

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

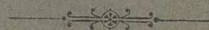
R

79.

BIDRAG TIL BESTEMMELSEN AF
METEOROLOGISKE ELEMENTERS
PERIODER

AF

V. H. RYD



KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS VILHELM TRYDE

TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)

1915

BIBLIOTEK

1915.
5515.

Industribiblioteket

551 5.

Grp:

Forfatter:

V. H. Ryd.

Titel:

Mel. Elementers Periode.

Bind:

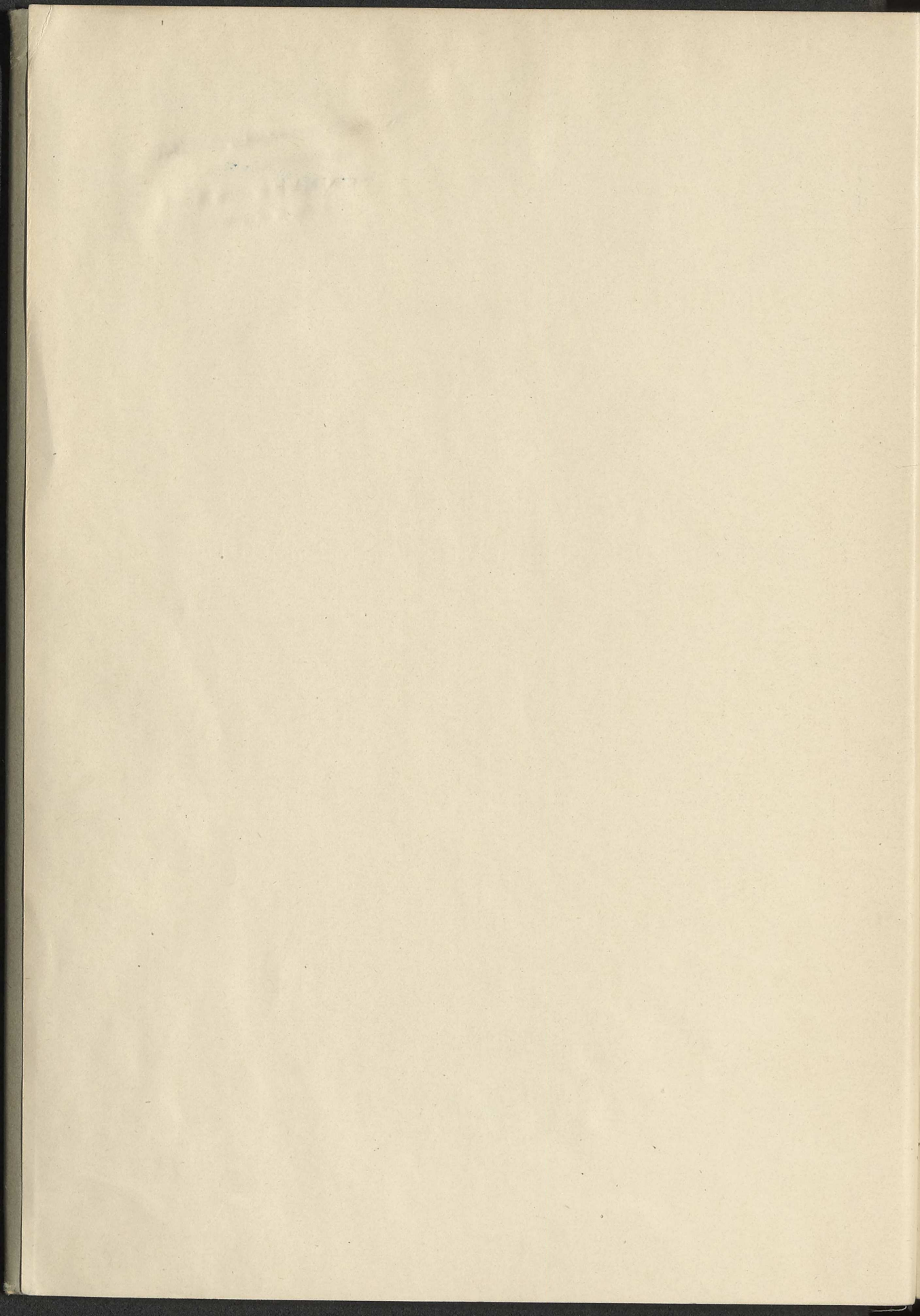
Udgave:

Trykkaar: 1915.

Industribiblioteket

551 5

BIDRAG TIL BESTEMMELSEN AF
METEOROLOGISKE ELEMENTERS PERIODER



BIDRAG TIL BESTEMMELSEN AF
METEOROLOGISKE ELEMENTERS
PERIODER

AF

V. H. RYD



KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS VILHELM TRYDE

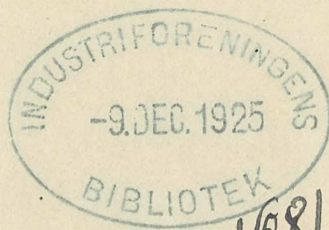
TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)

1915

Denne Afhandling er af det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet antaget til offentlig at forsvares for den filosofiske Doktorgrad.

Kjøbenhavn, den 28. Oktober 1914.

*H. P. Steensby,
d. A. Dekanus.*



FORORD.

DET var oprindelig en Undersøgelse af visse tilsyneladende ejendommelige Træk, som viste sig i Temperaturens aarlige Gang, der gav Anledning til det foreliggende Arbejde. Det blev mig nemlig derved klart, at man ved Bestemmelsen af de meteorologiske Elementers daglige og aarlige Perioder foretog — og var nødt til at foretage — Udjevninger med Iagttagelsesværdier, som var bundet til hverandre, og at disse Opgaver derfor faldt udenfor det Omraade, som almindeligvis behandles i Iagttagelseslæren. Under disse Omstændigheder var det indlysende, at naar man vilde opnaa nogenlunde tilfredsstillende Resultater, maatte Opgaven tages op fra Grunden, og dette har jeg forsøgt at gøre, uagtet jeg er klar over, at mine matematiske Kundskaber ikke er tilstrækkelige til, at jeg kan behandle dette Emne paa en fuldtud tilfredsstillende Maade.

Iøvrigt har jeg med Forsæt bygget saa lidt som muligt paa Matematiken og saa meget som muligt paa direkte Betragtninger. Af to Grunde. For det første, fordi jeg haaber, at denne Undersøgelse derved gøres tilgængelig for en større Kreds af dem, der beskæftiger sig med disse Opgaver. For det andet, fordi jeg anser det for heldigt, at selve Fremstillingsformen bidrager sit til at fremhæve det vage, som findes ved alle Udjevningsopgaver, men navnlig ved de Opgaver, hvor den teoretisk rigtige Udjevningssfunktion er ubekendt.

Mine Bestræbelser tager i første Række Sigte paa at udforme en Udjevningssmetode, der kan anvendes til at fremstille de for den praktiske Meteorologi vigtige Tabeller over Normalværdier og til at fremstille udjvnede Værdier, der kan benyttes som Prøve for den teoretiske Meteorologis Hypoteser, idet der lægges særlig Vægt paa at vurdere de opnaaede Resultaters Godhed. I anden Række tager mine Bestræbelser Sigte paa at frem-

FORORD.

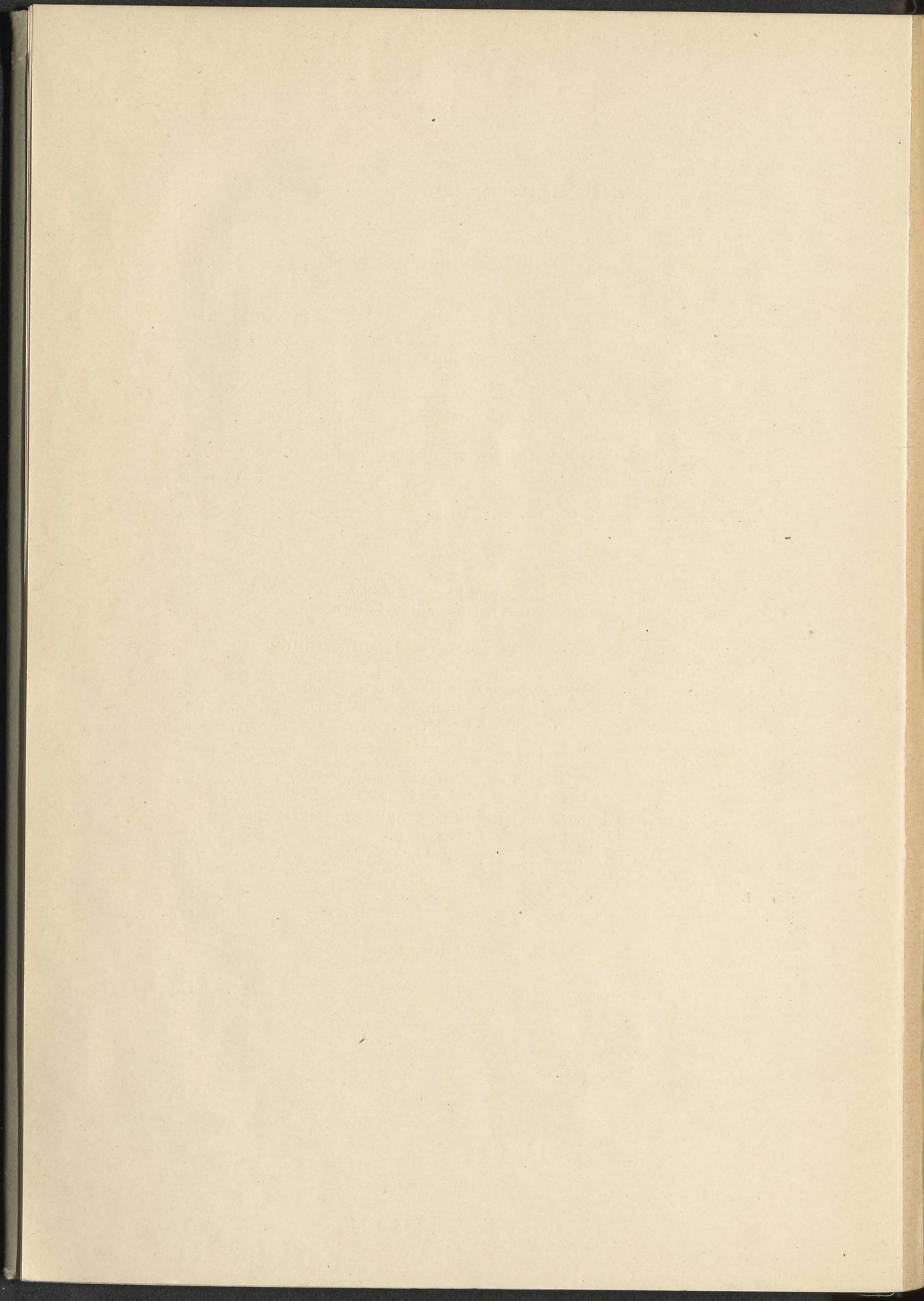
hæve de Fejl, der begaas, naar man benytter utilstrækkelige Udjevningsmetoder, eller naar man ikke tager fornødent Hensyn til de betragtede Opgavers særlige Natur.

Fra flere Sider har jeg angaaende Afhandlingens iagttagelsesteoretiske Del modtaget velvillig Kritik og Opmuntring til at fortsætte Arbejdet, og jeg bringer min bedste Tak herfor, ligesom jeg takker Hr. Docent *D. la Cour* for Udtalelser om adskillige af de Emner, der staar i nærmere Forhold til Meteorologien.

V. H. RYD.

INDHOLDSFORTEGNELSE

I. INDLEDNING.		Side
§ 1.	Undersøgelsens Formaal	1
§ 2.	Baand mellem Iagttagelserne. Opgavens Natur	5
§ 3.	Forskellige Slags Fejl	9
II. OM UDJEVNINGSPRINCIPER.		
§ 4.	Mindste Middelfejls Princip	14
§ 5.	Om Valg af Leddene til Udjevnringsrækker	20
§ 6.	Fejlen paa den udjevnede og forbedrede Værdi	24
III. DE ALMINDELIGT ANVENDTE UDJEVNINGSMETODER.		
§ 7.	Materiallets forberedende Behandling	29
§ 8.	Anvendelse af mindste Kvadraters Metode	31
§ 9.	Anvendelse af »mekaniske Metoder«	37
IV. BINDING.		
§ 10.	Baandene og Bindingens Karakter	41
§ 11.	Regning med bundne Iagttagelser og nogle Følger af Bindingen	55
§ 12.	Sekundære Minima og Maxima i Temperatures aarlige Periode	60
V. MEKANISK METODE MED GENTAGNE UDJEVNINGER.		
§ 13.	Metodens Hovedtræk	66
§ 14.	Udjevnringsformlens Udledning ved Hjælp af en algebraisk Funktion	69
§ 15.	Udjevnringsformlens Udledning ved Hjælp af en trigonometrisk Række	76
§ 16.	Variationsfaktorer	80
§ 17.	Valg af Udjevnringsformel	90
§ 18.	Skemaet for selve Udjevningen	102
§ 19.	Udjevningen foretaget med de givne Værdiers Differenser	111
VI. BESTEMMELSER AF METEOROLOGISKE ELEMENTERS PERIODISKE VÆRDIER.		
§ 20.	Temperatures daglige Periode	116
§ 21.	Lufttrykkets daglige Periode	128
§ 22.	Lufttrykkets aarlige Periode	132
§ 23.	Temperatures aarlige Periode	139
VII. AFSLUTNING.		
§ 24.	Direkte anvendelige Formler	145
§ 25.	De forskellige Udjevnringsmetoders Anvendelighed. Résumé	160



I.

INDLEDNING.

§ 1.

Undersøgelsens Formaal.

EN vigtig Del af det Grundlag, som Meteorologien hviler paa, dannes af Rækker af Iagttagelser angaaende daglige og aarlige Perioder for de saakaldte meteorologiske Elementer — Temperatur, Lufttryk, Vindstyrke, Vindretning, o. s. v. Ved at behandle det indsamlede — meget store — Talmateriale har man opnaaet Resultater, der i visse Retninger kan siges at være tilfredsstillende; dette gælder for Eksempel i adskillige Tilfælde, hvor det kun drejer sig om en Anvendelse af Elementernes Middelværdier. Derimod har de opnaaede Resultater i Almindelighed kun været lidet tilfredsstillende i de Tilfælde, hvor man i større Udstrækning har haft Brug for teoretiske Hjælpemidler til Iagttagelsernes Behandling, eller hvor man har villet benytte Talmaterialet til at afgøre, om denne eller hin Hypotese kunde antages eller burde forkastes. Selv angaaende tilsyneladende simple Spørgsmaal, som man kunde vente at faa besvarede ved Hjælp af dette Materiale, er man endnu ikke kommet til afgørende Resultater. Man kan saaledes nævne Spørgsmaalet om, hvorvidt de sekundære Minima og Maxima, der viser sig i Iagttagelsesværdierne for Temperaturens aarlige Gang, vil forsvinde, efterhaanden som Iagttagelserne udstrækkes over længere Tidsrum, eller om de virkelig er karakteristiske for det iagttagne Fænomen; herom, eller særlig om det mere specielle Spørgsmaal: »Kuldetilbagefald«, eksisterer der en hel Literatur.

Naar man har set, hvorledes Iagttagelsesteorien i Reglen anvendes paa dette Omraade, er der imidlertid intet mærkeligt i, at der kan fremkomme Resultater, som afviger fra eller endog er i Strid med hverandre. Det vil i denne Henseende være tilstrækkeligt at omtale, hvor skematisk mindste Kvadraters Metode ofte anvendes til Udjevning af de periodiske meteorologiske

Iagttagelser. Man benytter nemlig sædvanligvis et vist Antal Led af Udjevningssrækken

$$u = A_1 \sin (x + \alpha_1) + A_2 \sin (2x + \alpha_2) + A_3 \sin (3x + \alpha_3) + \dots,$$

men uagtet det her, hvor den teoretisk rigtige Funktion er ubekendt, først og fremmest kommer an paa at bestemme hvormange (eller hvilke) Led, der skal tages med, synes man enten at betragte det som en almindelig anerkendt Forudsætning, at der skal bruges netop tre Led, eller ogsaa nøjes man med at erklære, at Differenserne mellem de givne og de udjvnede Værdier er »tilstrækkelig smaa«.

Der er dog ogsaa fremkommet Advarsler imod en saadan Anvendelse af mindste Kvadraters Metode. Saaledes siger *H. Wild*¹⁾ angaaende Anvendelsen af den nævnte Fremgangsmaade til Bestemmelse af Temperaturen daglige Periode: »Berechnet man nur 3 Zeitglieder²⁾, so erscheint die Curve des täglichen Gangs nach der Formel sowohl um das Maximum als insbesondere um das Minimum herum gegenüber der Wirklichkeit viel zu sehr abgerundet, die berechneten Minima sind gegenüber den wahren oft um volle Stunden rückwärts verschoben und auch die Maxima erleiden ähnliche Verschiebungen«. For at vise at *Wild* i Hovedsagen har Ret, turde det være tilstrækkeligt at henvise til et enkelt af de Eksempler, som *W.* anfører til Støtte for sine Udtalelser. I Fig. 1 er fremstillet Partiet omkring Minimet

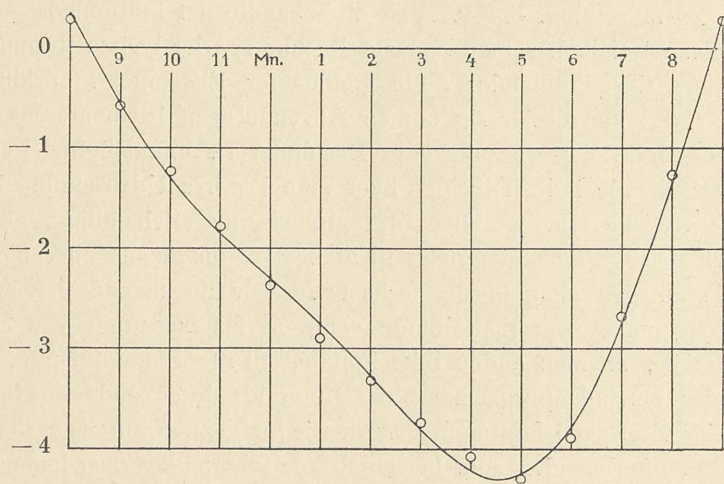


Fig. 1.

for Temperaturen daglige Periode i Kathrineborg i April Maaned. De afsatte Punkter gengiver Iagttagelserne (Middeltal for 18 Aar), og Kurven fremstiller Resultatet af en Udjevning efter de tre første Led af den omtalte Række. Man ser, at i den Del af Diagrammet, der omfatter Tiden fra Kl. 8

¹⁾ »Die Temperatur-Verhältnisse des Russischen Reiches«. St. Petersburg, 1881. Text. (S. 5).

²⁾ I nogle Opgaver kan der foruden de nævnte Led, der er Funktioner af Tiden, ogsaa forekomme et konstant Led.

Aften til Kl. 5 Morgen, bugter Kurven sig ud og ind, saaledes at Krumningen snart er positiv og snart negativ. Ifølge Teorien skal man imidlertid have¹⁾

$$\vartheta = \vartheta_0 + A \times (0.87)^x,$$

hvor ϑ_0 og A er Konstanter, og x Tiden i Timer regnet fra Solnedgang; anden Differentialkvotient skal altsaa ikke skifte Fortegn, og de foreliggende Iagttagelser giver ikke Grund til at antage, at Teorien ikke skulde være rigtig eller ikke anvendelig i nærværende Tilfælde. For *Wild* kommer det mest an paa at bestemme Extremerne, men hertil kan han for Minimets Vedkommende ikke bruge Udjevningen ved Hjælp af de 3 Led, da det øjensynligt er forskudt ca. $\frac{1}{2}$ Time. *Wild* kommer da til den Slutning, at man i dette Tilfælde maa benytte omtrent alle Leddene i Udjevningsrækken, førend man opnaar et Resultat, der er lige saa nøjagtigt som det, han paa en meget nemmere Maade kommer til ved at udjevne grafisk.

Prof. *Paul Schreiber* kommer i sin omfangsrige Undersøgelse²⁾ — men rigtignok kun støttet af et spinkelt Iagttagelsesmateriale — til et andet Resultat og angriber *Wild*, idet han siger: »Die *Bessel'sche* Formel³⁾ ist geeignet, schon durch wenig Glieder die Gesetze der täglichen Periode der Lufttemperatur zur Darstellung zu bringen«.

Overfor *Wild's* udførlige Svar⁴⁾ herpaa maa Prof. *Schreiber* give tabt⁵⁾, men hverken dette Nederlag eller *Wild's* Advarsler og vægtige Argumenter synes for mange Meteorologers Vedkommende at have rokket Tilliden til Udjevningen ved Hjælp af de tre Led af »Bessels Formel«.

Det tør imidlertid siges, at en Del af Skylden for de uheldige Tilstande indenfor dette Omraade af Meteorologien tilkommer de almindelig benyttede Fremstillinger af Udjevningsregningen. Der vilde antagelig kunne undgaas adskillige Misforstaaelser, naar der blev skelnet skarpt imellem de to væsensforskellige Opgaver: Udjevning, naar den teoretisk rigtige Funktion er bekendt, og naar den er ubekendt⁶⁾. I det ene Tilfælde skal der kun udføres Beregning efter et givet Skema, men i det andet Tilfælde er det netop Opgavens Kerne at finde det rette Skema. Kun den, som ikke ser den store Forskel, der er imellem disse to Opgaver, kan anvende Udjevningsrækker paa den ovenfor omtalte Maade.

Endvidere burde der gøres alt muligt for at holde den Opgave, som

¹⁾ *J. von Hann*: »Lehrbuch der Meteorologie« Leipzig 1906. S. 597.

²⁾ Prof. Dr. *Paul Schreiber*, Direktor des königl. sächs. meteorologischen Institutes zu Chemnitz: »Untersuchung über das Wesen der sogenannten Bessel'schen Formel«. Halle 1892.

³⁾ Den omtalte Udjevningsrække gaar i Almindelighed under dette temmelig misvisende Navn.

⁴⁾ »Über die Darstellung des täglichen Ganges der Lufttemperatur«. St. Pétersbourg. 1893.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift. 1893 (S. 348).

⁶⁾ I *Thiele's* »Elementær Iagttagelseslære« glider saaledes disse to Opgaver jevnt over i hinanden.

gaar ud paa at udjevne og forbedre en Række Værdier, der er behæftede med Fejl, ude fra hvad man næsten kunde kalde for den modsatte Opgave, nemlig tilnærmet Fremstilling af et vist Antal (fejlfrige) Funktionsværdier eller af en Funktion ved Hjælp af en Interpolationsformel; Faren for en Sammenblanding af disse to Opgaver ligger deri, at de begge løses ved Hjælp af Udjevnrækker. Men tager vi en saa almindelig benyttet Lærebog som *Helmert's* »Die Ausgleichsrechnung«, finder vi der omtalt et Eksempel paa Udjevning af periodiske meteorologiske Iagttagelser anbragt netop i Kapitlet om »Näherungsweise Darstellung von Funktionen«. Da den i Literaturen hyppig forekommende Behandling af Opgaven kunde stamme herfra, turde det have nogen Interesse at betragte det paagældende Sted¹⁾ lidt nærmere.

Opgaven drejer sig om en Udjevning ved Hjælp af den trigonometriske Række af den aarlige Periode for Temperaturens daglige Amplitude. Med de i »Elementær Iagttagelseslære« benyttede Betegnelser har man, at Ligningen

$$\left[\frac{(o - u)^2}{\lambda_2(o)} \right] = n - m$$

tilnærmelsesvis skal være tilfredsstillet, og kan $\lambda_2(o)$ betragtes som konstant, skal man altsaa have

$$\frac{[(o - u)^2]}{n - m} = \lambda_2(o).$$

Helmert sætter nu

$$\mu^2 = \frac{[(o - u)^2]}{n - m},$$

og den summariske Fejlkritik faar altsaa her den Form, at μ^2 skal være tilnærmelsesvis lig med $\lambda_2(o)$. I det omtalte Eksempel er $n = 12$, og der beregnes først 3 Elementer, hvoraf man faar

$$\mu = \sqrt{\frac{.4257}{12 - 3}} = \pm .22,$$

hvorhos det opgives, at Middelfejlen paa de forelagte Værdier ligger mellem $\pm .27$ og $\pm .54$. Derefter siges der:

»Ogleich sonach schon hinreichende Übereinstimmung wäre, so wollen wir uns doch nicht damit begnügen — — —«. Der beregnes derfor først 2 nye Elementer, hvorefter man faar $\mu = \pm .17$, men: »Auch mit dieser Übereinstimmung sind wir noch nicht zufrieden — — —«, hvorfor der beregnes yderligere 2 Elementer, altsaa ialt 7, og man faar da $\mu = \pm .03$. Derefter siges der:

»Diese Übereinstimmung genügt, und es wäre überflüssig, die ändern

¹⁾ *F. R. Helmert*: »Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate« Zweite Auflage. 1907. (S. 404—8).

fünf Konstanten, welche zur vollständigen Darstellung der Beobachtungen notwendig würden, mit hinzunehmen«.

Vi er her gledet ganske jevnt bort fra den Fremgangsmaade, som rettelig skal anvendes ved den foreliggende Opgave, men det værste er, at den, som øser sin Kundskab af denne Kilde, maa antage, at jo større »Overensstemmelsen« er, desto bedre bliver Resultatet. Det bliver herefter naturligt at slutte, at en saadan Opgave er løst paa en tilfredsstillende Maade, naar blot Differenserne mellem de givne og de udjvnede Værdier er »tilstrækkelig smaa«.

Imidlertid vil ogsaa den, der med større Omhu anvender den almindelige Udjevningsregnings Teori, kunne komme til urigtige Resultater, eller maaske rettere til en urigtig Vurdering af Resultaternes Godhed. En af Aarsagerne hertil er, at for den almindelig anvendte Iagttagelsesteori er det en Forudsætning, at Iagttagelserne er indbyrdes frie, medens denne Fordring ikke engang tilnærmelsesvis opfyldes af vore Iagttagelsesværdier. Selve det benyttede Grundlag for Behandlingen af disse Opgaver har altsaa ikke været rigtigt, og man kan derfor ikke vente at faa de enkelte Opgaver løst paa en tilfredsstillende Maade, førend man har tilpasset Teorien efter de periodiske Iagttagelsesværdiers Natur.

Det anførte maa være tilstrækkeligt til at vise, at det vilde være af Betydning for Meteorologien — og specielt for Meteorologiens Krav om en Plads mellem Videnskaberne — hvis man kunde danne et virkelig brugbart Grundlag for Behandlingen af de periodiske Iagttagelsesrækker, og det skal da være Formaålet med nærværende Undersøgelse at foretage et Forsøg i denne Retning.

§ 2.

Baand mellem Iagttagelserne. Opgavens Natur.

Som foran omtalt er de Iagttagelser, som vi skal benytte til Bestemmelsen af de meteorologiske Elementers daglige og aarlige Perioder, bundet til hverandre, hvilket er let at paavise. Vi kan blot tage et Eksempel fra en lang Observationsrække over Døgnet's Middeltemperatur i København. For den 1ste Februar faar man saaledes, at Middelafrvigelsens Kvadrat er 15 og for den 2den Februar 14.9, og beregner man endvidere Differenserne mellem Døgnet's Temperaturer den 1ste og 2den Februar for hvert enkelt Aar, finder man, at Middelafrvigelsens Kvadrat for disse Differenser er 4.4. Men havde Iagttagelserne været frie, skulde man have faaet en Værdi, der var omtrent 7 Gange saa stor som den fundne ifølge Sætningen

$$\mu_2(o' - o'') = \mu_2(o') + \mu_2(o'').$$

Iagttagelserne er altsaa stærkt bundet til hverandre.

Det er i dette Tilfælde ikke vanskeligt at paavise Grunden til Bindingen. Dersom Temperaturen den 1ste Februar i et vist Aar er meget for høj (eller meget for lav), er det sandsynligt, at Temperaturen den 2den Februar i samme Aar er noget for høj (eller noget for lav). Afvigelserne for en Række paa hinanden følgende Døgn forholder sig ikke til hverandre som Fejlene i en Række af frie Iagttagelser, hvor der er samme Sandsynlighed for, at en Fejl faar positivt Fortegn, som for, at den faar negativt, uanset hvilket Fortegn den foregaaende Fejl havde. Temperaturen svinger i Almindelighed ikke saaledes fra Døgn til Døgn, men Reglen er den, at varmere og koldere Perioder af adskillige Dages eller Ugers Varighed afløser hverandre. Til en varm Periode i Februar vil der i Almindelighed svare en Lufttrykfordeling, som giver sydvestlige Vinde, og til en kold Periode en Lufttrykfordeling, som giver nordlige eller østlige Vinde; Lufttrykfordelingen eller Vindretningen er altsaa en væsentlig og varierende Omstændighed ved Iagttagelsen, men der tages intet Hensyn hertil, og Iagttagelserne bindes derfor til hverandre ved denne Omstændighed. Man kunde hæve Baandene, idet man udtrykte de varierende Omstændigheder ved visse teoretiske Sætninger, men den Opgave, man da tog Sigte paa, var en Undersøgelse af Lovene for Temperaturens Svingninger fra Døgn til Døgn i hvert enkelt Aar. Denne (almindelige) Art af Opgaver skal vi imidlertid ikke beskæftige os med her. Den ovenfor nævnte Observationsrække over Døgnet's Middeltemperatur skal saaledes benyttes til at finde »Normaltemperaturen« for hvert Døgn; de Middeltal, som man faar af Iagttagelserne, giver os de søgte Værdier med en vis Tilnærmelse, men vil man forbedre disse Værdier, maa man udjevne dem — altsaa udjevne Iagttagelser, som er bundet til hverandre.

Lad os nærmere betragte et andet Tilfælde, hvor Forholdene er nemmere at overskue, nemlig Temperaturens daglige Periode. Det drejer sig paa dette Sted kun om at belyse vore Iagttagelsesværdiers og vore Opgavers Natur, og vi fremstiller derfor det iagttagne Fænomen i en noget simplificeret Skikkelse og antager, at Iagttagelsesværdierne kun bindes til hverandre ved een væsentlig Omstændighed, nemlig Himlens Skyethed. Naar Himlen er klar, vil saavel Opvarmningen om Dagen som Afkølingen om Natten være større, end naar Vejret er graat. Med en god Tilnærmelse til de virkelige Forhold kan vi sætte Udslaget proportionalt med en lineær Funktion, nemlig $a - bS$, hvor a og b er positive Konstanter, medens S er den Brøkdel af Himlen, som er bedækket af Skyer. Ser man desuden bort fra de egentlige Iagttagelsesfejl, der er smaa i Forhold til de Afvigelser, der skyldes Variationerne i Skyetheden, vil Udslaget herefter kunne udtrykkes saaledes

$$o_x = (a - bS) \cdot f\left(\frac{2\pi}{24}x\right),$$

hvor x er Tiden i Timer — f. Eks. regnet fra Midnat. Ved den Opgave,

som vi i Virkeligheden skal løse, har vi intet at gøre med dette Udtryk — vi skal kun benytte Temperaturiagttagelsen o_x , men ikke tage Hensyn til Værdien af S ; vi anvender kun dette Udtryk her for at vise, hvorledes Iagttagelserne bindes til hverandre. Der foreligger Iagttagelser for hver Time, og vi vil særlig betragte to paa hinanden følgende Værdier, f. Eks. o_1 og o_2 , for hver Dag. Da Skydækket i Almindelighed ikke forandrer sig væsentligt i Løbet af en Time, vil o_1 bindes til o_2 ved den for begge Iagttagelser fælles Værdi af S ; Afvigelse fra de respektive Gennemsnitsværdier vil overvejende begge være positive eller begge negative. Paa forskellige Dage kan S antage forskellige Værdier, men man har stadig i det væsentlige samme Værdi af S for hvert Par af Iagttagelserne o_1 og o_2 , og danner man Middeltal for Værdierne af o_1 og o_2 f. Eks. for en Maaned, er det indlysende, at disse Middeltal ogsaa er bundet til hinanden. Gaar vor Opgave ud paa at bestemme den daglige Periode for en vis Maaned, vil vore Iagttagelsesværdier netop være saadanne til hverandre bundne Middeltal — enten for en enkelt Maaned eller for samme Maaned i flere Aar. Da vi antager — eller i al Fald som en foreløbig Forudsætning kan gaa ud fra — at Klimaet ikke forandrer sig i Tidens Løb, vil, efterhaanden som vore Iagttagelser udstrækkes over længere Tidsrum, disse Middeltal ifølge vor Antagelse gennemgaaende nærme sig mere og mere til visse bestemte (men ubekendte) Værdier; men vil vi bestemme de ubekendte Værdier med en større Nøjagtighed end den, de fundne Middeltal er i Besiddelse af, maa vi udjevne disse Middeltal. Vi maa altsaa ogsaa i dette Tilfælde udjevne Værdier, der er bundet til hverandre.

Vore Opgavers særlige Natur kan belyses ved, at vi nærmere undersøger, hvad det fører til, naar man vil undgaa den direkte Behandling af de bundne Iagttagelser. Vi skal da betragte den fælles bindende Omstændighed, S , som den primitive Iagttagelse og fremstille det tilsvarende Udslag, o , som Funktion af S . Dette kunde ske derved, at man ved passende Elimination delte Opgaven i to Dele, hvoraf den ene Del bestod af Bestemmelsen af Konstanterne a og b , og den anden Del af Bestemmelsen af den periodiske Funktion. Man vilde under disse Omstændigheder formelt faa en meget fuldstændig Løsning, nemlig et Udtryk af Formen

$$u_x = (a - bS) \cdot f\left(\frac{2\pi}{24}x\right),$$

der giver Udslaget paa den enkelte Dag for enhver Tid og enhver Værdi af S . Den Opgave, som vi ønsker løst, er imidlertid en anden. Hvis de nævnte simple Forudsætninger var rigtige, vilde vor Løsning blive et specielt Tilfælde af den ovenstaaende, nemlig

$$u_x = (a - bS_0) \cdot f\left(\frac{2\pi}{24}x\right),$$

naar S_0 er Middelværdien af S . Men denne Vej vil man aldrig gaa, naar Opgaven er at finde Temperaturens daglige Periode. Arbejdet vilde nemlig for det første blive unødvendig stort, og for det andet vilde Resultatets Godhed være afhængig af Rigtigheden af den benyttede Hypotese.

For Fuldstændigheds Skyld og navnlig for at undgaa Misforstaaelser bør det dog tilføjes, at man ved Løsningen af vore Opgaver kan benytte en Fremgangsmaade, der er forskellig fra begge de ovenfor angivne. Vi gaar jo ud fra, at der ikke blot bagved de meteorologiske Elementers stadige Variationer, men ogsaa bagved de søgte Perioder findes visse Naturlove, og at vore Iagttagelsesværdier efterhaanden vil nærme sig til de tilsvarende Værdier af visse sande eller teoretisk rigtige Funktioner, som formulerer Lovene. Vi kan derfor ogsaa begynde med at opstille en Teori, men denne Teori skal for vore Opgavers Vedkommende vel at mærke ikke omfatte alle de væsentlige Omstændigheder ved det iagttagne Fænomen, men kun de Omstændigheder, der har eller antages at have Betydning for vedkommende Lov. Vi opnaar altsaa heller ikke ved denne Fremgangsmaade at frigøre Iagttagelserne, eftersom vi ikke udtrykker alle de væsentlige Omstændigheder i Teorien, og hvis den opstillede Teori er rigtig, bliver der tilbage netop de samme bindende Omstændigheder, som vi undlader at tage Hensyn til, naar vi løser Opgaven uden Opstilling af specielle Hypoteser angaaende den teoretisk rigtige Funktion.

Den ovenfor omtalte Fremgangsmaade kunde synes at være naturlig ved visse teoretiske Undersøgelser angaaende Atmosfærens Fysik, men i Virkeligheden gør man sig herved Opgaven unødvendig vanskelig. Det er netop en stor Fordel, at man kan behandle Iagttagelsesmaterialet for sig og Teorien for sig; har man først fundet udjævne og forbedrede Værdier, kan man derefter udarbejde sin Teori og undersøge, hvorledes den stemmer med Erfaringen.

At man kan gaa frem paa denne Maade beror paa, at en hvilkensomhelst Teori, som man vil opstille, maa have Formen

$$v_x = f\left(\frac{2\pi}{n}x\right),$$

saaledes at der til en bestemt Fase kun svarer en Funktionsværdi, samt at man for at faa en fuldstændig Teori skal tage Hensyn til alle de Fænomener, der varierer paa denne Maade, saafremt de staar i Aarsagsforhold til det betragtede meteorologiske Element. Naar vi da som vor eneste Forudsætning har, at den sande Funktion er af ovenstaaende Form, har vi opstillet den tilstrækkelige og nødvendige Teori for vore Opgaver. Ved Behandlingen af Temperaturens daglige Periode tager vi saaledes i Virkeligheden Hensyn til Temperaturens Afhængighed af Solens Højde og af Udstraalingen til de forskellige Tider i Døgnet, og endvidere tager vi Hensyn til for Eksempel Variationen i Skyetheden, for saa vidt der heri findes en daglig

Periode; derimod udelukker Teorien Variationer i Skyetheden eller i andre ledsagende Fænomener, for saa vidt eller naar de ikke er afhængige af Klokkeslettet.

Der er altsaa den Særegenhed ved vore Opgaver, at der ikke gøres Brug af nogen Hypotese (bortset fra Hypotesen om Klimaets Uforanderlighed), og at Opgavens hele Teori kan udtrykkes i den Sætning, at de til Iagttagelserne svarende sande Værdier hører til en vis periodisk Funktion. Heraf følger, at der kun skal tages Hensyn til een eneste ledsagende Omstændighed ved Iagttagelserne, nemlig Tiden.

§ 3.

Forskellige Slags Fejl.

Vort Materiale til Bestemmelsen af de meteorologiske Elementers Perioder er behæftet med flere forskellige Slags Fejl. Efter deres Oprindelse kan de inddeles i tre Grupper, nemlig de almindelige (»tilfældige« eller »uregelmæssige«) Fejl, der skyldes Iagttageren, dernæst de Fejl, der hidrører fra aperiodiske Variationer i de atmosfæriske Forhold, og endelig har vi en meget vigtig Gruppe af Fejl, der dels hidrører fra Ufuldkommenheder ved Iagttagelsesmetoden og dels fra Iagttagelsens Afhængighed af de lokale Forhold. — Angaaende den anden af disse Grupper af Fejl, der ogsaa kan siges at hidrøre fra væsentlige Omstændigheder ved Iagttagelsen, hvortil der ikke tages Hensyn, kunde der være nogen Anledning til at overveje, om man skulde undgaa at bruge Ordet »Fejl«, da der her ikke er Tale om Fejl i almindelig Forstand. Der synes imidlertid ikke at være tilstrækkelig Grund til at besværliggøre Fremstillingen ved at indføre særlige Betegnelser for disse Afvigelser, og desuden er det ogsaa i en vis Forstand Fejl, nemlig Fejl paa de søgte Værdier.

Hvis man inddeler de forekommende Fejl med Hensyn til, hvorledes de forholder sig overfor Udjevningsregningen, bliver Grupperingen en noget anden. Saaledes kan der forekomme almindelige (»tilfældige«) Fejl blandt dem, der hidrører fra Iagttagelsesmetodens Ufuldkommenhed og fra Iagttagelsens Afhængighed af de lokale Forhold, og de vil sammen med de andre almindelige Iagttagelsesfejl give sig til Kende ved Middelfejlsberegningen og senere kunne danne Grundlaget for Bestemmelsen af Fejlen paa den udjvnede Værdi. Overfor Iagttagelsesregneren kan disse Fejl maaske derfor siges at optræde som synlige. Men Iagttagelsesmetodens Ufuldkommenhed og de lokale Forhold kan ogsaa indføre Fejl, der i Modsætning til de foregaaende maa betegnes som skjulte. Naar for Eksempel et Termometer ikke er tilstrækkelig beskyttet mod Solstraaling, vil Udslaget i

Temperaturens daglige Periode blive for stor, naar Solen skinner. Og man kan ikke paavise og altsaa heller ikke fjerne Fejlen, der hidrører fra Solstraaingen, ved at sammenligne Iagttagelserne fra klare Dage med dem fra overskyede Dage, thi den virkelige Lufttemperatur, som man skulde maale, er ogsaa højere i klart Vejr end i Graavejr. Det blev i forrige Paragraf omtalt, at vor Teori omfatter alle de Variationer i det betragtede Element, som er afhængige af Periodens Fase, men heraf følger, at saadanne Variationer, der fejlagtig kommer med i vore Iagttagelser, heller ikke bliver lukket ude ved vor Teori.

De skjulte Fejl svarer — i al Fald tildels — til dem, som *Gauss* kalder for »regelmæssige«; om disse siger *G.* ¹⁾:

»Dagegen haben andere Fehlerursachen bei sämmtlichen Beobachtungen derselben Art ihrer Natur nach entweder einen vollkommen constanten Einfluss, oder doch einen solchen, dessen Grösse in gesetzmässig bestimmter Weise allein von Umständen abhängt, welche mit der Beobachtung wesentlich verknüpft sind. Fehler dieser Art werden constante oder regelmässige genannt«. Og videre: »Die Betrachtung der regelmässigen Fehler soll von unseren Untersuchungen ausdrücklich ausgeschlossen bleiben. Es ist nämlich Sache des Beobachters, alle Ursachen, welche constante Fehler hervorzubringen vermögen, sorgfältig aufzusuchen und dieselben entweder abzustellen, oder wenigstens ihrer Wirkung und Grösse nach auf das genaueste zu erforschen, um ihren Einfluss auf jede einzelne Beobachtung bestimmen und diese von jenem befreien zu können, so dass ein Ergebniss erzielt wird, als ob der Fehler überhaupt nicht vorhanden gewesen wäre«.

Vi tør imidlertid ikke saaledes se bort fra disse Fejl, blandt andet fordi vi benytter mangeaarige Iagttagelsesrækker, som man maa tage med samt de Fejl, som det ifølge *Gauss* skulde have været Iagttagersens Sag at undgaa. Men ogsaa nyere og iøvrigt paalidelige Iagttagelser er for de fleste meteorologiske Elementers Vedkommende temmelig stærkt behæftede med disse Fejl, og de vil først kunne undgaas, efterhaanden som man bliver i Stand til at fjerne Ufuldkommenhederne ved Iagttagelsesmetoderne og til, gennem Studiet af Atmosfærens Fysik, at eliminere de lokale Forholds Indflydelse paa Iagttagelserne.

Imidlertid maa det fremhæves, at mellem de meteorologiske Elementer indtager Lufttrykket i denne Henseende en Særstilling, idet Barometeriagttagelser kun i ringe Grad kan befrygtes at lide af disse Fejl. De kan dog indføres ved Korrektionen for Temperatur og i højere Grad ved Barometerstandens Henførelse til Havets Niveau, men i de fleste Tilfælde tør man betragte de Iagttagelsesrækker, der benyttes til Bestemmelse af Lufttrykkets Perioder, som i det væsentlige frie for skjulte Fejl.

Ganske anderledes forholder det sig med Temperaturiagttagelserne, idet

¹⁾ »Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate«. Berlin. 1887. (S. 1.)

Termometrets Angivelser er i saa høj Grad afhængig af Instrumentets Opstilling, hvilke Forholdsregler der er taget for at beskytte Instrumentet mod Solen, Jordsmonnets Beskaffenhed, Læforhold, Terrænets Form etc. Nogle af de værste Fejl, der hidrører herfra, kunde rettes ved Kontrol med Aspirationstermometre, men andre af disse Fejl kan ikke saaledes elimineres. Man maa derfor være meget varsom, naar man vil benytte Resultaterne af Temperaturiagttagelser til videre Undersøgelser. Selv om man havde i og for sig gode Iagttagelser for flere Hundrede Aar fra samme Sted, vilde man saaledes neppe kunne bruge dem til en Paavisning af mulige sekulære Ændringer i Klimaet, med mindre der i hele Observationstiden ikke var foregaaet Forandringer af Betydning med Læforholdene og Jordoverfladens Beskaffenhed i en temmelig stor Afstand fra Iagttagelsesstedet.

Da de lokale Forhold har saa stor Betydning, maa man ligeledes være varsom med at betragte Resultatet for eet Sted som gældende for andre, selv nærliggende Steder; det kan saaledes anføres, at Landbohøjskolen i København viser Fastlandsklima i Forhold til det meteorologiske Institut, og at man ved samtidige Aflæsninger har iagttaget en Forskel af indtil 8° C. paa de to Steder. — Da enhver Temperaturbestemmelse i bedste Tilfælde kun gælder for netop det Sted, hvor Termometret er anbragt, maa det siges, at man ogsaa begaar Fejl, saasnart man benytter et saadant enkelt Termometers Angivelser som gældende for en større Lokalitet, for Eksempel en By — hvilket man næsten altid gør.

Dersom man ved Bestemmelsen af Temperaturens aarlige Periode vil holde Fejlen paa den udjevnede Værdi indenfor rimelige Grænser, maa man anvende mangeaarige Iagttagelsesrækker, men det er en betænkelig Sag at bruge gamle Iagttagelser, navnlig naar man kun har mangelfulde Oplysninger om, hvorledes de er anstillet. For Københavns Vedkommende eksisterer der saadanne gamle Iagttagelser, der skal blive Genstand for en kort Omtale, dels fordi Værdierne senere benyttes til nogle Undersøgelser angaaende Bindingen, og dels fordi man her, desværre, har et godt Eksempel paa et Materiale, der er behæftet med vist alle tænkelige Fejl. De nærmere Oplysninger om disse Iagttagelser finder man i *V. Willaume-Jantzen's »Meteorologiske Observationer i Kjøbenhavn«* (Kbh. 1896).

De ældste af disse Iagttagelser, nemlig fra 1768 til 1817, er anstillet paa Rundetaarn; der er imidlertid Spring i Rækken, idet Aarene 1777—81 og 1789—96 samt 1800 og 1802 mangler, saa at der kun bliver 34 Aar tilbage. Det angives, at Termometret hang i fri Luft paa Nordsiden af det lille Observatorium ovenpaa Taarnet, og sammenholder man det, som man ved om Datidens Termometeropstillinger, med de Afvigelser, som disse Iagttagelser viser fra senere Iagttagelsesrækker, tør man vist slutte, at Termometret ikke var beskyttet imod fri Udstraaling til Himmelrummet og neppe heller beskyttet imod Solstraaling Morgen og Aften paa Aarets længste Dage.

Derefter følger 43 Aars Iagttagelser, nemlig fra 1818 til 1860, fra den gamle botaniske Have ved Charlottenborg. Det angives, at Termometret hang inde i Haven i Skygge først 4 Fod, men senere kun 2 Fod over Jorden.

De senere Iagttagelser stammer alle fra Landbohøjskolens Have, og det er først her, at der benyttes et Termometerhus. Men Termometeropstillingen kan dog ikke betegnes som særlig god, og desuden har Læforholdene forandret sig meget i Tidens Løb.

Ved Hjælp af 5 Aars samtidige Iagttagelser er Iagttagelserne fra Rundetaarn »reducerede« til den gamle botaniske Have, og herfra er de atter »reducerede« til Landbohøjskolens Have ved Hjælp af 11 Aars samtidige Iagttagelser.

Man ser af disse Antydninger, at der er god Grund til at antage, at dette Materiale er behæftet med Fejl af forskellig Art, og Fejlkilderne er langt fra udtømte med det, som ovenfor er sagt. Saaledes har Observations-tiderne skiftet, og tildels kendes de slet ikke.

Med Rette kan der spørges om, hvilken Betydning man kan tillægge de Resultater, man kommer til ved at benytte et saa broget Materiale, og Svaret turde da blive, at man kun med største Forsigtighed tør anvende de Resultater, som angaar absolute Bestemmelser, altsaa for Eksempel selve »Normaltemperaturen«. Derimod har jeg anset Materialet for at være godt nok til den Undersøgelse, der fra først af var Anledningen til at tage hele Spørgsmaalet op om Udjevning af periodiske Iagttagelsesrækker, nemlig Undersøgelsen af de sekundære Minima og Maxima paa Temperaturkurven. Her har de absolute Værdier ikke megen Betydning; det væsentligste er, at Iagttagelserne i det enkelte Aar er anstillet paa ensartet Maade fra Dag til Dag.

Med Hensyn til Behandlingen af andre end de ovenfor omtalte meteorologiske Elementer skal jeg indskrænke mig til at anbefale den største Varsomhed ved Anvendelsen af de Resultater, som man maatte komme til, hvis man ikke har fuldstændige Oplysninger om de Forhold, under hvilke Iagttagelserne er anstillet.

Med Hensyn til de Fejl, der stammer fra de aperiodiske Forandringer i Atmosfæren, skal det bemærkes, at de kan optræde som skjulte Fejl i de daglige Perioder. Hvis man vilde beregne Temperaturens daglige Periode ved Hjælp af et enkelt Aars Iagttagelser, vilde disse Fejl saaledes forblive skjulte. I Afsnittet om »Binding« vil det senere blive omtalt, hvorledes Materialet, naar det er tilstrækkelig stort, kan lægges til Rette, saaledes at disse Fejl kommer til at optræde som synlige.

Derimod kan man ikke forhindre, at i al Fald en vis Del af de Fejl, der hidrører fra Iagttagelsesmetodens Ufuldkommenhed og fra de lokale Forhold, forbliver skjulte. Dersom disse Fejl er store i Forhold til Fejlene paa de beregnede Værdier, kan et tilsyneladende godt Resultat maaske i Virke-

ligheden være ubrugeligt til den paatænkte Anvendelse. Naar man vil søge at danne et Grundlag for Behandlingen af de meteorologiske Iagttagelser, er det derfor nødvendigt at fremhæve Betydningen af de skjulte Fejl: hvis Iagttageren ikke har sørget for eller ikke har været i Stand til at undgaa disse Fejl, maa Resultatet af en Udjevning anvendes med fornøden Forsigtighed. Men naar man har henledet Opmærksomheden tilstrækkeligt herpaa, kan man derefter i Overensstemmelse med *Gauss* sige, at Sagen ikke vedkommer Beregneren eller Opgavens tekniske Behandling.

II.

OM UDJEVNINGSPRINCIPER.

§ 4.

Mindste Middelfejls Princip.

Enhver Udjevningssmetode maa støtte sig til et eller andet Princip, og det Princip, som vi skal kunne anvende, maa være meget rummeligt, fordi Iagttagelserne er bundet til hverandre, og fordi Udjevningssfunktionen er ubekendt. Et saadant Princip Rigtighed bør desuden være indlysende, hvilket for Eksempel ikke kan siges om de mindste Kvadraters Princip. Man kan nemlig kun umiddelbart indse, at Summen $[(o - u)^2]$ skal nærme sig til Nul, naar de forelagte Værdier nærmer sig til at være fejlfrie, men man kan ikke paa Forhaand vide, at den nævnte Sum eller Summen $\left[\frac{(o - u)^2}{\lambda_2(o)} \right]$ skal være et Minimum, naar Fejlene har en vis Størrelse. Ved de Opgaver, hvor Udjevningssfunktionen er ubekendt, virker Principet ligefrem vildledende, idet Resultatet maa antages for at være godt, naar Differenserne $o - u$ bliver meget smaa. Desuden vil det senere blive vist, at mindste Kvadraters Metode anvendt paa bundne Iagttagelser fører til Resultater, der ikke kan anses for at være rigtige, uagtet saadanne Iagttagelser ikke er udelukket ifølge det opstillede Princip.

Thieles Princip er ret vanskeligt at faa fat paa. I »Elementær Iagttagelseslære« udtales det vist skarpest (S. 56) saaledes: »Det er Udjevningens Ide gennem denne Transformation at give Theorien sit og Iagttagelserne deres«. Dette Princip Rigtighed kan maaske nok betragtes som indlysende, men det er for vagt til, at man af det alene kan udlede en Udjevningssmetode; det støttes derfor paa flere Maader, for Eksempel ved Antagelsen om, at Middeltallet er den bedste Repræsentant for en Række af Gentagelser. I Overensstemmelse med Principet fordres her en fuldstændig (bekendt eller hypotetisk opstillet) Teori, saaledes at Iagttagelsesværdierne bliver frie af hverandre; dette Princip er altsaa ikke saa rummeligt, at det omfatter vore Opgaver.

Man kunde opstille et Princip, der er tilstrækkeligt rummeligt, og hvis Rigtighed neppe kan drages i Tvivl, nemlig: Fejlene paa de udjevnedes

Værdier skal være saa smaa som muligt. Men i denne Skikkelse er Principet for vagt; man maa vedtage, hvorledes Fejlenes Størrelse skal vurderes, før end man ved dets Hjælp kan udlede en Udjevningens metode. Af praktiske Hensyn findes der her ikke Anledning til at benytte andet Maal for Fejlen end Middelfejlen, og Principet kommer da til at lyde saaledes: Middelfejlene paa de udjvnede Værdier skal være saa smaa som muligt. I omtrent denne Skikkelse findes Principet hos *Gauss*¹⁾, der anvender det til at vise Beretigelsen af mindste Kvadraters Metode. — Det er en Selvfølge, at de udjvnede Værdier skal tilfredsstille visse andre Betingelser foruden den Betingelse, som direkte indeholdes i Principet, thi naar man kender Iagttagelsernes Fejllove, kan man beregne Middelfejlen for ethvert Udtryk af Iagttagelserne, men ethvert saadant Udtryk kan ikke repræsentere en udjvnnet Værdi.

Vore Opgavers Natur og Iagttagelsesværdiernes Egenskaber tillader ikke, at vi ligefrem udleder den Udjevningens metode, som senere vil blive omtalt, af dette Princip; det vil dog finde nogen direkte Anvendelse, men iøvrigt bliver det nærmest kun vejledende for os, idet Principet viser os det Maal, som vi skal stræbe efter at naa.

Det skal nu først vises, hvorledes man ved Hjælp af mindste Middelfejls Princip kommer til Normalligningerne, naar Iagttagelserne er frie (men ikke, naar de er bundet til hverandre). Derved opnaar vi ikke blot at se, hvorledes det almindelige Princip virker i det specielle Tilfælde, men vi faar tillige velkendte Resultater som Udgangspunkt for senere Undersøgelser. Den følgende Fremstilling slutter sig nærmest til *Helmert*²⁾.

Vi gaar ud fra, at der foreligger n Iagttagelser, o , og at der skal bestemmes m Elementer, $x, y \dots z$. Endvidere gaar vi ud fra, at dersom man kendte de sande Værdier af o — vi kalder dem v — kunde man opstille n Ligninger:

$$(1) \quad v_i = p_i X + q_i Y + \dots + r_i Z, \\ (i = 1, 2, 3 \dots n),$$

hvor $X, Y \dots Z$ er de sande Værdier af $x, y \dots z$, og $p, q \dots r$ er givne Tal. Opgaven er da at finde visse Repræsentanter for v — vi kalder dem u — som for det første tilfredsstiller de til (1) svarende n Ligninger

$$u_i = p_i x + q_i y + \dots + r_i z,$$

og for det andet har den mindst mulige Middelfejl.

Vi løser Opgaven ved først at bestemme Elementerne; hertil har man kun de n Iagttagelser, og vi vedtager nu, at Elementerne skal udtrykkes lineært ved disse Iagttagelser. Vi sætter derfor

¹⁾ »Abhandlung zur Methode der kleinsten Quadrate«. Berlin, 1887. S. 19—27.

²⁾ *F. R. Helmert*: »Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate«. Leipzig & Berlin 1907.

Af (2) og (5) faar man

$$(7) \quad x = [p\phi] k_1 + [q\phi] k_2 + \dots + [r\phi] k_m,$$

og vi finder derfor den Værdi af x , som under de givne Forudsætninger har den mindste Middelfejl, naar vi beregner Hjælpestørrelserne k af (6) og indsætter Værdierne i (7). Selve denne Regning skal dog ikke udføres her, da det er nemmere at vise, at det Resultat, vi vilde komme til, er det samme som det, Normalligningerne giver.

Af Normalligningerne

$$\begin{aligned} [p\phi] x + [p\phi] y + \dots + [pr] z &= [p\phi], \\ [q\phi] x + [q\phi] y + \dots + [qr] z &= [q\phi], \\ &\dots\dots\dots \\ [r\phi] x + [r\phi] y + \dots + [rr] z &= [r\phi], \end{aligned}$$

finder vi x ved at multiplicere med de foreløbig ubestemte Hjælpestørrelser $K_1, K_2, \dots, K_m$ og addere, hvilket giver

$$\begin{aligned} &([p\phi] K_1 + [q\phi] K_2 + \dots + [r\phi] K_m) x \\ &+ ([p\phi] K_1 + [q\phi] K_2 + \dots + [r\phi] K_m) y \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ ([p\phi] K_1 + [q\phi] K_2 + \dots + [r\phi] K_m) z \\ &= [p\phi] K_1 + [q\phi] K_2 + \dots + [r\phi] K_m, \end{aligned}$$

og derefter bestemme Hjælpestørrelserne ved Hjælp af Ligningerne:

$$(8) \quad \begin{cases} [p\phi] K_1 + [q\phi] K_2 + \dots + [r\phi] K_m = 1, \\ [p\phi] K_1 + [q\phi] K_2 + \dots + [r\phi] K_m = 0, \\ \dots\dots\dots \\ [p\phi] K_1 + [q\phi] K_2 + \dots + [r\phi] K_m = 0; \end{cases}$$

man har da

$$(9) \quad x = [p\phi] K_1 + [q\phi] K_2 + \dots + [r\phi] K_m.$$

Af (6) og (8) ser man, at

$$k_1 = K_1, k_2 = K_2, \dots, k_m = K_m,$$

og (7) og (9) viser derefter, at den Værdi for et Element, som vi fandt ved den anden Metode, er den samme som den, Normalligningerne giver.

Det er imidlertid ikke den oprindelige Opgave, som her er løst, men det er let at vise, at Resultatet vilde være blevet det samme, hvis vi straks havde taget Sigte paa at bestemme Værdierne u ved Hjælp af mindste Middelfejls Princip. Man kunde da have transformeret Elementerne

$x, y, \dots, z$ til $\xi, \eta, \dots, \zeta$ saaledes, at de transformerede Elementer var frie af hverandre. I Stedet for

$$u_i = p_i x + q_i y + \dots + r_i z,$$

havde man da

$$u_i = p_i \xi + q_i \eta + \dots + r_i^{(v)} \zeta,$$

hvor

$$\lambda_2(u_i) = p_i^2 \lambda_2(\xi) + q_i^2 \lambda_2(\eta) + \dots + r_i^{(v)2} \lambda_2(\zeta).$$

Naar da $\lambda_2(u_i)$ skulde være et Minimum, maatte $\lambda_2(\xi), \lambda_2(\eta), \dots, \lambda_2(\zeta)$ ogsaa hver for sig være et Minimum, og Bestemmelsen af de enkelte Elementer vilde derefter være at foretage paa samme Maade som foran. — At Værdierne u ikke vilde paavirkes af en saadan Transformation, behøver ikke nærmere Paavisning.

Der er i det foregaaende gjort Brug af to Forudsætninger og en Vedtægt. For det første blev det forudsat, at Iagttagelserne var lige gode; det er imidlertid let at vise, at naar der tillægges Iagttagelserne forskellig Vægt, kommer man ogsaa til samme Resultat som ved mindste Kvadraters Metode¹⁾.

For det andet blev det forudsat, at Iagttagelserne var frie, da vi kun i dette Tilfælde havde

$$\lambda_2(x) = [\alpha_i^2 \lambda_2(o_i)].$$

Dersom Iagttagelserne er bundet til hverandre, kan man ogsaa anvende mindste Middelfejls Princip, saafremt man kan formulere Fejlloven for Iagttagelserne. Men man kommer da til et andet (og bedre) Resultat end det, som Normalligningerne giver. Dette Punkt bliver senere berørt.

Endelig blev det vedtaget, at Elementerne skulde udtrykkes lineært ved Iagttagelserne. Der er derfor en Mulighed for, at der for Elementerne kan findes ikke-lineære Udtryk, som har mindre Middelfejl.

Desuden maa det erindres, at der allerede ved Principets Opstilling brugtes en Vedtægt, nemlig at Middelfejlen betragtes som det rette Maal for Fejlen. — Det bemærkes, at »Middelfejl« kan erstattes med »den sandsynlige Fejl«.

Mindste Middelfejls Princip har ikke blot teoretisk Interesse, men det kan ogsaa i visse Tilfælde anvendes direkte med Fordel. Saaledes fører det nemmere til Maalet end Normalligningerne, naar man ønsker den udjvnede Værdi udtrykt ved selve Iagttagelserne. Vil man for Eksempel ved Hjælp af Normalligningerne opstille en Formel for Udjevning til Midten af $2m + 1$ ækvidistante Værdier efter en Række af Formen

$$u_i = x_0 + x_1 i + x_2 i^2 + \dots,$$

¹⁾ Se f. Eks. *Helmert: »Ausgleichsrechnung«*. S. 45.

kan man give den Værdi, der skal udjevnes, Argumentet $i = 0$ og de andre Værdier Argumenterne $\pm 1, \pm 2 \dots \pm m$; man skal da finde $u_0 = x_0$ ¹⁾.

Sætter vi $\sum_{i=-m}^{i=m} i^k o_i = s_k$ og $\sum_{i=-m}^{i=m} i^k = \sigma_k$, giver Normalligningerne

$$s_0 = x_0 \sigma_0 + x_2 \sigma_2 + x_4 \sigma_4 + x_6 \sigma_6 + \dots$$

$$s_2 = x_0 \sigma_2 + x_2 \sigma_4 + x_4 \sigma_6 + x_6 \sigma_8 + \dots$$

$$s_4 = x_0 \sigma_4 + x_2 \sigma_6 + x_4 \sigma_8 + x_6 \sigma_{10} + \dots$$

$$s_6 = x_0 \sigma_6 + x_2 \sigma_8 + x_4 \sigma_{10} + x_6 \sigma_{12} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Vil vi for Eksempel opstille en Syvendegradsformel, skal vi altsaa beregne Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_2 & \sigma_4 & \sigma_6 \\ \sigma_2 & \sigma_4 & \sigma_6 & \sigma_8 \\ \sigma_4 & \sigma_6 & \sigma_8 & \sigma_{10} \\ \sigma_6 & \sigma_8 & \sigma_{10} & \sigma_{12} \end{vmatrix},$$

hvorefter den søgte Formel bliver

$$u_0 = \sum \left(\frac{A_1 + A_2 \cdot i^2 + A_3 \cdot i^4 + A_4 \cdot i^6}{D} o_i \right),$$

hvor A er de til x_0 svarende Underdeterminanter. At Regningen bliver besværlig, ser man allerede deraf, at naar $m = 4$, hvilket er den mindste Værdi, som m i dette Tilfælde kan have, bliver for Eksempel $\sigma_{12} = 34625508$.

Vil vi løse den samme Opgave ved Hjælp af mindste Middel-fejls Princip, kan vi gaa ud fra følgende Betragtninger. Vi skal opstille en Formel, hvori den udjevnede Værdi, u_0 , er lineært udtrykt ved Iagttagelserne o . Formlen skal være af syvende Grad, hvilket vil sige, at den anvendt paa en Række ækvidistante Værdier, v_i , der hører til en Funktion af syvende Grad, skal lade disse Værdier forblive uforandrede; naar man i Formlen indsætter v_i i Stedet for o_i , skal man altsaa have $u_0 = v_0$. Desuden har vi $\Delta^8 v_i = 0$, og endelig sætter vi $m = 4$. Den almindeligste Form, som Formlen under disse Omstændigheder kan have, er

$$\begin{aligned} u_0 &= o_0 + k \Delta^8 o_0 \\ &= (1 + 70k) o_0 - 56k(o_1 + o_{-1}) + 28k(o_2 + o_{-2}) - 8k(o_3 + o_{-3}) + k(o_4 + o_{-4}), \end{aligned}$$

hvor k er et vilkaarligt Tal. Heraf faar vi

$$\lambda_2(u_0) = (1 + 140k + 12870k^2) \lambda_2(o),$$

¹⁾ I. P. Gram: »Om Rækkeudviklinger«. S. 111. J. Altenburger: »Versicherungswissenschaftliche Mittheilungen«. 4. Band. S. 87.

og derpaa bestemmer vi k saaledes, at $\lambda_2(u_0)$ bliver saa lille som mulig; vi sætter altsaa

$$\frac{d}{dk} \lambda_2(u_0) = (140 + 25740k) \lambda_2(o) = 0,$$

hvilket giver $k = -\frac{7}{1287}$, og indsættes denne Værdi i ovenstaaende Udtryk for u_0 , er Formlen færdig.

Efter at vi i det foregaaende har set, hvorledes det opstillede Princip fører til velkendte Resultater i det specielle Tilfælde, hvor lagttagelserne er frie, kan vi med større Tryghed anvende Principet, hvor lagttagelserne er bundet til hverandre. Imidlertid har vi ogsaa de Vanskeligheder at kæmpe med, som følger af, at Udjevningfunktionen er ubekendt. Saadanne Opgaver løses i Almindelighed ved Hjælp af Udjevningssækker, og vi skal derfor nærmere betragte den Fremgangsmaade, som (skulde) anvendes ved Bestemmelsen af hvilke Led, der under givne Omstændigheder skal tages med i en saadan Række.

§ 5.

Om Valg af Leddene til Udjevningssækker.

Som Udgangspunkt for Betragtningen af Valg af Leddene til Udjevningssækker tager vi det første Stykke af § 56 i »Elementær lagttagelseslære«, der lyder saaledes:

»Ved Udjevningssækker, det vil sige, hvor Theorien fremstiller lagttagelserne i Form af en Række af additiv Form med Led i ubestemt (uendeligt) Antal, hvert Led multipliceret med en ubekendt Faktor, et Element, og hvor altsaa Elementudjevning maa anvendes, faar Fejlkritiken den særlige Opgave at angive, hvormange (eller hvilke) Led af Rækken der skal medtages i Udjevningen. Hertil have det selvskrevne Middel i Formlen (79)

$$\left[\frac{(o-u)^2}{\lambda_2(o)} \right] = \left[\frac{o o}{\lambda} \right] - \sum \left[\frac{\left[\frac{r^v o}{\lambda} \right]^2}{\left[\frac{r^v r^v}{\lambda} \right]} \right] = n - m \pm \sqrt{2(n-m)}.$$

De m Led i Rækken, der her er betegnet med Σ , svare nemlig hvert for sig til et Element, altsaa til et af Udjevningssækkens Led. For hvert Led, man optager i denne, formindskes altsaa Kritikligningens højre Side med

omtrent en Enhed, Kritikens Udfald bliver altsaa gunstigere, dersom man udskyder alle saadanne Led, for hvilke $\left[\frac{r^v o}{\lambda}\right]^2 \cdot \left[\frac{r^v r^v}{\lambda}\right]^{-1} < 1$. Beholder man Led, der i væsentlig Grad falde ind under denne Regel, da begaar Udjevningen den Fejl at være for »svag«; udskyder man derimod Led, for hvilke $\left[\frac{r^v o}{\lambda}\right]^2 \cdot \left[\frac{r^v r^v}{\lambda}\right]^{-1} > 1$, saa gør man sig skyldig i for »stærk« Udjevning«.

Her betegner o ligesom før Iagttagelserne, u de udjvnede Værdier, n Antallet af Ligninger og m Antallet af Elementer; λ er en forkortet Betegnelse for $\lambda_2(o)$. Det er endvidere forudsat, at Elementerne er transformerede saaledes, at man for Eksempel har

$$\zeta = \left[\frac{r^v o}{\lambda}\right] : \left[\frac{r^v r^v}{\lambda}\right]$$

og

$$\lambda_2(\zeta) = \left[\frac{r^v r^v}{\lambda}\right]^{-1};$$

man har derfor ogsaa

$$\frac{\left[\frac{r^v o}{\lambda}\right]^2}{\left[\frac{r^v r^v}{\lambda}\right]} = \frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)}.$$

Dersom man foreløbig ser bort fra den Usikkerhed, som indføres med Leddet $\pm \sqrt{2(n-m)}$, kan man altsaa give Kritikligningen Formen

$$\left[\frac{(o-u)^2}{\lambda_2(o)}\right] = \left[\frac{oo}{\lambda}\right] - \sum \frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)} = n - m,$$

og Opgaven er da ved Hjælp af denne Ligning at bestemme, hvilke Led af Rækken der skal tages med i Udjevningen.

For at gøre Sagen saa simpel som mulig betragter vi kun saadanne Tilfælde, hvor Elementerne kan bestemmes uafhængig af hverandre, saaledes som det finder Sted ved Udjevning efter den foran omtalte trigonometriske Række. Da der er n Ligninger, kan der bestemmes ialt n Elementer, og vi kan da gaa ud fra, at man har bestemt alle disse Elementer og deres Middelfejl. Vi ordner Elementerne efter deres »Godhed«, det vil sige efter aftagende Størrelse af Forholdene $\frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)}$, og benytter dem i denne Rækkefølge, saaledes at der til et vist Udjevningsforsøg forudsættes at være anvendt de m Elementer, der svarer til de m største af disse Forhold.

Vi sætter nu

$$F_1(m) = \left[\frac{(o - u)^2}{\lambda} \right] = \left[\frac{o o}{\lambda} \right] - \sum \frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)}$$

og

$$F_2(m) = n - m,$$

og man skulde herefter betragte Fejlkritikens Udfald som desto gunstigere, jo bedre Ligningen

$$F_1(m) = F_2(m)$$

var tilfredsstillet.

Hertil maa dog først bemærkes, at denne Ligning altid er tilfredsstillet for $m = n$, da man i dette Tilfælde har ikke blot

$$F_2(n) = 0,$$

men ogsaa

$$F_1(n) = 0,$$

thi er Elementernes Antal lige saa stort som Ligningernes, bliver $u_i = o_i$; men det er selvfølgelig ikke denne Løsning, som man søger eller ønsker at nærme sig til. Endvidere bemærkes, at $F_2(o) = n$, medens $F_1(o) = \left[\frac{o o}{\lambda} \right]$ i Almindelighed er mange Gange større end n . Endelig, at de sidste af Forholdene $\frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)}$ i den ordnede Række i Almindelighed nærmer sig stærkt til Nul.

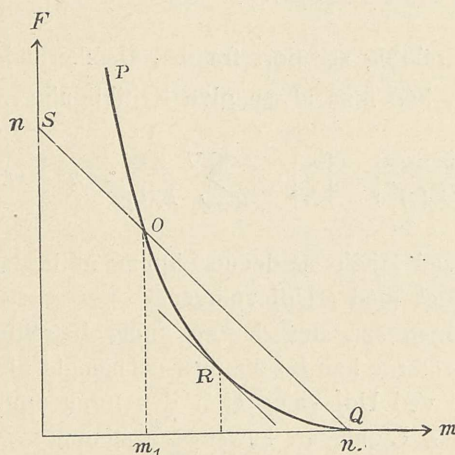


Fig. 2.

Skematisk kan man derfor fremstille Sagen saaledes, at Værdierne af $F_1(m)$ ligger paa Kurven $PORQ$, Fig. 2, medens Værdier af $F_2(m)$ ligger paa den rette Linie SQ , og det er da Skæringspunktet O , eller rettere den dertil svarende Abscisse m_1 , som man vil opsøge.

Følger man nu den ene af de givne Anvisninger, nemlig bestemmer Elementernes Antal ved Hjælp af Ligningen $F_1(m) = F_2(m)$, saa vil man kun kunne være i Tvivl om, hvorvidt der skal tages et Element mere eller mindre med. Lad os da antage, at Leddenes Antal bestemt paa denne Maade er m_1 ; der udskydes altsaa $n - m_1$ Elementer. Det er nu let at se, at naar

$$F_1(m_1) = \left[\frac{00}{\lambda} \right] - \sum \frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)} = n - m_1,$$

saa bliver for de udskudte Elementers Vedkommende Summen af Forholdene $\zeta^2 : \lambda_2(\zeta)$ ogsaa lig med $n - m_1$, eftersom vi har $F_1(n) = 0$. Gennemsnitsværdien af $\zeta^2 : \lambda_2(\zeta)$ for disse Elementer bliver altsaa lig med 1, men dette staar i Strid med den anden af de givne Anvisninger, ifølge hvilken man kun skulde udskyde de Elementer, hvor $\zeta^2 : \lambda_2(\zeta) < 1$. — Dersom $n - m_1$ er stor, og dersom der tillige udkræves mange smaa Led til at fremstille den teoretisk rigtige Funktion med tilstrækkelig Nøjagtighed, kan Forskellen blive stor mellem de Resultater, som man kommer til ved enten at følge den ene eller den anden af de to Fremgangsmaader. I foranstaaende Figur er der til Kurven trukket en Tangent $\neq SQ$; Kurvestykket RQ vil da svare til de Elementer, for hvilke man har $\zeta^2 : \lambda_2(\zeta) < 1$, og den til R svarende Abscisse angiver altsaa Antallet af Elementer bestemt ved den sidste af de to Fremgangsmaader, medens de omtvistede Elementer repræsenteres af Kurvestykket RO .

Der er bragt en Slags indre Overensstemmelse til Veje mellem de to Anvisninger derved, at der til Kritikligningens højre Side er føjet Leddet $\pm \sqrt{2(n-m)}$. Der indføres imidlertid herved saa stor en Usikkerhed, at denne ikke blot kan strække sig over de omtvistede Elementer, men den vil ogsaa kunne tillade, at man for m vælger en Værdi, der er mindre end den, der ovenfor betegnedes ved m_1 , men herved fjerner vi os endnu mere fra Anvisningen om, at man skal beholde de Elementer, for hvilke $\zeta^2 : \lambda_2(\zeta) > 1$.

Under visse simple Forhold er det iøvrigt let at se, hvorledes det forholder sig med denne Sag. Har vi $n - m$ rene Fejlelementer, der er indbyrdes frie og lige gode, skal vi for disse Elementers Vedkommende tilnærmelsesvis have

$$\sum \zeta^2 = (n - m) \lambda_2(\zeta),$$

og ligeledes tilnærmelsesvis

$$\sum \zeta = 0.$$

Og her maa man vente, at omtrent en Trediedel af Elementerne er numerisk større end $\sqrt{\lambda_2(\zeta)}$, altsaa at man faar $\frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)} > 1$ for omtrent en Trediedel af det hele Antal, som skal udskydes.

§ 6.

Fejlen paa den udjevnede og forbedrede Værdi.

De almindeligt benyttede Udtryk for Fejlen paa den udjevnede Værdi gælder kun for frie Iagttagelser, og naar der er udjevnet efter den teoretisk rigtige Funktion. Har man saaledes fundet den udjevnede Værdi, u_i , ved Hjælp af de m transformerede Elementer $\xi, \eta, \dots, \zeta$,

$$u_i = p_i \xi + q'_i \eta + \dots + r_i^v \zeta,$$

kan

$$(10) \quad \lambda_2(u_i) = \frac{p_i^2}{\left[\frac{pp}{\lambda_2(o)} \right]} + \frac{q_i'^2}{\left[\frac{q'q'}{\lambda_2(o)} \right]} + \dots + \frac{r_i^{v2}}{\left[\frac{r^v r^v}{\lambda_2(o)} \right]}$$

under almindelige Omstændigheder betragtes som et legitimt Udtryk for Fejlen paa u_i ¹⁾. Men dersom man har fundet u_i ved Hjælp af m Led af en Udjevningsrække, maa man forvente, at Fejlen paa u_i er større, end Udtrykket (10) for u_i angiver, idet Usikkerheden i Bestemmelsen af u_i er forøget ved Spørgsmaalet om, hvormange Led der skulde tages med af den benyttede Række.

For vore Opgavers Vedkommende kommer hertil, at Iagttagelserne er bundet til hverandre, og Vanskelighederne forøges derved saa meget, at det neppe lønner sig at forsøge paa at beregne Fejlene for de enkelte udjevnede Værdier. Men da det maa betragtes som en meget væsentlig Del af en Udjevningsopgave at vurdere det opnaaede Resultats Godhed, vil vi forsøge at udarbejde en Metode, der kan tjene til at give i alt Fald et Skøn over Fejlenes Størrelse.

Vi kan da gaa ud fra de n Ligninger, der repræsenteres af ovenstaaende Ligning (10). Naar man dividerer paa begge Sider af Lighedstegnet med $\lambda_2(o_i)$ og derpaa adderer, faar man, idet Antallet af Elementer er m ,

$$\sum \frac{\lambda_2(u_i)}{\lambda_2(o_i)} = m,$$

eller

$$(11) \quad \sum \left(1 - \frac{\lambda_2(u_i)}{\lambda_2(o_i)} \right) = n - m.$$

Ligning (11) er en Identitet, og $\lambda_2(u_i)$ betegner her kun et vist matematisk Udtryk. Men dersom der er udjevnet efter den teoretisk rigtige Funktion, og dersom Iagttagelserne er frie af hverandre, kan dette Udtryk for $\lambda_2(u_i)$, nemlig (10), betragtes som det legitime Udtryk for Fejlen paa u_i , og under disse Omstændigheder maa det tillige forventes, at Kritikligningen under Formen

¹⁾ »Elementær Iagttagelseslære«. Side 72.

$$(12) \quad \sum \frac{(o_i - u_i)^2}{\lambda_2(o_i)} = n - m,$$

er tilfredsstillet med god Tilnærmelse. Af (11) og (12) faar vi den bekendte Ligning ¹⁾

$$(13) \quad \sum \frac{(o_i - u_i)^2}{\lambda_2(o_i)} = \sum \left(1 - \frac{\lambda_2(u_i)}{\lambda_2(o_i)} \right),$$

og dersom de ovenfor nævnte Betingelser er tilfredsstillet, kan vi derfor betragte det $\lambda_2(u_i)$, der indgaar i (13), som et Udtryk for Fejlen paa u_i . Naar $\lambda_2(o)$ desuden kan betragtes som konstant, faar man af (13):

$$(14) \quad \frac{1}{n} \sum (\lambda_2(u)) = \lambda_2(o) - \frac{1}{n} \sum ((o - u)^2),$$

og det er dette sidste Udtryk, som vi vil benytte til Bestemmelsen af Genemschnittsfejlen for de udjevnede Værdier.

Det skal først bemærkes, at Ligning (14) ogsaa gælder under visse andre Omstændigheder end de ovenfor nævnte. Dersom de forelagte Værdier aldeles ikke paavirkes af »Udjevningen«, har man saaledes almindeligt $u_i = o_i$, og Ligningen reduceres derved til

$$\frac{1}{n} \sum \lambda_2(u) = \lambda_2(o).$$

Ligningen gælder altsaa i dette Tilfælde, selv om Iagttagelserne er bundet til hverandre. — Til dette Grænsetilfælde skulde vore Opgaver ifølge Forudsætningerne, der udelukker mulige sekulære Forandringer, nærme sig, efterhaanden som Iagttagelserne udstrækkes over bestandig længere Tidsrum, og man vil senere faa at se, at vi allerede nu kan komme temmelig nær til denne Grænse.

De to omtalte Tilfælde, hvor Ligning (14) gælder, kan betragtes som Yderpunkter, imellem hvilke alle vore Opgaver ligger, men Spørgsmaalet er nu om, hvorvidt man i Almindelighed kan benytte (14) til Bestemmelse af Fejlen paa den udjevnede Værdi.

For at undersøge denne Sag nærmere kan vi gaa ud fra Værdisættet v_i , o_i og u_i — den sande, den givne og den udjevnede Værdi — og for Differenserne mellem to og to af disse Værdier sætte

$$d_i = o_i - u_i,$$

$$e_i = u_i - v_i,$$

$$f_i = o_i - v_i;$$

¹⁾ »Elementær Iagttagelseslære«. Side 62.

f_i er altsaa den sande Fejl paa Iagttagelsen o_i , og e_i den sande Fejl paa den udjevnede Værdi u_i . Definitionsmæssigt har vi

$$e_i + d_i = f_i;$$

ved at kvadrere og addere faar vi heraf

$$(15) \quad \Sigma e^2 = \Sigma f^2 - \Sigma d^2 - 2\Sigma ed$$

gældende for et hvilket som helst Interval.

Vi har nu

$$e_i^2 = \lambda_2(u_i),$$

der blot kan tages som en Definition af, hvad vi her forstaar ved $\lambda_2(u_i)$. Derimod har vi ikke $f_i^2 = \lambda_2(o_i)$, eftersom $\lambda_2(o_i)$ forudsættes fundet ved Beregning og repræsenterer en Fejllov, men $\lambda_2(o)$ svarer ikke i det enkelte Tilfælde til Størrelsen af den sande Fejl. For vort Formaal er det imidlertid ogsaa tilstrækkeligt, at man har

$$\Sigma f^2 = \Sigma \lambda_2(o)$$

med en Nøjagtighed, der svarer til den Sikkerhed, hvormed $\lambda_2(o)$ er bestemt. Vi faar altsaa af Ligning (15):

$$(16) \quad \Sigma \lambda_2(u) = \Sigma \lambda_2(o) - \Sigma (o - u)^2 - 2\Sigma ed,$$

der kun adskiller sig fra (14) ved det sidste Led i Ligningens højre Side.

Differenserne mellem de givne og de udjevnede Værdier, $o - u = d$, kender vi paa dette Trin af Beregningerne. Naar man har udjevnet efter mindste Kvadraters Metode, bliver Summen af alle disse Differenser Nul, dersom $\lambda_2(o)$ er konstant, og det vil senere blive vist, at det samme er Tilfældet ved Udjevning af Perioder efter den mekaniske Metode. Men desuden vil man altid kunne finde Intervaller, indenfor hvilke man har $\Sigma d = 0$ med god Tilnærmelse. Sætter vi endvidere for Værdierne af e i et saadant Interval

$$e_i = \mu_1(e) + \varepsilon_i,$$

hvor $\mu_1(e)$ er Middeltallet af de betragtede Værdier af e , faar vi

$$(17) \quad \Sigma ed = \mu_1(e) \Sigma d + \Sigma \varepsilon d = \Sigma \varepsilon d.$$

Om Ligning (14) gælder eller ej for det betragtede Interval, beror altsaa kun paa Variationerne i den udjevnede Værdis sande Fejl.

Vi kan drage visse Slutninger angaaende Σed . Figurerne 3 og 4 fremstiller skematisk to af de Situationer, som kan forekomme i de betragtede Intervaller, idet Kurverne repræsenterer Værdierne v , o og u . I Overensstemmelse med vore Forudsætninger er Kurvernes gensidige Beliggenhed valgt saaledes, at man tilnærmelsesvis har $\Sigma d = 0$. Endvidere har vi $\Sigma \varepsilon = 0$, idet vi har sat $e_i = \mu_1(e) + \varepsilon_i$. Ifølge Definitionen af Differenserne gaar d fra u til o og ε fra v til u .

I Fig. 3 har de udjvnede Værdier nærmet sig noget, men ikke tilstrækkeligt til de sande; Udjevningen er for svag. Differenserne ϵ og d

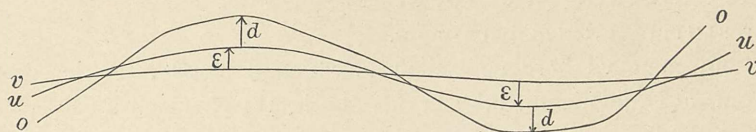


Fig. 3.

faar overvejende samme Fortegn, og Produkterne bliver altsaa overvejende positive. Figuren fremstiller den for Anvendelsen af Ligning (14) ugunstigste Situation ved en for svag Udjevning, thi Skæringspunkterne mellem to og to af Kurverne kan være mere forskudt i Forhold til hverandre, saaledes at flere af Produkterne ϵd bliver negative. Men dersom Udjevningen er for svag, maa der være en vis Overvægt af saadanne Situationer som den fremstillede, og det maa derfor antages, at Produktsummen $\sum \epsilon d$ faar en vis positiv Værdi.

Dersom Udjevningen derimod er for stærk, maa der være en vis Overvægt af Tilfælde, hvor u ikke blot har nærmet sig til v , men ogsaa har passeret denne Værdi, saaledes som det er skematisk fremstillet i Fig. 4.

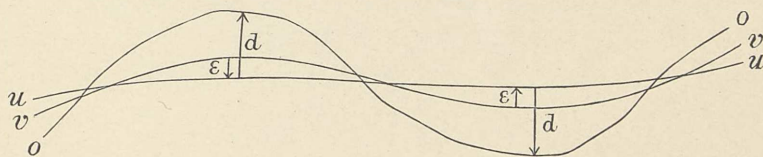


Fig. 4.

Vi faar da en Overvægt af Tilfælde, hvor sammenhørende Værdier af d og ϵ har modsatte Fortegn, og det maa derfor antages, at $\sum \epsilon d$ faar en vis negativ Værdi.

Vi kommer herefter til det Resultat, at naar Udjevningen hverken er for svag eller for stærk, altsaa naar den er »rigtig« eller legitim, er der overvejende Sandsynlighed for, at Produktsummen $\sum \epsilon d$ bliver Nul (eller en lille Størrelse), saaledes at Ligning (14) gælder i dette Tilfælde — selv om Iagttagelsesværdierne er bundet til hverandre. Men i Almindelighed gælder Ligningen kun med en vis Tilnærmelse, fordi vi har kastet Leddet $-2\sum \epsilon d$ bort, altsaa forøget Ligningens højre Side med $2\sum \epsilon d$; der er altsaa overvejende Sandsynlighed for, at Ligningens højre Side har for stor en Værdi, naar Udjevningen er for svag, og for lille en Værdi, naar Udjevningen er for stærk. Naar man vil benytte Ligningen

$$(14 \text{ bis}) \quad \frac{1}{n} \sum (\lambda_2(u)) = \lambda_2(o) - \frac{1}{n} \sum ((o - u)^2)$$

som et Udtryk for Gennemsnitsfejlen paa de udjvnede Værdier, maa det derfor erindres, at:

Hvis Udjevningen er for svag, maa det antages, at den sande Fejl er mindre end den beregnede.

Hvis Udjevningen er for stærk, maa det antages, at den sande Fejl er større end den beregnede.

Dersom man vil beregne Fejlen paa denne Maade, gælder det derfor navnlig om, at Udjevningen ikke er for stærk, thi ellers vil man overvurdere Resultatets Godhed. Derimod er det i denne Henseende ikke nær saa uheldigt, hvis Udjevningen er for svag, eftersom man ved Anvendelsen af Resultatet ikke let kommer til at drage gale Slutninger, naar de udjevnede Værdier er bedre, end man antager.

III.

DE ALMINDELIGT ANVENDTE UDJEVNINGS- METODER.

§ 7.

Materialets forberedende Behandling.

Førend man begynder paa selve Udjevningen af de meteorologiske Elementers daglige og aarlige Perioder, maa man underkaste Materialet en forberedende Behandling.

Lad os for Eksempel antage, at vi skal beregne Temperaturen daglige Periode af visse foreliggende timevise Iagttagelser. Udtager man fra et enkelt Døgn 25 saadanne Iagttagelser:

$$o_0, o_1, o_2 \dots o_{22}, o_{23}, o_{24},$$

hvor o_0 og o_{24} er Værdierne for Kl. 12 Nat henholdsvis ved Døgnet Begyndelse og Slutning, saa skal disse to Værdier være lige store, hvis man skal kunne betragte Iagttagelserne som alene repræsenterende en Periode. Imidlertid er disse Værdier i Reglen ikke lige store; her spiller Temperaturen aarlige Periode en vis Rolle, saaledes at o_{24} efter Aarstiden gennemgaaende er enten lidt større eller lidt mindre end o_0 , men langt større Differenser fremkommer dog som Følge af forskellige Forstyrrelser i de atmosfæriske Forhold. Man har nu opstillet den Hypotese, at saadanne aperiodiske Bestanddele kan fremstilles med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Hjælp af en lineær Funktion; man fordeler da Forskellen mellem o_0 og o_{24} ligeligt over hele Døgnet, saaledes at man erstatter Værdien o_i med o'_i , idet

$$o'_i = o_i - \frac{o_{24} - o_0}{24} (i - 12),$$

og man har da for de nye Værdier $o'_{24} = o'_0$.

Vil man behandle Temperaturen daglige Periode for et længere Tidsrum, for Eksempel for en Maaned, under eet, bliver der kun Mening i Opgaven, naar man af hvert enkelt Døgn tager Temperaturen Svingning om-

kring dette Døgns Middeltemperatur. Sætter vi for det enkelte Døgns Middeltemperatur

$$\mu_1 = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{i=24} o_i,$$

og endvidere

$$o_i'' = o_i' - \mu_1 = o_i - \mu_1 - \frac{o_{24} - o_0}{24} (i - 12),$$

er o_i'' altsaa Repræsentant for de Værdier, som vi skal betragte i det enkelte Døgn. Vi behøver heldigvis ikke at beregne disse enkelte Værdier, og det volder ikke stort Besvær at finde Middeltallene af dem for vedkommende Maaned; med let forstaaelige Betegnelser for Middeltallene har man nemlig

$$M_1(o_i'') = M_1(o_i) - M_1(\mu_1) - \frac{O_{24} - o_0}{24p} (i - 12),$$

naar O_{24} er Temperaturen ved Midnat i Maanedens Slutning, og o_0 Temperaturen ved Midnat i Maanedens Begyndelse, og p er Antallet af Dagene. Ved at betragte det sidste Led i denne Reduktionsformel kan man indse, at den Rettelse, der skal føjes til Middeltallene, ofte bliver meget ringe, men man maa være paa det rene med, at Fremgangsmaaden kun er berettiget i samme Grad som den opstillede Hypotese; de ganske smaa Rettelser, man i Reglen faar, giver intet Begreb om Størrelsen af de Fejl, der kan begaaes her, eftersom det er de ofte store aperiodiske Forstyrrelser i de enkelte Døgn, som det kommer an paa. En nærmere Undersøgelse af den opstillede Hypoteses Berettigelse kan imidlertid betragtes som hørende til vedkommende Opgaves specielle Del.

Hvad der ovenfor er sagt med Hensyn til Temperaturen, gælder ogsaa for den forberedende Behandling af Materialet til Lufttrykkets daglige Periode.

Medens vi for at kunne behandle den daglige Periode eliminerede Bestanddelene af den aarlige Periode og visse aperiodiske Forstyrrelser, skal vi for at behandle den aarlige Periode kun eliminere den daglige Periode; de aperiodiske Forstyrrelser elimineres ikke¹⁾ her, men udjevnes. Eliminationen foregaar paa den Maade, at der af de enkelte Iagttagelser dannes een Middelværdi for hvert Døgn; disse Middelværdier danner her Grundlaget, idet man til Udjevning af den aarlige Periode for en længere Aarrække atter danner Middeltal af de Middelværdier, som hører til samme Datum. —

¹⁾ Der tænkes her kun paa de foran omtalte i Reglen temmelig kortvarige Forstyrrelser. Men hvis et Aar ikke slutter med samme Temperatur eller samme Barometerstand, som det begyndte med, bør der ogsaa ved de aarlige Perioder foretages en Korrektion, analog med den, som blev anvendt ved de daglige Perioder; for mangeaarige og sammenhængende Iagttagelsesrækker vil Korrektionen imidlertid i Almindelighed blive saa ringe, at man kan se bort fra den.

Der kan dog ogsaa forekomme Opgaver, hvor der ikke bliver Tale om en saadan Elimination, for Eksempel hvis det drejer sig om at bestemme den aarlige Periode for Temperaturen Kl. 8 Morgen.

Angaaende den Maade, hvorpaa man skaffer sig selve de omtalte Middelverdier for de enkelte Dage, bør der gøres nogle Bemærkninger. For Lufttrykkets Vedkommende danner man i Reglen et Middeltal af timevise Iagttagelser, og imod denne Fremgangsmaade kan der neppe gøres alvorlige Indvendinger. Anderledes forholder det sig med Beregningen af Døgnet's Middeltemperatur, thi her har man lettet sig Arbejdet mere end tilladeligt ved at bruge en eller anden Kombination af nogle faa Iagttagelser som for Eksempel $\frac{1}{3}(o_8 + o_{14} + o_{21})$. Der er hertil at bemærke, at en Udjevning af Temperaturens aarlige Periode kræver mange Aars Iagttagelser, og fra ældre Tid foreligger der kun faa Iagttagelser fra de enkelte Døgn, hvorfor man indtil videre maa hjælpe sig med dem; men derved faar man ogsaa Lejlighed til at begaa forskellige Slags Fejl. Det kan bedre forsvares at benytte en saadan Fremgangsmaade som Udgangspunkt til Bestemmelse af den enkelte Maaned's Middeltemperatur, naar man paa de fundne Værdier anbringer en ad anden Vej bestemt mindre Korrektion. Men overfor de enkelte Døgn har Fremgangsmaaden den Ulempe — foruden Usikkerheden ved Korrektionen — at den allerede er en Slags Udjevning, og man faar derfor for smaa Værdier for Middelafrvigelserne.

Yderligere skal det med Hensyn til den forberedende Behandling af Materialet kun bemærkes, at man ved de aarlige Perioder betragter det som uoverkommeligt at benytte de 365 Værdier, som de daglige Iagttagelser giver, og man danner derfor i Almindelighed Normalpladser for 5 paa hinanden følgende Dage (»Femdøgn«, »Pentader«). Man forudsætter her, at den teoretisk rigtige Funktion kan betragtes som lineær i de tilsvarende Intervaller. Nu viser Middeltallene selv for mange Aar enkelte paafaldende kolde eller varme Dage, og for at forklare dette »Fænomen« har man endog henvist til mulige kosmiske Aarsager. Dersom der var noget rigtigt i saadanne Anskuelser, vilde det ikke være tilladeligt at benytte Normalpladser, men man maatte nødvendigvis udjevne Værdierne for de enkelte Dage. En Undersøgelse viser imidlertid, at man kun behøver at betragte de faktiske Afvigelser fra Middeltallene for at faa en »Forklaring«. Denne Sag behandles senere for sig.

§ 8.

Anvendelse af mindste Kvadraters Metode.

Den almindeligst anvendte Fremgangsmaade til Udjevning af periodiske meteorologiske Iagttagelser er den, at man ved Hjælp af mindste Kvadraters Metode bestemmer et vist Antal Konstanter i Rækken

$$u_i = a_0 + a_1 \cos \theta i + b_1 \sin \theta i + a_2 \cos 2\theta i + b_2 \sin 2\theta i + \dots,$$

hvor $\theta = \frac{2\pi}{n}$, naar n er Antallet af Iagttagelsesværdier i Perioden.

Dersom de n Iagttagelser, $o_1, o_2, \dots, o_n$, er ækvidistante og betragtes som lige gode, faar man ved Hjælp af Normalligningerne som bekendt

$$a_0 = (o_1 + o_2 + \dots + o_{n-1} + o_n) \cdot \frac{1}{n},$$

og for de øvrige Konstanter:

$$a_q = (o_1 \cos q\theta + o_2 \cos 2q\theta + \dots + o_{n-1} \cos (n-1)q\theta + o_n) \cdot \frac{2}{n},$$

$$b_q = (o_1 \sin q\theta + o_2 \sin 2q\theta + \dots + o_{n-1} \sin (n-1)q\theta) \cdot \frac{2}{n}.$$

Man kan bestemme ialt n Konstanter, og hvis n er ulige, sker dette ved Hjælp af ovenstaaende Formler. Men naar n er lige, bliver det sidste Led af den periodiske Række $a_{\frac{n}{2}} \cos \pi i$, og her har man

$$a_{\frac{n}{2}} = (-o_1 + o_2 - o_3 + \dots - o_{n-1} + o_n) \cdot \frac{1}{n}.$$

Til Udjevning bruger man i Almindelighed kun et ringe Antal af disse Led; jo flere Led man tager med, desto mere nærmer man sig gennemsnitsvis til de givne Værdier, og den fuldstændige Række med n Konstanter giver $u_i = o_i$. Dersom man fra anden Side véd, at man ved Hjælp af en saadan Række med n Konstanter kan udtrykke n givne Værdier, behøves der intet Bevis for, at de ovenfor fundne Konstanter netop giver Rækken denne Egenskab, thi naar alle Differenserne $o_i - u_i$ kan blive Nul, saa er de ogsaa Nul her, hvor Summen af disse Differensers Kvadrater er et Minimum. Man kan imidlertid ogsaa direkte vise, at naar man sætter

$$o_i = \sum (a_q \cos q\theta i + b_q \sin q\theta i),$$

og heri indfører de fundne Udtryk for a_q og b_q , vil Ligningen være tilfredsstillt, saasnart man tillægger i Værdien af et helt Tal fra 1 til n .

Denne Udjevningssække har blandt andet den gode Egenskab, at Konstanterne til de enkelte Led bestemmes uafhængig af hverandre. Man kan derfor, hvor man finder det formaalstjenligt, betragte for Eksempel $v = A_q \cos q\theta i$ som Udjevningssfunktion og $u = a_q \cos q\theta i$ som Resultatet af en Udjevning efter denne Funktion. Paa samme Maade kan man betragte en Sum af hvilke som helst af Leddene som Resultatet af en selvstændig Udjevning, og navnlig betragter man Dobbeltled,

$$L_q = a_q \cos q\theta i + b_q \sin q\theta i,$$

paa denne Maade. De enkelte Led faar paa Grund af den nævnte Egenskab ved Rækken en vis selvstændig Betydning i Modsætning til, hvad der

er Tilfældet, naar man for Eksempel udjevner efter en Potensrække, hvor Konstanterne danner et sammenhængende System, saaledes at de faar andre Værdier, naar Antallet af dem forandres.

Leddene i denne Række har endvidere den Egenskab, at de er frie af hverandre (»Elementær Iagttagelseslære«, Side 76), saa at man har

$$\lambda_2(u_i) = \lambda_2(a_0) + \cos^2 \theta i \cdot \lambda_2(a_1) + \sin^2 \theta i \cdot \lambda_2(b_1) + \dots$$

— naturligvis under Forudsætning af at selve Iagttagelserne er indbyrdes frie.

Vi har nu

$$\begin{aligned} \lambda_2(a_q) &= (1 + \cos^2 q\theta + \cos^2 2q\theta + \dots + \cos^2(n-1)q\theta) \frac{4}{n^2} \lambda_2(o) \\ &= \frac{1}{2} (n + 1 + \cos 2q\theta + \cos 4q\theta + \dots + \cos 2(n-1)q\theta) \frac{4}{n^2} \lambda_2(o). \end{aligned}$$

Da $\theta = \frac{2\pi}{n}$, bliver

$$2(n-1)q\theta = 4q\pi - 2q\theta,$$

og altsaa

$$1 + \cos 2q\theta + \cos 4q\theta + \dots + \cos 2(n-1)q\theta = 0,$$

saa at

$$\lambda_2(a_q) = \frac{2}{n} \lambda_2(o).$$

Paa lignende Maade faar man

$$\lambda_2(b_q) = \frac{2}{n} \lambda_2(o).$$

For et Dobbeltled

$$L_q = a_q \cos q\theta i + b_q \sin q\theta i$$

har man altsaa

$$\lambda_2(L_q) = \frac{2}{n} \lambda_2(o),$$

medens man for det konstante Led $L_0 = a_0$ og, naar n er lige, for det sidste Led, $L_n = a_n \cos \pi i$, har

$$\lambda_2(L_0) = \lambda_2(L_n) = \frac{1}{n} \lambda_2(o).$$

Dersom man véd, at den teoretisk rigtige Funktion bestaar af for Eksempel det konstante Led og q Dobbeltled, skal man altsaa bestemme $1 + 2q = m$ »Elementer«, og for den udjevnede Værdi, u , har man altsaa

$$\lambda_2(u) = \frac{m}{n} \lambda_2(o).$$

Dette Udtryk gælder imidlertid kun, naar man har udjevnet efter den teoretisk rigtige Funktion, og naar Iagttagelserne er frie af hverandre. Man vilde derfor kunne begaa store Fejl, dersom man vilde anvende det ved Udjevning af de meteorologiske Elementers Perioder.

For vore Opgavers Vedkommende tør man ikke forudsætte, at den teoretisk rigtige Funktion i Almindelighed skulde kunne fremstilles med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Hjælp af nogle faa Led af den nævnte Række. Det Resultat, man faar under disse Omstændigheder, maa derfor betragtes

som en Udjevning efter en Interpolationsformel, hvilket er karakteriseret paa følgende Maade af *I. P. Gram*¹⁾:

» . . . de nøjagtige Værdier kunne vi under ingen Omstændigheder bestemme ved Erfaring alene, og vi kunne derfor, selv om der paa denne Maade er fundet en hel Række Funktionsværdier svarende til forskellige Argumenter, aldrig vente, at disse ville kunne tjene til en fuldstændig Bestemmelse af den ubekjendte Funktion; alt hvad man kan vente at faa ud af dem, vil være en Tilnærmelsesformel, som indenfor visse Grænser med en given Middelafvigelse kan bruges til Fremstilling af denne Funktion«. Og endvidere kan man herpaa tildels anvende, hvad der sammesteds (Side 26) siges om Udvikling af Funktioner efter Interpolationsrækker:

»Det man altsaa opnaar ved at udvikle en Funktion efter en Interpolationsrække er, at man erholder en Tilnærmelsesformel, som fremstiller den givne Funktion med en vis i Forvejen bestemt gennemsnitlig Tilnærmelse for de forskellige Argumenter; den vil i Reglen kun i enkelte Punkter nøjagtig falde sammen med denne, men ellers give Værdier, der snart er større, snart mindre end de tilsvarende givne, . . .«

»Men af dette særegne Forhold, som gjælder for alle Interpolationsrækker, følger, at selv om Rækken fremstiller en given Funktion med forholdsvis stor Nøjagtighed, saa vil man dog ikke kunne vente, at Differentiation af Rækken med tilsvarende Nøjagtighed skal give Funktionens virkelige Differentialkoefficienter. Her er et Punkt, hvor man maa være meget forsigtig, da man ellers udsætter sig for at begaa meget grove Fejltagelser«.

Det er navnlig den sidst omtalte Omstændighed, der forringer Værdien af Udjevningsregningen, naar den skal benyttes til at finde den teoretisk rigtige Funktion eller til at opspore Aarsagsforholdet ved det iagttagne Fænomen. Den naturligste Maade at undersøge en Funktion paa, naar den som her er repræsenteret ved en Række Værdier, vilde være at undersøge disse Værdiers Differenser af første, anden, tredje . . . Orden, men dette lader sig ikke gøre, fordi Iagttagelserne er behæftet med Fejl, og Fejlene paa Differenserne vokser stærkt med disses Orden. Og med de udjvnede Værdier kan Undersøgelsen heller ikke foretages af den ovenfor anførte Grund, thi det, som er sagt om Usikkerheden ved de afledede Funktioner, gælder naturligvis ogsaa for de hele Differenser.

Vi skal anføre et lille Eksempel, der kan tjene til at belyse, hvad der ovenfor er sagt om Manglerne ved Anvendelsen af Udjevningsrækker. Lad os antage, at der til Udjevning er forelagt 12 Værdier, af hvilke de 11 med overlegen Nøjagtighed kan fremstilles ved

$$o_i = \sin \frac{2\pi}{12} i = \sin \theta i,$$

¹⁾ *I. P. Gram*: »Om Rækkendviklinger«. Kjøbenhavn 1879. (Side 96).

medens Maximumsværdien, a_3 , afviger betydelig herfra, saaledes at vi for Eksempel kan sætte

$$a_3 = \sin 3\theta + \delta.$$

De 12 Værdier gengives da ved Rækken

$$a_i = \sin \theta i + \frac{\delta}{6} \left(\frac{1}{2} + \sin \theta i - \cos 2\theta i - \sin 3\theta i + \cos 4\theta i + \sin 5\theta i - \frac{1}{2} \cos \pi i \right).$$

Ved en Udjevning vilde man i dette Tilfælde ganske sikkert som udjevnet og forbedret Værdi faa

$$u_i = \left(1 + \frac{\delta}{6} \right) \sin \theta i,$$

men der er da forsvundet en Ejendommelighed, som maaske netop var karakteristisk for det iagttagne Fænomen. — Naar den sande Funktion ikke er af særlig simpel Natur, vil Funktionens Ejendommeligheder overhovedet udviskes i større eller mindre Grad. Denne Sag kommer vi senere tilbage til.

Det bør imidlertid fremhæves, at der i Meteorologien er et enkelt, men vigtigt, Omraade, hvor man anvender de Resultater, man faar ved Hjælp af mindste Kvadraters Metode, og hvor de omtalte Ufuldkommenheder ikke faar megen Betydning. Der sigtes her til Metodens Anvendelse til Registrering af de periodiske Fænomener. Dersom man vil undersøge, hvorledes et periodisk Fænomen varierer fra Sted til Sted over et større Omraade, vil man hverken ved Hjælp af Tabeller over Iagttagelsesværdierne eller grafiske Fremstillinger af dem faa et overskueligt Billede af Forholdene. Derimod faar man et godt Overblik, naar man betragter et vist Antal Led i den trigonometriske Række, idet man giver dem Formen

$$L_p = C_p \cos (p\theta i + \alpha_p),$$

thi da kan man nemt undersøge Variationen i hver enkelt Amplitude og hver enkelt Fase. En saadan Undersøgelse kan undertiden ogsaa give vigtige Oplysninger om Fænomenets Aarsagsforhold, nemlig naar det viser sig, at visse Led øjensynligt varierer efter en simpel Lov fra Sted til Sted; saaledes viser for Eksempel Leddet L_2 ved Lufttrykkets daglige Periode en mærkelig Regelmæssighed baade med Hensyn til Amplitude og Fase, medens Leddet L_1 viser sig at være afhængigt af Aarstiden og lokale Forhold.

Ved en saadan Undersøgelse vil nogle faa Led være tilstrækkelige, naar det kun drejer sig om at faa Overblik over Fænomenets Hovedtræk, thi disse vil altid gengives ved Hjælp af de 2 eller 3 første Dobbeltled. Endvidere har det ikke megen Betydning, at Beregningen udføres som om Iagttagelserne var frie og lige gode, thi ganske vist er disse Betingelser ikke opfyldt, men paa dette Sted er det tilstrækkeligt, at man faar Oplysninger om, hvorledes visse paa ensartet Maade beregnede Størrelser varierer fra Sted til Sted.

Ved alle andre Anvendelser af saadanne Udjevninger vil Resultatet derimod lide under de omtalte Mangler, som Metoden er behæftet med. Enhver Art af Udjevning kan ganske vist siges at være ufuldkommen, men

hvad det her drejer sig om, er de særlige Mangler, der gør sig gældende, naar den teoretisk rigtige Funktion er ubekendt. Der er en Kvalitetsforskel paa Resultaterne af Udjevninger, hvor Funktionen er bekendt, og hvor den er ubekendt. Dersom Funktionen er bekendt, vil nemlig de udjevnede Værdier nærme sig desto mere til de sande Funktionsværdier, jo mindre de Fejl er, som Iagttagelsesværdierne er behæftet med, og Fejlen paa den udjevnede Værdi kan derfor siges at hidrøre fra det ufuldkomne Materiale, men ikke fra Metoden. Er den teoretisk rigtige Funktion derimod ubekendt, kan selve Metoden indføre Fejl, saaledes at selv om de Værdier, man gaar ud fra, er fejlfrie, vil de »udjevnede og forbedrede« Værdier i Almindelighed være behæftet med Fejl.

Naar man vil forsøge paa at løse Opgaven ved at gaa ad andre Veje, har det Interesse at undersøge, om de Ufuldkommenheder, der klæber ved Udjevning efter mindste Kvadraters Metode, naar den teoretisk rigtige Funktion er ubekendt, skulde være begrundede i selve Opgavens Natur, eller om de kan have deres Udspring i Metodens egne Forudsætninger. For at se dette kan man holde sig til de Forudsætninger, hvorpaa Metoden ifølge »Elementær Iagttagelseslære« bygger, og vi kan da antage, at Opgaven ønskes løst paa den Maade, som blev omtalt i Slutningen af § 2. Vi gaar altsaa ud fra, at der er opstillet en Teori for det betragtede Fænomen, og at man ved Hjælp af Fejlkritiken skal afgøre, om denne Teori kan antages eller bør forkastes. Ved vore Opgaver vil der i en saadan Teori kunne indgaa et ikke ringe Antal af ubekendte eller kun tilnærmelsesvis bekendte Størrelser, der altsaa bliver de »Elementer«, som skal findes ved Udjevnningen. Naar da Ligningerne mellem de udjevnede Værdier og Elementerne ifølge Teorien er af Formen

$$u_i = F(x, \dots, z),$$

og man ved en Tilnærmelsesmetode har bragt dem paa lineær Form, (»Elementær Iagttagelseslære«, Side 81), for Eksempel

$$u_i - v_i = \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \dots + \left(\frac{dF}{dz}\right)_0 (z - z_0),$$

vil Stillingen til Slut blive den samme som ved Udjevningssrækker, nemlig at man tildels kun har usikre Anvisninger at følge med Hensyn til, hvilke Elementer man skal tage med, og hvilke man skal udskyde. Og saaledes maa Resultatet blive som Følge af Forudsætningerne. Har man blot opstillet en nogenlunde antagelig Teori og indført tilstrækkelig mange Elementer, vil man altid kunne tilfredsstille Kritikligningen¹⁾. Under disse Omstændigheder vil Fejlkritiken imidlertid ikke kunne afgøre,

¹⁾ Umiddelbart kan man indse, at der for Eksempel kan gives Tilfælde, hvor en mindre god Teori, der fordrer Bestemmelsen af 6 Elementer, tilfredsstiller Kritikligningen netop lige saa godt som en noget bedre Teori med 5 Elementer.

om den hele Teori bør antages eller forkastes, men Afgørelsen kan kun gaa ud paa, om dette eller hint Element bør tages med eller ej, naar man vil holde fast paa den opstillede Teori.

Da Manglerne bunder i Metodens egne Forudsætninger, kan der være Haab om, at man ad andre Veje kan naa til et mere tilfredsstillende Resultat. Vi vender os derfor til en anden Metode, nemlig »den mekaniske«, hvis største Fortrin netop turde være det, at den ikke gaar ud fra specielle Forudsætninger om den ubekendte Funktions Natur.

Det er iøvrigt interessant at se, hvorledes man kan faa disse to — tilsyneladende grundforskellige — Metoder til saa at sige at gaa op i en højere Enhed.

§ 9.

Anvendelse af »mekaniske Metoder«.

Foruden mindste Kvadraters Metode anvendes ogsaa de saakaldte »mekaniske Udjevningsmetoder« i ret stor Udstrækning til Udjevning af meteorologiske Iagttagelser. Disse Metoder eller — hvad jeg vil foretrække at sige — denne Metode har temmelig store Mangler i den Skikkelse, hvori den hidtil er anvendt, men da den i visse Retninger har Fortrin fremfor mindste Kvadraters Metode, turde det være Umagen værd at forsøge, om man kan afhjælpe Manglerne.

Denne Metode fordrer — i alt Fald i sin almindelige Skikkelse — at Iagttagelsesværdierne er ækvidistante; denne Fordring er opfyldt eller kan blive opfyldt af vort Materiale. Til Udjevning af Temperatures aarlige Perioder foreligger det lettest tilgængelige Materiale ganske vist som oftest i Form af Middeltal for de enkelte Maaneder — altsaa ikke som ækvidistante Værdier — men man kan da gaa tilbage til Iagttagelserne for de enkelte Dage og heraf danne ækvidistante Normalpladser.

Udjevningen sker efter denne Metode analog med Bestemmelsen af det fælles Tyngdepunkt for flere Vægte, idet man af de givne Iagttagelsesværdier, o , beregner en Række af udjvnede Værdier, o_i , ved Hjælp af Formlen

$$o_i = \frac{\sum_{v=-m}^{v=m} (a_v o_{i+v})}{\sum_{v=-m}^{v=m} (a_v)}.$$

Saaledes udjevner man ofte meteorologiske Iagttagelser ved at tage Middeltallet af 3 paa hinanden følgende Værdier, altsaa efter Formlen

$$o_i = \frac{1}{3} (o_{i+1} + o_i + o_{i-1}).$$

Hvis en enkelt Udjevning ikke er tilstrækkelig, gentages Operationen, idet man af $o^{(1)}$ danner en ny Række Værdier, $o^{(2)}$, paa samme Maade, som man dannede $o^{(1)}$ af o , altsaa

$$o_i^{(2)} = \frac{1}{3} \left(o_{i+1}^{(1)} + o_i^{(1)} + o_{i-1}^{(1)} \right),$$

eller almindeligt for den v Gange gentagne Operation:

$$o_i^{(v)} = \frac{1}{3} \left(o_{i+1}^{(v-1)} + o_i^{(v-1)} + o_{i-1}^{(v-1)} \right).$$

Det indses umiddelbart, at man kan udjevne paa denne Maade, men kun under visse Omstændigheder kan man betragte de beregnede Værdier som forbedrede Iagttagelser. I den kritiske Omtale af den mekaniske Metode, som findes i Afhandlingen »Om Rækkeudviklinger« af *I. P. Gram*, bemærkes det (Side 114—122), at naar man anvender en mekanisk Udjevningsformel, udjevner man i Virkeligheden efter en vis hel algebraisk Funktion, saaledes at selve Metoden indfører Fejl i Resultatet, saafremt den teoretisk rigtige Funktion i det givne Tilfælde ikke er en hel algebraisk Funktion af samme eller lavere Grad. At denne Indvending er berettiget, kan man indse blot ved at betragte den ovenstaaende Udjevningsformel; dersom en saadan Formel ikke skal kunne indføre Fejl, maa den føre til Identitet, naar den tænkes anvendt til at »udjevne« en Række Værdier af den teoretisk rigtige Funktion; vi skal altsaa i et saadant Tilfælde have

$$v_i^{(1)} = \frac{1}{3} (v_{i+1} + v_i + v_{i-1}) = v_i + \frac{1}{3} \Delta^2 v_i = v_i,$$

og man vil derfor kun undgaa at indføre Fejl, naar $\Delta^2 v = 0$, altsaa naar den teoretisk rigtige Funktion er lineær.

Ved vore Opgaver maa den antydede Fordring formuleres saaledes, at de sande Værdier, som svarer til de Iagttagelsesværdier, der indgaar i Udjevningsformlen, skal kunne fremstilles med overlegen eller dog med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Hjælp af en hel algebraisk Funktion af samme Grad som den Funktion, man i Virkeligheden udjevner efter.

Selv om den nævnte Fordring er opfyldt, kan der dog blive Spørgsmaal om, hvorvidt Resultatet er det bedst mulige, som kunde opnaas, eller blot om, hvorvidt de beregnede Værdier har de Egenskaber, som den paa-tænkte Anvendelse af dem fordrer. Saaledes nævnes det i den foran omtalte Afhandling som en Betingelse for, at man skal kunne anse de nye Værdier for at være bedre end de oprindelige, at Middelfejlen for de forelagte Værdier skal være konstant eller dog skal kunne betragtes som værende konstant for saa mange paa hinanden følgende Værdier, som indgaar i Udjevningsformlen. Desuden gøres der opmærksom paa en Ufuldkommenhed ved Metoden, nemlig at de udjevnede Værdiers Differenser ikke vil variere regelmæssigt.

Naar der derimod samme Sted gøres opmærksom paa endnu en Ufuldkommenhed ved Metoden, nemlig at man ikke kan benytte Formlen til de yderste af en Rækkes Værdier, saa har dette ingen Betydning for vore Opgaver; vi har kun med periodiske Iagttagelsesrækker at gøre, og Værdierne kan derfor tænkes ordnede i en Kreds, og der bliver saaledes ikke Tale om Yderværdier.

Man kunde maaske ogsaa betragte det som en Ufuldkommenhed ved Metoden, at den ikke giver den søgte Funktions analytiske Udtryk, men kun en Række Værdier. Det bedste vilde naturligvis være at faa et analytisk Udtryk, om hvilket man vidste, at den anvendte Metode ikke havde indført Fejl deri, men da dette synes at være uopnaaeligt overfor ubekendte Funktioner af indviklet Beskaffenhed, saa turde det næstbedste være at faa en Række Værdier, der kan betragtes som udjvnede og forbedrede Iagttagelser, og som ikke er behæftet med andre Fejl end de, der hidrører fra selve Iagttagelserne. Dersom man naar dette Maal, vil det ikke føles som en stor Ulempe, at Metoden ikke giver Funktionens analytiske Udtryk. For det første kan Resultatet direkte anvendes til en hyppig forekommende Art af Opgaver, nemlig til Bestemmelse af »Normalværdier« for de meteorologiske Elementer, hvor det netop er selve denne Række af forbedrede Værdier, man har Brug for. For det andet vil denne Række af ækvidistante Værdier være let anvendelig til Interpolation. Og for det tredje vil man have et godt Grundlag for Studiet af den ubekendte Funktions Natur, naar man er i Stand til at undersøge Differenserne af første, anden, tredje . . . Orden. — Skal man til et eller andet Formaal netop bruge et analytisk Udtryk, vil man efter en saadan Undersøgelse let kunne opstille en passende Tilnærmelsesformel.

Resultatet bliver, at der for vore Opgavers Vedkommende kan gøres følgende Indvendinger imod den mekaniske Metode i dens hidtil anvendte Skikkelse:

1. Selve Metoden indfører i Almindelighed Fejl i Resultatet.
2. Metoden kan kun give rigtige Resultater, naar Iagttagelsernes Middelfejl er konstant.
3. Differenserne mellem de udjvnede Værdier varierer ikke regelmæssigt.

Med Hensyn til den sidste Indvending skal det bemærkes, at naar den overhovedet kan gøres gældende, kan den lige saa vel rettes imod selve de beregnede Værdier; men dersom disse ikke er tilstrækkeligt udjvnede, vil dette ganske vist træde stærkere frem i Differenserne. Imidlertid vil Differenserne af en tilstrækkelig høj Orden nærme sig til Skemaet: $+\delta, -\delta, +\delta, -\delta, \dots$, selv om Uregelmæssighederne kun skyldes Afrundingen til sidste Ciffer, men tager man for Eksempel en grafisk Udjevning til Hjælp, vil man kunne skønne, om Uregelmæssighederne er for store til alene at stamme fra Afrundingen. Skal vi betragte de beregnede Værdier som fuldstændig udjvnede, vil vi da fordre, at de ikke maa fremvise andre Uregelmæssigheder end de, der

kan skyldes Afrunding. Det vil vise sig, at det ikke er vanskeligt at opfylde denne Fordring.

Med Hensyn til den Indvending, at Metoden kun kan give rigtige Resultater, naar Iagttagelsernes Middelfejl er konstant, skal det bemærkes, at dette refererer sig til Opgaver, hvor Udjevningfunktionen er bekendt, men i dette Tilfælde kan der næppe være Tvivl om, at man bør foretrække mindste Kvadraters Metode. Naar den sande Funktion derimod er ubekendt, stiller Sagen sig anderledes, thi da kommer det først og fremmest an paa, at man ikke indfører Fejl derved, at man udjevner efter en urigtig Funktion, medens det i Sammenligning hermed bliver af underordnet Betydning, om der tages Hensyn til Iagttagelsesværdiernes Vægte. Dette synes i alt Fald at kunne siges om vore Opgaver, hvor man tør antage, at de sande Vægte ikke springer fra Værdi til Værdi.

Om den Indvending, der sikkert kan betragtes som den væsentligste i mange Tilfælde, hvor man har anvendt mekanisk Udjevning, nemlig at selve Metoden indfører Fejl i Resultatet, kan det ogsaa siges, at den refererer sig til Udjevning efter bekendt Funktion, thi har man tilstrækkeligt Kendskab til den sande Funktion, vil man ogsaa kunne indrette sine Formler saaledes, at der ikke indføres Fejl i Resultatet.

For os synes Sagen at ligge saaledes, at for nogle af vore Opgavers Vedkommende faar man det bedste Resultat ved at anvende mindste Kvadraters Metode til Bestemmelsen af et vist Antal Led af den trigonometriske Række, medens man i andre Tilfælde kan opnaa et bedre Resultat ved Hjælp af den mekaniske Metode. Der skal derfor gøres et Forsøg paa at give den sidstnævnte Metode et rationelt Grundlag, idet den specielt lægges til Rette for vore Opgaver. Men da vi skal anvende Metoden til Udjevning af Iagttagelser, som er bundet til hverandre, er det nødvendigt, at vi først undersøger »Bindingens« Betydning.

IV.

BINDING.

§ 10.

Baandene og Bindingens Karakter.

Vore Iagttagelser kan altid opstilles efter dette Skema:

$$\begin{array}{ccccccc} \theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3 & \dots & \theta'_i & \dots & \theta'_n \\ \theta''_1 & \theta''_2 & \theta''_3 & \dots & \theta''_i & \dots & \theta''_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \theta^{(v)}_1 & \theta^{(v)}_2 & \theta^{(v)}_3 & \dots & \theta^{(v)}_i & \dots & \theta^{(v)}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \theta^{(s_0)}_1 & \theta^{(s_0)}_2 & \theta^{(s_0)}_3 & \dots & \theta^{(s_0)}_i & \dots & \theta^{(s_0)}_n \end{array}$$

1) Nøjagtigere udtrykt skulde det hedde, at Iagttagelserne betragtes som frie, naar Sætningen gælder med en vis nærmere bestemt Tilnærmelse, og som bundne, naar man kommer udenfor denne Grænse.

hvor hver af de vandrette Rækker danner en Periode, medens Værdierne i de lodrette Rækker alle har samme Fase; det er altid Middeltal af saadanne lodrette Rækker, som vi benytter til Udjevning. Værdierne i de vandrette Rækker er altid bundet til hverandre. Derimod er Værdierne i de lodrette Rækker frie af hverandre for de aarlige Perioders Vedkommende, og for de daglige Perioders Vedkommende bliver de frie af hverandre, naar man lader hver af de vandrette Rækker bestaa af Middeltal af Værdier med samme Fase for f. Eks. en Maaned, saaledes at de Værdier, der skal benyttes til Udjevning, hører til samme Kalendermaaned i en Række paa hinanden følgende Aar.

For de daglige Perioders Vedkommende har man tillige, at naar Værdierne i de lodrette Rækker er frie af hverandre, saa er ogsaa hver enkelt Værdi fri af alle de andre med Undtagelse af dem, der findes i dens egen vandrette Række; dersom for Eksempel Iagttagelsesværdien o_1 i Januar i Aar ikke er bundet til o_1 i Januar i Fjor, er der heller ikke Grund til at antage, at o_2 i Aar skulde være bundet til o_1 i Fjor; men iøvrigt bør de forskellige Spørgsmaal vedrørende Bindingen nærmere undersøges ved de forekommende Opgaver.

Lad os imidlertid foreløbig gaa ud fra, at hver Værdi i vort Skema er fri af alle de andre med Undtagelse af dem, som findes i samme vandrette Række, samt at Værdierne i samme lodrette Række har samme Vægt. Vi kan da beregne ikke blot Middelfejlene for de enkelte Værdier, men ogsaa Middelfejl for enhver Funktion af Iagttagelser i samme vandrette Række. Har vi saaledes

$$f^{(v)} = a_1 o_1^{(v)} + a_2 o_2^{(v)} + \dots + a_n o_n^{(v)},$$

kan $f^{(v)}$ betragtes som en enkelt Iagttagelse, og da $f', f'' \dots f^{(s_0)}$ ifølge vore Forudsætninger er frie af hverandre, kan man paa almindelig Maade beregne Middelfejlen for f og ligeledes for Middeltallet af f :

$$M_1(f) = a_1 M_1(o_1) + a_2 M_1(o_2) + \dots + a_n M_1(o_n) = F.$$

Her kræves der Udregning af de enkelte Funktioner f , og er der Brug for Funktioner med andre Værdier af Faktorerne a , maa denne Udregning gentages. Men man kan ogsaa gaa frem paa en anden Maade. Indfører vi for Afvigelserne Betegnelsen

$$\varepsilon_i^{(v)} = o_i^{(v)} - M_1(o_i),$$

har vi først

$$f^{(v)} - F = a_1 \varepsilon_1^{(v)} + a_2 \varepsilon_2^{(v)} + \dots + a_n \varepsilon_n^{(v)}$$

og faar dernæst Middelfejlskvadratet for f af

$$\begin{aligned} (s_0 - 1) \lambda_2(f) &= [(f - F)^2] \\ &= a_1^2 [\varepsilon_1^2] + a_2^2 [\varepsilon_2^2] + a_3^2 [\varepsilon_3^2] + a_4^2 [\varepsilon_4^2] + \dots \\ &\quad + 2 a_1 a_2 [\varepsilon_1 \varepsilon_2] + 2 a_2 a_3 [\varepsilon_2 \varepsilon_3] + 2 a_3 a_4 [\varepsilon_3 \varepsilon_4] + \dots \\ &\quad + 2 a_1 a_3 [\varepsilon_1 \varepsilon_3] + 2 a_2 a_4 [\varepsilon_2 \varepsilon_4] + \dots \\ &\quad + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Beregner man samtlige Kvadrat- og Produktsummer af Afvigelse, kan man altsaa finde Middelfejlen for forskellige Funktioner ved at indsætte Værdierne af Faktorerne a i ovenstaaende Formel. Denne Beregningsmaade vil dog i de fleste Tilfælde blive mere omstændelig end den første.

Den første Linie af Formlen svarer til den sædvanlige Fejllov for frie Iagttagelser, idet man har $[\varepsilon_i^2] : (s_0 - 1) = \lambda_2(o_i)$; den simple Form, som Fejlloven i dette Tilfælde antager, beror netop paa, at man tør betragte Produktsummerne som smaa Størrelser. Naar dette ikke er Tilfældet, er Iagttagelserne ifølge vor Definition bundet til hverandre. Det er nu ønskeligt at have et Udtryk, der kan benyttes som et Maal for eller en Karakteristik af Bindingen, og hertil vil det være naturligt at bruge Produktsummerne eller Udtryk, hvori disse Summer indgaar som Faktor. Her bruger vi

$$B = \frac{[\varepsilon_i \varepsilon_j]}{+ \sqrt{[\varepsilon_i^2] [\varepsilon_j^2]}}$$

som et Udtryk for den Binding, der bestaar mellem Iagttagelserne o_i og o_j . Værdien af dette Udtryk forbliver uforandret, naar vedkommende Iagttagelsesrækker gentages; den forbliver ogsaa uforandret, naar Afvigelse i en af Rækkerne multipliceres med en Konstant. I det følgende kaldes det med B betegnede Udtryk ligefrem for Baandet¹⁾ mellem Iagttagelserne o_i og o_j .

Man kan nu vise, at

$$[\varepsilon_i^2] \cdot [\varepsilon_j^2] - [\varepsilon_i \varepsilon_j]^2 = [(\varepsilon_i^{(v)} \varepsilon_j^{(\mu)} - \varepsilon_i^{(\mu)} \varepsilon_j^{(v)})^2],$$

hvor Meningen med de benyttede Mærker i Ligningens højre Side er den, at man skal tage alle de Kombinationer af den angivne Form, hvor v og μ er forskellige. Da vi herefter ikke kan have $[\varepsilon_i^2] \cdot [\varepsilon_j^2] < [\varepsilon_i \varepsilon_j]^2$, er Grænserne for Værdien af B 1 og -1 . For at B skal kunne faa en af disse Grænseværdier, maa man almindeligt have

$$\frac{\varepsilon_i^{(v)}}{\varepsilon_j^{(v)}} = \frac{\varepsilon_i^{(\mu)}}{\varepsilon_j^{(\mu)}},$$

¹⁾ Et hertil svarende Udtryk benyttes ogsaa under Navn af »Korrelationsfaktor« eller »Korrelationskoefficient« til at undersøge, om der er en Sammenhæng imellem to forskellige iagttagne Fænomener.

altsaa et konstant Forhold mellem Afvigelserne fra de Iagttagelser, der er bundet sammen. — For to identiske Iagttagelsesrækker har man altid $B = 1$.

Vi skal nu vise ved nogle Eksempler, hvorledes Iagttagelserne kan stilles op i Overensstemmelse med Skemaet Side 41, og derefter ved Hjælp af vort Udtryk for Baandet anskueliggøre Bindingens Karakter i forskellige Tilfælde.

Først tager vi Temperaturen daglige Periode i Juli Maaned i København, bestemt ved timevise Iagttagelser. Dersom vi vilde stille samtlige Iagttagelser for en Maaned op efter Skemaet, kom hver af de vandrette Rækker til at indeholde Iagttagelserne for et Døgn, men under disse Omstændigheder vilde ikke blot Værdierne i de vandrette, men ogsaa Værdierne i de lodrette Rækker være bundet til hverandre, thi de Aarsager, der betinger Bindingen, virker i Almindelighed i længere Tidsrum ad Gangen. Vort Materiale indeholder imidlertid Iagttagelser for 23 Aar, nemlig fra 1887 til 1909, og nu lader vi hver af de vandrette Rækker bestaa af Middeltallene af de til samme Klokkeslet anstillede Iagtt-

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1887	—24	—48	—33	—37	—11	12	9	13	—14	—2	+ 0	3
1888	61	52	54	77	106	95	59	12	—36	—66	—90	—81
1889	29	5	7	11	7	20	45	29	21	—10	—25	—33
1890	53	45	50	50	55	58	22	—1	—28	—62	—87	—67
1891	62	41	23	30	59	89	97	39	10	—10	—34	—43
1892	—6	—40	—48	—40	—30	—17	—1	—5	2	—5	—14	—28
1893	—44	—32	—30	—44	—47	—17	—6	36	48	55	45	42
1894	—43	—11	—11	—20	—19	9	—5	2	13	19	55	38
1895	33	69	66	56	42	47	1	—10	—41	—68	—49	—48
1896	—23	—37	—42	—41	—68	—37	—65	—43	—19	—18	—11	2
1897	25	30	38	44	41	20	15	2	19	13	5	—10
1898	43	62	77	75	70	40	20	—29	—34	—36	—50	—47
1899	—47	—53	—41	—35	—52	—60	—50	—39	29	32	36	43
1900	—4	—5	—1	—1	—15	—44	—44	—39	—6	17	24	26
1901	—46	—54	—67	—75	—79	—97	—72	—45	36	45	73	77
1902	20	13	10	17	19	5	8	—10	12	16	15	2
1903	16	15	11	12	5	—22	—1	2	13	25	18	5
1904	96	—98	—113	—79	—111	—82	—41	4	30	82	99	109
1905	1	17	11	4	8	+ 0	4	9	—13	17	22	22
1906	—49	—33	—26	—22	—19	—16	—31	17	13	44	54	37
1907	44	49	63	42	48	22	19	11	—30	—52	—41	—17
1908	—32	—28	—37	—51	—45	—52	—13	23	—5	6	5	22
1909	28	41	40	30	35	27	30	23	—20	—38	—48	—52

gelser i en Maaned; vi faar saaledes 23 vandrette Rækker. Herefter bliver for Eksempel σ'_1 Middeltallet af Iagttagelserne for Kl. 1 om Morgenens i Juli 1887, medens $M_1(o_1)$ bliver det hertil svarende Middeltal for samtlige 23 Aar. For at lette Oversigten benytter vi i Stedet for selve Værdierne $\sigma_i^{(v)}$ de tilsvarende Afvigelser, altsaa $\varepsilon_i^{(v)} = \sigma_i^{(v)} - M_1(o_i)$, og vort Skema bliver herefter

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \varepsilon_1', & \varepsilon_2', & \varepsilon_3', & \dots & \varepsilon_i', & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{24}' \\ \varepsilon_1'', & \varepsilon_2'', & \varepsilon_3'', & \dots & \varepsilon_i'', & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{24}'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1^{(v)}, & \varepsilon_2^{(v)}, & \varepsilon_3^{(v)}, & \dots & \varepsilon_i^{(v)}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{24}^{(v)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1^{(23)}, & \varepsilon_2^{(23)}, & \varepsilon_3^{(23)}, & \dots & \varepsilon_i^{(23)}, & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon_{24}^{(23)}. \end{array}$$

I nedenstaaende Opstilling af disse Afvigelser er Enheden $\frac{1}{100}^{\circ}\text{C}$. Da de enkelte Værdier, som findes i enhver af de 24 lodrette Rækker, svarer til Iagttagelser, som er anstillet i hvert sit Aar, tør man vente, at der ikke

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
22	28	44	36	37	36	4	-20	-27	-10	-5	-16	1887
-104	-97	-86	-69	-38	-33	-15	-1	38	46	43	72	1888
-14	-46	-40	-28	-23	5	-12	-2	11	18	8	20	1899
-44	-54	-50	-52	-28	-8	2	6	27	40	36	38	1890
-43	-61	-76	-82	-65	-60	-36	-15	4	25	22	29	1891
3	-1	12	35	61	62	58	46	15	-8	-17	-36	1892
13	22	14	-3	-12	23	6	1	-2	-15	-24	-29	1893
11	22	-1	-12	-0	23	-13	7	-11	-19	-12	-25	1894
-50	-38	-49	-49	-38	-5	1	29	20	24	32	28	1895
38	53	39	55	35	55	44	54	53	9	-3	-28	1896
-13	-34	-49	-43	-39	-19	-23	-13	-18	-15	1	23	1897
-70	-72	-71	-30	-22	-10	-7	5	12	8	26	37	1898
53	56	61	69	50	31	12	2	-13	-20	-24	-40	1899
25	14	17	23	25	28	10	7	-8	-19	-21	-7	1900
106	107	110	119	85	51	16	-69	-65	-62	-47	-46	1901
10	5	-3	-28	-4	-24	-24	-39	-6	-11	-8	9	1902
-16	-21	-23	-16	-32	-35	-6	-3	-6	20	19	19	1903
111	104	123	138	70	20	29	-19	-37	-60	-79	-102	1904
-2	-10	-2	-35	-17	-37	-20	3	-7	7	9	9	1905
26	38	51	45	13	-29	8	12	-19	-27	-42	-43	1906
-37	-14	-41	-62	-55	-42	-28	-13	16	31	37	48	1907
33	40	57	41	38	8	5	8	2	-5	-3	-15	1908
-60	-41	-35	-52	-40	-38	-12	14	22	43	50	54	1909

er Baand mellem disse Værdier; men Sagen bør dog undersøges nærmere. Dersom Baandene er saa stærke, at vi behøver at tage Hensyn til dem, vil dette allerede give sig til Kende ved, at Fortegnene udviser flere Permanenser end Variationer. En Optælling af Permanenserne giver her

9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 14, 10, 14, 13, 13, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 7, 13, 15, 9, 9, 9.

Naar man har ialt n Permanenser og Variationer, er det forventede Antal af hver Art $\frac{1}{2}n \pm \frac{1}{2}\sqrt{n}$, saafremt Værdierne er frie af hverandre. Da det forventede Antal her er 11 ± 2.3 , vil man derfor ikke betænke sig paa at betragte Værdierne i de lodrette Rækker som frie af hverandre.

Omvendt giver Mangelen paa hyppige Fortegnsvariationer i de vandrette Rækker tydeligt nok til Kende, at lagttagelserne i disse Rækker er bundet til hverandre.

Nærmere Oplysninger om Bindingens Karakter faar vi ved at beregne Baandene mellem en vis lodret Række og den næste, den næstnæste o. s. v.; denne Beregning udføres nemmest ved at benytte vor Opstilling af Afvigelserne. — Gaar vi ud fra lagttagelserne for Midnat ($i = 0$ eller $i = 24$) og kalder Baandet mellem to Rækker, der er adskilt ved et Interval paa q Timer, for B_q , faar vi

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
·95	·94	·94	·92	·94	·83	·73	·26
B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}	B_{16}
—·66	—·84	—·87	—·88	—·93	—·91	—·91	—·93
B_{17}	B_{18}	B_{19}	B_{20}	B_{21}	B_{22}	B_{23}	B_{24}
—·87	—·66	—·70	·04	·59	·87	·95	1.

I den grafiske Fremstilling heraf, Fig. 5, er Værdien af B_0 taget med. I Overensstemmelse med Definitionen af B_q , maa B_0 eller B_{24} være Baandet mellem to identiske lagttagelsesrækker, og man har derfor altid $B_0 = 1$.

Endvidere er Baandene mellem lagttagelserne Kl. 3 Eftermiddag og de andre lagttagelsesrækker beregnet. Resultatet, der er gengivet i Fig. 6, bliver:

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
·96	·91	·64	·59	—·25	—·63	—·84	—·89
B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}	B_{16}
—·91	—·94	—·93	—·92	—·94	—·95	—·91	—·82
B_{17}	B_{18}	B_{19}	B_{20}	B_{21}	B_{22}	B_{23}	B_{24}
—·33	·55	·76	·82	·89	·96	·98	1.

Naar man erindrer, at ved frie lagttagelser skal Værdierne af Baandene være Nul eller nærme sig stærkt til Nul (naturligvis gælder dette ikke for B_0), vil man se, at Bindingen ved Temperaturens daglige Gang er meget stærk.

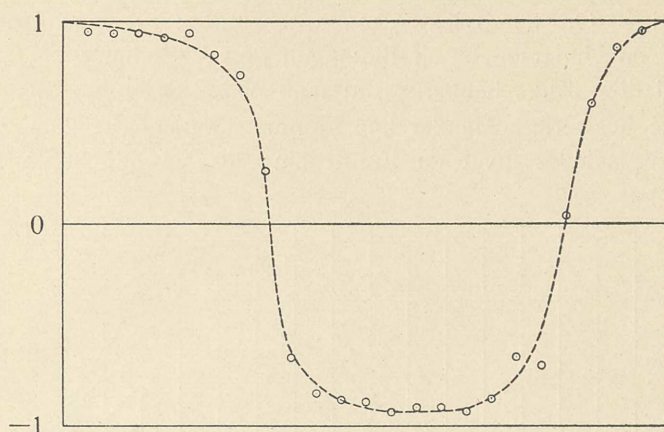


Fig. 5.

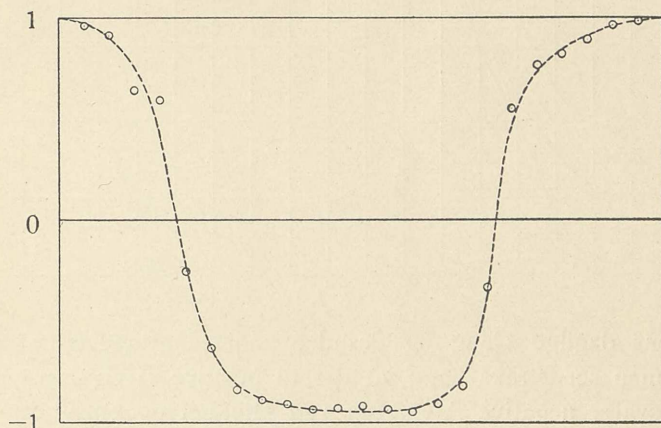


Fig. 6.

Det mærkeligste er imidlertid, at Baandene i omtrent en Trediedel af Periodens Længde er ganske nær ved Grænsen -1 . Aarsagen til den negative Binding er, at den væsentligste Omstændighed, der binder Iagttagelserne til hverandre, nemlig Skydækkets større eller mindre Tæthed, giver modsatte Afvigelser om Dagen og om Natten; Middeltallene svarer til en vis gennemsnitlig Tæthed af Skydækket; er Tætheden større, vil Stigningen i Temperaturen om Dagen blive mindre, men Afkølingen om Natten paa Grund af Udstraalingen vil ogsaa blive mindre — vi faar altsaa en negativ Afvigelse om Dagen og en positiv Afvigelse om Natten; omvendt, naar Himlen er klar, thi da vil vi faa positiv Afvigelse om Dagen og negativ om Natten, men i begge Tilfælde bliver Produktet af Afvigelserne negativt.

Vi ser, hvorledes »Aarsager« kan aabenbare sig ved Undersøgelsen af Bindingen. De Oplysninger, som Materialet indeholdt om de Omstændigheder, der ledsagede det iagttagne Fænomen, gik ikke tabt derved, at vi

behandlede disse Omstændigheder som uvæsentlige; vil man opsøge »Aarsager«, giver en Undersøgelse af Bindingen god Vejledning.

Det skal dog straks bemærkes, at man ogsaa paa andre og i Almindelighed mindre besværlige Maader kan komme »Aarsagerne« paa Sporet. I Fig. 7 er der saaledes givet en Fremstilling af den udjvnede Kurve for

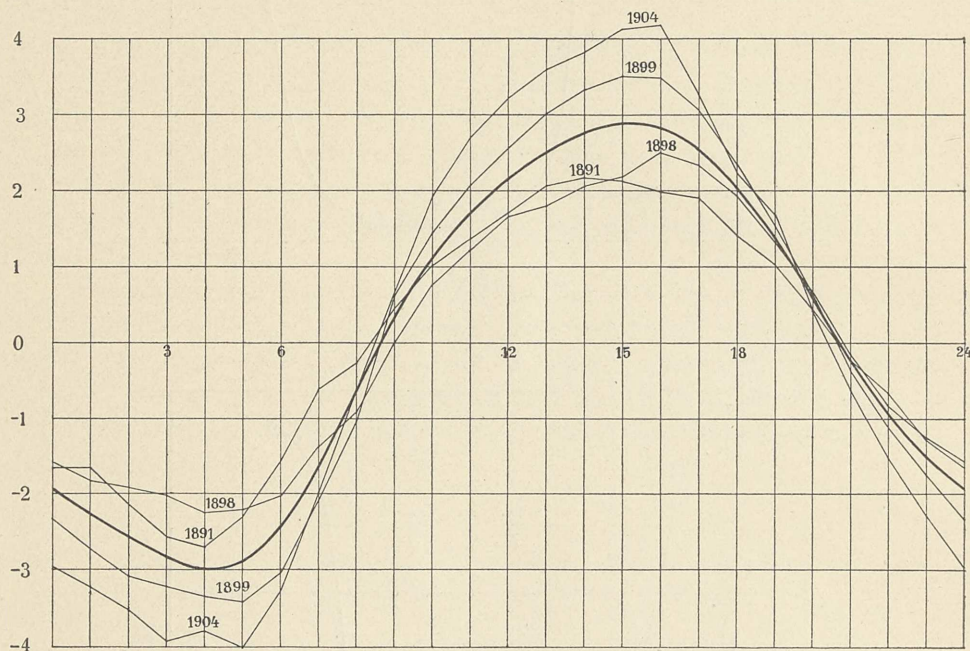


Fig. 7.

Temperaturens daglige Gang og desuden nogle Iagttagelsesrækker for enkelte Aar; man ser straks heraf, at der til positive Afvigelser i Nærheden af Maximet svarer negative Afvigelser ved Minimet og omvendt.

Som det næste Eksempel paa Iagttagelsesværdiernes delvise Frigørelse og paa Bindingens Karakter tager vi Lufttrykkets daglige Periode i Batavia i Januar Maaned. Der er benyttet Iagttagelser for 30 Aar, og vort Skema for Iagttagelsesværdierne $o_i^{(v)}$, eller for Afvigelserne $\varepsilon_i^{(v)} = o_i^{(v)} - M_1(o_i)$, faar altsaa 30 vandrette Rækker, medens vi ligesom foran ved Temperaturens daglige Periode har 24 lodrette Rækker, idet der ogsaa i dette Tilfælde foreligger Iagttagelser for hver Time. I nedenstaaende Opstilling (Side 50 og 51) af Afvigelserne $\varepsilon_i^{(v)}$ er Enheden $\frac{1}{100}$ mm.

Vi skal først undersøge, om Iagttagelserne i de lodrette Rækker er frie af hverandre. En Optælling af Fortegnspermanenserne giver som Resultat:

11, 11, 15, 19, 18, 15, 17, 19, 16, 18, 22, 16, 14, 13, 13, 15, 13, 11, 10,
16, 14, 12, 16, 11.

Da der ialt er 29 Permanenser og Variationer i hver Række, bliver det forventede Antal Permanenser 14.5 ± 2.7 , og man tør derfor betragte de undersøgte Iagttagelser som frie af hverandre.

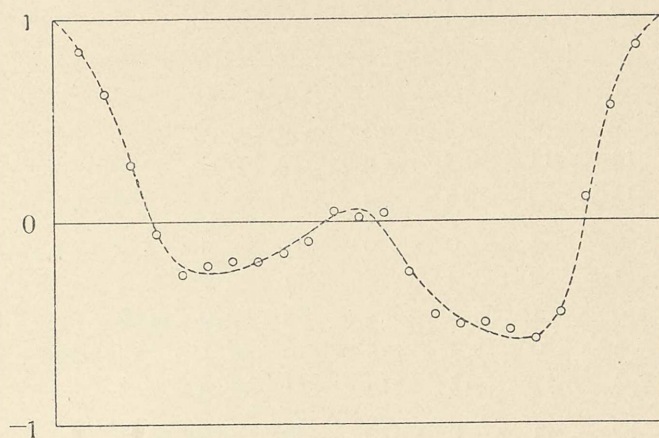


Fig. 8.

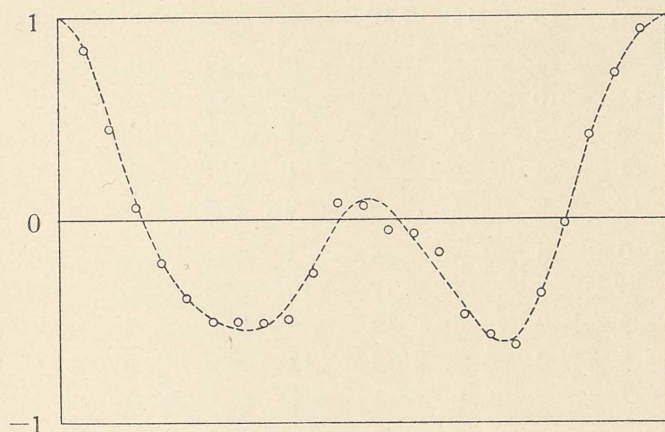


Fig. 9.

Der er dernæst beregnet to Serier af Baand med Udgangspunkter fra Iagttagelserne Kl. 6 Formiddag (Fig. 8) og Kl. 3 Eftermiddag (Fig. 9). Resultatet er:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
6 a. m.	.84	.63	.28	— .06	— .26	— .22	— .20	— .20
3 p. m.	.84	.45	.06	— .21	— .38	— .50	— .50	— .51
	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}	B_{16}
6 a. m.	— .16	— .10	.05	.02	.04	— .25	— .46	— .51
3 p. m.	— .49	— .26	.08	.07	— .05	— .07	— .16	— .47
	B_{17}	B_{18}	B_{19}	B_{20}	B_{21}	B_{22}	B_{23}	B_{24}
6 a. m.	— .50	— .54	— .58	— .45	.11	.56	.87	1.00
3 p. m.	— .57	— .62	— .36	— .02	.41	.72	.93	1.00



$i = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1876	5	6	+ 0	- 2	2	- 0	- 3	- 2	5	6	9	8
1877	- 9	- 1	1	0	5	5	6	10	10	16	12	13
1878	- 4	- 6	- 2	2	3	- 2	0	- 2	- 2	- 5	- 8	- 7
1879	9	14	11	3	- 4	- 12	- 12	- 10	- 5	- 5	- 6	- 3
1880	9	15	23	15	4	- 4	- 18	- 28	- 23	- 13	- 10	- 3
1881	- 6	- 6	- 5	- 9	- 6	- 5	- 1	- 2	- 3	- 3	- 5	- 2
1882	4	1	2	4	8	1	- 2	- 5	- 4	- 3	- 2	- 2
1883	- 0	- 6	- 1	2	2	5	9	6	9	9	8	5
1884	1	- 3	- 0	5	5	6	- 1	2	7	5	2	- 1
1885	- 2	- 4	- 11	- 15	- 14	- 11	- 9	- 3	3	8	8	4
1886	14	10	1	- 9	- 20	- 20	- 17	- 16	- 1	4	10	13
1887	11	5	- 2	- 4	- 6	- 7	- 7	- 4	1	5	11	3
1888	- 10	- 3	- 2	5	6	6	- 1	- 6	- 7	- 12	- 4	1
1889	- 3	- 4	5	6	12	14	20	13	6	- 2	- 10	- 16
1890	9	8	13	15	10	7	4	11	9	0	- 5	- 7
1891	0	- 1	- 1	- 1	1	8	12	12	11	8	2	4
1892	- 10	- 14	- 16	- 17	- 18	- 8	- 4	2	3	6	7	- 1
1893	- 8	- 8	- 4	- 4	5	4	- 2	- 5	- 5	- 1	2	2
1894	- 1	1	- 3	- 4	- 6	- 1	- 1	0	- 0	- 2	5	6
1895	- 11	- 12	- 9	1	5	2	4	5	- 2	- 4	2	4
1896	4	6	3	3	5	3	1	5	6	11	7	4
1897	- 2	- 4	7	13	17	13	23	12	3	- 4	- 11	- 15
1898	- 4	- 3	+ 0	8	12	6	+ 0	1	- 2	- 8	- 5	- 2
1899	- 11	- 5	2	5	13	13	6	4	0	- 7	- 5	- 2
1900	3	3	- 5	- 1	- 4	- 4	1	5	4	9	8	5
1901	2	4	- 4	- 6	- 5	0	- 6	- 5	- 11	- 5	- 1	5
1902	- 2	- 8	- 11	- 9	- 7	2	4	- 4	- 10	- 6	- 5	1
1903	7	7	2	1	- 7	- 7	- 4	3	0	- 3	- 6	- 4
1904	- 8	- 2	- 1	- 3	- 4	4	10	7	4	1	- 2	4
1905	16	11	6	- 6	- 16	- 17	- 12	- 6	- 5	- 6	- 8	- 13

Bindingen er i dette Tilfælde ikke saa stærk som i det forrige, hvilket ses ved at sammenligne Værdierne for Baandene. Endvidere ser man af Fig. 8 og 9, at Bindingen her har en temmelig sammensat Karakter, men dette staar i naturlig Forbindelse med selve det iagttagne Fænomen, som er af en ret indviklet Beskaffenhed. Der er nemlig ogsaa i dette Tilfælde — omend ikke i saa høj en Grad som i det foregaaende — en vis Sammenhæng imellem Gangen i Afvigelserne og selve det iagttagne Fænomen; saaledes ser man, at for Eksempel Afvigelserne for 1880 og 1889 viser 2

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
6	— 2	— 3	— 4	— 5	— 2	— 1	— 5	— 7	— 6	— 5	1	1876
7	13	14	7	0	— 7	— 17	— 13	— 14	— 14	— 21	— 21	1877
— 17	— 17	— 12	6	12	19	17	14	6	7	1	3	1878
0	9	15	7	7	— 6	— 5	— 8	0	— 2	0	5	1879
10	19	26	24	11	2	— 6	— 10	— 16	— 13	— 9	— 3	1880
5	12	12	8	11	4	7	1	+ 0	— 1	— 2	— 4	1881
— 3	1	— 5	— 1	1	4	3	— 1	— 1	1	— 1	3	1882
8	1	— 7	— 5	— 9	— 10	— 10	— 7	— 5	— 3	— 2	— 2	1883
— 5	— 8	— 7	— 12	— 11	— 9	3	2	— 1	2	9	11	1884
7	5	2	2	1	5	— 4	2	7	8	9	1	1885
10	6	0	— 1	— 8	— 7	— 2	2	7	7	5	7	1886
— 5	— 8	— 12	— 12	— 13	— 3	0	3	5	9	12	10	1887
11	11	14	+ 0	— 3	4	5	8	6	— 3	— 10	— 14	1888
— 21	— 27	— 30	— 19	4	7	15	11	9	6	2	0	1889
— 5	— 9	— 10	— 12	— 18	— 14	— 11	— 10	0	2	11	8	1890
— 1	— 5	— 11	— 10	— 11	— 4	— 5	— 8	— 1	— 3	+ 0	— 4	1891
— 7	— 10	— 2	5	11	15	17	17	15	9	4	+ 0	1892
5	9	16	15	6	0	7	1	— 3	— 9	— 11	— 12	1893
7	12	5	5	— 1	— 7	— 12	— 4	— 2	3	3	1	1894
6	9	8	3	8	6	2	— 3	— 5	— 4	— 8	— 11	1895
4	— 3	— 8	— 11	— 13	— 12	— 7	— 7	— 7	— 1	3	7	1896
— 20	— 17	— 13	— 1	0	— 3	— 1	2	4	2	— 3	— 4	1897
7	7	9	12	9	9	2	— 8	— 17	— 14	— 9	— 7	1898
— 2	1	8	8	15	8	— 0	— 4	— 8	— 10	— 12	— 13	1899
3	— 5	— 9	— 10	— 3	3	+ 0	2	2	— 7	— 4	4	1900
2	5	10	— 1	— 7	— 8	— 1	4	— 1	8	9	8	1901
1	0	2	2	10	11	15	9	9	2	1	1	1902
— 5	— 2	— 5	— 4	— 8	— 8	— 13	3	11	15	13	10	1903
— 0	4	3	9	6	2	1	— 2	— 8	— 11	— 8	— 7	1904
— 11	— 10	— 10	— 9	— 2	— 0	+ 0	12	20	22	22	21	1905

Maxima og 2 Minima, der findes i Nærheden af de Steder, hvor Lufttrykkets daglige Periode har enten Maximum eller Minimum. Der maa altsaa findes Aarsager, der virker paa en lignende Maade, som Skyetheden ved Temperatures daglige Periode. Imidlertid vil det ses, at Gangen i Afvigelserne for adskillige Aars Vedkommende er væsentlig anderledes.

Ved de undersøgte daglige Perioder for Temperatur og Lufttryk viste Bindingen nogle karakteristiske Træk, der neppe vil findes i de aarlige Perioder, nemlig at Bindingen strækker sig over hele Perioden, og at der fore-

kommer negative Baand. Ved Undersøgelsen af Temperaturen aarlige Periode for København viser det sig saaledes, at der ganske vist kan paavises Baand mellem Iagttagelser, som er adskilt ved et Interval af flere Maaneder, men ikke mellem Iagttagelser, som er adskilt ved et Interval af et halvt Aar, og endvidere har jeg ikke kunnet paavise negative Baand med nogenlunde store numeriske Værdier.

Til et lignende Resultat kommer *V. Willaume-Jantzen*¹⁾, der gaar frem paa følgende Maade. Aaret inddeles i de almindelige fire meteorologiske Aarstider, og det undersøges derpaa, om der for Eksempel efter en varm Vinter er fulgt et varmt eller et koldt Foraar o. s. v. Til Udgangspunkt tages kun de Aarstider, der har været mindst 1° for varme eller for kolde, medens den følgende Aarstid kaldes varm eller kold uden Hensyn til, hvor lille Afvigelsen har været.

Resultatet gives i følgende Tabel:

	Antal Tilfælde	Næste Aarstid	
		varm	kold
Efter en varm Vinter	33	70 %	30 %
— et varmt Foraar	26	73 %	27 %
— en varm Sommer	18	78 %	22 %
— et varmt Efteraar	20	60 %	40 %
Efter en kold Vinter	30	27 %	73 %
— et koldt Foraar	24	37 %	63 %
— en kold Sommer	26	27 %	73 %
— et koldt Efteraar	22	41 %	59 %

Man ser heraf, at der overalt er en tydelig positiv Binding, men iøvrigt er Antallet af Tilfælde for lille til, at der kan drages videre Slutninger om Baandenes Styrke. — *Willlaume-Jantzen* undersøger dernæst, om der for Eksempel efter en varm Vinter følger en varm eller en kold Sommer o. s. v. Resultatet er:

Varm Vinter efterfulgt af varm Sommer; 45 % af 33 Tilfælde.
 — Sommer — — Vinter; 53 % - 18(?) —
 Kold Vinter efterfulgt af kold Sommer; 60 % - 30 —
 — Sommer — — Vinter; 50 % - 26(?) —

¹⁾ »Meteorologiske Observationer i Kjøbenhavn«. Kbh. 1896. (Side 22).

Dette Resultat er omtrent saaledes, som man maatte vente, det vilde blive, naar de undersøgte Iagttagelsesværdier var frie af hverandre. Baandene kan herefter ikke have en kendelig Styrke, naar Afstanden mellem Iagttagelserne er større end tre Maaneder.

Vi skal nu undersøge disse Forhold lidt nærmere og benytter atter en Opstilling af Materialet efter vort Skema, der imidlertid viser en anden Sammenhæng mellem Iagttagelserne end ved de daglige Perioder. Tager vi saaledes de i § 7 omtalte Iagttagelser for Temperaturen's aarlige Periode i København, faar vi 365 lodrette og 124 vandrette Rækker:

$$\begin{array}{ccccccccccc} o_1^{(1)}, & o_2^{(1)}, & o_3^{(1)} & \dots & o_i^{(1)} & \dots & o_{365}^{(1)} \\ o_1^{(2)}, & o_2^{(2)}, & o_3^{(2)} & \dots & o_i^{(2)} & \dots & o_{365}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_1^{(v)}, & o_2^{(v)}, & o_3^{(v)} & \dots & o_i^{(v)} & \dots & o_{365}^{(v)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o_1^{(124)}, & o_2^{(124)}, & o_3^{(124)} & \dots & o_i^{(124)} & \dots & o_{365}^{(124)} \end{array}$$

men i Modsætning til, hvad der fandt Sted ved de daglige Perioder, følger alle disse Værdier umiddelbart efter hverandre (bortset fra nogle Spring i de ældste Iagttagelser), idet for Eksempel $\phi_1^{(v)}$ svarer til 1. Jannar i et vist Aar, og $\phi_{365}^{(v-1)}$ til 31. December i det foregaaende Aar.

Vi undersøger først det for Beregningen af Middelfejlene vigtige Spørgsmaal, om Værdierne i de enkelte lodrette Rækker er frie af hverandre. Der er dog kun foretaget en Optælling af Fortegnspermanenserne for Afvigelserne i hver femte Række, altsaa ialt 73 Optællinger jævnt fordelt over hele Perioden. Middeltallet af Permanenserne bliver 61.47 og Middelfejlen for den enkelte Række ± 6.3 ; da der er ialt 123 Permanenser og Variationer, er det forventede Antal 61.5 ± 5.5 , og vi er derfor berettiget til at betragte de undersøgte Iagttagelser som frie af hverandre¹⁾.

I de lodrette Rækker har altsaa Værdierne de samme Egenskaber (med Hensyn til Bindingen) som i de daglige Perioder. Derimod gælder det ikke om Skemaet for de aarlige Perioder, at hver enkelt Værdi er fri af alle de andre med Undtagelse af dem, der findes i samme vandrette Række, thi her er i alt Fald nogle af Værdierne i det ene Aars December Maaned bundet til nogle af Værdierne i det næste Aars Januar. Vil vi nu af alle Iagttagelserne i de enkelte vandrette Rækker danne lineære Udtryk, bliver Værdierne af disse Udtryk ikke frie af hverandre. At der her dog kun er Tale om en svag Binding, kan man se af de enkelte Aars Middeltemperaturer, der faaes ved at danne Middeltal af alle Værdier i hver enkelt vandret Række; Afgivelserne for de paa hianden følgende Aar danner nemlig 69 Fortegns-

¹ Det bør dog bemærkes, at Fejlkurven øjensynlig ikke er af typisk Form, idet den har tydeligt Minimum for Antallet 62 og udprægede Maxima for 58 og 65.

permanenser og 54 Fortegnsvariationer, medens det forventede Antal af Permanenser eller Variationer som tidligere nævnt er $61\frac{1}{2} \pm 5\frac{1}{2}$, naar Værdierne er frie af hverandre.

Til Oplysning om Bindingens Karakter er der beregnet en Serie Baand med Iagttagelserne for den 2. Februar som Udgangspunkt. Resultatet er:

B_{-1}	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_6	B_8
.85	1	.84	.63	.44	.45	.40	.22
B_{10}	B_{15}	B_{20}	B_{25}	B_{30}	B_{35}	B_{40}	B_{45}
.24	.21	.07	.08	.09	.20	.05	.03.

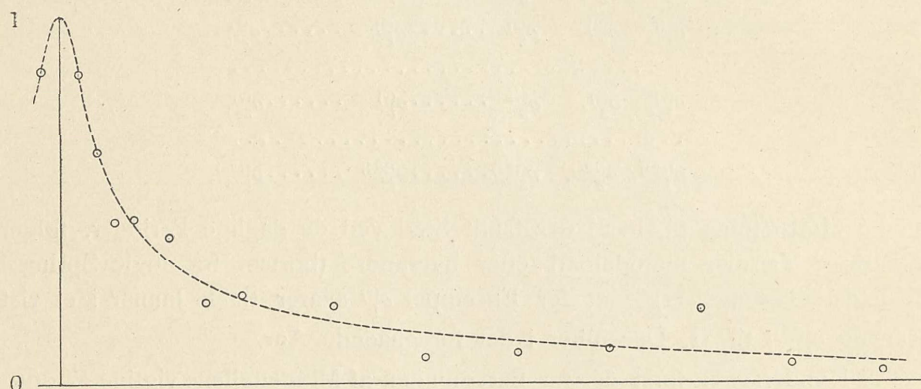


Fig. 10.

I Overensstemmelse med Definitionen af B_q er B_{-1} her Baandet mellem 2. og 1. Februar. — Af ovenstaaende Værdier eller af Fremstillingen Fig. 10 ser man, at Bindingen her nærmest kan siges at være af asymptotisk Karakter.

Til selve den Udjevning af de periodiske Iagttagelsesrækker, der senere skal foretages, vil der ikke fordres nogen Beregning af Baandene, men det er heldigt, at man har Kendskab til Bindingens Karakter, naar man skal kritisere de opnaaede Resultater. Overhovedet gaar denne Del af vor Undersøgelse kun ud paa at finde, hvilken Betydning Bindingen har for vore Opgaver, idet vi navnlig har Opmærksomheden henvendt paa, hvilke Fejl man kan begaa, naar man ikke tager Hensyn til den, og i hvilke Retninger Resultatet af vore Opgaver vil adskille sig fra Resultatet af Opgaver med indbyrdes frie Værdier. Men dernæst sørges der for, at Opgaverne lægges til Rette saaledes, at der ikke under selve Udjevningsregningen bliver Anvendelse for Regneregler, som specielt gælder for bundne Værdier. — Det samme kan siges om Indholdet af den følgende Paragraf.

§ 11.

Regning med bundne Iagttagelser og nogle Følger af Bindingen.

Vi havde foran (Side 43), at naar

$$f^{(v)} = a_1 o_1^{(v)} + a_2 o_2^{(v)} + a_3 o_3^{(v)} + a_4 o_4^{(v)} + \dots,$$

blev

$$\begin{aligned} (s_0 - 1)\lambda_2(f) = & a_1^2 [\varepsilon_1^2] + a_2^2 [\varepsilon_2^2] + a_3^2 [\varepsilon_3^2] + a_4^2 [\varepsilon_4^2] + \dots \\ & + 2a_1 a_2 [\varepsilon_1 \varepsilon_2] + 2a_2 a_3 [\varepsilon_2 \varepsilon_3] + 2a_3 a_4 [\varepsilon_3 \varepsilon_4] + \dots \\ & + 2a_1 a_3 [\varepsilon_1 \varepsilon_3] + 2a_2 a_4 [\varepsilon_2 \varepsilon_4] + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

Denne Formel kan simplificeres meget, naar man tør betragte Iagttagelserne som lige gode, og navnlig, naar tillige Baandene mellem Iagttagelser, der er adskilt ved lige store Intervaller, tør betragtes som ens. Disse Betingelser vil i Almindelighed være opfyldt med god Tilnærmelse for vort Materiales Vedkommende, naar Funktionen kun strækker sig over nogle faa Iagttagelser. Vi sætter da

$$\begin{aligned} [\varepsilon_1^2] &= [\varepsilon_2^2] = [\varepsilon_3^2] = \dots = [\varepsilon^2], \\ B_1 &= \frac{[\varepsilon_1 \varepsilon_2]}{[\varepsilon^2]} = \frac{[\varepsilon_2 \varepsilon_3]}{[\varepsilon^2]} = \frac{[\varepsilon_3 \varepsilon_4]}{[\varepsilon^2]} = \dots \\ B_2 &= \frac{[\varepsilon_1 \varepsilon_3]}{[\varepsilon^2]} = \frac{[\varepsilon_2 \varepsilon_4]}{[\varepsilon^2]} = \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

og da

$$\frac{[\varepsilon^2]}{s_0 - 1} = \lambda_2(o),$$

faar vi

$$\lambda_2(f) = \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots \\ + 2B_1(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots) \\ + 2B_2(a_1 a_3 + a_2 a_4 + \dots) \\ + 2B_3(a_1 a_4 + \dots) \\ + \dots \end{array} \right\} \lambda_2(o).$$

Med denne Fejllov som Udgangspunkt skal vi nu betragte nogle Følger af Bindingen og fremdrage nogle af de Fejl, som begaas, naar man behandler bundne Iagttagelser, som om de var frie.

Først kan vi ved et simpelt Eksempel vise, at Elementudjevning ved Hjælp af Normalligningerne ikke tør anses for at være rigtig, naar Iagttagelserne er bundet til hverandre. Lad os antage, at der er forelagt Iagt-

tagelserne o_1 , o_2 og o_3 , og at de udjvnede Værdier ifølge Teorien skal tilfredsstille Ligningerne

$$u_1 = x - y,$$

$$u_2 = x,$$

$$u_3 = x + y.$$

Vi bestemmer først x ved Hjælp af mindste Middelfejls Princip, idet vi ligesom tidligere i § 4 sætter

$$x = \alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + \alpha_3 o_3,$$

og faar da de to Betingelsesligninger

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

$$-\alpha_1 + \alpha_3 = 0,$$

eller

$$\alpha_2 = 1 - 2\alpha_1, \text{ og } \alpha_3 = \alpha_1,$$

idet vi betragter α_1 som uafhængig variabel.

Vi har nu under de givne Forudsætninger

$$\lambda_2(x) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2B_1(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3) + 2B_2\alpha_1\alpha_3)\lambda_2(o)$$

og finder heraf ved Hjælp af Minimumsbetingelsen for $\lambda_2(x)$, at

$$x = \frac{(1 - B_1)o_1 + (1 - 2B_1 + B_2)o_2 + (1 - B_1)o_3}{3 - 4B_1 + B_2}.$$

Sætter man her $B_1 = B_2 = 0$, faar man den Værdi af x , der svarer til frie Iagttagelser, nemlig $x = \frac{1}{3}(o_1 + o_2 + o_3)$; den samme Værdi faar man iøvrigt ogsaa, naar blot $B_1 = B_2$.

Vi kan paa samme Maade finde Elementet y , og det viser sig da, at dette er det samme for bundne som for frie Iagttagelser, nemlig

$$y = -\frac{1}{2}o_1 + \frac{1}{2}o_3.$$

Benytter vi eksempelvis de Værdier for Baandene, som vi fandt ved Temperatures aarlige Periode (Side 54), og sætter med en lille Afrunding $B_1 = .85$ og $B_2 = .65$, bliver

$$x = \frac{2}{3}o_1 - \frac{1}{3}o_2 + \frac{2}{3}o_3,$$

og

$$u_1 = \frac{1}{10}(11o_1 - 2o_2 + o_3); \quad \lambda_2(u_1) = .995\lambda_2(o);$$

$$u_2 = \frac{1}{10}(6o_1 - 2o_2 + 6o_3); \quad \lambda_2(u_2) = .820\lambda_2(o);$$

$$u_3 = \frac{1}{10}(o_1 - 2o_2 + 11o_3); \quad \lambda_2(u_3) = .995\lambda_2(o).$$

Havde vi derimod benyttet Normalligningernes Løsning, vilde Resultatet i dette Tilfælde være blevet

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{8}(5o_1 + 2o_2 - o_3); \quad \lambda_2(u_1) = 1.031\lambda_2(o); \\ u_2 &= \frac{1}{8}(o_1 + o_2 + o_3); \quad \lambda_2(u_2) = .856\lambda_2(o); \\ u_3 &= \frac{1}{8}(-o_1 + 2o_2 + 5o_3); \quad \lambda_2(u_3) = 1.031\lambda_2(o). \end{aligned}$$

Da Middelfejlene for alle de udjvnede Værdier i det sidste Tilfælde er større end i det første, tør man herefter ikke betragte Udjevning ved Hjælp af Normalligningerne som berettiget, naar Iagttagelserne er bundet til hverandre.

Vi skal dernæst betragte Bindingens Betydning for Fejllove for Summer og Differenser af to paa hinanden følgende Iagttagelser, altsaa for

$$f^{(v)} = o_i^{(v)} \pm o_{i+1}^{(v)},$$

hvor man — fremdeles under Forudsætning af, at man kan betragte Iagttagelserne som lige gode — har

$$\lambda_2(f) = (2 \pm 2B_1)\lambda_2(o).$$

Baandene mellem nærliggende Iagttagelser er i Reglen positive (der maa undtages ganske enkelte Tilfælde, som for Eksempel Baandene i Nærheden af Vendepunkterne ved Temperaturens daglige Periode, men der er Baandene svage). Middelfejlen for en Sum af saaledes bundne Iagttagelser bliver derfor større og for en Differens mindre end ved frie Iagttagelser. Benytter vi saaledes Værdien $B_1 = .85$, faar vi henholdsvis $3.7\lambda_2(o)$ og $0.3\lambda_2(o)$, medens frie Iagttagelser i begge Tilfælde giver $2\lambda_2(o)$.

Hvad der her gælder for en Sum af 2 Addender, gælder ogsaa for en Sum af flere. Lad os saaledes betragte Middeltallet

$$u_2 = \frac{1}{3}(o_1 + o_2 + o_3),$$

der ovenfor haves som Udtryk for den udjvnede Værdi af o_2 . Her er

$$\lambda_2(u_2) = \frac{1}{9}(3 + 4B_1 + 2B_2)\lambda_2(o),$$

der med de benyttede Værdier af Baandene gav $\lambda_2(u_2) = .86\lambda_2(o)$, medens frie Iagttagelser giver $\lambda_2(u_2) = \frac{1}{3}\lambda_2(o)$; endnu mere ugunstigt bliver Resultatet, naar man tager et Værdisæt som $B_1 = .96$, $B_2 = .91$ (Side 46), idet man faar $\lambda_2(u_2) = .96\lambda_2(o)$. Allerede heraf kan man skønne, at den Forbedring, som Værdierne kan faa ved en Udjevning, er mindre, naar Iagttagelserne er bundne, end naar de er frie.

Med Hensyn til Middelfejlen for en Differens saa vi, at Sagen stiller sig gunstigere for bundne end for frie Iagttagelser. Lad os gaa et Skridt videre og betragte anden Differens:

$$\Delta^2 o_2 = o_1 - 2o_2 + o_3,$$

hvoraf man faar

$$\lambda_2(\Delta^2 o_2) = (6 - 8B_1 + 2B_2)\lambda_2(o).$$

Med de benyttede Værdisæt faar vi

B_1	B_2	$\lambda_2(\Delta^2 o_2)$
0	0	$6 \lambda_2(o)$
·85	·65	$·5 \lambda_2(o)$
·96	·91	$·14 \lambda_2(o)$

Denne Egenskab hos Differenserne af bundne Iagttagelser, nemlig at de har forholdsvis smaa Middelfejl, belyser et Omraade, hvor der idelig gøres Fejlslutninger. Fremstiller man en Række frie eller bundne Iagttagelser grafisk og forbinder Punkterne med en Kurve, der er saa jevn som mulig, vil Middelfejlen paa 2den Differens være en Art Maal for denne Kurves Mangel paa Jevnhed. En saadan Kurve vil derfor blive meget jevnere for bundne end for frie Iagttagelser, naar Middelfejlen paa selve Iagttagelserne er den samme i begge Tilfælde. Omvendt vil man ved Betragtning af saadanne grafiske Fremstillinger af bundne Iagttagelser komme til den Antagelse, at Middelfejlene for Iagttagelserne er meget mindre, end de i Virkeligheden er, saafremt man uden tilstrækkelig Kritik benytter sin Erfaring fra Fremstillinger af frie Iagttagelser. Naar nu tilmed en saadan Betragtning ikke kan støttes eller ikke bliver støttet af en Beregning af Iagttagelsernes Middelfejl, kan dette give — og har givet — Anledning til mange lidet nyttige Spekulationer over den teoretisk rigtige Kurves Form. I den følgende Paragraf, der handler om sekundære Minima og Maxima i Temperaturen's aarlige Periode, vil denne Sag blive nærmere omtalt.

Af det foregaaende vil man kunne indse for det første, at det er nødvendigt at tage Hensyn til Bindingen, og for det andet, at det vil blive besværligt (ved vore Opgaver uoverkommeligt) at foretage Udjevning paa Grundlag af en direkte Anvendelse af de bundne Iagttagelsers Fejllove. Vore Bestræbelser gaar derfor ud paa at omgaa Vanskelighederne. Og det viser sig da, at vi kan nøjes med at beregne dels Middelfejlene for de forelagte Værdier og dels et vist Antal af Konstanterne i den trigonometriske Udjævningsrække, a_p og b_p , samt deres Middelfejl.

Beregningen af Middelfejlene for de forelagte Værdier kan som omtalt udføres ganske som ved frie Iagttagelser, naar vi opstiller vort Materiale efter det i § 10 meddelte Skema, hvor enhver Værdi er fri af alle de andre Værdier i samme lodrette Linie.

Angaaende Beregningen af $\lambda_2(a_p)$ og $\lambda_2(b_p)$ er der derimod noget at bemærke. Lad os først betragte de daglige Perioder, hvor Værdierne i enhver af de vandrette Rækker er frie af Værdierne i de andre vandrette

Rækker. Vi kunde da beregne for Eksempel a_p for hver af de vandrette Rækker efter Formlen

$$a_p = (a_1 \cos p\theta + a_2 \cos 2p\theta + \dots + a_{n-1} (n-1)p\theta) \cdot \frac{2}{n},$$

og da de saaledes beregnede Værdier, $a'_p, a''_p, \dots, a_p^{(s_0)}$, i Overensstemmelse med vore Forudsætninger er frie af hverandre, kunde vi dernæst paa almindelig Maade beregne $\lambda_2(a_p)$. Men denne Fremgangsmaade vil blive meget besværlig, naar Materialet omfatter mange Aar, og da det i Almindelighed er tilstrækkeligt at finde $\lambda_2(a_p)$ med to gode Cifre, kan man dele Materialet i Grupper af passende Størrelse og blot beregne a_p af Middeltallene for hver af disse Grupper. Saaledes deler vi det i § 9 omtalte Materiale til Bestemmelse af Lufttrykkets daglige Periode i 6 Grupper og faar for Eksempel

	a_4	b_4
1876—1880	·0317	·0213
1881—1885	·0438	·0294
1886—1890	·0380	·0393
1891—1895	·0430	·0323
1896—1900	·0518	·0294
1901—1905	·0358	·0429
Middel	·0407	·0324.

Heraf faar man $\lambda_2(a_4) = \cdot 05835$ og $\lambda_2(b_4) = \cdot 05325$. (Til Kontrol kan man beregne Konstanterne af det samlede Materiale; her faas $a_4 = \cdot 0406$ og $b_4 = \cdot 0325$).

For de aarlige Perioders Vedkommende saa vi, at de første og de sidste Værdier i hver af de vandrette Rækker var bundet til henholdsvis den foregaaende og den efterfølgende Række, og som Følge deraf kunde der paavises nogen Binding imellem Middeltallene $a'_0, a''_0, \dots, a_0^{(s_0)}$. Men deler vi ogsaa her Materialet i Grupper, opnaar vi foruden Lettelse i Beregningen af Elementernes Middelfejl desuden næsten fuldstændig Frigørelse, thi det er indlysende, at den Binding, der bestaar for Eksempel mellem de sidste Værdier fra Aaret 1900 og de første fra 1901, kun vil gøre sig meget svagt gældende imellem Middeltallene for Grupper som 1896—1900 og 1901—1905.

Naar vi ved disse Middelfejlsberegninger tager fornødent Hensyn til Bindingen, vil det vise sig, at vi kan udføre selve Udjevnsregningen efter de samme Regneregler, som vi vilde benytte, hvis Iagttagelserne var frie.

§ 12.

Sekundære Minima og Maxima i Temperaturens aarlige Periode.

Som foran nævnt benytter man altid ved Udjevning af aarlige Perioder Normalpladser, der mindst strækker sig over fem Døgn. Denne Fremgangsmaade vil kun være berettiget, dersom den sande Funktion kan betragtes som lineær i de benyttede Intervaller. Dersom de sekundære Minima og Maxima, der træder frem i lagttagelsesværdierne, skulde betyde, at den sande Funktion besad tilsvarende Ejendommeligheder, turde man derfor ikke anvende Normalpladsmetoden, men man maatte foretage Udjevningen med Værdierne for de enkelte Dage. Det er derfor nødvendigt, at vi nærmere undersøger denne Sag, der desuden har direkte meteorologisk Interesse.

I Meteorologiens Historie spiller navnlig Spørgsmaalet om »Kuldetilbagefald« i Maj Maaned en stor Rolle. Det er sikkert Sagens økonomiske Betydning, der har bevirket, at »Fænomenet« har vakt Opmærksomhed. Saaledes siger *van Bebbler*¹⁾: »Schon von Alters her hat man den Kälterückfäll im Mai eine besondere Aufmerksamkeit zugewandt, viel mehr als der weit grösseren Temperaturerniedrigung, welche um Mitte Juni stattzufinden pflegt. Diese Thatsache hat hauptsächlich darin ihren Grund, dass die Kälterückfälle im Mai nicht selten für die in der ersten Entwicklung befindliche Vegetation, zumal wenn diese durch eine warme Zeitepoche gefördert wurde, höchst verderblich sind, während dagegen die Rückfälle im Juni fast stets sich über dem Gefrierpunkte vollziehen und weit seltener für die Pflanzenwelt schlimme Folgen haben. Ganz besonders aber sind es die Tage zu Anfang der zweiten Decade des Mai, denen der Landmann mit banger Sorge entgegensieht, und welche der Volksmund im Norden an die »Eisheiligen« oder »gestrengen Herren« Mamertus, Pancratus und Servatius (10., 11., 12. Mai) und im Süden an Pancratus, Servatius und Bonifacius (11., 12., 13.) geknüpft hat. In Frankreich sind diese Tage unter der Bezeichnung »les trois saints de glace« bekannt«.

I øvrigt undersøger *van Bebbler* ikke, om det omtalte Fænomen virkelig eksisterer — han forsøger at forklare det — men henviser til, at *Dove* har vist, at Kuldetilbagefaldene i Maj gennemsnitlig falder paa de angivne Dage. *Wilhelm von Bezold*²⁾, der ogsaa forsøger at forklare Fænomenet, henviser ligeledes til *Dove* og siger, at han har eftervist, at disse Kuldetilbagefald i Middel virkelig indtræffer paa de Dage, som Folketroen har anvist dem. Da *Dove* er den første, som har givet Folketroen Støtte ved en Undersøgelse i videnskabelig Form, og da mangfoldige Forfattere efter ham lige op til vore Dage har accepteret hans Resultater eller hans Fremgangsmaade,

¹⁾ *Dr. van Bebbler*: »Die gestrengen Herren«. Meteorologische Zeitschrift 1883. S. 145.

²⁾ *W. von Bezold*: »Die Kälterückfälle im Mai«. Abh. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. XIV. Bd. II. Abth.

vil det være naturligt, at vi undersøger, hvorledes *Dove* er kommet til det Resultat, at det omtalte sekundære Minimum paa Temperaturkurven virkelig eksisterer.

Her maa der imidlertid indskydes en Bemærkning. I ethvert foreliggende Materiale til Bestemmelse af meteorologiske Elementers Perioder kan der paavises Ejendommeligheder, og man kan naturligvis godt sige, at disse Ejendommeligheder eksisterer i det Tidsrum, som det paagældende Materiale omfatter. Men Spørgsmaalet er her, om der er Grund til at antage, at Ejendommelighederne kun skyldes »tilfældige« Afvigelser, eller om det maa antages, at de ogsaa vil fremtræde i Middeltallene for meget lange Iagttagelsesrækker. Kun hvis dette sidste maa antages at være Tilfældet, siger vi her, at den paagældende Ejendommelighed virkelig eksisterer.

Vi gaar derefter over til *Doves* Afhandling¹⁾. Efter at have meddelt og diskuteret et omfattende Talmateriale siger *Dove* heri (S. 140): »Aus der oben mitgetheilten Tafel der fünftägigen Mittel geht deutlich hervor, dass in Russland vom 8. zum 13. Mai kein Rückfall sich zeigt, dass dieser erst in Curland hervortritt, sich aber vorzugsweise deutlich im nördlichen Deutschland zeigt und dann über Belgien nach Frankreich und Süd-England hinübergreift. Wir wollen daher zunächst die Erscheinung beobachten, wo sie am entschiedensten sich geltend macht«. *Dove* finder derefter (S. 145), at Fænomenet fremtræder fuldstændig regelmæssigt i Midtyskland.

Da der til *Doves* Disposition kun stod faa Iagttagelsesrækker, der var tilstrækkelig lange til, at han kunde bruge Middeltallene for de enkelte Dage, benyttede han for en stor Del Femdøgn til sine Undersøgelser. For hvert enkelt Aars Maj Maaned er der beregnet Middeltallet for Femdøgnet fra den 1. til den 5., fra den 6. til den 10. o. s. v. Der er altsaa oprettet Normalpladser den 3., 8., 13., 18., 23. og 28. Maj. Lad os kalde disse Værdier $o_3, o_8 \dots o_{28}$. *Dove* danner derefter Differenserne $o_8 - o_3, o_{13} - o_8, o_{18} - o_{13}$, o. s. v., og naar disse Differenser faar negative Værdier, noteres det som et Tilbagefald. Dersom den sande Temperaturkurve er glat, vil der for Maj Maanedes Vedkommende, hvor Temperaturen i Hovedsagen er stigende, være større Sandsynlighed for, at disse Differenser bliver positive end for, at de bliver negative. Da Undersøgelsen drejer sig om Dagene den 11., 12. og 13. Maj, er det Differenserne $o_{13} - o_8$ det kommer an paa, og naar *Dove* for Eksempel finder, at disse Differenser for Breslaus Vedkommende bliver negative 30 Gange i 66 Aar, saa tages dette som et Bevis for Kuldetilbagefaldets Eksistens.

Denne Bevisførelse, som mange efter *Dove* har benyttet, er om just ikke urigfig saa dog utilstrækkelig. Et sekundært Minimum i Middeltallene

¹⁾ »Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin«. Aus dem Jahre 1856. Berlin 1857. S. 121—192.

fremkommer nemlig ved, at der i de enkelte Aar er en vis Overvægt — enten med Hensyn til Antal eller med Hensyn til Amplitude — af sekundære Minimer, og en almindelig Paavisning af, at Minimet findes i et vist Antal af de enkelte Aar, har derfor ikke mere Beviskraft end en Betragtning af Middeltallene. Vil man føre et Bevis, maa man undersøge, om Sandsynligheden for, at den sande Temperaturkurve skulde være glat, er saa ringe, at man maa antage, at det sekundære Minimum virkelig eksisterer.

Til en saadan Undersøgelse vil vi benytte *Doves* Materiale for Breslau; som nævnt omfatter det 66 Aar (1791—1856). Vi anfører først Summerne for Differenserne mellem de benyttede Normalpladser i Maj Maaned:

$o_8 - o_3$	$o_{13} - o_8$	$o_{18} - o_{13}$	$o_{23} - o_{18}$	$o_{28} - o_{23}$
56.90	— 7.44	53.74	59.69	10.51

Summen af Differenserne $o_{13} - o_8$ viser her ganske vist en paafaldende Værdi, men det maa dog bemærkes, at hvis man udskyder blot et enkelt Aar, nemlig 1825, der viser følgende Differenser:

1.60	— 8.42	·36	5.34	— ·58,
------	--------	-----	------	--------

bliver Resultatet

55.30	·98	53.38	54.35	11.09,
-------	-----	-------	-------	--------

saaledes at Summerne for de resterende Aar ikke udviser noget Tilbagefald. Naar et enkelt Aar kan have en saadan Indflydelse paa Resultatet, synes det at være umiddelbart indlysende, at selv Iagttagelser fra 66 Aar er utilstrækkelige til at paavise, at det omspurgte Fænomen virkelig eksisterer. Lad os dernæst sammenligne Middeltallene af ovenstaaende Differenser for de 66 Aar med tilsvarende Værdier taget fra en udjævnet Iagttagelsesrække. Vi faar:

Middeltal for 66 Aar ..	·86	— ·11	·81	·90	·16,
Udjævnede Værdier ...	·84	·82	·79	·75	·70,
Differenser	·02	— ·93	·02	·15	— ·54.

Nu giver en Beregning, at Middelfejlen for Middeltallet — ·11 er $\pm \cdot 36$, og Differensen — ·93 er altsaa mellem 2 og 3 Gange saa stor som Middelfejlen. Dette er imidlertid ikke tilstrækkelig Grund til at forkaste en Hypotese om, at den sande Temperaturkurve skulde være jevn, især da Perioden indeholder 73 Værdier af den betragtede Art, hvorfor man paa Forhaand maa antage, at der vil forekomme Afvigelser som de fundne.

Dersom man vil opstille den Hypotese, at den sande Temperaturkurve muligvis i det væsentlige er glat, men at den netop paa det betragtede Sted har et sekundært Minimum, kan man ikke herimod gøre en Betragtning som den ovenstaaende gældende, eftersom Middelfejlen kun har

Betydning som et Udtryk for Fejlloven for mange Værdier, men aldeles intet udsiger om Fejlen paa den enkelte Værdi. Berettigelsen af en Hypotese som den sidst opstillede vil maaske derfor ikke kunne undersøges paa et givet Tidspunkt, men dette vil kunne ske senere, thi hvis den sande Temperaturkurve ikke har et saadant sekundært Minimum, maa det gennemgaaende udviskes mer og mer i Middeltallene, efterhaanden som Iagttagelsesmaterialet forøges. Til Undersøgelse af det foran betragtede »Fænomen« har vi saaledes nu et større Iagttagelsesmateriale, end *Dove* var i Besiddelse af, og vi kan da afslutte Omtalen af denne Sag med nogle Udtalelser af *Hann*¹⁾, der refererer sig til hundredaarige Iagttagelsesrækker for Wien, Breslau og Paris: »Der Kälterückfall zu Anfang Mai (Eismänner 10. 11. 12.) tritt in den Tagesmitteln nicht auffallend hervor«, medens det med Hensyn til disse Temperaturkurvers almindelige Udseende bemærkes, at: »Manche dieser Kälterückfälle und Wärmeperioden treten zu gewissen Jahreszeiten so häufig und kräftig auf, dass sie selbst in hundertjährigen Tagesmitteln sich als scheinbar feststehende Eigentümlichkeiten des jährlichen Wärmeganges geltend machen, während im übrigen die Linie des jährlichen Temperaturverlaufes namentlich im aufsteigenden Aste wie mit Sägezähnen besetzt erscheint, so unruhig bewegt sich die Temperatur auf und ab«.

Medens vi i det foregaaende blot undersøgte et enkelt Sted i Temperaturkurven, maa vi, naar der bliver Spørgsmaal om Normalpladsernes Tilladelighed, undersøge Forholdene i hele Periodens Længde. Vi anvender hertil Resultatet af en Udjevning af Temperaturens aarlige Gang i København, hvortil der er benyttet en tidligere omtalt Iagttagelsesrække. Fig. 12 fremstiller Partiet omkring Maximet af den udjevnede Kurve og af de forelagte Værdier for hver enkelt Dag. Betegner vi Iagttagelsesværdierne for de enkelte Dage med o og de udjevnede Værdier med u , faar vi i Gennemsnit for hele Aaret $\lambda_2(o) = .076$ og $(o - u)^2 = .055$. Inddeler vi Aaret i de sædvanlige meteorologiske Aarstider, faar vi i Gennemsnit

	Vinter.	Foraar.	Sommer.	Efteraar.
$\lambda_2(o)$	.109	.075	.060	.060,
$(o - u)^2$	.074	.054	.050	.043.

Betegner vi de ubekendte Værdier af den sande Funktion med v , skal man i Gennemsnit have

$$\lambda_2(o) = (o - v)^2;$$

dersom denne Ligning ikke er rigtig, kan dette nemlig kun skyldes Usikkerheden i Bestemmelsen af $\lambda_2(o)$, og denne Usikkerhed er i dette Tilfælde forholdsvis ringe, da der til Beregningen af de enkelte Værdier af $\lambda_2(o)$ er benyttet 124 Iagttagelser²⁾.

¹⁾ »Lehrbuch der Meteorologie«, Leipzig 1906. S. 84—85.

²⁾ Det bør dog bemærkes, at $\lambda_2(o)$ kun er beregnet for hver femte Dag.

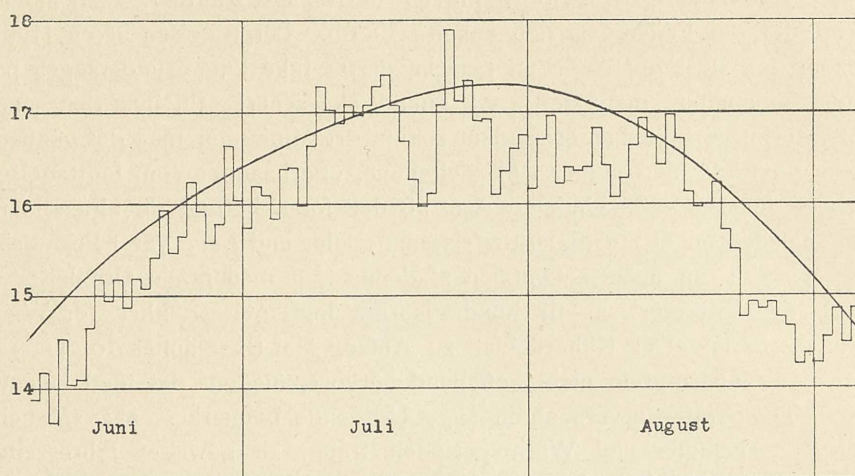


Fig. 11.

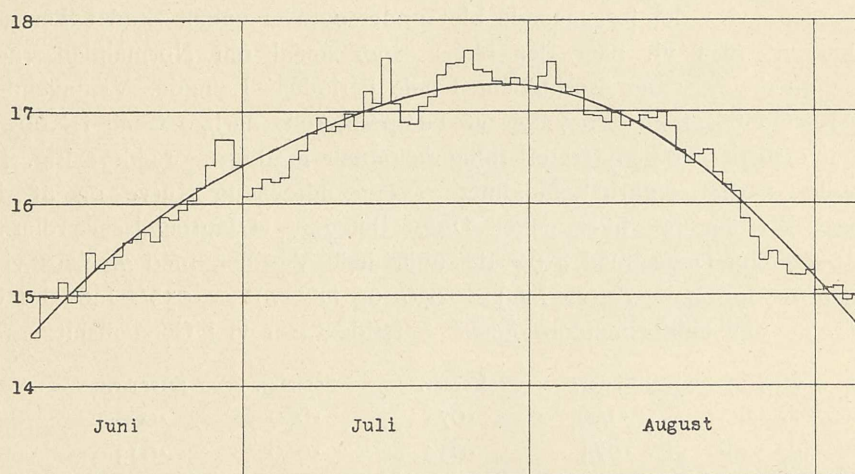


Fig. 12.

Da vi nu i Gennemsnit har

$$(o - u)^2 < \lambda_2(o),$$

og altsaa

$$(o - u)^2 < (o - v)^2,$$

maa den udjvnede Kurve gennemgaaende ligge nærmere ved Iagttagelsesværdierne end den sande Kurve. Men naar den udjvnede Kurve, som er glat, allerede har nærmet sig for meget til Iagttagelserne, er det indlysende,

at den sande Kurve ogsaa (gennemgaaende) maa være glat, eftersom det vilde være urimeligt at antage, at den skulde bugte sig ud og ind bort fra de sekundære Minima og Maxima.

Der er herefter ikke Grund til at nære Betæneligheder ved at benytte Normalpladser, uagtet man, som foran omtalt, ikke kan levere et afgørende Bevis for, at der ikke et enkelt Sted i Temperaturkurven skulde eksistere en eller anden Ejendommelighed. Men saalænge man ikke har paavist Forhold i Naturen, der kunde foraarsage Afvigelser paa bestemte Dage af Aaret, er der ingen Grund til at opstille saadanne Hypoteser. Den hele Diskussion er rejst paa Grundlag af de sekundære Minima og Maxima, der viser sig i Middeltallene af selv mangeaarige Iagttagelsesrækker, men til at forklare disse Ejendommeligheder er de enkelte Aars Afvigelser fra Middeltallene tilstrækkelige. Og den psykologiske Forklaring af, at man overhovedet har fundet et Problem paa dette Sted, turde være den simple, at man ikke har været opmærksom paa den tilstedeværende Binding, der bevirker, at Iagttagelsesrækkerne viser et andet Forløb end det, man kender fra frie Iagttagelser.

Sluttelig skal vi blot henvise til Fig. 11, hvor Værdierne for de enkelte Dage er Middeltallene for kun 25 Aar (1861—1885) af den lange Iagttagelsesrække, der er fremstillet i Fig. 12. Nogle af Ejendommelighederne i Fig. 11 genfindes i Fig. 12, men i formindsket Maalestok, medens andre Ejendommeligheder ikke genfindes eller synes forskudte. Men Hovedresultatet af en Sammenligning mellem de to Figurer bliver, at Ujevnhederne gennemgaaende er mindre for den lange Iagttagelsesrække, og det samme Resultat kommer man til, naar man foretager tilsvarende Sammenligninger indenfor andre Iagttagelsesrækker.

V.

MEKANISK METODE MED GENTAGNE UDJEVNINGER.

§ 13.

Metodens Hovedtræk.

Efter at der i det foregaaende er givet en Oversigt over Ejendommelighederne ved det Materiale, som skal behandles, og Manglerne ved de almindeligt anvendte Udjevningemetoder, skal der nu gøres et Forsøg paa at lægge den mekaniske Metode til Rette for Bestemmelsen af de meteorologiske Elementers daglige og aarlige Perioder, hvor der til Udjevning er forelagt et vist Antal ækvidistante Værdier.

Det falder naturligt at benytte de allerede anvendte Fremgangsmaader som Udgangspunkt. Vi tænker os da, at vi udjevner de forelagte Værdier efter et eller andet simpelt Regneskema, for Eksempel

$$o_i = \frac{1}{3}(o_{i+1} + o_i + o_{i-1});$$

herved opnaar vi imidlertid ikke at faa en Række af jevne Værdier, og vi gentager derfor Regningen efter det samme Skema, saaledes som det allerede er omtalt Side 38, og faar derved en ny Række af Værdier, der kan

betegnes med $o^{(2)}$. Saaledes fortsætter vi et vist Antal, v , Gange, indtil vi har faaet et Sæt af Værdier, $o^{(v)}$, der paa en eller anden Maade ses at være fuldkommen eller dog tilstrækkelig jevne.

Vi maa nu fordre, at der ikke ved selve Fremgangsmaaden indføres Fejl i Resultatet. Denne Fordring kan ogsaa udtrykkes saaledes: dersom de forelagte Værdier er fejlfrie, skal Regneoperationerne lade dem forblive uforandrede, eller: Regneoperationerne maa ikke forandre de til de forelagte Værdier svarende sande Værdier.

Betegner vi de sande Værdier med v , er den første Betingelse for, at man skal kunne bruge $o^{(v)}$ som forbedret Værdi altsaa, at man almindeligt har $v_i = v_i$. Holder vi os til det anførte Regneskema,

har man
$$o_i^{(1)} = \frac{1}{3}(o_{i+1} + o_i + o_{i-1}) = o_i + \frac{1}{3}\Delta^2 o_i,$$

$$o_i^{(2)} = \frac{1}{3}(o_{i+1}^{(1)} + o_i^{(1)} + o_{i-1}^{(1)}) = \frac{1}{9}(o_{i+2} + 2o_{i+1} + 3o_i + 2o_{i-1} + o_{i-2}) = o_i + \frac{2}{3}\Delta^2 o_i + \frac{1}{9}\Delta^4 o_i,$$

og almindeligt

$$o_i^{(v)} = o_i + \frac{1}{3} \cdot \frac{v}{1} \Delta^2 o_i + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} \Delta^4 o_i + \dots + \frac{1}{3^v} \Delta^{2v} o_i.$$

Tænker vi os de samme Regninger udført med de sande Værdier, faar vi det tilsvarende Udtryk i v , nemlig

$$v_i^{(v)} = v_i + \frac{1}{3} \cdot \frac{v}{1} \Delta^2 v_i + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} \Delta^4 v_i + \dots + \frac{1}{3^v} \Delta^{2v} v_i,$$

og man ser da heraf, at naar man skal have $v_i^{(v)} = v_i$, maa v være en lineær Funktion, thi hvis v for Eksempel er af anden eller tredie Grad, vil man ikke almindeligt have $\Delta^2 v_i = 0$.

Dersom v er en hel algebraisk Funktion af anden eller tredie Grad, kunde man bruge

$$u_i^{(v)} = o_i - \frac{v}{3} \Delta^2 o_i = o_i + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} \Delta^4 o_i + \dots + \frac{1}{3^v} \Delta^{2v} o_i$$

som udjævnet Værdi, naar det blot drejede sig om at opfylde den stillede Fordring, thi man vilde da have

$$v_i^{(v)} - \frac{v}{3} \Delta^2 v_i = v_i;$$

men det benyttede Korrektionsled, $-\frac{v}{3} \Delta^2 o_i$, er uheldigt, fordi Rækken af Værdierne $\Delta^2 o_i$ er ujevn. Det er bedre at benytte Differenserne af de udjævnede Værdier, altsaa $\Delta^2 o_i^{(v)}$, til Korrektionen, men vi gaar endnu et Skridt videre. Hvis nemlig o netop er tilstrækkelig udjævnet, vil $\Delta^2 o^{(v)}$ ikke være det; man kunde udjævne Værdierne $o^{(v)}$ endnu en Gang, altsaa danne $o^{(v+1)}$, og derefter sætte

$$u_i = o_i^{(v+1)} - \frac{v+1}{3} \Delta^2 o_i^{(v+1)},$$

men der kan spares Regning ved at kombinere $o^{(v)}$ og $\Delta^2 o^{(v+1)}$ saaledes, at vort Udtryk faar Formen

$$u_i = o_i^{(v)} + c_1 \Delta^2 o_i^{(v+1)},$$

idet vi samtidig sørger for at bestemme c_1 saaledes, at man har

$$v_i^{(v)} + c_1 \Delta^2 v_i^{(v+1)} = v_i.$$

Dersom v er af fjerde eller femte Grad, faar vort Udtryk Formen

$$u_i = o_i^{(v)} + c_1 \Delta^2 o_i^{(v+1)} + c_2 \Delta^4 o_i^{(v+2)},$$

og saaledes fremdeles. — Det bør bemærkes, at Forudsætningen om, at v er en hel, algebraisk Funktion, kan erstattes med, at et vist Interval af v kan fremstilles med overlegen eller dog med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Hjælp af en saadan Funktion.

Saafernt man kender den sande Funktion, er der ingen Vanskeligheder forbundet med at opstille saadanne Udjevsningsformler, der opfylder Fordringen om ikke at indføre Fejl i Resultatet. Vanskelighederne viser sig først, naar den sande Udjevsningsfunktion er ubekendt, saaledes som det er Tilfældet ved vore Opgaver, og en meget vigtig Del af Arbejdet kommer da til at dreje sig om at benytte Materialet til at skaffe sig de bedst mulige Oplysninger om den sande Funktions Natur. Da vore Funktioner er periodiske, giver den trigonometriske Række os det naturlige Hjælpemiddel til en saadan Undersøgelse, og det er tidligere omtalt, hvorledes vi kan beregne Middelfejlene for de i denne Række optrædende Konstanter. Imidlertid danner Potensrækken den naturlige Baggrund for den mekaniske Metode, og vi udvikler derfor først vore Formler, idet vi tænker os den sande Funktion udtrykt ved Hjælp af en saadan Række. Men dernæst udvikler vi de samme Formler, idet vi tænker os de forelagte Værdier fremstillet ved Hjælp af den trigonometriske Række, og derved tilvejebringer vi en Forbindelse mellem Undersøgelserne om den sande Funktions Natur og Udjevsningsformlerne.

Ved denne dobbelte Udledning af Formlerne opnaas der flere Fordele. Saaledes ses det umiddelbart, at vore Udjevsningsformler ikke afhænger af en bestemt Hypotese angaaende den sande Funktion, og endvidere kan man ud fra to forskellige Synspunkter undersøge Spørgsmaalene om, hvorvidt de tidligere omtalte Mangler ved de almindeligt anvendte Fremgangsmaader er afhjulpet.

Det viser sig, at i samme Grad som Undersøgelsen af den ubekendte Funktion fører til sikre Resultater, i samme Grad er det afgjort, hvilke Egenskaber Udjevsningsformlen bør have, medens vi er forholdsvis frit stillet med Hensyn til den Maade, som vi vil udføre Udjevningen paa, idet der kan vælges mellem flere forskellige Formler, som giver meget nær det samme Resultat. Det bliver derfor et Spørgsmaal af udelukkende praktisk

Natur, hvilket Regneskema vi vil vælge som Grundlag for vore Formler: naar den endelige Udjevningssformel er i Overensstemmelse med den sande Funktion, drejer Sagen sig iøvrigt kun om at fremstille de udjevnede Værdier med det mindst mulige Regnearbejde.

Der er ovenfor kun talt om den ene Fordring, som vi maa stille til vort Udtryk for den udjevnede og forbedrede Værdi, nemlig at det ikke maa indføre Fejl i Resultatet, medens der ikke er talt om den anden Fordring, nemlig at Fejlen, der stammer fra selve Iagttagelserne, skal gøres saa lille som mulig. Sagen er, at vore Bestræbelser for at bringe Udjevningssformlen i Overensstemmelse med den sande Funktion i Virkeligheden gaar ud paa at opfylde begge Fordringer, idet vor Fremgangsmaade i Hovedsagen er den samme som den, der anvendes ved Valget af Leddene til en Udjevningsrække. Og vi sættes i Stand til at gaa frem paa denne Maade ved at tilvejebringe den tidligere omtalte Forbindelse mellem den trigonometriske Udjevningsrække og vore Udjevningssformler.

Da enhver af de omtalte Formler

$$u_i = o_i^{(v)} + c_1 \Delta^2 o_i^{(v+1)} + c_2 \Delta^4 o_i^{(v+2)} + \dots,$$

kan bringes paa Formen

$$u_i = a_0 o_i + a_1 (o_{i+1} + o_{i-1}) + a_2 (o_{i+2} + o_{i-2}) + \dots,$$

vil Udjevningen ogsaa kunne udføres i eet Sæt som ved den almindelige mekaniske Metode, medens de ovenfor omtalte Formler fordrer gentagne Regninger efter et vist Skema og Tilføjelse af Korrektionsled. Saadanne Formler til direkte Udjevning vil ogsaa her blive omtalt til Slut.

§ 14.

Udjevningssformlens Udledning ved Hjælp af en algebraisk Funktion.

Grundlaget for de Udjevningssformler, som vi foreløbig skal beskæftige os med, dannes af et forholdsvis simpelt Skema, medens selve Formlerne dels bestaar af et Led, der angiver, hvor mange Gange Regningen efter det benyttede Skema skal gentages, og dels af et vist Antal Korrektionsled.

Det erindres, at de n ækvidistante Værdier, for hvilke disse Formler lægges til Rette, danner Perioder, saaledes at de kan ordnes i sluttede Kredse. Vi tør derfor opstille Formler, der kræver udført Regninger med et hvilket som helst Antal af Værdier, idet vi har $o_{i+kn} = o_i$, naar k er et positivt eller negativt helt Tal.

Som Udjevningsskema kan man benytte enhver af de almindelige mekaniske Formler eller almindeligt et Udtryk af Formen

$$(18) \quad o_i = a_0 o_i + a_1(o_{i+1} + o_{i-1}) + a_2(o_{i+2} + o_{i-2}) + \dots + a_m(o_{i+m} + o_{i-m}).$$

Dette kan omskrives saaledes, at den udjevnede Værdi, $o_i^{(1)}$, bliver lineært udtrykt ved den tilsvarende Iagttagelse, o_i , og dennes lige Differenser, altsaa

$$(19) \quad o_i = k_0 o_i + k_1 \Delta^2 o_i + k_2 \Delta^4 o_i + \dots + k_m \Delta^{2m} o_i;$$

vi har nemlig

$$\begin{aligned} \Delta^2 o_i &= -2o_i + (o_{i+1} + o_{i-1}), \\ \Delta^4 o_i &= 6o_i - 4(o_{i+1} + o_{i-1}) + (o_{i+2} + o_{i-2}), \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta^{2m} o_i &= (-1)^m \frac{2m(2m-1)\dots(m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} o_i + \dots + (o_{i+m} + o_{i-m}); \end{aligned}$$

indfører man disse Udtryk i (19), skal Faktoren til o_{i+q} være lig med Koefficienten a_q i (18), og man har saaledes det tilstrækkelige Antal Ligninger til Bestemmelsen af de $m+1$ Koefficienter i (19). — I Praksis vil man vel i Reglen benytte den første Form for Skemaet, medens vi til Udledelsen af den endelige Udjevningsskemaformel maa benytte den anden Form.

I alle de almindelige mekaniske Formler er $k_0 = 1$, og det samme er Tilfældet ved de Udjevningsskemaer, som her senere virkelig finder Anvendelse. Vi indfører nu Betegnelsen R for en vis Operator, nemlig

$$R = k_1 \Delta^2 + k_2 \Delta^4 + \dots + k_m \Delta^{2m},$$

og det almindelige Udjevningsskema bliver da

$$(20) \quad o_i = o_i + k_1 \Delta^2 o_i + k_2 \Delta^4 o_i + \dots + k_m \Delta^{2m} o_i = (1 + R) o_i.$$

Gentager man Udjevningsregningen efter det samme Skema, har man som Udtryk for den nye Række af Værdier

$$o_i^{(2)} = (1 + R) o_i^{(1)} = (1 + R)^{(2)} o_i,$$

og almindeligt for den v Gange gentagne Regning

$$o_i^{(v)} = (1 + R)^{(v)} o_i.$$

Under visse Omstændigheder kan man benytte $o^{(v)}$ som udjevnnet og forbedret Værdi, men som den første Betingelse for, at dette skal kunne finde Sted, sætter vi, at naar Udjevningssregningen tænkes udført med de sande Værdier, skal man have

$$v_i^{(v)} = v_i,$$

thi det vilde være i Strid med mindste Middelfejls Princip, hvis saadanne fejlfrie Værdier blev paavirkede af »Udjevningen«. I Almindelighed vil Udtrykkene for ϕ ikke opfylde denne Betingelse, og vi vil derfor føje visse Korrektionsled til ϕ og saaledes søge at danne et nyt Udtryk, der opfylder vor Betingelse.

Vi tænker os da først, at de teoretisk rigtige — eller, hvad vi her vil foretrække at sige, de sande — Værdier er fremstillet med overlegen eller dog med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Hjælp af en vis hel, algebraisk Funktion, og dernæst, at vi med de sande Værdier har foretaget de samme Regninger, som vi foran foretog med Iagttagelsesværdierne. Vi har i Overensstemmelse med (20)

$$v_i = v_i + Rv_i, \quad (1)$$

men ønsker nu at udtrykke v_i ved Hjælp af v_i . Vi giver den sidste Ligning Formen

$$v_i = v_i - Rv_i \quad (1)$$

og faar heraf efterhaanden

$$\begin{aligned} v_i &= v_i - Rv_i + R^{(2)}v_i \\ &= v_i - Rv_i + R^{(2)}v_i - R^{(3)}v_i \\ &\dots\dots\dots \\ &= v_i - Rv_i + R^{(2)}v_i - R^{(3)}v_i + \dots\dots \pm R^{(z)}v_i \mp R^{(z+1)}v_i. \end{aligned}$$

Da vi ønsker v_i udtrykt ved Hjælp af v_i , maa vi undersøge, under hvilke Omstændigheder det sidste Led i Ligningernes højre Side falder bort. Vi har for Eksempel

$$R^{(z+1)}v_i = (k_1^{z+1}\Delta^{2(z+1)} + \dots\dots + k_m^{z+1}\Delta^{2m(z+1)})v_i;$$

dette Led falder altsaa bort, naar v er en hel, algebraisk Funktion, der højest er af Graden $2z + 1$, eller naar $1 + 2m(z + 1)$ paa hinanden følgende Værdier af v kan fremstilles med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Hjælp af en saadan Funktion. Naar denne sidste Betingelse er opfyldt, kan vi altsaa skrive

$$(21) \quad v_i = (1 + R)^{(-1)}v_i, \quad (1)$$

idet Udviklingen forudsættes at standse ved Leddet $R^{(z)}v_i$.

Vi har nu endvidere definitions-mæssigt

$$v_i = (1 + R)^{(1)}v_i \quad (2)$$

og faar heraf under lignende Forudsætninger som ovenfor

$$v_i^{(1)} = (1 + R)^{(-1)} v_i^{(2)},$$

der sammen med (21) giver

$$v_i = (1 + R)^{(-2)} v_i^{(2)};$$

almindeligt faar man

$$v_i = (1 + R)^{(-v)} v_i^{(v)},$$

eller

$$(22) \quad v_i = v_i^{(v)} - \frac{v}{1} R v_i^{(v)} + \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} R^{(2)} v_i^{(v)} - \frac{v(v+1)(v+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} R^{(3)} v_i^{(v)} + \dots$$

Vi undersøger ikke nærmere Betingelserne for, at et vist Antal Led af den sidste Lignings højre Side kan betragtes som et Udtryk for v_i , men giver straks det fundne Udtryk en Form, der, som omtalt Side 68, viser sig at være heldigere ved den senere Anvendelse. Den ønskede Form er

$$v_i = v_i^{(v)} + x_1 R^{(v+1)} v_i^{(v)} + x_2 R^{(2)} v_i^{(v+2)} + x_3 R^{(3)} v_i^{(v+3)} + \dots,$$

der ogsaa kan skrives

$$(23) \quad v_i = v_i^{(v)} + x_1 R(1 + R)^{(v)} v_i^{(v)} + x_2 R^{(2)}(1 + R)^{(2)} v_i^{(v)} + x_3 R^{(3)}(1 + R)^{(3)} v_i^{(v)} + \dots$$

Af (22) og (23) faar vi til Bestemmelse af Koefficienterne x :

$$\begin{aligned} -v &= x_1 \\ \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} &= x_2 + x_1, \\ -\frac{v(v+1)(v+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= x_3 + 2x_2, \\ \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} &= x_4 + 3x_3 + x_2, \end{aligned}$$

o. s. v. Dette giver

$$\begin{aligned} x_1 &= -v, \\ x_2 &= \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} + v = \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2}, \\ x_3 &= -\frac{v(v+1)(v+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - v(v+3) = -\frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\ x_4 &= \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{v(v+4)(v+5)}{2} - \frac{v(v+3)}{2} = \frac{v(v+5)(v+6)(v+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}. \end{aligned}$$

Det er ikke nødvendigt at undersøge, om den antydede Lov gælder almindeligt, eftersom vi højst faar Brug for 4 Led.

Det ønskede Udtryk er altsaa

$$(24) \left\{ \begin{aligned} v_i &= v_i^{(v)} - \frac{v}{1} R^{(v+1)} v_i + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} R^{(v+2)} v_i - \frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} R^{(v+3)} v_i \\ &+ \frac{v(v+5)(v+6)(v+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} R^{(v+4)} v_i - \dots \end{aligned} \right.$$

De numeriske Værdier af Koefficienterne findes ordnede efter Skraalinier i nedenstaaende Tabel:

I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	(1)	(1)	(1)	(1)
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(11)	(12)	(13)
		2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	(77)	(90)
			5	14	28	48	75	110	154	208	273	350	(440)
				14	42	90	165	275	429	637	910	1260	1700.

Vi betragter foreløbig kun det simple Tilfælde, hvor vi har $R = k\Delta^{2\mu}$, og hvor vi altsaa faar

$$(25) \left\{ \begin{aligned} v_i &= v_i^{(v)} - k \frac{v}{1} \Delta^{2\mu(v+1)} v_i + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} k^2 \Delta^{4\mu(v+2)} v_i - \frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^3 \Delta^{6\mu(v+3)} v_i \\ &+ \frac{v(v+5)(v+6)(v+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} k^4 \Delta^{8\mu(v+4)} v_i - \dots \end{aligned} \right.$$

I det følgende betegnes $v_i^{(v)}$ med Tilføjelse af de q første Korrektionsled ordnede efter stigende Differenser med $F_q(v_i)$, altsaa her:

$$\begin{aligned} F_0(v_i) &= v_i^{(v)}, \\ F_1(v_i) &= v_i^{(v)} - k \frac{v}{1} \Delta^{2\mu(v+1)} v_i, \\ F_2(v_i) &= v_i^{(v)} - k \frac{v}{1} \Delta^{2\mu(v+1)} v_i + k^2 \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} \Delta^{4\mu(v+2)} v_i, \end{aligned}$$

og saaledes videre.

Betragter vi nu Iagttagelsesværdierne o_i , kan vi antage, at vi med dem har udført de Regninger, som svarer til Udtrykket $F_q(v_i)$. Disse Udtryk er lineære med Hensyn til v_i , og ligesom man kan skrive

$$o_i = v_i + f_i,$$

hvor f_i er den sande Fejl paa Iagttagelsen o_i , vil Resultatet af Regningerne med Iagttagelsesværdierne derfor kunne skrives

$$F_q(o_i) = F_q(v_i) + F_q(f_i).$$

Vor Opgave er da, at vi skal søge at tilfredsstille Betingelsen

$$F_q(v_i) = v_i$$

og samtidig at gøre Fejlen, der stammer fra Iagttagelserne og her repræsenteres af $F_q(f_i)$, saa lille som mulig, hvorefter vi kan tage $F_q(o_i)$ som udjævnet og forbedret Værdi.

I (25) har vi formelt et identisk Udtryk for v_i , og naar vi til Fremstilling af v_i vil nøjes med det afkortede Udtryk $F_q(v_i)$, saa bortkaster vi Differenser af $(2(q+1)\mu)^{de}$ (og højere) Orden. Betingelsen for, at vi kan betragte Ligningen $F_q(v_i) = v_i$ som tilfredsstillet, er da, at et vist Antal af paa hinanden følgende Værdier af v_i skal kunne fremstilles med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Hjælp af en hel algebraisk Funktion, der højest er af Graden $2(q+1)\mu - 1$. Det vil imidlertid vistnok være meget vanskeligt at finde passende Midler til direkte at afgøre, om denne Betingelse er opfyldt i de enkelte Tilfælde. Dersom Metoden anvendes til Udjevning af frie Iagttagelser, eller dersom man blot véd — eller fordrer — at der ikke skal være »Gang« i Differenserne mellem de givne og de udjvnede Værdier, behøver man dog neppe at undersøge, om den omtalte Betingelse er opfyldt, thi hvis den sande Funktion overhovedet kan fremstilles ved Hjælp af den anvendte Formel, maa Udjevningen under disse Omstændigheder betragtes som legitim, naar man har tilføjet netop saa mange Korrektionsled, at der ikke mere er Gang i Differenserne. Og Paavisningen af, om der findes en saadan Gang eller ej, behøver ikke at ske ved et overfladisk Skøn, men Undersøgelsen kan sættes i System, idet man i Tvivlstilfælde ser, hvorledes de enkelte Korrektionsled paavirker Summen af Differenserne $F_q(o_i) - o_i$ indenfor de Intervaller, hvor Korrektionen er positiv, og hvor den er negativ.

Ved vore Opgaver er Iagttagelserne bundet til hverandre, men det synes ikke desto mindre, at der kan være Tilfælde, for Eksempel ved Temperatures daglige Periode, hvor der ikke skal være Gang i Differenserne mellem de forelagte og de udjvnede Værdier. Hvis dette virkelig skulde vise sig at være Tilfældet ved nogle Arter af vore Opgaver, vilde det betyde en stor Lettelse i Arbejdet, eftersom man da ikke behøvede at beregne Konstanterne i den trigonometriske Række og deres Middelfejl. Men dette tør man ikke slaa fast, før der er foretaget omfattende Undersøgelser, og indtil videre maa vi derfor benytte de Midler, som staar til vor Raadighed, til at vælge saadanne Udjevningsformler, som er i Overensstemmelse med den sande Funktions Natur. Vi skal derfor i den næste Paragraf fremstille de samme Formler som ovenfor, men ved Hjælp af den trigonometriske Række, idet vi derved bringer en Forbindelse i Stand mellem disse Formler og vore Undersøgelser angaaende den sande Funktion.

Det er ikke uden Interesse at se, hvorledes Middelfejlen for o ^(v) aftager. Vi skal her blot betragte det simple Regneskema:

der giver $^{(1)}_0 o = \frac{1}{3}(o_1 + o_0 + o_{-1}),$

$$^{(2)}_0 o = \frac{1}{9}(o_2 + 2o_1 + 3o_0 + 2o_{-1} + o_{-2}),$$

$$^{(3)}_0 o = \frac{1}{27}(o_3 + 3o_2 + 6o_1 + 7o_0 + 6o_{-1} + 3o_{-2} + o_{-3}),$$

o. s. v. Vi beregner nu Værdierne af $\lambda_2^{(v)}(o)$, idet vi kun betragter $^{(v)}_o$ som en vis Funktion af Iagttagelserne, medens det henstaar uafgjort, om $^{(v)}_o$ kan benyttes som forbedret Værdi. Dersom Iagttagelserne er frie og lige gode, faar man, naar man sætter $\lambda(o) = 1$,

v	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda_2^{(v)}(o)$	·333	·235	·193	·168	·152	·139	·129	·121
λ_2 Min.	·333	·200	·143	·111	·091	·077	·067	·059.

Man ser heraf, at Middelfejlen kun reduceres lidt ved de senere Gen- tagelser af Regningen. Det bør dog bemærkes, at da der i $^{(v)}_o$ indgaar $2v + 1$ Værdier, er $\frac{1}{2v + 1} \lambda_2(o)$ den mindste Værdi, som Middelfejlskvadratet kan have ved nogen Art af Udjevning (lineær Udjevning til Midten efter mindste Kvadraters Metode); disse Værdier er opført udfor λ_2 for at tjene til Sammenligning med $\lambda_2^{(v)}(o)$.

Det har endvidere Interesse at betragte Middelfejlene for forskellige Differenser af $^{(v)}_o$. Af Udtrykket for $^{(1)}_o$ faar man

$$\Delta^2 o_0 = \frac{1}{3}(o_2 - o_1 - o_{-1} + o_{-2}),$$

$$\Delta^4 o_0 = \frac{1}{3}(o_3 - 3o_2 + 3o_1 - 2o_0 + 3o_{-1} - 3o_{-2} + o_{-3}),$$

o. s. v., og af $^{(2)}_o$:

$$\Delta^2 o_0 = \frac{1}{9}(o_3 - 2o_0 + o_{-3}),$$

og saaledes fremdeles. Under samme Forudsætninger som ovenfor faar man heraf

v =	0	1	2	3	4	5
$\lambda_2(\Delta^2 o^{(v)})$	6	·444	·074	·025	·012	·008
$\lambda_2(\Delta^4 o^{(v)})$	70	4.67	·444	·055	·011	·002
$\lambda_2(\Delta^6 o^{(v)})$	924	66.00	5.975	·590	·064	·009
$\lambda_2(\Delta^8 o^{(v)})$	12870	985.11	90.20	8.764	·833	·092.

Det falder straks i Øjnene, at Differensernes Middelfejl aftager stærkt, ogsaa ved de senere Gentagelser af Regningen, saaledes at man kan betragte selv høje Differenser som næsten fejlfrie, naar v er tilstrækkelig stor. Man ser heraf, hvorledes Gentagelsen af Regneoperationen bidrager til at frembringe jevne Værdier. Ved Hjælp af en almindelig mekanisk Udjevningsformel, der for Eksempel omfatter 5 eller 7 Værdier, kan man vel opnaa en betydelig Reduktion af Middelfejlen for selve de beregnede Værdier, naar Iagttagelserne er frie, men Rækken af Værdier bliver ikke jevn, hvilket kan ses af Middelfejlene for Differenserne. Gentager man derimod Regningen flere Gange, kan disse Middelfejl blive saa smaa — og derfor Værdierne saa jevne — som man ønsker. En tilfredsstillende Grad af Jevnhed kan imidlertid ogsaa opnaas ved Hjælp af en enkelt Udjevning, men Formlen maa da omfatte et forholdsvis stort Antal Værdier.

Vi har tidligere set, at i Sammenligning med frie Iagttagelser giver bundne, men iøvrigt lige saa gode, Iagttagelser større Middelfejl for Summer og mindre for Differenser. Naar Iagttagelserne er bundet til hverandre, vil Reduktionen af Middelfejlene derfor blive endnu mindre for $\sigma^{(v)}$ og endnu større for Differenserne, end ovenstaaende Tabeller angiver.

§ 15.

Udjevningsformlens Udledning ved Hjælp af en trigonometrisk Række.

Naar vi skal udlede vor Udjevningsformel ved Hjælp af den trigonometriske Række, turde det være simplest at gaa ud fra selve de foreliggende n Iagttagelsesværdier og tænke os dem fremstillet ved Hjælp af den nævnte Række, saaledes at Konstanterne, hvis Antal i Almindelighed bliver n , er bestemt ved Formlerne Side 32. Konstanterne bliver altsaa netop de samme som de »Elementer«, der bestemmes ved mindste Kvadraters Metode, naar Iagttagelserne er frie og lige gode. Vi har altsaa

$$o_i = a_0 + a_1 \cos \theta i + b_1 \sin \theta i + a_2 \cos 2\theta i + b_2 \sin 2\theta i + \dots = \Sigma ((L_p)_i),$$

hvor i kan have Værdierne af n paa hinanden følgende hele Tal, og hvor $\theta = \frac{2\pi}{n}$.

Naar man har beregnet Konstanterne til et Dobbeltled

$$(L_p)_i = a_p \cos p\theta i + b_p \sin p\theta i,$$

kan man her videre beregne de n forskellige Værdier, der repræsenteres af $(L_p)_i$. Med disse n Værdier, der kan opfattes som Partialværdier af o_i , kan vi nu foretage Regninger efter det samme Skema¹⁾, som tidligere benyttedes overfor Værdierne o_i ; vi danner altsaa $(L_p)_i^{(1)}$ eller almindeligt $(L_p)_i^{(v)}$ paa samme Maade, som vi før dannede $o_i^{(1)}$ og $o_i^{(v)}$. Men her har man

$$\begin{aligned}\Delta^2(\cos p\theta i) &= \cos(p\theta i + p\theta) - 2\cos p\theta i + \cos(p\theta i - p\theta) \\ &= -4\sin^2\frac{p\theta}{2}\cos p\theta i,\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\Delta^2(\sin p\theta i) &= \sin(p\theta i + p\theta) - 2\sin p\theta i + \sin(p\theta i - p\theta) \\ &= -4\sin^2\frac{p\theta}{2}\sin p\theta i,\end{aligned}$$

hvoraf

$$\Delta^2((L_p)_i) = -4\sin^2\frac{p\theta}{2}(a_p\cos p\theta i + b_p\sin p\theta i) = -4\sin^2\frac{p\theta}{2} \cdot (L_p)_i.$$

Sætter vi

$$-4\sin^2\frac{p\theta}{2} = -4\sin^2\frac{p\pi}{n} = c_p,$$

har man altsaa almindeligt

$$\Delta^{2q}((L_p)_i) = c_p^q \cdot (L_p)_i.$$

Vi har endvidere definitions-mæssigt

$$(L_p)_i^{(1)} = (1 + k_1\Delta^2 + k_2\Delta^4 + \dots + k_m\Delta^{2m})(L_p)_i,$$

og faar altsaa deraf

$$(L_p)_i^{(1)} = (1 + k_1c_p + k_2c_p^2 + \dots + k_mc_p^m) \cdot (L_p)_i,$$

eller

$$(L_p)_i^{(1)} = (1 + r_p) \cdot (L_p)_i,$$

idet vi sætter

$$r_p = k_1c_p + k_2c_p^2 + \dots + k_mc_p^m.$$

Paa den Plads, hvor vi før havde Operatoren $1 + R$, har vi nu Faktoren $1 + r_p$, og vi faar derfor uden videre saavel

$$(L_p)_i^{(v)} = (1 + r_p)^v \cdot (L_p)_i$$

som

$$(L_p)_i = (1 + r_p)^{-v} \cdot (L_p)_i^{(v)}.$$

¹⁾ $o_i = o_i + k_1\Delta^2 o_i + k_2\Delta^4 o_i + \dots + k_m\Delta^{2m} o_i = (1 + R) o_i.$

Først naar vi vil udvikle $(1 + r_p)^{-v}$, kan der her blive Spørgsmaal om, hvorvidt vore Udtryk har mere end formel Betydning; en Undersøgelse heraf opsættes imidlertid til senere, og vi udvikler

$$(L_p)_i = \left(1 - \frac{v}{1} r_p + \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} r_p^2 - \frac{v(v+1)(v+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r_p^3 + \dots \right) \cdot (L_p)_i^{(v)}.$$

Dette Udtryk ønskes bragt paa Formen

$$(L_p)_i = \left(1 + x_1 r_p (1 + r_p) + x_2 r_p^2 (1 + r_p)^2 + x_3 r_p^3 (1 + r_p)^3 + \dots \right) \cdot (L_p)_i^{(v)};$$

her faar vi de samme Ligninger som tidligere (Side 72) til Bestemmelse af Koefficienterne x , og Resultatet bliver da

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} (L_p)_i &= (L_p)_i^{(v)} - \frac{v}{1} r_p (L_p)_i^{(v+1)} + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} r_p^2 (L_p)_i^{(v+2)} \\ &\quad - \frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r_p^3 (L_p)_i^{(v+3)} + \dots \end{aligned} \right.$$

Vi gaar nu tilbage til Iagttagelsesværdierne, og af

$$o_i = \Sigma ((L_p)_i)$$

faar vi

$$\Delta^2 o_i = \Sigma (c_p \cdot (L_p)_i),$$

og

$$R o_i = \Sigma (r_p \cdot (L_p)_i),$$

og almindeligt

$$R^{(q)} o_i^{(v+q)} = \Sigma (r_p^q \cdot (L_p)_i^{(v+q)}).$$

Ved Addition af de Ligninger, der repræsenteres af (26), faar vi da et Udtryk for o_i , nemlig

$$(27) \quad o_i = o_i^{(v)} - \frac{v}{1} R o_i^{(v+1)} + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} R^{(2)} o_i^{(v+2)} - \frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} R^{(3)} o_i^{(v+3)} + \dots,$$

der ganske svarer til det ad anden Vej fundne Udtryk (24) for v_i .

Vi kan nu undersøge Betydningen af vore Udtryk for de udjvnede og forbedrede Iagttagelser, idet vi holder Regnskab med, hvorledes de enkelte Led, L_p , paavirkes af Regneoperationerne. Vi har tidligere indført Betegnelsen $F_q(o_i)$ for Summen af $o_i^{(v)}$ og de q første Korrektionsled; i Overensstemmelse hermed faar vi nu af (26) følgende Udtryk for de Partialværdier af o_i , der repræsenteres af $(L_p)_i$:

$$F_0((L_p)_i) = {}^{(v)}(L_p)_i,$$

$$F_1((L_p)_i) = {}^{(v)}(L_p)_i - \frac{v}{1} r_p {}^{(v+1)}(L_p)_i,$$

$$F_2((L_p)_i) = {}^{(v)}(L_p)_i - \frac{v}{1} r_p {}^{(v+1)}(L_p)_i + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} r_p^2 {}^{(v+2)}(L_p)_i,$$

og saaledes videre. Enhver af disse Ligningers højre Side kan skrives som et Produkt af $(L_p)_i$ og en vis Faktor. Betragter vi foreløbig kun det simple Tilfælde, hvor $R = k\Delta^{2\mu}$, og hvor vi altsaa kun har $r_p = kc_p^\mu$, faar vi, idet Indexet i udelades,

$$(28) \begin{cases} F_0(L_p) = (1 + kc_p^\mu)^v \cdot L_p = V_{p,0} \cdot L_p, \\ F_1(L_p) = (1 + kc_p^\mu)^v \left[1 - k \frac{v}{1} c_p^\mu (1 + kc_p^\mu) \right] \cdot L_p = V_{p,1} \cdot L_p, \\ F_2(L_p) = (1 + kc_p^\mu)^v \left[1 - k \frac{v}{1} c_p^\mu (1 + kc_p^\mu) + k^2 \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} c_p^{2\mu} (1 + kc_p^\mu)^2 \right] \cdot L_p = V_{p,2} \cdot L_p, \end{cases}$$

og saaledes videre. — Faktorerne $V_{p,q}$ viser, hvorledes Leddene L_p varierer under de Regninger, som vi foretager med o , og vi vil i det følgende kalde dem for Variationsfaktorer.

Variationsfaktorerne afhænger ikke af Iagttagelsesværdierne men kun af Udjevsningsformlens Konstanter, nemlig k , μ og v , samt af Forholdet mellem p og Antallet af Værdier i Perioden, idet vi har

$$c_p = -4 \sin^2 \left(\frac{p}{n} \pi \right).$$

Da vi nu kan udtrykke de udjevnede Værdier ved Hjælp af de oprindelige Led i den trigonometriske Række, idet vi har

$$F_q(o_i) = \Sigma (V_{p,q} \cdot (L_p)_i),$$

kan vi foretage en Undersøgelse af enhver af vore Udjevsningsformler ved at beregne de til Formlen svarende Variationsfaktorer, $V_{p,q}$. Ved en saadan Undersøgelse kan vi skaffe os tilstrækkelige Oplysninger om den virkelige Betydning af vore Udtryk for de udjevnede og forbedrede Værdier, og det har herefter mindre at sige, at der kan gøres visse Indvendinger imod de Fremgangsmaader, som er benyttet til Udledelsen af disse Udtryk ¹⁾.

¹⁾ Det bør bemærkes, at uagtet vi her er blevet staaende ved Formen

$$F_q(o_i) = o_i^{(v)} + x_1 A^2 o_i^{(v+1)} + x_2 A^4 o_i^{(v+2)} + \dots,$$

vil andre Former maaske være at foretrække i visse Tilfælde. Imidlertid maa det vist betragtes som heldigst, at man kun har at gøre med en enkelt Grundform, og gennem adskillige Udjevsningsforsøg er jeg kommet til det Resultat, at den benyttede Form er meget brugbar.

§ 16.

Variationsfaktorer.

Til Beregning af Variationsfaktorernes Værdier i det simple Tilfælde, hvor $R = k\Delta^{2\mu}$, og altsaa $r_p = kc_p^\mu$, har man ifølge Ligningerne (28):

$$(29) \left\{ \begin{aligned} V_{p,q} = (1 + kc_p^\mu)^\nu & \left[1 - k \frac{\nu}{1} c_p^\mu (1 + kc_p^\mu) + k^2 \frac{\nu(\nu+3)}{1 \cdot 2} c_p^{2\mu} (1 + kc_p^\mu)^2 \right. \\ & \left. - k^3 \frac{\nu(\nu+4)(\nu+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c_p^{3\mu} (1 + kc_p^\mu)^3 + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

hvor

$$c_p = -4 \sin^2 \frac{p\pi}{n}.$$

Til det konstante Led, L_o , svarer Variationsfaktoren $V_{o,q} = 1$, eftersom man altid har $c_o = 0$. Det konstante Led forbliver altsaa upaavirket af saavel selve Udjevningen som af Korrektionen, hvilket Skema man end benytter; dette ses iøvrigt ogsaa let direkte.

Alle de andre Variationsfaktorer er derimod afhængige af de enkelte Udjevningsformler. Lad os eksempelvis danne en Tabel for $n = 24$, $k = \frac{1}{3}$ og $\mu = 1$, altsaa for 24 Iagttagelsesværdier, der udjevnes efter Skemaet

$$(1) \quad o_i = o_i + \frac{1}{3} \Delta^2 o_i = \frac{1}{3} (o_{i+1} + o_i + o_{i-1}).$$

Værdierne for Variationsfaktorerne faar man da af

$$V_{p,q} = (1 + \frac{1}{3} c_p)^\nu \left[1 - \frac{\nu}{3} c_p (1 + \frac{1}{3} c_p) + \frac{\nu(\nu+3)}{9 \cdot 2} c_p^2 (1 + \frac{1}{3} c_p)^2 \right. \\ \left. - \frac{\nu(\nu+4)(\nu+5)}{27 \cdot 6} c_p^3 (1 + \frac{1}{3} c_p)^3 + \dots \right],$$

hvor

$$c_p = -4 \sin^2 \frac{p\pi}{24}.$$

Resultatet findes i omstaaende Tabel 1.

Man kan her først lægge Mærke til, at man overalt har $V_{8,q} = 0$, fordi

$$1 + \frac{1}{3} c_8 = 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} = 0;$$

Leddene L_8 forsvinder altsaa helt under Udjevningen. For Leddene mellem L_o og L_8 ligger Variationsfaktorerne mellem 1 og 0; disse Faktorer aftager med voksende ν (Antallet af Gentagelser af den egentlige Udjevningsregning) og tiltager med voksende q (Antallet af Korrektionsled).

I Faktoren til det sidste Led, L_{12} , indgaar

Tabel I.
Variationsfaktorer.

$$n = 24. \quad k = \frac{1}{3}. \quad \mu = 1.$$

	$p = 1$	2	3	4	5	6	8	12
$v=4.$	$V_{p,0}$	·9122	·6878	·4194	·1975	·0655	·0123	·0000
	$V_{p,1}$	·9932	·9116	·6830	·3731	·1310	·0233	·0000
	$V_{p,2}$	·9995	·9753	·8280	·5097	·1882	·0319	·0000
	$V_{p,3}$	1.0000	·9931	·9061	·6137	·2373	·0384	·0000
	$V_{p,4}$	1.0000	·9980	·9483	·6932	·2795	·0433	·0000
$v=6.$	$V_{p,0}$	·8712	·5704	·2716	·0878	·0168	·0014	·0000
	$V_{p,1}$	·9873	·8488	·5277	·2048	·0419	·0032	·0000
	$V_{p,2}$	·9989	·9507	·7087	·3219	·0702	·0050	·0000
	$V_{p,3}$	·9999	·9845	·8246	·4279	·0990	·0067	·0000
	$V_{p,4}$	1.0000	·9952	·8957	·5197	·1270	·0081	·0000
$v=8.$	$V_{p,0}$	·8321	·4731	·1759	·0390	·0043	·0002	·0000
	$V_{p,1}$	·9799	·7809	·3970	·1084	·0129	·0004	·0000
	$V_{p,2}$	·9979	·9187	·5881	·1932	·0247	·0008	·0000
	$V_{p,3}$	·9998	·9716	·7300	·2822	·0386	·0011	·0000
	$V_{p,4}$	1.0000	·9905	·8276	·3688	·0538	·0014	·0000
$v=10.$	$V_{p,0}$	·7947	·3924	·1139	·0173	·0011	·0000	·0000
	$V_{p,1}$	·9711	·7115	·2929	·0559	·0038	·0001	·0000
	$V_{p,2}$	·9966	·8802	·4757	·1115	·0083	·0001	·0000
	$V_{p,3}$	·9996	·9541	·6304	·1782	·0143	·0002	·0000
	$V_{p,4}$	1.0000	·9833	·7484	·2501	·0216	·0002	·0000

$$c_{12} = -4 \sin^2 \frac{\pi}{2} = -4,$$

og vi faar altsaa

$$V_{12,q} = \left(-\frac{1}{3} \right)^q \left[1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{q}{1} + \left(\frac{4}{9} \right)^2 \frac{q(q+3)}{2} - \left(\frac{4}{9} \right)^3 \frac{q(q+4)(q+5)}{6} + \dots \right],$$

der divergerer med voksende q . Imidlertid ser man af vor Tabel, at de numeriske Værdier af $V_{12,q}$ kun er smaa. Dersom Antallet af Iagttagelsesværdier er taget tilstrækkelig stort, burde det sidste Led, den typiske Repræsentant for det ujevne, ganske vist forsvinde, men dette Led vil i Almindelighed være saa lille, at det ikke faar nogen Betydning, om der indgaar en lille Brøkdel (med positivt eller negativt Fortegn) deraf i Resultatet.

tatet. — I nærværende Tilfælde vil $V_{12,q}$ næsten altid være tilstrækkelig lille, naar $v \geq 6^1$.

Det er ikke nødvendigt at beregne Faktorerne til L_9 , L_{10} og L_{11} ; det er tilstrækkeligt, at man véd, at deres Værdier er beliggende mellem Nul og Værdierne for de tilsvarende Faktorer til L_{12} .

Eksempel. For at belyse de foranstaaende Sætninger vil vi udjevne de 24 Værdier af

$$o_i = \cos(15^0 \cdot i + 7^0)$$

givet med 1 Decimal. Da den teoretisk rigtige Funktion her er bekendt, løses denne Opgave iøvrigt bedst ved mindste Kvadraters Metode, men for os drejer det sig kun om at stille et Taleksempel ved Siden af den udviklede Teori.

Vi vil udjevne efter Skemaet

$$^{(1)} o_i = \frac{1}{3}(o_{i+1} + o_i + o_{i-1})$$

og bestemmer, at Resultatet skal gives med 3 Decimaler. Vi kan nu ved Hjælp af Tabellen over Variationsfaktorerne opsøge en passende Udjevningsformel. Den teoretisk rigtige Funktion bestaar kun af eet Led af samme Form som L_1 , og den største numeriske Værdi er 1; tager vi $v = 4$, har vi her $V_{1,2} = .9995$, og benytter vi det tilsvarende Udtryk, $F_2(o_i)$, som udjevnet Værdi, kan Fejlen, der hidrører fra, at $V_{1,2} < 1$, ikke beløbe sig til en Enhed i 3die Decimal. Vi tager da

$$F_2(o_i) = o_i - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} \Delta^2 o_i + \frac{1}{9} \cdot \frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 2} \Delta^4 o_i^{(6)}$$

til Udjevningsformel. I omstaaende Opstilling finder man de forelagte Værdier og Resultatet samt de fleste Mellemlægninger; endvidere findes der til Sammenligning opført Resultatet af en Udjevning efter mindste Kvadraters Metode, der giver

$$u_i = .9962 \cos(15^0 \cdot i + 7^0 30'),$$

¹⁾ Naar vi foran dannede den udjevnede Værdi af (24) i Stedet for af det først fundne Udtryk (22), Side 72, var Grunden den, at vi ellers vilde have faaet Divergens af en langt mere ondartet Karakter. I Overensstemmelse med (22) vilde Variationsfaktoren blive

$$V_{p,q} = (1 + kc_p^u)^v \left[1 - k \frac{v}{1} c_p^u + k^2 \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} c_p^{2u} - k^3 \frac{v(v+1)(v+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c_p^{3u} + \dots \right],$$

og altsaa her

$$V_{12,q} = \left(-\frac{1}{3} \right)^v \left[1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{v}{1} + \left(\frac{4}{3} \right)^2 \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} + \left(\frac{4}{3} \right)^3 \frac{v(v+1)(v+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right].$$

Dette vilde med Hensyn til den hertil svarende Regning sige, at selv om man havde sørgt for, at o var tilstrækkelig jevn, kunde $F_q(o)$ blive ujevn derved, at der indførtes Ujevnhed sammen med Korrektionsleddene.

og endelig finder man under v Repræsentanterne for de sande Funktionsværdier.

i	o	$^{(2)}_o$	$^{(4)}_o$	$\Delta^2 \overset{(5)}{o}$	$\Delta^4 \overset{(6)}{o}$	$F_2(o)$	u	v
1	.9	.878	.8396	-.0560	.0036	.920	.920	.927
2	.8	.756	.7212	-.0478	.0033	.790	.791	.799
3	.6	.578	.5533	-.0371	.0022	.606	.607	.616
4	.4	.367	.3483	-.0231	.0019	.382	.381	.391
5	.1	.122	.1186	-.0082	.0003	.130	.130	.139
6	— .1	— .122	— .1186	.0082	— .0003	— .130	— .130	— .122
7	— .4	— .367	— .3483	.0231	— .0019	— .382	— .381	— .375
8	— .6	— .578	— .5533	.0371	— .0022	— .606	— .607	— .602
9	— .8	— .756	— .7212	.0478	— .0033	— .790	— .791	— .788
10	— .9	— .878	— .8396	.0560	— .0036	— .920	— .920	— .921
11	— 1.0	— .944	— .9011	.0600	— .0041	— .988	— .988	— .990
12	— 1.0	— .944	— .9011	.0600	— .0041	— .988	— .988	— .993
13	— .9	— .878	— .8396	.0560	— .0036	— .920	— .920	— .927
.....								

Da man har

$$\cos(15^0(i+12)+\alpha) = -\cos(15^0 \cdot i + \alpha),$$

bliver Værdierne i den sidste Halvdel af Tabellen de samme som Værdierne i den første Halvdel med modsat Fortegn, og dette gælder ikke blot for v , o og u , men ogsaa for alle de andre Kolonner.

Vi skal derefter ved Hjælp af Variationsfaktorerne undersøge nogle flere af de Udjevningsskemaer, der senere kommer til Anvendelse. De Udjevningsskemaer, der danner Grundlaget for disse Formler, hører enten til den foran betragtede Type

$$\overset{(1)}{o_i} = o_i + k\Delta^{2u} o_i,$$

eller ogsaa er de dannet som Middeltallet af et ulige Antal Iagttagelsesværdier; for Oversigtens Skyld stiller vi dem sammen¹⁾:

$$(A) \quad \overset{(1)}{o_0} = \frac{1}{7}(o_3 + o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2} + o_{-3}) = o_0 + 2\Delta^2 o_0 + \Delta^4 o_0 + \frac{1}{7}\Delta^6 o_0,$$

$$(B) \quad \overset{(1)}{o_0} = \frac{1}{5}(o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2}) = o_0 + \Delta^2 o_0 + \frac{1}{5}\Delta^4 o_0,$$

$$(C) \quad \overset{(1)}{o_0} = \frac{1}{3}(o_1 + o_0 + o_{-1}) = o_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 o_0,$$

$$(D) \quad \overset{(1)}{o_0} = \frac{1}{14}(-o_2 + 4o_1 + 8o_0 + 4o_{-1} - o_{-2}) = o_0 - \frac{1}{14}\Delta^4 o_0,$$

$$(E) \quad \overset{(1)}{o_0} = \frac{3}{10}(o_1 + 2o_0 + o_{-1} - \frac{4}{10}(o_2 + o_{-2})) + \frac{1}{50}(o_3 + o_{-3}) = o_0 + \frac{1}{50}\Delta^6 o_0.$$

¹⁾ Det burde maaske allerede paa dette Sted være omtalt, hvorfor netop disse Skemaer er valgt, men dette er dog ikke strengt nødvendigt, og for ikke at afbryde Fremstillingen opsættes det til en senere Lejlighed.

Skemaet (C), hvortil vi allerede har beregnet Variationsfaktorer, danner en naturlig Overgang fra den ene Type til den anden.

Til Skemaet (D), hvor vi har $R = -\frac{1}{14}\Delta^4$ og altsaa $r_p = -\frac{1}{14}c_p^2$, svarer ifølge (27) Udjvningsformlen

$$F_q(o_i) = o_i + \frac{v}{14}\Delta^4 o_i + \frac{v(v+3)}{14^2 \cdot 2}\Delta^8 o_i + \dots 1),$$

og de hertil hørende Variationsfaktorer er ifølge (29)

$$V_{p,q} = (1 - \frac{1}{14}c_p^2)^v \left[1 + \frac{v}{14}c_p^2(1 - \frac{1}{14}c_p^2) + \frac{v(v+3)}{14^2 \cdot 2}c_p^4(1 - \frac{1}{14}c_p^2)^2 + \dots \right].$$

Formlen skal benyttes i et Tilfælde, hvor Antallet af Værdier i Perioden er 24, og hvor man altsaa har

$$c_p^2 = 16 \sin^4 \frac{p\pi}{24}.$$

Lad os først se, om et af Leddene ogsaa her gaar helt bort. Vi sætter da

$$1 - \frac{1}{14}c_p^2 = 1 - \frac{1}{14} \sin^4 \frac{p\pi}{24} = 0,$$

der giver $p = 10.04$, hvilket vil sige, at Leddet L_{10} praktisk talt forsvinder.

For Faktoren til det sidste Led, L_{12} , faar vi her, idet $c_{12}^2 = 16$,

$$V_{12,q} = (-\frac{1}{7})^v \left[1 - \frac{8}{49}v + (\frac{8}{49})^2 \frac{v(v+3)}{2} - \dots \right],$$

hvoraf man indser, at $V_{12,q} \cdot L_{12}$ vil blive en forsvindende lille Størrelse — i alt Fald, naar $v \geq 4$.

For Leddene mellem L_0 og L_{10} ligger Faktorerne mellem 1 og 0. Iøvrigt henvises til omstaaende Tabel.

Variationsfaktorerne kan fremstilles som kontinuerte Funktioner af p eller c_p . I Fig. 13 giver den fuldt optrukne Kurve saaledes en Fremstilling af $V_{p,1}$ (v=8) som Funktion af p , medens den punkterede Kurve fremstiller $V_{p,2}$ (v=4) hørende til Skema (C) og Tabel 1 (Side 81); Tabelværdierne af Variationsfaktorerne svarer til de hele Værdier af p . — Til Sammenligning kan vi tage en Udjevning efter mindste Kvadraters Metode, hvor man til Udjvningsfunktion har for Eksempel det konstante Led og de tre første Dobbeltled, altsaa

$$u_i = L_0 + (L_1)_i + (L_2)_i + (L_3)_i.$$

¹⁾ Det bemærkes, at man her sjældent kommer til at bruge mere end eet Korrektionsled og neppe nogensinde mere end to.

Tabel 2.
Variationsfaktorer. Skema (D). $n = 24$.

	$p =$	1	2	3	4	5	6	8	12
$v=4$.	$V_{p,0}$	·9987	·9797	·9055	·7435	·5051	·2603	·0163	·0004
	$V_{p,1}$	1.0000	·9996	·9921	·9407	·7725	·4728	·0312	·0001
$v=6$.	$V_{p,0}$	·9980	·9696	·8616	·6411	·3590	·1328	·0021	·0000
	$V_{p,1}$	1.0000	·9993	·9853	·8962	·6440	·2954	·0059	·0000
$v=8$.	$V_{p,0}$	·9973	·9597	·8199	·5527	·2251	·0678	·0003	·0000
	$V_{p,1}$	1.0000	·9989	·9769	·8460	·5252	·1784	·0007	·0000
	$V_{p,2}$	1.0000	1.0000	·9975	·9530	·7218	·2926	·0014	·0000
$v=10$.	$V_{p,0}$	·9967	·9499	·7802	·4766	·1813	·0346	·0000	·0000
	$V_{p,1}$	1.0000	·9983	·9668	·7927	·4213	·1051	·0001	·0000
	$V_{p,2}$	1.0000	1.0000	·9958	·9290	·6277	·1987	·0002	·0000

Man kan da sige, at man har multipliceret disse Led med Faktoren En og de bortkastede med Faktoren Nul, og denne Udjevning vil derfor være repræsenteret i Fig. 13 af den brudte Linie, der gaar gennem Punkterne

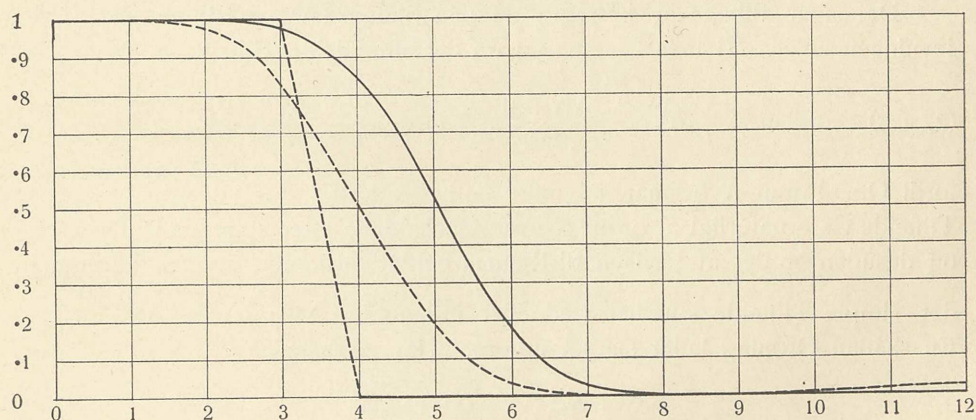


Fig. 13.

(0,1), (3,1), (4,0) og (12,0). I Sammenligning med denne Udjevning tager man altsaa ved vor Metode noget mindre med af de første Led og noget mere med af de følgende Led.

Vi kommer dernæst til Skema (E). Hertil svarer Udjevningsformlen

$$F_q(o_i) = o_i - \frac{v}{50} \Delta^6 o_i + \frac{v(v+3)}{50^2 \cdot 2} \Delta^{12} o_i - \dots$$

med Variationsfaktorerne

$$V_{p,q} = (1 + \frac{1}{50} c_p^3)^v \left[1 - \frac{v}{50} c_p^3 (1 + \frac{1}{50} c_p^3) + \frac{v(v+3)}{50^2 \cdot 2} c_p^6 (1 + \frac{1}{50} c_p^3)^2 - \dots \right].$$

Ogsaa denne Formel vil senere blive benyttet i et Tilfælde, hvor $n=24$.
Sætter vi her

$$1 + \frac{1}{50} c_p^3 = 1 - \frac{64}{50} \sin^6 \frac{p\pi}{24} = 0,$$

faar man $p=9.82$. Leddet L_{10} forsvinder altsaa paa det nærmeste, saaledes som det ogsaa ses af Tabel 3, til hvilken der iøvrigt henvises.

Tabel 3.
Variationsfaktorer, Skema (E). $n = 24$.

	$p = 1$	2	3	4	5	6	8	10	12
$v = 2$.									
$V_{p,0}$	.99999	.99923	.9920	.9604	.8740	.7056	.2116	.0016	.0784
$V_{p,1}$	1.00000	1.00000	.9999	.9981	.9804	.8953	.3167	.0015	.0222
$V_{p,2}$	1.00000	1.00000	1.0000	.9999	.9967	.9590	.3820	.0015	.0726
$v = 3$.									
$V_{p,0}$	.99998	.99884	.9880	.9412	.8171	.5927	.0974	— .0001	— .0220
$V_{p,1}$	1.00000	1.00000	.9999	.9966	.9663	.8317	.1799	— .0001	.0016
$V_{p,2}$	1.00000	1.00000	1.0000	.9998	.9936	.9281	.2339	— .0001	— .0237

Det staar tilbage at betragte de paa Skema (A) og (B) byggede Udjevsningsformler. Vi maa her gaa ud fra det almindelige Udtryk o_i , (Side 78),

$$(27 \text{ bis}) \quad o_i = o_i - \frac{v}{1} R^{(v)} o_i + \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} R^{(2)} o_i - \frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} R^{(3)} o_i + \dots,$$

fordi Operatoren R bestaar af mere end eet Led. Det vil ogsaa i dette Tilfælde være naturligt at ordne Korrektionsleddene efter stigende Differenser, og desuden er det af Hensyn til Regnearbejdet ønskeligt, at man ligesom i det simple Tilfælde kun har Led, der indeholder $\Delta^2 o$, $\Delta^4 o$, $\Delta^6 o$, En saadan Ordning lader sig let udføre. Har vi saaledes

$$R = k_1 \Delta^2 + k_2 \Delta^4 + k_3 \Delta^6$$

og ønsker i det højeste at benytte 3 Korrektionsled, faar vi først af (27), idet Leddene med højere Differens end sjette altsaa ikke har Interesse for os,

$$o_i = o_i - \frac{v}{1} (k_1 \Delta^2 + k_2 \Delta^4 + k_3 \Delta^6) o_i + \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} (k_1^2 \Delta^4 + 2k_1 k_2 \Delta^6) o_i - \frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k_1^3 \Delta^6 o_i + \dots$$

For $v = 1$ giver dette

$$o_i = o_i - k_1 \Delta^2 o_i + \dots,$$

hvoraf man faar

$$\Delta^4 o_i^{(v+1)} = \Delta^4 o_i^{(v+2)} - k_1 \Delta^6 o_i^{(v+3)} + \dots,$$

$$\Delta^6 o_i^{(v+1)} = \Delta^6 o_i^{(v+2)} - \dots,$$

$$\Delta^6 o_i^{(v+2)} = \Delta^6 o_i^{(v+3)} - \dots.$$

Indsættes disse Værdier i Udtrykket for o_i , og tager man $o_i^{(v)}$ med tilføjede 3 Korrektionsled til udjævnet og forbedret Værdi, faar man

$$(30) \left\{ \begin{aligned} F_3(o_i) &= o_i^{(v)} - k_1 v \Delta^2 o_i^{(v+1)} + \left(-k_2 v + k_1^2 \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} \right) \Delta^4 o_i^{(v+2)} \\ &+ \left((k_1 k_2 - k_3) v + k_1 k_2 v(v+3) - k_1^3 \frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) \Delta^6 o_i^{(v+3)}, \end{aligned} \right.$$

der ogsaa giver $F_1(o_i)$ og $F_2(o_i)$, naar man kun tager henholdsvis 1 og 2 Korrektionsled.

Ved en saadan Ordning af Leddene vil man kunne komme paa Afveje, men hvis noget saadant har fundet Sted, vil man blive opmærksom derpaa, naar man ved Hjælp af Variationsfaktorerne ligesom tidligere undersøger Betydningen af de Udjævningsformler, som man agter at benytte.

Den ene af de Formler, som vi skal anvende, gaar ud fra Skema (A), har $v=6$ og $q=2$, og idet (se Side 83) $k_1=2$ og $k_2=1$, faar vi ifølge (30)

$$F_2(o_i) = o_i^{(6)} - 12 \Delta^2 o_i^{(7)} + 102 \Delta^4 o_i^{(8)}.$$

Variationsfaktorerne findes ligesom før at betragte o_i som en Sum af Leddene $(L_p)_i$; her har vi

$$(L_p)_i^{(v+\mu)} = (1 + r_p)^{(v+\mu)} \cdot (L_p)_i,$$

hvor

$$r_p = 2c_p + c_p^2 + \frac{1}{7} c_p^3,$$

og

$$c_p = -4 \sin^2 \frac{\phi \pi}{73},$$

idet man i det betragtede Tilfælde har $n=73$. Faktoren til L_p bliver da

$$V_{p,2} = (1 + r_p)^6 \left[1 - 12c_p(1 + r_p) + 102c_p^2(1 + r_p)^2 \right],$$

hvoraf man ogsaa faar $V_{p,0}$ og $V_{p,1}$. — I omstaaende Tabel (Side 88) er desuden opført Variationsfaktorerne for $v=4$. Ifølge (30) svarer hertil Udjævningsformlen

$$F_q(o_i) = o_i^{(4)} - 8 \Delta^2 o_i^{(5)} + 52 \Delta^4 o_i^{(6)} + \dots$$

og Variationsfaktorerne

$$V_{p,q} = (1 + r_p)^4 [1 - 8c_p(1 + r_p) + 52c_p^2(1 + r_p)^2 - \dots].$$

Tabel 4.

Variationsfaktorer. Skema (A). $n = 73$.

	$p = 1$	2	3	4	5	6	8	16	26	36
$v = 4$.	$V_{p,0} \cdot 9423$	$\cdot 7866$	$\cdot 5776$	$\cdot 3679$	$\cdot 1987$	$\cdot 0875$	$\cdot 0064$	$\cdot 0024$	$\cdot 0006$	$\cdot 0004$
	$V_{p,1} \cdot 9973$	$\cdot 9617$	$\cdot 8446$	$\cdot 6369$	$\cdot 3923$	$\cdot 1868$	$\cdot 0131$	$\cdot 0045$	$\cdot 0033$	$\cdot 0015$
	$V_{p,2} \cdot 9999$	$\cdot 9934$	$\cdot 9450$	$\cdot 7967$	$\cdot 5455$	$\cdot 2783$	$\cdot 0186$	$\cdot 0117$	$\cdot 0121$	$\cdot 0056$
$v = 6$.	$V_{p,0} \cdot 9147$	$\cdot 6977$	$\cdot 4389$	$\cdot 2231$	$\cdot 0886$	$\cdot 0258$	$\cdot 0005$	$\cdot 0001$	$\cdot 0000$	$\cdot 0000$
	$V_{p,1} \cdot 9948$	$\cdot 9307$	$\cdot 7434$	$\cdot 4679$	$\cdot 2180$	$\cdot 0699$	$\cdot 0013$	$\cdot 0004$	$\cdot 0001$	$\cdot 0001$
	$V_{p,2} \cdot 9998$	$\cdot 9859$	$\cdot 9317$	$\cdot 6581$	$\cdot 3520$	$\cdot 1230$	$\cdot 0022$	$\cdot 0012$	$\cdot 0006$	$\cdot 0002$

Man ser af denne Tabel, at for $v = 6$ er L_8 og L_{36} af forsvindende Betydning, og med Hensyn til de mellemliggende Led bemærkes følgende. Da $(1 + r_p)^6$ er Faktor i $V_{p,q}$, vil $V_{p,q}$ — betragtet som kontinuert Funktion af c_p eller p — have Røring af femte Orden med Abscisseaxen for de Værdier af c_p , der er Rødder i Ligningen

$$1 + r_p = 1 + 2c_p + c_p^2 + \frac{1}{7}c_p^3 = 0,$$

eller for de tilsvarende Værdier af p ; her faaes¹⁾

$$c_p = \begin{cases} -0.7530 \\ -2.4451, \\ -3.8019 \end{cases} \text{ eller } p = \begin{cases} \frac{n}{7} \\ \frac{2n}{7} \\ \frac{3n}{7} \end{cases}.$$

I dette Tilfælde, hvor $n = 73$, bliver disse Værdier af p 10.4, 20.9 og 31.3. Da $V_{p,q}$ her har Røring af høj Orden med Abscisseaxen, kan man indse, at de mellemliggende Værdier af Variationsfaktorerne bliver meget smaa. I Tabellen er der desuden opført nogle af disse Værdier, nemlig $V_{16,q}$ og $V_{26,q}$.

Resultatet af Undersøgelsen er altsaa, at naar man benytter den betragtede Udjevsningsformel, vil Leddene, der følger efter L_8 , praktisk talt forsvinde.

De andre af denne Art Formler, som senere finder Anvendelse, har Skema (B) til Grundlag. Idet vi her har $k_1 = 1$ og $k_2 = \frac{1}{5}$ (se Side 83), faar vi ifølge (30) for $v = 6$ Udjevsningsformlen

¹⁾ Man faar almindeligt, at for et Skema, der er dannet som Middeltallet af $2m + 1$ paa hinanden følgende lagttager, og som anvendes til Udjevning af en Periode med n Værdier, bliver Faktoren Nul for

$$p = \frac{kn}{2m + 1}, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

$$F_q(o_i) = o_i^{(6)} - 6\Delta^2 o_i^{(7)} + 25 \cdot 8\Delta^4 o_i^{(8)} - 98\Delta^6 o_i^{(9)} + \dots$$

med Variationsfaktorerne

$$V_{p,q} = (1+r_p)^6 [1 - 6c_p(1+r_p) + 25 \cdot 8c_p^2(1+r_p)^2 - 98c_p^3(1+r_p)^3 + \dots],$$

og for $v=8$ Udjvningsformlen

$$F_q(o_i) = o_i^{(8)} - 8\Delta^2 o_i^{(9)} + 42 \cdot 4\Delta^4 o_i^{(10)} - 188 \cdot 8\Delta^6 o_i^{(11)} + \dots$$

med Variationsfaktorerne

$$V_{p,q} = (1+r_p)^8 [1 - 8c_p(1+r_p) + 42 \cdot 4c_p^2(1+r_p)^2 - 188 \cdot 8c_p^3(1+r_p)^3 + \dots],$$

hvor

$$1+r_p = 1 + c_p + \frac{1}{8} c_p^2,$$

og

$$c_p = -4 \sin^2 \frac{p\pi}{73},$$

idet vi ligesom i det foregaaende Tilfælde har $n=73$.

Tabel 5.

Variationsfaktorer. Skema (B). $n=73$.

	$p = 1$	2	3	4	5	6	8	10	22	36
$v=6$.										
$V_{p,0}$	·95646	·8361	·6663	·4817	·3137	·1820	·0404	·0041	·0002	·0001
$V_{p,1}$	·99863	·9801	·9141	·7821	·5966	·3964	·1052	·0111	—·0007	·0004
$V_{p,2}$	·99996	·9978	·9801	·9163	·7794	·5774	·1799	·0194	·0018	·0014
$V_{p,3}$	1.00000	·9998	·9956	·9693	·8838	·7123	·2553	·0282	—·0042	·0038
$v=8$.										
$V_{p,0}$	·94237	·7877	·5820	·3776	·2131	·1032	·0139	·0007	·0000	·0000
$V_{p,1}$	·99777	·9685	·8705	·6916	·4694	·2652	·0435	·0022	—·0001	·0000
$V_{p,2}$	·99993	·9960	·9653	·8645	·6736	·4337	·0855	·0043	·0002	·0001
$V_{p,3}$	1.00000	·9995	·9914	·9445	·8103	·5811	·1342	·0071	—·0005	·0003

Af

$$1+r_p = 1 + c_p + \frac{1}{8} c_p^2 = 0$$

faar vi

$$c_p = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ eller } p = \begin{cases} \frac{n}{5} \\ \frac{2n}{5} \end{cases},$$

og for $n=73$ har $V_{p,q}$ derfor Røring af $(v-1)^{\text{te}}$ Orden med Abscisseaxen for p lig med 14.6 og 29.2. Variationsfaktoren $V_{p,3}$ har Minimum i Nærheden af $p=22$, og man kan derfor af Tabellen, hvor $V_{22,q}$ er taget med, se, at Leddene efter L_{10} kan betragtes som bortskaffede.

Undersøgelsen af vore Udjevsningsformler ved Hjælp af Variationsfaktorerne kan opfattes som en Sammenligning mellem Resultaterne af vor Metode og en Udjevning efter mindste Kvadraters Metode ved Hjælp af den trigonometriske Række. I det foregaaende har vi set, at ved vor Metode bortskaffer Regningen (i det væsentlige) et vist Antal af de sidste Led, og for disse Leds Vedkommende bliver Resultatet altsaa meget nær det samme som ved mindste Kvadraters Metode, naar man der undlader at tage disse Led med.

Da vi nu for de betragtede Udjevsningsformlers Vedkommende har be-
regnet Variationsfaktorer til de første Led og skaffet os Klarhed over hvilke
Led, der helt eller dog praktisk talt forsvinder, maa vore Formlers Indhold
eller Betydning kunne betragtes som tilstrækkelig belyst. Det staar da til-
bage at vise Brugbarheden af Formlerne og hvilken Fremgangsmaade, man
skal anvende for at vælge den, som i hvert enkelt Tilfælde maa anses for
at være den bedste, eller som i alt Fald kan betragtes som tilfredsstillende.

§ 17.

Valg af Udjevsningsformel.

Ifølge det foregaaende bliver Resultatet af en Udjevning efter denne
Metode det samme, som det vilde blive, naar vi ved Hjælp af mindste
Kvadraters Metode fandt alle Leddene L_p , derefter multiplicerede hvert Led
med en vis Faktor, $V_{p,q}$, og endelig som udjevnet og forbedret Værdi
satte

$$u_i = \sum (V_{p,q} \cdot (L_p)_i).$$

Vi har her et Grundlag for en Sammenligning mellem Resultaterne af
de to Metoder, og gaar man ud fra, at mindste Kvadraters Metode er »rigtig«,
ser det ud, som om vor Metode har en Fejl, idet alle Leddene (med Und-
tagelse af det konstante Led) er multipliceret med en Faktor, som er mindre
end 1. Der kan imidlertid neppe med Rette tales om en Fejl ved nogen
af Metoderne; det kan i alt Fald ved et Eksempel vises, at den nævnte
Forskel ikke nødvendigvis betyder, at der er en Fejl i vor Metode.

Lad os nemlig forudsætte, at der er forelagt en Række ækvidistante,
lige gode og indbyrdes frie Værdier, som danner en Periode. Der opgives,
at $2m+1$ paa hinanden følgende af de tilsvarende sande Værdier kan
fremstilles med overlegen Nøjagtighed ved Hjælp af en hel algebraisk

Funktion af en vis (ulige) Grad, medens de samme Værdier ikke kan fremstilles med tilfredsstillende Nøjagtighed ved en Funktion af lavere Grad. Danner vi da en Udjevsningsformel i Overensstemmelse med det opgivne og med Benyttelse af mindste Middelfejls Princip, vil vi kunne foretage en Udjevning, der under de givne Omstændigheder maa betragtes som fuldstændig legitim; Resultatet bliver nøjagtig det samme, som naar man benytter det opgivne til en Udjevning til Midten efter mindste Kvadraters Metode. Men da Værdierne danner en Periode, kan Resultatet ogsaa fremstilles under den nævnte Form,

$$u_i = \sum (V_{p,q} \cdot (L_p)_i),$$

hvor Leddene L_p er multipliceret med Faktorer, der er mindre end 1. — Man bør lægge Mærke til, at det opgivne ikke indeholder Oplysninger om Betingelserne for en tilfredsstillende Fremstilling af de sande Værdier ved Hjælp af den trigonometriske Række.

Det kan overhovedet neppe i Almindelighed siges med Rette, at den ene Metode er rigtigere end den anden. Der er nemlig Grund til at antage, at naar Intervaller af en vis Størrelse af den sande Funktion kan fremstilles med tilfredsstillende Nøjagtighed ved en Potensrække af forholdsvis lav Grad, vil man kunne opnaa de bedste Resultater ved Anvendelsen af den mekaniske Metode, medens mindste Kvadraters Metode maa antages at kunne give de bedste Resultater, naar hele den sande Funktion kan fremstilles med tilfredsstillende Nøjagtighed ved Hjælp af forholdsvis faa Led af den trigonometriske Række. Dersom den sande Funktion for Eksempel har Formen

$$v_x = (L_1)_x + (L_3)_x + (L_5)_x,$$

vil den mekaniske Metode ikke kunne give et godt Resultat, medens dette tør antages at være Tilfældet, naar Amplituderne aftager jævnt lige ned til de umiskendelige Fejled. Saafremt en Opgave ikke skulde egne sig til Behandling efter den mekaniske Metode, vil dette iøvrigt vise sig, naar man ved Valget af Udjevsningsformlen gaar frem paa den Maade, som nu skal omtales.

Ved Valget af en Udjevsningsformel kan vi støtte os til Elementerne i den trigonometriske Række. Thi selv om vi paa Forhaand ikke véd, om den sande Funktion kan fremstilles ved et begrænset Antal Led af denne Række, maa vi dog betragte det enkelte Led, hvori Elementet ζ indgaar, som en væsentlig Bestanddel af denne Funktion, saafremt ζ^2 er stor i Forhold til $\lambda_2(\zeta)$. Vi maa derfor sørge for, at ethvert saadant Led i det væsentlige kan genfindes i de udjvnede Værdier. Men nu véd vi, at naar vi udjevner efter den mekaniske Metode, vil Værdierne

$$(L_p)_i = a_p \cos p\theta_i + b_p \sin p\theta_i$$

repræsenteres i de udjvnede Værdier ved $V_{p,q} \cdot (L_p)_i$, og vi kan derfor ogsaa opfatte Sagen saaledes, at det er Elementerne a_p og b_p , der er multipliceret med Variationsfaktoren $V_{p,q}$. Før end vi nærmere omtaler selve Valget af Udjevsningsformlen, vil vi derfor foretage en Undersøgelse for at se, om det under visse Omstændigheder kan være tilladt at foretage en saadan Ændring med de ved mindste Kvadraters Metode fundne Elementer.

Det skal først bemærkes, at man umiddelbart kan indse, at naar man i et vist Tilfælde har fundet Elementet ζ , men (for Eksempel for Afrundnings Skyld) i Stedet for ζ benytter Værdien $\zeta + \varepsilon$, saa er der omtrent lige saa stor Sandsynlighed for, at Elementet er forbedret, som for, at det er forværret, saafremt ε er lille i Forhold til Middelfejlen paa ζ . Dette ses ogsaa af Udtrykket for Fejlen, thi dersom ε ikke afhænger af $\lambda_2(\zeta)$, bliver

$$\lambda_2(\zeta + \varepsilon) = \lambda_2(\zeta) + \varepsilon^2,$$

og under den nævnte Forudsætning afviger denne Værdi kun lidt fra $\lambda_2(\zeta)$.

Vi betragter dernæst det Tilfælde, hvor et vist Element ζ bliver multipliceret med en Faktor V , der er uafhængig af ζ . Vi kan selvfølgelig ikke faa at vide, om ζ forbedres eller forværres i et enkelt, bestemt Tilfælde, men vi kan se, hvorledes Udfaldet gennemgaaende vil blive, idet vi beregner Fejlen for $V\zeta$ benyttet som Element i Stedet for ζ .

Kalder vi Elementets sande Værdi for Z , er den sande Fejl paa ζ lig med

$$\zeta - Z = f.$$

Men benytter vi Værdien $V\zeta$, bliver den sande Fejl

$$V\zeta - Z = (V-1)Z + Vf = F.$$

Forudsætter man, at den almindelige Fordelingslov gælder for f , og at Antallet af Tilfælde med Fejl, der ligger mellem f og $f+df$, er ηdf , bliver Gennemsnitsværdien af F^2 lig med

$$F_0^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F^2 \eta df}{\int_{-\infty}^{\infty} \eta df} = (1-V)^2 Z^2 + V^2 \lambda_2(\zeta).$$

Dette gælder for vilkaarlige Værdier af V . Vi kan derfor bestemme den Værdi, som gør F_0^2 til et Minimum. Vi faar

$$V = \frac{Z^2}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)},$$

der giver

$$F_0^2 = \frac{Z^2}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)} \lambda_2(\zeta) < \lambda_2(\zeta).$$

Vil vi dernæst finde Grænserne for de Værdier af V , der giver $F_0^2 < \lambda_2(\zeta)$, sætter vi

$$F_0^2 = (1-V)^2 Z^2 + V^2 \lambda_2(\zeta) = \lambda_2(\zeta).$$

Heraf faar vi Værdierne $V=1$ og $V = \frac{Z^2 - \lambda_2(\zeta)}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)}$, og man har altsaa $F_0^2 < \lambda_2(\zeta)$, naar

$$\frac{Z^2 - \lambda_2(\zeta)}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)} < V < 1.$$

Det, vi har Brug for, er en Angivelse af den lavere Grænse for Faktoren V , men det fundne Udtryk kan ikke benyttes, fordi den ubekendte Værdi Z indgaar deri. Derimod tør vi benytte $\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \lambda_2(\zeta)}$ som lavere Grænse, thi for det første fandt vi ovenfor, at det hertil svarende Udtryk, nemlig $\frac{Z^2}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)}$, gav den mindste Værdi for F_0^2 , og for det andet er der — i alt Fald naar ζ^2 er stor i Forhold til $\lambda_2(\zeta)$ — ikke Grund til at frygte for, at

$$\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \lambda_2(\zeta)} < \frac{Z^2 - \lambda_2(\zeta)}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)},$$

thi da skulde man have

$$2\zeta^2 + \lambda_2(\zeta) < Z^2.$$

Resultatet er altsaa, at naar

$$\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \lambda_2(\zeta)} < V < 1,$$

tør man antage, at Elementværdien $V\zeta$ gennemgaaende er lige saa god som Værdien ζ .

I det foregaaende har vi sammenlignet Udfaldet, naar vi i det ene Tilfælde beholdt Elementet uforandret og i det andet multiplicerede det med en vis Faktor. For de tvivlsomme Elementers Vedkommende maa vi imidlertid i Henhold til Fremgangsmaaden ved Valg af Leddene til Udjevningsrækker sammenligne Udfaldet, naar vi i det ene Tilfælde kaster Elementet bort og i det andet multiplicerer det med en vis Faktor. Da den sande Fejl er $\zeta - Z = f$, begaar man Fejlen $-Z$, naar man kaster Elementet ζ bort; benytter man derimod Værdien $V\zeta$, bliver Gennemsnitsværdien af Kvadratet af den sande Fejl ligesom før

$$F_0^2 = (1-V)^2 Z^2 + V^2 \lambda_2(\zeta).$$

Vi sætter først

$$(1-V)^2 Z^2 + V^2 \lambda_2(\zeta) = Z^2,$$

finder deraf $V=0$ og $V = \frac{2Z^2}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)}$ og ser endvidere, at

$$F_0^2 < Z^2,$$

naar

$$\frac{2Z^2}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)} > V > 0.$$

I Stedet for $\frac{2Z^2}{Z^2 + \lambda_2(\zeta)}$ tager vi $\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \lambda_2(\zeta)}$ som den højere Grænse for V ; for de tvivlsomme Elementers Vedkommende tør vi da antage, at saafremt vi har

$$\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \lambda_2(\zeta)} > V > 0,$$

begaar vi gennemgaaende en mindre Fejl, naar vi benytter Værdien $V\zeta$ i Stedet for ζ , end naar vi kaster Elementet ζ helt bort.

Tilbage staar Spørgsmaalet om, hvor man skal sætte Skellet mellem de gode og de tvivlsomme Elementer. Det er givet, at et Element maa betragtes som hørende til de tvivlsomme, naar $\frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)} < 1$, men vi har tidligere set, at Skellet maa sættes højere end ved $\frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)} = 1$. I det følgende er Skellet sat ved $\frac{\zeta^2}{\lambda_2(\zeta)} = \frac{3}{2}$; min Begrundelse for netop at vælge denne Værdi er ikke tilfredsstillende, og man kan derfor betragte Værdien som vilkaarlig valgt. Ved Anvendelsen af denne Grænseværdi synes det imidlertid ikke at have videre Betydning, om den rettelig burde tages lidt større eller lidt mindre.

Vi sætter i det følgende

$$\frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \lambda_2(\zeta)} = G$$

og kalder G for Faktorgrænsen.

Resultatet af vor Undersøgelse anvendt paa den mekaniske Udjevningssmetode bliver da, at der med Hensyn til de gode Elementer ikke kan gøres Indsigelse mod at benytte en vis Udjevningssformel, naar vi har de til Elementerne svarende Variationsfaktorer liggende mellem 1 og G . Anvender vi derimod en Formel, hvor vi for de gode Elementer har $V < G$, maa Udjevningen paa dette Punkt betragtes som værende for stærk, idet der kastes for meget bort af vedkommende Led. Da Elementet ζ er Amplituden for en Sinusoide, kan vi tage Maximalafvigelserne,

$$\pm (G - V)\zeta,$$

som et Maal for den Fejl, der her begaas i Retning af for stærk Udjevning. Dersom denne Fejl er saa stor, at den ikke kan taales, maa den paagældende Udjevningssformel forkastes.

For de numerisk smaa Elementers Vedkommende betragter vi Udjevningssformlen som god, naar V ligger mellem Grænserne G og Nul. Hvis vi for disse Elementer derimod faar $V > G$, betragtes Udjevningen paa dette Punkt som værende for svag, og vi kan tage

$$\pm (V - G)\zeta$$

som et Maal for den Fejl, der her begaaes i Retning af for svag Udjevning.

Dersom vi tænker os et Tilfælde, hvor Udjevningsformlen ifølge de ovenstaaende Regler hverken er for stærk eller for svag, synes der ikke at kunne være Tvivl om, at den til Formlen svarende Udjevning maa betragtes som legitim, hvilket skal sige, at vi opnaar den Forbedring af Værdierne, som overhovedet kan opnaas ved Hjælp af det forelagte Materiale. Der maa naturligvis altid blive større Usikkerhed i Resultatet, naar Udjevningfunktionen er ubekendt, end naar den er bekendt, men Kilden til denne større Usikkerhed maa i det nævnte Tilfælde, der iøvrigt kan indtræffe, ikke søges hos Udjevningsformlen, men hos Resultaterne af vor Undersøgelse af den ubekendte Funktion, altsaa hos de fundne Elementer og deres Middelfejl.

Medens vi altid kan vælge Formlen saaledes, at Udjevningen (ifølge de opstillede Regler) ikke bliver for stærk, vil Forholdene imidlertid i Reglen være saaledes, at der ikke kan opstilles en Formel, der hverken giver for stærk eller for svag Udjevning. Det maa erindres, at Udtrykkene for stærk og for svag Udjevning svarer til to kvalitetsforskellige Begreber. Der er her Tale om to forskellige Arter af Fejl; de kan ikke afbalancere hinanden saaledes, at man kan begaa begge Slags Fejl og som Resultat faa en legitim Udjevning. En vis Udjevning kan derfor være baa de for stærk og for svag. Dersom man saaledes i et givet Tilfælde anvender

$$u = L_1 + L_2 + L_3$$

som Udjevningfunktion, medens den teoretisk rigtige Funktion har Formen

$$v = L_1 + L_2 + L_4,$$

er den foretagne Udjevning for stærk, fordi Ledet L_4 er kastet bort, og den er for svag, fordi L_3 , der kun indeholder Fejl, ikke er kastet bort.

I Overensstemmelse med det udviklede bliver Fremgangsmaaden ved Valget af en Udjevningsformel da følgende:

Man opsøger i Tabellerne et Sæt Variationsfaktorer, der gennemgaaende falder sammen med de tilsvarende Faktorgrænser. Derpaa foretager man en nærmere Undersøgelse og betragter da først de numerisk store Elementer for at se, om Udjevningen bliver for stærk, idet der maaske kastes for meget bort af disse Elementer. Dersom dette ikke er Tilfældet, betragter man de numerisk smaa Elementer for at se, om Udjevningen bliver for svag, idet der maaske tages for meget med af disse Elementer.

For de store Elementers Vedkommende betragter vi det som tilfredsstillende, naar $V > G$. Og dersom $V < G$, benyttes $\pm (G - V)\zeta$ som Maal for Fejlen i Retning af for stærk Udjevning.

For de smaa Elementers Vedkommende betragter vi det som tilfredsstillende, naar $V < G$. Og dersom $V > G$, benyttes $\pm (V - G)\zeta$ som Maal for Fejlen i Retning af for svag Udjevning.

Grænsen mellem de store og de smaa Elementer sættes som omtalt ved $\zeta^2: \lambda_2(\zeta) = \frac{3}{2}$, hvortil svarer $G = \frac{3}{2}$.

Dette skal nu anvendes paa nogle Talværdier, der er hentet fra den tidligere omtalte Opgave angaaende Temperaturen daglige Periode. I Tabel 6 findes opført Elementerne a_p og b_p til de 6 første Dobbeltled samt de tilsvarende Faktorgrænser G .

Tabel 6.

	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
	-2.129	-2.029	.103	-.015	.088	.205
G	.9999	.9998	.94	.26	.92	.97
(C). $v=4$. $V_{p,4}$	1.0000		.998		.948	
(D). $v=8$. $V_{p,1}$	1.0000		.999		.977	

	a_4	b_4	a_5	b_5	a_6	b_6
	-.045	.025	.002	-.006	-.006	-.012
G	.81	.60	0	.1	.18	.42
(C). $v=4$. $V_{p,4}$	.693		.280		.043	
(D). $v=8$. $V_{p,1}$	.846		.525		.178	

Antallet af Iagttagelser i Perioden, n , er her 24. Vi undersøger først Tabellen til Skema (C), Side 81. Lægger vi særlig Mærke til det forholdsvis store Element b_3 med Faktorgrænsen .97, viser det sig, at naar Udjevningen ikke skal blive meget for stærk, maa vi have mindst 4 Korrektionsled. Men under disse Omstændigheder maa vi gentage den egentlige Udjevning mindst 4 Gange, thi man ser, at for $v=4$ er $V_{12,4} = .052$, og man tager altsaa i dette Tilfælde endnu over 5 % med af det udprægede Fejllid L_{12} .

Vi har altsaa til nærmere Undersøgelse den Udjevning, der svarer til Skema (C) og $v=4$ og $q=4$. Først undersøger vi de store Elementer for at se, hvor denne Udjevning virker for stærkt. Vi har her $V_{p,4} < G$ for b_3 og a_4 , og Fejlen i Retning af for stærk Udjevning er henholdsvis

$$\pm (.97 - .95) \times .205 = \pm .004$$

og

$$\pm (.81 - .69) \times .045 = \pm .005.$$

Der vil herefter kunne forekomme saadanne Fejl paa omtrent en Enhed i anden Decimal, men det vil vise sig, at dette ikke betyder meget i Forhold til den Nøjagtighed, som overhovedet kan opnaas. Lad os i alt Fald foreløbig antage, at vi ikke behøver at forkaste Udjevningen, fordi den er for stærk; vi skal da betragte de smaa Led for at se, om Udjevningen skulde være for svag.

For a_6 og b_6 er Resultatet tilfredsstillende, eftersom man her har $V_{6,4} < G$. Derimod er Udjevningen for svag med Hensyn til b_2 , a_5 og b_5 .

For b_2 er Fejlen i Retning af for svag Udjevning $\pm \cdot 011$, men da der efter dette Element kommer a_3 og b_3 , som kræver store Variationsfaktorer, vil der vise sig en saadan Fejl ved hvilken Udjevningsformel, vi end vælger. For b_5 bliver Fejlen $\pm \cdot 001$ og for a_5 endnu mindre. Denne Udjevning kan herefter ikke forkastes som værende for svag, medens det erindres, at den er noget, men ikke meget, for stærk.

Vi vil dernæst gaa ud fra Skema (D), hvorved vi kan opnaa at faa en Udjevning, der paa intet Punkt er for stærk. Af Tabel 2, Side 85, ser vi straks, at det er nødvendigt at tage et Korrektionsled med, og lægger vi ogsaa her særlig Mærke til b_3 med $G = \cdot 97$, vil det ses, at der kan blive Tale om at tage v lig med 8 eller maaske 9 eller 10. Vi ønsker imidlertid denne Gang at være paa den sikre Side, og vi tager derfor $v = 8$. Af Tabel 6 ses det da, at vi for de store Elementers Vedkommende overalt har $V_{p,1} > G$, og den hertil svarende Udjevning er altsaa ikke for stærk. Vi skal derefter se, om den skulde være for svag. Elementet b_2 og dets særlige Stilling har vi tidligere omtalt, og med Hensyn til a_6 og b_6 er Udjevningsformlen ogsaa tilfredsstillende, eftersom vi har $V_{6,1} < G$. Tilbage staar a_5 og b_5 , hvor Fejlene i Retning af for svag Udjevning bliver henholdsvis $\pm \cdot 001$ og $\pm \cdot 003$, hvilket senere viser sig at være smaa Størrelser i Forhold til Fejlen paa den udjevnede Værdi. Og ved at betragte Rækken af Variationsfaktorer vil man kunne indse, at naar man vil have en Formel, der paa intet Punkt giver for stærk Udjevning, vil man ikke kunne finde nogen, der overfor de smaa Led giver en væsentlig stærkere Udjevning end den, vi kan opnaa med den undersøgte Udjevningsformel.

Elementet b_4 , der har $G = \cdot 6$ og altsaa tilfældigvis ligger paa Grænsen mellem de store og de smaa Elementer, er ikke hidtil omtalt. Vil man henregne det til de store Elementer, er Resultatet tilfredsstillende for begge de undersøgte Formlers Vedkommende, og vil man henregne det til de smaa Elementer, bliver Fejlene i Retning af for svag Udjevning henholdsvis $\pm \cdot 002$ og $\pm \cdot 006$.

Vi har kun betragtet 12 af de 23 Elementer, som kan beregnes, men man tør forudsætte, at de øvrige alle er smaa, og at det derfor er rigtigt at kaste dem bort. Skulde denne Forudsætning imidlertid være urigtig, vil man blive gjort opmærksom derpaa, naar man efter Regningens Udførelse undersøger Differenserne mellem de givne og de udjevnede Værdier. Vi har nemlig almindeligt

$$o_i - F_q(o_i) = \sum \left((1 - V_{p,q}) \cdot (L_p)_i \right),$$

og alt, hvad der kastes bort af de enkelte Led, genfindes derfor i disse Differenser, hvor en Fejl af Betydning i den antydede Retning vil gøre sig bemærket som en paafaldende »Gang«.

I Fig. 14 er de to undersøgte Udjevningsformler repræsenteret ved deres Variationsfaktorer, der er fremstillet som kontinuerte Funktioner af p .

De afsatte Punkter repræsenterer de beregnede Faktorgrænser; der er altsaa 2 af dem for hver hel Værdi af p . Dersom en Udjevning i Overensstemmelse med de opstillede Regler hverken skulde være for stærk eller for svag, maatte den tilsvarende Kurve i den øverste Del af Diagrammet, nemlig for $G > .6$, ligge over Punkterne og i den underste Del ligge under Punkterne. Da Kurvens Hovedform er givet, vil det i et Tilfælde som det foreliggende være umuligt at opfylde disse Fordringer fuldtud, hvorfor man kan betragte Valget af en passende Formel som en Art Udjevningsopgave. Dersom man

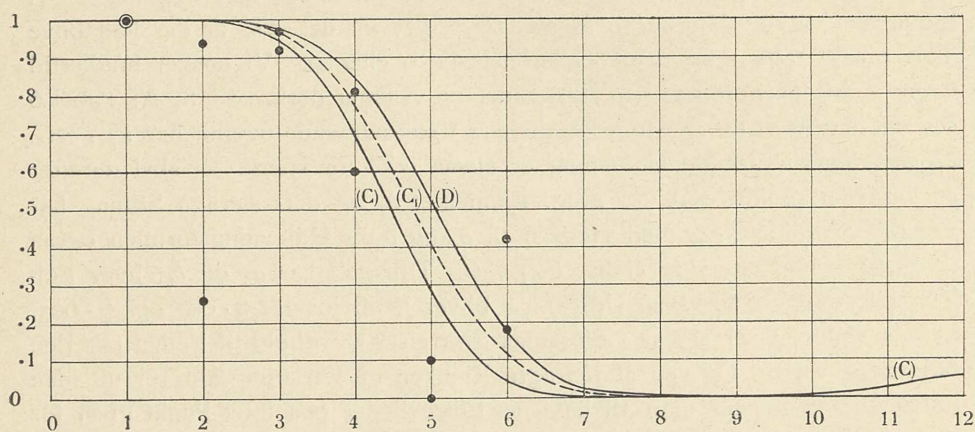


Fig. 14.

vil bedømme de opnaaede Resultater ud fra dette Synspunkt, maa man erindre, at der skal tillægges de forskellige Værdier af G meget forskellige Vægte. — Dersom man ikke er tilfreds med nogen af de undersøgte Udjevningsformler, staar der flere Udveje aabne. Saaledes kommer man ved at sætte $k = \frac{1}{4}$ i Stedet for $k = \frac{1}{3}$ i Skema (C) til den Udjevningsformel, som svarer til (C_1) i Fig. 14. Dette Skema vil blive nærmere omtalt i § 18.

Naar man for enhver Pris vil undgaa at udjevne for stærkt, er det kun med Hensyn til de smaa Led, at selve Valget af Udjevningsformlen faar Lighed med en Udjevningsopgave. Men Ligheden kan ogsaa strække sig til Behandlingen af de store Led, nemlig naar den Anvendelse, man vil gøre af Resultatet, tillader eller endog gør det ønskeligt, at der benyttes en noget »for stærk« Udjevning. Men under alle Omstændigheder kommer Valget af Udjevningsformlen til at afhænge af en Række af Overvejelser, og Usikkerheden i Bestemmelsen af de enkelte Elementer og af deres Godhed faar derfor her mindre Betydning for det endelige Resultat end ved mindste Kvadraters Metode, hvor man paa det samme Grundlag skal antage eller forkaste de enkelte Elementer. Der er herefter nogen Grund til at antage, at man kan opnaa bedre Resultater med den mekaniske Metode end med mindste Kvadraters Metode; det vil maaske være vanskeligt at bevise, at dette i Almindelighed virkelig bliver Tilfældet, men det kan i alt Fald vises

ved Eksempler, hvorledes vor Metode bedst formaar at bevare en Funktions Ejendommelighed mod Udviskning.

For at faa et Holdepunkt vil vi opstille en Slags Skema for en Funktions Ejendommeligheder. Vi kan da først tænke os den sande Funktion spaltet i to Dele, for Eksempel v og w , saaledes at v bliver af simpel Beskaffenhed, hvilket her betyder, at v kan fremstilles med tilstrækkelig Nøjagtighed ved Hjælp af et ringe Antal Led af den trigonometriske Række; Resultaterne af de to Udjevningemetoder vil, som vi har set, for denne Del af Funktionen blive meget nær det samme. Vi betragter derfor kun den anden Del, w , der indeholder det, som vi her skal forstaa ved Ejendommeligheder.

Under Omtalen af Manglerne ved en Udjevning efter mindste Kvadraters Metode berørte vi det samme Emne, og der benyttede vi til Fremstilling af en Afvigelse fra en simpel Funktion et Skema, der kan fremstilles som en Værdirække

$$\dots\dots\dots 0, 0, 0, \delta, 0, 0, 0, \dots\dots\dots;$$

dette er dog snarere et Skema for Fejlen, eller rettere for den Del af Fejlen, som overhovedet kan reduceres ved en Udjevning (naar den sande Funktion er ubekendt). Indeholder Funktionen en saadan Ejendommelighed af virkelig Betydning, er Intervallerne taget for store, saaledes at der ikke bliver et passende Forhold mellem Funktionens Mangel paa Simpelhed og Antallet af Iagttagelser. Skal Ejendommeligheden set fra Udjevningens Synspunkt ikke tage sig ud som en Fejl, maa den strække sig over flere Intervaller, og vi kan derfor som Skema benytte for Eksempel Værdirækken

$$\dots\dots\dots 0, 0, \frac{1}{2}\delta, \delta, \frac{1}{2}\delta, 0, 0, \dots\dots\dots,$$

eller simple

$$\dots\dots\dots 0, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\dots\dots,$$

hvilket svarer til, at der i Funktionen findes en Særegenhed, der maa fremstilles omtrent som antydnet i Fig. 16¹⁾. Er der for Eksempel 24 Værdier i Perioden, og sætter vi $w_0=1$, $w_1=w_{-1}=\frac{1}{2}$, udtrykkes de 24 Værdier af w da ved

$$w_i = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \sum_{q=1}^{q=11} ((1 + \cos 15^0 \cdot q) \cos 15^0 \cdot qi).$$

Antager vi, at de 7 første Elementer er store, hvilket er i Overensstemmelse med den Udjevning, der almindeligst anvendes ved meteorologiske

¹⁾ Dersom man skulde mene, at en saadan Særegenhed er for paafaldende til, at man kan vente at træffe den hos vore dog nogenlunde simple Funktioner, skal det bemærkes, at det paafaldende hidrører fra de benyttede Enheder for Abscisser og Ordinatorer; der er saaledes intet paafaldende ved Fig. 15, der bestaar af en Sinusoide og den samme Særegenhed, men fremstillet med et andet Maalestoksforhold.

Iagttagelser, vil den betragtede Ejendommelighed give som sit Bidrag til Udjevningen:

$$u_i = \cdot 083 + \cdot 164 \cos 15^\circ \cdot i + \cdot 156 \cos 30^\circ \cdot i + \cdot 142 \cos 45^\circ \cdot i;$$

Resultatet er fremstillet i Fig. 17.

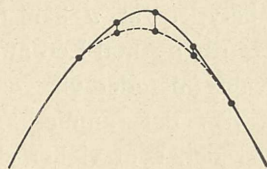


Fig. 15.

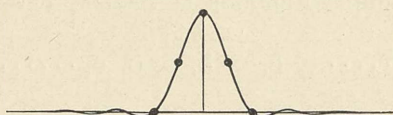


Fig. 16

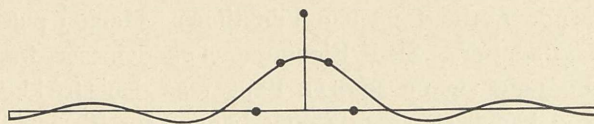


Fig. 17.

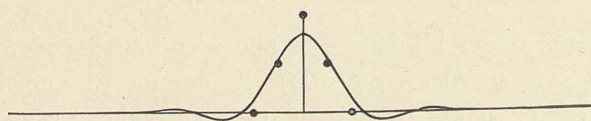


Fig. 18.

Tænker vi os nu, at vi behandler den samme Opgave, hvor den betragtede Ejendommelighed forekommer, efter vor Metode og for Eksempel udjevner de forelagte Værdier efter Skema (D) og tager $v=4$, kan vi ikke nøjes med o_i som forbedret Værdi; Tabel 2 over de hertil hørende Variationsfaktorer giver nemlig

$p =$	1	2	3	4	5	6
$V_{0,p}$	·9987	·9797	·906	·743	·505	·260
$V_{1,p}$	1.0000	·9996	·992	·941	·772	·473,

hvoraf man ser, at der ved en saadan Udjevning vilde kastes henholdsvis mere end 2 % og 9 % bort af L_2 og L_3 , hvilket ikke vilde være tilladeligt, da disse Led er forudsat at være store. Vi maa derfor tage mindst eet Korrektionsled med, og Udjevningsformlen bliver altsaa

$$F_1(o_i) = o_i + \frac{(4)}{14} \Delta^4 o_i.$$

Den betragtede Ejendommelighed vil derfor som sit Bidrag give de til denne Formel svarende Værdier, $F_1(w)$, der er opført i nedenstaaende Opstilling. Resultatet er grafisk fremstillet i Fig. 18.

i	w	$\frac{(4)}{w}$	$\frac{(5)}{14}w$	$F_1(w)$
.....				
—1	0.5	.523	.029	.55
0	1.0	.702	.093	.80
1	0.5	.523	.029	.55
2	0	.182	— .058	.12
3	0	— .018	— .049	— .07
4	0	— .036	.009	— .03
5	0	— .006	.022	.02
6	0	.002	.005	.01
.....				

Man ser heraf, at ved den sidste Udjevning er i alt Fald de karakteristiske Træk bevaret, hvilket knap nok kan siges om Resultatet, der er fremstillet i Fig. 17. Men man ser desuden, at ved mindste Kvadraters Metode vil en saadan lokal Ejendommelighed paavirke Resultatet over hele Perioden, hvilket vil sige, at der indføres Fejl i alle de andre Værdier. Den mekaniske Metode indfører derimod kun i ringe Grad saadanne Fejl, hvilket ogsaa kan indses deraf, at ved Beregningen af den udjevnede Værdi indgaar de nærmest staaende Værdier med de største Vægte, medens de fjernere staaende Værdier kun faar ringe eller slet ingen Betydning.

Man kunde paa samme Maade undersøge ogsaa andre Arter af Ejendommeligheder, men det har i denne Sammenhæng ikke stort at betyde, hvilke Typer man vil opstille. Det kommer nemlig blot an paa at betragte saadanne karakteristiske Træk hos den sande Funktion, som kun kan fremstilles tilfredsstillende ved Hjælp af mange smaa Led, thi saafremt der overhovedet bliver en Forskel af Betydning imellem Resultaterne, maa en saadan Forskel hidrøre fra disse Led. Og nu véd vi, at det svage Punkt ved mindste Kvadraters Metode netop er Behandlingen af de smaa Led, medens Vanskeligheden paa dette Sted for den mekaniske Metodes Vedkommende er reduceret fra at være et Valg imellem alt eller intet i saa

og saa mange enkelte Tilfælde til at blive en Art Udjevning af samtlige Tilfælde. Man maa derfor være berettiget til at antage, at man ved Anvendelsen af den sidste Metode er i Stand til at opnaa bedre Resultater end ved mindste Kvadraters Metode — i alt Fald for nogle Opgavers Vedkommende.

§ 18.

Skemaet for selve Udjevningen.

I det foregaaende gik vi ud fra, at man havde et tilstrækkeligt Forraad af Udjevningsformler at vælge imellem, saaledes at man altid kunde finde een, der var tilfredsstillende. Paa Forhaand kan man naturligvis ikke opstille alle de Formler, der kan blive Brug for, men Udvalget behøver ikke at være særlig stort, for at man i alt Fald kan faa tilstrækkelige Oplysninger om, hvorledes man skal ændre Formlerne, hvis der imellem de opstillede ikke findes nogen, som er fuldt tilfredsstillende.

For at man skal kunne træffe et Valg mellem Udjevningsformlerne, maa der foreligge Tabeller over de tilsvarende Variationsfaktorer. Det drejer sig derfor om at opstille et tilstrækkeligt Udvalg af Udjevningsskemaer og at beregne Tabeller i et passende Omfang. Under Omtalen af Variationsfaktorerne er der allerede meddelt nogle Udjevningsskemaer, men det blev ikke nævnt, efter hvilke Principer de var opstillet, og det var heller ikke nødvendigt at give en Begrundelse paa det paagældende Sted, fordi denne Sag ikke vedrører Teorien; dersom man blot finder en Udjevningsformel, som er fuldt tilfredsstillende, kan det fra Teoriens Side set være ligegyldigt, hvorledes man er kommet til den, eller hvilke Regninger den kræver udført. Derimod er det af Hensyn til Regnearbejdets Omfang ikke ligegyldigt, hvorledes vi naar Maalet, men det er altsaa kun praktiske Hensyn, der skal tages ved Opstillingen af Udjevningsskemaerne.

De 5 Skemaer, der tidligere er omtalt, nemlig

$$(A) \quad o_0 = \frac{1}{7} (o_3 + o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2} + o_{-3}) = o_0 + 2\Delta^2 o_0 + \Delta^4 o_0 + \frac{1}{7}\Delta^6 o_0,$$

$$(B) \quad o_0 = \frac{1}{5} (o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2}) = o_0 + \Delta^2 o_0 + \frac{1}{5}\Delta^4 o_0,$$

$$(C) \quad o_0 = \frac{1}{3} (o_1 + o_0 + o_{-1}) = o_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 o_0,$$

$$(D) \quad o_0 = \frac{1}{14} (4(o_1 + 2o_0 + o_{-1}) - (o_2 + o_{-2})) = o_0 - \frac{1}{14}\Delta^4 o_0,$$

$$(E) \quad o_0 = \frac{3}{10} (o_1 + 2o_0 + o_{-1}) - \frac{4}{10} (o_2 + o_{-2}) + \frac{1}{5} (o_3 + o_{-3}) = o_0 + \frac{1}{50}\Delta^6 o_0,$$

er opstillet til Brug for de enkelte Opgaver, som senere skal behandles, men tilfældigvis danner de et Udvalg, som kan være tilstrækkeligt til et første Overblik. Fig. 19, der er en Fremstilling af de til selve Skemaerne hørende Variationsfaktorer — altsaa en Fremstilling af $V_{p,0}$ for $v=1$ — anskueliggør Betydningen af de forskellige Skemaer. De afsatte Abscisser er Værdier af p for $n=73$ og $n=24$. Endvidere giver Fig. 20 en Fremstilling svarende til en gentaget Regning efter disse Skemaer, altsaa til $\phi^{(2)}$. — Læg-

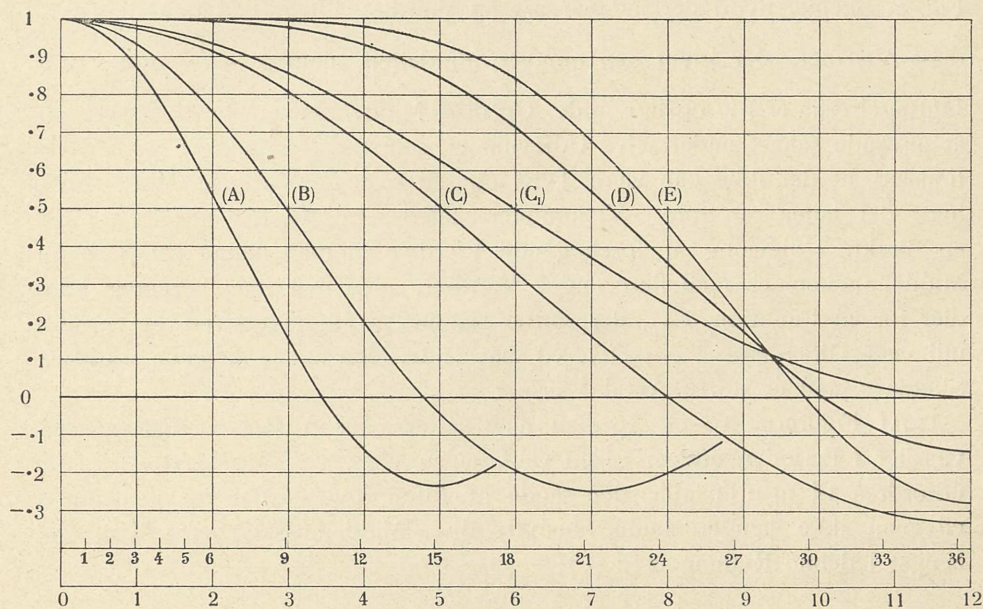


Fig. 19.

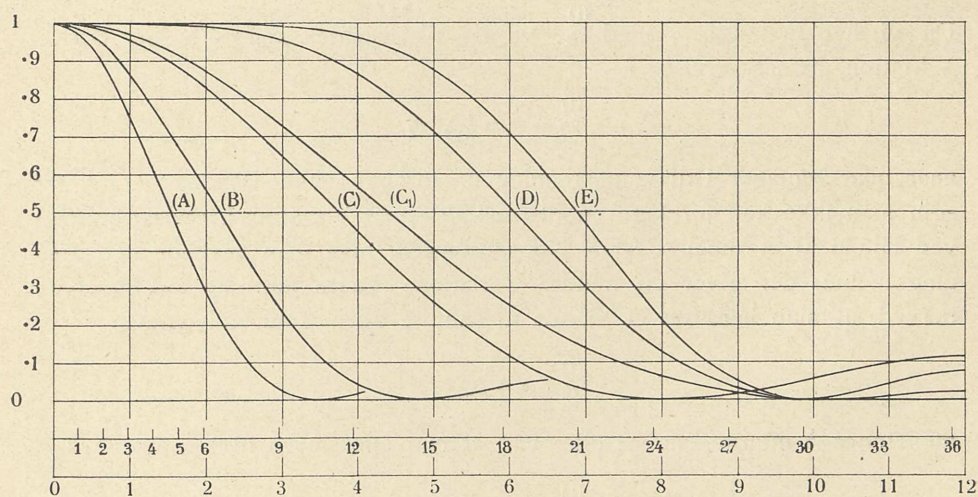


Fig. 20.

ger man Mærke til, hvorledes de forskellige Skemaer angriber de enkelte Led, vil man heraf kunne skønne, at naar $n=73$, er man væsentligst henvist til at benytte (A) og (B), og naar $n=24$, væsentligst til (D) og (E) eller dog til Skemaer, der staar disse Typer nær.

Dersom man uden at have bestemte Opgaver for Øje vil opstille et Udvalg af Skemaer, vil det være naturligt, at man først udvælger de Former, hvor allerede den enkelte Udjevning reducerer Fejlen paa de forelagte Værdier saa meget som muligt i Forhold til det paakrævede Regnearbejde. For et Skema, hvori der indgaar $2m+1$ Værdier, bliver det Middeltallet af

disse Værdier, der giver den mindste Middelfejl, nemlig $\frac{1}{2m+1}\lambda_2(o)$, naar

Iagttagelserne er frie og lige gode. Og disse Middeltalsskemaer er saa nemme at anvende saavel under selve Udjevningen som ved Beregningen af Korrektionsled, at der ikke kan være Tvivl om, at man bør benytte dem overalt, hvor det lader sig gøre. Vi kommer saaledes til (A), (B) og (C). — Ved en direkte Udjevning af foreliggende Værdier vil man neppe faa Brug for Middeltalsskemaer med flere end 7 Værdier, men hvis man beregner Værdier for en Funktion, $f(i)$, der slutter sig nær til Iagttagelserne, og dernæst udjevner Differenserne $o_i - f(i)$, vil man undertiden kunne anvende saadanne Skemaer med et større Antal Værdier.

Af Figurerne 19 og 20 kan man se, at naar Antallet af Iagttagelsesværdier i Perioden aftager til en vis Grænse, eller naar Antallet af Led, der udfordres til at fremstille den sande Funktion, overskrider en vis Grænse, vil man ikke længere kunne benytte disse Middeltalsskemaer. Man naar længst i denne Retning med (C):

$$^{(1)} o_i = o_i + \frac{1}{3}\Delta^2 o_i.$$

Da vi her erstatter o_i med $^{(1)} o_i$, vil de tilsvarende sande Værdier lide en Variation, hvis Størrelse er

$$^{(1)} v_i - v_i = \frac{1}{3}\Delta^2 v_i;$$

naar man gentager Udjevningsregningen, forøges denne Variation, og dersom man ikke kan foretage en tilstrækkelig stor Variation i modsat Retning ved Hjælp af et rimeligt Antal Korrektionsled, maa man anvende et Udjevningsskema, der giver en mindre Variation. Dette kan ske for Eksempel derved, at man benytter et Skema af samme Form som (C), nemlig

$$^{(1)} o_i = o_i + k\Delta^2 o_i,$$

men tager k mindre end $\frac{1}{3}$, eller ved at man gaar over til Formen

$$^{(1)} o_i = o_i + k\Delta^4 o_i.$$

Benytter man den første af disse Fremgangsmaader, faar man for Eks-
empel med $k=\frac{1}{4}$ det ret nemme Regneskema

$$(C_1) \quad o_i = \frac{1}{4} (o_{i+1} + 2o_i + o_{i-1})^{(1)}$$

med Udjvningsformel

$$F_q(o_i) = o_i - \frac{v}{4} \Delta^2 o_i^{(v+1)} + \frac{v(v+3)}{16 \cdot 2} \Delta^4 o_i^{(v+2)} - \frac{v(v+4)(v+5)}{64 \cdot 6} \Delta^6 o_i^{(v+3)} + \dots$$

og Variationsfaktorer

$$V_{p,q} = (1 + \frac{1}{4}c_p)^v \left[1 - \frac{v}{4}c_p(1 + \frac{1}{4}c_p) + \frac{v(v+3)}{16 \cdot 2}c_p^2(1 + \frac{1}{4}c_p)^2 - \frac{v(v+4)(v+5)}{64 \cdot 6}c_p^3(1 + \frac{1}{4}c_p)^3 + \dots \right]$$

Tabel 7.

Variationsfaktorer. Skema (C₁). $n = 24$.

	$p = 1$	2	3	4	5	6	8
$v=4$	$V_{p,0}$	·9336	·7578	·5308	·3164	·1569	·0625
	$V_{p,1}$	·9961	·9473	·7962	·5537	·3034	·1250
	$V_{p,2}$	·9998	·9887	·9123	·7094	·4229	·1797
	$V_{p,3}$	1.0000	·9976	·9621	·8095	·5185	·2266
$v=6$	$V_{p,0}$	·9020	·6597	·3867	·1780	·0622	·0156
	$V_{p,1}$	·9927	·9071	·6767	·3782	·1492	·0391
	$V_{p,2}$	·9995	·9766	·8399	·5472	·2405	·0654
	$V_{p,3}$	1.0000	·9943	·9230	·6762	·3273	·0923
	$V_{p,4}$	1.0000	·9987	·9635	·7706	·4063	·1185

Af Figurerne 19 og 20 ser man, hvorledes dette Skema, der er betegnet med (C₁), er beliggende i Forhold til (C) og (D). Skemaet er iøvrigt omtalt tidligere (Side 98). Den Udjvningsformel, der er repræsenteret i Fig. 14 ved den punkterede Kurve, er dannet heraf ved at sætte $v=6$ og $q=4$, altsaa

$$F_4(o_i) = o_i - \frac{6}{4} \Delta^2 o_i^{(7)} + \frac{27}{16} \Delta^4 o_i^{(8)} - \frac{110}{64} \Delta^6 o_i^{(9)} + \frac{29}{256} \Delta^8 o_i^{(10)}$$

Vi skal derefter betragte den anden af de nævnte Fremgangsmaader, hvorved man kan formindske Variationen, nemlig ved at benytte Skemaer af Formen

$$o_i = o_i + k \Delta^4 o_i^{(1)}$$

For frie og lige gode Iagttagelser giver $k = -\frac{3}{35}$ her Minimum af $\lambda_2^{(1)}(o)$, hvorefter Udjevningsskemaet skulde være

$$^{(1)}o_i = \frac{1}{35}(-3o_{i+2} + 12o_{i+1} + 17o_i + 12o_{i-1} - 3o_{i-2}).$$

Betragtet som Skema for en Regning, der skal gentages flere Gange, er dette temmelig ubekvemt. Det bliver betydelig bedre, naar man sætter $k = -\frac{1}{12}$, der giver

$$^{(1)}o_i = \frac{1}{12}(-o_{i+2} + 4o_{i+1} + 6o_i + 4o_{i-1} - o_{i-2}),$$

eller $k = -\frac{1}{14}$, der giver

$$(D) \quad ^{(1)}o_i = \frac{1}{14}(4(o_{i+1} + 2o_i + o_{i-1}) - (o_{i+2} + o_{i-2})).$$

Det sidste Skema har jeg foretrukket som det nemmeste. Men i Tilfælde, hvor man maa ændre Formlerne for at faa et tilfredsstillende Resultat, kan man for Eksempel sætte $k = -\frac{1}{12}$, hvorved Skemaet nærmer sig til (C), eller $k = -\frac{1}{16}$, hvorved det nærmer sig til (E). Af nedenstaaende Opstilling kan man se, hvor lidt Middelfejlen paa $^{(1)}o$ forandrer sig med de forskellige Værdier af k . Tillige er der opført Værdierne for $\lambda_2^{(2)}(o)$. $\lambda_2(o)$ er her sat lig med 1.

$k =$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{35}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{16}$
$\lambda_2^{(1)}(o)$	·50	·49	·49	·50	·52
$\lambda_2^{(2)}(o)$	·39	·40	·40	·42	·43

De sidst omtalte Former kan betegnes som »Trediegradskemaer«, fordi de kan benyttes, uden at der tilføjes Korrektionsled, naar den sande Funktion er af højest tredie Grad. Dersom ogsaa disse Skemaer varierer Funktionen for stærkt, kan man gaa over til »Femtegradsskemaet«:

$$^{(1)}o_i = o_i + k\Delta^6 o_i.$$

Man faar her Minimum af $\lambda_2^{(1)}(o)$ for $k = \frac{5}{231}$; vil man have et nogenlunde simpelt Regneskema, kan man sætte $k = \frac{1}{50}$, og saaledes faar man Skemaet

$$^{(1)}o_i = \frac{1}{50}(30o_i + 15(o_{i+1} + o_{i-1}) - 6(o_{i+2} + o_{i-2}) + (o_{i+3} + o_{i-3})).$$

Ved Anvendelsen er det maaske bekvemmest at benytte Formen

$$(E) \quad o_0 = \frac{3}{10}((o_1 + 2o_0 + o_{-1}) - \frac{4}{10}(o_2 + o_{-2})) + \frac{1}{50}(o_3 + o_{-3}).$$

Her er $\lambda_2^{(1)}(o) = \cdot 57\lambda_2(o)$.

De 5 Hovedformer, som her er opstillet, vil antagelig vise sig at være tilstrækkelige til de fleste af vore Opgaver. Men det er muligt, at der i visse Tilfælde kan anvendes andre Skemaer med Fordel. Enhver »mekanisk Udjevningsskema« kan som nævnt benyttes som Skema (eller eventuelt som færdig Udjevningsskema); en større Samling af saadanne Formler findes i *I. P. Gram's* Afhandling: »Om Udjevningsskemaer«. De af disse Formler, der er fundet paa Grundlag af en Udjevning til Midten efter mindste Kvadraters Metode, kommer frem hos os som Udjevningsskemaer, naar det opgives, hvor mange Iagttagelsesværdier der skal indgaa deri, og hvilken »Grad« Skemaet skal have.

Eksempelvis kan vi gennemgaa Skemaet med 7 Værdier. Den almindelige Form for dette er

$$^{(1)} o_i = o_i + k_1 \Delta^2 o_i + k_2 \Delta^4 o_i + k_3 \Delta^6 o_i.$$

Bestemmes Koefficienterne saaledes, at $\lambda_2^{(1)}(o)$ bliver et Minimum, idet Iagttagelserne antages at være frie og lige gode, kommer vi til Middeltals-skemaet (A):

$$^{(1)} o_0 = \frac{1}{7}(o_3 + o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2} + o_{-3}) = o_0 + 2\Delta^2 o_0 + \Delta^4 o_0 + \frac{1}{7}\Delta^6 o_0.$$

Dette er et »Førstegradsskema«, thi de sande Værdier vil lide Variationen

$$^{(1)} v_i - v_i = 2\Delta^2 v_i + \Delta^4 v_i + \frac{1}{7}\Delta^6 v_i,$$

og denne Variation forsvinder kun, hvis Funktionen er af første Grad.

Vil vi dernæst danne et »Trediegradsskema« med 7 Værdier, sætter vi $k_1 = 0$ og bestemmer k_2 og k_3 ved Hjælp af mindste Middelfejls Princip. Derved faar vi $k_2 = -\frac{3}{7}$ og $k_3 = -\frac{2}{21}$ og

$$^{(1)} o_0 = \frac{1}{21}(7o_0 + 6(o_1 + o_{-1}) + 3(o_2 + o_{-2}) - 2(o_3 + o_{-3}));$$

her er $\lambda_2^{(1)}(o) = \frac{1}{3}\lambda_2(o)$.

Vil vi endelig danne et »Femtegradsskema«, sætter vi $k_1 = k_2 = 0$ og kommer saaledes til Formen

$$^{(1)} o_i = k_3 \Delta^6 o_i,$$

der er behandlet foran.

Der er i det foregaaende ved Bestemmelsen af Skemaets Koefficienter stadig benyttet Antagelsen om, at Iagttagelserne var frie og lige gode. Dette er imidlertid ikke Tilfældet med vore Iagttagelser, men det er et rent praktisk Spørgsmaal, om der paa dette Sted skal tages Hensyn hertil, ligesom det overhovedet er et Spørgsmaal af praktisk Natur, hvilken Udjevningsskemaformel man skal anvende, saafremt man kan finde flere, som maa antages

at give lige gode Resultater. Den Omstændighed, at vore Iagttagelser er stærkt bundet til hverandre, skal der være taget tilbørligt Hensyn til ved Bestemmelsen af de enkelte Elementers Godhed, altsaa ved Bestemmelsen af Faktorgrænserne, men har man gjort dette og dernæst fundet en Udjevsningsformel, der viser en tilfredsstillende Overensstemmelse mellem Variationsfaktorer og Faktorgrænser, er Sagen hermed afgjort for Teoriens Vedkommende. Det samme gælder med Hensyn til den Omstændighed, at Iagttagelsesværdierne ikke er lige gode. Men der kunde blive Tale om, at Regnearbejdet bliver større end nødvendigt, naar man ikke tager Hensyn til de nævnte Omstændigheder.

Lad os da se, hvorledes Sagen stiller sig, naar vi for Eksempel skal bestemme k i

$$o_i = o_i^{(1)} + k\Delta^2 o_i$$

og tage Hensyn til Bindingen. Vi kan da gaa ud fra den tidligere opstillede Sætning, at for en Funktion

$$f = a_1 o_{i+1} + a_2 o_i + a_3 o_{i-1}$$

er

$$\lambda_2(f) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2B_1(a_1 a_2 + a_2 a_3) + 2B_2 a_1 a_3) \lambda_2(o),$$

naar Iagttagelserne er lige gode, og naar Baandet mellem o_{i+1} og o_i er lig med Baandet mellem o_i og o_{i-1} ; disse Fordringer vil nemlig ved vore Op-gaver være tilfredsstillet med god Tilnærmelse. Benytter man dette til at udtrykke $\lambda_2^{(1)}(o)$ for

$$o_i = k o_{i+1} + (1 - 2k) o_i + k o_{i-1},$$

giver Minimumsbetingelsen os

$$k = \frac{1 - B_1}{3 - 4B_1 + B_2}.$$

I et af de tidligere anførte Eksempler paa Bindingen saa vi, at Baandene B_1 og B_2 kan være meget nær lige store; naar dette er Tilfældet, bliver altsaa $k = \frac{1}{3}$ ligesom ved frie Iagttagelser. Men i Almindelighed er B_2 mindre end B_1 , og k skulde herefter tages større end $\frac{1}{3}$. Forholdet er

imidlertid det samme som foran, nemlig at $\lambda_2^{(1)}(o)$ betragtet som Funktion af k kun varierer langsomt i Nærheden af sit Minimum, saaledes at selv temmelig store Ændringer i k kun har ringe Betydning for Størrelsen af Middelfejlen. Tager vi saaledes et Eksempel fra Maanedernes Middeltemperatur, hvor jeg har fundet $B_1 = .6$ og $B_2 = .4$, faar man heraf $k = \frac{2}{5}$ og $\lambda_2^{(1)}(o) = .68 \lambda_2(o)$, medens de samme Værdier for Baandene, men $k = \frac{1}{3}$, giver $\lambda_2^{(1)}(o) = .69 \lambda_2(o)$ — altsaa praktisk talt det samme.

Selv om Forskellen mellem Skemaernes Evne til at reducere Fejlen var betydelig større, kunde det dog næppe betale sig at anvende en paa denne Maade fundet Værdi for k ; man maa hellere benytte et bekvemt Regneskema og eventuelt gentage selve Udjevningen nogle flere Gange, end det ellers vilde have været nødvendigt.

Angaaende den Omstændighed, at Iagttagelsesværdiernes Middelfejl ikke er konstant, stiller Sagen sig saaledes, at vi overhovedet ikke kan tage Hensyn hertil ved Bestemmelsen af Skemaets Koefficienter. Det skal først bemærkes, at der her ikke er Tale om saadanne Spring i $\lambda_2(o)$, som kan forekomme, hvor der er benyttet ulige mange Iagttagelser til at danne de forskellige Værdier af o . Dersom $\lambda_2(o)$ i det betragtede Interval kan fremstilles ved en lineær Funktion, vil man komme til de samme Værdier for Koefficienterne, hvad enten der tages Hensyn til Vægtene eller ej. Vi har nemlig

$$^{(1)} o_i = a_0 o_i + a_1(o_{i+1} + o_{i-1}) + a_2(o_{i+2} + o_{i-2}) + \dots,$$

og naar man endvidere har

$$\lambda_2(o_{i+\mu}) = (1 + \alpha\mu)\lambda_2(o_i),$$

vil $\lambda_2(o_i)$, der tjener til Bestemmelse af Koefficienterne a , være uafhængig af α . Hvis man derimod maa sætte

$$\lambda_2(o_{i+\mu}) = (1 + \alpha\mu + \beta\mu^2)\lambda_2(o_i),$$

vil $\lambda_2(o_i)$ ganske vist afhænge af β , men da $\lambda_2(o)$ lige saa vel som o hører til en periodisk Funktion, vil β være positiv i visse Dele af Perioden og negativ i andre; vi kan derfor ikke tage Hensyn til β ved Opstillingen af et Skema, der skal bruges over hele Perioden.

Alle de omtalte Skemaer og Udjevningsformler har det fælles, at de giver en legitim Udjevning, naar den sande Funktion er hel og algebraisk og af indtil en vis Grad. Man kan imidlertid ogsaa danne Formler med tilsvarende Egenskaber, naar den sande Funktion bestaar af et vist Antal Dobbeltled af den trigonometriske Række. Er der m Dobbeltled, kan man for Eksempel af $2m+1$ Iagttagelsesværdier danne en Formel, hvis almindelige Udtryk bliver

$$^{(1)} o_i = o_i + k(o_i + \alpha_1(o_{i+1} + o_{i-1}) + \alpha_2(o_{i+2} + o_{i-2}) + \dots + \alpha_m(o_{i+m} + o_{i-m})).$$

Betragter vi ligesom tidligere o_i som en Sum af Leddene

$$(L_p)_i = a_p \cos p\theta i + b_p \sin p\theta i,$$

bliver Resultatet af en Udjevning for Værdierne af $(L_p)_i$:

$$^{(1)}(L_p)_i = (L_p)_i + k(1 + 2\alpha_1 \cos p\theta + 2\alpha_2 \cos 2p\theta + \dots + 2\alpha_m \cos mp\theta) \cdot (L_p)_i.$$

Sætter man nu

$$1 + 2\alpha_1 \cos p\theta + 2\alpha_2 \cos 2p\theta + \dots + 2\alpha_m \cos mp\theta = 0,$$

kan man bestemme $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, idet de m Værdier af p , som findes i den sande Funktion, giver m saadanne Ligninger; sluttelig bestemmes Koefficienten k ved Hjælp af mindste Middelfejls Princip. Beregner man $^{(v)}o$ med det saaledes dannede Skema har man altsaa

$$^{(v)}(L_p)_i = (L_p)_i$$

for de benyttede m Værdier af p .

Disse Formler har en vis teoretisk Interesse, men de er neppe i Besiddelse af særlige Fordele. Bestemmer man Koefficienterne til dem paa den angivne Maade, faar man alt andet end simple Tal at regne med, og hvis man afrunder Koefficienterne, bliver man maaske nødt til at tage Korrektionsled til Hjælp, og i saa Tilfælde kan man lige saa gerne bruge de andre Regneskemaer. Vi skal derfor blot beregne Koefficienterne til Formlen med 3 Værdier, altsaa til

$$^{(1)}o_i = o_i + k(o_i + \alpha(o_{i+1} + o_{i-1})).$$

I dette Tilfælde maa den sande Funktion kun bestaa af eet Dobbeltled, og er denne Funktion af samme Form som L_1 , findes α af Ligningen

$$1 + 2\alpha \cos \theta = 0.$$

Betragter man Iagttagelserne som frie og lige gode, har man endvidere

$$\lambda_2^{(1)}(o) = ((1+k)^2 + 2k^2\alpha^2)\lambda_2(o),$$

og Minimumsbetingelsen giver heraf

$$k = -\frac{1}{1+2\alpha^2}.$$

Dette vil vi anvende paa et lille Taleksempel, nemlig Udjevning af de 8 Tabelværdier for

$$v_i = \cos(45^\circ \cdot i + 7^\circ)$$

afrundede til første Decimal. Vi har her $\theta = \frac{2\pi}{8} = 45^\circ$, hvilket giver $\alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ og $k = -\frac{1}{2}$. Indsættes disse Værdier i vor Formel, faar vi

$$o_i^{(1)} = \frac{1}{2}o_i + \frac{1}{2\sqrt{2}}(o_{i+1} + o_{i-1}).$$

Her tager vi $o_i^{(1)}$ til udjevnet og forbedret Værdi og kommer saa til følgende Resultat:

i	v	o	$o^{(1)}$	$o^{(1)} - v$
1	.993	1.0	.995	.002
2	.616	.6	.618	.002
3	— .122	— .1	— .121	.001
4	— .788	— .8	— .789	— .001
5	— .993	— 1.0	— .995	— .002
6	— .616	— .6	— .618	— .002
7	.122	.1	.121	— .001
8	.788	.8	.789	.001.

Denne Art Formler afviger paa en ejendommelig Maade fra vistnok alle de Formler, der hidtil er opstillet til Brug ved mekanisk Udjevning, idet Summen af Koefficienterne ikke er lig med 1, og dersom de Værdier, der indgaar i Formlen, ligger paa en ret Linie, vil den udjvnede Værdi derfor komme udenfor denne Linie. Hvis vi saaledes ovenfor havde o_{i-1} , o_i og o_{i+1} liggende paa en ret Linie, vilde vi faa $o_i^{(1)} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}o_i$. Et saadant Resultat vilde være meningsløst, naar man ikke kendte den sande Funktion, men i nærværende Tilfælde kan man direkte indse, at den saaledes beregnede Værdi i Almindelighed vil være bedre end den givne. — I det følgende er denne Art Formler ikke benyttet.

§ 19.

Udjevningen foretaget med de givne Værdiers Differenser.

Beregningen af $o^{(v)}$ kan blive temmelig besværlig, navnlig naar de forelagte Værdier er mangelcifrede. Er dette Tilfældet, kan man imidlertid anvende en Fremgangsmaade, hvorved den største Del af Regningen i Almindelighed bliver paa det nærmeste trecifret, idet man i Stedet for at

udjevne selve de forelagte Værdier udjevner deres første Differenser. Vi udjevner da Værdierne af Δo_i med Benyttelse af det samme Skema, som vi ellers vilde have brugt til o_i , og faar $\Delta^{(v)} o$ efter en v Gange gentaget Regning. Der maa derefter foretages en Summation, ved Hjælp af hvilken vi finder en Summationskonstant, der giver os Værdirækken $o_i^{(v)}$, hvorefter Regningen fortsættes paa sædvanlig Maade.

I Praksis er dette saare simpelt, men vi maa dog undersøge, om de saaledes bestemte Værdier af $o^{(v)}$ er identiske med dem, som en direkte Beregning vilde give.

Lad os antage. at vi først beregner $o^{(v)}$ direkte og saaledes, at vi ikke afrunder noget Sted. Under disse Omstændigheder kan Resultatet udtrykkes ved den identiske Ligning

$$o_i^{(v)} = o_i + \alpha_1 \Delta^2 o_i + \alpha_2 \Delta^4 o_i + \dots$$

Foretager vi her en Addition fra $i=1$ til $i=n$, forsvinder alle Differensleddene, eftersom Værdierne af o_i kan ordnes i en sluttet Kreds; vi har for Eksempel

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta^2 o_i) = \sum_{i=1}^{i=n} (o_{i+1} - 2o_i + o_{i-1}) = \sum_{i=1}^{i=n} (o_i) - 2 \sum_{i=1}^{i=n} (o_i) + \sum_{i=1}^{i=n} (o_i) = 0,$$

og saaledes fremdeles. Vi har altsaa

$$\sum_{i=1}^{i=n} (o_i^{(v)}) = \sum_{i=1}^{i=n} (o_i).$$

Vi udfører derefter den til Udtrykket for $o^{(v)}$ svarende Regning med Differenserne

$$\Delta o_i = o_{i+1} - o_i;$$

som Følge af Regneoperationernes Beskaffenhed kan Resultatet skrives saaledes:

$$(\Delta o_i)^{(v)} = o_{i+1}^{(v)} - o_i^{(v)} = \Delta o_i^{(v)}.$$

Udfører vi nu Summationerne

$$S_q = \sum_{i=1}^{i=q} (\Delta o_i)^{(v)},$$

kan Resultaterne heraf skrives saaledes:

$$\begin{aligned}
S_1 &= o_2^{(v)} - o_1^{(v)}, \\
S_2 &= o_3^{(v)} - o_1^{(v)}, \\
&\dots\dots\dots \\
S_{n-1} &= o_n^{(v)} - o_1^{(v)}, \\
S_n &= o_{n+1}^{(v)} - o_1^{(v)} = o_1^{(v)} - o_1^{(v)} = 0.^1)
\end{aligned}$$

Ved Addition af Summerne S_q faar vi derpaa

$$\sum_{q=1}^{q=n} (S_q) = \sum_{i=1}^{i=n} o_i^{(v)} - n o^{(v)} = \sum_{i=1}^{i=n} o_i^{(v)} - n o_1^{(v)},$$

idet vi ifølge det foregaaende skal have

$$\sum_{i=1}^{i=n} o_i^{(v)} = \sum_{i=1}^{i=n} o_i.$$

Vi kan derfor bestemme Summationskonstanten

$$o_1^{(v)} = \frac{1}{n} \left(\sum o_i - \sum (S_q) \right),$$

og ved derefter at addere $o_1^{(v)}$ til $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ faar vi de øvrige søgte Værdier, $o_2^{(v)}, o_3^{(v)}, \dots, o_n^{(v)}$. — De paa den sidste Maade beregnede Værdier er herefter identiske med de direkte fundne.

Imidlertid vil man altid afrunde, og vil man holde de Fejl, som indføres herved, indenfor passende Grænser, maa man gaa frem med større Forsigtighed, naar man udjevner Differenserne, end naar man beregner $o^{(v)}$ direkte. Lad os for at holde os til noget bestemt for Eksempel forudsætte, at o er givet med 3 Decimaler, at vi udjevner efter Skema (C), og at vi skal have $v=8$, samt at vi vil give det endelige Resultat med 3 Deci-

¹⁾ Vi har altsaa almindeligt

$$[A^{2\mu} o^{(v)}] = 0$$

og faar derfor, naar vi betegner de udjevnede Værdier med u ,

$$[u] = [o^{(v)}] = [o],$$

eller

$$[o - u] = [\alpha] = 0,$$

hvilket er omtalt Side 26.

maler. Vi vil først betragte Afrundingsfejlene ved en direkte Udjevning af de forelagte Værdier. Kvadratet af Afrundingsfejlen for o , som vi her vil betegne med $\lambda_2^{(1)}(o)$, kan sættes til $\frac{1}{12 \cdot 10^6}$; under Beregningen af o formindskes disse Fejl ved Udjevning, men samtidig kommer der nye Fejl til, og vi kan sætte

$$\lambda_2^{(2)}(o) = \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot \frac{1}{12 \cdot 10^6},$$

og for o faar vi (se Side 75)

$$\lambda_2^{(8)}(o) = (\cdot 129 + \cdot 139 + \cdot 152 + \cdot 168 + \cdot 193 + \cdot 235 + \cdot 333 + 1) \cdot \frac{1}{12 \cdot 10^6}.$$

Fejlen vil dog blive betydelig mindre, naar vi i Stedet for (C) som Skema bruger $\binom{(2)}{C}$:

$$o_0 = \frac{1}{9} (o_2 + 2o_1 + 3o_0 + 2o_{-1} + o_{-2}),$$

idet Afrundingernes Antal derved indskrænkes til det halve, saa at vi faar

$$\lambda_2^{(8)}(o) = (\cdot 139 + \cdot 168 + \cdot 235 + 1) \cdot \frac{1}{12 \cdot 10^6}.$$

Der kommer imidlertid flere Afrundingsfejl til sammen med Korrektionsleddene. Vi kan da tage fjerde Decimal med i o , hvorved vi faar

$$\lambda_2^{(8)}(o) = (\cdot 139 + \cdot 168 + \cdot 235 + \cdot 01) \cdot \frac{1}{12 \cdot 10^6},$$

og naar Korrektionsleddene derefter ligeledes beregnes med fire Decimaler, hvilket i Reglen vil sige Regning med 2 à 3 Cifre, bliver Kvadratet af Afrundingsfejlen for disse Leds Vedkommende af Størrelsesordenen $\frac{1}{12 \cdot 10^8}$.

Lad os derpaa tænke os, at vi udjevner de forelagte Værdiers Differenser. Her maa man sørge for, at Fejlene ikke hober sig saaledes op, at der ved Summationen kommer Spring i de udjevnede Værdier. Man kan da gaa saaledes frem: det oprindelige Antal Decimaler beholdes kun til den trediesidste Udjevning (i ovenstaaende Eksempel med Skema $\binom{(2)}{C}$ til Δo), og her sørger man for, at Summen af de udjevnede Differenser er Nul. De Afvigelser, der kan fremkomme, beløber sig i Reglen ikke til mere end en eller to Enheder af sidste Decimal; dersom Divisoren i det benyttede Skema er et lige Tal, vil der i Almindelighed findes nogle Divisionsrester, som er halv saa store som Divisor, og man kan da naa det ønskede Resultat ved efter Omstændighederne at forhøje eller undlade at forhøje. Er Divisor et ulige Tal, kan man, hvis der for Eksempel er Brug for en For-

højelse, oplede et lille Interval, hvor Summen af Divisionsresterne er omtrent lig med Divisor, og her forhøje den mellemste af Værdierne. Naar dette udføres med en vis Takt, er Skaden ikke stor, navnlig fordi den begaaede Fejl fordeles ved den fortsatte Udjevning. Idet vi holder os til Eksemplet, har vi altsaa $\Delta_o^{(4)}$ beregnet med 3 Decimaler og $S_n(\Delta_o^{(4)})=0$. Vi beregner derpaa $\Delta_o^{(6)}$ med 4 Decimaler og $\Delta_o^{(8)}$ med 5 Decimaler, men uden at foretage noget særligt for at gøre Summerne af disse Værdier til Nul. $S_n(\Delta_o^{(8)})$ vil da højest afvige fra Nul med et Par Enheder i fjerde Decimal. Vi foretager derpaa Summationen, og efter at Summationskonstanten er føjet til, bortkastes femte Decimal. Derefter fortsættes lige som før. — Af de følgende Eksempler vil man se, at Sagen selv er ganske simpel.

VI.

BESTEMMELSER AF METEOROLOGISKE ELEMENTERS PERIODISKE VÆRDIER.

§ 20.

Temperatures daglige Periode.

Naar Materialet til Bestemmelse af Temperatures daglige Periode bestaar af Iagttagelser, der strækker sig over adskillige Aar, vil man, dersom man behandler Opgaven med Omhu, i Almindelighed foretage en Beregning for hver enkelt Kalendermaan. Ganske vist bestemmes den daglige Periode undertiden for hele Aaret under eet, men der er saa stor Forskel paa Amplituden om Sommeren og om Vinteren, at Opgaven i denne Form ikke kan siges at være veldefineret, og en Beregning, der foretages paa den nævnte Maade, vil derfor indbefatte en Udjevning af selve de sande Funktioner. Hyppigere ser man dog de enkelte Aarstider behandlet, og dette lader sig forsvare, naar Hensigten kun er at give et Overblik over Fænomenet. Det mest korrekte vilde være at bestemme Perioden for den enkelte Datum, men Variationerne i den sande Funktion er dog ikke saa store, at der kan rejses alvorlige Indvendinger imod at foretage Beregningen paa den almindelige Maade, nemlig for de enkelte Kalendermaaneder.

En Undersøgelse af Temperatures daglige Periode vil altsaa i Almindelighed dele sig i 12 Opgaver for hver Station. Da det ikke her er Formaalet at foretage meteorologiske Undersøgelser, men kun at belyse en til saadanne Undersøgelser tjenlig Regnemetode, vil vi nøjes med at bestemme Perioden for Juli Maaned i København; Materialet er allerede omtalt under »Baandene og Bindingens Karakter«, og Opgaven er benyttet som Eksempel under »Valg af Udjevningsformel«. Det er derfor kun nødvendigt at tilføje nogle faa Bemærkninger, førend vi begynder paa selve Udjevningsregningen.

Iagttagelserne, der omfatter 23 Aar, er først befriet for aperiodiske Bestanddele, saaledes som omtalt under »Materialets forberedende Behandling«. Af de 23 Værdier for hver fuld Time i Døgnet, som saaledes fremkommer, er Middelværdierne, ϕ_i , samt de tilsvarende $\lambda_2(\phi_i)$ beregnet; disse

Værdier findes opført i Tabel 9, Side 121. Materialet er dernæst delt i 4 Grupper, 6 Aar i hver af de 3 første og 5 Aar i den sidste. Af Middeltallene for hver af disse Grupper er der beregnet Konstanterne til Leddene L_3 , L_4 og L_6 af den trigonometriske Række. Denne Beregning er foretaget udelukkende for at bestemme de til Konstanterne svarende Værdier af Faktorgrænserne, G . Resultatet er:

	a_3	b_3	a_4	b_4	a_6	b_6
	·143	·141	·015	·061	—·026	·019
	·020	·233	—·049	·032	—·020	—·020
	·098	·286	—·072	—·031	·005	—·005
	·090	·153	—·084	·050	·025	—·047
Middel	·088	·205	—·045	·025	—·006	—·012
λ_2	·00065	·00118	·00049	·00043	·00014	·00019 ¹⁾
G	·92	·97	·81	·60	·18	·42.

De øvrige i nedenstaaende Tabel 8 opførte Værdier for λ_2 er ikke bestemt direkte. Til a_1 , b_1 , a_2 og b_2 er benyttet Gennemsnitsværdien af Iagttagelsesværdiernes Middelfejlskvadrat, nemlig ·00778. Dersom Iagttagelserne var frie og lige gode, skulde man have (Side 33)

$$\lambda_2(a_p) = \lambda_2(b_p) = \frac{2}{24} \lambda_2(o) = \cdot00065;$$

nu er Iagttagelserne bundet til hverandre, og som Følge deraf vil Fejlen gennemgaaende være større end den saaledes fundne Værdi for de første af Konstanterne og mindre for de sidste²⁾. Benytter vi derfor den fundne Værdi til dermed at bestemme for Eksempel

$$G = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_2(a_1)} = \frac{4.53}{4.53 + \cdot0365} = \cdot9999,$$

maa det antages, at G er for stor, og vi tør derfor gaa ud fra, at vi er paa den sikre Side med Hensyn til ikke at udjevne for stærkt, naar blot den tilsvarende Variationsfaktor er større end G . — Iøvrigt vil man efterhaanden se, at de første Konstanter er af underordnet Betydning ved Valget af Udjevningssformlen, idet de i Almindelighed vil faa tilstrækkelig store

¹⁾ Til Beregningen af λ_2 og G er der flere Steder brugt et Ciffer udover de angivne.

²⁾ Det erindres, at naar Iagttagelserne er bundet til hverandre, bliver Middelfejlen for en Sum forholdsvis stor og Middelfejlen for en Differens forholdsvis lille. Og her er den første og den sidste Konstant dannet henholdsvis af en Sum, nemlig

$$a_0 = (o_1 + o_2 + \dots + o_n) : n,$$

og saaledes

$$a_{12} = (-o_1 + o_2 - \dots + o_n) : n,$$

medens Udtrykkene for de mellemliggende Konstanter med Hensyn til Fordelingen af Fortegn danner en jevn Overgang fra det ene til det andet af de ovenstaaende Udtryk.

Variationsfaktorer alene paa Grund af de Hensyn, som skal tages til de andre Konstanter.

Endelig skal Beregningen af $\lambda_2(a_5)$ og $\lambda_2(b_5)$ omtales. L_5 er aabenbart et udpræget »Fejldet«, og det burde derfor kastes helt bort; dette sker imidlertid ikke, og det kan da have nogen Interesse at se, hvor meget for svag Udjevningen er paa dette Punkt. Paa den anden Side er der ikke tilstrækkelig Grund til at foretage en direkte Beregning af Middelfejlen, og vi har da benyttet Middeltallet af $\lambda_2(a_4)$, $\lambda_2(b_4)$, $\lambda_2(a_6)$ og $\lambda_2(b_6)$.

Tabel 8.

	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
	-2.129	-2.029	.103	-.015	.088	.205.
λ_2	(.0365)	(.0365)	(.0365)	(.0365)	.0365	.02118
G	.9999	.9998	.94	.26	.92	.97
(C). $\nu=4$ $V_{p,4}$	1.0000		.998		.948	
(C ₁). $\nu=6$ $V_{p,4}$	1.0000		.999		.963	
(D). $\nu=8$ $V_{p,1}$	1.0000		.999		.977	

	a_4	b_4	a_5	b_5	a_6	b_6
	-.045	.025	.002	-.006	-.006	-.012
λ_2	.0349	.0343	(.033)	(.033)	.0314	.0319
G	.81	.60	.0	.1	.18	.42
(C). $\nu=4$ $V_{p,4}$	.693		.280		.043	
(C ₁). $\nu=6$ $V_{p,4}$	.771		.406		.118	
(D). $\nu=8$ $V_{p,1}$	.846		.525		.178.	

I Tabel 8 er der endvidere opført 3 Rækker af Variationsfaktorer. Ifølge tidligere Undersøgelser (Side 97) maa den Udjevning, der svarer til den første af disse Rækker, betragtes som værende noget for stærk, og den, der svarer til den sidste, som noget for svag. Den mellemste Række hører til Formlen

$$F_4(o_i) = o_i - \frac{6}{4} \Delta^2 o_i + \frac{27}{4^2} \Delta^4 o_i - \frac{110}{4^3} \Delta^6 o_i + \frac{429}{4^4} \Delta^8 o_i,$$

der er omtalt Side 105. Denne Formel maa ifølge vore Regler betragtes som næsten helt tilfredsstillende; da Værdierne af Variationsfaktorerne ligger omtrent midt imellem de to andre Rækker af Værdier, kan man paa Forhaand vide, at en Udjevning efter denne Formel giver Resultater, der ligeledes ligger omtrent midt imellem de andre Formlers Resultater. Det kan imidlertid have sin Interesse at se, hvor meget Resultaterne afviger fra hin-

anden for en Udjevning, der er lidt for stærk, og en, som ikke er for stærk, og vi vil derfor foretrække at udføre de to andre Udjevninger.

Den første Række af Variationsfaktorer er taget fra Tabel 1, Side 81, hvor man ser, at man her skal bruge Skema (C):

$$^{(1)}o_0 = \frac{1}{3}(o_1 + o_0 + o_{-1}) = o_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 o_0,$$

samt at $v=4$, og $q=4$. Udjevningsformlen bliver derfor (se (27) Side 78)

$$F_4(o_i) = o_i - \frac{4}{3}\Delta^2 o_i + \frac{14}{9}\Delta^4 o_i - \frac{48}{27}\Delta^6 o_i + \frac{165}{81}\Delta^8 o_i.$$

Beregningen er dog ikke udført efter selve Skema (C), men efter det, som kan betegnes med $\binom{(2)}{C}$, nemlig

$$^{(2)}o_0 = \frac{1}{9}(o_2 + 2o_1 + 3o_0 + 2o_{-1} + o_{-2}).$$

Udjevningen er foretaget med første Differens af Iagttagelsesværdierne, og det er altsaa $\Delta^{(2)}o$ og $\Delta^{(4)}o$, der er beregnet (se Tabel 9).

Det næste Skridt, der skal foretages, er Summation af $\Delta^{(4)}o$, hvorved vi faar Kolonnen $^{(4)}o_i - ^{(4)}o_1$; heraf bestemmes $^{(4)}o_1$, idet vi har

$$\sum_1^{24} (^{(4)}o_i - ^{(4)}o_1) = 52.4563 = -24 ^{(4)}o_1,$$

eftersom vi skal have (Side 112)

$$\Sigma(^{(4)}o_i) = \Sigma(o_i) = 0.$$

Vi faar da $^{(4)}o_1 = -2.1857$, hvorefter denne Værdi adderet til $^{(4)}o_i - ^{(4)}o_1$ giver $^{(4)}o_i$.

Beregningen af Korrektionsleddene kan foretages paa en temmelig nem Maade. Man skal nemlig danne $\Delta^{(v+1)}o_i$ af $^{(v)}o_i$, og man har

$$\Delta^{(v+1)}o_i = \frac{1}{3}\Delta^2(^{(v)}o_{i+1} + ^{(v)}o_i + ^{(v)}o_{i-1}) = \frac{1}{3}(^{(v)}o_{i+2} - ^{(v)}o_{i+1} - ^{(v)}o_{i-1} + ^{(v)}o_{i-2}) = \frac{1}{3}(\Delta^{(v)}o_{i+1} - \Delta^{(v)}o_{i-2}).$$

Divisionen med 3 bør ikke foretages straks, men man beregner først

$$3\Delta^{(5)}o, 9\Delta^{(6)}o, 27\Delta^{(7)}o, 81\Delta^{(8)}o,$$

og derefter

$$\frac{4}{3}\Delta^{(5)}o, \frac{14}{9}\Delta^{(6)}o, \frac{16}{9}\Delta^{(7)}o, \frac{55}{27}\Delta^{(8)}o;$$

i modsat Tilfælde multiplicerer man nemlig de Fejl, der er indført ved Afrundingen, med Faktorer, der er større end 1.

Tabel 9.

i	o	Δo	$\Delta o^{(2)}$	$\Delta o^{(4)}$	$o_i - o_1^{(4)}$	$o^{(4)}$	$-\frac{4}{3}\Delta^2 o^{(5)}$
1	-2.273	-.276	-.293	-.2849	.0000	-2.1857	-.1282
2	-2.549	-.258	-.216	-.1770	-.2849	-2.4706	-.1563
3	-2.807	-.193	-.079	-.0216	-.4619	-2.6476	-.2116
4	-3.000	.101	.160	.1911	-.4835	-2.6692	-.2703
5	-2.899	.457	.448	.4312	-.2924	-2.4781	-.2962
6	-2.442	.867	.718	.6448	.1388	-2.0469	-.2593
7	-1.575	.922	.860	.7746	.7836	-1.4021	-.1635
8	-.653	1.004	.873	.7990	1.5582	-.6275	-.0384
9	.351	.775	.761	.7311	2.3572	.1715	.0717
10	1.126	.585	.612	.6132	3.0883	.9026	.1413
11	1.711	.421	.467	.4812	3.7015	1.5158	.1680
12	2.132	.357	.354	.3530	4.1827	1.9970	.1743
13	2.489	.283	.237	.2211	4.5357	2.3500	.1811
14	2.772	.120	.095	.0738	4.7568	2.5711	.1991
15	2.892	-.095	-.086	-.0950	4.8306	2.6449	.2205
16	2.797	-.240	-.277	-.2751	4.7356	2.5499	.2320
17	2.557	-.536	-.470	-.4483	4.4605	2.2748	.2197
18	2.021	-.631	-.628	-.5894	4.0122	1.8265	.1781
19	1.390	-.789	-.729	-.6759	3.4228	1.2371	.1094
20	.601	-.865	-.746	-.6944	2.7469	.5612	.0268
21	-.264	-.663	-.678	-.6496	2.0525	-.1332	-.0497
22	-.927	-.581	-.570	-.5641	1.4029	-.7828	-.1018
23	-1.508	-.434	-.452	-.4654	.8388	-1.3469	-.1228
24	-1.942	-.331	-.361	-.3732	.3734	-1.8123	-.1241
Sum	.000	.000	.000	.0002	52.4563	-.0005	-.0002

Ved at addere Korrektionsleddene til $o^{(4)}$ (med Bortkastelse af fjerde Decimal) faar vi de udjvnede og forbedrede Værdier, og sluttelig faar vi Differenserne mellem de givne og de fundne Værdier, $o - F_4(o)$.

Til Sammenligning er der under u opført Resultaterne af en Udjevning efter mindste Kvadraters Metode ved Hjælp af de 3 første Dobbeltled, altsaa

$$u_i = (L_1)_i + (L_2)_i + (L_3)_i.$$

Vil man efter Sædvane anvende den summariske Fejlkritik her, faar man

$$\left[\frac{(o-u)^2}{\lambda_2(o)} \right] = 9, \text{ medens man skulde have } \left[\frac{(o-u)^2}{\lambda_2(o)} \right] = 18 \pm 6, \text{ idet man har } n=24$$

Tabel 9.

$\frac{1}{9}\Delta^4 o^{(6)}$	$-\frac{1}{9}\Delta^6 o^{(7)}$	$\frac{5}{27}\Delta^8 o^{(8)}$	$F_4(o)$	$o-F_4$	$\lambda_2(o)$	u	$o-u$
·0210	·0166	·0091	-2.267	—·006	·0078	-2.293	·020
·0213	·0203	·0118	-2.573	·024	·0088	-2.615	·066
—·0008	·0092	·0075	-2.843	·036	·0100	-2.872	·065
—·0358	—·0090	—·0045	-2.989	—·011	·0091	-2.974	—·026
—·0601	—·0248	—·0123	-2.872	—·027	·0123	-2.815	—·084
—·0587	—·0240	—·0140	-2.403	—·039	·0106	-2.337	—·105
—·0284	—·0101	—·0036	-1.608	·033	·0068	-1.574	—·001
·0102	·0107	·0061	—·639	—·014	·0026	—·643	—·010
·0382	·0208	·0134	·316	·035	·0028	·293	·058
·0404	·0186	·0085	1.111	·015	·0070	1.099	·027
·0244	·0044	·0013	1.714	—·003	·0104	1.712	—·001
·0034	—·0076	—·0073	2.160	—·028	·0095	2.144	—·012
—·0059	—·0132	—·0074	2.505	—·016	·0116	2.456	·033
—·0018	—·0083	—·0050	2.755	·017	·0121	2.691	·081
·0118	—·0010	·0005	2.877	·015	·0141	2.842	·050
·0245	·0066	·0028	2.816	—·019	·0152	2.845	—·048
·0312	·0101	·0048	2.541	·016	·0078	2.621	—·064
·0273	·0102	·0045	2.047	—·026	·0052	2.131	—·110
·0135	·0052	·0032	1.368	·022	·0022	1.411	—·021
—·0065	—·0032	—·0008	·577	·024	·0028	·567	·034
—·0239	—·0117	—·0054	—·224	—·040	·0028	—·263	—·001
—·0292	—·0148	—·0081	—·937	·010	·0037	—·970	·043
—·0187	—·0089	—·0060	-1.503	—·005	·0044	-1.518	·010
·0027	·0039	·0008	-1.929	—·013	·0072	-1.938	—·004
·0001	—·0001	—·0002	·000	·000	·1868	·000	·000

og $m=6$. Dersom Iagttagelserne var frie, vilde denne Udjevning altsaa være for svag. Men sammenligner man Differenserne $o-u$ med $o-F_4$, ser man, at den sidste Udjevning er betydelig svagere, og selv denne Udjevning maa ifølge de tidligere Undersøgelser betragtes som værende lidt for stærk.

Vi skal derefter gaa over til den Udjevning, der svarer til den sidste Række af Variationsfaktorer i Tabel 8; hertil hører Skema (D),

$$o_i = \frac{1}{14} \left(4(o_{i+1} + 2o_i + o_{i-1}) - (o_{i+2} + o_{i-2}) \right) = o_i - \frac{1}{14} \Delta^4 o_i,$$

og Formel

$$F_1(o_i) = o_i + \frac{8}{14} \Delta^4 o_i.$$

Tabel 10.

i	o	$\Delta o^{(8)}$	$o_i - o_1^{(8)}$	$o^{(8)}$	$\frac{8}{14} \Delta^4 o^{(9)}$	$F_1(o)$	$o - F_1$	$F_4 - F_1$	$u - F_1$
1	-2.273	·3086	·0000	-2.2926	·0275	-2.265	—·008	—·002	—·028
2	-2.549	·2514	·3086	-2.6012	·0391	-2.562	·013	—·011	—·053
3	-2.807	·1147	·5600	-2.8526	·0197	-2.833	·026	—·010	—·039
4	-3.000	·1397	·6747	-2.9673	·0234	-2.991	—·009	·002	·017
5	-2.899	·4702	·5350	-2.8276	·0585	-2.886	—·013	·014	·071
6	-2.442	·7704	·0648	-2.3574	·0572	-2.415	—·027	·012	·078
7	-1.575	·9369	·7056	-1.5870	·0213	-1.608	·033	·000	·034
8	·653	·9324	1.6425	·6501	·0227	·627	—·026	—·012	—·016
9	·351	·7987	2.5749	·2823	·0467	·329	·022	—·013	—·036
10	1.126	·6202	3.3736	1.0810	·0386	1.120	·006	—·009	—·021
11	1.711	·4666	3.9938	1.7012	·0090	1.710	·001	·004	·002
12	2.132	·3528	4.4604	2.1678	·0170	2.151	—·019	·009	—·007
13	2.489	·2459	4.8132	2.5206	·0210	2.500	—·011	·005	—·044
14	2.772	·1073	5.0591	2.7665	·0072	2.759	·013	—·004	—·068
15	2.892	—·0741	5.1664	2.8738	·0079	2.882	·010	—·005	—·040
16	2.797	—·2828	5.0923	2.7997	·0157	2.815	—·018	·001	·030
17	2.557	—·4916	4.8095	2.5169	·0194	2.536	·021	·005	·085
18	2.021	—·6678	4.3179	2.0253	·0206	2.046	—·025	·001	·085
19	1.390	—·7750	3.6501	1.3575	·0141	1.372	·018	—·004	·039
20	·601	—·7868	2.8751	·5825	·0028	·580	·021	—·003	—·013
21	—·264	—·7076	2.0883	—·2043	·0217	—·226	—·038	·002	—·037
22	—·927	—·5763	1.3807	—·9119	·0301	—·942	·015	·005	—·028
23	—1.508	—·4467	·8044	—1.4882	·0218	—1.510	·002	·007	—·008
24	—1.942	—·3576	·3577	—1.9349	·0010	—1.934	—·008	·005	—·004
Sum	·000	·0001	55.0224	·0000	·0000	·001	—·001	—·001	—·001

Resultatet og nogle Mellemregninger findes i Tabel 10. Der er ikke Grund til atter at omtale Enkeltheder ved Regningens Udførelse — kun skal det bemærkes, at vi her til Summationskonstantens Bestemmelse faar

$$\sum (o_i - o_1)^{(8)} = 55.0224 = -24o_1^{(8)},$$

hvilket giver $o_1^{(8)} = -2.2926$.

Saa vel $F_1(o)$ som $F_4(o)$ kan betragtes som fremstillet ved den kontinuerte Kurve i Fig. 7 (Side 48); ganske vist er det ikke noget af disse Udjevningforsøg, som er benyttet til denne Tegning, men Afgivelserne er alle mindre end $\frac{1}{10}$ mm. Differenserne mellem de givne og de udjvnede Værdier og

Afvigelserne mellem de forskellige Udjevningforsøg er fremstillet i Fig. 21, hvor 1 cm svarer til $\frac{1}{10}^{\circ}\text{C}$. Her er Værdierne, som er beregnet efter mindste Kvadraters Metode, nemlig $u_i = (L_1)_i + (L_2)_i + (L_3)_i$, subtraheret saavel fra o_i som fra $F_1(o_i)$ og $F_4(o_i)$. De afsatte Punkter repræsenterer her Differenserne $o - u$, den fuldt optrukne Kurve $F_1(o) - u$ og den punkterede Kurve $F_4(o) - u$, medens Abscisseaxen repræsenterer selve Udjevningen u . Man ser, at Udjev-

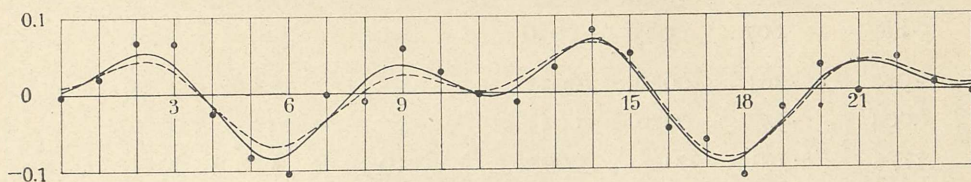


Fig. 21.

ningen $F_4(o)$ gennemgaaende er ganske lidt stærkere end $F_1(o)$, medens u er betydelig stærkere end baade F_4 og F_1 .

Vi skal nu beregne Gennemsnits-Middelfejlen for $F_1(o_i)$, og da vi har overbevist os om, at denne Udjevning ikke er for stærk, kan vi anvende det i § 6 omtalte Udtryk for denne Fejl:

$$\lambda_2(F) = \frac{1}{n} \sum (\lambda_2(o)) - \frac{1}{n} \sum (o - F)^2.$$

Her er $\sum \lambda_2(o) = .1868$ og $\sum (o - F_1)^2 = .0088$, saa at

$$\sqrt{\lambda_2(F_1)} = \sqrt{.00778 - .00037} = \pm .086.$$

Da Middelfejlen for de forelagte Værdier i Gennemsnit bliver $\pm .088$, er den opnaaede Forbedring for selve disse Værdier altsaa ganske ubetydelig. Maaske er Udjevningen lidt for svag, men der kan dog ikke opnaas yderligere Forbedring af nogen Betydning ved en anden Udjevning. Det er let nok at udjevne stærkere, men vi saa, at allerede $F_4(o_i)$ var lidt for stærk, og der har vi $\frac{1}{24} \sum (o - F_4)^2 = .00053$, hvilket giver $\sqrt{\lambda_2(F_4)} = \pm .085$.

Fejlene paa de udjvnede Værdiers Differenser. Man kan betragte Udjevningen af Δo som en selvstændig Opgave med Resultatet $\Delta(F_1(o))$; Værdierne findes i Tabel II, og desuden er Resultatet fremstillet i Fig. 22. Beregner vi $\lambda_2(\Delta o)$ direkte af Værdierne for de 23 Aar, kan vi til Bestemmelsen af $\lambda_2(\Delta F_1)$ anvende den samme Fremgangsmaade, som vi før benyttede overfor $\lambda_2(F_1)$. Ifølge Tabel II har vi i Gennemsnit $\lambda_2(\Delta o) = .00163$ og $(\Delta o - \Delta F_1)^2 = .00107$, hvorefter vi faar

$$\sqrt{\lambda_2(\Delta F_1)} = \sqrt{.00163 - .00107} = \pm .024.$$

Tabel 11.

i	Δo	$\Delta F_1(o)$	$\lambda_2(\Delta o)$	$(\Delta o - \Delta F_1)^2$	$\Delta^2 o$	$\Delta^2 F_1(o)$	$\lambda_2(\Delta^2 o)$	$(\Delta^2 o - \Delta^2 F_1)^2$
1	—·276	—·297	·0013	·0004	·055	·034	·0034	·0004
2	—·258	—·271	·0004	·0002	·018	·026	·0015	·0001
3	—·193	—·158	·0006	·0012	·065	·113	·0013	·0023
4	·101	·105	·0010	·0000	·294	·263	·0018	·0010
5	·457	·471	·0019	·0002	·356	·366	·0029	·0001
6	·867	·807	·0023	·0036	·410	·336	·0042	·0055
7	·922	·981	·0036	·0035	·055	·174	·0035	·0142
8	1·004	·956	·0050	·0023	·082	—·025	·0050	·0114
9	·775	·791	·0021	·0003	—·229	—·165	·0041	·0041
10	·585	·590	·0011	·0000	—·190	—·201	·0017	·0001
11	·421	·441	·0006	·0004	—·164	—·149	·0018	·0002
12	·357	·349	·0018	·0001	—·064	—·092	·0020	·0008
13	·283	·259	·0008	·0006	—·074	—·090	·0033	·0003
14	·120	·123	·0007	·0000	—·163	—·136	·0017	·0007
15	—·095	—·067	·0013	·0008	—·215	—·190	·0016	·0006
16	—·240	—·279	·0023	·0015	—·145	—·212	·0044	·0045
17	—·536	—·490	·0025	·0021	—·296	—·211	·0022	·0072
18	—·631	—·674	·0019	·0018	—·095	—·184	·0052	·0079
19	—·789	—·792	·0028	·0000	—·158	—·118	·0027	·0016
20	—·865	—·806	·0016	·0035	—·076	—·014	·0038	·0038
21	—·663	—·716	·0012	·0028	·202	·090	·0016	·0125
22	—·581	—·568	·0004	·0002	·082	·148	·0010	·0044
23	—·434	—·424	·0009	·0001	·147	·144	·0008	·0000
24	—·331	—·331	·0009	·0000	·103	·093	·0017	·0001
Sum	·000	·000	·0390	·0256	·000	·000	·0632	·0838

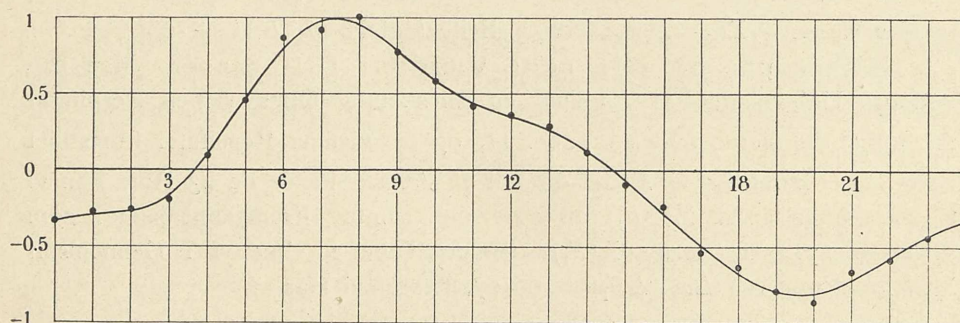


Fig. 22.

Imidlertid er vor Bestemmelse af $\lambda_2(\Delta F_1)$ temmelig usikker. Dersom vor Fremgangsmaade iøvrigt er rigtig, skulde man nemlig lige saa vel kunne bestemme $\lambda_2(\Delta^2 F_1)$ som $\lambda_2(\Delta F_1)$, men ifølge Tabel 11 faar vi

$$\Sigma \lambda_2(\Delta^2 o) - \Sigma (\Delta^2 o - \Delta^2 F_1)^2 = .063 - .084 < 0.$$

Dette Resultat maa enten fremkomme ved Usikkerheden i Bestemmelsen af $\lambda_2(\Delta^2 o)$ eller derved, at Udjevningen er for stærk. Det er imidlertid ikke let at se, hvorfor Udjevningen af $\Delta^2 o$ skulde være for stærk, og Frem-

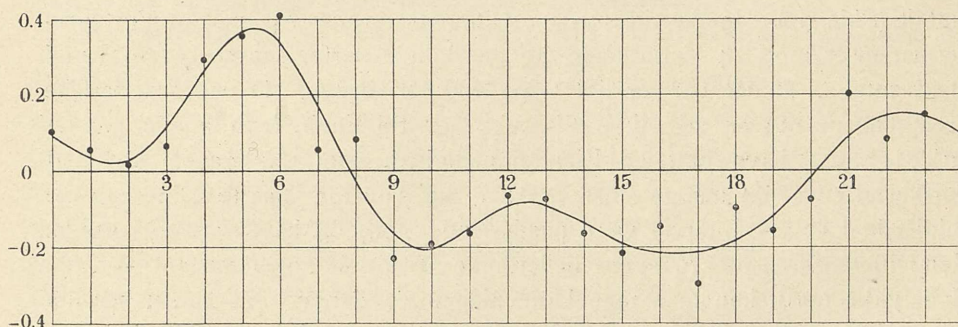


Fig. 23.

stillingen af Resultatet i Fig. 23 giver heller ikke noget umiddelbart Indtryk af, at dette er Tilfældet. Derimod er der en temmlig stærk Antydning af, at Usikkerheden i Bestemmelsen af λ_2 vokser, naar vi gaar fra o over Δo til $\Delta^2 o$. Da disse Fejl væsentlig skyldes Forhold i Naturen, tør vi gaa ud fra, at de sande Fejl danner jevne Rækker af Værdier, hvorfor Ujevnheden i Værdierne kan tages som en Art Maal for Usikkerheden i vor Bestemmelse. Og en Sammenligning mellem Kolonnerne $\lambda_2(o)$, $\lambda_2(\Delta o)$ og $\lambda_2(\Delta^2 o)$ viser, at Ujevnheden efterhaanden tiltager.

Uagtet vi ikke kunde bestemme $\lambda_2(\Delta^2 F_1)$ og derfor heller ikke tør lægge særlig stor Vægt paa den fundne Værdi for $\lambda_2(\Delta F_1)$, bliver der dog som det forholdsvis sikre Resultat tilbage, at Fejlene paa Differenserne af de forelagte Værdier allerede er smaa i Forhold til Fejlene paa selve Værdierne, idet vi i Gennemsnit har

	o	Δo	$\Delta^2 o$
$\sqrt{\lambda_2}$	$\pm .088$	$\pm .040$	$\pm .051$

Og dernæst véd vi, at medens den Omstændighed, at Iagttagelserne er bundet til hverandre, er uheldig for Reduktionen af Fejlene paa selve de forelagte Værdier, saa er den heldig for Reduktionen af Fejlene paa disse Værdiers Differenser.

Vi tør derfor gaa ud fra, at vi er gunstigt stillet, naar vi vil benytte det opnaaede Resultat til Undersøgelse af Funktionens Egenskaber ved

Hjælp af de udjvnede Værdiers første, anden og maaske højere Differenser.

Ingen »Gang« i Differenserne $o - F_1(o)$. Da vi ved Valget af Udjvningsformler sammenlignede Faktorgrænserne med de tilsvarende Variationsfaktorer, undersøgte vi ikke Leddene fra L_7 til L_{12} . Disse Led er ved denne Udjevning praktisk talt kastet bort, og det er derfor muligt, at Udjevningen overfor disse Led har været for stærk. Denne Sag kan nu undersøges, idet vi ser, om der er en paafaldende Gang i Differenserne mellem de givne og de udjvnede Værdier, saaledes som det tidligere er omtalt (Side 97). Imidlertid udviser Differenserne $o - F_1$ kun 10 Fortegnspermanenser mod 14 Variationer, og der kunde derfor snarere være Grund til at antage, at der var for lidt Gang end for megen. Denne summariske Fremgangsmaade er dog ikke tilstrækkelig, thi Funktionen kunde paa et enkelt Sted have haft en Ejendommelighed, som var gaaet tabt ved Bortkastelsen af de mange smaa Led; i saa Tilfælde maatte Differenserne imidlertid i et vist Interval være paafaldende store og have samme Fortegn. Men Differenserne $o - F_1$ synes heller ikke at antyde noget saadant. — Som Modstykke hertil kan man tage Udjevningen u , der er for stærk; her udviser Differenserne $o - u$ 14 Fortegnspermanenser mod kun 10 Variationer, ligesom Fig. 22 viser en tydelig Gang for disse Differensers Vedkommende.

Naar Iagttagelserne er bundne, vil man paa Forhaand være tilbøjelig til at antage, at saafremt Udjevningen ikke er for svag, vil der være Gang i Differenserne mellem de givne og de udjvnede Værdier; dette finder ogsaa Sted, hvor Bindingen har en asymptotisk Karakter, saaledes som det er Tilfældet ved Temperatures aarlige Periode. Men det er let at vise, at naar Bindingen har en saadan Karakter som ved Temperatures daglige Periode, behøver der ikke at være Gang i de nævnte Differenser.

Lad os for Eksempel antage, at den sande Funktion er

$$v_i = X \cdot f(i),$$

og at Iagttagelserne fra de enkelte Aar kan gengives ved

$$o_i = x \cdot f(i);$$

de Værdier, som vi skal benytte til Udjevning, kan da gengives ved

$$M_1(o_i) = M_1(x) \cdot f(i).$$

Vi kan her forudsætte, at vi kender $f(i)$, saa at vi kan foretage en legitim Udjevning; i dette Tilfælde vil »Udjvningen« imidlertid ikke forandre de forelagte Værdier, og der kommer altsaa ikke Gang i Differenserne $M_1(o_i) - F(o_i)$, eftersom de alle bliver lig med Nul.

De Forudsætninger, vi her har benyttet, gælder naturligvis kun med en vis Tilnærmelse, men vi kan som gældende for de virkelige Forhold sætte

$$o_i = x \cdot f(i) + \delta_i.$$

Differenserne mellem de givne og de udjvnede Værdier skyldes da ved en legitim Udjevning alene Afvigelserne δ , men disse Afvigelser, hvis Egen-skaber vi ikke har undersøgt, kan være uregelmæssigt fordelt ligesom Fejlene paa frie Iagttagelser, og det er derfor ikke nødvendigt, at der viser sig Gang i de nævnte Differenser. — Man kunde nu undersøge disse Afvigelser's Natur nærmere, men dette skal dog ikke ske her. Det har kun været Hensigten at paavise, at selv om Iagttagelserne er bundne, kan man ikke vente, at der altid skal være Gang i Differenserne.

Antallet af Værdier, der benyttes til at danne $F_1(o)$. Til at danne ⁽⁸⁾ o bruges der $1+8 \cdot 4=33$ Værdier, og til Korrektionsleddet — og derfor ogsaa til $F_1(o)$ — bruges der $1+(8+2)4=41$ Værdier. Idet $F_1(o)$ valgtes til Udjevningsformel, bortkastedes der Led, som indeholdt ottende Differens, og man skulde herefter kunne udtrykke 41 paa hinanden følgende Værdier af den sande Funktion ved Hjælp af en algebraisk Funktion, der højest var af syvende Grad. Dette kan man ganske sikkert ikke i dette Tilfælde, men heraf kan man dog ikke slutte, at vi har benyttet en urigtig Udjevningssfunktion. Sagen er, at Yderværdierne i Virkeligheden ikke indgaar i Resultatet. Beregner vi Koefficienterne til de yderste af de 33 Værdier, der indgaar i ⁽⁸⁾ o , faar vi

$$\begin{aligned} o_0 = & \cdot 0_9 7(o_{16} + o_{-16}) - \cdot 0_7 2(o_{15} + o_{-15}) + \cdot 0_6 3(o_{14} + o_{-14}) - \cdot 0_5 2(o_{13} + o_{-13}) \\ & - \cdot 0_6 6(o_{12} + o_{-12}) + \cdot 0_4 2(o_{11} + o_{11}) - \cdot 0_4 2(o_{10} + o_{-10}) + \dots \end{aligned}$$

Man ser, at Antallet af de Værdier, som i Virkeligheden indgaar i ⁽⁸⁾ o , er mindre end 20, og det samme bliver Tilfældet med $\Delta^4 o$ ⁽⁹⁾ og derfor ogsaa med $F_1(o)$. Man skal altsaa blot kunne fremstille omtrent Trefjerdedel af Perioden af den sande Funktion ved Hjælp af en Interpolationsformel af syvende Grad, og dette maa i nærværende Tilfælde kunne gøres med overlegen eller dog med tilstrækkelig Nøjagtighed. — Ved denne Undersøgelse har vi blottet en Fejl af praktisk Natur ved Fremgangsmaaden, thi naar vi i Regningen tager mange Værdier med, som ikke faar Indflydelse paa Resultatet, betyder dette et Spild af Arbejde. Denne Sag skal vi senere komme tilbage til.

Opgaven vil som nævnt i Almindelighed omfatte Bestemmelsen af den daglige Periode for alle Aarets 12 Maaneder. Man vil i saa Tilfælde ikke behøve at foretage den temmelig besværlige Beregning af Fejlene paa Konstanterne for hver enkelt Maaned i samme Omfang som ovenfor. Af Tabel 8 ser man, at forholdsvis smaa Variationer i Faktorgrenserne til

b_3 , a_4 og b_6 vil kunne paavirke Valget af Udjevsningsformlen, og det vilde derfor være naturligt, at man begyndte med at bestemme Middelfejlen for disse Konstanter for Eksempel for hver tredje Maaned. Hvor der viste sig større Afvigelser mellem Resultalterne, kunde man derefter undersøge de mellemliggende Maaneder i fornødent Omfang; det kunde ogsaa tænkes, at nogle af de nævnte Konstanter viste sig at være forholdsvis smaa paa visse Aarstider, og der kunde da blive Anledning til ogsaa at undersøge andre Konstanter, for Eksempel a_3 og b_4 . Derimod vil man sikkert kunne lade Leddet L_1 og sandsynligvis ogsaa L_2 og L_5 helt ude af Betragtning.

Ved en saadan sammenhængende Undersøgelse vil man altsaa paa den ene Side spare Arbejde, og paa den anden Side vil man kunne opnaa betydelig større Sikkerhed, end naar man behandler en enkelt Maaned, med Hensyn til de Konstanter, paa hvilke det netop kommer an ved Valget af Udjevsningsformlen. Der er en saadan Sammenhæng mellem disse Opgaver — en lovmæssig og ringe Forandring fra Maaned til Maaned — at Resultatet kan og bør blive bedre, naar man samtidig behandler alle Aarets Maaneder, medens Arbejdet ikke behøver at vokse i samme Forhold som Opgavernes Antal.

§ 21.

Lufttrykkets daglige Periode.

Det Materiale, som skal benyttes til et Eksempel paa Bestemmelsen af Lufttrykkets daglige Periode, er allerede omtalt under »Baandene og Bindingens Karakter«. Ligesom ved Temperatures daglige Periode nøjes vi ogsaa her med at behandle en enkelt Maaned — i dette Tilfælde Januar.

Som tidligere omtalt stammer vort Materiale fra Batavia; det bestaar af timevise Iagttagelser, og det omfatter 30 Aar, nemlig 1876 til 1905. I Batavia er Lufttrykket saa lidt paavirket af aperiodiske Forstyrrelser, at den højeste Barometerstand, som man iagttog fra 1866 til 1905, var 764.4 mm og den laveste 752.4 mm, medens Barometret med stor Regelmæssighed foretager sine karakteristiske to Svingninger i Døgnet. Under disse Omstændigheder er det indlysende, at Fejlen paa de Værdier, der benyttes til Udjevning, bliver smaa, og Beregningen giver ogsaa i Gennemsnit kun ± 0.016 mm.

Vi har tidligere ofte benyttet Begrebet »den sande Funktion« og som Definition sagt, at det er denne Funktions Værdier, som vore Iagttagelsesværdier efterhaanden nærmer sig til. Der bliver naturligvis altid kun Tale om en vis Tilnærmelse, men hvis man vil nøjes med at angive Lufttrykkets daglige Periode med kun een Decimal, kan man i nærværende Tilfælde

betragte selve de foreliggende Middeltal som den sande Funktions Værdier. Vil man derimod angive Værdierne med flere Decimaler, bliver der Anvendelse for en Udjevning.

Da Funktionsformen er alt andet end simpel, er det indlysende, at der vil kræves mange Led af den trigonometriske Række til at fremstille den sande Funktion med overlegen Nøjagtighed, og da Fejlene er smaa, er der Udsigt til, at vi kan bestemme adskillige af disse smaa Led. Der er derfor foretaget en direkte Beregning af Middelfejl og Faktorgrænser til Leddene L_4 , L_5 , L_6 og L_8 ; af Hensyn til disse Beregninger er Materialet delt i 6 Grupper, saaledes at hver Gruppe omfatter Iagttagelserne for 5 paa hinanden følgende Aar. De første Led i Rækken behøver man ikke at skænke videre Opmærksomhed; i nedenstaaende Tabel 12 er dog Leddene L_2 og L_3 taget med, men den benyttede Værdi for Middelfejlskvadratet, .000020, er beregnet af Gennemsnitsmiddelfejlen for de forelagte Værdier efter Reglen for frie Iagttagelser.

Tabel 12.

	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4
	.3875	— .9024	— .0038	— .0105	.0406	.0325
λ_2	(.0420)	(.0420)	(.0420)	(.0420)	.05835	.05997
G	.99987	.99998	.42	.85	.995	.991
$V_{p,1}$	1.00000		1.000		.998	

	a_5	b_5	a_6	b_6	a_8	b_8
	— .0140	— .0387	— .0056	.0023	.0001	— .0036
λ_2	.05522	.05235	.05083	.05177	.05093	— .05046
G	.971	.998	.97	.75	.0	.97
$V_{p,1}$	.980		.90		.32	

Da man i Almindelighed ikke tager Hensyn til de sidste af de opførte Konstanter, bør det fremhæves, hvor sikre a_5 , b_5 , a_6 og b_8 i Virkeligheden er. Man ser det allerede af de smaa Værdier for Middelfejlskvadraterne og af de beregnede Faktorgrænser, men til yderligere Belysning af Sagen skal Værdierne for de enkelte Grupper af Iagttagelser anføres:

	a_5	b_5	a_6	b_8
1876—1880	— .012	— .035	— .006	— .003
1881—1885	— .006	— .043	— .009	— .002
1886—1890	— .013	— .042	— .007	— .001
1891—1895	— .017	— .036	— .006	— .005
1896—1900	— .012	— .042	— .002	— .005
1901—1905	— .023	— .036	— .006	— .005.

Det ses let, at man paa Grund af denne Omstændighed, nemlig at der langt henne i Rækken findes gode Elementer, ikke kan undgaa at udjevne for stærkt, naar man overhovedet vil opnaa et kendeligt Resultat; men man kan begrænse Fejlene saaledes, at Skaden ikke bliver stor. Benytter vi saaledes den Udjevning, der svarer til de i Tabel 12 opførte Variationsfaktorer, bliver Fejlene i Retning af for stærk Udjevning:

$$\begin{aligned}\pm(\cdot 998 - \cdot 980)b_5 &= \pm \cdot 0007, & \pm(\cdot 97 - \cdot 90)a_6 &= \pm \cdot 0004, \\ \pm(\cdot 97 - \cdot 32)b_8 &= \pm \cdot 0023.\end{aligned}$$

Der bliver altsaa kun Tale om nogle faa Enheder af tredie Decimal. Det vil derfor være naturligt at give Resultatet med 3 Decimaler, hvilket ogsaa passer godt med Størrelsen af Fejlen paa de udjvnede Værdier; Fejlen paa de givne Værdier er nemlig som nævnt $\pm \cdot 016$, og vi kan paa Forhaand vide, at denne Fejl ikke bliver reduceret ret meget ved den forestaaende Udjevning.

Til de i Tabel 12 opførte Variationsfaktorer svarer Udjevningsskema (E),

$$o_0 = \overset{(1)}{10^3} (2o_0 + (o_1 + o_{-1}) - \overset{(2)}{10^4} (o_2 + o_{-2})) + \overset{(3)}{50^1} (o_3 + o_{-3}) = o_0 + \overset{(3)}{50} \Delta^6 o_0,$$

og Udjvningsformlen

$$F_1(o_i) = o_i - \overset{(2)}{50^2} \Delta^6 \overset{(3)}{o_i}.$$

Man ser af de givne Værdier o , der findes opført i Tabel 13, at det i dette Tilfælde ikke vilde være fordelagtigt at udjevne første Differens, eftersom man ikke derved fik færre Cifre at regne med; vi udjevner derfor selve de givne Værdier. Med Hensyn til Enkeltheder ved Regningen henvises der til Tabellen; Resultatet er desuden fremstillet i Fig. 24.

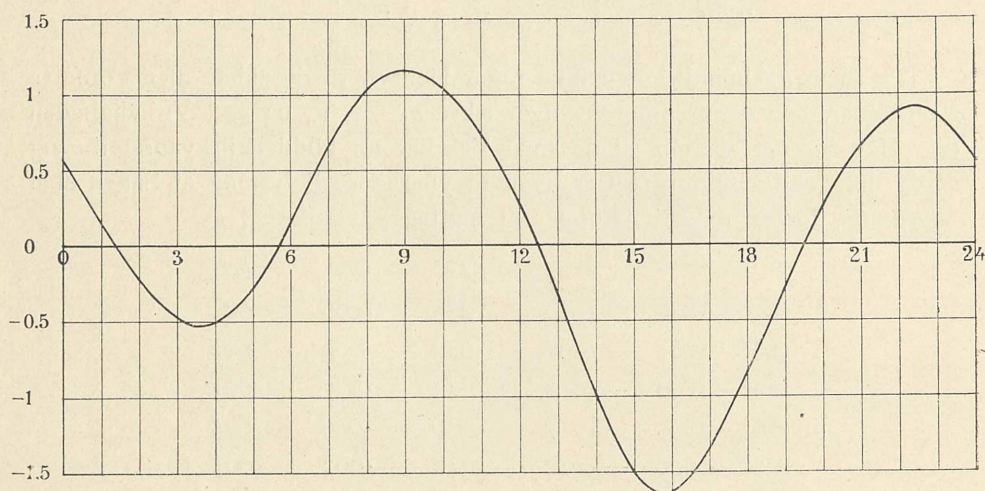


Fig. 24.

Tabel 13.

i	o	⁽¹⁾ o	⁽²⁾ o	⁽³⁾ $-\frac{2}{50}\Delta^6 o$	$F_1(o)$	$o-F_1$	$\lambda_2(o)$	$\Delta o-\Delta F_1$	$\lambda_2(\Delta o)$
1	·145	·152	·1551	—·0026	·152	—·007	·0 ₃ 190	·012	·0 ₃ 054
2	—·226	—·229	—·2304	—·0003	—·231	·005	191	—·003	100
3	—·470	—·473	—·4730	·0014	—·472	·002	204	—·009	087
4	—·509	—·501	—·5012	—·0005	—·502	—·007	201	·017	092
5	—·271	—·280	—·2781	—·0032	—·281	·010	294	—·020	075
6	·141	·152	·1530	—·0020	·151	—·010	235	·017	092
7	·660	·652	·6511	·0023	·653	·007	287	—·008	078
8	1.032	1.031	1.0285	·0042	1.033	—·001	254	—·002	084
9	1.159	1.162	1.1612	·0009	1.162	—·003	180	·008	079
10	1.049	1.044	1.0471	—·0035	1.044	·005	162	—·013	050
11	·728	·739	·7385	—·0029	·736	—·008	160	·018	058
12	·282	·269	·2706	·0015	·272	·010	164	—·021	100
13	—·343	—·333	—·3383	·0064	—·332	—·011	248	·024	081
14	—·980	—·995	—·9953	·0024	—·993	·013	350	—·021	074
15	—1.510	—1.497	—1.4949	—·0067	—1.502	—·008	443	·008	141
16	—1.626	—1.625	—1.6186	—·0075	—1.626	·000	294	·001	158
17	—1.337	—1.338	—1.3413	·0030	—1.338	·001	268	·000	100
18	—·828	—·832	—·8357	·0065	—·829	·001	218	—·001	098
19	—·285	—·286	—·2851	·0001	—·285	·000	240	—·004	109
20	·222	·228	·2302	—·0042	·226	—·004	196	·009	082
21	·655	·651	·6513	—·0015	·650	·005	251	—·009	062
22	·884	·886	·8851	·0027	·888	—·004	249	·004	054
23	·857	·855	·8531	·0034	·857	·000	273	·004	043
24	·572	·569	·5682	·0000	·568	·004	263	—·011	093
Sum	·001	·001	·0011	—·0001	·001	·000	·005815	·000	·002044

Til at danne et Skøn over Fejlene paa de udjvnede Værdier har vi $\Sigma(\lambda_2(o)) = \cdot 00582$ og faar endvidere $\Sigma((o-F_1)^2) = \cdot 00100$; herefter bliver Fejlen i Gennemsnit

$$\sqrt{\lambda_2(F_1(o))} = \sqrt{\cdot 00024 - \cdot 00004} = \pm \cdot 014.$$

Reduktionen af Fejlen er altsaa ikke stor, men den er dog heller ikke paa-faldende ringe i Sammenligning med Udfaldet ved en Udjevning efter mindste Kvadraters Metode, hvor lagttagelserne er frie. Vi skulde nemlig

i dette Tilfælde benytte 12 Elementer, og Fejlen paa den udjvnede Værdi kunde da sættes til $\pm 0.16 \sqrt{\frac{12}{24}} = \pm 0.11$.

Differenserne $o - F_1(o)$ viser kun 6 Fortegnsspermanenser mod 18 Variationer, og man skulde herefter antage, at Udjevningen var for svag. Vi saa ganske vist før, at Udjevningen paa enkelte Punkter er lidt for stærk, men paa andre Punkter er den ganske sikkert for svag, og det er derfor muligt, at Overvægten er paa denne Side. Men betragter vi Udjevningen af Δo , kommer vi ikke til dette Resultat. Vi faar nemlig til Bestemmelsen af $\lambda_2(\Delta F_1)$:

$$\Sigma (\lambda_2(\Delta o)) - \Sigma ((\Delta o - \Delta F_1)^2) = .0020 - .0037,$$

altsaa en negativ Værdi, hvilket tyder paa, at Udjevningen er for stærk. Usikkerheden paa Bestemmelsen af $\lambda_2(\Delta o)$ er i dette Tilfælde forholdsvis ringe, hvilket man allerede kan se af den ret jevne Gang i disse Værdier,

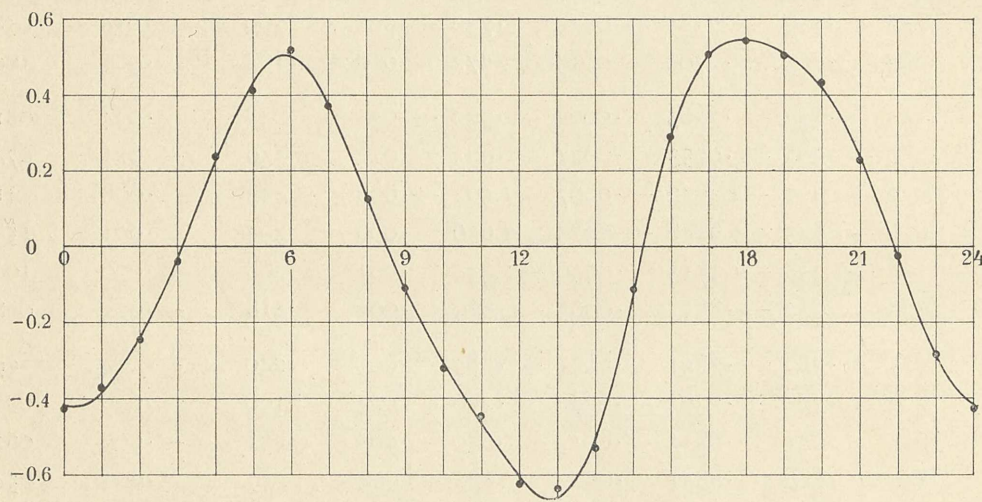


Fig. 25.

der findes opført i Tabel 13, og skulde Udjevningen ikke være for stærk, maatte den sande Værdi af $\Sigma (\lambda_2(\Delta o))$ være omtrent dobbelt saa stor som den beregnede. — Udjevningen $\Delta F_1(o)$ og Værdierne af Δo er fremstillet i Fig. 25.

§ 22.

Lufttrykkets aarlige Periode.

Det følgende Eksempel er en Udjevning af Lufttrykkets aarlige Periode. Der er hertil benyttet lagttagelser fra Batavia fra 1876 til 1905. Materialet foreligger beregnet for Femaar og Femdøgn, saaledes at der for

Eksempel findes eet Middeltal for Barometerstanden fra den første til den femte Januar for Aarene 1876 til 1880. Vi har altsaa straks Iagttagelserne for de 30 Aar delt i 6 lige store Grupper. — Det er smaa Størrelser, vi her har at gøre med. Den største Værdi af de Middeltal, der skal udjevnes, er .67 Millimeter. Gennemsnitsfejlen paa disse Værdier er forholdsvis stor, nemlig $\pm .15$ Millimeter.

Da Antallet af Iagttagelser i den aarlige Periode her bliver 73, vilde en direkte Beregning af Konstanterne til den trigonometriske Række og navnlig af deres Middelfejl kræve et urimeligt stort Arbejde, og da Resultatet kun skal bruges ved Valget af Udjevningsformlen, vil det kunne forsvares, at der anvendes en Tilnærmelsesmetode, som gør det indledende Arbejde mere overkommeligt. Her er denne Del af Regningen udført saaledes, at der i Stedet for de 73 Normalpladser er oprettet 24 Normalpladser, idet der er dannet et Middeltal af 3 og 3 Værdier undtagen tilsidst, hvor der er benyttet 4 Værdier. — Betragter man den grafiske Fremstilling, Fig. 26 (Side 135), vil man kunne indse, at den Vilkaarlighed, der er begaaet, faar saare lidt at sige.

Middelfejlene for Elementerne til Leddene L_2 til L_6 er beregnet direkte, medens der til L_1 er benyttet Gennemsnitsværdien for Middelfejlskvadraterne af de 24 Normalpladser efter Reglen for frie Iagttagelser. Vi faar da som Resultat:

Tabel 14.

	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
	— .025	— .314	— .142	.265	— .125	.065
λ_2	(.0011)	(.0011)	.0002	.0024	.0012	.0012
G	.36	.989	.991	.967	.930	.78
(A). $V_{p,2}$	.9998		.986		.932	
(B). $V_{p,1}$	.9986		.980		.914	

	a_4	b_4	a_5	b_5	a_6	b_6
	.051	— .008	.007	— .051	.007	.037
λ_2	.0023	.0016	.0006	.0013	.0004	.0015
G	.53	.04	.07	.66	.10	.47
(A). $V_{p,2}$	.66		.35		.12	
(B). $V_{p,1}$	.78		.60		.40	

Med de 73 Iagttagelsesværdier er der foretaget 2 forskellige Udjevningsforsøg. Til det første af disse er benyttet Skema (A),

$$^{(1)}_0 = \frac{1}{7}(o_3 + o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2} + o_{-3}),$$

og Udjevningsformlen

$$F_2(o_i) = o_i - 12\Delta^2 o_i + 102\Delta^4 o_i,$$

som findes nærmere omtalt foran (Side 87).

Vi undersøger først ved Hjælp af de hertil hørende Variationsfaktorer, $V_{p,2}$, om denne Udjevning skulde være for stærk. Dette viser sig at være Tilfældet for a_2 og b_5 , hvor Fejlene henholdsvis bliver ± 0.0007 og ± 0.016 . Den første Værdi er ganske betydningsløs, men dette kan ikke siges om den anden. Ganske vist viser det sig senere, at Gennemsnitsfejlen for den udjevnede Værdi bliver omtrent ± 0.08 , og ved Anvendelsen af selve de udjevnede Værdier kan man altsaa alligevel ikke tillægge anden Decimal nogen Betydning. Men Usikkerheden med Hensyn til Funktionens Form eller Fejlen for de udjevnede Værdiers Differenser bliver mindre, og der kan det faa Betydning, hvis vi har taget for lidt Hensyn til b_5 . Paa den anden Side er dog kun $b_5^2 : \lambda_2(b_5) = 2$, og Elementet hører derfor til de noget usikre; man skal derfor ikke lægge saa megen Vægt paa, at der her kastes 0.016 for meget bort, som man for Eksempel maatte, hvis det samme var kastet bort af a_2 , hvor $a_2^2 : \lambda_2(a_2) = 100$. — Gaar vi da foreløbig ud fra, at Udjevningen ikke er for stærk, skal vi derefter se, om den maaske er for svag. Konstanten a_1 maa vi ligesom tidligere i lignende Tilfælde se bort fra, og der bliver da kun tilbage a_4 , b_4 og a_5 . Disse Elementer er imidlertid alle numerisk smaa, og desuden kan vi ikke gøre Udjevningen stærkere paa disse Punkter, uden at der tages endnu mindre Hensyn til b_5 , end det allerede nu er Tilfældet, og dette kunde neppe forsvares.

Vi kan da acceptere den foreslaaede Udjevning, dog med det Forbehold, at den maaske paa et enkelt Punkt er lidt for stærk.

Med Hensyn til selve Udjevningsregningen er der kun lidt at bemærke. Udjevningen er ligesom i det foregaaende Eksempel foretaget med selve de givne Værdier. Iøvrigt henvises til Tabel 15, hvoraf man blandt andet ser, hvor mange Decimaler der er taget med paa de forskellige Trin af Regningen. — Da man har

$$7 o_0 = o_3 + o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2} + o_{-3}$$

og

$$7 o_1 = o_4 + o_3 + o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2},$$

har man ogsaa

$$7 o_1 = 7 o_0 + o_4 - o_{-3},$$

hvilket man kan bruge enten til at beregne o_1 af o_0 eller til Kontrol. Kombinerer man de 2 ovenstaaende Ligninger med

$$7 o_{-1} = o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2} + o_{-3} + o_{-4},$$

faar man

$$7\Delta^2 o_0 = o_4 - o_3 - o_{-3} + o_{-4} = \Delta o_3 - \Delta o_{-4};$$

ved Hjælp af dette Skema danner man af o let $7\Delta^2 o$ og heraf igen $49\Delta^4 o$.

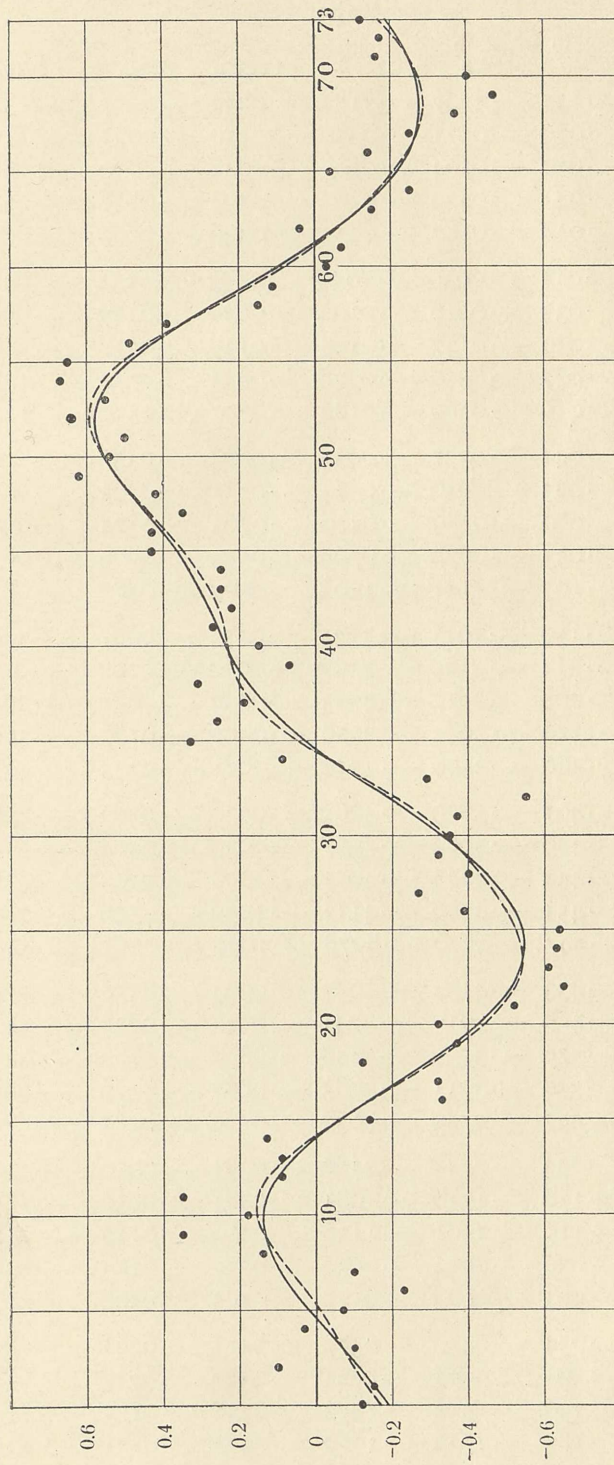


Fig. 26.

Tabel 15.

i	o	⁽³⁾ o	⁽⁴⁾ o	⁽⁵⁾ o	⁽⁶⁾ o	⁽⁷⁾ $-12\Delta^2 o$	⁽⁸⁾ $102\Delta^4 o$	$F_2(o)$	$o-F_2$	$F_1(o)$
1	—·15	—·13	—·127	—·1227	—·1182	—·0252	—·0077	—·151	·00	—·131
2	·10	—·10	—·099	—·0971	—·0950	—·0110	—·0052	—·111	·21	—·098
3	—·10	—·07	—·070	—·0704	—·0707	·0041	—·0010	—·068	—·03	—·069
4	·03	—·04	—·041	—·0439	—·0468	·0194	·0027	—·025	·06	—·041
5	—·07	—·01	—·014	—·0187	—·0245	·0346	·0069	·017	—·09	—·010
6	—·23	·02	·011	·0036	—·0050	·0495	·0131	·058	—·29	·026
7	—·10	·04	·033	·0216	·0102	·0629	·0189	·092	—·19	·067
8	·14	·06	·049	·0337	·0198	·0739	·0250	·119	·02	·107
9	·35	·08	·057	·0390	·0228	·0825	·0310	·136	·21	·140
10	·18	·08	·056	·0360	·0182	·0867	·0346	·140	·04	·157
11	·35	·07	·044	·0237	·0054	·0864	·0358	·128	·22	·154
12	·09	·05	·023	·0020	—·0154	·0811	·0365	·102	—·01	·127
13	·09	·01	—·010	—·0289	—·0440	·0705	·0325	·059	·03	·079
14	·13	—·04	—·053	—·0674	—·0794	·0554	·0269	·003	·13	·013
15	—·14	—·09	—·103	—·1121	—·1202	·0369	·0187	—·065	—·07	—·064
16	—·33	—·15	—·159	—·1611	—·1645	·0154	·0087	—·140	—·19	—·146
17	—·32	—·22	—·214	—·2120	—·2102	—·0070	—·0002	—·217	—·10	—·227
18	—·12	—·28	—·269	—·2617	—·2553	—·0296	—·0092	—·294	·17	—·306
19	—·37	—·34	—·320	—·3083	—·2976	—·0502	—·0177	—·366	·00	—·377
20	—·32	—·38	—·366	—·3490	—·3352	—·0681	—·0235	—·427	·11	—·440
21	—·52	—·42	—·401	—·3829	—·3665	—·0830	—·0283	—·478	—·04	—·489
22	—·65	—·45	—·429	—·4083	—·3901	—·0939	—·0308	—·515	—·13	—·523
23	—·61	—·47	—·444	—·4244	—·4051	—·1008	—·0302	—·536	—·07	—·540
24	—·63	—·47	—·451	—·4306	—·4111	—·1039	—·0308	—·546	—·08	—·539
25	—·64	—·47	—·447	—·4270	—·4078	—·1030	—·0287	—·540	—·10	—·524
26	—·39	—·45	—·433	—·4134	—·3953	—·0984	—·0258	—·520	·13	—·499
27	—·27	—·43	—·409	—·3910	—·3741	—·0914	—·0229	—·488	·22	—·468
28	—·40	—·39	—·376	—·3599	—·3448	—·0809	—·0183	—·444	·04	—·432
29	—·32	—·35	—·334	—·3211	—·3083	—·0682	—·0129	—·389	·07	—·391
30	—·35	—·30	—·287	—·2759	—·2659	—·0538	—·0085	—·328	—·02	—·341
31	—·37	—·24	—·233	—·2254	—·2186	—·0381	—·0010	—·258	—·11	—·280
32	—·55	—·18	—·176	—·1716	—·1681	—·0221	·0050	—·185	—·36	—·205
33	—·29	—·12	—·116	—·1161	—·1158	—·0069	·0112	—·112	—·18	—·121
34	·09	—·05	—·056	—·0604	—·0632	·0072	·0173	—·039	·13	—·034
35	·33	·01	·001	—·0063	—·0117	·0185	·0206	·027	·30	·048
36	·26	·07	·054	·0450	·0377	·0271	·0221	·087	·17	·117
37	·19	·12	·103	·0924	·0841	·0322	·0215	·138	·05	·168
38	·31	·16	·146	·1353	·1272	·0338	·0175	·179	·13	·201
39	·07	·19	·183	·1739	·1669	·0327	·0121	·212	—·14	·219
40	·15	·22	·216	·2090	·2034	·0298	·0050	·238	—·09	·231

Tabel 15 (fortsat).

i	o	⁽³⁾ o	⁽⁴⁾ o	⁽⁵⁾ o	⁽⁶⁾ o	⁽⁷⁾ $-12\Delta^2 o$	⁽⁸⁾ $102\Delta^4 o$	$F_2(o)$	$o-F_2$	$F_1(o)$
41	·27	·25	·244	·2413	·2372	·0262	—·0042	·259	·01	·241
42	·22	·27	·271	·2714	·2690	·0231	—·0112	·281	—·06	·256
43	·25	·30	·300	·3006	·2993	·0218	—·0162	·305	—·06	·280
44	·25	·32	·329	·3291	·3283	·0228	—·0198	·331	—·08	·311
45	·43	·35	·357	·3577	·3561	·0278	—·0196	·364	·07	·349
46	·43	·39	·387	·3860	·3823	·0360	—·0163	·402	·03	·392
47	·35	·42	·416	·4123	·4061	·0465	—·0102	·442	—·09	·436
48	·42	·45	·444	·4357	·4266	·0591	—·0002	·486	—·07	·480
49	·62	·48	·469	·4547	·4422	·0722	·0098	·524	·10	·522
50	·54	·50	·484	·4674	·4515	·0842	·0187	·554	—·01	·557
51	·50	·52	·493	·4721	·4534	·0936	·0279	·575	—·08	·582
52	·64	·52	·490	·4671	·4467	·0987	·0337	·579	·06	·594
53	·55	·50	·476	·4514	·4308	·0989	·0371	·567	—·02	·586
54	·67	·48	·449	·4253	·4055	·0939	·0364	·536	·13	·558
55	·65	·43	·409	·3887	·3714	·0837	·0319	·487	·16	·506
56	·49	·38	·359	·3434	·3294	·0689	·0256	·424	·07	·435
57	·39	·31	·301	·2907	·2810	·0504	·0169	·348	·04	·349
58	·15	·24	·237	·2331	·2281	·0298	·0077	·266	—·12	·256
59	·11	·17	·173	·1731	·1726	·0087	—·0010	·180	—·07	·164
60	—·03	·10	·107	·1129	·1163	—·0122	—·0098	·095	—·13	·078
61	—·07	·03	·046	·0546	·0618	—·0310	—·0164	·014	—·08	·003
62	·04	—·02	—·011	·0003	·0103	—·0477	—·0204	—·058	·10	—·062
63	—·15	—·08	—·063	—·0491	—·0368	—·0616	—·0248	—·123	—·03	—·116
64	—·25	—·12	—·107	—·0920	—·0781	—·0720	—·0250	—·175	—·07	—·164
65	—·04	—·16	—·143	—·1280	—·1129	—·0790	—·0256	—·218	·18	—·207
66	—·14	—·19	—·173	—·1563	—·1406	—·0833	—·0256	—·250	·11	—·243
67	—·25	—·21	—·193	—·1764	—·1608	—·0838	—·0235	—·268	·02	—·271
68	—·37	—·22	—·206	—·1887	—·1735	—·0821	—·0214	—·277	—·09	—·286
69	—·47	—·23	—·209	—·1934	—·1789	—·0777	—·0204	—·277	—·19	—·287
70	—·40	—·22	—·204	—·1906	—·1774	—·0705	—·0167	—·265	—·13	—·272
71	—·16	—·21	—·193	—·1811	—·1698	—·0616	—·0152	—·247	·09	—·244
72	—·17	—·18	—·176	—·1659	—·1567	—·0509	—·0129	—·221	·05	—·208
73	—·12	—·16	—·153	—·1460	—·1391	—·0384	—·0098	—·187	·07	—·169
Sum	—·03	—·05	—·051	—·0508	—·0512	—·0004	·0004	—·054	·06	—·035

Angaaende Fejlen paa den udjvnede Værdi bemærkes det først, at det i 6 Grupper delte Materiale giver i Gennemsnit $\lambda_2(o) = \cdot 0214$. Af Differenserne $o - F_2(o)$ faar vi dernæst

$$\frac{1}{78} \sum (o - F_2)^2 = .0155,$$

og vi skulde derefter for den udjevne Værdi have i Gennemsnit

$$\sqrt{\lambda_2(F_2)} = \pm .077.$$

Imidlertid maa det erindres, at denne Udjevning maaske er lidt for stærk, og hvis dette er Tilfældet, vil den virkelige Gennemsnitsfejl være noget større end den fundne.

Vi skal herefter ganske kort omtale den anden Udjevning af de samme Iagttagelsesværdier; hertil er benyttet Skema (B),

$$o_0 = \frac{1}{5} (o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2}),$$

og Udjevningsformlen

$$F_1(o_i) = o_i - \overset{(6)}{6} \overset{(7)}{\Delta^2} o_i,$$

hvortil svarer de anførte Variationsfaktorer $V_{p,1}$. Denne Udjevning kan praktisk talt ikke siges at være for stærk, thi ganske vist har man $G > V_{p,1}$ for a_2 , a_3 og b_5 , men det, som herefter kastes for meget bort, er overalt kun nogle ganske faa Enheder af tredie Decimal. Iøvrigt bliver Forskellen mellem de to Resultater ikke stor, hvilket dels ses af Tabel 15 og dels af Fig. 26, hvor den sidste Udjevning er gengivet ved en punkteret Kurve og den første Udjevning ved en fuldt optrukket Kurve.

Da den sidste Udjevning ikke kan betragtes som værende for stærk, kan vi her med større Tryghed end før beregne Gennemsnitsfejlen for den udjevne Værdi. Vi faar først

$$\frac{1}{78} \sum (o - F_1)^2 = .0137,$$

og dette giver

$$\sqrt{\lambda_2(F_1)} = \pm .088.$$

Fejlen er herefter noget større end den skulde være ifølge den første Beregning, men iøvrigt er Forskellen mellem de to Resultater heller ikke i denne Henseende paafaldende stor.

§ 23.

Temperatures aarlige Periode.

Det Materiale, der skal benyttes som et Eksempel paa Bestemmelsen af Temperatures aarlige Periode, er ikke omtalt tidligere. Iagttagelserne omfatter kun 36 Aar, fra 1875 til 1910, men i Modsætning til den tidligere omtalte Iagttagelsesrække paa 124 Aar er dette Materiale homogent; i alt Fald er Iagttagelserne foretaget paa de samme Tider og paa samme Sted, nemlig Meteorologisk Institut i København.

Grundlaget for de Værdier, der skal udjevnes, dannes af Middeltallene af Temperaturerne for Klokken 8 Formiddag, 2 Eftermiddag og 9 Aften. Disse Middeltal kan kun betragtes som nogenlunde gode Repræsentanter for Døgnet's Middeltemperatur, og vil man bestemme selve Middeltemperaturens aarlige Periode paa dette Grundlag, maa man tilføje en ad anden Vej fundet mindre Korrektion. I nærværende Tilfælde er Opgaven imidlertid at danne en Tabel, hvoraf man kan se, hvormegit Gennemsnitstemperaturen for et vist Døgn afviger fra det normale, og hertil kan man ret godt benytte de nævnte Middeltal. — Til Brug for Udjevningen danner vi ligesom i det foregaaende Eksempel Normalpladser for Femdøgn; disse Værdier er opført i Tabel 17 (Side 142).

Af særlige Grunde, som ikke skal omtales nærmere, er der ved denne Opgave stillet den bestemte Fordring, at Udjevningen ikke maa være for stærk.

Til Beregningen af Faktorgrænserne er Materialet inddelt i 6 Grupper, som altsaa hver indeholder 6 Aars Iagttagelser, og ligesom i det foregaaende Eksempel er der alene til Brug for denne Beregning dannet 24 Normalpladser; i dette Tilfælde bestaar den fjortende Normalplads, som findes ved Maximet, af 20 Døgn, medens de andre hver indeholder 15 Døgn. Resultatet af Beregningerne findes i

Tabel 16.

	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4
	·617	·439	—·053	·193	·024	—·012
λ_2	·0021	·0152	·0061	·0108	·0035	·0060
G	·994	·927	·31	·78	·14	·02
$V_{p,2}$	·998		·98		·92	
	a_6	b_6	a_8	b_8		
	—·053	—·063	—·016	·024		
λ_2	·0041	·0031				
G	·41	·56				
$V_{p,2}$		·58		·18		

Der kan næppe være Tvivl om, at man i dette Tilfælde bør anvende Udjevningsskema (B). Af Tabel 5 (Side 89) ser man, at der af Hensyn til Elementet a_2 , der har Faktorgrænsen $G=0.994$, maa tages 2 Korrektionsled med. Tager vi endvidere $v=6$, ser man af Tabel 16, hvor de til $v=6$ og $q=2$ svarende Variationsfaktorer er opført, at Udjevningen ikke bliver for stærk, saaledes som det er fordret. Men der kunde stilles det Spørgsmaal, om den maaske var unødvendig svag. Faktorgrænserne til Leddene L_3 og L_4 viser, at vi kunde anvende en Udjevning, der var betydelig stærkere end den foreslaaede, uden at den blev for stærk for disse Leds Vedkommende. Det kommer da til at dreje sig om, hvor megen Betydning vi skal tillægge Elementet $b_6=-0.063$ med $G=0.56$. Dersom vi uden videre vilde følge de opstillede Regler, skulde b_6 betragtes som et lille Element, og vi skulde da have Lov til eventuelt at kaste det helt bort. Men det maa erindres, at da vi opstillede den nævnte Regel, havde vi kun som Rettesnor, at Resultatet ikke maatte blive ringere end det, som mindste Kvadraters Metode vilde give, medens der i nærværende Tilfælde er opstillet den Fordring, at vi skal være paa den sikre Side med Hensyn til ikke at udjevne for stærkt. Desuden er vi nær ved Grænsen mellem de smaa og de store Elementer, og vi har $b_6^2 : \lambda_2(b_6) = 1.3$.

Det kan maaske være os til nogen Støtte at undersøge, hvilke Værdier b_6 har i den omtalte Iagttagelsesrække paa 124 Aar. Inddeler vi dette Materiale i nedenstaaende 4 Grupper, giver

34 Aar fra Rundetaarn.....	$b_6 = -0.153$,
43 — - gammel botanisk Have	$b_6 = -0.267$,
25 — - (1861—1885) fra Landbohøjskolen.....	$b_6 = -0.029$,
23 — - (1886—1907) - —	$b_6 = -0.009$.

Her er ganske vist megen Vaklen, men det er dog øjensynligt, at b_6 ikke kan henregnes til de rene »Fejlelementer«.

Da vi ifølge de anførte Grunde maa tage Hensyn til Elementet b_6 , kan det ikke antages, at den foreslaaede Udjevning er unødvendig svag, og vi benytter altsaa den til Skema (B) og til $v=6$ og $q=2$ svarende Formel, nemlig (se Side 89)

$$F_2(o_i) = o_i - 6\Delta^2 o_i^{(7)} + 25.8\Delta^4 o_i^{(8)}.$$

Selve Udjevningen er foretaget med første Differens, hvilket i dette Tilfælde giver en stor Lettelse, idet en væsentlig Del af Regningen derved bliver tocfret. Værdierne o er givet med to Decimaler, og dette Antal er beholdt indtil $\Delta o^{(4)}$, hvor tredie Decimal er taget med; af Hensyn til den Summation, som skal foretages, er yderligere den fjerde Decimal taget med i $\Delta o^{(6)}$.

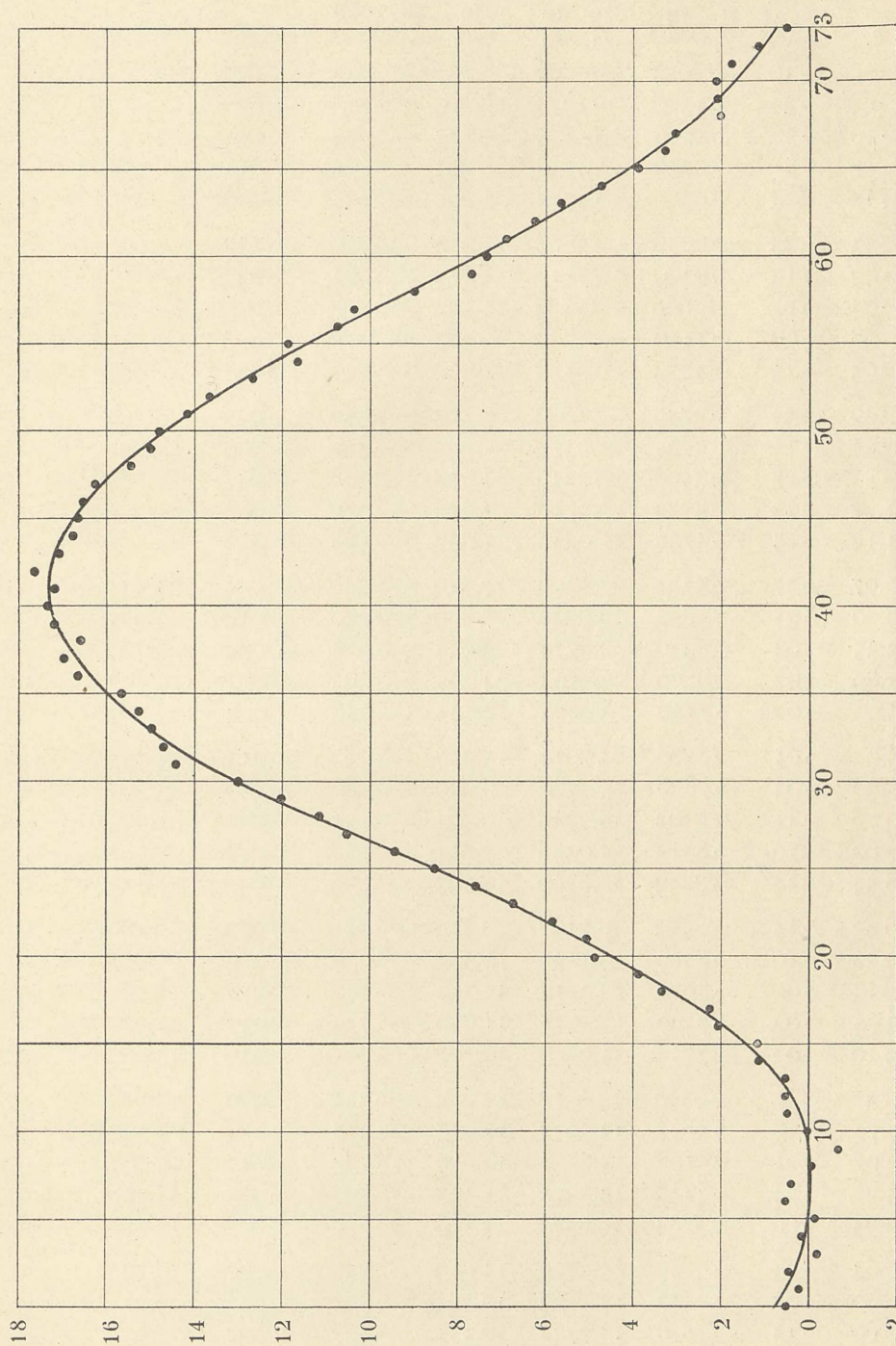


Fig. 27.

Tabel 17.

i	o	$\lambda_2(o_0)$	$\Delta^{(6)}_o$	$o_i - o_1^{(6)}$	$o^{(6)}$	$-6\Delta^{(7)}_o$	$25.8\Delta^{(8)}_o$	$F_2(o)$	$o - F_2$
1	.20	.19	-.1924	.0000	.757	-.245	-.009	.503	-.303
2	.44	.25	-.1506	-.1924	.564	-.242	-.010	.312	.128
3	-.19	.30	-.1106	-.3430	.414	-.234	-.004	.176	-.366
4	.17	.21	-.0736	-.4536	.303	-.224	.011	.090	.080
5	-.12	.28	-.0396	-.5272	.229	-.217	.026	.038	-.158
6	.53	.23	-.0056	-.5668	.190	-.216	.032	.006	.524
7	.40	.13	.0300	-.5724	.184	-.227	.033	-.010	.410
8	-.04	.07	.0698	-.5424	.214	-.248	.026	-.008	-.032
9	-.68	.09	.1156	-.4726	.284	-.276	.009	.017	-.697
10	.05	.15	.1674	-.3570	.400	-.307	-.009	.084	-.034
11	.49	.22	.2248	-.1896	.567	-.336	-.023	.208	.282
12	.53	.15	.2864	.0352	.792	-.358	-.036	.398	.132
13	.53	.23	.3500	.3216	1.078	-.368	-.041	.669	-.139
14	1.12	.13	.4134	.6716	1.428	-.370	-.039	1.019	.101
15	1.14	.25	.4748	1.0850	1.842	-.359	-.033	1.450	-.310
16	2.07	.27	.5324	1.5598	2.316	-.340	-.024	1.952	.118
17	2.26	.35	.5852	2.0922	2.849	-.316	-.012	2.521	-.261
18	3.35	.04	.6330	2.6774	3.434	-.288	-.004	3.142	.208
19	3.89	.02	.6760	3.3104	4.067	-.262	-.002	3.803	.087
20	4.90	.08	.7150	3.9864	4.743	-.236	-.004	4.503	.397
21	5.07	.05	.7506	4.7014	5.458	-.212	-.013	5.233	-.163
22	5.86	.03	.7826	5.4520	6.209	-.186	-.026	5.997	-.137
23	6.76	.11	.8102	6.2346	6.991	-.154	-.037	6.800	-.040
24	7.60	.10	.8312	7.0448	7.801	-.112	-.042	7.647	-.047
25	8.54	.13	.8432	7.8760	8.633	-.056	-.040	8.537	.003
26	9.45	.15	.8432	8.7192	9.476	.011	-.027	9.460	-.010
27	10.52	.10	.8294	9.5624	10.319	.086	-.006	10.399	.121
28	11.14	.09	.8010	10.3918	11.148	.166	.018	11.332	-.192
29	12.04	.09	.7590	11.1928	11.949	.239	.039	12.227	-.187
30	13.10	.07	.7054	11.9518	12.708	.301	.056	13.065	.035
31	14.42	.10	.6440	12.6572	13.414	.348	.060	13.822	.598
32	14.71	.10	.5782	13.3012	14.058	.378	.054	14.490	.220
33	14.97	.21	.5108	13.8794	14.636	.392	.041	15.069	-.099
34	15.27	.24	.4440	14.3902	15.147	.396	.024	15.567	-.297
35	15.65	.06	.3784	14.8342	15.591	.396	.008	15.995	-.345
36	16.64	.03	.3136	15.2126	15.969	.395	-.002	16.362	.278
37	16.90	.07	.2482	15.5262	16.283	.397	-.003	16.677	.223
38	16.60	.13	.1816	15.7744	16.531	.402	-.002	16.931	-.331
39	17.18	.13	.1134	15.9560	16.713	.408	.006	17.127	.053
40	17.34	.09	.0438	16.0694	16.826	.412	.012	17.250	.090

Tabel 17 (fortsat).

i	o	$\lambda_2(o)$	$\Delta o^{(6)}$	$o_i - o_1^{(6)}$	$o^{(6)}$	$-6\Delta^2 o^{(7)}$	$25.8\Delta^4 o^{(8)}$	$F_2(o)$	$o - F_2$
41	17.19	.09	— .0262	16.1132	16.870	.413	.018	17.301	— .111
42	17.62	.26	— .0952	16.0870	16.844	.408	.019	17.271	.349
43	17.08	.02	— .1622	15.9918	16.748	.398	.017	17.163	— .083
44	16.78	.05	— .2266	15.8296	16.586	.384	.012	16.982	— .202
45	16.65	.12	— .2878	15.6030	16.360	.366	.008	16.734	— .084
46	16.52	.15	— .3458	15.3152	16.072	.348	.004	16.424	.096
47	16.24	.11	— .4006	14.9694	15.726	.329	.002	16.057	.183
48	15.44	.05	— .4522	14.5688	15.325	.310	.002	15.637	— .197
49	14.98	.03	— .5006	14.1166	14.873	.290	.004	15.167	— .187
50	14.80	.05	— .5456	13.6160	14.373	.270	.006	14.649	.151
51	14.16	.10	— .5874	13.0704	13.827	.250	.010	14.087	.073
52	13.66	.15	— .6256	12.4830	13.240	.226	.013	13.479	.181
53	12.58	.03	— .6598	11.8574	12.614	.199	.019	12.832	— .252
54	11.65	.07	— .6888	11.1976	11.954	.168	.017	12.139	— .489
55	11.86	.06	— .7118	10.5088	11.265	.132	.017	11.414	.446
56	10.73	.07	— .7276	9.7970	10.554	.090	.009	10.653	.077
57	10.36	.09	— .7354	9.0694	9.826	.047	.004	9.877	.483
58	9.00	.10	— .7350	8.3340	9.091	.001	— .005	9.087	— .087
59	7.70	.21	— .7274	7.5990	8.356	— .041	— .007	8.308	— .608
60	7.34	.14	— .7130	6.8716	7.628	— .082	— .012	7.534	— .194
61	6.90	.20	— .6934	6.1586	6.915	— .118	— .011	6.786	— .114
62	6.22	.22	— .6676	5.4652	6.222	— .152	— .017	6.053	.167
63	5.63	.11	— .6366	4.7976	5.554	— .184	— .019	5.351	.279
64	4.72	.10	— .6004	4.1610	4.918	— .212	— .026	4.680	.040
65	3.91	.15	— .5600	3.5606	4.317	— .234	— .030	4.053	— .143
66	3.29	.02	— .5160	3.0006	3.757	— .248	— .031	3.478	— .188
67	3.04	.16	— .4724	2.4846	3.241	— .253	— .024	2.964	.076
68	2.03	.23	— .4300	2.0122	2.769	— .250	— .013	2.506	— .476
69	2.10	.25	— .3898	1.5822	2.339	— .242	— .003	2.094	.006
70	2.11	.25	— .3516	1.1924	1.949	— .236	.007	1.720	.390
71	1.77	.13	— .3142	.8408	1.597	— .235	.009	1.371	.399
72	1.14	.30	— .2754	.5266	1.283	— .236	.003	1.050	.090
73	.51	.42	— .2342	.2512	1.008	— .241	— .006	.761	— .251
Sum	586.51	10.21	.0170	531.2826	586.516	.003	.003	586.522	— .012

Ved Bestemmelsen af Summationskonstanten træffer vi for første Gang paa det Tilfælde, at Summen af de givne Værdier ikke er Nul. Ifølge Tabel 17 har vi

$$\sum_{i=1}^{i=73} o_i = 586.51$$

og

$$\sum_{i=1}^{i=73} \binom{(6)}{o_i - o_1} = \sum_{i=1}^{i=73} \binom{(6)}{o_i} - 73 o_1 = 531.28;$$

da vi desuden skal have $\sum^{(6)} o = \sum o$, bliver

$$o_1 = (586.51 - 531.28) : 73 = .7565.$$

Efter at $o_1^{(6)}$ er lagt til $o_i - o_1^{(6)}$, er den fjerde Decimal kastet bort, og Resten af den Del af Regningen, som har særlig Interesse for os, er udført med 3 Decimaler. Den udjavnede Kurve og de forelagte Værdier er fremstillet i Fig. 27.

Vi skal derefter gaa over til Beregningen af Middelfejlen for den udjavnede Værdi. Tager vi hele Aaret under eet, har vi $\sum \lambda_2(o) = 10.21$ og $\sum (o - F_2)^2 = 5.06$; vi faar altsaa

$$\lambda_2(F_2) = \frac{1}{73} (10.21 - 5.06) = .0706,$$

hvorefter Middelfejlen bliver $\pm .27$. Der er imidlertid en temmelig stor Variation i $\lambda_2(o)$ i Aarets Løb, og inddeler vi Aaret for Eksempel i de sædvanlige meteorologiske Aarstider, viser der sig ogsaa en nogenlunde tilsvarende Gang i $\lambda_2(F_2)$. Vi faar nemlig i Gennemsnit

	Vinter	Foraar	Sommer	Efteraar
$\lambda_2(o)$	.214	.127	.107	.113
$(o - F_2)^2$	.106	.031	.062	.079
$\sqrt{\lambda_2(F_2)}$	$\pm .33$	$\pm .31$	$\pm .21$	$\pm .18$

Differenserne $o - F_2$ udviser 35 Fortegnspermanenser og 38 Variationer. Dette tyder paa, at Udjevningen er for svag, thi naar der i de enkelte Aar kan forekomme positive eller negative Afvigelse, som strækker sig over flere Maaneder, maa man antage, at der ogsaa i de Middeltal, som benyttes til Udjevningen, findes en vis Overvægt af saadanne Afvigelse, om end af mindre Udstrækning. Dette stemmer ogsaa paa en vis Maade med, at vi bestræbte os for, at Udjevningen ikke skulde blive for stærk, thi i saa Tilfælde vil man neppe undgaa at udjevne for svagt.

VII. AFSLUTNING.

§ 24.

Direkte anvendelige Formler.

Saafernt man ikke kan nøjes med at gentage Udjevningen efter det benyttede Skema nogle faa Gange, bliver den anvendte Fremgangsmaade besværlig, og vi skal derfor opstille nogle direkte anvendelige Formler, som for de fleste Opgavers Vedkommende er lettere at anvende. Der tages særlig Sigte paa at fremstille Formler for de hyppigst behandlede Opgaver, nemlig Udjevning af Temperatures daglige og aarlige Perioder.

Vi gaar her ud fra, at en foreliggende Opgave er ført saa vidt, at man ved Hjælp af de beregnede Faktorgrænser kan bestemme, hvorledes man ønsker, at den søgte Udjevningsformels Variationsfaktorer skal forløbe. Det kommer da blot an paa, om den Formel, man opstiller, i denne Henseende er efter Ønske, og om den er forholdsvis nem at anvende, medens det er ligegyldigt, efter hvilke Principer den er udledet.

De direkte anvendelige mekaniske Formler skal have Formen

$$^{(1)} o_0 = a_0 o_0 + a_1(o_1 + o_{-1}) + a_2(o_2 + o_{-2}) + \dots + a_m(o_m + o_{-m}),$$

men vi kan ligesom tidligere gaa ud fra Formen

$$^{(1)} o_0 = k_0 o_0 + k_1 \Delta^2 o_0 + k_2 \Delta^4 o_0 + \dots + k_m \Delta^{2m} o_0$$

og derefter beregne Faktorerne a ved Hjælp af Faktorerne k . Det bemærkes, at vi her altid har $k_0 = 1$, idet vi som Udgangspunkt tager Opstilling af en Formel, der svarer til Udjevning efter en hel algebraisk Funktion.

Vi beskæftiger os først med saadanne Formler, som kan finde Anvendelse ved Temperatures daglige Periode, naar der foreligger Iagttagelser for hver Time. I § 20 anvendtes dels den til Skema (D) svarende Udjevning $F_1(o)$, hvorved der bortkastedes Led med ottende Differens, og dels den til Skema (C) svarende Udjevning $F_4(o)$, hvorved der bortkastedes Led med tiende Differens; disse Udjevninger er derfor i Virkeligheden foretaget

efter Funktioner af henholdsvis syvende og niende Grad. Der forekommer imidlertid ved Temperatures daglige Periode foruden ved andre Opgaver Tilfælde, hvor man kan benytte simple Funktioner, og vi vil derfor begynde med at opstille et Sæt Femtegradsformler.

For en Femtegradsformel maa man have $k_1 = k_2 = 0$, og den mindste Værdi, som m kan have, er altsaa 3. De simpleste af disse Formler omfatter altsaa 7 Værdier, og de kan skrives

$$^{(1)} o_i = o_i + k_3 \Delta^6 o_i.$$

Bestemmer man k saaledes, at $^{(1)} o_i$ faar den mindst mulige Middelfejl, idet de 7 Værdier forudsættes at være frie og lige gode, faar man $k_3 = \frac{5}{231}$. De til denne Værdi svarende Variationsfaktorer,

$$V_p = 1 + \frac{5}{231} c_p^3,$$

findes opført i Tabel 18, og endvidere er de fremstillet paa sædvanlig Maade som en kontinuert Funktion af p (for $n=24$) i Fig. 28. Kurven skærer Abscisseaxen i $p=9.505$, og den tilsvarende Værdi af c er lig med -3.5882 . Tabellen eller Figuren siger os, at den tilsvarende Formel ikke hører til dem, som vi kan ønske at benytte, thi her tager vi næsten 40% med af den trigonometriske Rækkes sidste Led (med modsat Fortegn), og de beregnede Værdier vil derfor i Almindelighed ikke blive jevne. Ved de tidligere opstillede Formler opnaaede vi Jevnhed ved at gentage Regningen et vist Antal Gange; Derved bortskar vi de sidste Led af den trigonometriske Række; med Hensyn til Variationsfaktorerne, betragtet som en kontinuert Funktion af p , betød denne Regning, at Kurven fik et vist Antal sammenfaldende Punkter fælles med Abscisseaxen. Nu gaar vi den modsatte Vej, idet vi først sørger for at give Variationsfaktorernes Kurve Røring af højest mulig Orden med Abscisseaxen, og derefter beregner vi Udjevsningsformlens Koefficienter.

Naar man vil fremstille et Sæt af Formler til almindelig Anvendelse, er det naturligt at tage til Røringspunkt det Punkt, der er Skæringspunkt ved den simplest mulige Femtegradsformel, beregnet ved Hjælp af mindste Middelfejls Princip. Imidlertid kan det tænkes, at der vil forekomme Opgaver, hvor et andet Valg af Røringspunktet vilde være mere fordelagtigt, og vi giver derfor foreløbig vore Formler en almindelig Form, saaledes at Røringspunktet bliver vilkaarligt. Vi udtrykker derfor alle Koefficienterne k ved Hjælp af en enkelt og vilkaarlig Værdi af c_p ; denne Værdi betegnes i det følgende med C .

Til den almindelige Femtegradsformel med $2m+1$ Værdier,

$$^{(1)} o_i = o_i + k_3 \Delta^6 o_i + k_4 \Delta^8 o_i + \dots + k_m \Delta^{2m} o_i,$$

svarer Variationsfaktorerne, betragtet som kontinuerte Funktioner af c ,

idet vi har

$$V = 1 + k_3 c^3 + k_4 c^4 + \dots + k_m c^m,$$

$$c = -4 \sin^2 \frac{p\pi}{n}.$$

Vi sætter nu

$$V = \frac{d}{dp} V = \frac{d^2}{dp^2} V = \dots = \frac{d^{m-3}}{dp^{m-3}} V = 0,$$

og vi har altsaa det tilstrækkelige Antal Ligninger til at bestemme de $m-2$ Værdier af k som afhængige af en vis Værdi af c . Denne Bestemmelse er let at foretage, thi de afledede Funktioner af c med Hensyn til p bliver ikke Nul for Værdier af p mellem Nul og $\frac{1}{2}n$, og vi kan derfor i Stedet for de ovenstaaende Ligninger benytte Ligningerne

$$V = \frac{d}{dc} V = \frac{d^2}{dc^2} V = \dots = \frac{d^{m-3}}{dc^{m-3}} V = 0.$$

Man faar da

$$m=3. \quad V_p = 1 - \frac{1}{C^3} c_p^3.$$

$$m=4. \quad V_p = 1 - \frac{4}{C^3} c_p^3 + \frac{3}{C^4} c_p^4.$$

$$m=5. \quad V_p = 1 - \frac{10}{C^3} c_p^3 + \frac{15}{C^4} c_p^4 - \frac{6}{C^5} c_p^5.$$

$$m=6. \quad V_p = 1 - \frac{20}{C^3} c_p^3 + \frac{45}{C^4} c_p^4 - \frac{36}{C^5} c_p^5 + \frac{10}{C^6} c_p^6.$$

$$m=7. \quad V_p = 1 - \frac{35}{C^3} c_p^3 + \frac{105}{C^4} c_p^4 - \frac{126}{C^5} c_p^5 + \frac{70}{C^6} c_p^6 - \frac{15}{C^7} c_p^7.$$

Vi kan nu vælge Røringspunktet eller den dertil svarende Værdi af C og derefter beregne Variationsfaktorer i passende Omfang til de forskellige Formler. Vælger vi den ovenfor fundne Værdi, nemlig $C = -3.5882^1)$, faar vi saaledes nedenstaaende Tabel.

Tabel 18.

Variationsfaktorer til Femtegradsformler.

$$C = -3.5882. \quad n = 24.$$

$p =$	1	2	3	4	5	6	8	10	12
$m=3.$	.99999	.9996	.996	.978	.930	.827	.416	— .130	— .385
$m=4.$	.99997	.9984	.988	.932	.805	.597	.128	.010	.092
$m=5.$	.99993	.9962	.966	.864	.660	.393	.034	— .001	— .018
$m=6.$	.99987	.9930	.941	.783	.517	.243	.008	.000	.003
$m=7.$	.99977	.9884	.909	.695	.392	.144	.002	— .000	— .001

¹⁾ Vi faar $\log(-C) = .5548807$, medens der ved Beregningen af Tabel 18 er benyttet den afrundede Værdi .5548800.

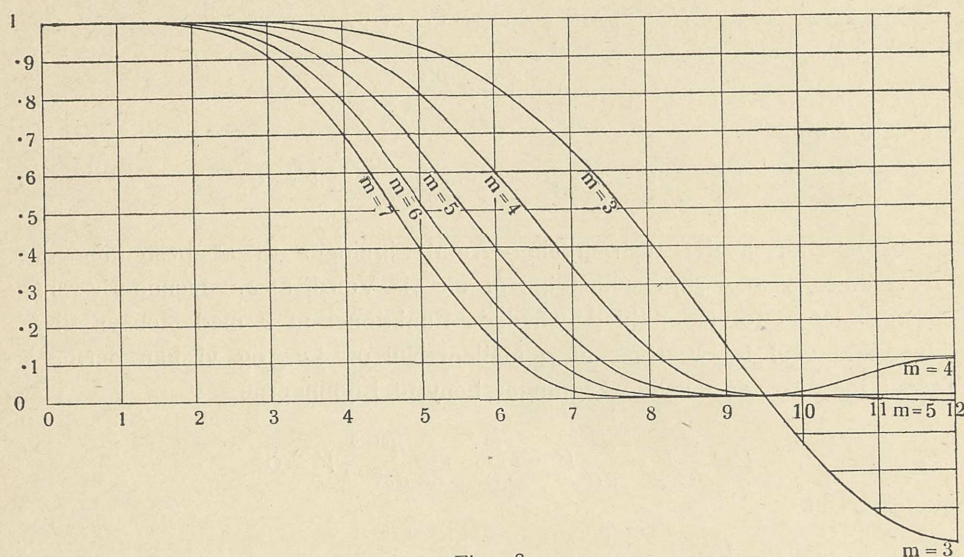


Fig. 28.

Af denne Tabel eller af Fig. 28 ser vi, at det heller ikke vil være heldigt at benytte den Formel, der svarer til $m=4$, idet denne endnu tager 9 % med af det sidste Led. Derimod vil de Formler, der svarer til $m=5$ og $m=6$, sikkert kunne finde Anvendelse, medens det er noget tvivlsomt, om der bliver Brug for Formlen, der svarer til $m=7$, idet der her allerede bortkastes over 1 % af Ledet L_2 og 9 % af L_3 .

Vi skal derefter omtale Omformningen af Formlerne til Brug ved Udvæjningen. Da vi almindeligt skal have

$$\begin{aligned} o_0 &= a_0 o_0 + a_1(o_1 + o_{-1}) + a_2(o_2 + o_{-2}) + \dots + a_m(o_m + o_{-m}) \\ &= k_0 o_0 + k_1 \Delta^2 o_0 + k_2 \Delta^4 o_0 + \dots + k_m \Delta^{2m} o_0, \end{aligned}$$

faar man a 'erne udtrykt som en Sum af k 'erne multipliceret med visse Binomialtal. Nedenstaaende Tabel indeholder disse Udtryk gældende for Formler, der omfatter indtil 19 Værdier.

Tabel 19.

$$\begin{aligned} a_0 &= k_0^1) - 2k_1 + 6k_2 - 20k_3 + 70k_4 - 252k_5 + 924k_6 - 3432k_7 + 12870k_8 - 48620k_9 \\ a_1 &= k_1 - 4k_2 + 15k_3 - 56k_4 + 210k_5 - 792k_6 + 3003k_7 - 11440k_8 + 43758k_9 \\ a_2 &= k_2 - 6k_3 + 28k_4 - 120k_5 + 495k_6 - 2002k_7 + 8008k_8 - 31824k_9 \\ a_3 &= k_3 - 8k_4 + 45k_5 - 220k_6 + 1001k_7 - 4368k_8 + 18564k_9 \\ a_4 &= k_4 - 10k_5 + 66k_6 - 364k_7 + 1820k_8 - 8568k_9 \\ a_5 &= k_5 - 12k_6 + 91k_7 - 560k_8 + 3060k_9 \\ a_6 &= k_6 - 14k_7 + 120k_8 - 816k_9 \\ a_7 &= k_7 - 16k_8 + 153k_9 \\ a_8 &= k_8 - 18k_9 \\ a_9 &= k_9 \end{aligned}$$

¹⁾ Som foran bemærket, skal vi her altid have $k_0=1$.

Til Kontrol eller til Efterberegning af visse Værdier af k kan man benytte

Tabel 20.¹⁾

$$\begin{aligned} k_0 &= a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + 2a_9 \\ k_1 &= a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 16a_4 + 25a_5 + 36a_6 + 49a_7 + 64a_8 + 81a_9 \\ k_2 &= a_2 + 6a_3 + 20a_4 + 50a_5 + 105a_6 + 196a_7 + 336a_8 + 540a_9 \\ k_3 &= a_3 + 8a_4 + 35a_5 + 112a_6 + 294a_7 + 672a_8 + 1386a_9 \\ k_4 &= a_4 + 10a_5 + 54a_6 + 210a_7 + 660a_8 + 1782a_9 \\ k_5 &= a_5 + 12a_6 + 77a_7 + 352a_8 + 1287a_9 \\ k_6 &= a_6 + 14a_7 + 104a_8 + 546a_9 \\ k_7 &= a_7 + 16a_8 + 135a_9 \\ k_8 &= a_8 + 18a_9 \\ k_9 &= a_9 \end{aligned}$$

Naar man har truffet sit Valg med Hensyn til Røringspunktet eller Værdien af C , maa Beregningen af k 'erne udføres med tildels pinlig Nøjagtighed. Hvad en Afrunding af k kan betyde, ser vi af Variationsfaktorerne. Vi har nemlig

$$\frac{dV_p}{dk_x} \Delta k_x = c_p^x \cdot \Delta k_x,$$

og for Eksempel for $p=12$ og $x=7$ faar vi heraf (naar $n=24$)

$$\frac{dV_{12}}{dk_7} \Delta k_7 = -16384 \Delta k_7.$$

Ved den foregaaende Udledning af Formlerne sørgede vi for, at V_{12} nærmede sig stærkt til Nul, men hvis vi her blot som Afrunding tager $\Delta k_7 = \pm 0.00061$, bliver $V_{12} = \mp 1$, og Ledet L_{12} vil derfor genfindes i de udjvnede Værdier med den samme Aplitude, som det havde i de forelagte Værdier. Man maa derfor sørge for, at Afrundingsfejlene paa det nærmeste ophæver hverandre, men, som det vil ses af det følgende, det er lettere at foretage en formaalstjenlig Afrunding af a 'erne end af k 'erne.

Dersom den Udjvningsformel, som vi vil fremstille, skal være let anvendelig, maa Faktorerne a kun have to eller højest tre betydende Cifre.

¹⁾ Det almindelige Udtryk er

$$k_x = a_x + \sum \left(\frac{2q(q+x-1)(q+x-2) \cdots (2x+1)}{(q-x)!} \cdot a_q \right),$$

eller

$$k_0 = a_0 + \sum 2a_q,$$

og for $x > 0$:

$$k_x = \sum \left(\frac{2q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2) \cdots (q^2-(x-1)^2)}{(2x)!} \cdot a_q \right).$$

Det har været betragtet som en vanskelig Opgave at se, hvilken Betydning Afrundingen af Faktorerne a vil faa for det endelige Resultat. Saaledes siger *J. Altenburger*¹⁾ herom blot: »Es ist allerdings anzunehmen, dass auf eine Serie von Werten angewendet eine teilweise Kompensation dieser Fehler eintreten wird, so dass bei einer effektiven Ausgleichungs-Rechnung dieselben nicht derart ins Gewicht fallen werden, wie bei der Berechnung von Operations-Koeffizienten«. Vi behøver imidlertid ikke at nøjes med saadanne vage Antagelser, thi vi kan let se Betydningen af de foretagne Afrundinger ved Hjælp af Variationsfaktorerne, som vi kan udtrykke direkte ved Hjælp af a 'erne.

Tænker vi os nemlig, at vi anvender Udjevsningsformlen

$$^{(1)} o_i = a_0 o_i + a_1(o_{i+1} + o_{i-1}) + \dots + a_m(o_{i+m} + o_{i-m})$$

paa Værdier, der hører til en Sinusoide,

$$v_i = (L_p)_i = \alpha_p \cos p\theta i + \beta_p \sin p\theta i,$$

har vi

$$v_{i+q} + v_{i-q} = 2 \cos q\theta \cdot (L_p)_i$$

og altsaa

$$^{(1)} v_i = ^{(1)} (L_p)_i = (a_0 + 2a_1 \cos p\theta + 2a_2 \cos 2p\theta + \dots + 2a_m \cos mp\theta) \cdot (L_p)_i;$$

Variationsfaktoren til Leddet L_p bliver da

$$(31) \quad V_p = a_0 + 2a_1 \cos p\theta + 2a_2 \cos 2p\theta + \dots + 2a_m \cos mp\theta.$$

Afrunder vi Faktorerne ved at tilføje $\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_m$, faar vi altsaa

$$\Delta V_p = \Delta a_0 + 2 \cos p\theta \cdot \Delta a_1 + 2 \cos 2p\theta \cdot \Delta a_2 + \dots + 2 \cos mp\theta \cdot \Delta a_m,$$

og af ΔV kan vi se, hvilken Betydning de foretagne Afrundinger har for vor Formel.

Da vi her har $n=24$, bliver $\theta = \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{12}$, og det er derfor særlig nemt at bruge V_4, V_6, V_8 og V_{12} til en foreløbig Undersøgelse; vi faar nemlig

$$\begin{aligned} V_4 &= a_0 + a_1 - a_2 - 2a_3 - a_4 + a_5 + 2a_6 + a_7 - a_8 - 2a_9 - \dots, \\ V_6 &= a_0 - 2a_2 + 2a_4 - 2a_6 + 2a_8 - \dots, \\ V_8 &= a_0 - a_1 - a_2 + 2a_3 - a_4 - a_5 + 2a_6 - a_7 - a_8 + 2a_9 - \dots, \\ V_{12} &= a_0 - 2a_1 + 2a_2 - 2a_3 + 2a_4 - 2a_5 + 2a_6 - 2a_7 + 2a_8 - 2a_9 + \dots \end{aligned}$$

Vi skal nu bestemme Faktorerne a til Femtegradsformler, der omfatter 11, 13 og 15 Værdier. Det viser sig at være mere end tilstrækkeligt, naar a 'erne bestemmes med 4 Decimaler; af Tabel 19 ser man da, med hvilken Nøjagtighed man skal bestemme k 'erne.

¹⁾ »Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen«. 3. Band. S. 76.

For $m=5$ faar vi

$$k_3 = .216451, \quad k_4 = .0904839, \quad k_5 = .0100868,$$

foruden $k_0=1$ og $k_1=k_2=0$. Lad os betegne de ved Hjælp af Tabel 19 bestemte Værdier med a' , den tilføjede Afrunding med $\Delta a'$ og de endelige Værdier med a , saaledes at vi har $a'_q + \Delta a'_q = a_q$. Vi faar da ved at benytte ganske simple Afrundinger

$$\begin{array}{lll} a'_0 = .4630, & \Delta a'_0 = -.0030, & a_0 = .46, \\ a'_1 = .2979, & \Delta a'_1 = .0021, & a_1 = .30, \\ a'_2 = .0244, & \Delta a'_2 = -.0004, & a_2 = .024, \\ a'_3 = -.0535, & \Delta a'_3 = -.0005, & a_3 = -.054, \\ a'_4 = -.0104, & \Delta a'_4 = .0004, & a_4 = -.01, \\ a'_5 = .0101, & \Delta a'_5 = -.0001, & a_5 = .01. \end{array}$$

De nye Værdier af a giver ifølge Tabel 20

$$\begin{array}{l} k_0 = .460 + .600 + .048 - .108 - .020 + .020 = 1, \\ k_1 = .300 + .096 - .486 - .160 + .250 = 0, \\ k_2 = .024 - .324 - .200 + .500 = 0; \end{array}$$

vi har altsaa tilfældigvis opnaaet at faa en virkelig Femtegradsformel. Hvorledes den oprindelige Formel i Hovedsagen er ændret, ser vi ved at benytte ovenstaaende $\Delta a'$ til Beregning af ΔV_p ; vi faar saaledes

$$\Delta V_4 = .000, \quad \Delta V_6 = -.001, \quad \Delta V_8 = -.006, \quad \Delta V_{12} = -.006.$$

For $m=6$ er der fundet følgende Værdier

$$\begin{array}{lll} a'_0 = .4214, & \Delta a'_0 = -.0014, & a_0 = .42, \\ a'_1 = .2908, & \Delta a'_1 = -.0008, & a_1 = .29, \\ a'_2 = .0600, & \Delta a'_2 = .0000, & a_2 = .06, \\ a'_3 = -.0460, & \Delta a'_3 = .0010, & a_3 = -.045, \\ a'_4 = -.0245, & \Delta a'_4 = .0005, & a_4 = -.024, \\ a'_5 = .0043, & \Delta a'_5 = -.0003, & a_5 = .004, \\ a'_6 = .0047, & \Delta a'_6 = .0003, & a_6 = .005. \end{array}$$

Ved Afrundingen er der først og fremmest sørget for, at $k_0=1$. Derimod faar vi dette Tilfælde ikke $k_1=k_2=0$, men $k_1=.021$ og $k_2=.035$. Dette vilde være fældende for vort Resultat, dersom det virkelig drejede sig om at fremstille en Femtegradsformel¹⁾, men for os kommer det blot an paa fremstille et Sæt Formler, der paa det nærmeste giver det samme Udjevningresultat, som de Formler, der er repræsenteret ved deres Variationsfaktorer

¹⁾ Navnet kan det dog være tilladt at beholde, da Tilnærmelsen er god.

i Tabel 18. Og uagtet vi ikke har $k_1=k_2=0$, bliver Afvigelserne i Variationsfaktorerne heller ikke i dette Tilfælde store; vi faar saaledes

$$\Delta V_4 = -0.004, \quad \Delta V_6 = -0.001, \quad \Delta V_8 = 0.002, \quad \Delta V_{12} = 0.000.$$

Da man skal have $k_0=1$, kan man i Almindelighed ikke nøjes med simpel Afrunding til sidste Decimal overalt, men ved Beregningen af Afvigelserne i Variationsfaktorerne ved Hjælp af $\Delta a'$ ser man let, hvilke Kombinationer der giver brugbare Resultater.

Iøvrigt skal det med Hensyn til disse Formler kun bemærkes, at der sluttelig bør foretages en Beregning af Variationsfaktorer i passende Omfang med de valgte Værdier af Faktorerne a . I nedenstaaende Tabel 21 er der sammenstillet Faktorerne til de direkte anvendelige Femtegradsformler, som ifølge de foregaaende Undersøgelser kan anses for brugbare, samt de tilhørende Variationsfaktorer.

Tabel 21.
Direkte anvendelige Femtegradsformler.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$m=5$.	.46	.30	.024	-.054	-.01	.01		
$m=6$.	.42	.29	.06	-.045	-.024	.004	.005	
$m=7$.	.39	.28	.085	-.032	-.033	-.003	.006	.002

Variationsfaktorer. $n=24$.

$p=$	1	2	3	4	5	6	8	10	12
$m=5$.	.99993	.9963	.966	.864	.659	.392	.028	-.008	-.024
$m=6$.	.99859	.9894	.936	.778	.514	.242	.010	-.001	.004
$m=7$.	.99719	.9850	.904	.693	.390	.142	.007	.007	.012

Vi skal derefter betragte nogle Syvendegradsformler, der er fremstillet efter de samme Principer. Den simpleste af disse Formler er

$$o_i^{(1)} = o_i + k_4 \Delta^8 o_i$$

med Variationsfaktorerne

$$V_p = 1 + k_4 c_p^4.$$

Mindste Middelfejls Princip giver her $k_4 = -\frac{7}{1287}$, hvorefter Skæringspunktet mellem V_p og Abscisseaxen bestemmes ved

$$0 = 1 - \frac{7}{1287} C^4,$$

der giver

$$C = -4 \sin^2 \frac{p\pi}{24} = -3.6823^1).$$

og $p=9.82$. For enhver Værdi af C har vi her:

¹⁾ Til Beregning af Tabel 22 er benyttet Værdien $\log(-C) = .5661200$.

$$m=4. \quad V_p = 1 - \frac{1}{C^4} c_p^4.$$

$$m=5. \quad V_p = 1 - \frac{5}{C^4} c_p^4 + \frac{4}{C^5} c_p^5.$$

$$m=6. \quad V_p = 1 - \frac{15}{C^4} c_p^4 + \frac{24}{C^5} c_p^5 - \frac{10}{C^6} c_p^6.$$

$$m=7. \quad V_p = 1 - \frac{35}{C^4} c_p^4 + \frac{84}{C^5} c_p^5 - \frac{70}{C^6} c_p^6 + \frac{20}{C^7} c_p^7.$$

$$m=8. \quad V_p = 1 - \frac{70}{C^4} c_p^4 + \frac{224}{C^5} c_p^5 - \frac{280}{C^6} c_p^6 + \frac{160}{C^7} c_p^7 - \frac{35}{C^8} c_p^8.$$

$$m=9. \quad V_p = 1 - \frac{126}{C^4} c_p^4 + \frac{504}{C^5} c_p^5 - \frac{840}{C^6} c_p^6 + \frac{720}{C^7} c_p^7 - \frac{315}{C^8} c_p^8 + \frac{56}{C^9} c_p^9.$$

De til Værdien $C = -3.6823$ svarende Variationsfaktorer er fremstillet i nedenstaaende Tabel og i Fig. 29.

Tabel 22.

Variationsfaktorer til Syvendegradsformler.

 $C = -3.6823. \quad n=24.$

$p =$	1	2	3	4	5	6	8	10	12
$m=4.$	1.00000	1.0000	.999	.995	.974	.913	.559	-.055	-.392
$m=5.$	1.00000	.9999	.998	.979	.911	.754	.233	.002	.088
$m=6.$	1.00000	.9996	.993	.950	.817	.572	.082	-.000	-.016
$m=7.$	1.00000	.9992	.985	.908	.705	.406	.026	.000	.002
$m=8.$	.99999	.9985	.974	.854	.588	.274	.007	-.000	-.000
$m=9.$	.99999	.9974	.959	.792	.476	.177	.001	.000	.000

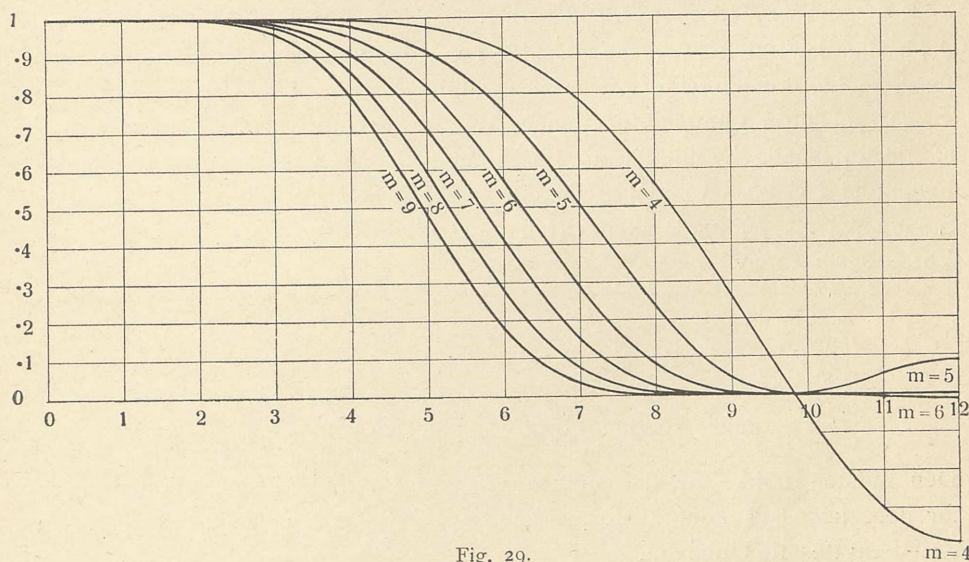


Fig. 29.

Ligesom i det foregaaende Tilfælde giver de to mindste Værdier af m ikke tilstrækkelig Udjevning, idet vi har V_{12} lig med $-.39$ og $.09$. For de øvrige Værdier af m findes de beregnede Faktorer a og de efterberegnete Variationsfaktorer i nedenstaaende Tabel.

Tabel 23.
Direkte anvendelige Syvendegradsformler.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
$m=6$.	.52	.30	-.017	-.06	.008	.013	-.004			
$m=7$.	.47	.30	.022	-.063	-.010	.015	.003	-.002		
$m=8$.	.44	.30	.048	-.060	-.025	.010	.009	-.001	-.001	
$m=9$.	.41	.294	.071	-.048	-.035	.003	.009	.002	-.001	.000

Variationsfaktorer. $n=24$.

$p=1$	1	2	3	4	3	6	8	10	12
$m=6$.	.99999	1.0001	.995	.954	.823	.578	.088	.006	-.012
$m=7$.	.9974	.9931	.979	.903	.699	.400	.025	-.001	.000
$m=8$.	.9995	1.0000	.983	.865	.594	.274	.007	-.008	.004
$m=9$.	.9996	.9996	.960	.788	.475	.178	-.002	-.002	-.004

Dersom man vil gaa videre ad denne Vej og fremstille for Eksempel Niendegradsformler efter de samme Principer, vil det ikke være nødvendigt at beregne Variationsfaktorerne to Gange, idet den ret besværlige Beregning ved Hjælp af Faktorerne k kan udelades. Tabellerne 18 og 22, der er beregnet paa denne Maade, viser tydeligt nok, at man skal udskyde Niendegradsformlerne med $m=5$ og $m=6$, og iøvrigt har man ved Beregning af ΔV_p eller V_p ifølge Formel (31), Side 150, tilstrækkelige Hjælpemidler til at foretage hensigtsmæssige Afrundinger af Faktorerne a .

Vi afslutter Omtalen af denne Art Formler med en Anvendelse af et af de opnaaede Resultater til Beregning af den samme Opgave, som er behandlet i § 20. Vi benyttede der to forskellige Formler, nemlig F_4 med Skema (C) og F_1 med Skema (D), der repræsenteres ved nedenstaaende Variationsfaktorer.

$p=$	1	2	3	4	5	6	8
(C)	1.0000	.9980	.948	.693	.280	.043	.000
(D)	1.0000	.9989	.977	.846	.525	.178	.001
		.9996	.9996	.960	.788	.475	.178 — .002

Den sidste Række af de opførte Variationsfaktorer hører til den ovenfor beregnede Syvendegradsformel med $m=9$, og det er denne Formel, som skal benyttes til Opgaven.

Regningen bestaar kun af to Operationer, nemlig en Multiplikation af hver af de givne Værdier med Faktorerne $a_0, a_1, a_2, \dots$ og en Addition efter Skraaliniér:

$$\begin{array}{r} + \dots\dots \\ + a_2 o_{i-2} \\ + a_1 o_{i-1} \\ o_i = a_0 o_i \\ + a_1 o_{i+1} \\ + a_2 o_{i+2} \\ + \dots\dots \end{array}$$

Til Kontrol er der i Tabel 24, hvortil der iøvrigt henvises, taget Summen af de negative og af de positive Værdier i hver af Kolonnerne ao .

Foruden Resultatet, o , findes her opført Differenserne mellem denne og de andre Beregninger, nemlig $F_1(o) - o$ og $F_4(o) - o$, der viser, at de sidst udjvnede Værdier gennemgaaende falder imellem de tilsvarende Værdier fra de to andre Udjevninger; af Variationsfaktorerne for de forskellige Udjevningsforsøg ser man iøvrigt, at Resultatet paa Forhaand maatte antages at blive saaledes.

Naar man skal fremstille direkte anvendelige Formler til Udjevning af aarlige Perioder med 73 Normalpladser, synes det at være simplest at benytte de tidligere ved Hjælp af Skema (B) fremstillede Formler som Udgangspunkt. Det er vist (Side 89), at Kurven for de til selve Skema (B) hørende Variationsfaktorer,

$$V_p = 1 + c_p + \frac{1}{5} c_p^2,$$

skærer Abscisseaxen i Punkterne $p = \frac{n}{5}$ og $p = \frac{2n}{5}$, og gentages Regningen efter dette Skema v Gange, faar Variationsfaktorerne Røring af $(v-1)^{\text{de}}$ Orden i de samme Punkter. Ved Udledelsen af Formlerne for de daglige Perioder havde vi blot eet Røringspunkt, men dette er ikke tilstrækkeligt for de aarlige Perioder, hvor en langt større Del af Leddene L_p skal bortskæres.

Til Beregning af Faktorerne a har vi først

$$\begin{array}{l} (1) \\ 5 o_0 = o_2 + o_1 + o_0 + o_{-1} + o_{-2}, \\ (2) \\ 25 o_0 = o_4 + 2o_3 + 3o_2 + 4o_1 + 5o_0 + 4o_{-1} + 3o_{-2} + 2o_{-3} + o_{-4}, \\ (3) \\ 125 o_0 = o_6 + 3o_5 + 6o_4 + 10o_3 + 15o_2 + 18o_1 + 19o_0 + 18o_{-1} + \dots\dots, \end{array}$$

Tabel 24.

i	o	$a_0 \times o$	$a_1 \times o$	$a_2 \times o$	$a_3 \times o$	$a_4 \times o$
1	— 2.273	— 9319	— 6683	— 1614	1091	796
2	— 2.549	— 10451	— 7494	— 1810	1224	892
3	— 2.807	— 11509	— 8253	— 1993	1347	982
4	— 3.000	— 12300	— 8820	— 2130	1440	1050
5	— 2.899	— 11886	— 8523	— 2058	1392	1015
6	— 2.442	— 10012	— 7180	— 1734	1172	855
7	— 1.575	— 6458	— 4630	— 1118	756	551
8	— .653	— 2677	— 1920	— 464	313	229
9	.351	1439	1032	249	— 168	— 123
10	1.126	4617	3311	799	— 540	— 394
11	1.711	7015	5030	1215	— 821	— 599
12	2.132	8741	6268	1514	— 1023	— 746
13	2.489	10205	7318	1767	— 1195	— 871
14	2.772	11365	8150	1968	— 1331	— 970
15	2.892	11857	8503	2053	— 1388	— 1012
16	2.797	11468	8223	1986	— 1343	— 979
17	2.557	10484	7518	1815	— 1227	— 895
18	2.021	8286	5942	1435	— 970	— 707
19	1.390	5699	4087	987	— 667	— 487
20	.601	2464	1767	427	— 288	— 210
21	— .264	— 1082	— 776	— 187	127	92
22	— .927	— 3801	— 2725	— 658	445	324
23	— 1.508	— 6183	— 4434	— 1071	724	528
24	— 1.942	— 7962	— 5709	— 1379	932	680
	+22.839	+93640	+67149	+16215	+10963	+7994
	—22.839	—93640	—67147	—16216	—10961	—7993

o. s. v.¹⁾. Disse Formler er som tidligere omtalt af første Grad. Til at danne Formler af højere Grader kan vi benytte Udtrykket (27), Side 78,

$$o_i = o_i - \frac{v}{1} R^{(v+1)}_{o_i} + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} R^{(2)}_{o_i} - \frac{v(v+4)(v+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} R^{(3)}_{o_i} + \dots$$

Da vi i nærværende Tilfælde har

$$R = \Delta^2 + \frac{1}{5} \Delta^4,$$

bliver saaledes Formlen, der svarer til

¹⁾ En Tabel over disse Faktorer indtil o findes hos $\mathcal{J. Altenburger}$ i »Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen«, 2. Band S. 72.

Tabel 24.

$a_5 \times o$	$a_6 \times o$	$a_7 \times o$	$a_8 \times o$	$\overset{(1)}{o}$	$F_1 - \overset{(1)}{o}$	$F_4 - \overset{(1)}{o}$
— 68	— 206	— 45	23	— 2.267	·002	·000
— 76	— 229	— 51	25	— 2.566	·004	—·007
— 84	— 253	— 56	28	— 2.835	·002	—·008
— 90	— 270	— 60	30	— 2.988	—·003	—·001
— 87	— 261	— 58	29	— 2.879	—·007	·007
— 73	— 220	— 49	24	— 2.408	—·007	·005
— 47	— 142	— 32	16	— 1.608	·000	·000
— 20	— 59	— 13	7	— ·632	·005	—·007
11	32	7	— 4	·322	·007	—·006
34	101	23	— 11	1.116	·004	—·005
51	154	34	— 17	1.711	—·001	·003
64	192	43	— 21	2.154	—·003	·006
75	224	50	— 25	2.501	—·001	·004
83	249	55	— 28	2.758	·001	—·003
87	260	58	— 29	2.879	·003	—·002
84	252	56	— 28	2.814	·001	·002
77	230	51	— 26	2.535	·001	·006
61	182	40	— 20	2.045	·001	·002
42	125	28	— 14	1.370	·002	—·002
18	54	12	— 6	·579	·001	—·002
— 8	— 24	— 5	3	— ·225	—·001	·001
— 28	— 83	— 19	9	— ·938	—·004	·001
— 45	— 136	— 30	15	— 1.505	—·005	·002
— 58	— 175	— 39	19	— 1.932	—·002	·003
+687	+2055	+457	+228	+22.784		
—684	—2058	—457	—229	—22.783		

$$F_1(o_i) = o_i - \frac{\overset{(v)}{v}}{1} R \overset{(v+1)}{o_i},$$

af tredje Grad, eftersom de bortkastede Led kun indeholder Differenser af mindst fjerde Grad. Vi har nu definitions-mæssigt

$$(1 + R) \overset{(v+1)}{o} = \overset{(v+2)}{o},$$

der giver

$$R \overset{(v+1)}{o} = \overset{(v+2)}{o} - \overset{(v+1)}{o}.$$

Betegner vi Faktorerne til $\overset{(v+1)}{o}$ med a' og til $\overset{(v+2)}{o}$ med a'' , har vi altsaa

$$\overset{(v+1)}{o_i} = a'_0 o_i + a'_1 (o_{i+1} + o_{i-1}) + a'_2 (o_{i+2} + o_{i-2}) + \dots$$

og

$$o_i^{(v+2)} = a_0'' o_i + a_1'' (o_{i+1} + o_{i-1}) + a_2'' (o_{i+2} + o_{i-2}) + \dots,$$

hvoraf følger, at Faktorerne til Leddet $vR_o^{(v+1)}$ bliver $v(a_0'' - a_0')$, $v(a_1'' - a_1')$, o. s. v. Subtraheres disse Faktorer fra de tilsvarende Faktorer, som hører til $o^{(v)}$, faar vi altsaa Faktorerne til Trediegradsformlen $o - \frac{v}{1} R_o^{(v+1)}$.

Til Fremstilling af Femtegradsformler skal vi benytte $R_o^{(2)}$. Da vi har

$$R_o^{(v+2)} = o^{(v+3)} - o^{(v+2)},$$

faar vi

$$(1 + R)R_o^{(v+2)} = o^{(v+4)} - o^{(v+3)}$$

og derefter

$$R^{(2)} o^{(v+2)} = o^{(v+4)} - 2 o^{(v+3)} + o^{(v+2)};$$

Faktorerne til $R^{(2)} o^{(v+2)}$ findes altsaa ved at tage anden Differens mellem de ensmerkede Faktorer til $o^{(v+2)}$, $o^{(v+3)}$ og $o^{(v+4)}$. Paa tilsvarende Maade findes Faktorerne til $R^{(3)} o^{(v+3)}$.

Naar man saaledes har fundet Faktorerne med for Eksempel 4 Decimaler, bliver Fremgangsmaaden derefter den samme som før, idet man afrunder til 3 Decimaler og samtidig sørger for, at Afrundingerne bliver hensigtsmæssige. Til Kontrol og afsluttende Beregning af Variationsfaktorerne har man Formlen

$$(31 \text{ bis}) \quad V_p = a_0 + 2a_1 \cos p\theta + 2a_2 \cos 2p\theta + \dots + 2a_m \cos mp\theta,$$

hvor θ er lig med $\frac{2\pi}{73}$.

Resultatet for nogle af disse Formlers Vedkommende findes opført i omstaaende Tabeller.

Sammenligner man ved Hjælp af Variationsfaktorerne disse Formler med de tidligere, der er fremstillet med Skema (B) som Grundlag, vil man bemærke en mindre Forskel i Trediegradsformlerne og en større i Femtegradsformlerne. Denne Forskel hidrører tildels fra de foretagne Afrundinger, men mest derfra, at der ikke er benyttet de samme Korrektionsled i begge Tilfælde. Af praktiske Hensyn ordnede vi nemlig tidligere Leddene efter stigende Differenser, saaledes at for Eksempel Trediegradsformlen blev

¹⁾ Nogle af disse Differenser forefindes ogsaa beregnet hos *J. Altenburger*, hvis Formel iøvrigt med vore Betegnelser bliver

$$F(o) = o - \frac{v}{1} R_o^{(v)} + \frac{v(v+1)}{1 \cdot 2} R^{(2)} o^{(v)} - \frac{v(v+1)(v+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} R^{(3)} o^{(v)} + \dots$$

Tabel 25.

Trediegradsformler.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
($v = 4$).	·176	·164	·133	·090	·049	·016	—·003
($v = 6$).	·150	·144	·122	·093	·061	·033	·011
	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	
($v = 4$).	—·012	—·011	—·008	—·004	—·002		
($v = 6$).	—·003	—·009	—·010	—·008	—·006	—·003.	

Variationsfaktorer. $n = 73$.

$p = 1$	2	3	4	5	6	
($v = 4$).	·9993	·9989	·931	·866	·730	·563
($v = 6$).	·9975	·9764	·909	·778	·591	·389
$p = 8$	10	15	22	29	36	
($v = 4$).	·238	·055	·000	—·004	·000	·008
($v = 6$).	·098	·002	·002	·001	·001	—·004.

Tabel 26.

Femtegradsformler.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
($v = 4$).	·196	·180	·142	·090	·040	·003	—·016
($v = 6$).	·170	·161	·135	·095	·055	·020	—·003
	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	
($v = 4$).	—·021	—·016	—·008	·000	·004	·004	
($v = 6$).	—·015	—·018	—·014	—·008	·004	·003.	

Variationsfaktorer. $n = 73$.

$p = 1$	2	3	4	5	6	
($v = 4$).	·9994	·9967	·982	·942	·858	·720
($v = 6$).	1.0000	·9952	·962	·886	·751	·568
$p = 8$	10	15	22	29	36	
($v = 4$).	·339	·061	—·001	·003	—·001	—·008
($v = 6$).	·176	—·008	—·012	—·012	—·009	—·004.

$$F_1(o_i) = o_i^{(v)} - v\Delta^2 o_i^{(v+1)},$$

medens vi nu som Udgangspunkt har taget

$$o_i^{(v)} - vR o_i^{(v+1)} = o_i^{(v)} - v\Delta^2 o_i^{(v+1)} - \frac{v}{5} \Delta^4 o_i^{(v+1)},$$

hvilket var naturligt, eftersom vi ikke skulde tage de samme Hensyn som før, og desuden blev Formlerne aldeles ikke forbedrede ved den tidligere Ordning af Leddene. — For Femtegradsformlens Vedkommende havde vi tidligere

$$F_2(o_i) = o_i^{(v)} - v\Delta^2 o_i^{(v+1)} + \left(-\frac{v}{5} + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2}\right) \Delta^4 o_i^{(v+2)},$$

medens vi nu har

$$o_i^{(v)} - \frac{v}{1} R o_i^{(v+1)} + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} R^{(2)} o_i^{(v+2)} = o_i^{(v)} - v(\Delta^2 + \frac{1}{5} \Delta^4) o_i^{(v+1)} + \frac{v(v+3)}{1 \cdot 2} (\Delta^4 + \frac{2}{5} \Delta^6 + \frac{1}{25} \Delta^8) o_i^{(v+2)}.$$

Naar man anvender denne Art Formler, bliver selve Udjevningssarbejdet meget mindre, end naar man benytter de tidligere fremstillede Formler. Det kunde nu siges, at den hele Udvikling burde have taget direkte Sigte paa at fremstille disse Formler, saaledes at den lange Omvej over den mekaniske Metode med gentagne Udjevninger var undgaaet. Men hertil er der adskilligt at bemærke. For det første hviler Fremstillingen af Formlerne for de aarlige Perioder helt paa Metoden med gentagne Udjevninger og Anvendelse af Korrektionsled. For det andet er Metoden med gentagne Udjevninger allerede i Brug, men den anvendes vist stadig ved meteorologiske lagttagelser med for faa Gentagelser og uden Benyttelse af Korrektionsled, og det maa derfor anses for heldigt, at det vises, hvor meget der hører til for at opnaa gode Resultater ved denne Fremgangsmaade. For det tredie er det som tidligere omtalt muligt, at der for visse Opgavers Vedkommende ikke skal være Gang i Differenserne mellem de forelagte og de udjvnede Værdier, og hvor dette virkelig viser sig at være Tilfældet, kan det alligevel blive nemmest at benytte Metoden med de gentagne Udjevninger, idet man saa ikke behøver at beregne Middelfejlene for Konstanterne i den trigonometriske Række.

Dersom de forelagte Værdier har mange Cifre, kan man med de direkte anvendelige Formler udjevne Differenserne mellem de forelagte Værdier og derefter foretage en Summation, saaledes som det er omtalt i § 19.

§ 25.

De forskellige Udjevningssmetoders Anvendelighed. Résumé.

Det vilde have været heldigt, hvis vi kunde afslutte disse Undersøgelser om Udjevning af Perioder med at angive, i hvilke Tilfælde man med størst Fordel kunde anvende denne eller hin Metode. Det er dog neppe muligt at give en saadan almindelig Anvisning, og vi maa derfor nøjes med at

omtale forskellige Omstændigheder, som er af Betydning for denne Sag. Imidlertid er der i det foregaaende ved flere Lejligheder allerede talt om de forskellige Metoders Fortrin og Mangler, og det kan derfor ikke undgaas, at en Del af de tidligere fremsatte Bemærkninger gentages.

Naar man skal vælge en Udjevningss metode til en bestemt Opgave, er der flere Omstændigheder, som kommer i Betragtning. Selve Opgavens Beskaffenhed er naturligvis af Betydning, men desuden kommer det an paa, hvad man skal bruge Resultatet til, og hvor meget Arbejde man vil ofre paa Opgavens Løsning.

Dersom man vil nøjes med at faa blot en Række af udjvnede Værdier, er der Grund til at antage, at det ikke alene er nemmest men ogsaa heldigst at anvende grafisk Udjevning. Denne Udjevningss metode er kun flygtigt omtalt i det foregaaende, og her skal der ogsaa kun fremsættes nogle faa Bemærkninger om den. Ved denne Udjevningss metode bliver der naturligvis altid noget vilkaarligt, men man kan indskrænke det vilkaarlige til næsten kun at omfatte Valget af Kurvens Grad af Glathed, eller mere bestemt: Valget af Antallet af Vendepunkter. Naar dette Valg er truffet, eller naar man fra andre Undersøgelser kender Antallet af Vendepunkter, kan Udjevningen foretages saaledes, at Usikkerheden paa det nærmeste holdes indenfor de Grænser, som sættes af de grafiske Fremstillingsmidler. Man skal da holde Regnskab med Differenserne mellem de udjvnede og de forelagte Værdier og sørge for, at Summerne af disse Differenser i ethvert nogenlunde stort Interval bliver saa smaa som muligt. Dersom Værdierne ikke kan fremstilles i tilstrækkelig stor Maalestok paa Tegnepapiret, kan man foretage Udjevningen med de givne Værdiers Differenser og afslutte med en Summation, saaledes som det er omtalt i § 19. Saa fremt man ikke vil foretage — eller maaske ikke har tilstrækkeligt Materiale til at foretage — en Undersøgelse angaaende den sande Funktions Natur, bør en omhyggelig udført grafisk Udjevning sikkert foretrækkes for en Udjevning efter mindste Kvadraters Metode, saaledes som det med Styrke er hævdet af *H. Wild*.

Anderledes stiller Sagen sig, naar Resultatet skal bruges til teoretiske Undersøgelser, eller overhovedet naar man vil gøre sig Umage for at opnaa det bedst mulige Resultat uden at tage Hensyn til Regnearbejdets Størrelse. Man bør da begynde med at beregne Konstanterne til den trigonometriske Række og deres Middelfejl i tilstrækkeligt Omfang, og Spørgsmaalet bliver derpaa, om man skal benytte det vundne Resultat til en Udjevning ved Hjælp af et vist Antal Led af Rækken eller til en Udjevning efter den mekaniske Metode.

Med Hensyn til dette Valg imellem de to Metoder skal der først gøres en Bemærkning om Betydningen af visse smaa Led, som vi har fundet ved de tidligere Undersøgelser. Saaledes havde vi i Opgaven angaaende Temperaturens daglige Periode Elementet $b_2 = -0.015$ med Faktorgrænsen

$G = .26$, og efter de opstillede Regler vilde enhver Udjevning blive for svag med Hensyn til b_2 . Det ses imidlertid let, at Sagen i Virkeligheden forholder sig noget anderledes. Vi lod den daglige Periode begynde ved Midnat, men de udjevnede Værdier forandres ikke, naar man vælger et andet Begyndelsespunkt, og man kan derfor vælge det vilkaarligt. Sætter vi almindeligt

$$L_p = a_p \cos p\theta i + b_p \sin p\theta i = C_p \cos(p\theta i + \alpha_p),$$

vil a_p og b_p være afhængige af Begyndelsespunktets Beliggenhed, medens C_p forbliver uforandret, og man kan derfor indse, at det er Forholdet $C_p^2 : \lambda_2(C_p)$, som det kommer an paa. Naar Størrelsen af dette Forhold viser, at L_p maa regnes med til de gode Led, kan Udjevningen ikke betragtes som for svag, selv om enten a_p eller b_p har en meget lille numerisk Værdi.

Det ovenfor anførte kunde maaske synes at tale til Gunst for, at man ved Undersøgelsen af den sande Funktion skulde betragte C_p i Stedet for a_p og b_p . Men i et Tilfælde, hvor for Eksempel a_p har en numerisk stor Værdi og b_p en lille Værdi, vil Faktorgrænsen for C_p være meget nær den samme som for a_p , og vi er derfor i Stand til at bedømme Forholdene næsten lige saa godt ved Hjælp af a_p og b_p , som hvis vi ogsaa havde beregnet C_p . Og paa den anden Side er det heldigt, at man faar Opmærksomheden henledet paa de smaa Elementer, da Tilstedeværelsen af dem kan paavirke Valget af Udjevningsmetoden. Thi uagtet man i et Tilfælde som det sidst omtalte ikke kan sige, at den mekaniske Udjevning nødvendigvis bliver for svag med Hensyn til b_p , saa har paa den anden Side mindste Kvadraters Metode paa dette Punkt et Fortrin, idet man der kan forbedre Resultatet ved at udskyde et saadant lille Element.

Overhovedet er det de smaa Led, som man skal hæfte Opmærksomheden paa, naar man skal træffe et Valg mellem de to Metoder, thi for de store Leds Vedkommende vil Resultaterne blive omtrent ens og kan betragtes som lige gode, idet vi forudsætter, at naar man vil gøre sig Umage for at opnaa det bedst mulige Resultat, vil man ikke anvende en mekanisk Udjevning, der med Hensyn til disse Led kan siges at være for stærk. Nærmere bestemt beror Valget imellem de to Metoder da paa Fordelingen af de smaa Elementer i Rækken. Dersom Fordelingen er saaledes, at vi kan give alle de smaa Elementer Variationsfaktorer, som er mindre end Faktorgrænserne, medens alle de store Elementer faar Variationsfaktorer, som er større end Faktorgrænserne, saa staar vi overfor et Tilfælde, hvor den mekaniske Metode maa antages at give det bedste Resultat. At der er i alt Fald en Mulighed for at opnaa et bedre Resultat end ved Anvendelse af mindste Kvadraters Metode, indser man ved at undersøge, hvilke Forudsætninger man i Virkeligheden gør Brug af med Hensyn til den sande Funktion.

Ved den mekaniske Metode forudsætter man blot, at de sande Værdier i alle Intervaller af en vis Størrelse kan gengives ved en Potensrække af en vis Grad; til de udjvnede Iagttagelsesværdier svarer der udjvnede Værdier af Koefficienterne (hvilke vi dog ikke beregner) i Potensrækken, og disse Koefficienters Værdi kan variere fra Interval til Interval. Vor Forudsætning har altsaa en meget almindelig Form: den angaar kun Potensrækkens Grad, men ikke dens Konstanter. Vi tør derfor antage, at karakteristiske Træk, som maatte findes i visse Dele af Perioden, i det væsentlige bliver bevaret.

Ved mindste Kvadraters Metode omfatter vore Forudsætninger derimod ogsaa den benyttede Rækkens Koefficienter, idet vi antager, at de sande Værdier kan gengives ved et vist Antal Led af Formen

$$L_p = A_p \cos p\theta i + B_p \sin p\theta i,$$

hvor A_p og B_p har uforandrede Værdier i hele Perioden. De udjvnede Værdier, a_p og b_p , forbliver ligeledes uforandrede over hele Perioden, og der er derfor Fare for, at karakteristiske Træk bliver udvisket, og at de tilmed indfører Fejl i andre Dele af Perioden.

Det omtalte Tilfælde, hvor man kan give alle Leddene tilfredsstillende Variationsfaktorer, vil imidlertid sjældent indtræffe, og Spørgsmaalet bliver da, hvor store Fejl man tør begaa i Henseende til at tage for meget med af de smaa Led. De omtalte Fejl vil delvis ophæve hverandre nogle Steder, medens de andre Steder vil hobe sig op, og Sagen stiller sig derfor rimeligvis saaledes, at naar Summen af Maximalfejlene nærmer sig til at blive af samme Størrelsesorden som Fejlene paa de udjvnede Værdier, bør man foretrække mindste Kvadraters Metode.

Som en almindelig Regel kan det siges, at jo mere indviklet den sande Funktion er, desto større maa Antallet af Værdier i Perioden være, naar den mekaniske Metode skal kunne anvendes med Fordel. Til at fremstille en Funktion af indviklet Beskaffenhed kræves der Led, som staar langt henne i Rækken, og skal man bevare disse Led og samtidig forbedre de forelagte Værdier, maa det hele Antal af Led være stort, da der ellers er Fare for, at Fejlene, som stammer fra, at en Del af de smaa Led faar for store Variationsfaktorer, bliver store i Forhold til de Fejl, som vi ormaal at afhjælpe. Naar vi til Beregningen af de aarlige Perioder benytter 73 Normalpladser, er dette Antal af Værdier saa stort, at der er Grund til at antage, at man altid vil kunne opnaa gode Resultater med den mekaniske Metode. Med Hensyn til Bestemmelsen af de daglige Perioder paa Grundlag af timevise Iagttagelser synes der endvidere ved Temperatures daglige Periode at være et saadant Forhold mellem Funktionens Beskaffenhed og Antallet af Værdier, at denne Metode kan anbefales, medens Opgaven angaaende Lufttrykkets daglige Periode rimeligvis kan faa en bedre Løsning

ved Hjælp af mindste Kvadraters Metode. Det blev ved Behandlingen af denne Opgave ganske vist ikke undersøgt, hvor stor Summen af Maximalfejlene for de smaa Led var i Forhold til Fejlene paa de udjvnede Værdier, men det erindres, at vi fandt det nødvendigt at anvende en Udjevning, der var for stærk med Hensyn til flere af de store Led, og naar det viser sig at være vanskeligt at give de gode Led tilstrækkelig store Variationsfaktorer, er der allerede heri en stærk Antydning af, at det er tvivlsomt, om Opgaven egner sig til at løses ved den mekaniske Metode. Derimod er det muligt, at denne Metode vil være at foretrække ogsaa for denne Opgaves Vedkommende, naar man benytter Iagttagelser for hver halve Time, hvorved Antallet af Værdier altsaa stiger til 48.

Naar Antallet af Værdier i Perioden bliver betydelig mindre end 24, vil der neppe gives mange Opgaver, hvor Funktionen er tilstrækkelig simpel til, at den mekaniske Metode kan finde en heldig Anvendelse.

Naar man ved Udjevning efter den mekaniske Metode benytter de direkte anvendelige Formler, vil den besværligste Del af Arbejdet falde paa den Undersøgelse, som man skal foretage angaaende den sande Funktions Natur. Ved denne Undersøgelse bør man neppe dele Materialet i færre end 6 Grupper, da Usikkerheden i Bestemmelsen af Middelfejlene for Konstanterne i den trigonometriske Række ellers kan blive for stor, men iøvrigt kan dette Arbejde som omtalt i Slutningen af § 20 lettes paa flere Maader, uden at man derfor behøver at gaa mindre samvittighedsfuldt til Værks. Imidlertid vil temmelig sikkert kun de færreste af dem, der skal bestemme meteorologiske Elementers Perioder, indlade sig paa at foretage de fornødne Forundersøgelser, men muligvis vil dette heller ikke bestandig være nødvendigt i hvert enkelt Tilfælde, thi det synes rimeligt at antage, at naar man een Gang har foretaget omfattende Undersøgelser angaaende et vist meteorologisk Element, vil man derefter være i Stand til at angive, hvilke Formler der skal anvendes under forskellige forekommende Omstændigheder.

THESES.

1.

Det maa antages, at Restitutionskoefficienten for elastiske Legemer nærmer sig til En, naar Kraften (Maximaltrykket) nærmer sig til Nul, og at Gnidningskoefficienten nærmer sig til Nul, naar Hastigheden nærmer sig til Uendelig.

2.

Den Anskuelse er gjort gældende, at man ved Studiet af Trelegemerproblemet har gjort sig Opgaven vanskeligere end nødvendigt ved Fordringen om, at de Variable skal fremstilles som explicite Funktioner af Tiden. Denne Antagelse synes at være meget berettiget, men man tør ikke derfor slutte, at Opgaven bliver nogenlunde simpel ved, at man holder sig til Banens Ligning. Dette kan maaske allerede ses af følgende tilsyneladende meget simple Eksempel fra det plane Trelegemersystem.

Vi tager $m_2 = m_1 = 1$ og sætter $m_3 = \frac{2}{c-1}$. Legemerne gives saadanne Begyndelsesstillinger og Hastigheder, at man stadig har

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1, & x_3 &= (1-c)x_1, \\y_2 &= -y_1, & y_3 &= 0.\end{aligned}$$

Vi faar da følgende Differentialligning til Bestemmelsen af Banen for m_1 :

$$\frac{1}{4y^2} + \frac{m_3}{\rho^3}(y - cx'y') + \frac{y''}{c + y'^2} \left(\frac{1}{2y} + \frac{2m_3}{\rho} + h \right) = 0,$$

hvor h er en Konstant og $\rho^2 = c^2x^2 + y^2$.

3.

J. Altenburger («Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen». 4. Band. S. 88) forsøger at opstille en Definition for en Talrækkes Glathed (Jevnhed). Man skal da betragte første, anden, Differens, og for at man skal kunne sige, at en Række er glat, maa man fordre, at »die mittleren Werte der Differenzen mit wachsender Ordnungszahl stets abnehmen«. — Det er Hensigten at

anvende dette til at afgøre, om en Række af Værdier (der hører til en ubekendt Funktion) er tilstrækkeligt udjævnet, men hertil kan denne Definition ikke bruges.

4.

Dr. *J. F. Steffensen* («Analytiske Studier», Side 146) har fremsat den Anskuelse, at det vigtigste Kriterium for en Udjevningens Godhed skulde være Fortegnsskiftet for Differenserne mellem de forelagte og de udjvnede Værdier. Hertil fordres imidlertid, at de til Udjevning forelagte Værdier ikke er bundet til hverandre ved væsentlige, varierende Omstændigheder. Og denne Fordring kan næsten med Sikkerhed siges ikke at være opfyldt for Eksempel ved de Opgaver, hvor Kriteriet andetsteds er anvendt, nemlig ved Udjevning af Dødelighedstabeller.

5.

Newtons Approximationsmetode til nærmere Bestemmelse af en udskilt Rod kan med Fordel anvendes i Forbindelse med en Logaritmetabel.

Man giver Ligningen Formen $f(x) = 1$. Naar x_0 er en foreløbig fundet Værdi for x , har man med en vis Tilnærmelse

$$\log f(x) = \log f(x_0 + h) = \log f(x_0) + h \frac{d}{dx} \log f(x_0) = 0.$$

Man faar altsaa

$$h = - \frac{\log f(x_0)}{\frac{d}{dx} \log f(x_0)};$$

de enkelte Led i Nævneren faar man ogsaa (med en vis Tilnærmelse) af Tabellen ved for Eksempel at sætte

$$\frac{d}{dx} \log(x_0 + a) = \frac{\log(x_0 + \delta x_0 + a) - \log(x_0 + a)}{\delta x_0},$$

idet man vælger en passende Værdi for δx_0 .

I »De algebraiske Ligningers Theori« (S. 234), hvor *Newtons* Metode omtales, benyttes som Eksempel Ligningen $x^3 - 2x - 5 = 0$, hvor der foreløbig er fundet $x_0 = 2.1$. Vi omformer Ligningen til

$$\frac{x^3}{2(x + \frac{5}{2})} = 1$$

og faar

$$h = - \frac{.002870}{.5260} = -.005456,$$

hvilket som næste Tilnærmelse giver $x = 2.094544$. (Den sande Værdi er 2.094551...).

6.

Der kan blive Spørgsmaal om, hvorvidt man har Lov til at indsætte Middel-værdier af de i Reglen saavel i Styrke som i Retning stærkt varierende Vindhastigheder i de hydrodynamiske Ligninger. Saafremt Bevægelsen er hvirvelfri, kan dette imidlertid tillades for selve Bevægelsesligningernes, men ikke for Energiligningens Vedkommende.

