

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*



MATEMATIK

FOR

TEKNISKE SKOLER

AF

N. F. JENSEN

LÆRER

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

O. A. SMITH

ADJUNKT

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

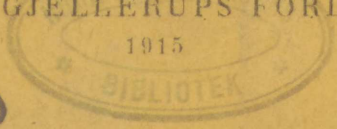
IV TRIGONOMETRI



KØBENHAVN
JUL. GJELLERUPS FORLAG

1915

51 (022)



13

51 (022)



51 (022)

P

MATEMATIK

FOR

TEKNISKE SKOLER

AF

N. F. JENSEN

LÆRER

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

O. A. SMITH

ADJUNKT

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

IV TRIGONOMETRI



KØBENHAVN
JUL. GJELLERUPS FORLAG

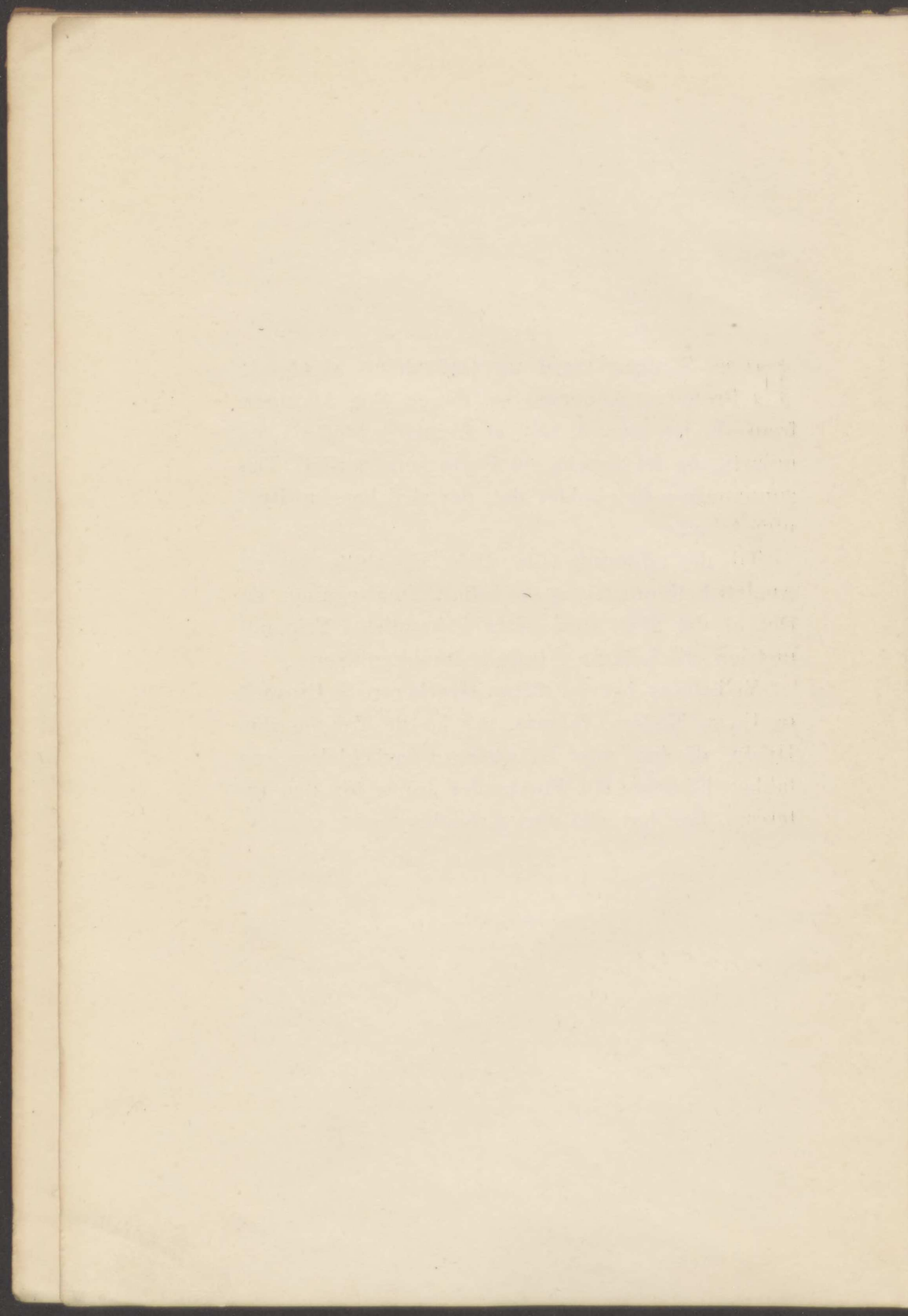
1915

DE FORENEDE BOGTRYKKERIER - AARHUS

E^{FTER} Samraad med og Opfordring af afdøde Professor Andersen er denne Bog kommen frem. Vi har overalt søgt at fremstille Stoffet i saa nøjagtig og let læselig en Form som muligt. Trigonometrien indeholder det, der skal læres af Bygningsfolkene.

Til de udkomne fire Dele vil slutte sig en Analytisk Geometri og en Infinitesimalregning; en Del af det Stof, som ellers behandles i Trigonometrien, vil komme i Infinitesimalregningen.

Vi bringer herved d'Hrr. Overlærere S. Cronfelt og Georg Nielsen, Odense, vor bedste Tak for den Hjælp, de har ydet os under Udarbejdelsen, og takker ligeledes Hr. Forstander Jonas for den Interesse, han har vist vort Arbejde.



A. Trigonometriske Funktioner af Vinkler mellem 0° og 180° .

1. Ethvert Punkt paa en ret Linie deler den i to Dele, som kaldes Halvlinier. Fra et fast Punkt paa en ret Linie kan man altsaa tænke sig et Punkt bevæget ud ad Linien i to forskellige Retninger. Den ene af disse Retninger kaldes ofte den positive Retning, og den anden kaldes da den negative Retning.

Naar O og A er to Punkter paa en ret Linie, betegner OA Afstanden fra O til A . OA er positiv, hvis et Punkt kan komme fra O til A ved at bevæge sig i Liniens positive Retning, og AO er da negativ. Da Længdetallene for OA og AO har samme numeriske Værdi, har man altsaa:

$$AO + OA = 0$$

eller

$$AO = -OA.$$

Naar man vil angive, hvilken Retning der er den positive, sætter man paa Linien en Pil, som peger i den positive Retning.

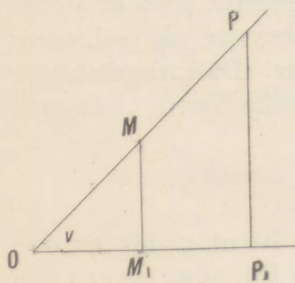
2. I Planen vælges en positiv Omløbsretning, saaledes at en Linie, der drejes om et af sine Punkter, drejes i den positive Omløbsretning, naar den gaar modsat Vej af Viserne paa et Ur, men i den negative Retning, naar den gaar samme Vej som Viserne paa et Ur.

Ved Vinklen mellem to Linier forstaar man altid Vinklen mellem deres positive Retninger. Afstanden fra

Vinklens Toppunkt til et Punkt paa selve Vinkelbenene er altsaa altid positiv, men Afstanden fra Toppunktet til et Punkt paa Vinkelbenenes Forlængelser (ud over Toppunktet) er altid negativ.

Ved $\angle AOB$ forstaar man Vinklen fra OA til OB . OA kaldes det første Vinkelben og OB det andet. En Vinkel er positiv, naar det første Vinkelben ved at drejes gennem Vinklen skal drejes i den positive Omløbsretning for at komme til at dække det andet. Hvis $\angle AOB$ er lig 36° , er $\angle BOA$ lig -36° . Vi benytter kun Vinkler mellem 0° og 180° .

3. Naar man afsætter et Liniestykke paa en Vinkels andet Ben og projicerer det paa det første Ben, vil Forholdet mellem Projektionen og det oprindelige Liniestykke være uafhængigt af Liniestykkets Længde, og det vil være uafhængigt af, om Liniestykket afsættes fra Toppunktet eller fra et vilkaarligt andet Punkt af Vinkelbenet.



$$\triangle M_1OM \sim \triangle P_1OP,$$

$$\text{altsaa} \quad \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1}$$

$$\text{eller} \quad \frac{OP_1}{OP} = \frac{OM_1}{OM}.$$

Man har da ogsaa

$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{OP_1 - OM_1}{OP - OM} = \frac{M_1P_1}{MP}.$$

Forholdet vil endvidere blive det samme, naar Liniestykket afsættes paa det første Vinkelben.

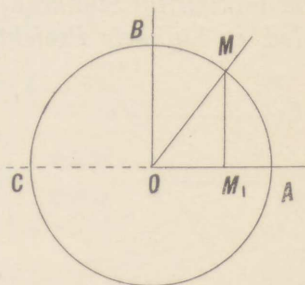
Forholdets Værdi bliver altsaa uforandret, saa længe Størrelsen af Vinklen v er den samme; men det vil forandres, naar Vinklens Størrelse forandres. Forholdet kaldes cosinus af $\angle v$ og skrives $\cos v$.

$$\text{Man har altsaa} \quad \cos v = \frac{OM_1}{OM} = \frac{OP_1}{OP} = \frac{M_1P_1}{MP}.$$

Definition: *cosinus af en Vinkel er et Forhold, hvis Efterled er et vilkaarligt Stykke af Vinklens andet Ben, og hvis Forled er dette Stykkes Projektion paa Vinklens første Ben (eller dets Forlængelse).*

En Cirkel, hvis Radius er lig Længdeenheden, kaldes en *Enhedscirkel*.

Naar man tegner en Enhedscirkel med Vinklens Toppunkt til Centrum, kan man paa en simpel Maade se, hvorledes cosinus af en Vinkel forandres, naar Vinklen vokser fra 0° til 180° .



$$\angle AOM = v,$$

man har da $\cos v = \frac{OM_1}{OM} = \frac{OM_1}{1} = OM_1,$

hvor OM_1 betyder Liniens Længdetal og altsaa er et ubenævnt Tal.

Naar M bevæger sig paa Cirkellinien fra A til B , vil M_1 bevæge sig fra A til O , saaledes at det gennemløber hvert Punkt af AO . Det vil sige:

Naar Vinklen v vokser fra 0° til 90° , vil $\cos v$ af-tage fra 1 til 0.

Naar M bevæger sig fra B til C , vil M_1 bevæge sig fra O til C ; da M_1 ligger paa Vinkelbenets Forlængelse, er OM_1 negativ. Altsaa:

Naar Vinklen v vokser fra 90° til 180° , vil $\cos v$ af-tage fra 0 til -1 .

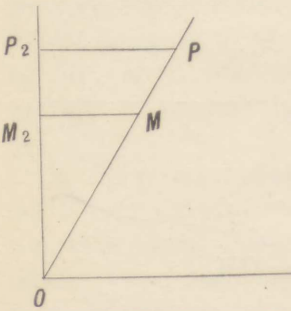
Eks. $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 60^\circ = 0,5$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$.

Af
$$\cos v = \frac{M_1P_1}{MP}$$

faar man
$$M_1P_1 = MP \cdot \cos v.$$

Et Liniestykkes Projektion paa en ret Linie er lig Liniestykket multipliceret med cosinus af Vinklen mellem Projektionen og Liniestykket.

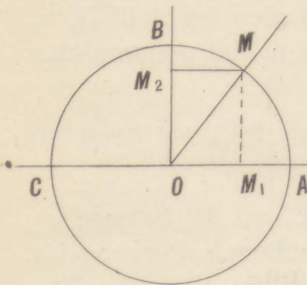
4. sinus af en Vinkel er et Forhold, hvis Efterled er et vilkaarligt Stykke af Vinklens andet Ben, og hvis Forled er Stykkets Projektion paa den Linie, man faar ved at dreje det første Vinkelben en Vinkel paa $+90^\circ$. sinus af $\angle v$ skrives $\sin v$.



Naar $\angle AOM = v$, har man
altsaa

$$\sin v = \frac{OM_2}{OM} = \frac{OP_2}{OP} = \frac{M_2P_2}{MP}$$

For at undersøge, hvorledes $\sin v$ forandres, naar v vokser fra 0° til 180° , tegner vi en Enhedscirkel med Vinklens Toppunkt som Centrum. Man har da $\sin v = OM_2$.



Naar M bevæger sig paa Cirkelbuen fra A til B , vil M_2 bevæge sig fra O til B ; altsaa:

Naar v vokser fra 0° til 90° , vil $\sin v$ vokse fra 0 til 1 .

Naar M bevæger sig fra B til C , vil M_2 bevæge sig fra B til O ; altsaa:

Naar v vokser fra 90° til 180° , vil $\sin v$ aftage fra 1 til 0 . $\sin v$ er altsaa positiv, naar v ligger mellem 0° og 180° .

$$\text{Eks. } \sin 0^\circ = 0 = \sin 180^\circ, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \sin 150^\circ,$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 135^\circ, \quad \sin 90^\circ = 1.$$

Man har $\overline{OM_2}^2 + \overline{M_2M}^2 = \overline{OM}^2 = 1,$

da $\overline{M_2M}^2 = \overline{OM_1}^2,$

faar man $\overline{OM_2}^2 + \overline{OM_1}^2 = 1$

eller $\sin^2 v + \cos^2 v = 1.$

5. tangens af v eller $tg v$ betyder $\frac{\sin v}{\cos v}$. cotangens af v eller $cot v$ betyder $\frac{\cos v}{\sin v}$.

Af Definitionerne følger: Naar v er spids, er $tg v$ og $cot v$ begge positive, da baade $\cos v$ og $\sin v$ er positive. Naar v er stump, er baade $tg v$ og $cot v$ negative, da $\sin v$ er positiv, men $\cos v$ negativ.

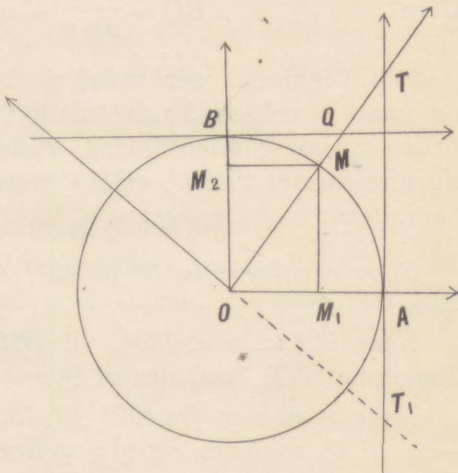
Paa Tegningen er

$$\angle AOB = 90^\circ$$

og $\angle AOM = v.$

Enhedscirklen skærer $\angle v$'s første Ben i A og det andet i M. Tangenten gennem A skærer OM i T, og Tangenten gennem B skærer OM i Q. Naar de Linier, der er parallelle med OB, har samme positive Retning som OB, og de Linier, der er parallelle med OA, har samme positive Retning som OA, har man

$$\triangle OMM_1 \sim \triangle OTA,$$



og
$$\frac{OM_1}{OA} = \frac{M_1M}{AT} = \frac{OM_2}{AT}$$

eller
$$\frac{\cos v}{1} = \frac{\sin v}{AT}.$$

Deraf
$$AT = \frac{\sin v}{\cos v} = \operatorname{tg} v.$$

Desuden har man

$$\triangle OMM_2 \sim \triangle OQB,$$

altsaa
$$\frac{OM_2}{OB} = \frac{M_2M}{BQ} = \frac{OM_1}{BQ}$$

eller
$$\frac{\sin v}{1} = \frac{\cos v}{BQ}.$$

Deraf
$$BQ = \frac{\cos v}{\sin v} = \cot v.$$

Paa Tegningen ser man, at naar $v = 0$, er $AT = 0$, og naar v vokser fra 0° til 90° , vil Linien AT stadig vokse og vokse uden Spring, saaledes at naar v nærmer sig ubegrænset til 90° , vil AT vokse uden Grænse. Man har altsaa: $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$.

Naar v vokser fra 0° til 90° , vil $\operatorname{tg} v$ vokse fra 0 til $+\infty$.

Naar $90^\circ < v < 180^\circ$, vil OM 's Forlængelse skære Tangenten i T_1 , saaledes at $\operatorname{tg} v = AT_1$; man faar da:

Naar v vokser fra 90° til 180° , vil $\operatorname{tg} v$ vokse fra $-\infty$ til 0 , saaledes at $\operatorname{tg} v$ gennemløber alle negative Værdier. Naar v passerer 90° , springer $\operatorname{tg} v$ fra $+\infty$ til $-\infty$.

Paa lignende Maade ser man, at naar v vokser fra 0° til 180° , vil $\cot v$ aftage fra $+\infty$ til $-\infty$, saaledes at $\cot v$ gennemløber alle positive og negative Værdier, og $\cot 90^\circ = 0$.

6. $\sin v$, $\cos v$, $\operatorname{tg} v$ og $\cot v$ kaldes *trigonometriske Funktioner* af Vinklen v .

Af de tre Ligninger

$$1) \quad \sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

$$2) \quad \operatorname{tg} v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

$$3) \quad \cot v = \frac{\cos v}{\sin v}$$

kan man finde de tre andre trigonometriske Funktioner af Vinklen, naar man har opgivet een.

Har man f. Eks. $\operatorname{tg} v$ opgivet, faar man af 2 og 3

$$4) \quad \operatorname{tg} v \cdot \cot v = 1.$$

Af 1 faar man $\operatorname{tg}^2 v + 1 = \frac{1}{\cos^2 v}$, hvorafr

$$5) \quad \cos v = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 v}}.$$

Multipliseres begge Sider af 5 med $\operatorname{tg} v$, faar man

$$6) \quad \sin v = \frac{\operatorname{tg} v}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 v}}$$

I 5 maa man tage den positive Værdi, naar $v < 90^\circ$, men den negative, naar v er stump. I 6 maa man tage den positive Værdi, naar $0 < v < 180^\circ$.

7. Paa Tegningen er

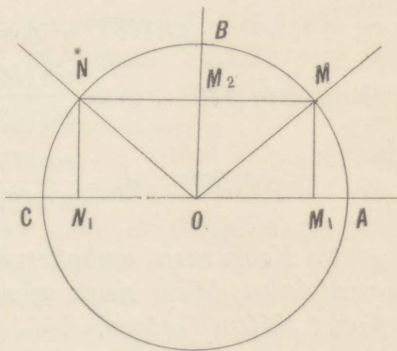
$$\angle AOM = v, \quad \text{og}$$

$$\angle AOB = 90^\circ.$$

Man har da

$$\angle MOB = 90^\circ - v \quad \text{og}$$

$$\begin{aligned} OM_2 &= \sin v \\ &= \cos(90^\circ - v). \end{aligned}$$



Hvis man derimod sætter

$$\angle MOB = v,$$

faar man $\angle AOM = 90^\circ - v$

og $OM_2 = \cos v = \sin (90^\circ - v).$

Man har altsaa

$$\cos (90^\circ - v) = \sin v$$

$$\sin (90^\circ - v) = \cos v.$$

Af Definitionerne faar man

$$\operatorname{tg} (90^\circ - v) = \frac{\sin (90^\circ - v)}{\cos (90^\circ - v)} = \frac{\cos v}{\sin v} = \cot v$$

$$\cot (90^\circ - v) = \frac{\cos (90^\circ - v)}{\sin (90^\circ - v)} = \frac{\sin v}{\cos v} = \operatorname{tg} v.$$

a. Man kan ombytte en Vinkel med dens Komplementvinkel, naar man forandrer $\cos$ til $\sin$, $\sin$ til $\cos$, tg til $\cot$ og $\cot$ til tg .

Naar $MN \perp OB$, har man

$$\triangle OMM_1 \cong \triangle ONN_1.$$

Man faar da $OM_1 = -ON_1$

og $\angle AON = (180^\circ - v).$

Deraf $\cos (180^\circ - v) = ON_1 = -OM_1 = -\cos v$

og $\sin (180^\circ - v) = OM_2 = \sin v,$

altsaa $\operatorname{tg} (180^\circ - v) = \frac{\sin (180^\circ - v)}{\cos (180^\circ - v)} = \frac{\sin v}{-\cos v} = -\operatorname{tg} v$

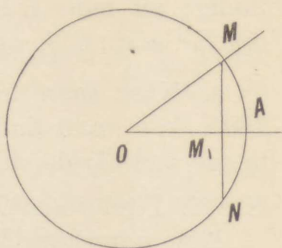
og $\cot (180^\circ - v) = \frac{\cos (180^\circ - v)}{\sin (180^\circ - v)} = \frac{-\cos v}{\sin v} = -\cot v.$

b. Naar man ombytter en Vinkel med dens Supplementvinkel, bliver sinus uforandret, men de andre Funktioner skifter Fortegn.

8. Punktet O er Enhedscirkelns Centrum; $\angle AOM$ er en spids Centervinkel, og Punkterne N og M ligger symmetrisk med Hensyn til OA .

Naar $\angle AOM = v$, har man

$$\sin v = M_1M = \frac{1}{2} NM.$$



sinus af en spids Vinkel er det halve af Længdetallet til den Korde, som af Enhedscirklen afskærer en Bue, der er dobbelt saa mange Grader som Vinklen.

Naar Radius er lig Længdeenheden, har man:

$$k_3 = \sqrt{3}, k_4 = \sqrt{2}, k_6 = 1 \text{ og } k_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Deraf faar man

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ og } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ved Hjælp af Formlen $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ kan man finde $\cos$ af de samme Vinkler, og derefter kan man finde tg og cot .

$$\text{Eks. } tg 60^\circ = cot 30^\circ = \sqrt{3}, tg 30^\circ = cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ tg 45^\circ = cot 45^\circ = 1.$$

Man kan desuden finde tilnærmede Værdier for de trigonometriske Funktioner af enhver Vinkel, ved at man laver en nøjagtig Tegning og paa den maaler de Linier, hvis Længdetal er lig Funktionerne.

9. Man har beregnet trigonometriske Tabeller, der indeholder alle spidse Vinkler, som er et helt Antal Minutter; ved Siden af Vinklen finder man en af Funktionerne af Vinklen. Saadanne trigonometriske Tabeller indeholder ofte kun en Sinustabel og en Tangentstabel.

En Cosinustabel og en Cotangenstabel er nemlig overflødig; vil man f. Eks. have $\cos 25^\circ$, benytter man, at $\cos 25^\circ = \sin 65^\circ$, og finder $\sin 65^\circ$ i Tabellen.

a. Naar man har opgivet en Vinkel mellem 0° og 180° , kan man finde en hvilken som helst af Funktionerne ved Hjælp af Tabellen.

Eks. 1. Find $\cot 29,7^\circ$.

Man udtrykker først Vinklen i Grader og Minutter.

$$0,7^\circ = 0,7 \cdot 60' = 42'.$$

$$\cot 29,7^\circ = \cot 29^\circ 42' = \operatorname{tg} 60^\circ 18' = 1,7532.$$

Eks. 2. $\cos 102^\circ 27' = -\cos 77^\circ 33' = -\sin 12^\circ 27' = -0,2156$.

b. Naar Funktionen er given, kan man altid finde en Vinkel mellem 0° og 180° , hvis det er en tangens eller cotangens, man kender. Er det en cosinus, man kender, maa Værdien ligge mellem -1 og $+1$; er det en sinus, maa dens Værdi ligge mellem 0 og 1 , for at man kan finde en Vinkel mellem 0° og 180° .

Eks. 1. Find v , naar $\operatorname{tg} v = 3,6$.

Den nærmeste Værdi i Tabellen er 3,6018.

Man faar $v = 74^\circ 29'$.

Eks. 2. $\cot v = -0,97$, find v .

Man har da $\cot (180^\circ - v) = 0,97$.

$$180^\circ - v = 45^\circ 52'.$$

$$v = 134^\circ 8'.$$

Eks. 3. Find v , naar $\cos v = 0,9999$.

Hvis Tabellen kun indeholder Funktionerne med 4 Decimaler, kan man kun finde, at v ligger mellem $0^\circ 35'$ og 1° .

En meget lille Vinkel kan altsaa ikke bestemmes nøjagtig ved cosinus. Man kan da bestemme Vinklen ved sinus.

$$\sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v} = \sqrt{0,00019999} = 0,0141.$$

$$v = 48'.$$

Eks. 4. Find v , naar $\sin v = 0,354$.

$$v = 20^{\circ} 44' \text{ og } v = 159^{\circ} 16'.$$

Til en given sinus, der ligger mellem 0 og 1, finder man altid baade en spids og en stump Vinkel, da $\sin v = \sin (180^{\circ} - v)$.

Man har ogsaa Tabeller, hvori der i Stedet for Funktionerne findes Logaritmerne af Funktionerne; men vi vil foreløbig benytte selve Funktionerne.

10. Som Vinkelenhed bruger man undertiden den Vinkel, der spænder over en Bue med Længdetallet 1, naar den er Centervinkel i en Enhedscirkel. Naar Vinklens Størrelse udtrykkes ved denne Enhed, siger man, at Vinklen er udtrykt i rene Tal eller i absolut Maal.

Naar Vinklen udtrykkes i rene Tal, vil en Vinkel paa 180° have Størrelsen π , og en Vinkel paa 1° vil have Størrelsen $\frac{\pi}{180}$. Naar en Vinkel er g° , vil dens Størrelse udtrykt i rene Tal være $g \cdot \frac{\pi}{180}$; kaldes Vinklens Størrelse i rene Tal n , har man altsaa

$$n = g \cdot \frac{\pi}{180} \text{ eller } g = n \cdot \frac{180}{\pi}.$$

Opgaver.

- Find de andre trigonometriske Funktioner af $\angle x$, naar
 - $\cos x = 0,8$.
 - $\sin x = 0,28$.
 - $\tan x = 2,4$.
 - $\cot x = 1,875$.
- Find de trigonometriske Funktioner af y , naar $\tan x = 1,05$, og
 - $x + y = 90^{\circ}$.
 - $x + y = 180^{\circ}$.
- Find de trigonometriske Funktioner af x , naar $\sin^2 x - \cos^2 x = 0,28$.

4. Find Værdien af $\sin x + \sin (180^\circ - x) + \cos (90^\circ - x)$,
naar $\operatorname{tg} x = 0,75$.
5. Beregn Værdien af $\frac{\operatorname{tg} 66^\circ \cdot \cot 24^\circ}{\cot 156^\circ \cdot \operatorname{tg} 114^\circ}$.
6. Bevis, at naar x er en spids Vinkel, er $\sin x + \cos x > 1$.
7. Beregn de trigonometriske Funktioner af y , naar
 $3 \operatorname{tg} y + 4 \cot y = 7$.
8. Find $\sin 20^\circ$, $\cos 41^\circ 8'$, $\cot 98^\circ$ og $\operatorname{tg} 125,2^\circ$.
9. Find u , naar
- | | |
|-------------------------|-------------------------------------|
| a) $\cos u = 0,958$. | d) $\operatorname{tg} u = 0,3979$. |
| b) $\cos u = -0,6926$. | e) $\operatorname{tg} u = -9,409$. |
| c) $\sin u = 0,14$. | f) $\cot u = -137$. |
10. Reducer følgende Udtryk
- a) $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$.
- b) $(\operatorname{tg} u + \cot u)^2 - (\operatorname{tg} u - \cot u)^2$.
- c) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \cot^2 x} : \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$.
- d) $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cot^2 x} - \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$.
11. Find x , naar
- a) $\cos (3x) = -1$.
- d) $\operatorname{tg} (5x) = 0$.
- b) $\sin (2x) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- e) $\cot \frac{x}{2} = 0,1605$.
- c) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = 0,2679$.
- f) $\cot (2x) = -1,153$.
12. I en Cirkel, hvis Radius er 1 m, skal man finde
Længden af Korden til 24° , 66° og 100° .
-

B. Trekanten.

Den retvinklede Trekant.

11. En Trekant er bestemt ved tre Stykker (Sider og Vinkler), naar mindst et af dem er en Side. En retvinklet Trekant er altsaa bestemt ved to af Siderne eller ved en Side og Vinklerne. Vi vil vise, hvorledes man beregner de øvrige Stykker, naar man har opgivet to.

Af Tegningen ser man, at

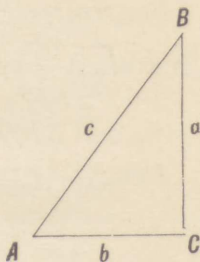
$$\cos A = \frac{b}{c}$$

og $\sin A = \frac{a}{c}$

Deraf faar man ved Division

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

og $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$



a. *cosinus af en spids Vinkel i en retvinklet Trekant er lig Forholdet mellem den hosliggende Katete og Hypotenusen.*

b. *sinus af en spids Vinkel i en retvinklet Trekant er lig Forholdet mellem den modstaaende Katete og Hypotenusen.*

c. *cotangens af en spids Vinkel i en retvinklet Trekant er lig Forholdet mellem den hosliggende Katete og den modstaaende.*

d. *tangens af en spids Vinkel i en retvinklet Trekant er lig Forholdet mellem den modstaaende Katete og den hosliggende.*

$$\text{Af} \quad \cos A = \frac{b}{c} \text{ og } \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\text{faar man} \quad b = c \cos A \text{ og } a = c \sin A.$$

e. *En Katete i en retvinklet Trekant er lig Hypotenusen multipliceret med cosinus af Katetens hosliggende spidse Vinkel.*

f. *En Katete i en retvinklet Trekant er lig Hypotenusen multipliceret med sinus af Katetens modstaaende Vinkel.*

$$\text{Af} \quad \cot A = \frac{b}{a} \text{ og } \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\text{faar man} \quad b = a \cot A \text{ og } a = b \tan A.$$

I. Givet a og c .

$$\text{Man har } \sin A = \cos B = \frac{a}{c} \text{ og } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

$$\text{Eks.} \quad a = 7, c = 25$$

$$\sin A = \cos B = \frac{7}{25} = 0,28$$

$$A = 15^\circ 53'; B = 76^\circ 7'$$

$$b = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{32 \cdot 18} = 24.$$

II. Givet a og b .

$$\text{Man har } \tan A = \cot B = \frac{a}{b} \text{ og } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Eks.} \quad a = 4,9, b = 5,2$$

$$\tan A = \frac{4,9}{5,2} = 0,9423$$

$$A = 43^\circ 18'; B = 46^\circ 42'$$

$$c = \sqrt{4,9^2 + 5,2^2} = 7,1.$$

III.

Givet c og A.

$$b = c \cos A$$

$$a = c \sin A.$$

Eks.

$$c = 12,8, A = 31^{\circ} 50'$$

$$b = 12,8 \cdot \cos 31^{\circ} 50' = 12,8 \cdot 0,8496$$

$$a = 12,8 \cdot \sin 31^{\circ} 50' = 12,8 \cdot 0,5275$$

$$\log 12,8 = 1,1072 \quad \log 12,8 = 1,1072$$

$$\log 0,8496 = \underline{0,9292 - 1} \quad \log 0,5275 = \underline{0,7222 - 1}$$

$$\log b = 1,0364 \quad \log a = 0,8294$$

$$b = 10,83 \quad a = 6,752$$

$$B = 90^{\circ} - 31^{\circ} 50' = 58^{\circ} 10'.$$

IV.

Givet a og A.

$$b = a \cot A$$

$$c = \frac{a}{\sin A}.$$

Eks.

$$a = 96,27, A = 37^{\circ} 45'$$

$$b = 96,27 \cdot \cot 37^{\circ} 45' = 96,27 \cdot 1,2915$$

$$c = \frac{96,27}{\sin 37^{\circ} 45'} = \frac{96,27}{0,6122}$$

$$\log 96,27 = 1,9835 \quad \log 96,27 = 1,9835$$

$$\log 1,2915 = \underline{0,1111} \quad \log 0,6122 = \underline{0,7869 - 1}$$

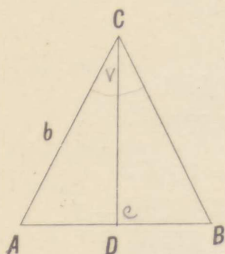
$$\log b = 2,0946 \quad \log c = 2,1966$$

$$b = 124,3 \quad c = 157,2$$

$$B = 90^{\circ} - 37^{\circ} 45' = 52^{\circ} 15'.$$

Den ligebenede Trekant.

12. Trekant ABC er ligebenet med AB som Grundlinie, CD er Højden paa Grundlinien.



Man har $AD = \frac{c}{2}$.

Naar $\angle ACB = v$,

faar man $\frac{c}{2} = b \sin \frac{v}{2}$

eller $c = 2b \sin \frac{v}{2}$.

Man kan altsaa finde de manglende Stykker, naar man kender enten en Side og en Vinkel eller to forskellige Sider.

Eks. 1. $c = 8,52$, $b = 6,78$; find de andre Stykker.

$$\sin \frac{v}{2} = \frac{c}{2b} = \frac{4,26}{6,78}$$

$$\log 4,26 = 0,6294$$

$$\log 6,78 = 0,8312$$

$$\log \sin \frac{v}{2} = 0,7982 - 1$$

$$\frac{v}{2} = 38^{\circ} 56'$$

$$v = 77^{\circ} 52'$$

$$A = B = 90^{\circ} - 38^{\circ} 56' = 51^{\circ} 4'.$$

Eks. 2. Find b , naar $c = 79,5$ og $v = 129^{\circ}$.

Af $c = 2b \sin \frac{v}{2}$

faar man $b = \frac{c}{2 \sin \frac{v}{2}} = \frac{79,5}{2 \cdot 0,9026}$ o. s. v.

Naar $\triangle ABC$ er Centraltrekant i en regulær n -Kant, faar man, idet $AC = R$ og $AB = s$.

$$s = 2 R \sin \frac{v}{2} = 2 R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Naar r betegner Polygonens mindste Radius, faar man

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Eks. I en Cirkel, hvis Radius er 36 cm, er der indskreven en regulær Nikant. Find Siden, mindste Radius og Arealet.

$$s = 72 \sin 20^\circ = 72 \cdot 0,3420$$

$$r = 36 \cos 20^\circ = 36 \cdot 0,9397$$

$$\log 72 = 1,8573$$

$$\log 36 = 1,5563$$

$$\log 0,3420 = \underline{0,5340 - 1} \quad \log 0,9397 = \underline{0,9730 - 1}$$

$$\log s = 1,3913$$

$$\log r = 1,5293$$

$$s = 24,62$$

$$r = 33,83$$

Kaldes Polygonens Arealtal P , har man

$$P = \frac{1}{2} r \cdot 9 s = 4,5 \cdot 24,62 \cdot 33,83.$$

$$\log 4,5 = 0,6532$$

$$\log 24,62 = 1,3913$$

$$\log 33,83 = 1,5293$$

$$\log P = 3,5738$$

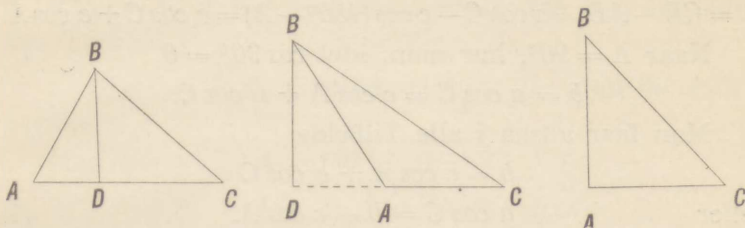
$$P = 3748.$$

Opgaver.

13. I en retvinklet Trekant er Hypotenusen 5,8 m, og Forskellen mellem de spidse Vinkler er $9^\circ 16'$. Find Kateterne.
14. I en Rhombe er Diagonalerne 14,5 cm og 21,8 cm. Find Vinklerne, Siden og den indskrevne Cirkels Radius.

15. En Flagstang har paa den vandrette Jord en Skygge, der er 26,4 m lang. Find Flagstangens Højde, naar Solens Højdevinkel (Vinklen mellem den vandrette Plan og Sigtelinien til Solen) er $29,4^\circ$.
 16. En Cirkels Radius er 12 cm. Find Korden til 15° , 20° , 72° , $140^\circ 19'$ og $156,3^\circ$.
 17. I en Cirkel, hvis Radius er 14 cm, er der trukket en en Korde, som er 10,4 cm lang. Find Korden til den halve Bue og Korden til den dobbelte Bue.
 18. Punkterne A og B deler en Cirkelperiferi i to Dele, der forholder sig som 3 til 8. Gennem A og B trækkes Tangenter til Cirklen. Find Afstanden fra A til Tangenternes Skæringspunkt, naar Cirkelens Radius er 9,46 cm.
 19. Find Siden og største Radius i en regulær Syvkant, naar mindste Radius = 6,24 cm.
 20. Find Omkredsen af et Cirkelafsnit paa $66\frac{2}{3}^\circ$, naar Radius er 5 cm.
 21. Et Skib sejler i ret Linie hen imod et højt Bjerg. En Passenger, som staar 4 m over Vandfladen, maaler, at Højdevinklen til Bjergets Top er $22^\circ 25'$; 10 Minutter senere finder han, at Højdevinklen er $32^\circ 4'$. Find Bjergets Højde, naar Skibet sejler med en Hastighed af 5 m pr. Sekund.
 22. Find Siderne og Vinklerne i en ligebenet Trekant, naar dens indskrevne Cirkels Radius er 2,25 cm, og Radius i den Cirkel, som rører Grundlinien og Benenes Forlængelser, er 4 cm.
 23. Find Længden af en Drivrem, som ligger stramt om to Hjul, naar Hjulenets Radier er 24 cm og 70 cm, og deres Centerlinie er 2 m.
-

Den almindelige Trekant.



13. BD er Højden paa AC . Af $\triangle ABD$ faar man:
 naar $A < 90^\circ$, er $BD = c \sin A$
 naar $A > 90^\circ$, er $BD = c \sin (180^\circ - A) = c \sin A$
 naar $A = 90^\circ$, er $BD = c = c \sin 90^\circ = c \sin A$.

Man faar altsaa i alle Tilfælde

$$BD = c \sin A.$$

Af $\triangle CBD$ faar man

$$BD = a \sin C.$$

Altsaa

$$a \sin C = c \sin A$$

eller

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Trækkes Højden fra C , faar man paa lignende Maade

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Man har altsaa $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

Disse Ligninger kaldes *Sinusrelationerne* eller *Sinusligningerne*; de udtrykker, at:

a. *En Trekants Sider er proportionale med Sinuserne af de modstaaende Vinkler.*

Naar A og C hver for sig er mindre end 90° , har man

$$b = CD + DA = a \cos C + c \cos A.$$

Naar $A > 90^\circ$, har man

$$b = CD - AD = a \cos C - c \cos (180^\circ - A) = a \cos C + c \cos A.$$

Naar $A = 90^\circ$, har man, idet $\cos 90^\circ = 0$,

$$b = a \cos C = c \cos A + a \cos C.$$

Man faar altsaa i alle Tilfælde

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$\text{eller} \quad a \cos C = b - c \cos A. \quad (1)$$

Desuden har man

$$a \sin C = c \sin A \quad (2)$$

Naar man kvadrerer (1) og (2) og adderer, faar man

$$a^2(\cos^2 C + \sin^2 C) = (b - c \cos A)^2 + c^2 \sin^2 A$$

$$\text{eller} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Paa lignende Maade faar man

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\text{og} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \quad \text{altsaa:}$$

b. *Kvadratet paa en Side i en Trekant er lig Summen af de to andre Siders Kvadrater minus det dobbelte Produkt af disse to Sider og cosinus af Vinklen mellem dem.*

Denne Sætning kaldes den *udvidede pytagoræiske Sætning*.

Af (1) og (2) faar man ved Division

$$\operatorname{tg} C = \frac{c \sin A}{b - c \cos A}.$$

Naar man trækker Højden fra A i $\triangle ABC$, finder man

$$\operatorname{tg} C = \frac{c \sin B}{a - c \cos B}.$$

Man har altsaa

$$c. \quad \operatorname{tg} C = \frac{c \sin A}{b - c \cos A} = \frac{c \sin B}{a - c \cos B}.$$

For $\operatorname{tg} A$ og $\operatorname{tg} B$ kan man finde tilsvarende Udtryk; disse 6 Formler kaldes *Tangensrelationerne*.

14. Vi vil vise, hvorledes man ved Sætningerne i § 13 løser de 4 Hovedopgaver angaaende den almindelige Trekant.

I. Givet a , B og C (eller a , A og B); find de andre Stykker.

Man har $A = 180^\circ - (B + C)$

og
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

altsaa
$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \text{ og } c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Eks. $a = 5,92$, $B = 42^\circ$ og $C = 100^\circ 12'$.

Man faar $A = 37^\circ 48'$.

$$b = \frac{5,92 \cdot 0,6691}{0,6129}; \quad c = \frac{5,92 \cdot 0,9842}{0,6129}.$$

$$\log 5,92 = 0,7723 \qquad \log 5,92 = 0,7723$$

$$\log 0,6691 = \frac{0,8255 - 1}{0,5978} \quad \log 0,9842 = \frac{0,9931 - 1}{0,7654}$$

$$\log 0,6129 = \frac{0,7874 - 1}{} \quad \log 0,6129 = \frac{0,7874 - 1}{}$$

$$\log b = 0,8104 \qquad \log c = 0,9780$$

$$b = 6,462 \qquad c = 9,505.$$

II. Givet a , b og B ; find de andre Stykker.

Man har
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.$$

Deraf
$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}.$$

Naar A er fundet, finder man C . Derefter kan c findes ved Sinusrelationen.

Eks. 1. $a = 28,4$, $b = 23,5$ og $B = 32^\circ 16'$.

$$\sin A = \frac{28,4 \sin 32^\circ 16'}{23,5} = \frac{28,4 \cdot 0,5339}{23,5}.$$

$$\log 28,4 = 1,4533$$

$$\log 0,5339 = \frac{0,7275 - 1}{1,1808}$$

$$\log 23,5 = 1,3711$$

$$\log \sin A = 0,8097 - 1$$

$$\sin A = 0,6452$$

$$A_1 = 40^\circ 11' \quad A_2 = 139^\circ 49'$$

$$C_1 = 107^\circ 33' \quad C_2 = 7^\circ 55'$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

$$c_1 = \frac{23,5 \sin 72^\circ 27'}{\sin 32^\circ 16'} = \frac{23,5 \cdot 0,9535}{0,5339}$$

$$c_2 = \frac{23,5 \sin 7^\circ 55'}{\sin 32^\circ 16'} = \frac{23,5 \cdot 0,1377}{0,5339}$$

$$\log 23,5 = 1,3711 \quad \log 23,5 = 1,3711$$

$$\log 0,9535 = \frac{0,9793 - 1}{1,3504} \quad \log 0,1377 = \frac{0,1389 - 1}{0,5100}$$

$$\log 0,5339 = \frac{0,7275 - 1}{1,6229} \quad \log 0,5339 = \frac{0,7275 - 1}{0,7825}$$

$$c_1 = 41,97 \quad c_2 = 6,06.$$

$$1. \text{ Løsn.: } A_1 = 40^\circ 11' \quad 2. \text{ Løsn.: } A_2 = 139^\circ 49'$$

$$C_1 = 107^\circ 33' \quad C_2 = 7^\circ 55'$$

$$c_1 = 41,97. \quad c_2 = 6,06.$$

Eks. 2. $a = 28,4$, $b = 56,8$ og $B = 32^\circ 16'$.

$$\sin A = \frac{28,4 \sin 32^\circ 16'}{56,8} = \frac{0,5339}{2} = 0,2670.$$

$$A_1 = 15^\circ 29' \quad A_2 = 164^\circ 31'.$$

Da $A_2 + B > 180^\circ$, kan A_2 ikke benyttes, man faar
altsaa kun

$$A = 15^\circ 29'$$

$$C = 132^\circ 15'.$$

$$c = \frac{56,8 \sin 47^{\circ} 45'}{\sin 32^{\circ} 16'} = \frac{56,8 \cdot 0,7402}{0,5339}$$

$$\log 56,8 = 1,7543$$

$$\log 0,7402 = 0,8693 - 1$$

$$1,6236$$

$$\log 0,5339 = 0,7275 - 1$$

$$\log c = 1,8961$$

$$c = 78,72.$$

$$A = 15^{\circ} 29' \quad C = 132^{\circ} 15' \quad c = 78,72.$$

Eks. 3. $a = 28,4$, $b = 7,1$ og $B = 32^{\circ} 16'$.

$$\sin A = \frac{28,4 \sin 32^{\circ} 16'}{7,1} = 4 \cdot 0,5339 = 2,1356.$$

Opgaven kan ikke løses, da $\sin A$ ikke kan være større end 1.

Eksemplerne viser, at II kan faa 2, 1 eller ingen Løsninger.

1°. Hvis den givne Vinkel B er ret eller stump, har Opgaven højest 1 Løsning, da A ikke kan være stump, og den har en Løsning, saafremt $b > a$.

$$\text{Af} \quad a < b$$

$$\text{faar man} \quad a \sin B < b \sin B$$

$$\text{eller} \quad \frac{a \sin B}{b} < \sin B,$$

$$\text{altsaa} \quad \sin A < \sin B.$$

Den ene Værdi af A er da mindre end Supplementvinklen til B .

2°. Naar $\angle B$ er spids, kan Opgaven løses, saafremt

$$\sin A \leq 1, \text{ det vil sige } \frac{a \sin B}{b} \leq 1$$

$$\text{eller} \quad b \geq a \sin B.$$

Der er to Løsninger, naar den Værdi for A , man finder af Tabellen, er større end B , men mindre end 90° ; det vil sige, naar

$$1 > \sin A > \sin B$$

eller
$$1 > \frac{a \sin B}{b} > \sin B,$$

hvoraf
$$b > a \sin B \text{ og } a > b$$

eller
$$a > b > a \sin B.$$

III. Givet a , b og C ; find de andre Stykker.

c findes af
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Ved Sinusrelationen finder man derefter den Vinkel, som ligger over for den mindste af de givne Sider; denne Vinkel er nemlig spids, altsaa faar man kun een Løsning. For Kontrollens Skyld beregner man ogsaa den tredie Vinkel ved Sinusrelationen.

Hvis man kun søger Vinklerne, benyttes Tangensrelationerne.

Eks. 1. $a = 105$, $b = 87$ og $C = 98^\circ 42'$.

$$c^2 = 105^2 + 87^2 - 2 \cdot 105 \cdot 87 \cdot \cos 98^\circ 42'.$$

$$c^2 = 105^2 + 87^2 + 2 \cdot 105 \cdot 87 \cdot 0,1513.$$

$$\log 2 = 0,3010$$

$$\log 105 = 2,0212$$

$$105^2 = 11025$$

$$\log 87 = 1,9395$$

$$87^2 = 7569$$

$$\log 0,1513 = 0,1798 - 1$$

$$nl \quad 3,4415$$

$$= 2764$$

$$c^2 = 21358$$

$$\log c^2 = 4,3296$$

$$\log c = 2,1648$$

$$c = 146,2.$$

$$\sin B = \frac{87 \sin 81^\circ 18'}{146,2} = \frac{87 \cdot 0,9885}{146,2}.$$

$$\sin A = \frac{105 \sin 81^{\circ} 18'}{146,2} = \frac{105 \cdot 0,9885}{146,2}.$$

$$\log 87 = 1,9395 \quad \log 105 = 2,0212$$

$$\log 0,9885 = \frac{0,9950 - 1}{1,9345} \quad \log 0,9885 = \frac{0,9950 - 1}{2,0162}$$

$$\log 146,2 = \frac{2,1648}{} \quad \log 146,2 = \frac{2,1648}{}$$

$$\log \sin B = 0,7697 - 1 \quad \log \sin A = 0,8514 - 1$$

$$\sin B = 0,5884 \quad \sin A = 0,7102$$

$$B = 36^{\circ} 2' \quad A = 45^{\circ} 15'$$

(ell. $134^{\circ} 45'$).

$$c = 146,2, \quad B = 36^{\circ} 2', \quad A = 45^{\circ} 15'.$$

$$\text{Kontrol: } A + B + C = 179^{\circ} 59'$$

Eks. 2. $a = 38, \quad b = 79,5$ og $C = 65^{\circ}$; find A og B .

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C} = \frac{0,9063}{\frac{79,5}{38} - 0,4226}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C} = \frac{0,9063}{\frac{38}{79,5} - 0,4226}$$

$$\log 79,5 = 1,9004 \quad \log 38 = 1,5798$$

$$\log 38 = \frac{1,5798}{0,3206} \quad \log 79,5 = \frac{1,9004}{0,6794 - 1}$$

$$\frac{79,5}{38} = \frac{2,0920}{} \quad \frac{38}{79,5} = \frac{0,4780}{}$$

$$\frac{0,4226}{1,6694} \quad \frac{0,4226}{0,0554}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{0,9063}{1,6694} \quad \operatorname{tg} B = \frac{0,9063}{0,0554}$$

$$\log 0,9063 = 0,9573 - 1 \quad \log 0,9063 = 0,9573 - 1$$

$$\log 1,6694 = 0,2226 \quad \log 0,0554 = 0,7435 - 2$$

$$\log \operatorname{tg} A = 0,7347 \quad \log \operatorname{tg} B = 1,2138$$

$$\operatorname{tg} A = 0,5429 \quad \operatorname{tg} B = 16,36$$

$$A = 28^{\circ} 30' \quad B = 86^{\circ} 30'$$

$$\text{Kontrol: } A + B + C = 180^{\circ}.$$

IV. Givet a , b og c ; find Vinklerne.

Naar Sidernes Længdetal er Tal, der er lette at regne med, benytter man den udvidede pythagoræiske Sætning.

Eks. 1.

$$a = 5, \quad b = 6, \quad c = 8.$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{75}{96} = 0,7812$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{53}{80} = 0,6625$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{3}{60} = -0,05.$$

$$\cos (180^{\circ} - C) = 0,05.$$

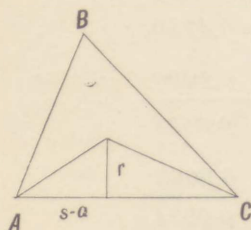
$$A = 38^{\circ} 38'$$

$$B = 48^{\circ} 30'$$

$$C = 92^{\circ} 52'.$$

$$\text{Kontrol: } A + B + C = 180^{\circ}.$$

Naar Sidernes Længdetal indeholder flere Cifre, benytter man ofte en anden Metode.



Man har

$$T = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Deraf faar man

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Desuden har man

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{s-b}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{s-c}$$

Eks. 2. $a = 5,698$, $b = 6,473$, $c = 8,295$.

5,698

6,473

8,295

$2s = 20,466$

$s = 10,233$

$10,233$

$10,233$

5,698

6,473

8,295

$s-a = 4,535$

$s-b = 3,760$

$s-c = 1,938$

$\log(s-a) = 0,6566$

$\log(s-b) = 0,5752$

$\log(s-c) = 0,2874$

1,5192

$\log s = 1,0099$

$\log r^2 = 0,5093$

$\log r = 0,2546$

$\log r = 0,2546$

$\log r = 0,2546$

$\log(s-a) = 0,6566$

$\log(s-b) = 0,5752$

$\log(s-c) = 0,2874$

$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0,5980 - 1$

$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 0,6794 - 1$

$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 0,9672 - 1$

$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0,3963$

$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = 0,4780$

$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = 0,9272$

$\frac{A}{2} = 21^{\circ} 37'$

$\frac{B}{2} = 25^{\circ} 33'$

$\frac{C}{2} = 42^{\circ} 50'$

Kontrol: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^{\circ}$.

Altsaa $A = 43^{\circ} 14'$ $B = 51^{\circ} 6'$ $C = 85^{\circ} 40'$.

15. Fra Geometrien har man

$$T = \frac{1}{2} h_a \cdot a.$$

Da

$$h_a = b \sin C,$$

faar man

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

a. *Trekantens Areal findes ved, at man multiplicerer det halve Produkt af de to Sider med sinus af den inde-sluttede Vinkel.*

Man har

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

altsaa

$$T = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin B}{\sin A} \cdot \sin C$$

eller

$$T = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}.$$

b. *Trekantens Areal er lig det halve af Kvadratet paa een af Siderne multipliceret med en Brøk, hvis Tæller er Produktet af de hosliggende Vinklers sinus, og hvis Nævner er den modstaaende Vinkels sinus.*

Fra Geometrien har man desuden

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

og $T = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c).$

BD er Diameter i Trekantens omskrevne Cirkel, man har da enten

$$\angle BDC = \angle A$$

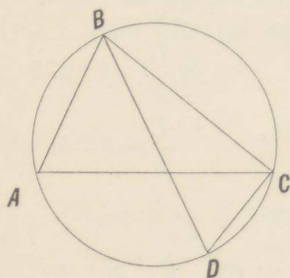
eller $\angle BDC = 180^\circ - A,$

sættes $\angle BDC = u,$

har man altsaa altid

$$\sin u = \sin A.$$

Da $\triangle BCD$ er retvinklet, har man



$a = 2 R \sin u = 2 R \sin A$,
som sammen med Sætning a giver

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2 R \sin A \cdot 2 R \sin B \cdot \sin C$$

eller $T = 2 R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Ifølge § 14 IV har man

$$\frac{r}{s-a} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \text{ eller } r = (s-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

altsaa

$$\cot \frac{A}{2} = \frac{s-a}{r}$$

$$\cot \frac{B}{2} = \frac{s-b}{r}$$

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{s-c}{r}.$$

Deraf $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r^3}$

eller $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s r^3} = \frac{T^2}{T r^2} = \frac{T}{r^2},$

hvoraf $T = r^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$

Naar O er Centrum for $\triangle ABC$'s indskrevne Cirkel,
og $\triangle OBC$'s Areal $= t$, har man, idet $\angle BOC = u$,

$$t = \frac{1}{2} r \cdot a, \text{ og } t = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin u},$$

altsaa

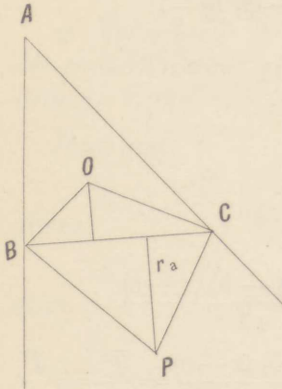
$$\frac{1}{2} r \cdot a = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}$$

eller

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \text{ der har to analoge.}$$

Naar P betyder Centrum for den udvendige Røringscirkel, som ligger i $\angle A$, og t_1 betegner Arealet af $\triangle PBC$, har man, idet $\angle BPC = v$,

$$t_1 = \frac{1}{2} r_a \cdot a = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) \sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)}{\sin v},$$



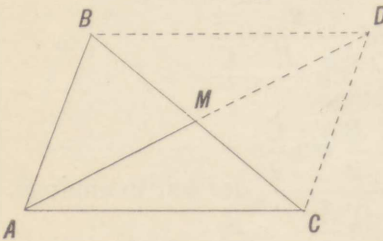
deraf
$$r_a = a \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}$$

eller
$$r_a = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Paa lignende Maade faar man

$$r_b = \frac{b \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \quad \text{og} \quad r_c = \frac{c \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

16 a. Man har $h_a = b \sin C = c \sin B$ og de analoge.



Paa Tegningen er

$$AM = m_a$$

$$AD = 2m_a.$$

Af $\triangle ABD$ faar man

$$(2m_a)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - A)$$

eller

$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A.$$

Desuden har man

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

deraf faar man $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

$$b. \quad m_a^2 = \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2.$$

AE er $\angle A$'s Halveringslinie, BA forlænges til D , saaledes at $AD=AC$, man har da

$$\angle D = \frac{A}{2},$$

altsaa $AE \neq DC$.

Deraf $\frac{AE}{DC} = \frac{BA}{BD}$

eller $\frac{V_A}{DC} = \frac{c}{b+c}$.

Da $\triangle DAC$ er ligebenet, har man

$$DC = 2 AC \cos D = 2b \cos \frac{A}{2},$$

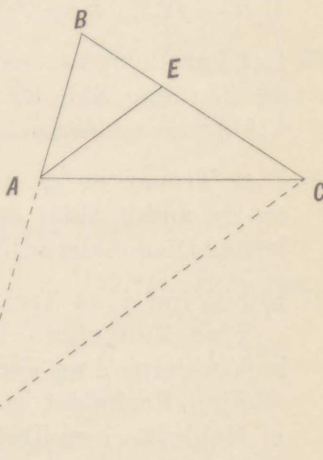
altsaa

$$\frac{V_A}{2b \cos \frac{A}{2}} = \frac{c}{b+c},$$

man faar da

c.

$$V_A = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$



Opgaver.

24. Find de manglende Sider og Vinkler i Trekant ABC , naar
- 1) $a = 82,79$, $A = 128^\circ$ og $C = 27^\circ 43'$.
 - 2) $a = 13,6$, $b = 10,48$ og $B = 40,1^\circ$.
 - 3) $a = 9,64$, $b = 4,321$ og $C = 71^\circ 12'$.
 - 4) $a = 12,5$, $b = 7,5$ og $c = 15$.
25. I et Parallelogram er Diagonalerne $2,76\text{ m}$ og $3,79\text{ m}$, og den ene Side er $5,2\text{ m}$. Find den anden Side, Vinklerne og Arealet.
26. I et Trapez er de parallelle Sider 80 m og $39,2\text{ m}$, og de andre Sider er $27,9\text{ m}$ og $54,6\text{ m}$. Find Vinklerne, Diagonalerne og Arealet.
27. a) Siderne i en Trekant forholder sig som $7 : 8 : 9$. Find Vinklerne.
 b) Vinklerne i en Trekant forholder sig som $7 : 8 : 9$. Find Forholdet mellem Siderne.
 c) Højderne i en Trekant forholder sig som $7 : 8 : 9$. Find Forholdet mellem Siderne, og find Vinklerne.
28. I en Trekant er to af Vinklerne $36^\circ 15'$ og $109^\circ 18'$, og Arealet er 2000 m^2 ; find Siderne.
29. I en Trekant ABC er $a = 12,5\text{ m}$, $b = 16,8\text{ m}$ og Arealet $= 88,25\text{ m}^2$. Find Vinklerne og find R og r .
30. Vinklerne i en Trekant forholder sig som $2 : 3 : 4$, og Arealet er $13,56\text{ cm}^2$. Find Siderne, den omskrevne Cirkels Radius og Røringscirklernes Radier.
31. Find Vinklerne i en retvinklet Trekant, naar Højden deler Hypotenusen i Stykker, der forholder sig som $4 : 5$.
32. I en ligebenet Trekant trækkes Linier fra Grundliniens Midtpunkt og vinkelret paa Benene, derved

deles Trekanten i tre Dele, hvoraf den enes Areal er dobbelt saa stort som Summen af de to andres. Find Trekantens Vinkler.

33. Find Vinklerne og Siden a i $\triangle ABC$, naar

1) $b = 8$, $c = 10$ og $m_a = 7$.

2) $b = 8$, $c = 10$ og $v_A = 6\frac{2}{3}$.

34. I $\triangle ABC$ er $A = 110^\circ$ og $b : c = 0,7$; find B og C .

35. I en Trekant er Siderne 8, 9 og 10. Find Vinklerne i den Trekant, som har sine Vinkelspidser i:

a) Sidernes Midtpunkter.

b) Højdernes Fodpunkter.

c) De udvendige Røringscirklers Centrér.

36. I en Trekant ABC er $A + B = 132^\circ 8'$, $R = 15$ cm og $h_a = 20,5$ cm. Find Siderne og Arealet.

37. Bevis, at $T = r \cdot r_a \cot \frac{A}{2} = r r_b \cot \frac{B}{2} = r r_c \cot \frac{C}{2}$.

38. Bevis, at $T = r^2 \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$.

39. Bevis, at $T = R r (\sin A + \sin B + \sin C)$ og at

$$r = 2R \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

40. Bevis, at $r = r_a \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ og at

$$T = r_a^2 \cdot \cot \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

41. a) Et Parallelograms Sider er a og b , og en af dets Vinkler er v . Bevis, at Parallelogrammets Areal $= ab \cdot \sin v$.

b) En Firkants Diagonaler er n og m , og en af Vinklerne mellem dem er u . Bevis, at Firkantens Areal

$$= \frac{1}{2} n \cdot m \cdot \sin u.$$

42. I et Parallelogram er Diagonalerne $1,25\text{ m}$ og $1,5\text{ m}$, og Arealet er $0,84\text{ m}^2$. Find Parallelogrammets Sider og Vinkler.
43. Firkant $ABCD$'s Areal er 9846 m^2 , $AC = 158\text{ m}$, $BD = 164\text{ m}$, $AB = 108\text{ m}$ og $AD = 105\text{ m}$. Find de to andre Sider og Vinklerne.
44. I en Cirkel er der indskrevet en Firkant med Sider 4 cm , 5 cm , 6 cm og 7 cm . Find dens Vinkler og Cirkelns Radius.
45. Om en Cirkel med Radius 5 cm er der omskrevet en Firkant, hvis Vinkler forholder sig som $3 : 4 : 5 : 6$. Find dens Sider og Diagonaler.
46. I en Firkant $ABCD$ er $\angle A = 107^\circ$, $AB = 205\text{ m}$, $BC = 188\text{ m}$, $CD = 265\text{ m}$ og $AD = 201,4\text{ m}$. Find Firkantens Areal. Firkanten skal deles i to lige store Dele ved en Linie, der er parallel med BC ; find de Stykker, hvori Linien deler Siden AB .
47. Om en Cirkel er der omskrevet en Firkant $ABCD$, hvori $AB = 7,94$, $BC = 6,58$, $\angle A = 82^\circ 16'$ og $\angle B = 93^\circ 54'$. Find de manglende Sider og Vinkler samt Cirkelns Radius og Firkantens Areal.
48. En Cirkelbue AB paa 120° er delt i to Dele, hvis Korder forholder sig som $3 : 5$. Find Delenes Gradeantal.
49. Fra Punktet P uden for en Cirkel er der trukket en Tangent og en Sekant, som danner en Vinkel paa 32° . Tangenten rører Cirklen i A , og Sekanten skærer Cirklen i B og C ; PA er lig $9,85\text{ cm}$ og $PB = 4,36\text{ cm}$. Find Siderne i $\triangle ABC$ og Arealerne af de to Afsnit, hvori Sekanten deler Cirklen.
50. Uden om en given Cirkel med Radius $= 5\text{ cm}$ er der tegnet 24 lige store Cirkler, saaledes at enhver

af dem rører baade den givne Cirkel og to af de andre. Find Radius i disse Cirkler.

51. To Skibe A og B ligger for Anker et Stykke ude paa Havet. For at finde Afstanden mellem dem vælger man inde paa Land to Punkter C og D , hvis Afstand er 1 km ; ved Maaling finder man, at $\angle ADC = 89^\circ$, $\angle BDC = 52^\circ 19'$, $\angle ACD = 46^\circ 10'$ og $\angle BCD = 92^\circ 26'$. Find AB .

52. I en Cirkel, hvis Radius er 16 cm , er der trukket en Korde, som afskærer et Afsnit paa 78° . Korden deles i tre lige store Dele, og gennem Delingspunkterne trækkes Radier. Find Arealerne af de tre Dele, hvori disse Radier deler Afsnittet.

53. Find Vinklerne i $\triangle ABC$, naar

1) $a = 5,7\text{ cm}$, $b = 8,9\text{ cm}$ og

$$5\lg C + 12\cot C = 16.$$

2) $a = 5,7$, $b = 8,9$ og

$$\cos C + 7\sin C = 7.$$

Bevis, at Sætningerne i 54—57 er rigtige

54. $a \sin A - b \sin B = c (\sin A \cos B - \cos A \sin B)$.

Eks. $A + B = 90^\circ$.

55. $T = \frac{c^2}{2(\cot A + \cot B)}$.

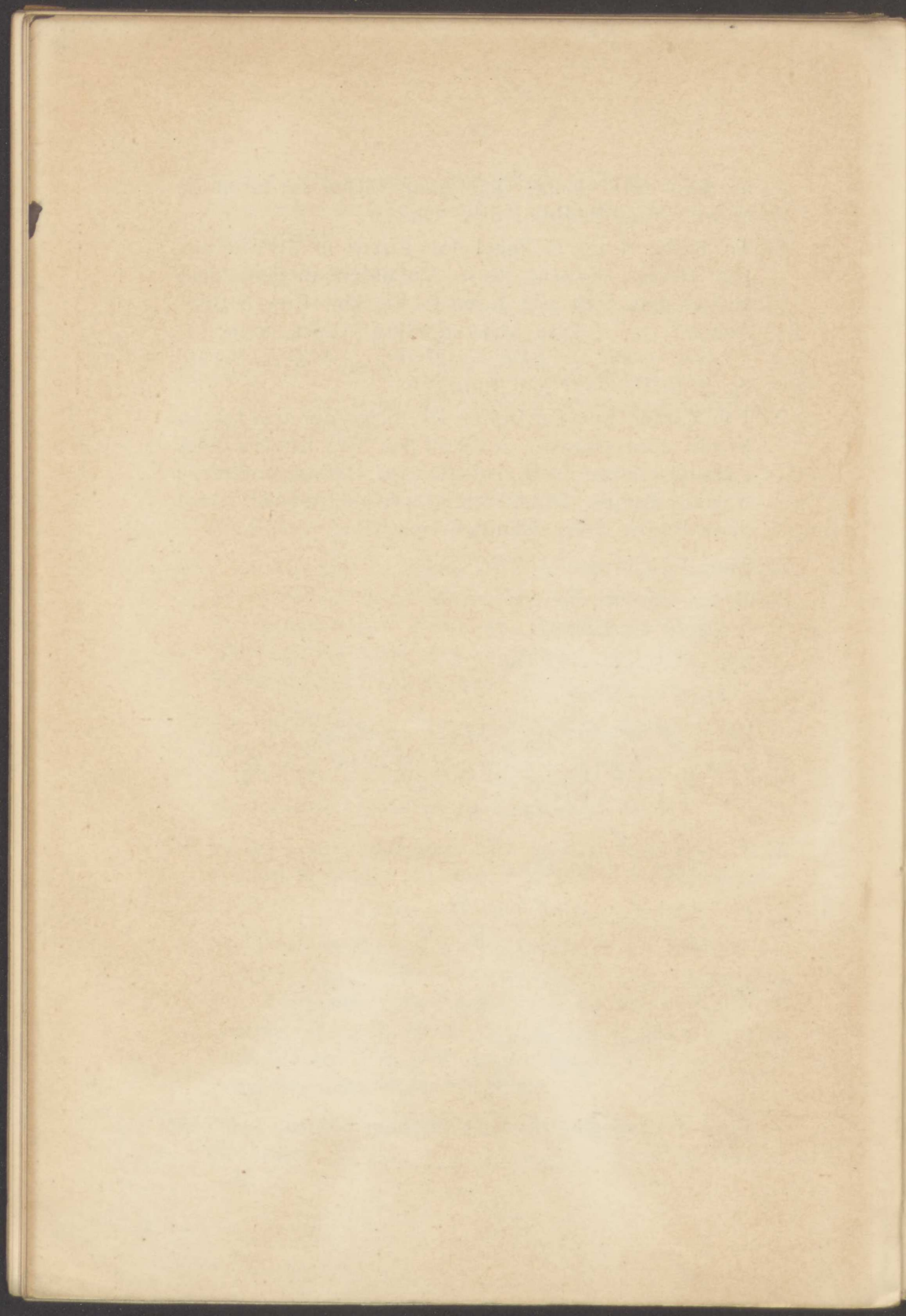
56. $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{R}$.

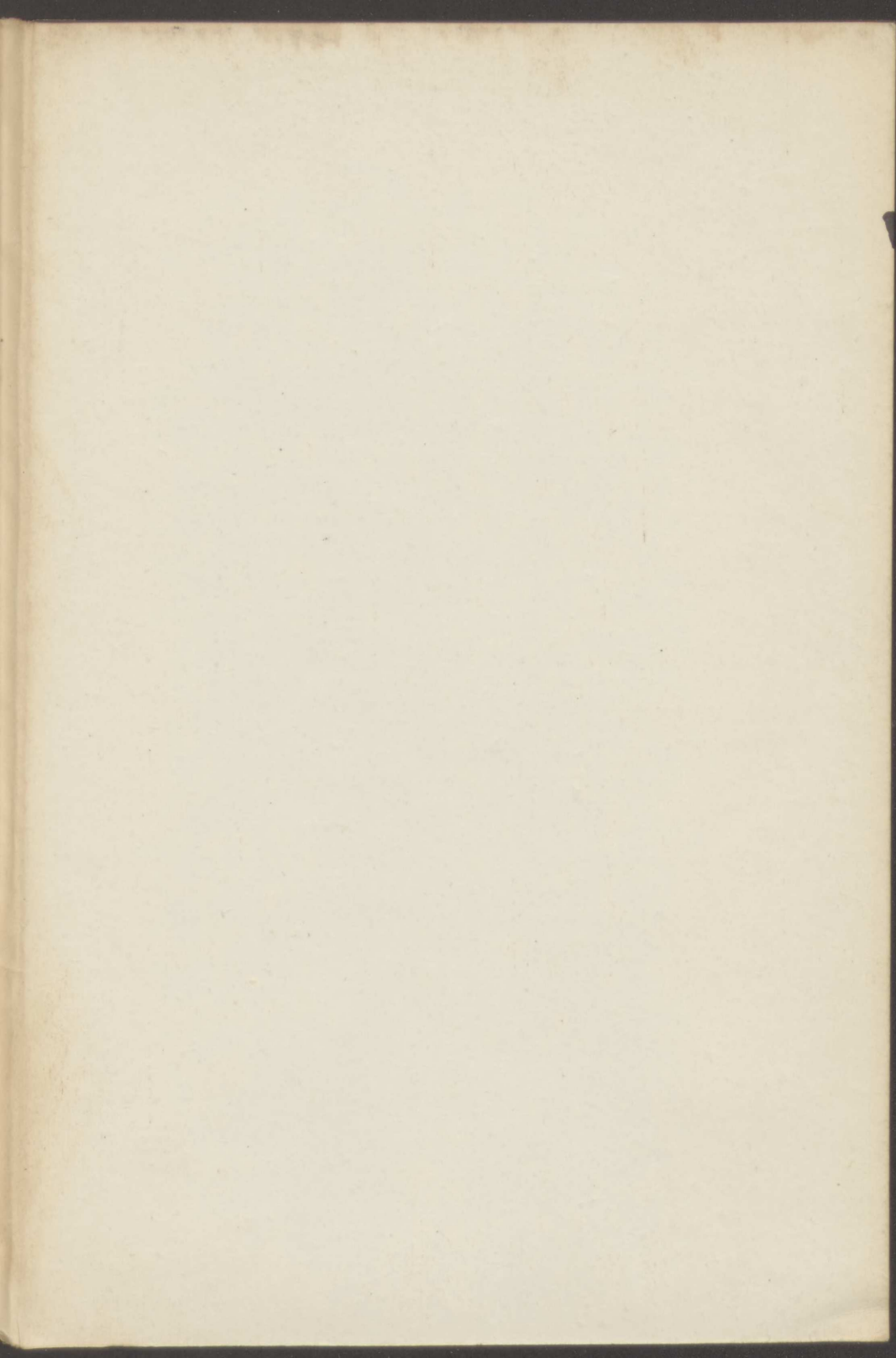
57. $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a}{2h_a} + \frac{b}{2h_b} + \frac{c}{2h_c}$.

58. I en Trekant har man

$$\frac{\lg A}{1} = \frac{\lg B}{2} = \frac{\lg C}{3}.$$

Find det nøjagtige Forhold mellem Siderne.





Lærebøger for tekniske Skoler.

N. F. Jensen og O. A. Smith: Matematik for tekniske Skoler.

I Aritmetik.....	1 Kr. 50 Øre
II Algebra.....	1 - 25 -
III Geometri.....	1 - 60 -
IV Trigonometri.....	0 - 75 -

Chr. Axel Jensen og E. Rondahl: Stilarternes Historie. Grundrids af Ornamentikkens og Arkitekturdekorationens Udvikling fra de ældste Tider til vore Dage. Udgivet med Understøttelse af Indenrigsministeriet og af det Reiersenske Fond. Anbefalet af Indenrigsministeriet til Brug i de tekniske Skoler..... 8 Kr., indb. 10 Kr.

Chr. Jensen og A. L. Vanggaard: Tekniske Anvendelser af Kemi og Fysik I: Jærn-Kul-Petroleum. Kartonneret..... 1 Kr. 25 Øre

J. Jonas og A. L. Vanggaard: Materlallære til Brug i tekniske Skoler. Kpl. indb..... 9 Kr. 50 Øre
Bogens forskellige Afsnit kan faas særskilt i Hæfter.

Kari Mortensen: Lærebog i Tysk for tekniske Skoler I. (Til Brug for Aften- og Dagskoler). Anbefalet af Indenrigsministeriet til Brug i de tekniske Skoler. Kartonneret..... 2 Kr.

— **Lærebog i Tysk for tekniske Skoler II.** (Til Brug for Dagskoler). Kartonneret..... 1 Kr. 25 Øre

E. Rondahl: Vejledning i Akvarelmaling. Med 9 Farvetavler og mange Tekstillustrationer..... 3 Kr.

— **Perspektiv**..... 1 Kr.

R. Wendt: Skriftarter til Brug for Maskin- og Bygningstegnere..... 1 Kr. 50 Øre

Jul. Gjellerups Forlag.