + 2x - y = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 82) \quad & x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ & \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 83) \quad & x^2 + y^2 - 5(x + y) + 10 = 0 \\ & x^2 + y^2 - 4xy + 5(x + y) - 12 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 84) \quad & x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ & xy + 37 = 7(x + y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 85) \quad & 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 3x + 3y = 134. \\ & 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 11x + 11y = 110. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 86) \quad & 2x^2 + 3xy + 2y^2 + 5 = 14(x + y) \\ & (x + y)^2 = xy + 6(x + y) + 7. \end{aligned}$$

$$87) \quad x^2 + y^2 = 5(2xy + 5) = 5(x + y).$$

88) Find x og y af Ligningerne

$$\begin{aligned} & xy = 2,884^2 \\ & y^{\log x} = 1,583. \end{aligned}$$

89) En Mand køber to Slags Varer. Hvis han køber 1 kg af hver Slags, betaler han derfor tilsammen 13 Kr. Køber han for 50 Kr. af den første Slags og for 42 Kr. af den anden Slags, faar han i alt 15 kg af begge Varer tilsammen. Hvad er Prisen pr. kg for Varerne, naar man tillige ved, at den første Slags var den billigste pr. kg?

90. Find x og y af Ligningerne

$$x^2 + y^2 + xy + x + y = 5$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2.$$

DIFFERENSRÆKKER.

Ved en Differensrække forstås en Række Tal, i hvilken der er den samme Differens mellem hvert af Tallene og det nærmest foregaaende.

Saaledes vil Rækken

$$-11, -8, -5, -2, +1, 4, 7, 10$$

være en Differensrække med Differensen 3, medens Rækken

$$10, 7, 4, 1, -2, -5, -8, -11$$

vil være en Differensrække med Differensen -3 .

Lad nu det første Led i en Differensrække med Differensen d være a , da vil

$$\text{det 2}^{de} \text{ Led være } a + d$$

$$\text{det 3}^{de} \text{ Led være } a + 2d$$

$$\text{det 17}^{de} \text{ Led være } a + 16d$$

$$\text{og det } n^{te} \text{ Led være } a + (n-1)d,$$

idet man maa addere d $(n-1)$ Gange til a . Betegnes nu det n^{te} Led ved a_n , har man

$$a_n = a + (n-1)d \dots (1).$$

Vi vil nu søge Summen s_n af de n første Led af ovennævnte Række. Vi har altsaa

$$s_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d).$$

Skrives Rækken op i omvendt Orden, idet man begynder med a_n , danner den en Differensrække med Differensen $-d$, altsaa

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d).$$

Adderes disse 2 Udtryk for s_n , finder man

$$2s_n = n(a + a_n)$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a + a_n) \dots (2).$$

Ligningerne (1) og (2) indeholde de 5 Størrelser a, a_n, d, s_n og n . De 4 første kan være aldeles vilkaarlige Tal, medens n som Leddenes Antal maa være et positivt helt Tal. Da der mellem disse 5 Størrelser findes 2 Ligninger, maa man kende de 3 for at kunne bestemme de manglende 2.

Hvis p er et vilkaarligt Led i en Differensrække med Differensen d , vil det nærmest foregaaende Led være $p - d$, det nærmest foregaaende for dette igen $p - 2d$, og saaledes videre.

1^o. I en Differensrække er det 12^{te} Led 5, det 20^{de} Led 17. Find det 15^{de} Led og Summen af de første 15 Led.

Ifølge det givne har man straks

$$a_1 + 11d = 5$$

$$a_1 + 19d = 17,$$

som giver

$$d = \frac{3}{2}$$

og

$$a_1 = 5 - \frac{33}{2} = -\frac{23}{2}.$$

Man har da umiddelbart

$$a_{15} = -\frac{23}{2} + 14 \cdot \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$$

og

$$s_{15} = \frac{15}{2} \left(\frac{19}{2} - \frac{23}{2} \right) = -15.$$

Det fremgaar af Eksemplet, at naar man kender hvilke som helst to Led af en Differensrække, kan man finde første Led a_1 og Differensen d og derved bestemme saa mange Led af Rækken, man vil.

2°. Hvor mange Led indeholder en Differensrække med Summen 9, naar dens første Led er -7 og Differensen 2?

Man har

$$a_n = -7 + (n-1) 2$$

$$a_n = -9 + 2n$$

og

$$9 = \frac{n}{2} (-7 - 9 + 2n),$$

som sammentrækkes til

$$n^2 - 8n - 9 = 0,$$

som giver

$$n = \begin{cases} 9 \\ -1, \end{cases}$$

hvor Værdien -1 maa forkastes som ubrugelig.

KVOTIENTRÆKKER.

Ved en Kvotientrække forstaas en Række Tal, i hvilken der er en konstant Kvotient mellem hvert af Tallene og det nærmest foregaaende. Saaledes vil Rækken

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81, 243$$

være en Kvotientrække med Kvotienten 3, medens Rækken

$$243, -81, 27, -9, 3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$$

vil være en Kvotientrække med Kvotienten $-\frac{1}{3}$.

Lad det første Led i en Kvotientrække med Kvotienten q være a , da vil

det 2^{det} Led være aq

det 3^{die} Led være aq^2

det 4^{de} Led være aq^3

det 17^{de} Led være aq^{16}

og det n^{te} Led være aq^{n-1} ,

idet man for at finde dette maa multiplicere $a(n-1)$ Gange med q .

Betegnes nu det n^{te} Led med a_n , har man

$$a_n = aq^{n-1}. \quad \dots (1)$$

Vi vil nu søge Summen s_n af de n første Led af ovennævnte Række

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}.$$

Multipliseres nu med q paa begge Sider af Lighedstegnet, faar man

$$s_n q = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Subtraheres nu denne sidste Ligning fra omstaaende, haves

$$s_n - s_n q = a - aq^n$$

$$s_n (1 - q) = a (1 - q^n)$$

$$s_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q} \dots (2)$$

I denne sidste Formel maa q være forskellig fra 1. Er $q = 1$, finder man af selve Rækken umiddelbart

$$s_n = na.$$

Ligesom ved Differensrækker finder vi ogsaa her 2 Ligninger mellem de 5 Størrelser a , a_n , q , s_n og n , kender man de 3, kan man finde de manglende 2; her maa n nødvendigvis være et helt positivt Tal.

1°. I en Kvotientrække med første Led 1 og sidste Led 1024 er Kvotienten 2. Find Summen og Leddenes Antal.

Man har

$$1024 = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$2^{10} = 2^{n-1},$$

altsaa

$$n - 1 = 10 \quad \therefore n = 11.$$

Summen s_n bestemmes ved

$$s_n = 1 \cdot \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2047.$$

2°. I en Kvotientrække er 1^{ste} Led 5, 3^{die} Led $\frac{64}{5}$. Find det 2^{det} Led.

Man har

$$5 \cdot q^2 = \frac{64}{5}$$

$$q = \pm \frac{8}{5}$$

Der bliver altsaa 2 Rækker, nemlig

$$5, 8, \frac{64}{5}$$

og

$$5, -8, \frac{64}{5}.$$

3°. I en Kvotientrække kender man a_1 , a_n og s_n . Bevis

$$q = \frac{s_n - a_1}{s_n - a_n}.$$

Man har

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

som omformes til

$$s_n - s_n q = a_1 - a q^n$$

eller

$$s_n - s_n q = a_1 - a q^{n-1} \cdot q,$$

der atter kan skrives som

$$s_n - s_n q = a_1 - a_n q.$$

Løses nu denne Ligning med Hensyn til q , fremkommer den forlangte Formel.

OPGAVER:

91) En Differensrækkes første Led er lig Leddenes Antal, 4de Led 9 og sidste Led 11. Bestem Rækken.

92) Summen af en Differensrækkes 7 første Led er lig det 8de Led, medens det sidste Led er 10 Gange saa stort som det 5te Led. Find Leddenes Antal.

93) En Differensrækkes 4de Led er lig 7, sidste Led 9 og Summen af Rækken 49. Rækken bestemmes.

94) I en Differensrække paa n Led er Differensen $2n$ og Summen af Rækkens Led n^2 ; find første og sidste Led. Bevis, at første Led altid maa være et negativt Tal.

95) Hvilket Tal x skal man addere til de 2 første af Tallene

3, 5, 9

for at de nye Tal skal danne en Differensrække.

96) I en Differensrække er det 5te Led 12, det 12te Led 5. Find det 17de Led samt Summen af de næste 17 Led.

97) To Differensrækker har begge samme første Led a . I den første Række er Differensen d , i den anden $2d$ og Summen af de $2n$ første Led i den første Række er lig Summen af de n første Led i den anden Række. Find d udtrykt ved a og n .

98) I en Differensrække er første Led 0,1432, sidste Led 10,1679 og Summen af Leddene 41,2444. Find Leddenes Antal og Differensen.

99) Summen af 2 Differensrækker, hver paa n Led, er tilsammen s . Den ene Række begynder med a og har Differensen d , den anden Række begynder med d og har Differensen a . Bevis, at

$$a + d = \frac{2s}{n(n+1)}$$

100) Find Summen af alle de Tal, der ender paa 5, og som er beliggende mellem Tallene

— 127 og 321.

101) En Kvotientrækkes sidste Led er 81, dens Sum er 211 og Summen af de to første Led 40. Find a_1 , q og n .

102) I en Kvotientrække er $a_1 = q = \sqrt{2}$ og $a_n = 16$. Find n og Summen af Rækken.

103) I en Kvotientrække er

$$a_1 = 21,824$$

$$a_n = 0,341$$

$$s_n = 43,307.$$

Find q og n .

104) Find Summen af Logarithmerne til alle Led i Kvotientrækken $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$.

RENTESREGNING.

23. Naar man laaner en Sum Penge, maa man betale en Afgift derfor, som kaldes Rente; den laante Pengesum kaldes Kapitalen.

Renten er proportional med Kapitalen, og den vokser med Tiden; men den er dog ikke altid proportional med Tiden. Størrelsen af Renten angives enten i pro Cent pro Anno eller ved Rentefoden for en bestemt Tidsenhed. For Eks. 1 Aar, $\frac{1}{2}$ Aar eller $\frac{1}{4}$ Aar.

At Renten er p pro Cent pro Anno vil sige, at den er p Kr. af hvert Hundrede Kr. i et Aar. pro Cent pro Anno skrives ogsaa p. C. p. A. eller $\%$ p. A.

At Rentefoden for en given Tid er r vil sige, at der af hver Kr. skal betales r Kr. for denne Tid. Den opgivne Tidsenhed kaldes en Termin. Udtrykket Termin bruges dog ogsaa om selve det Tidspunkt, da Renten skal betales.

Naar Renten i en Termin er p pro Cent, har man Rentefoden

$$r = \frac{p}{100},$$

hvoraf

$$p = 100 \cdot r.$$

SIMPEL RENTESREGNING.

24. Ved simpel Rentesregning er Renten proportional med Tiden. Skal man beregne Renten for korte Tidsrum, anvender man simpel Rentesregning. Et Aar regnes til 360 Dage og en Maaned til 30 Dage; derved opnaas, at hver Maaned er $\frac{1}{12}$ Aar.

Naar Kapitalen a udlaanes til p % p. A., bliver Renten for et Aar

$$R = a \cdot \frac{p}{100}$$

eller idet Rentefoden indføres

$$R = ar.$$

Renten for d Dage bliver

$$R = \frac{ap \cdot d}{100 \cdot 360}$$

Denne Ligning indeholder fire forskellige Talstørrelser, og enhver af dem kan findes, naar de tre andre er opgivne.

Eks.

$$R = 51,7, \quad a = 4523,75 \quad \text{og} \quad p = 5\frac{1}{7}$$

$$51,7 = \frac{4523,75 \cdot 5\frac{1}{7} \cdot d}{100 \cdot 360}$$

$$d = \frac{51,7 \cdot 100 \cdot 360}{4523,75 \cdot 5\frac{1}{7}} = 80.$$

SAMMENSAT RENTESREGNING.

25. Ved den sammensatte Rentesregning er en Kapital udsat paa Rente paa en saadan Maade, at Renten ved hver Termin Slutning lægges til Kapitalen og forrentes med denne. Lad nu a være en Kapital, der er indsat paa ovennævnte Maade i n Terminer til Rentefoden r . Vi vil da besvare følgende Spørgsmaal:

Hvilken Kapital a_n er Kapitalen a vokset til efter de n Terminers Forløb?

Efter 1 Termins Forløb har man den oprindelige Kapital a plus den Rente, Kapitalen er vokset med i 1ste Termin, altsaa

$$a_1 = a + ar = a(1 + r).$$

Efter 2 Terminers Forløb har man paa samme Maade

$$a_2 = a_1 + a_1 r = a_1(1 + r)$$

eller, idet Værdien for a_1 indføres,

$$a_2 = a(1 + r)(1 + r)$$

$$a_2 = a(1 + r)^2.$$

Efter 3 Terminers Forløb har man

$$a_3 = a_2 + a_2 r = a_2(1 + r)$$

eller

$$a_3 = a(1 + r)^3.$$

Efter n Terminers Forløb har man altsaa

$$a_n = a(1 + r)^n \dots (1)$$

Denne Ligning indeholder — foruden Konstanten, — de 4 Størrelser a_n , a , r og n og tjener til (i Reglen gen-

nem Logarithmeregning) at bestemme en af disse, naar de 3 andre er givne.

Løser man Ligningen med Hensyn til a , faar man

$$a = \frac{a_n}{(1+r)^n} \dots \dots (2)$$

Da nu a_n angiver Værdien af en Kapital, der ligger n Terminer længere fremme i Tiden end a , kan man af (1) og (2) udlede følgende:

Man fører en Kapital n Terminer frem i Tiden ved at multiplicere den med $(1+r)^n$, medens man fører den n Terminer tilbage i Tiden ved at dividere med $(1+r)^n$.

Da Formel (1) eller (2) kan skrives som

$$(1+r)^n = \frac{a_n}{a},$$

ser man, at det ikke er nødvendigt, naar man skal finde r eller n , at kende a_n og a ; det er tilstrækkeligt at kende deres *Forhold* samt henholdsvis n eller r .

Ved en Betragtning ganske analog med ovenstaaende indser man, at der af en Kapital a , som (f. Eks. ved Anbringelse i et urentabelt Foretagende eller ved Hævning til personligt Brug) hver Termin formindskes med 100 r p. C. af Beløbet ved Terminens Begyndelse, vil være til Rest efter n Terminers Forløb

$$a_n = a (1-r)^n,$$

hvoraf ogsaa Tilbageføringen kan ske gennen Formlen

$$a = \frac{a_n}{(1-r)^n}.$$

1°. En Mand indsætter 558 Kroner i en Bank, der forrenter Pengene med 4 % p. a. Hvor mange Penge kan han med Renter og Renter Renter hæve efter 15 Aars Forløb?

Man har straks

$$a_n = 558 \cdot 1,04^{15},$$

som giver

$$a_n = 1003.$$

2°. Den 1. Januar 1888 indsatte en Fader en saadan Sum for sin Søn, at denne 1. Juli i Aaret 1910 kunde hæve 10000 Kroner. Hvor meget indsatte Faderen, naar Pengene blev forrentet med $1\frac{3}{4}$ p. C. halvårlig?

Pengene staar paa Rente og Renters Rente i $22\frac{1}{2}$ Aar, altsaa i 45 Terminer, hver paa $\frac{1}{2}$ Aar. Man har da

$$10000 = a \cdot 1,0175^{45},$$

hvoraf a let findes.

3°. En Kapital a staar ude paa Rente og Renters Rente til den aarlige Rentefod r i n Aar; da forandres Rentefoden, og der svares derefter en halvårlig Rentefod r_1 . Hvor stor en Kapital er a vokset til efter Forløbet af $(n + p)$ Aar?

Efter n Aar har man

$$a_n = a (1 + r)^n.$$

Nu skal a_n føres $2p$ Terminer frem i Tiden, idet Rentefoden er r_1 , hvoraf

$$a_{n+2p} = a (1 + r)^n (1 + r_1)^{2p}.$$

Ønsker man at sammenligne flere Kapitaler, der er udsatte til forskellige Tidspunkter, maa man henhøre dem til samme Tidspunkt.

4°. I Aaret 1888 indsatte en Mand i'en Bank 2000 Kr. paa Rente og Renters Rente, Aar 1898 indsatte han atter 5000 Kr. I Aaret 1908 hævede han sine Penge, og han fik da i alt udbetalt 18000 Kroner. Find Procenten.

Henføres Kapitalerne til det Tidspunkt, da han hævede Pengene, har man

$$2000 (1 + r)^{20} + 5000 (1 + r)^{10} = 18000.$$

Sættes $(1+r)^{10} = x$, faas efter Division med 1000 Ligningen

$$2x^2 + 5x = 18,$$

som giver

$$x = \begin{cases} 2 \\ -\frac{9}{2} \end{cases}$$

r bestemmes da af

$$(1+r)^{10} = 2,$$

hvorefter den søgte Procent er 100 r . Værdien $-\frac{9}{2}$ er ubrugelig.

5°. En Mand indsatte i Begyndelsen af n paa hinanden følgende Aar en og samme Sum a til den aarlige Rentefod r . Hvor meget er disse Summer vokset til umiddelbart efter sidste Indskud?

Vi kalder den søgte Sum A og fører alle Kapitalerne a hen til det Øjeblik, sidste Indbetaling sker, og faar saa

$$A = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \dots + a(1+r)^{n-1}.$$

Størrelsen paa højre Side af Lighedstegnet er en Kvotientrække med første Led a , Kvotienten $(1+r)$ og Ledenes Antal n .

$$A = a \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1},$$

$$A = \frac{a}{r} ((1+r)^n - 1).$$

6°. Hvor stor en Gæld G kan afbetales ved n lige store aarlige Afdrag a , naar Rentefoden er r og første Afdrag sker 1 Aar efter Gældens Stiftelse?

Føres Gælden G hen til det Øjeblik, sidste Afdrag betales, har man ifølge forrige Opgave

$$G(1+r)^n = \frac{a}{r} ((1+r)^n - 1),$$

hvoraf

$$G = \frac{a}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right)$$

Opgaverne 5^o og 6^o afgiver Eksempler paa de saakaldte Annuiteter, hvorved man forstaar en Række ligestore Summer, der enten indbetales eller udbetales med ligestore Mellemrum.

26. Vi vil vise, at Formlen

$$a_n = a(1+r)^n$$

ogsaa gælder for n bruddene, idet vi søger $a_{n+\frac{p}{q}}$, hvorved vi mener den Kapital, som a vokser til, naar den staar ude i $n + \frac{p}{q}$ Terminer. Vi deler da vor Termin i q ligestore Terminer, hvortil der svarer Rentefoden r_1 . Meningen hermed er, at det skal være ligegyldigt, om a staar ude i 1 Termin til Rentefoden r eller i q Terminer til Rentefoden r_1 . Det aritmetiske Udtryk herfor er

$$a(1+r)^q = a(1+r_1)^q$$

eller

$$1+r_1 = (1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

Vi indsætter Kapitalen a i n Terminer til Rentefoden r og derpaa i p Terminer til Rentefoden r_1 , og har da

$$a_{n+\frac{p}{q}} = a(1+r)^n(1+r_1)^p = a(1+r)^n(1+r)^{\frac{p}{q}};$$

$$a_{n+\frac{p}{q}} = a(1+r)^{n+\frac{p}{q}}.$$

7^o. En Mand stifter en Gæld G og betaler Aaret efter Gr i Rente. Næste Aar ønsker han at betale Renterne hver Maaned; hvor meget skal han da betale?

Den aarlige Rentefod er r . Efter 1 Maanedes Forløb er Renterne Gr_1 , hvor r_1 er den maanedlige Rentefod, der bestemmes ved

$$(1+r_1)^{12} = (1+r)$$

$$r_1 = (1+r)^{\frac{1}{12}} - 1.$$

Altsaa bliver den maanedlige Rente $G((1+r)^{\frac{1}{12}} - 1)$.

Man kunde ogsaa ræsonnere paa følgende Maade:
Efter 1 Maanedes Forløb er Gælden

$$G(1+r)^{\frac{1}{12}}$$

altsaa den maanedlige Rente

$$G(1+r)^{\frac{1}{12}} - G = G((1+r)^{\frac{1}{12}} - 1).$$

Eks. Til hvilken Sum vokser 628 Kr. efter $\frac{1}{12}$ Aars Forløb, naar der svares $3\frac{1}{2}$ p. C. p. a.?

OPGAVER:

105) 682 Kroner udsættes i 10 Aar paa Rente og Rentes Rente til 5 p. C. p. a. Efter de 10 Aars Forløb hæves Pengene og anbringes i en Forretning, der giver 12 p. C. p. a. Hvormeget kan man derefter hæve i aarlig Rente?

106) Forholdet mellem 2 Kapitaler er nu 1,5. Den mindste udsættes til 5 p. C. p. a., den største til 4 p. C. p. a. Hvor længe skal Kapitalerne staa for at vokse til samme Størrelse?

107) 1. Januar 1900 udsættes 533 Kroner til $3\frac{1}{2}$ p. C. p. a.; 1. Juli 1904 udsættes yderligere 237 Kroner. Hvor meget kan der hæves 1. Januar 1918, naar der regnes Rente og Rentes Rente?

108) Grosserer Malberg udsætter 1. Januar 1900 en Pengesum paa Rente og Rentes Rente til 4 p. C. p. a.; han lader Pengene staa urørte, men udsætter 1. Januar 1902 en anden Pengesum, der er 500 Kr. større end den første; for den sidste Kapitals Vedkommende ydes der kun $3\frac{1}{2}$ p. C. p. a.; 1. Januar 1910 hæver han begge Pengesummer, og det viser sig nu, at den sidste Pengesum er bleven dobbelt saa stor som den første. Hvor mange Penge udsatte han 1. Januar 1900, og hvor mange hævede han 1. Januar 1910?

109) En Mand indsætter i en Bank, der giver 2 p. C. halvaarlig Rente, hvert Aars 1ste Januar 120 Kroner i 13 paa hinanden følgende Aar. 3 Aar efter sidste Indbetaling hæver han Pengene. Hvormeget kan han hæve?

110) Hvor længe skal en Kapital staa ude paa Rente og Rentes Rente til den aarlige Rentefod r , for at den aarlige Rente kan blive $\frac{1}{p}$ af den udsatte Kapital? Eksempel: $r = 0,04$; $p = 10$.

111) Agent Petersen indsætter 1ste Januar 1902 en saa stor Sum i en Bank, at han 1ste Januar 1920 kan hæve 5000 Kr., idet Banken giver $4\frac{1}{2}$ p. C. i aarlig Rente. Den 1ste Januar 1912 skal Agenten imidlertid bruge nogle Penge, og han hæver derfor af sine Penge en saa stor Sum, at Banken 1ste Januar 1920 kun kan udbetale ham 1800 Kroner. Hvor meget hævede han?

112) Lærerpersonalet ved en Skole stiftede en Rejseforening. Der var 18 Lærere ved Skolen, og hver Lærer indbetalte hver 1ste Januar og 1ste Juli 6 Kroner. Pengene anbragtes i en Bank, der ydede 2 p. C. i halvaarlig Rente. Hvert 3die Aars 31te December hæves alle Pengene, og der uddeles 2 Rejselegater, af hvilke det ene er dobbelt saa stort som det andet. Hvor stort bliver hvert Rejselegat?

113) Den 1ste Juli 1889 indsatte A en saa stor Sum i en Sparekasse, at han med Renter og Rentes Renter efter Sparekassens dagældende Rente, 4 p. C. p. a., vilde kunne hæve 10000 Kroner den 1ste Juli 1902. Da Sparekassen imidlertid nedsatte Renten til $3\frac{1}{2}$ p. C. p. a. fra den 1ste Juli 1894, indskød han paa dette Tidspunkt yderligere et saa stort Beløb, at han fremdeles kunde paaregne at hæve 10000 Kroner den 1ste Juli 1902. Hvor stort var dette Beløb?

114) Murmester Hansen laaner 36428 Kroner og betaler Aaret efter 1639,26 Kroner i Rente. Næste Aar foretrækker han at betale Renterne hvert Kvartal. Hvor meget skal han betale, naar der tages Hensyn til Rente og Rentes Rente?

115) Hver 1ste Januar i Aarene 1905—1913 indskyder A 100 Kroner i en Bank og hver 1ste Juli i samme Aarrække en ubekendt Sum x . Han opnaar derved, at han hvert Aar kan hæve 400 Kroner i Rente, naar han lader Pengene staa urørt til 1ste Januar 1925. Find x , naar Banken giver 2 p. C. i halvaarlig Rente.

116) Find n af

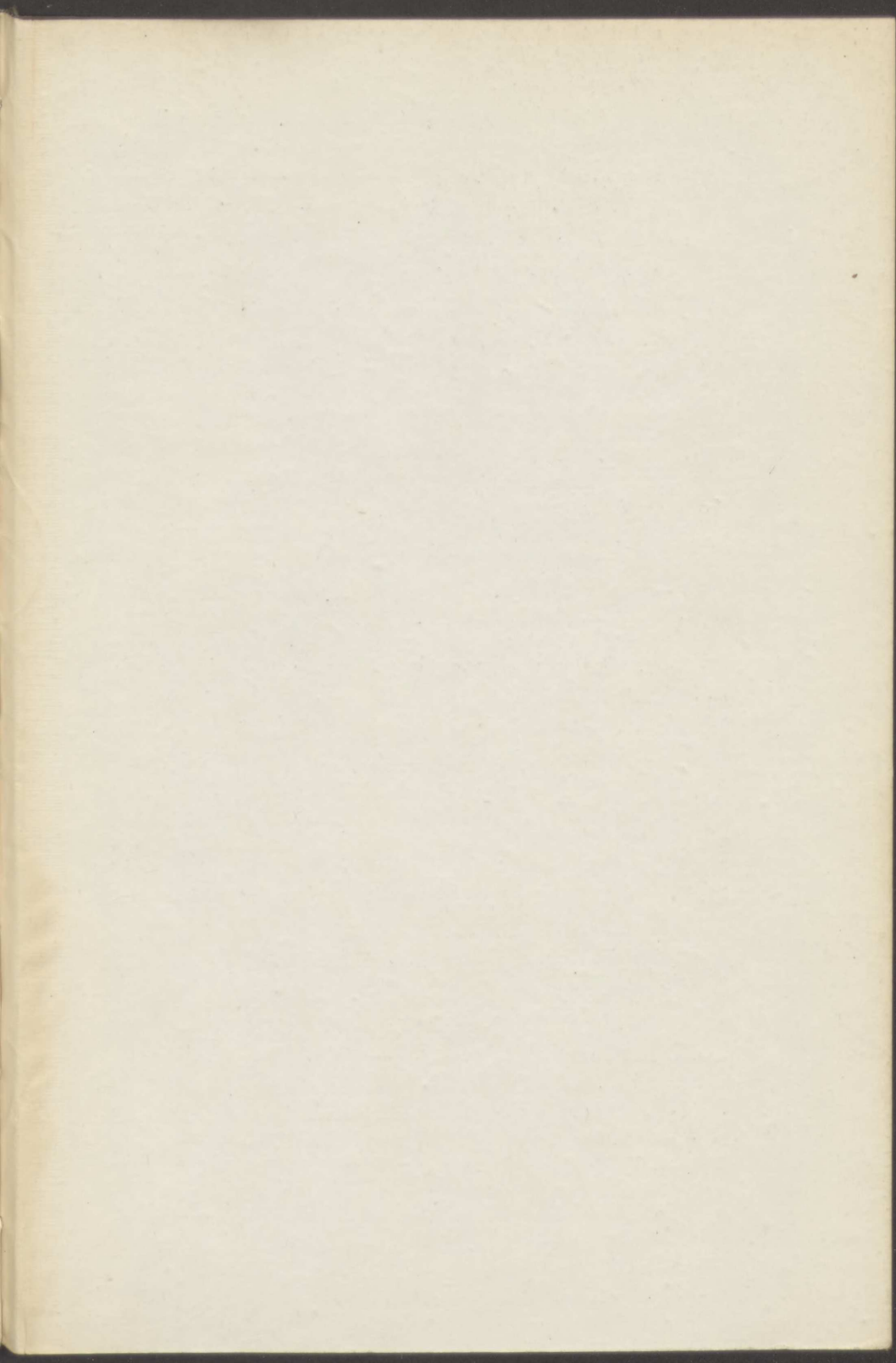
$$G = \frac{a}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right),$$

hvor G , a , r og n har den sædvanlige Betydning. Angiv Betingelsen for Opgavens Mulighed og forklar Resultatet.

117) En Mand indsætter i 2 paa hinanden følgende Aar den samme Sum a og hæver det 3die Aar alle Pengene, na . Find Rentefoden r udtrykt ved n . Hvor stor maa n være, naar $r = 0,045$?

118) Hvor meget udsatte A for 15 Aar siden, naar han nu ejer 4678 Kr., og den aarlige Rentefod de første 8 Aar var 0,04, de sidste 7 Aar 0,035?

119) En Mand indsatte den 1. Januar 1901 og derefter med et Aars Mellemrum hver Gang 100 Kr. i en Bank, sidste Gang 2. Januar 1907. Den 31. December 1907 hæver han Indskuddene med Renter og Rentes Rente og forøger den hævede Sum med 100 Kr. Den saaledes forøgede Sum indsætter han i en Forretning, der giver dobbelt saa mange Procent i Udbytte som Banken gav Procent i Rente. Naar han derefter aarlig kan hæve 84 Kr. 40 Øre i Udbytte, hvor mange Procent gav da Banken i Rente?



Lærebøger for tekniske Skoler.

N. F. Jensen og O. A. Smith: Matematik for tekniske Skoler. II Algebra 1 Kr. 25 Øre

Endvidere udkommer i Begyndelsen af 1915 III **Geometri** og i Løbet af Foraaret og Sommeren 1915 I **Aritmetik** og IV **Trigonometri**.

Chr. Axel Jensen og E. Rondahl: Stilarternes Historie. Grundrids af Ornamentikkens og Arkitekturdekorationens Udvikling fra de ældste Tider til vore Dage. Udgivet med Undestøttelse af Indenrigsministeriet og af det Reiersenske Fond. Anbefalet af Indenrigsministeriet til Brug i de tekniske Skoler. 8 Kr., indb. 10 Kr.

Chr. Jensen og A. L. Vanggaard: Tekniske Anvendelser af Kemi og Fysik I: Jærn-Kul-Petroleum. Kartonneret 1 Kr. 25 Øre

J. Jonas og A. L. Vanggaard: Materiallære til Brug i tekniske Skoler. Under Arbejde. Flere af Afsnittene foreligger færdige og kan faas særskilt.

Karl Mortensen: Lærebog i Tysk for tekniske Skoler I. (Til Brug for Aften- og Dagskoler). Anbefalet af Indenrigsministeriet til Brug i de tekniske Skoler. Kartonneret 2 Kr.

— **Lærebog i Tysk** for tekniske Skoler II. (Til Brug for Dagskoler). Kartonneret 1 Kr. 25 Øre

E. Rondahl: Vejledning i Akvarelmaling. Med 9 Farvetavler og mange Tekstillustrationer 3 Kr.

— **Perspektiv** 1 Kr.

R. Wendt: Skriftarter til Brug for Maskin- og Bygningstegnere 1 Kr. 50 Øre

Jul. Gjellerups Forlag.