

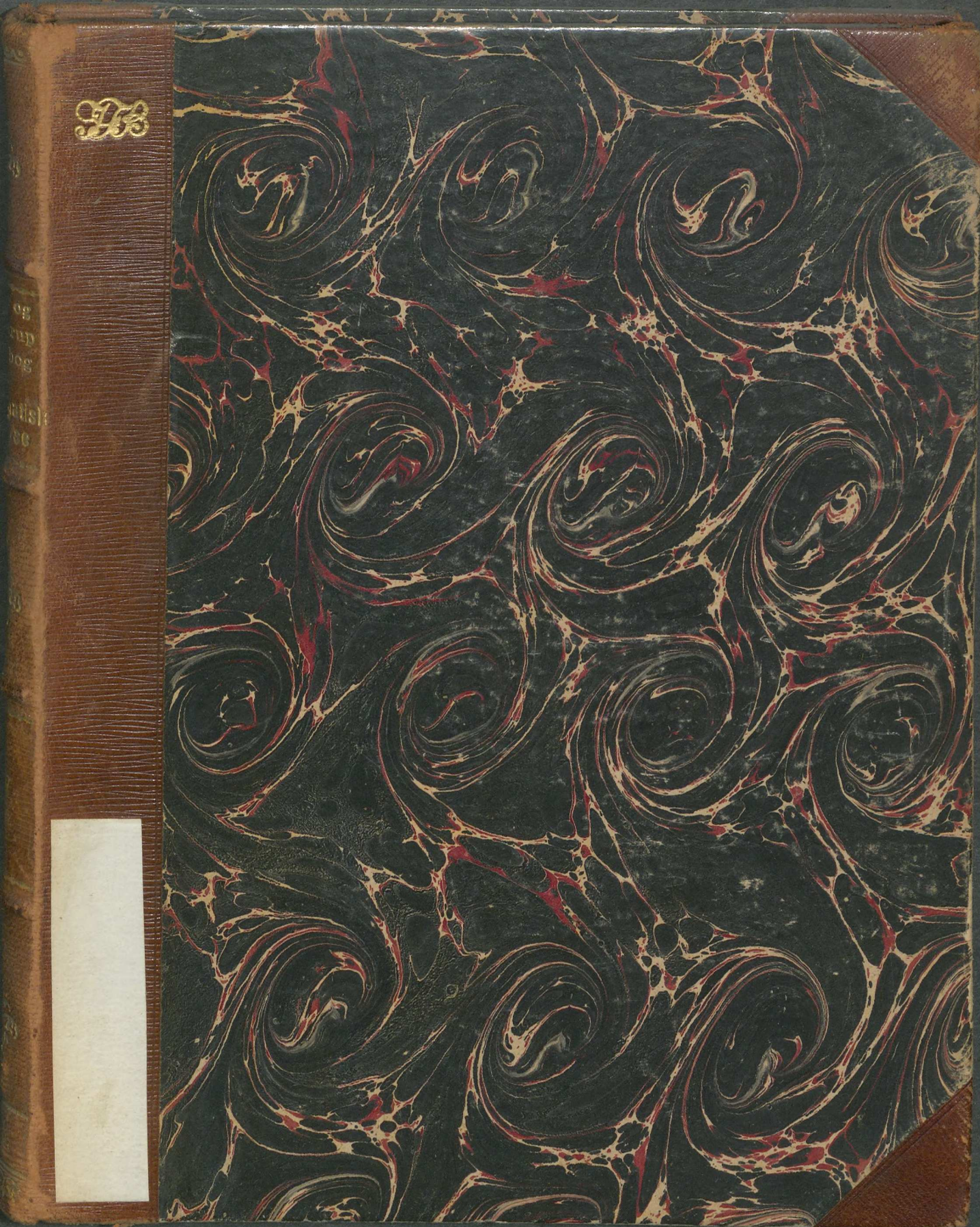
Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*



56

517



517

TB Gl.

517 Boh

1918

Afsn. 4

DANMARKS
TEKNISKE BIBLIOTEK

Lærebog
i
Matematisk Analyse

4de Afsnit

Af

Harald Bohr og Johannes Møllerup

Jul. Gjellerups Forlag — København
1918.

4^{de} Afsnit.

Leeren om de komplekse Tal.

Indledning.

Ved Behandlingen af de algebraiske Ligningers Teori føres man, som allerede nævnt i 1^{ste} Afsnit, paa naturlig Maade til at indføre den saakaldte imaginære Enhed $\sqrt{-1}$, eller som man sædvanligvis betegner den, i , og derigennem til Indførelse af de komplekse Tal. Dette hænger nøje sammen med, at medens det indenfor det reelle Talomraade vel gælder, at enhver algebraisk Ligning af første Grad $ax+b=0$ har en (og kun en) Rod, nemlig $x = -\frac{b}{a}$, gælder ^{der} ingen tilsvarende almengyldig Løsning for algebraiske Ligninger af 2^{den} og højere Grad; saaledes har f. Eks. Ligningen $x^2 = -1$ ingen Rod, idet der jo ikke findes noget reelt Tal, hvis Kvadrat er negativt. For at komme ud over denne principielle Vanskelighed er det, at man indfører Symbolet $i = \sqrt{-1}$ (altsaa rent definitionsmæssigt tillægger Ligningen $x^2 = -1$ en Rod) og i Tilknytning dertil indfører de komplekse Tal $a + ib$. Det komplekse Talomraade er af ganske anden Art og langt mere omfattende end det reelle Talomraade (som det indeholder som specielt Tilfælde), idet man indenfor det komplekse Talomraade opererer med to væsensforskellige Enheder, nemlig den reelle Enhed 1 og den imaginære Enhed $i = \sqrt{-1}$, medens man ved de reelle Tal kun har at gøre med den ene Enhed 1; i Sammenhæng hermed kaldes

man det komplekse Talomraade for et todimensionalt Om-
raade i Hedsaetning til det endimensionale reelle Talom-
raade. Som nævnt i 1^{ste} Afsnit opnaar man ved Indførel-
 sen af de komplekse Tal fuldstændt at overvinde den ovenfor
 nævnte Vanskelighed indenfor Ligningernes Teori, og det
 ikke blot for Ligningerne af 2^{den} Grad, hvor den specielle
 Ligning $x^2 = -1$ jo direkte leder til Indførelsen af Symbolet $i = \sqrt{-1}$,
 men ogsaa for Ligningerne af højere Grad. Lægges man nem-
 lig det komplekse Talomraade til Grund, gælder der, som vi
 senere i dette Afsnit skal bevise, den fundamentale Sætning,
at ethvert egentligt Polynomium af n^{te} Grad

$$Z^n + A_{n-1}Z^{n-1} + \dots + A_1Z + A_0$$

paa een og kun een Maade kan opløses i Faktorer af 1^{ste} Grad:

$$Z^n + A_{n-1}Z^{n-1} + \dots + A_1Z + A_0 = (Z - Z_1)(Z - Z_2) \dots (Z - Z_n),$$

eller anderledes udtrykt, at enhver algebraisk Ligning af n^{te} Grad

$$Z^n + A_{n-1}Z^{n-1} + \dots + A_1Z + A_0 = 0$$

har netop n (forskellige eller sammenfaldende) Rødder $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.

De komplekse Tal er, som nævnt, oprindeligt indført af
 Hensyn til de algebraiske Ligningers Teori. Som vi senere skal
 gaa nærmere Rede for, er der imidlertid ogsaa ganske andre
 Omraader af Analysen, hvor Indførelsen af de komplekse Tal
 viser sig at være af gennemgribende Betydning. Vi skal her
 blot eksempelvis nævne, at man paa simpel og naturlig Maade
 kan udvide Definitionerne paa de vigtigste transcendentk

Funktioner, som e^x , $\cos x$, $\sin x$, der jo hidtil kun er defineret for reelle Værdier af x , til ogsaa at gælde for vilkaarlige komplekse Værdier af x , og at man derigennem føres til Opdagelsen af en betydningsfuld Sammenhang mellem disse Funktioner, der f. Eks. finder sit Udtryk i en Formel som $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, hvilken Sammenhang forbliver skjult, saalange man indskrænker sig til at operere indenfor det reelle Talomraade.

Efter disse almindelige Bemærkninger af orienterende Natur skal vi nu, i Føreløbet, paa mere systematisk Maade definere de komplekse Tal og undersøge deres Egenskaber, for derefter i de senere Kapitel at anvende dem overfor forskellige vigtige Problemer.

1. Definitioner og Regneregler. Et komplekst Tal er et Udtryk af Formen $a+ib$, hvor (a, b) er et reelt Talpar, medens Symbolet i (eller $\sqrt{-1}$) er den saakaldte imaginære Enhed; vi vil i det Følgende sædvanligvis betegne et komplekst Tal ved et stort Bogstav, f. Eks. $A = a_1 + ia_2$, $B = b_1 + ib_2$, ..., medens vi betegner reelle Tal med smaa Bogstaver. To komplekse Tal $A = a_1 + ia_2$ og $B = b_1 + ib_2$ skal da og kun da siges at være ligestore, $A = B$, naar $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$, altsaa naar $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Er $A = a_1 + ia_2$ og $B = b_1 + ib_2$ ikke ligestore (altsaa $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$), skriver vi $A \neq B$ (læs A forskellig fra B).

Ved tabrige Undersøgelser vil det være bekvemt at tænke sig de komplekse Tal afbildet i Punkterne af en Plan, hvori er fastlagt et retvinklet Koordinatsystem X, Y . Vi afbilder da det komplekse Tal $a+ib$ (ligesom det reelle Talpar (a, b)) i det Punkt, der har Koordinaterne (a, b) ; herved tilvejebringes en eenetydig Forbindelse mellem de komplekse Tal og Planens (sædvanlige) Punkter. For Kortheds Skyld vil vi ofte betegne et komplekst Tal og det Punkt i den komplekse

Plan, hvori Tallet afbildes, ved et og samme (store) Bogstav. Et komplekst Tal $Z = a_1 + ia_2$ kaldes a_1 den reelle Del af Tallet medens a_2 kaldes Koefficienten til den rent imaginære Del (ia_2); ofte vil vi inddeltid ogsaa (i Tilknytning til den geometriske Afbildning) kalde a_1 og a_2 for henholdsvis den første og den anden Koordinat i det komplekse Tal $Z = a_1 + ia_2$. Er i et komplekst Tal $a + ib$ den anden Koordinat $b = 0$, vil vi opfatte Tallet $a + i0$ som ensbetydende med det sædvanlige reelle Tal a og i Overensstemmelse hermed kalde X -Aksen i den komplekse Plan for de reelle Tals Akse. De komplekse Tal omfatter saaledes specielt de reelle Tal. Er i Tallet $a + ib$ den første Koordinat $a = 0$, kaldes Tallet $0 + ib$ (eller, kortere skrevet ib) for rent imaginært, og i Overensstemmelse hermed kaldes Y -Aksen for de imaginære Tals Akse; i det specielle Tilfælde, hvor $b = 1$, betegner vi ofte Tallet i simpelthen ved i og kalder det, som nævnt, for den imaginære Enhed.

For komplekse Tal $Z = a_1 + ia_2$ og $B = b_1 + ib_2$ kaldes modsatte, dersom $b_1 = -a_1$, $b_2 = -a_2$; det til $Z = a_1 + ia_2$ svarende modsatte Tal $(-a_1) + i(-a_2)$ betegnes med $-Z$. To indbyrdes modsatte Tal afbildes i den komplekse Plan i to Punkter, der er symmetrisk beliggende med Hensyn til Begyndelsespunktet (Fig 1).

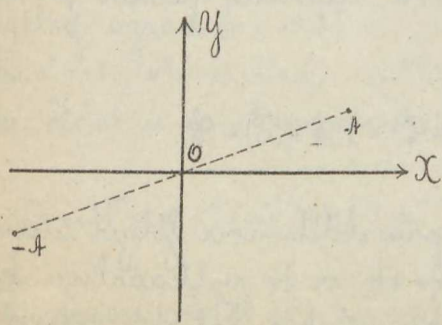


Fig. 1.

For indbyrdes modsatte Tal $Z = a + ib$ og $-Z = (-a) + i(-b)$ er da og kun da ligestore, naar $(a, b) = (-a, -b)$, altsaa naar $(a, b) = (0, 0)$ s. $Z = 0 + i0 = 0$.

For komplekse Tal $Z = a_1 + ia_2$ og $B = b_1 + ib_2$ kaldes konjugerede, dersom $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_2$; det til $Z = a_1 + ia_2$ svarende konjugerede Tal $a_1 + i(-a_2)$ betegnes med $\bar{Z}$. To indbyrdes kon-

jugerede Tal afbildes i to Punkter, der er symmetrisk beliggende med Hensyn til de reelle Tals Akse (Fig. 2); et komplekst Tal

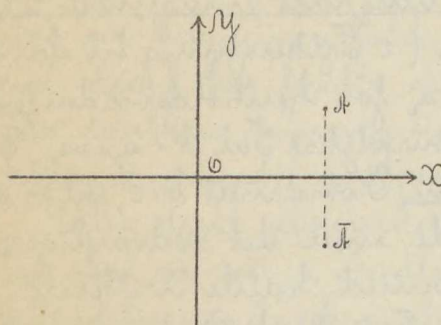


Fig. 2

$A = a_1 + ia_2$ er da og kun da lig med sit konjugerede Tal $\bar{A} = a_1 + i(-a_2)$, naar $a_2 = 0$, d. v. s. naar Tallet er reelt.

De komplekse Tals væremere Egenskaber fastlægges gennem følgende Regneregler, der er valgt saaledes, at de i de Tilfælde, hvor Tallet specielt er reelle (d. v. s. hvor dets 2den Koordinate er 0), falder sammen med Regneregler for reelle Tal.

I. Addition. Ved Summen $A + B$ af de to komplekse Tal $A = a_1 + ia_2$ og $B = b_1 + ib_2$ forstås det komplekse Tal

$$C = c_1 + ic_2 = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2).$$

Hvad faas specielt, at ethvert komplekst Tal $a + ib$ kan opfattes som Summen af det reelle Tal $a = a + i0$ og det rent imaginære Tal $ib = 0 + ib$. Vi tilføjer, at det sjensynlig fremgaar af Definitionen, at de for Addition af reelle Tal gældende Hovedsætninger: $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$ ligeledes gælder for komplekse Tal, altsaa at

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

II. Subtraktion. Af Definitionen paa Addition følger umiddelbart, at der, idet $A = a_1 + ia_2$ og $B = b_1 + ib_2$ er to vilkaarlige komplekse Tal, findes et og kun eet komplekst Tal C , nemlig $C = c_1 + ic_2 = (a_1 - b_1) + i(a_2 - b_2)$, for hvilket $B + C = A$. Dette Tal C , der

betegnes med $A-B$, kunde øjensynlig ogsaa være defineret som
 Summen af Tallet A og det til B svarende modsatte Tal $-B$.
 Specielt er $A-A = 0 + i0 = 0$.

III. Multiplikation. Ved Kvadratet $i^2 = i \cdot i$ af den imaginære
 Enhed vil vi forstaa det reelle Tal -1 ; almindeligere vil vi
 ved Produktet $A \cdot B$ (eller $A B$) af to vilkaarlige komplekse Tal
 $A = a_1 + i a_2$ og $B = b_1 + i b_2$ forstaa det komplekse Tal

$$C = AB = (a_1 + i a_2)(b_1 + i b_2) = a_1 b_1 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 - a_2 b_2 = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i (a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Vi tilføjer, at de for reelle Tal gældende Hovedsætninger ved-
 rørende Multiplikation og Forbindelsen mellem Addition og
 Multiplikation ligeledes gælder for komplekse Tal, d. v. s. at

$$AB = BA, \quad A \cdot (BC) = (AB) \cdot C, \quad A(B+C) = AB + AC.$$

Specielt bemærker vi, at

$$A \bar{A} = (a_1 + i a_2)(a_1 - i a_2) = a_1^2 + a_2^2,$$

saaledes at et saadant Produkt altid er et reelt Tal ≥ 0 , hvor
 Lighedstegnet kun gælder i det specielle Tilfælde, hvor A (og
 folgelig ogsaa $\bar{A}$) er 0.

Eks. $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $\dots$, $i^{4m} = 1$, $i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -i$, $\dots$

Eks. I det n er et positivt helt Tal, er

$$(a+ib)^n = (a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 \dots) + i (n a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \binom{n}{5} a^{n-5} b^5 \dots).$$

IV. Division. I det $A = a_1 + i a_2$ og $B = b_1 + i b_2$ er to vilkaarlige kom-
 plexe Tal, af hvilke $B \neq 0$, følger det umiddelbart ud fra den

foregaaende Definition, at der eksisterer et og kun et komplekst Tal $C = c_1 + ic_2$, saaledes at $B \cdot C = A$; thi Ligningen

$$(b_1 + ib_2)(c_1 + ic_2) = b_1 c_1 - b_2 c_2 + i(b_1 c_2 + b_2 c_1) = a_1 + ia_2,$$

eller hvad der kommer ud paa det samme, de to Ligninger mellem reelle Tal

$$b_1 c_1 - b_2 c_2 = a_1, \quad b_2 c_1 + b_1 c_2 = a_2$$

i de Ube kendte c_1, c_2 har, idet Determinanten $\begin{vmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = b_1^2 + b_2^2 > 0$, er og kun een Løsning, nemlig

$$c_1 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}, \quad c_2 = \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{b_1^2 + b_2^2}$$

Det saaledes bestemte Tal $C = c_1 + ic_2$ betegnes med $\frac{A}{B}$ eller $A:B$.

Ud fra de foregaaende Definitioner og de dertil knyttede Bemærkninger udleder man uden Varskelighed, at alle de formelle Regneregler, der gælder for de elementære Regnesoperationer med reelle Tal, ligeledes gælder for komplekse Tal.

Eks. Er A, B og C tre vilkaarlige komplekse Tal, af hvilke $B \neq 0$ og $C \neq 0$, da er $\frac{A}{B} = \frac{AC}{B \cdot C}$. Ved Hjælp heraf kan man paa særlig simpel Maade udregne Brøken $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$) ved blot, at multiplicere Tæller og Tærvner med det til Tærvneren konjugerede Tal $\bar{B}$ ($\neq 0$), herved finder man

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot \bar{B}}{B \cdot \bar{B}} = \frac{(a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2)}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{b_1^2 + b_2^2}$$

Som man umiddelbart indser ud fra de overstaaende Definitioner, er

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{A-B} = \overline{A} - \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{\frac{A}{B}} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}};$$

heraf følger, at dersom et komplekst Tal L er fremkommen som Resultat af et vilkaarligt Antal elementære Regnesoperationer ud fra Tallene $A, B, C, \dots$, og man i Udtrykket for L ved $A, B, \dots$ overalt erstatter A med $\overline{A}$, B med $\overline{B}$, $\dots$, vil det derved fremkomne nye Udtryk ved Udregning netop give Resultatet $\overline{L}$. Af denne Sætning vil vi senere gøre Brug.

Vi afslutter vor Gennemgang af de elementære Regnesoperationer for komplekse Tal med den Bemærkning, at idet de Regneregler, der gælder for disse Tal, er formelt ganske de samme som dem, der gælder for de reelle Tal, vil alle saadanne Sætninger og Resultater indenfor Læren om reelle Tal, der er udledt alene ved formel elementær Regning, umiddelbart gælde ogsaa indenfor det komplekse Talomraade. Saaledes forbliver hele den i 1^{ste} Afsnit udviklede Teori for Determinanter og lineære Ligninger uden videre gyldig, naar vi lader de indgaaende Størrelser være vilkaarlige komplekse Tal. Vi fremhæver særlig Hovedsætningens indenfor de lineære Ligningers Teori, der her udsiger, at idet Størrelserne $A_{i,j}$ og B_n er vilkaarlige komplekse Tal, vil de n lineære Ligninger

$$\begin{aligned} A_{1,1} X_1 + A_{1,2} X_2 + \dots + A_{1,n} X_n &= B_1 \\ A_{2,1} X_1 + A_{2,2} X_2 + \dots + A_{2,n} X_n &= B_2 \\ &\vdots \\ A_{n,1} X_1 + A_{n,2} X_2 + \dots + A_{n,n} X_n &= B_n, \end{aligned}$$

deres Determinant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

er $\neq 0$, have en og kun en Løsning, d. v. s. der findes et og kun et komplekst Talsæt $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, der indsat i Ligningene tilfredsstiller dem, og denne Løsning er bestemt ved

$$X_1 = \frac{a_1}{D}, X_2 = \frac{a_2}{D}, \dots, X_n = \frac{a_n}{D},$$

hvor $D \neq 0$ er Ligningenes Determinant, medens a_r ($r=1, \dots, n$) er den Determinant, der fremkommer af Ligningenes Determinant D ved i denne at erstatte den r^{te} Række med Størrelserne paa højre Side af Lighedstegnene.

Endvidere bemærker vi, hvad vi senere vil faa Brug for, at Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1, X_1, X_1^2, \dots, X_1^{n-1} \\ 1, X_2, X_2^2, \dots, X_2^{n-1} \\ \vdots \\ 1, X_n, X_n^2, \dots, X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ogsaa i det Tilfælde, hvor Størrelserne $X_1, \dots, X_n$ er vilkaarlige komplekse Tal, er lig med Produktet af samtlige $\frac{n(n-1)}{2}$ Faktorer $(X_r - X_s)$ ($r > s$) og derfor da og kun da er 0, naar (mindst) 2 af Størrelserne $X_1, \dots, X_n$ er ligestore.

2. Modul og Argument. Vi har ovenfor omtalt, hvorledes de komplekse Tal $a+ib$ kan afbildes eenenlydigt i Punkter

ne $P(a, b)$ af en Plan (den såkaldte komplekse Plan), hvori er fastlagt et retvinklet Koordinatsystem XY . Karakteriserer vi Punkterne (a, b) i denne Plan ved polare Koordinater (r, φ) , idet vi henfører dem til det polare Koordinatsystem, der er beliggende paa sædvanlig Maade overfor det givne retvinklede Koordinatsystem (d. v. s. hvor Begyndelsespunktet O er taget til Pol, de reelle Aksler ikke til Polarakse, og hvor positiv Omlobsretning i Planen er fastlagt saaledes, at $\angle XY = +\frac{\pi}{2}$), faar vi $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$ og derigennem en ofte bekendt Fremstilling af det vilkaarlige komplekse Tal A , nemlig

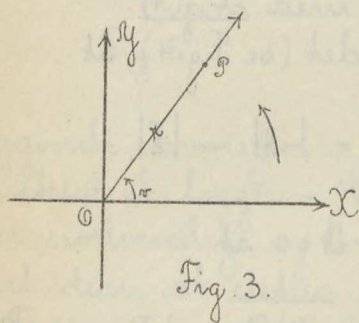


Fig. 3.

$$A = a + ib = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ved denne Fremstilling af Tallet A vil vi, dersom $A \neq 0$ (d. v. s. dersom det tilsvarende Punkt P ikke netop

faldt i Begyndelsespunktet O), stedsæ tænke os de polare Koordinater (r, φ) valgt saaledes, at r er positiv, d. v. s. vi orienterer Linien OP saaledes (se Fig. 3), at positiv Retning gaar fra O over P , herved bliver Vinklen φ da bestemt paa nær et Multiplum af 2π . Er A specielt $= 0$, bliver $r = 0$ og φ vilkaarlig. Et komplekst Tal $A = a + ib = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kaldes Tallet $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ for det komplekse Tals Modul eller dets numeriske Værdi og betegnes med $|A|$, den numeriske Værdi $|A|$ af det komplekse Tal A angiver saaledes simpelthen Afstanden i den komplekse Plan fra Begyndelsespunktet O til det Punkt P , hvori A afbildes. Tallet φ , der angiver Vinklen fra X -aksen til den orienterede Linie OP , kaldes det komplekse Tals Argument og betegnes med $\arg(A)$. Vi minder

om, at for et givet komplekst Tal A er Vinklen v ikke entydigt bestemt, men kun bestemt paa mere et Multiplum af 2π dersom $A \neq 0$, medens v er et fuldkommen vilkaarligt reelt Tal, naar A specielt er 0; ved $\arg(A)$ betegner vi en (ligegyldig hvilken) af de tilladelige Værdier for v . Underliden er det dog bekendt at fastlægge $< v$ entydigt, og dette sker da for et Tal $A \neq 0$ i Reglen derved, at man om v forlanger, at den skal være beliggende mellem Grænserne $-\pi$ (excl) og $+\pi$ (incl); den saaledes entydigt bestemte Værdi af v kaldes Argumentets Hovedværdi og betegnes med $\text{Arg}(A)$.

Eks. For de tre Tal A , $-A$ og $\bar{A}$ gælder det (se Fig. 4.), at

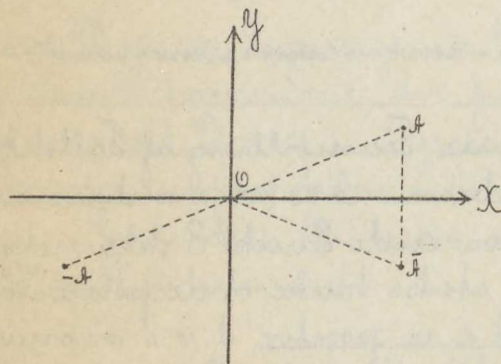


Fig. 4.

$$|A| = |-A| = |\bar{A}|$$

samt for $A \neq 0$ at

$$\arg(-A) = \arg(A) + \pi, \quad \arg(\bar{A}) = -\arg(A).$$

Derimod gælder det ikke altid, at $\arg(-A) = \arg(A) + \pi$; denne Ligning gælder øjensynlig kun for $-\pi < \arg(A) \leq 0$, medens der for

$0 < \arg(A) \leq \pi$ gælder Ligningen $\arg(-A) = \arg(A) - \pi$.

Eks. For det komplekse Tal $A = a + ib = 1 - \sqrt{3}i$ finder vi $|A| = \pi = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, medens vi til Bestemmelse af $\arg(A) = v$ kan benytte to hvilket som helst af de tre Ligninger

$$\cos v = \frac{a}{\pi} = \frac{1}{2}, \quad \sin v = \frac{b}{\pi} = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \tan v = \frac{b}{a} = -\sqrt{3},$$

hvorefter vi finder $\arg A = -\frac{\pi}{3}$ (eller naturligvis ethvert andet

Tal, der afviger fra $-\frac{\pi}{3}$ med et helt Multiplum af 2π).

Eks. Tallene $1, -1, i, -i$ har alle Modulen 1 (se Fig. 5) og henholdsvis Argumentene $0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

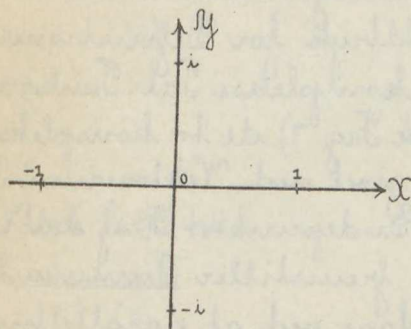


Fig. 5

Et komplekst Tal $A = x(\cos v + i \sin v)$ er øjensynlig entydigt bestemt ved Op-
givelsen af et Værdipar (x, v) for hen-
holdsvis Modulus og Argument; det-
te ses saavel direkte af Udtrykket
 $A = x(\cos v + i \sin v)$ som ogsaa umiddel-
bart ved en geometrisk Betragtning,
idet v jo bestemmer den Halvlinje
udfra O, hvorpaa Punktet A er be-

liggende, hvorefter $x \geq 0$ bestemmer, hvor paa denne Linie
Punktet A ligger. — Er A og B to komplekse Tal, bestaar
den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at $A=B$ saaben-
bart deri, at enten begge Modulerne $|A|$ og $|B|$ er 0 (altsaa beg-
ge Tallene A og B er 0), eller, hvis disse Tal ikke specielt er 0,
at ¹⁾ $|A| = |B|$ og ²⁾ $\text{Arg}(A) = \text{Arg}(B)$ d. v. s. $\arg(A) = \arg(B) + 2p\pi$,
hvor p er et helt Tal.

I Tilknægtning til Fremstillingen af komplekse Tal ved
Modulus og Argument, $A = x(\cos v + i \sin v)$, bemærker vi at det
undertiden er bekvemt at opfatte det komplekse Tal $A = a + ib$
som fremstillet, ikke ved selve Punktet P: (a, b) , men derimod

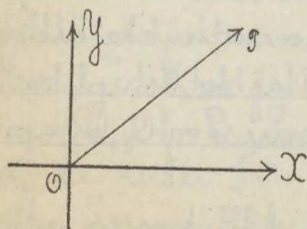
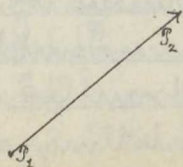


Fig. 6.



ved det orienterede Liniestykke
(Vektoren) OP eller almindeli-
gere (idet vi lader Fordringen
om, at Vektoren skal udgaa
netop fra Begyndelsespunktet
falde) ved et hvilket som helst ori-
enteret Liniestykke P_1P_2 lig og

parallel med OP (se Fig. 6). Specielt bemærker vi, at dersom Vektoren $I_2 I_1$ fremstiller Tallet A , vil den modsatte Vektor $I_2 I_1$ fremstille Tallet $-A$. Denne Fremstillingsmaade tillader os at give et anskueligt geometrisk Udtryk for Definitionerne paa Addition og Subtraktion af komplekse Tal. Tænk vi

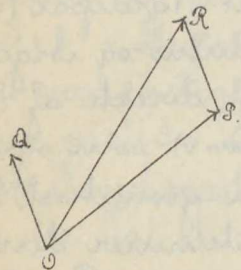


Fig. 7

os nemlig (se Fig. 7) de to komplekse Tal A og B givet ved Vektorerne OA og OB , vil Endepunktet R af den Vektor OR , der fremstiller Summen $A+B$, simpelthen faas ved at parallelforskyde Vektoren OA til Stillingen PR , eller som man siger, Vektoren OR dannes ved "geometrisk Addition" af Vektorerne OA og OB ; thi har I Ko-

ordinaterne (a_1, a_2) , B Koordinaterne (b_1, b_2) vil R øjensynlig faa Koordinaterne (a_1+b_1, a_2+b_2) . Paa tilsvarende Maade anskue-

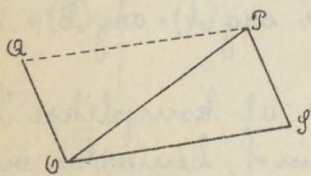


Fig. 8

liggøres Subtraktionen (se Fig. 8), idet den Vektor OP , der fremstiller Differensen $A-B$ bestemmes ved "geometrisk Subtraktion" af Vektorerne OA og OB , d. v. s. dens Endepunkt P faas ved at parallelforskyde Vektoren AO (der fremstiller Tallet $-A$)

til Stillingen OP ; vi tilføjer, at idet Vektoren OP er lig og parallel med Vektoren AP , kan vi ogsaa udtrykke dette sidste Resultat saaledes, at Differensen $A-B$ af to komplekse Tal A og B , der afbildes henholdsvis i Punkterne P og A , simpelthen kan fremstilles ved Vektoren AP .

Af den geometriske Fremstilling af Additionen udleder vi umiddelbart nogle fundamentale Uligheder, vi bemærker

hertil, at Trekanten OPR paa Fig. 7 har Lidenne netop Længderne $OP = |A|$, $PR = OQ = |B|$, $OR = |A+B|$, saaledes at

$$(1) \quad |A+B| \leq |A| + |B|$$

og

$$|A+B| \geq \begin{cases} |A| - |B| \\ |B| - |A| \end{cases}$$

eller kortere

$$(2) \quad |A+B| \geq ||A| - |B|| ;$$

af Figuren fremgaar endvidere, at Lighedstegnet i de to fundne Uligheder (1) og (2) kun gælder i de specielle Tilfælde, hvor de to Vektorer OP og OQ er henholdsvis ens eller modsat rettede, d. v. s. hvor $\arg(B) = \arg(A)$ eller $= \arg(A) + \pi$. Ombytter vi i disse to Uligheder det komplekse Tal B med det modsatte Tal $-B$, finder vi de tilsvarende Uligheder

$$(3) \quad |A-B| \leq |A| + |B|$$

og

$$(4) \quad |A-B| \geq ||A| - |B|| ,$$

hvilke Uligheder naturligvis ogsaa umiddelbart kan udledes direkte ved Betragtning af den til den geometriske Subtraktion svarende Fig. 8.

Eks. I det $|ib| = |b|$ finder vi udfra (1) Uligheden $|A| = |a+ib| \leq |a| + |b|$, hvor Lighedstegnet kun gælder, naar (mindst) et af de reelle Tal a og b er 0.

Fremstillingen af de komplekse Tal ved Hjælp af Modulus og Argument er af særlig Betydning for Multipli-

kation; man finder her umiddelbart

$$A \cdot B = r_1 (\cos r_1 + i \sin r_1) \cdot r_2 (\cos r_2 + i \sin r_2) =$$

$$r_1 r_2 \{ (\cos r_1 \cos r_2 - \sin r_1 \sin r_2) + i (\sin r_1 \cos r_2 + \cos r_1 \sin r_2) \} =$$

$$r_1 r_2 (\cos(r_1 + r_2) + i \sin(r_1 + r_2)),$$

saaledes at

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

og

$$\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B),$$

hvilken sidste Ligning skal forstaaes saaledes, at idet $\arg(A)$ og $\arg(B)$ er to vilkaarlige Værdier for Argumenterne af A og B vil Summen $\arg(A) + \arg(B)$ være en af Værdierne for $\arg(AB)$.

Heraf fremgaar ogsaa, at for $B \neq 0$ er

$$\left| \frac{A}{B} \right| = \frac{|A|}{|B|}$$

og

$$\arg\left(\frac{A}{B}\right) = \arg(A) - \arg(B)$$

Eks. Er $A = r(\cos r + i \sin r)$ et vilkaarligt komplekst Tal og n et vilkaarligt positivt helt Tal, finder vi

$$A^n = r^n (\cos nr + i \sin nr)$$

eller

$$|A^n| = |A|^n, \quad \arg(A^n) = n \arg(A).$$

Eks. Ud fra Formlen

$$\cos n\varphi + i \sin n\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$$

udleder man umiddelbart (ved at udvikle Størrelsen paa højre Side af Lighedstegnet efter Binomialformlen og derefter sætte henholdsvis de reelle Dele og Koefficienterne til de rent imaginære Dele af Tallene paa de to Sider af Lighedstegnet ligestore) de saakaldte Moivre'ske Formler

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \dots$$

og

$$\sin n\varphi = n \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi + \dots$$

Eks. Idet Tallet 1 har Modulen 1 og Argumentet 0, finder vi

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{z} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

Eks. Vi gør opmærksom paa, at Ligningen $\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B)$ naturligvis ikke forbliver alene gyldig, naar $\arg$ ombyttes med $\arg$, d. v. s. naar vi regner med Argumenternes Hovedværdier; saaledes er f. Eks. $\arg((-1)(-1)) = \arg(1) = 0$ og ikke $= 2 \cdot \arg(-1) = 2\pi$.

3. Roduddragning. Lad A være et vilkaarligt komplekst Tal og n et vilkaarligt positivt helt Tal. Vi betegner da med $\sqrt[n]{A}$ et komplekst Tal B , der opløftet til n^{te} Potens giver A , altsaa en vilkaarlig af Roddene i den saakaldte binome Ligning

$$x^n = A,$$

hvor X er en kompleks Ubekendt.

Vi skiller os først af med det specielle Tilfælde, hvor $A=0$, her har Ligningen $X^n=0$ øjensynlig kun den ene Rod 0 (i sammenfaldende Rødder).

Vi vender os derfra til det almindelige Tilfælde, hvor $A \neq 0$ og skal her bevise den Hovedsætning, at den binomiske Ligning $X^n=A$ har netop n forskellige Rødder, altsaa at der findes n og kun n indbyrdes forskellige komplekse Tal $B_1, B_2, \dots, B_n$, hvis n^{te} Potens er lig med A . Vi skriver hertil det givne Tal $A \neq 0$ paa Formen $A = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, hvor $r > 0$ er Tallets Modul, medens φ er et (vilkaarligt valgt) af Tallets Argumenter (f. Eks. Argumentets Hovedværdi). Skriver vi nu den Ubekendte X paa Formen $X = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, altsaa $X^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, bestaar i Folge en tidligere Bemærkning den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for at $X^n = A$ deri, at ¹⁾ $\rho^n = r$, altsaa $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ (hvor $r^{\frac{1}{n}}$ som sædvanlig betegner det positive Tal, der opløftet til n^{te} Potens giver det positive Tal r) og ²⁾ at Argumentet $n\theta$ er lig med Argumentet φ eller adskiller sig derfra ved et helt Multiplum af 2π , altsaa at $n\theta = \varphi + 2p\pi$, d. v. s.

$$\theta = \frac{\varphi + 2p\pi}{n}.$$

hvor p er et helt Tal. Denne Fordring: $\theta = \frac{\varphi + 2p\pi}{n}$ kan man midlertid opfylde paa n væsentlig forskellige Maader, nemlig derved, at man for p vælger et vilkaarligt af Tallene $0, 1, 2, \dots, n-1$, altsaa for Argumentet θ en af de n væsentlig forskellige Værdier

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 3 \cdot 2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n};$$

blandt disse Tal findes nemlig ikke to, hvis Differens er et Multiplum af 2π , medens derimod ethvert andet Tal af Formen $\frac{n+2p\pi}{n}$ tydelig afviger fra et af de opskrevne med et Multiplum af 2π , idet jo det hele Tal p (paa en og kun en Maade) kan skrives paa Formen $p = m \cdot q + s$, hvor q og s er hele Tal og s et af Tallene $0, 1, 2, \dots, n-1$.

De saaledes fundne n Løsninger $B_1, B_2, \dots, B_n$ til Ligningen $X^n = A$ ($A \neq 0$), altsaa Tallene

$$B_\delta = \pi^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{n+\delta \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{n+\delta \cdot 2\pi}{n} \right) \quad (\delta = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

har tydelig deres tilsvarende Punkter i den komplekse Plan beliggende paa en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius $\pi^{\frac{1}{n}}$ og danner Vinkelspidserne i en i denne Cirkel indskreven regulær n -Kant. — Lader vi i Ligningen $X^n = A$ ($A \neq 0$) Tallet A aftage mod 0, vil de n Værdier af $\sqrt[n]{A}$ alle sammen nærme sig til 0, idet det jo for enhver af dem gælder, at $|\sqrt[n]{A}| = |A|^{\frac{1}{n}}$; det er i Sammenhæng hermed, at man i Grænsetilfældet $A = 0$ siger om Ligningen $X^n = 0$, at den har n sammenfaldende Rødder lig med 0.

Eks. Ligningen $x^2 = -1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$ har de to Rødder $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ og $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$, der altsaa begge er at betegne som Kvadratroden af -1 . Almindeligere finder vi de to Kvadratrodder af det vilkaarlige komplekse Tal $A = \pi(\cos \alpha + i \sin \alpha) \neq 0$ udtrykt ved $\pi^{\frac{1}{2}}(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$ og $\pi^{\frac{1}{2}}(\cos(\frac{\alpha}{2} + \pi) + i \sin(\frac{\alpha}{2} + \pi)) = -\pi^{\frac{1}{2}}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; de to Værdier for $\sqrt{A}$ er altsaa indbyrdes modsatte (d. v. s. betegnes det ene med B , er det andet $-B$), hvad man naturligvis ogsaa paa Forhaand kunde have indset. Vi tilføjer, at man ud fra Behandlingen af den

binome Ligning af 2den Grad umiddelbart indser, at ethvert 2den Grads Polynomium af Formen $X^2 + A$, hvor A er et vilkaarligt komplekst Tal, altid kan skrives som et Produkt af to 1ste Grads Polynomier; thi idet $\sqrt{-A}$ betegner en (ligegyldig hvilken) af $-A$'s Kvadratrodder, er jo

$$X^2 + A = X^2 - (-A) = X^2 - (\sqrt{-A})^2 = (X - \sqrt{-A})(X + \sqrt{-A});$$

dette gælder ogsaa i det specielle Tilfælde, hvor $A=0$ (og hvor $\sqrt{-A} = \sqrt{0}$ kun har den ene Værdi 0), idet vi jo her har $X^2 = X \cdot X$.

Eks. Udfrå det foregaaende Eksempel kan vi nu umiddelbart bevise, at et hvilket som helst 2den Grads Polynomium $X^2 + AX + B$, hvor A og B er to vilkaarlige komplekse Tal, kan skrives som et Produkt af to lineære Faktorer $(X + C_1)(X + C_2)$; vi omskriver hertil (ligesom ved Behandlingen af 2den Grads Ligningen indenfor det reelle Talomraade) Polynomiet $X^2 + AX + B$ paa Formen

$$X^2 + AX + B = \left(X + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(B - \frac{A^2}{4}\right)$$

og finder derefter udfrå det foregaaende Eksempel

$$X^2 + AX + B = \left(X + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}\right) \left(X + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}\right).$$

Heraf følger saubent, at Ligningen $X^2 + AX + B = 0$ altid har netop to Rødder, nemlig

$$X = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B},$$

idet vi i det specielle Tilfælde, hvor $\frac{1}{4} - B = 0$, siger om den (eneste) Rod $-\frac{1}{2}$, at den er en dobbelt Rod i Ligningen.

Eks. Der findes tre indbyrdes forskellige komplekse Tal, der kan betegnes som Kubikroden af 1, nemlig (se Fig. 9) foruden selve Tallet $1 = \cos \frac{0}{3} + i \sin \frac{0}{3}$ de to Tal

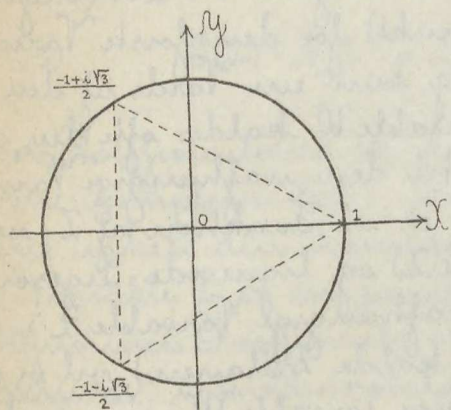


Fig. 9.

$$\frac{\cos 2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

og

$$\frac{\cos 4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Betegner vi det ene af de to sidste Tal med ϵ , kan det andet

øjensynlig betegnes med ϵ eller med ϵ^2 .

4. Funktion af en kompleks Variabel. Vi vil i det Følgende ofte ved Bogstavet Z betegne en kompleks Variabel, der frit kan variere indenfor et givet Omraade Ω i den komplekse Plan, d. v. s. for hvilken vi har Frihed til at indsatte et hvilketvilligt af Talene i den komplekse Talrække, der afbildes i Omraadet Ω . Er dette Omraade Ω specielt hele den komplekse Plan, siger vi om den Variable Z , at den er en uindskrænket Variabel, idet den jo her kan antage en hvilketvilligt opgiver kompleks Værdi, ofte vil Omraadet Ω imidlertid kun være en begrænset Del af Planen, f. Eks. bestaa af alle Punkter indenfor et Rektangel, en Cirkel eller lignende, ligesom det kan indtræffe, at Ω bestaar af hele den komplekse Plan med Undtagelse af enkelte Punkter.

Lad Z være en kompleks Variabel, der frit kan variere

indenfor et givet Omraade Ω i den komplekse Plan. Vi siger da om en (i Almindelighed ligeledes variabel) kompleks Størrelse W , at den er en Funktion af den Variable Z indenfor Omraadet Ω , hvis der er givet en Lov (Regne-regel), der til enhver Værdi (Punkt) for den første Variable Z indenfor Ω lader svare en og kun en Værdi af den anden Variable W . Den sidste Variable W kaldes ofte den „af-hængige“ Variable i Modsætning til den „uafhængige“ Variable Z , og vi vil udtrykke, at W er en Funktion af Z ved Betegnelser som $W = F(Z)$, $W = G(Z)$ og lignende. Ligesom vi afbilder Værdierne for den uafhængige Variable Z i en kompleks Plan (som vi ofte vil kalde Z -Planen), vil vi af-bilde Værdierne for den afhængige Variable W i en anden kompleks Plan (som vi vil kalde W -Planen).

Er W en Funktion af Z indenfor et Omraade Ω , og sætter vi $Z = x + iy$, $W = u + iv$, hvor (x, y) og (u, v) angiver Koordinaterne til henholdsvis Z og W , vil u og v øjensyn-lig være reelle Funktioner af det reelle Talpar (x, y) indenfor Omraadet Ω i XY -Planen. Omvendt vil $W = u + iv$ være givet som en Funktion af $Z = x + iy$ indenfor Omraadet Ω , naar (u, v) er givet som et reelt Funktionspar, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ af det reelle Variabelpar (x, y) (eller af de to uaf-hængige reelle Variable x og y) indenfor Omraadet Ω .
Ek. For Funktionen $W = (2+3i) \cdot Z^2 + (5+7i) \cdot Z + (1-i)$ af den mind-skærkede komplekse Variable Z , svarer, idet

$$(2+3i)(x+iy)^2 + (5+7i)(x+iy) + (1-i) = \{2x^2 - 2y^2 - 6xy + 5x - 7y + 1\} + i\{3x^2 - 3y^2 + 4xy + 7x + 5y - 1\},$$

det reelle Funktionspar $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 6xy + 5x - 7y + 1$, $v(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 4xy + 7x + 5y - 1$ af det mindskærkede reelle Variabelpar (x, y) .

5. Polynomium. Som det simpleste og vigtigste Eksempel paa en Funktion af den komplekse Variable Z nævner vi en hel rational Funktion eller et Polynomium

$$(5) \quad P(Z) = A_m Z^m + A_{m-1} Z^{m-1} + \dots + A_1 Z + A_0,$$

hvor „Koefficienterne“ $A_0, A_1, \dots, A_m$ er Konstanter (d. v. s. er givne komplekse Tal); et saadant Polynomium $P(Z)$ er defineret i hele den komplekse Plan, d. v. s. den uafhængige Variable Z er en uindskrænket Variabel. Er samtlige Polynomiets Koefficienter 0, kaldes Polynomiet et Nulpolynomium, i modsat Fald et egentligt Polynomium, og ved Graden af et egentligt Polynomium forstaar vi det (hele, ikke negative) Tal, der angiver Eksponenten til Z i det „højeste“ Led, hvis Koefficient er $\neq 0$. Vi siger om to Polynomier, at de er identiske, hvis de enten begge er Nulpolynomier, eller begge det samme egentlige Polynomium, altsaa hvis deres (formelt dannede) Differens er et Nulpolynomium.

Man siger om et Tal Z_1 , at det er et Nulpunkt eller en Rod i Polynomiet (5), hvis det indsæt for den Variable Z gør Polynomiet til 0, altsaa hvis det er en Rod i (en Løsning til) den algebraiske Ligning

$$A_m Z^m + A_{m-1} Z^{m-1} + \dots + A_1 Z + A_0 = 0,$$

hvor Z er en kompleks Ukendt. Et Nulpolynomium har ethvert komplekst Tal til Rod; et Polynomium af 0^{de} Grad (altsaa en Konstant $A_0 \neq 0$) har ingensomhelst Rod. Ganske som indenfor det reelle Talomraade beviser man indenfor

det komplekse Talomraade, at hvis Z_1 er en Rod i et egentligt Polynomium (5), da kan dette skrives paa Formen

$$A_m Z^m + A_{m-1} Z^{m-1} + \dots + A_0 = (Z - Z_1)(B_{m-1} Z^{m-1} + \dots + B_0),$$

hvor $B_0, B_1, \dots, B_{m-1}$ er Konstanter, $B_{m-1} = A_m$. Er det nye Polynomium $B_{m-1} Z^{m-1} + \dots + B_0$ ikke altså deleligt med $Z - Z_1$ (d. v. s. er Z_1 ikke Rod i dette sidste Polynomium), siges Z_1 at være enkelt Rod i det oprindelige Polynomium (5), i modsat Fald derimod at være flere Gange Rod i (5); nojagtig talt er Polynomiet (5) deleligt med $(Z - Z_1)^p$ men ikke med $(Z - Z_1)^{p+1}$, siges Z_1 at være netop en p-dobbelt Rod i (5). Ud fra det foregaaende udleder man umiddelbart, at et egentligt Polynomium af m^{te} Grad har højest m Rodder, og at denne Sætning forbliver gyldig, naar en p-dobbelt Rod tæller for p Rodder. (Som nævnt i de almindelige Bemærkninger, hvormed vi indledede dette Afsnit, skal vi senere bevise, at et egentligt Polynomium af m^{te} Grad har netop m Rodder, vel at mærke naturligvis kun, naar en p-dobbelt Rod tælles p Gange med). I det saaledes et egentligt Polynomium i hvert Fald kun kan antage Værdien Null for et endeligt Antal Værdier af Z (nemlig højest for m Værdier, hvis Polynomiet er af m^{te} Grad), maa et Polynomium, hvorefter vi ved, at det antager Værdien Null for uendelig mange Værdier af Z , nødvendigvis være et Nullpolynomium; heraf følger altså, at to Polynomier i Z , der er ligestore (d. v. s. antager samme Talværdi) for uendelig mange Værdier af den Variable Z , maa være identiske. Specielt bemærker vi, at dersom to Polynomier er ligestore for enhver reel Værdi af den Variable Z (eller,

som man siger, stemmer overens paa den reelle Akse), maa de nødvendigvis være identiske og folgelig ogsaa være lige store for enhver kompleks Værdi af Z .

Som en vigtig Anvendelse af den foregaaende Betragtning vil vi belyse Genbyghedsætningen for Polynomiers Oplosning i Faktorer, nemlig, at et egentligt Polynomium af m^{te} Grad $Z^m + A_{m-1} Z^{m-1} + \dots + A_1 Z + A_0$ højst paa en Maade kan skrives som et Produkt af m lineære Polynomier $(Z-Z_1)(Z-Z_2)\dots(Z-Z_m)$ (naturligvis bortset fra, at man kan forandre Faktorernes Rækkefølge). Gælder der nemlig for alle Værdier af den komplekse Variable Z en Ligning af Formen

$$(6) (Z-A)^{\alpha}(Z-B)^{\beta}\dots(Z-L)^{\lambda} = (Z-R)^{\rho}(Z-S)^{\sigma}\dots(Z-W)^{\omega},$$

hvor $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \rho, \sigma, \dots, \omega$ er positive hele Tal, medens saavel $A, B, \dots, L$ som $R, S, \dots, W$ betegner indbyrdes forskellige komplekse Tal, maa for det første Konstanter A være lig med et af Tallene $R, S, \dots, W$ (f. Eks. $A=R$), idet jo ellers venstre Side af Lighedstegnet var Null for $Z=A$, højre Side derimod ikke. Heraf følger da ved Division med $Z-A (=Z-R)$, at der for ethvert $Z \neq A$ gælder Ligningen

$$(7) (Z-A)^{\alpha-1}(Z-B)^{\beta}\dots(Z-L)^{\lambda} = (Z-R)^{\rho-1}(Z-S)^{\sigma}\dots(Z-W)^{\omega},$$

og denne sidste Ligning indses bagefter at være gyldig ogsaa for $Z=A$ selv, idet jo to Polynomier er identiske, naar de er ligestore for uendelig mange Værdier af Z (her for alle $Z \neq A$). Den ovenfor anstillede Betragtning kan derfor paany anvendes paa den simple Ligning (7), o. s. v.,

hvorefter Beviset for, at Faktorerne paa de to Sider af Lighedstegnet i (6) stemmer parvis overens, er gennemført.

Vi afslutter denne foreløbige Behandling af de komplekse Polynomiers Teori med at betragte de saakaldte reeltallige Polynomier, idet vi benytter Betegnelsen „reeltalligt“ for ethvert Polynomium

$$(8) \quad P(Z) = A_m Z^m + A_{m-1} Z^{m-1} + \dots + A_1 Z + A_0,$$

hvis Koefficienter $A_0, A_1, \dots, A_m$ alle er reelle Tal (medens Z stadig er en kompleks Variabel). For et reeltalligt Polynomium $P(Z)$ gælder det aabenbart, at dersom det har den komplekse Rod $A = a+ib$, har det ligeledes det konjugerede Tal $\bar{A} = a-ib$ til Rod; thi i Følge en Bemærkning i 1 er jo de to Tal $P(a+ib)$ og $P(a-ib)$ indbyrdes konjugerede, saaledes at $P(a+ib) = 0$ medfører $P(a-ib) = 0$. Heraf følger atter, at det reeltallige Polynomium (8), naar det har Roden $a+ib$ ($b \neq 0$), er deeligt med det reeltallige Polynomium af 2den Grad

$$Q(Z) = (Z - (a+ib))(Z - (a-ib)) = (Z-a)^2 + b^2 = Z^2 - 2aZ + (a^2 + b^2),$$

og da den derved fremkomne Kvotient $Q(Z) = P(Z) : Q(Z)$ kan bestemmes ved den sædvanlige elementære Divisionsmethode, vil denne Kvotient $Q(Z)$ sjensynlig paany være et reeltalligt Polynomium. Blevir nu dette sidste reeltallige Polynomium $Q(Z)$ atter 0 for $Z = A = a+ib$, har det derfor ligeledes Roden $\bar{A} = a-ib$ og er folgelig paany deeligt med $Z^2 - 2aZ + (a^2 + b^2)$, og saa fremdeles. Hermed er aabenbart bevist, at to indbyrdes konjugerede komplek-

se Rodder i et reeltalligt Polynomium er lige ofte Rod i Polynomiet, d. v. s. at hvis den ene er retop p Gange Rod, er den anden det ogsaa.

Vi tilføjer som et Gælseseksempel, at Beviset for, at dersom $I = a + ib$ ($b \neq 0$) er p Gange Rod i det reeltallige Polynomium $P(Z)$, da er $\bar{I} = a - ib$ det ligeledes, ogsaa umiddelbart kan føres ved Hjælp af Løtningen om, at to Polynomier, der stemmer overens paa den reelle Akse, er identiske, nemlig gennem følgende simple Betragtning. Idet $P(Z)$ har $I = a + ib$ til p-dobbelt Rod, er

$$P(Z) = (Z - I)^p (B_{n-p} Z^{n-p} + B_{n-p-1} Z^{n-p-1} + \dots + B_1 Z + B_0).$$

Lammen med det givne Polynomium $P(Z)$ betragter vi Polynomiet

$$Q(Z) = (Z - \bar{I})^p (\bar{B}_{n-p} Z^{n-p} + \bar{B}_{n-p-1} Z^{n-p-1} + \dots + \bar{B}_1 Z + \bar{B}_0).$$

For enhver reel Verdi af Z er $P(Z)$ og $Q(Z)$ aabenbart indbyrdes konjugerede, hvorfra følger, at $P(Z)$ er lig med $Q(Z)$ for enhver reel Verdi af Z , idet det (i Følge Forudsætning) reeltallige Polynomium $P(Z)$ jo antager reelle Værdier paa den reelle Akse. De to Polynomier $P(Z)$ og $Q(Z)$ er folgelig identiske, og idet $Q(Z)$ i Følge sin Konstruktion er deligt med $(Z - \bar{I})^p$, er $P(Z)$ det derfor ogsaa, d. v. s. I er p Gange Rod i $P(Z)$, saaledes som vi skulde bevise.

6. Afbildning ved bruddene lineær Funktion. Ved en bruddede rational Funktion af den komplekse Variable Z forstaar man en Brøk $\frac{P(Z)}{Q(Z)}$, hvis Tæller og Nævner begge er Polynomier i Z (og Nævnerpolynomiet $Q(Z)$ natu-

ligvis et egentligt Polynomium). En brudde rational Funktion er defineret for alle Værdier af Z med Undtagelse af Nævnerpolynomiets Kulpunkter, altsaa defineret i hele den komplekse Plan med Undtagelse af et endeligt Antal Punkter.

Vi vil i det Følgende nærmere undersøge den saakaldte brudne lineære Funktion, d. v. s. Funktioner

$$(9) \quad W = \frac{AZ + B}{CZ + D},$$

hvor A, B, C, D er vilkaarlige komplekse Konstanter, om hvilke vi blot gør den (selvfølgelige) Antagelse, at intet af de to Talpar (A, B) og (C, D) er Talparret $(0, 0)$, og yderligere at disse to Talpar ikke er indbyrdes proportionale (d. v. s. at der ikke findes et komplekst Tal K saaledes, at $C = K \cdot A$, $D = K \cdot B$). Denne Betingelse er øjensynlig ensbetydende med, at Determinanten $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0$.

En W er brudde rational Funktion af Z , kan man omvendt opfatte Z som en brudde rational Funktion af W , idet man jo ved Løsning af Ligningen (9) med Hensyn til Z finder

$$Z = \frac{DW - B}{-CW + A},$$

hvor $\begin{vmatrix} D & -B \\ -C & A \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0$.

Ved Behandlingen af de brudne lineære Funktioner vil vi gaa skridtvis frem, idet vi begynder med nogle specielle simple Tilfælde for efterhaanden at naa frem til det fuldt almindelige Tilfælde. Vi forudsætter den Bemærkning, at

det ved den følgende Undersøgelse ofte vil være bekendt at afbilde Værdierne af den afhængige Variable W ikke i en særlig Plan for sig (en W -Plan), men derimod at afbilde dem i den samme Plan (Z -Planen), som vi benytter til Afbildning af den uafhængige Variable Z , og med Benyttelse af det samme retvinklede Koordinatsystem.

I: Vi betragter først Funktionen $W = Z + B$ (hvor altsaa $C = 0$, $A = D = 1$). Vi finder her aabenbart for enhver Værdi af Z det tilsvarende Punkt W simpelthen derved, at vi ud fra Punktet Z afsætter den Vektor, der svarer til det komplekse Tal B

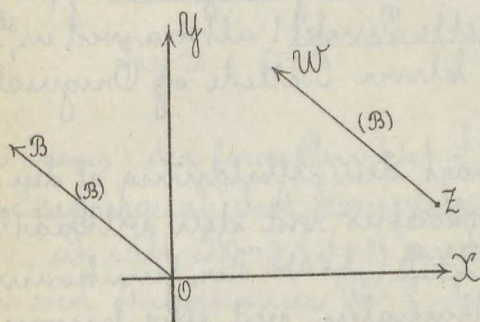


Fig. 10.

(se Fig. 10). Funktionen $W = Z + B$ bestemmer en ensrettede Afbildning af Z -Planens Punkter i W -Planens Punkter eller (naar vi som ovenfor foreslaaet benytter en og samme Plan til Fremstilling af den uafhængige og af den afhængige Variable) bestemmer en Afbildning af Z -Planen i sig selv. I det denne Af-

bildning jo svarer til en simpel Parallelforskydning, er Billedet af en vilkaarlig Figur kongruent med Originalen.

II: Vi betragter dernæst det Tilfælde, hvor $C = B = 0$, $D = 1$, altsaa Funktionen $W = AZ$, hvor A er en vilkaarlig kompleks Konstant $\neq 0$. Har A Modulen α og Argumentet α , altsaa $A = \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, fremkommer det til Z svarende Punkt W aabenbart derved, at vi først "strækker" Liniestykket OZ i Forholdet α , d. v. s. bestemmer det Punkt S paa Halvlinien OZ , for hvilket $OS = \alpha \cdot OZ$ (se Fig. 11), og derefter drejer Liniestykket OS Vinklen α omkring Punktet O til

Stillingen OW . Ogsaa her bestemmer Funktionen $W = Z^k$

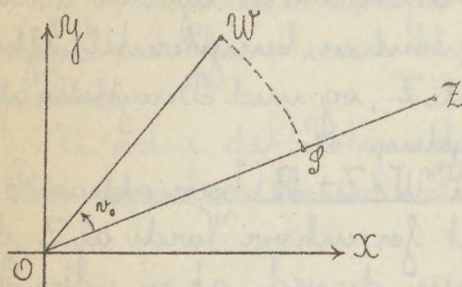


Fig. 11.

åabenbart en Afbildning af den komplekse Plan i sig selv (d. v. s. en saadan Afhængighed mellem Z og W , at der til enhver Værdi af Z svarer en og kun en Værdi af W , og omvendt) og idet ved denne Afbildning Billedet af en Figur simpelthen fremkommer af Originalen ved en Strækning udfra O og en paa-

følgende Drejning omkring dette Punkt (altsaa ved en „Drejning i almindelig Forstand“), bliver Billedet og Original her indbyrdes ligedannede.

III: Vi behersker nu umiddelbart den Afbildning af den komplekse Plan i sig selv, der iværksættes ved den vilkaarlige (hele) lineære Funktion $W = AZ + B$ ($A \neq 0$). Her fremkommer Billedet af en Figur udfra Originalen ved efter hinanden at udføre en „almindelig“ Drejning bestemt ved Konstanten A (hvorefter Punktet Z føres over i Punktet $W_1 = AZ$) og derefter en Parallelforskydning bestemt ved Konstanten B (hvorefter Punktet W_1 føres over i Punktet $W = W_1 + B = AZ + B$), og Billedet er altsaa paa ny ligedannet med Originalen. Vi tilføjer til Orientering, at Ordenen af de to Afbildninger, der her er anvendt efter hinanden, ikke er ligegyldig (med mindre $A = 1$); thi anvender vi paa Punktet Z først Parallelforskydningen B og derefter „Drejningen“ A , kommer vi til Punktet $W = A(Z+B) = AZ + AB$ og ikke til Punktet $AZ + B$.

IV: Vi vender os dernæst til Betragtning af det Tilfælde, hvor $A = D = 0$, $B = C = 1$, altsaa til Betragtning af Funktionen

$W = \frac{1}{Z}$. Er $Z \neq 0$, og har Z Modulen $\pi (> 0)$ og Argumentet ν , faar den tilsvarende Funktionsværdi W Modulen $\frac{1}{\pi}$ og Argumentet $-\nu$. Man finder altsaa til et givet Punkt $Z \neq 0$ det tilsvarende Punkt W derved, at man først bestemmer det Punkt I paa Halvlinien OZ , for hvilket $\overline{OI} = 1: \overline{OZ}$ (se Fig. 12) og derefter bestemmer det Punkt W , der er symmetrisk til I med Hensyn til den reelle Akse, den første af disse Processer (der fører Punktet Z over i Punktet I) kalder man en Afbildning ved Hjælp af reziproke Radier med Begyndelsespunktet som Midtpunkt eller en Inversion, medens den anden

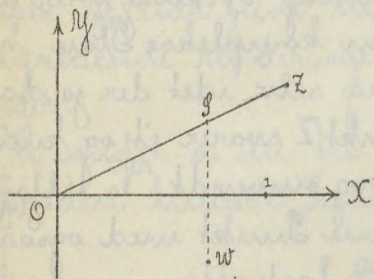


Fig. 12.

efter bestemmer det Punkt W , der er symmetrisk til I med Hensyn til den reelle Akse, den første af disse Processer (der fører Punktet Z over i Punktet I) kalder man en Afbildning ved Hjælp af reziproke Radier med Begyndelsespunktet som Midtpunkt eller en Inversion, medens den anden

den anden Procs (der fører Punktet I over i Punktet W) simpelthen er en Spejling af den komplekse Plan i den reelle Akse. Vi tilføjer, at idet $B = \frac{1}{A}$ ($A \neq 0$) medfører $A = \frac{1}{B}$, gælder det (specielt) for den ved Funktionen $W = \frac{1}{Z}$ bestemte Afbildning, at dersom den fører Punktet $Z = A$ over i Punktet $W = B$, vil den ligeledes føre Punktet $Z = B$ over i Punktet $W = A$.

Vi gør udtrykkelig opmærksom paa, at den ved Funktionen $W = \frac{1}{Z}$ bestemte Afbildning ikke, som i de tidligere betragtede Tilfælde, fører hele den komplekse Plan over i sig selv, idet der jo ikke har til ethvert Punkt Z svarer et tilsvarende Punkt W og omvendt men at dette kun gælder, naar vi i den komplekse Plan har „prikket“ Begyndelsespunktet O ud, idet der jo ikke findes noget W , der svarer til $Z = 0$, ligesom der omvendt ikke findes noget Z , for hvilket $W = \frac{1}{Z} = \infty$. For ved Undersøgelser som den paagældende at opnaa simple almen gyldige Forhold er det ofte bekvemt (i Stedet for at

„udprikke“ et Punkt af den komplekse Plan) hvortimod at tillegge den komplekse Plan foruden sine sædvanlige (egentlige) Punkter et (og kun eet) uegentligt Punkt, det saakaldte uendelig fjerne Punkt ∞ . Fastsætter vi da, at ved Afbildningen $W = \frac{z}{z}$ skal Punktet $Z=0$ svare til Punktet $W=\infty$, og Punktet $Z=\infty$ til Punktet $W=0$, opnaar vi, at denne Afbildning virkelig fører den „afsluttede“ komplekse Plan (d. v. s. den komplekse Plan, hvore Punktet ∞ er regnet med) over i sig selv, idet der jo da til ethvert (egentligt eller uegentligt) Punkt Z svarer et og kun eet (egentligt eller uegentligt) Punkt W , og omvendt. Vi tilføjer, at dersom vi regner det uendelige fjerne Punkt med ogsaa i det ovenfor betragtede Tilfælde $W = AZ + B$, fastsætter vi naturligt, at Afbildningen $W = AZ + B$ skal føre Punktet $Z = \infty$ over i Punktet $W = \infty$, hvorefter opnaas, at ogsaa denne Afbildning fører den „afsluttede“ komplekse Plan over i sig selv. Ved Undersøgelser indenfor den afsluttede komplekse Plan fastsætter vi endvidere, at enhver ret Linie skal siges at indeholde (gaa igennem) det uendelig fjerne Punkt; i den afsluttede komplekse Plan skærer altsaa to vilkaarlige, ikke parallelle, rette Linier hinanden i to Punkter (nemlig et egentligt og det uendelig fjerne), medens de, hvis de er parallelle (uden at være sammenfaldende) siges at berøre hinanden i det uendelig fjerne Punkt.

Vi fremhæver, at vi kun har tillagt den komplekse Plan et uendelig fjært Punkt i Modsætning til, hvad vi gjorde indenfor den reelle analytiske Geometri, hvor vi jo tillagde Planen uendelig mange uendelig fjerne Punkter, nemlig et svarende til enhver Hældning af Planens Linier. Disse to forskellige Udvidelser af Begrebet „Punkt i Planen“ giver en særlig karakteristisk Illustration af en Bemærk-

ning vi tidligere har gjort, nemlig at den Maade, hvorpaa en Begrebsudvidelse som den omhandlede foretages, ikke er en paa Forhaand (udfra Begrebets Natur) umiddelbart givet, men at den kan ske paa forskellig Maade ved de forskellige Undersøgelser, nemlig hver Gang saaledes, at man tilstræber at naa frem til et Begrebsomraade, hvor der ved den paagældende Undersøgelse gælder simple og almengyldige Sætninger.

V: Vi vender os nu til Betragtning af den fuldt almindelige brudne lineære Funktion

$$(9) \quad W = \frac{AZ+B}{CZ+D} \quad (AD-BC \neq 0).$$

Vi skiller os først af med det specielle Tilfælde, hvor $C=0$, her bliver W en (hel) lineær Funktion af Z , hvilket Tilfælde vi jo allerede har studeret ovenfor. I det almindelige Tilfælde, hvor $C \neq 0$, finder vi ved Udførelse af Divisionen

$$W = \frac{A}{C} + \frac{BC-AD}{C} \cdot \frac{1}{CZ+D},$$

hvoraf fremgaar, idet vi sætter

$$W_1 = CZ+D, \quad W_2 = \frac{1}{W_1}, \quad W = \frac{A}{C} + \frac{BC-AD}{C} W_2,$$

at den ved den vilkaarlige brudne lineære Funktion (9) bestemte Afbildning kan opføres i flere paa hinanden følgende Afbildninger af de ovenfor omtalte simple Typer. Vi tilføjer, at denne Afbildning derfor, ligesom hine, vil føre den afsluttede komplekse Plan over i sig selv, naar vi fastsætter, at $Z=\infty$ skal svare til $W_1=\infty$, derefter til $W_2=0$, og slutelig

til $W = \frac{A}{C}$, og ²⁾ at $W = \infty$ skal svare til $W_2 = \infty$ derefter til $W_1 = 0$, og slutelig til $Z = -\frac{D}{C}$. De fundne Værdier $Z = -\frac{D}{C}$ og $W = \frac{A}{C}$, der svarer henholdsvis til $W = \infty$ og $Z = \infty$, kunde vi ogsaa nemmeligt være kommet til direkte ud fra Udtrykkene

$$W = \frac{AZ+B}{CZ+D}, \quad Z = \frac{DW-B}{-CW+A}$$

ved at bestemme de Værdier af henholdsvis Z og W , for hvilke Nævnerne $CZ+D$ og $-CW+A$ bliver 0.

7. En Hovedsætning om den breddne lineære Funktion. I det den Afbildning, der bestemmes ved den hele lineære Funktion $W = \frac{AZ+B}{CZ+D}$ jo fører en vilkaarlig Figur over i en derved ligedannet Figur, er det klart, at denne Afbildning fører en ret Linie over i en ret Linie, og fører en Cirkel over i en Cirkel. Dette er ikke Tilfældet med den Afbildning, der bestemmes ved en vilkaarlig brudt lineær Funktion $W = \frac{AZ+B}{CZ+D}$. Derimod vil vi bevise, at en tilsvarende Sætning gælder ogsaa for den brudte lineære Funktion, naar vi tager Hængslen af alle Cirkler og rette Linier under et, d. v. s. at enhver Cirkel føres over enten i en Cirkel eller i en ret Linie, og at enhver ret Linie føres over enten i en Cirkel eller i en ret Linie. Ved Behandlingen af dette Problem er det bekendt at indordne de rette Linier under Cirklerne derved, at vi benytter Udtrykket „en almindelig Cirkel“ i den komplekse Plan til at betegne en Kurve, der enten er en „egentlig“ Cirkel eller en ret Linie, vi kan da karakterisere en ret Linie som en almindelig Cirkel, der gaar gennem det uendelig fjerne Punkt. Denne Betegnelssmaade medfører bl. a. den Fordel, at vi, naar vi gør Brug af den, saubestemt kan udtale den almengyldige Sætning, at der igennem tre

vilkaarlige (indbyrdes forskellige) Punkter i den afsluttede kom-
plekse Plan altid gaar en og kun en almindelig Cirkel,
 nemlig en egentlig Cirkel i alle Tilfælde, hvor de tre givne
 Punkter er egentlige Punkter, der ikke ligger paa samme ret-
 te Linie, og en ret Linie i de to specielle Tilfælde, hvor
 de tre givne Punkter enten er egentlige Punkter beliggende
 paa samme rette Linie, eller hvor det ene af de tre Punk-
 ter er Punktet ∞ . Den ovenfor nævnte Hovedsætning hed-
 der da:

Den Afbildning, der bestemmes ved en vilkaarlig
bruddens lineær Funktion, fører enhver almindelig Cirkel
over i en almindelig Cirkel igen.

Bewis: Idet den Afbildning, der bestemmes ved en vil-
 kaarlig bruddens lineær Funktion, jo, som ovenfor vist, kan
 sammensættes af Afbildninger ved hele lineære Funktio-
 ner i Forbindelse med en Afbildning bestemt ved den speci-
 elle Funktion $W = \frac{z}{z-1}$, og idet endvidere enhver Afbildning
 bestemt ved en hel lineær Funktion vides at føre en al-
 mindelig Cirkel over i en ny almindelig Cirkel (idet
 den jo endda fører en egentlig Cirkel over i en egent-
 lig Cirkel og en ret Linie over i en ret Linie), er Bewi-
 set for den opstillede Sætning aabenbart ført, naar vi har
eftervist Sætnings Gyldighed for den specielle Afbild-
ning bestemt ved $W = \frac{z}{z-1}$. Bewiset for denne sidste (spe-
 cielle) Sætning kunde vi føre ved simple geometriske Be-
 tragninger, nemlig ved først at eftervise, at en Afbild-
ning ved reciprokke Radier fører en almindelig Cirkel
 over i en almindelig Cirkel igen, og dernæst at Bemær-
 ke, at det samme naturligvis gælder for en Spejling i
X-aksen. Vi foretrækker imidlertid at føre Bewiset di-

rekte ved Hjælp af Løseren our komplekse Tal, hvorved vi tillige opnåar et karakteristisk Ovelseseksempel paa Regning med disse Tal.

Karakteriserer vi Punkterne $Z = x + iy$ i den komplekse Plan ved reelle Koordinater (x, y) , fremstilles en vilkaarlig egentlig Cirkel ved en Ligning af Formen

$$k_1(x^2 + y^2) + a_1x + a_2y + k_2 = 0,$$

hvor Konstanterne k_1, k_2, a_1, a_2 er reelle Tal, for hvilke $k_1 \neq 0$ og $a_1^2 + a_2^2 - 4k_1k_2 > 0$; omvendt vil enhver saadan Ligning fremstille en egentlig Cirkel. Paa tilsvarende Maade bestemmes en vilkaarlig ret Linie (idet vi foreløbig kun regner med Planens egentlige Punkter) ved en Ligning af Formen

$$a_1x + a_2y + k_2 = 0,$$

hvor a_1, a_2, k_2 er reelle Tal, af hvilke $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, eller (anderledes udtrykt) hvor $a_1^2 + a_2^2 > 0$. Disse to Resultater kan vi sammentage derhen, at en almindelig Cirkel er ensbetydende med en Kurve, der i XY-Planen fremstilles ved en Ligning af Formen

$$(10) \quad k_1(x^2 + y^2) + a_1x + a_2y + k_2 = 0,$$

hvor k_1, k_2, a_1, a_2 er reelle Tal, der opfylder Uligheden

$$(11) \quad a_1^2 + a_2^2 - 4k_1k_2 > 0,$$

idet denne Ligning jo fremstiller en egentlig Cirkel, hvis $k_1 \neq 0$ og en ret Linie, hvis $k_1 = 0$.

Idet vi nu gaar over til at stille Opgaven i komplekse Tal, sætter vi $Z = x + iy$, altsaa $\bar{Z} = x - iy$, samt betegner $a_1 + ia_2$ med A , altsaa $a_1 - ia_2$ med $\bar{A}$. Idet

$$x^2 + y^2 = Z \cdot \bar{Z}$$

og

$$a_1 x + a_2 y = \frac{1}{2} (x + iy) (a_1 - ia_2) + \frac{1}{2} (x - iy) (a_1 + ia_2) = \frac{1}{2} \bar{A} Z + \frac{1}{2} A \bar{Z},$$

kan den ovenstaaende Ligning (10) for en vilkaarlig almindelig Cirkel skrives paa Formen

$$(12) \quad k_1 Z \bar{Z} + \frac{1}{2} \bar{A} Z + \frac{1}{2} A \bar{Z} + k_2 = 0,$$

hvor k_1, k_2 er vilkaarlige reelle Tal og A et vilkaarligt komplekst Tal underkastet den Betingelse, at

$$(13) \quad A \cdot \bar{A} - 4k_1 k_2 > 0.$$

Det gælder nu at vise, at ved Afbildningen $W = \frac{1}{Z}$ gaar en almindelig Cirkel paany over i en almindelig Cirkel, altsaa (idet vi afbilder Punktet W i samme komplekse Plan som Punktet Z og foreløbig kun betragter den "udprikkede" Plan, hvori Punktet 0 mangler), at naar vi i Ligningen (12) erstatter Z med $\frac{1}{Z}$ og naturligvis samtidig $\bar{Z}$ med $\frac{1}{\bar{Z}}$, gaar denne Ligning derved over i en ny Ligning af samme Form, og hvori Koefficienterne er underkastet den samme Betingelse (13) som i Ligningen (12). Dette ses inderlidt uimiddelbart at være Tilfældet; thi erstatter vi i (12) Z med

$\frac{1}{Z}$ og $\bar{Z}$ med $1:\bar{Z}$, og multiplicerer vi derefter Ligningen med $Z\bar{Z}$, finder vi Ligningen

$$(12^a) \quad k_2 Z\bar{Z} + \frac{1}{2} A Z + \frac{1}{2} \bar{A} \bar{Z} + k_1 = 0,$$

der har nøjagtig samme Form som den Ligning (12), hvorfra vi gik ud (idet jo blot k_1 og k_2 er ombyttet med hinanden og A erstattet med $\bar{A}$), og hvori de reelle Konstanter k_1, k_2 og den komplekse Konstant $\bar{A}$ er underkastet Betingelser (13) eller, anderledes skrevet, Betingelsen

$$(13^a) \quad \bar{A} \cdot A - 4k_1 k_2 > 0.$$

Hermed er Ligningen bevist i den "udprykkede" Plan. Gaar vi fra den udprykkede Plan over til den afsluttede Plan (og regner altsaa saavel Punktet 0 som Punktet ∞ med, samt vedtager, at disse to Punkter skal svare til hinanden ved Afbildningen $W = \frac{1}{Z}$), ser vi, at naar den ene af de to til hinanden svarende Kurver (12) og (12^a) gaar gennem Punktet 0, da er henholdsvis $k_2 = 0$ eller $k_1 = 0$, d. v. s. da er den anden Kurve (12^a) eller (12) en ret Linie og indeholder folgelig det til 0 svarende Punkt ∞ . Hermed er den opstillede Løsning fuldstændig bevist.

Ekse. Ved Afbildningen $W = \frac{1}{Z}$ føres øjensynlig Enhedscircelen $|Z|=1$ over i sig selv (dog ikke saaledes, at hvert enkelt Punkt paa denne Cirkel gaar over i sig selv, hvad der kun er Tilfældet med de to Punkter $Z = +1$ og $Z = -1$), thi af $|Z|=1$ følger $|W|=1$, og omvendt. Idet $Z = \cos v + i \sin v$ medfører $W = \frac{1}{Z} = \cos(-v) + i \sin(-v)$ til to sammenhørende Punkter Z og W gennemløbe Enhedscircelen i modsatte Retninger. Vi tilføjer, at idet

$|Z| \leq 1$ medfører $|W| \geq 1$, vil ved Afbildningen $W = \frac{1}{Z}$ Omraadet indenfor Enhedscirklen afbildes i Omraadet udenfor Enhedscirklen og omvendt.

Eks. Ved Afbildningen $W = \frac{1}{Z}$ føres en ret Linie gennem Begyndelsespunktet O iensynlig over i en anden ret Linie gennem O , nemlig i den rette Linie, der ligger symmetrisk med den givne med Hensyn til den reelle Ase. Punktet $Z=0$ paa den første Linie svarer til Punktet $W=\infty$ paa den anden Linie, og $Z=\infty$ svarer til $W=0$, og Punkter „i Næheden“ af O paa den ene Linie svarer til Punkter „i Næheden“ af ∞ paa den anden Linie. — Vi tilføjer, at de rette Linier gennem O er de eneste rette Linier, der ved Afbildningen $W = \frac{1}{Z}$ gaar over i rette Linier igen, altsaa at enhver ret Linie, der ikke gaar gennem O føres over i en egentlig Birkel, thi i det Originalen (den rette Linie) ikke gaar gennem O , vil Billedkurven ikke gaa gennem det til O svarende Punkt ∞ og er almindelig Birkel, der ikke gaar gennem Punktet ∞ er jo en egentlig Birkel.

8. Afbildning af de komplekse Tal i Punkterne af en Kugleflade. Ved saadanne Undersøgelser over komplekse Tal (som f. Eks. den foregaaende vedrørende brede lineare Funktioner), hvor det er hensigtsmæssigt at regne Værdien ∞ med til det komplekse Talomraade, er det ofte bekvemt at afbilde de komplekse Tal ikke, som hidtil, i Punkter af en Plan men derimod i Punkterne af en Kugleflade, hvorved man opnaar paa naturlig Maade at kunne afbilde Tallet ∞ i et egentligt Punkt paa Fladen i Modsætning til, hvad der er Tilfældet i Planen. Vi tanker os hertil en Kugleflade, f. Eks. med Radius 1, anbragt ovenpaa den komplekse Plan og berørende denne i Punktet O , og betegner det

Punktet paa Kuglefladen, der ligger diametralt modsat O , med U . Er nu Z et vilkaarligt endeligt komplekst Tal, der i den komplekse Plan afbildes i Punktet P , afbilder vi dette Tal Z i det fra U forskellige Punkt Q paa Kuglefladen, hvori den rette Linie UP skærer Fladen. Paa denne Maade faar vi sjensynlig tilvejebragt en eenerthydig Afhaengighed mellem Mængden af alle endelige komplekse Tal og Mængden af alle fra U forskellige Punkter paa Kuglefladen. Idet ved denne Afbildning saadanne Værdier af Z , hvis numeriske Værdi $|Z|$ er „meget stor“, aabenbart afbildes i saadanne Punkter Q paa Kuglefladen, der ligger „meget nær ved Punktet U “, er det naturligt ved Definition at fastsætte, at Tallet ∞ skal afbildes netop i det (tiloversblevne) Punkt U selv, hvorved opnaar vi en eenerthydig Afhaengighed mellem samtlige komplekse Tal (endelige og ∞) og Mængden af alle Punkter paa Kuglefladen.

Den Afbildning af Planens Punkter i Kuglefladens Punkter, vi ovenfor har lagt til Grund ved Afbildningen af de komplekse Tal i Kuglefladens Punkter, kaldes en stereografisk Projektion. Man viser indenfor Geometrien, at en saadan stereografisk Projektion har den vigtige Egenskab at afbilde enhver almindelig Cirkel i Planen (altsaa egentlig Cirkel eller ret Linie) i en Cirkel paa Kuglefladen, og omvendt, nemlig at afbilde de egentlige Cirkler i Planen i saadanne Cirkler paa Kuglefladen, der ikke gaar gennem Punktet U , og de rette Linier i Planen i Cirkler gennem U . Benytter vi Kuglefladen til Fremstilling af de komplekse Tal (Tallet ∞ medregnet) kan vi derfor udøge den i forrige Paragraf beviste Hovedsætning om brudne lineære Funktioner saaledes: Ved en vilkaarlig brudten lineær Funk-

hvor $W = \frac{AZ+B}{CZ+D}$ afbildes Punkterne paa Z -Kuglefladen eenen-
tydigt i Punkterne af W -Kuglefladen, og denne Afbildning
er saaledes beskaffen, at der til enhver Cirkel paa Z -Kugle-
fladen svarer en Cirkel paa W -Kuglefladen og omvendt.

Vi har ovenfor vist, hvorledes det ved Behandlingen af
visse Opgaver er bekvemt at indføre Tallet ∞ og i Sammen-
hæng hermed at operere med den afsluttede komplekse Plan
eller med den komplekse Kugleflade. I det Følgende vil vi
imidlertid overalt kun regne med endelige Værdier af Z ,
altsaa kun beskæftige os med de egentlige Punkter i den kom-
plekse Plan.

9. Afbildning ved Funktionen $W = Z^n$. Vi skal i denne Para-
graf undersøge den Afbildning af Z -Planens Punkter i W -Pla-
nens Punkter, der bestemmes ved Funktionen $W = Z^n$, hvor n
er et positivt helt Tal ≥ 2 ; denne Afbildning er af væsent-
lig anden Art end den i det foregaaende betragtede (der
bestemtes ved en brudten linear Funktion), idet den Afhæn-
gighed mellem Z og W , der tilvejebringes ved Ligningen
 $W = Z^n$, ikke er en eenentydig. Til ethvert Z svarer der ganske
vist en og kun en Værdi W , men omvendt svarer der til et
hvert W n forskellige Værdier af Z , nemlig de n Rødder i den
binomiske Ligning $Z^n = W$ (der dog i det specielle Tilfælde, hvor
 $W = 0$, "falder sammen" i Punktet $Z = 0$); disse n Værdier af Z ,
altsaa de n Størrelser, for hvilke vi benytter Fællesbetegrel-
sen $\sqrt[n]{W}$, afbildes i den komplekse Z -Plan i Vinkelspidserne
af en regulær n -Kant med Centrum i Begyndelsespunktet
og de bestemmes explicit ved Ligningerne

$$|Z| = |W|^{\frac{1}{n}}, \quad \arg Z = \frac{1}{n} \arg W,$$

hvor den sidste Ligning (for et givet $W \neq 0$) kan tilfredsstilles paa n „væsentlig“ forskellige Maader. Blandt de n forskellige Værdier af $Z = \sqrt[n]{W}$ betegner vi som Hovedværdien den Værdi $Z = F_0(W)$, der svarer til, at vi i det ovenstaaende Udtryk for $\arg Z$ benytter Hovedværdien for $\arg W$, altsaa den Værdi af Z , der er bestemt derved, at

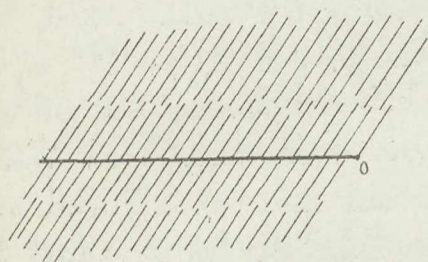
$$|Z| = |W|^{\frac{1}{n}}, \quad \arg Z = \frac{1}{n} \arg W.$$

De $(n-1)$ andre Værdier $Z = F_1(W), F_2(W), \dots, F_{n-1}(W)$ for $Z = \sqrt[n]{W}$ er da bestemt ved

$$F_q(W) = F_0(W) \cdot \left(\cos \frac{2q\pi}{n} + i \sin \frac{2q\pi}{n} \right) \quad (q=1, 2, \dots, n-1).$$

For at faa et Overblik over den ved Funktionen $W = Z^n$ bestemte Afbildning af Z -Planens Punkter i W -Planens Punkter fjerner vi af W -Planen en Halvlinje ud fra Begyndelsespunktet $W=0$ og betegner det derved fremkomne (aabne) Omraade som den langs Halvlinjen opskaaene W -Plan; til denne Halvlinje vil vi (i Sammenhang med den Maade, hvorpaa Hovedværdien for et komplekst Tals Argument er fastlagt) vælge den (reelle) negative Halvakse (se Fig. 13^a). Beregner vi som ovenfor Hovedværdien af $\sqrt[n]{W}$ med $F_0(W)$, vil denne Funktion $Z = F_0(W)$ iensynlig afbilde den saaledes opskaaene W -Plan (altsaa hele W -Planen med Undtagelse af de reelle Værdier af W , for hvilke $-\infty < W \leq 0$) eenetydigt paa den „aabne“ Sektor S i Z -Planen (se Fig. 13^b), der begrænses af de to ved Vinklene $-\frac{\pi}{n}$ og $+\frac{\pi}{n}$ bestemte Halvlinjer ud fra 0 (idet Sektorens to begrænsende Halvlinjer svarer til de to „Rande“ af Snittet i W -Planen). Paa tilsvarende Maade vil

enhver af Funktionerne $Z = F_1(W)$, $Z = F_2(W)$, $\dots$, $Z = F_{n-1}(W)$ afbilde den opskaarne W -Plan eenetydigt paa en Sektor i Z -Planen



W-Plan

Fig 13^a

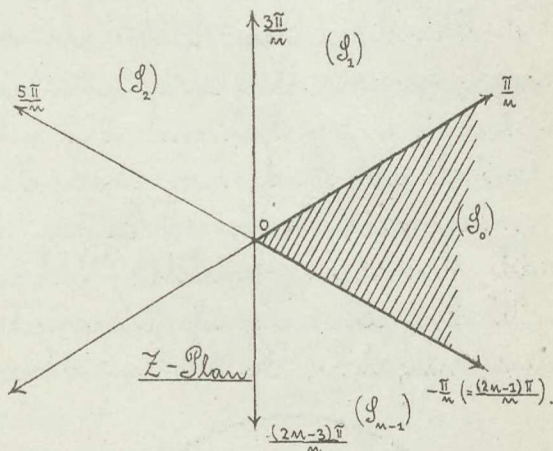
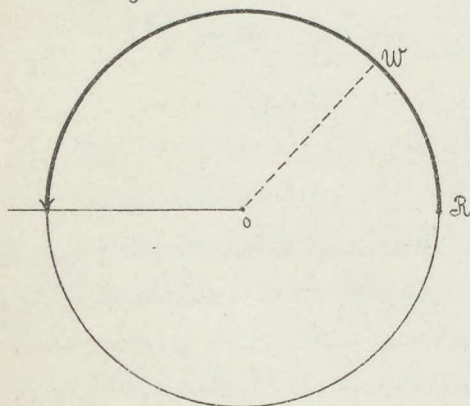
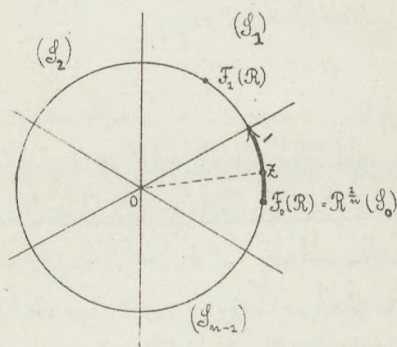


Fig 13^b

med Toppunkt i O og Vinkelstørrelse $\frac{2\pi}{n}$, idet jo Funktionen $F_q(W)$ vil afbilde den opskaarne W -Plan eenetydigt paa den Sektor G_q , der fremkommer af den forvante Sektor G_0 ved at dreje denne Vinklen $\frac{2q\pi}{n}$ omkring O . De n Sektorer $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$ udfylder tilsammen netop hele Z Planen.

Nedens den n -tydige Funktion $Z = \sqrt[n]{W}$ saaledes, saakænge vi kun beskæftiger os med den opskaarne W -Plan (altsaa udsteder Forbud mod at overskride den negative Halvakse) naturligt deler sig op i de n eenetydige Funktioner $Z = F_0(W)$, $Z = F_1(W)$, $\dots$, $Z = F_{n-1}(W)$, gælder dette ikke længer, naar vi betragter den upskaarne W -Plan, idet de forvante n „Grene“ $F_0(W), \dots, F_{n-1}(W)$ af Funktionen $\sqrt[n]{W}$ af sig selv „gaar over i hinanden“, naar Punktet W overskridende den negative Halvakse omkredser Begyndelsespunktet. Lader vi saaledes Punktet W bevæge sig i positiv Retning og med jævn Hastighed

paa en Cirkel med Centrum i 0 og Radius R , idet vi lader W begynde f. Eks. i Punktet $W=R$ paa den positive Halvakse (se Fig. 14^a), og vælger vi til Begyndelsesfunktionsværdi for $\sqrt{W}$ Hovedværdien $F(W)$, vil det tilsvarende Punkt Z bevæge sig i positiv Retning paa en Cirkel i Z -Planen med Centrum i 0 og Radius $R^{\frac{1}{2}}$ udfra Punktet $Z = F(R) = R^{\frac{1}{2}}$, og den Vinkelhastighed, hvormed Punktet Z vil bevæge sig, vil øjensynlig være netop n Gange mindre end den Vinkelhastighed, hvormed Punktet W bevæger sig paa sin Cirkel over i W -Planen. Heraf følger, at naar Punktet W er naaet til den negative Halvakse, altsaa naar Vektoren OW har drejet

Fig. 14^aFig. 14^b

sig Vinklen π , vil Vektoren OZ kun have drejet sig Vinklen $\frac{\pi}{n}$ og Punktet Z saaledes være naaet til den Halvlinje, langs hvilken Vektorerne L_0 og L_1 støder op til hinanden. Lader vi nu W bevæge sig videre og overstøde den negative Halvakse, føres vi til (naar vi principmæssig ikke vil tillade Punktet Z at foretage et pludseligt "Spring" fra Halvlinjen $+\frac{\pi}{n}$ til Halvlinjen $-\frac{\pi}{n}$) for Funktionen $Z = \sqrt{W}$ at vælge Funktionsværdien

$Z = F_1(W)$ og ikke ligger Hovedværdien $F_0(W)$, og er W efter en hel Omdrejning vendt tilbage til Stillingen $W = R$, vil Punktet Z saaledes ikke være kommen tilbage til Udgangsstillingen $Z = F_0(R) = R^{\frac{1}{n}}$, men derimod være kommen til Stillingen $Z = F_1(R) = R^{\frac{1}{n}} (\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n})$. Lader vi W paany omkredse Punktet 0, gaar Funktionen $Z = F_1(W)$ ogsynslyg paa tilsvarende Maade (naar W overskrider den negative Halvakse) over i Funktionen $Z = F_2(W)$, o. s. v., og først efter at W har kredset n Gange rundt om Nulpunktet, vil Punktet Z være naaet 1 Gang rundt om sit Nulpunkt og være kommen tilbage til Begyndelsesstillingen $Z = F_0(R) = R^{\frac{1}{n}}$. Idet de n Grene $F_0(W), \dots, F_{n-1}(W)$ for Funktionerne $Z = \sqrt[n]{W}$ saaledes „hænger sammen“ i Nulpunktet og ved Omkredsning af W omkring dette Punkt gaar over i hinanden paa den ovenfor omtalte Maade, siger man om Punktet $W = 0$, at det er et Forgreningspunkt af n^{te} Orden for den (n -tydige) Funktion $Z = \sqrt[n]{W}$.

10. Følge med komplekse Elementer. Efter at vi i det foregaaende har behandlet de elementære Regneoperationer inden for det komplekse Talomraade og omtalt forskellige Inver-
delser, vender vi os nu til Betragtning af Begrebet Grænse-
overgang.

En Følge af komplekse Tal

$$(14) \quad A_1 = a_1 + ib_1, A_2 = a_2 + ib_2, \dots, A_n = a_n + ib_n, \dots$$

siges at være konvergent med Grænseværdien $A = a + ib$, dersom Tallet A_n nærmer sig ubegrænset til Tallet A , naar n vokser ud over alle Grænser, d. v. s. dersom der til ethvert (selv nok saa lille) positivt Tal ε svarer et positivt helt Tal $N = N(\varepsilon)$, saaledes at Uligheden $|A - A_n| < \varepsilon$ er opfyldt for alle

$n \geq N$; at Talfølgen (14) er konvergent med Grænseværdien A , udtrykker man (ligesom ved de reelle Talfølger, der jo er specielle Tilfælde af komplekse Talfølger) ved at skrive $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ eller simpelthen ved $A_n \rightarrow A$. Idet $|A - A_n| = \sqrt{(a - a_n)^2 + (b - b_n)^2}$ angiver Afstanden mellem Punkterne A og A_n i den komplekse Plan, kan Betingelsen for at $A_n \rightarrow A$ saabenbart i geometrisk Formulering udtrykkes derved, at enhver (selv nok saa lille) Cirkel i den komplekse Plan med Centrum i Punktet A og Radius ε indeholder saantlige Punkter A_n fra et vist Trin af, d. v. s. for $n \geq N = N(\varepsilon)$, eller, hvad der saabenbart kommer ud paa det samme, indeholder saantlige Punkter A_n paa nær et endeligt Antal.

Eks. En Talfølge $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ vil ojsynlig da og kun da være konvergent med Grænseværdien 0, naar den af Modulerne dannede (reelle) Talfølge $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|, \dots$ er det; thi idet $|A_n - 0| = |A_n| = |A_n - 0|$, er jo Ulighederne $|A_n - 0| < \varepsilon$ og $|A_n| < \varepsilon$ ensgyldige. Heraf følger f. Eks., at Talfølgen $1, Q, Q^2, \dots, Q^n, \dots$ hvor Q er et vilkaarligt komplekst Tal, da og kun da vil være konvergent med Grænseværdien 0, naar $|Q|^n \rightarrow 0$, d. v. s. naar $|Q| < 1$, altsaa naar Tallet Q i den komplekse Plan afbildes i et Punkt, der ligger indenfor Cirklen med Centrum i 0 og Radius 1.

Eks. Er Talfølgen $A_1, \dots, A_n, \dots$ konvergent med Grænseværdien A , vil den nye Talfølge $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots$, der fremkommer af den oprindelige ved at erstatte Elementerne med deres konjugerede Værdier, paany være konvergent og have Grænseværdien $\bar{A}$. Thi idet $\bar{A} - \bar{A}_n = \overline{A - A_n}$, er jo $|\bar{A} - \bar{A}_n| = |\overline{A - A_n}| = |A - A_n|$, saaledes at Uligheden $|A - A_n| < \varepsilon$ (for $n \geq N$) medfører Uligheden $|\bar{A} - \bar{A}_n| < \varepsilon$ (for $n \geq N$).

Idet $|A - A_n| = |(a + ib) - (a_n + ib_n)| = \sqrt{(a - a_n)^2 + (b - b_n)^2}$, er Udsagnet

$z_n = a_n + ib_n \rightarrow z = a + ib$ aabenbart fuldkommen ensgyldigt
 med Udsagnet $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$; thi den i II Afsnit, 19, givne
 Definition paa, at Følgen af reelle Talpar $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$
 (a_n, b_n) , konvergerer mod Talparret (a, b) , var jo netop den,
 at Afstanden $d_n = \sqrt{(a - a_n)^2 + (b - b_n)^2}$ skulde gaa mod 0 for $n \rightarrow \infty$.
 Heraf følger atter, idet (som vist i II, 19) $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ er fuld-
 kommen ensgyldigt med, at saavel $a_n \rightarrow a$, som $b_n \rightarrow b$, at den
nodvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at den komplekse
 Talfølge (14) er konvergent med Grænseværdien $z = a + ib$, be-
 staar deri, at de to af Koordinaterne dannede reelle Tal-
 følger $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ og $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ begge er konver-
 gente med henholdsvis Grænseværdierne a og b . Denne sid-
 ste Bemærkning tillader os umiddelbart ud fra kendte
 Sætninger om reelle Talfølger at udlede tilsvarende Sæt-
 ninger om komplekse Talfølger; eksempelvis kan vi saa-
 ledes slutte, at dersom en kompleks Talfølge (14) er konver-
 gent, er den yderligere begrænset, d. v. s. der eksisterer en
 saadan positiv Konstant k , at Uligheden $|z_n| < k$ er opfyldt
 for alle $n = 1, 2, 3, \dots$; thi af $z_n \rightarrow z$ følger $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ og her-
 af atter (idet en konvergent reel Talfølge jo vides at være be-
 grænset) Ulighederne $|a_n| < k_1$, $|b_n| < k_2$, altsaa yderligere $|z_n| =$
 $|a + ib| \leq |a| + |b| < k_1 + k_2 = k$.

Som man umiddelbart kan vise, enten ud fra selve Defi-
 nitionen paa en kompleks Talfølges Konvergens eller ved som
 ovenfor at føre Spørgsmaalet om denne Konvergens tilbage
 til Spørgsmaalet om Konvergens af de to reelle Talfølger,
 der dannes henholdsvis af Elementernes 1^{ste} og 2^{den} Koordi-
 nater, gælder der ganske de samme Regneregler for komplek-
 se Talfølger som dem, vi i II, 8 har bevist for reelle Talføl-
 ger, nemlig:

- I Af $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$ følger $A_n + B_n \rightarrow A + B$ og $A_n - B_n \rightarrow A - B$.
 II Af $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$ følger $A_n B_n \rightarrow AB$. Heri er specielt indeholdt, at dersom K er en vilkaarlig kompleks Konstant, vil $A_n \rightarrow A$ medføre $KA_n \rightarrow KA$.
 III Af $A_n \rightarrow A$, hvor $A \neq 0$, følger $\frac{1}{A_n} \rightarrow \frac{1}{A}$.

Som Eksempel paa Beviserne for disse Sætninger vil vi opskrive Beviset for den 2^{de} af dem vedrørende Talfølgers Multiplikation, og vi vil (som et Gælseseksempel) føre dette Bevis paa dobbelt Maade, nemlig dels ved direkte Benyttelse af Definitionen paa en kompleks Talfølges Konvergens, dels ved at udlede Sætningen ud fra kendte Sætninger om reelle Talfølger.

1) For ud fra $A_n \rightarrow A$ og $B_n \rightarrow B$ at bevise, at $A_n B_n \rightarrow AB$, altså at $A_n B_n - AB$ kan gøres numerisk vilkaarlig lille ved blot at vælge n tilstrækkelig stor, omskriver vi $A_n B_n - AB$ (ganske som ved Beviset for den tilsvarende Sætning om reelle Talfølger) paa Formen

$$A_n B_n - AB = A(B_n - B) + B_n(A_n - A),$$

hvoraf følger

$$|A_n B_n - AB| \leq |A| \cdot |B_n - B| + |B_n| \cdot |A_n - A|,$$

altsaa yderligere, idet k betegner et saadant positivt Tal, at $|B_n| \leq k$ for alle n (et saadant Tal k eksisterer, fordi Talfølgen $B_1, B_2, \dots$ er konvergent og derfor ogsaa begrænset)

$$(15) \quad |A_n B_n - AB| \leq |A| \cdot |B_n - B| + k |A_n - A|.$$

Denne sidste Ulighed (hvor $|A|$ og k er faste Tal, d. v. s. ikke afhænger af n) viser umiddelbart, at $A_n B_n \rightarrow AB$; thi vælger vi N saa stor, at $|A| \cdot |B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ og $k |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N$, vil jo i Folge (15) $|A_n B_n - AB|$ være $< \varepsilon$ for $n \geq N$.

2) Ved Hjælp af Læren om reelle Talfølger forløber Beviset for, at $A_n = a_n + i b_n \rightarrow A = a + i b$ og $B_n = c_n + i d_n \rightarrow B = c + i d$ medfører $A_n B_n = (a_n + i b_n)(c_n + i d_n) = (a_n c_n - b_n d_n) + i(b_n c_n + a_n d_n) \rightarrow A \cdot B = (a + i b)(c + i d) = (ac - bd) + i(bc + ad)$ saaledes. Af $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$ følger $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$, $d_n \rightarrow d$ og heraf altså (ved Hjælp af kendte Regneregler for reelle Talfølger), at $a_n c_n - b_n d_n \rightarrow ac - bd$ og $b_n c_n + a_n d_n \rightarrow bc + ad$, hvad der jo er ensbetydende med, at $A_n B_n \rightarrow AB$.

Vi beviser dernæst den Sætning, at dersom Talfølgen $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ er konvergent med Grænseværdien A , vil den af Elementernes numeriske Værdier dannede Folge af reelle ikke-negative Tal $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|, \dots$ ligeledes være konvergent og have Grænseværdien $|A|$. Dette følger saavel umiddelbart ud fra Uligheden $||A| - |A_n|| \leq |A - A_n|$, som ogsaa (idet vi gaar over ad reelle Talfølger) deraf, at $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ medfører, at $|A_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = |A|$. Vi tilføjer, at den omvendte Sætning ikke gælder, d. v. s. at man ikke ud fra Forudsætningen om, at $|A_n|$ nærmer sig til en bestemt Grænseværdi k , kan slutte, at A_n nærmer sig til nogen bestemt Grænseværdi (undtagen i det specielle Tilfælde, hvor $k = 0$); thi at $|A_n| \rightarrow k$ betyder jo blot, at i den komplekse Plan vil den korteste Afstand fra Punktet A_n til Cirklen med O som Centrum og Radius k gaa mod 0 for $n \rightarrow \infty$, medens der intet er udsagt om, hvorvidt Punktet A_n derved vil nærme sig til noget bestemt Punkt A paa denne Cirkel eller ikke.

Eks. For Talfølgen med det almindelige Element $a_n = i^n$ gælder det, at $|a_n| = 1$ for alle n , altsaa yderligere, at $|a_n| \rightarrow 1$; her vil a_n selv imidlertid ikke nærme sig til nogen bestemt Grænseværdi, idet jo $a_{4n} = 1$, $a_{4n+1} = i$, $a_{4n+2} = -1$, $a_{4n+3} = -i$.

Vi bemærker sluttelig, at dersom det for en divergent (d. v. s. ikke konvergent) Talfølge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ gælder, at Punktet a_n i den komplekse Plan fjerner sig bort i det Uendelige (d. v. s. at dets Afstand fra Begyndelsespunktet 0 vokser ubegrænset), naar n vokser udover alle Grænser, vil vi indbyrdes dette ved at skrive $a_n \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$. Udsagnet $a_n \rightarrow \infty$ er saaledes simpelthen ensbetydende med Udsagnet $|a_n| \rightarrow \infty$.
Eks. Har det komplekse Tal Q sin Modul $|Q| > 1$, vil $Q^n \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$, idet jo $|Q^n| = |Q|^n \rightarrow \infty$.

11. Uendelig Række med komplekse Led. En uendelig Række med komplekse Led

$$(16) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

siges at være konvergent med Summen S , dersom den af "afsnitene" dannede Talfølge

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

er konvergent med Grænseværdien S , altsaa dersom $S_n \rightarrow S$ for $n \rightarrow \infty$. Vi bemærker straks til Orientering, at en nødvendig (men ikke tilstrækkelig) Betingelse for, at Rækken (16) er konvergent, bestaar deri, at det n^{de} Led $a_n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. Thi er Rækken konvergent med Summen S , gælder det jo, at $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$.

En konvergent Række (16) med Summen S betegnes

Storrelsen $S - S_n = S - (A_1 + A_2 + \dots + A_n)$ som det til Afsnittet S_n hørende Restled i Rækken. Idet $S_n \rightarrow S$ vil ojsynlig Restledet $R_n = S - S_n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

Eks. Lad os undersøge, for hvilke (komplekse) Værdier af Kvotienten Q Kvotientrækken

$$1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1} + \dots$$

er konvergent. Vi bemærker hertil, at for ethvert Q , for hvilket $|Q| \geq 1$, er Rækken sikkert divergent (d. v. s. ikke konvergent), idet den jo for et saadant Q ikke engang opfylder den for Konvergens nødvendige Betingelse $A_n = Q^{n-1} \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. For ethvert Q , for hvilket $|Q| < 1$ (d. v. s. som i den komplekse Plan afbildes i et Punkt indenfor Cirklen med Centrum i 0 og Radius 1) gælder det derimod, at Rækken er konvergent med Summen $\frac{1}{1-Q}$; thi for ethvert saadant Q vil jo det n^{te} Afsnit

$$1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1} = \frac{1 - Q^n}{1 - Q}$$

naar sig til Grænseværdien $\frac{1}{1-Q}$ for $n \rightarrow \infty$, idet $Q^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

Eks. Er Rækken $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ konvergent med Summen S , vil Rækken $\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n + \dots$, der er fremkommet af den oprindelige Række ved at erstatte Leddene med deres konjugerede Værdier, ligeledes være konvergent og have Summen $\bar{S}$. Thi betegner vi det n^{te} Afsnit i de to Rækker med henholdsvis S_n og $\bar{S}_n$, er jo $\bar{S}_n = \overline{S_n}$, saaledes at $S_n \rightarrow S$ medfører $\bar{S}_n = \overline{S_n} \rightarrow \bar{S}$ for $n \rightarrow \infty$.

Ved den nærmere Undersøgelse af en uendelig Række

med komplekse Led

$$(16) \quad z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots,$$

hvor $z_n = a_n + ib_n$, er det bekendt samtidig med den givne Række med komplekse Led, at betragte de to Rækker med reelle Led

$$(17) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

og

$$(18) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots,$$

der dannes af Koordinationerne til Leddene i Rækken (16). Begynder vi det rekte Afprøvet i de tre Rækker (16), (17) og (18) med henholdsvis z_n , s_n og t_n , er øjensynlig $z_n = s_n + it_n$, saaledes at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $z_n \rightarrow z = \alpha + i\beta$ bestaar deri, at saavel $s_n \rightarrow \alpha$ som $t_n \rightarrow \beta$. Hermed er bevist, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Rækken med komplekse Led (16) er konvergent med Summen $z = \alpha + i\beta$ bestaar deri, at de to Rækker med reelle Led (17) og (18) begge er konvergente med henholdsvis Summerne α og β . Denne Sætning giver øjensynlig et Middel til at opbygge Læren om uendelige Rækker med komplekse Led ud fra Læren om uendelige Rækker med reelle Led.

Den uendelige Række med komplekse Led (16) siges at være absolut konvergent, dersom den Række med reelle, ikke negative Led

$$(19) \quad |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots,$$

der fremkommer af den givne Række ved at erstatte Leddene med Leddenes Moduler, er konvergent. Vi vil bevise den vigtige Sætning, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Rækken (16) er absolut konvergent, bestaar deri, at de to Rækker med reelle Led (17) og (18) begge er absolut konvergente (Heraf følger specielt, at enhver absolut konvergent Række ligeledes er konvergent, idet dette jo vides at være Tilfældet for Rækker med reelle Led).

Bewis: Rigtigheden af den opstillede Sætning, altsaa Rigtigheden af, at for de tre Rækker med positive Led

$$(19) \quad |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + \dots,$$

$$(20) \quad |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots,$$

$$(21) \quad |b_1| + |b_2| + \dots + |b_n| + \dots$$

er Konvergenzen af den første fuldkommen ensgyldig med den samtidige Konvergens af de to sidste, følger umiddelbart ud fra Ulighederne

$$|a_n| + |b_n| \geq |A_n| \geq \begin{cases} |a_n| \\ |b_n| \end{cases};$$

thi ¹⁾ er Rækken (19) konvergent, vil de to Rækker (20) og (21) yderligere være det, fordi Leddene i enhver af disse to Rækker er $\leq$ de tilsvarende Led i Rækken (19), og ²⁾ er de to Rækker (20) og (21) konvergente, vil Rækken

$$(|a_1| + |b_1|) + (|a_2| + |b_2|) + \dots + (|a_n| + |b_n|) + \dots$$

ligeledes være det, og heraf følger atter ud fra Mligheden $|t_n| \leq |a_n| + |b_n|$, at Rækken (19) er konvergent.

Ud fra den sidstnævnte Sætning følger umiddelbart, at i en absolut konvergent Række (16) med Summen S er Leddernes Orden ligegyldig, d. v. s. omordner vi Leddene i den givne Række paa vilkaarlig Maade, vil den derved fremkomne nye Række ligeledes være absolut konvergent og ligeledes have Summen S ; thi denne Sætning vides jo at gælde for Rækker med reelle Led, altsaa for enhver af de to Rækker (17) og (18), hvis n^{te} Led er henholdsvis første og anden Koordinat til det n^{te} Led i den givne Række (16).

Sluttelig nævner vi, at man (enten ved en Fremgangsmaade ganske analog med den, der i sin Tid blev benyttet ved de reelle Rækker, eller ved som ovenfor at betragte den reelle og den rent imaginære Del af de enkelte Led for sig og gøre Brug af kendte Sætninger om reelle Rækker) umiddelbart kan vise, at den fra Læren om Rækker med reelle Led kendte Sætning om Multiplikation af absolut konvergente Rækker gælder uforandret for Rækker med komplekse Led, altsaa specielt, at dersom de to Rækker

$$U_1 + U_2 + \dots + U_m + \dots$$

og

$$V_1 + V_2 + \dots + V_m + \dots$$

begge er absolut konvergente med henholdsvis Summen U og V , da vil Rækken

$$W_1 + W_2 + \dots + W_m + \dots,$$

hvor

$$W_n = U_1 V_n + U_2 V_{n-1} + \dots + U_{n-1} V_2 + U_n V_1$$

ligeledes være absolut konvergent og have Summen $W = U V$.

12. Grænseverdi for en Funktion af en kompleks Variabel. Lad $W = F(Z)$ være en Funktion af Z defineret indenfor et Omraade i den komplekse Plan, om hvilket Omraade vi vil antage, at det indeholder en vis Omegn af Punktet A (d. v. s. alle Punkter indenfor en vis Cirkel med Centrum i A) højest med Undtagelse af Punktet A selv. Vi siger da om Funktionen $W = F(Z)$, at den nærmer sig til Grænseverdien B , naar Z nærmer sig til A , og skriver $\lim_{Z \rightarrow A} F(Z) = B$ eller $F(Z) \rightarrow B$ for $Z \rightarrow A$, dersom det for enhver Folge af fra A forskellige Værdier $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$, for hvilken $Z_n \rightarrow A$, gælder, at den tilsvarende Folge af Funktionsværdier $F(Z_1), F(Z_2), \dots, F(Z_n), \dots$ er konvergent med Grænseverdien B . Vi tilføjer, at man (ganske som ved Læren om Grænseverdi for Funktion af reelle Variable) umiddelbart kan vise, at den givne Definition paa $F(Z) \rightarrow B$ for $Z \rightarrow A$ ogsaa kunde have været udtrykt saaledes: Til ethvert $\varepsilon > 0$ skal der eksistere en saadan (saa lille) Omegn af Punktet A i den komplekse Plan, at Uligheden $|F(Z) - B| < \varepsilon$ er opfyldt for alle $Z \neq A$ indenfor denne Omegn.

Ud fra Definitionen paa Begrebet Grænseverdi i Forbindelse med de kendte Regneregler for komplekse Talfølger følger umiddelbart, at tilsvarende Regneregler gælder for Funktioners Grænseovergang, d. v. s. af $F(Z) \rightarrow B, G(Z) \rightarrow C$ for $Z \rightarrow A$ følger $F(Z) + G(Z) \rightarrow B + C, F(Z) - G(Z) \rightarrow B - C, F(Z) \cdot G(Z) \rightarrow B \cdot C$ samt, dersom $C \neq 0$, $F(Z) : G(Z) \rightarrow B : C$. Endvidere gælder

det, idet $F(Z_n) \rightarrow B$ medfører $|F(Z_n)| \rightarrow |B|$, at dersom $F(Z) \rightarrow B$ for $Z \rightarrow A$ vil ogsaa $|F(Z)| \rightarrow |B|$ for $Z \rightarrow A$.

Vi bemærker endvidere, at dersom vi som sædvanlig sætter $Z = x + iy$ og $W = F(Z) = F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, hvor $u(x, y)$ og $v(x, y)$ er reelle Funktioner af det reelle Variabelpar (x, y) , indser man straks ud fra den givne Definition paa Begrebet Grænseverdi i Forbindelse med Løsningen oven, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $F(Z) = u(x, y) + iv(x, y) \rightarrow B = b_1 + ib_2$ for $Z \rightarrow A = a_1 + ia_2$ bestaar deri, at de to reelle Funktioner $u(x, y)$ og $v(x, y)$ opfylder Betingelserne $u(x, y) \rightarrow b_1$, $v(x, y) \rightarrow b_2$ for $(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)$.

Vi har hidtil tænkt os, at det Punkt A , hvortil den uafhængige Variable Z nærmede sig, var et egentligt Punkt, d. v. s. at A var et endeligt Tal. Man kan imidlertid paa ganske tilsvarende Maade definere Begrebet Grænseverdi for $Z \rightarrow \infty$. Vi tænker os her til Funktioner $F(Z)$ defineret i en vis "Omegn af Punktet ∞ "; d. v. s. for alle (endelige) Værdier af Z beliggende udenfor en vis Cirkel, og siger da, at $F(Z) \rightarrow B$ for $Z \rightarrow \infty$, dersom det for enhver Følge af (endelige) Værdier $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$, for hvilken $Z_n \rightarrow \infty$, gælder, at den tilsvarende Følge af Funktionsværdier $F(Z_1), F(Z_2), \dots, F(Z_n), \dots$ er konvergent med Grænseverdien B .

Undertiden er det bekendt ogsaa at inddrage det Tilfælde i Betragtningerne, hvor Funktionsgrænseverdien B er Tallet ∞ ; vi mener her med Betegnelsen $F(Z) \rightarrow \infty$ for $Z \rightarrow A$ (eller $Z \rightarrow \infty$) simpelthen, at $|F(Z)| \rightarrow \infty$ for $Z \rightarrow A$ (eller $Z \rightarrow \infty$).

13. Uendelig smaa Størrelser. En kompleks Funktion $F(Z)$ af den komplekse Variabel Z siges at være uendelig lille for

$Z \rightarrow A$ (eller $Z \rightarrow \infty$), dersom $F(Z) \rightarrow 0$ for $Z \rightarrow A$ (eller $Z \rightarrow \infty$).
 For Funktionens $F(Z)$ uendelig lille for $Z \rightarrow A$, sammenligner man den sædvanligvis med Afstanden $x = |Z - A|$ fra det faste Punkt A til det mod A konvergerende variable Punkt Z , og vi siger da om Funktionen $F(Z)$, at den er uendelig lille af højere end n^{te} Orden for $Z \rightarrow A$, og skriver $F(Z) = o(x^n)$, dersom $F(Z)$ gaar stærkere mod 0 end n^{te} Potens af Afstanden x , d. v. s. dersom $F(Z) : x^n \rightarrow 0$ for $Z \rightarrow A$. Eksempelvis vil enhver Potens Z^n , og almindeligere ethvert Polynomium $P(Z) = A_1 Z + A_2 Z^2 + \dots + A_n Z^n$, hvori det konstante Led mangler, være uendelig lille for $Z \rightarrow 0$, og idet $|Z^n| = x^n$ gælder det (ved Grænseovergangen $Z \rightarrow 0$) for ethvert saadant Polynomium $P(Z)$ Grænseligningerne

$$P(Z) = A_1 Z + o(x), \quad P(Z) = A_1 Z + A_2 Z^2 + o(x), \quad P(Z) = A_1 Z + A_2 Z^2 + A_3 Z^3 + o(x), \dots$$

Som et Gvælseseksempel i Regning med uendeligsmåa Størrelser, vil vi bevise følgende Sætning om Polynomier, af hvilken vi vil gøre en overordentlig vigtig Brug ved det senere Bevis for Algebrens Fundamentalsætning.

Lad $P(Z)$ være et vilkaarligt egentligt Polynomium, hvis Grad n er > 0 , d. v. s. som ikke er en Konstant, og lad A være en vilkaarlig saadan Værdi af Z , at den tilsvarende Funktionsværdi $P(A)$ er $\neq 0$. Da kan vi altid, igragt i den umiddelbare Omegn af Punktet A , bestemme et andet Punkt B i den komplekse Plan, saaledes at $|P(B)| < |P(A)|$.

Bevis: Vi begynder med den simple Bemærkning, at vi uden at indskrænke Bevisets Almindelighed kan antage, at Tallet A netop er 0 , idet vi i modsat Fald blot behøver at udføre Variabeltransformationen (Parallelforskydningen) $Z = A + V$,

hvorved det givne Polynomium $P(Z)$ jo gaar over i et nyt egentligt Polynomium af n te Grad i den ny uafhængige Variable V . Idet A antages at være 0, skriver vi Polynomiet $P(Z)$ paa Formen

$$P(Z) = A_0 + A_1 Z + \dots + A_n Z^n,$$

hvor $A_n \neq 0$, og hvor endvidere $A_0 \neq 0$, idet A_0 jo netop er den i Folge Antagelse fra Nul forskellige, Funktionsværdi $P(0)$. Lad nu betegne det mindste af Tallene $1, 2, \dots, n$, for hvilket Koefficienten $A_m \neq 0$, vi har da

$$P(Z) = A_0 + A_m Z^m + R(Z),$$

hvor $R(Z) = o(x^m)$ for $Z \rightarrow 0$. Under Grænseovergangen $Z \rightarrow 0$ vil naturligvis ikke blot Restleddet $R(Z)$, men ogsaa Leddet $A_m Z^m$ gaa mod 0, og Størrelsen $A_m Z^m$ vil derfor, naar Z ligger „meget nær“ ved Begyndelsespunktet være „meget lille“ i Forhold til Konstanten A_0 , hvormod den vil være „meget stor“ i Forhold til Restleddet $R(Z)$, idet jo $|A_m Z^m| = |A_m| \cdot x^m$, medens $R(Z) = o(x^m)$ for $Z \rightarrow 0$. Hidtil har vi tænkt os Z gaaende mod 0 paa vilkaarlig Maade; vi indskrænker nu Z til at bevæge sig henimod Begyndelsespunktet langs en saadan Hælinie, at der under hele Grænseovergangen gælder Ligningen

$$|A_0 + A_m Z^m| = |A_0| - |A_m Z^m|,$$

hertil kræves øjensynlig, at $\arg(A_m Z^m) = \arg(A_0) + \pi$, altsaa at

$$m \arg Z = \arg A_0 + \pi - \arg A_m,$$

hvilken Betingelse øjensynlig altid kan opfyldes, iøvrigt paa m væsentlig forskellige Maader. Gaar Z mod 0 langs den valgte Halvlinje, finder vi Mligheden

$$|P(Z)| \leq |A_0 + A_m Z^m| + |R(Z)| = |A_0| - |A_m Z^m| + |R(Z)|,$$

heri kan vi, fordi $R(Z) = o(r^m)$ for $Z \rightarrow 0$, vælge $r = |Z|$ saa lille, at $|R(Z)| < |A_m Z^m|$, og finder derved, at der for ethvert paa den omhandlede Halvlinje beliggende Punkt Z , der ligger tilstrækkelig nær ved Punktet 0, gælder Mligheden $|P(Z)| < |A_0| = |P(0)|$. Hermed er Beviset for Eksistensen af et Punkt (iøvrigt af uendelig mange Punkter) B , for hvilket $|P(B)| < |P(0)|$, fuldført.

14. Uendelig store Størrelser. En Funktion $F(Z)$ siges at være uendelig stor for $Z \rightarrow A$ (eller for $Z \rightarrow \infty$), dersom $F(Z) \rightarrow \infty$ for $Z \rightarrow A$ (eller $Z \rightarrow \infty$). Eksempelvis nævner vi, at ethvert egentligt Polynomium $P(Z) = A_0 + A_1 Z + \dots + A_m Z^m$, hvis Grad m er ≥ 1 , er uendelig stort for $Z \rightarrow \infty$, idet der jo (for $Z \neq 0$) gælder Ligningen

$$P(Z) = Z^m \left(A_m + \frac{A_{m-1}}{Z} + \frac{A_{m-2}}{Z^2} + \dots + \frac{A_0}{Z^m} \right),$$

hvor Faktoren $|Z^m| = |Z|^m \rightarrow \infty$ for $Z \rightarrow \infty$, medens Størrelsen indei Parenthesen for $Z \rightarrow \infty$ nærmer sig til Grænseværdien $A_m \neq 0$.

Som et andet Eksempel nævner vi, at Funktionerne $\frac{1}{(Z-A)^m}$ ($m \geq 1$) er uendelig stor for $Z \rightarrow A$, og almindeligere, at

dette er Tilfældet med enhver Funktion af Formen

$$\frac{K_n}{(Z-A)^n} + \frac{K_{n-1}}{(Z-A)^{n-1}} + \dots + \frac{K_1}{Z-A},$$

hvor $K_n, K_{n-1}, \dots, K_1$ er vilkaarlige komplekse Konstanter, af hvilke $K_n \neq 0$; thi denne Funktion kan jo skrives paa Formen

$$\frac{1}{(Z-A)^n} (K_n + K_{n-1}(Z-A) + \dots + K_1(Z-A)^{n-1}),$$

hvor Størrelsen udenfor Parenthesen i numerisk Værdi vokser udover alle Grænser for $Z \rightarrow A$, medens Størrelsen udenfor Parenthesen nærmer sig til Grænseværdien $K_n \neq 0$. Ved Hjælp af denne sidste Bemærkning kan vi umiddelbart bevise følgende Sætning, som vi senere vil faa Brug for.

Person en Ligning af Formen

$$\frac{K_n}{(Z-A)^n} + \dots + \frac{K_1}{Z-A} + \frac{L_m}{(Z-B)^m} + \dots + \frac{L_1}{Z-B} + \dots = \frac{U_p}{(Z-R)^p} + \dots + \frac{U_1}{Z-R} + \frac{V_q}{(Z-S)^q} + \dots + \frac{V_1}{Z-S} + \dots,$$

hvor $A, B, \dots, R, S, \dots, K_1, \dots, K_n, L_1, \dots, L_m, \dots, U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q, \dots$ er vilkaarlige komplekse Konstanter (i endeligt Antal), og $K_n, L_m, \dots, U_p, V_q, \dots \neq 0$, vides at gælde for alle i Betragtning kommende Værdier af den komplekse Variable Z , d. v. s. for ethvert Z , der ikke netop er Kulpunkt for en af Nævnerne, maa Ligningen være en Identitet, d. v. s. de to Funktioner paa hver sin Side af Lighedstegnet maa være formelt ens.

Vi bemærker hertil for det første, at Tallet A nødvendigvis maa findes iblandt Tallene $R, S, \dots$, idet i modsat Fald venstre Side af Lighedstegnet vilde $\rightarrow \infty$ for $Z \rightarrow A$, højre Side derimod ikke. Antager vi dernæst, at f. Eks.

$A=R$, $B=S$, $\dots$, og samler vi alle Leddene paa venstre Side af Lighedstegnet, gælder det om at vise, at alle Tallene i Brøkerne er 0. Dette indses imidlertid umiddelbart ved en lignende Betragtning som ovenfor, thi forsvandt ikke alle de Led, som indeholdt f. Eks. $Z-A$ i Tælleren, vilde jo venstre Side af Lighedstegnet være uendelig stor for $Z \rightarrow A$, i Strid med at højre Side af Lighedstegnet under hele Grænseovergangen har Værdien 0.

Vi afslutter hermed Indledningen, hvori vi har givet det første Grundlag for Læren om de komplekse Tal, og skal nu gaa over til i det følgende kort at behandle først de "kontinuerlige" Funktioner og dernæst de "differentiable" Funktioner af en kompleks Variabel Z , for sluttelig at omtale en betydningsfuld Anvendelse af de komplekse Tal paa Studiet af den lineære homogene Differentialligning med konstante Koefficienter.

Opg. 1. Find Modulen og Argumentet til det komplekse Tal $A = -13,67 + i \cdot 5,897$.

Opg. 2. Find det komplekse Tal B , der fremkommer af Tallet $A = 1,234 + i \cdot 2,345$, naar dette sidste Tal divideres med sit konjugerede Tal $\bar{A}$ og derefter multipliceres med Kvadratet paa sin Modul.

Opg. 3. Løs Ligningerne

$$iX_1 + (1+i)X_2 + (1-2i)X_3 = 2+i$$

$$2iX_1 + (2-i)X_2 + (3+i)X_3 = 0$$

$$3iX_1 - (1+2i)X_2 + 2X_3 = 0$$

Opg. 4. Find Summen af de 10 første Led i en Kvotientrække, hvis første Led er $A = 1,453 + i \cdot 2,458$, og hvis Kvotient er $Q = 3,473 + i \cdot 7,674$.

Opg. 5. Løs Ligningerne $X^4 = 2$ og $X^3 = 1-i$

Opg. 6. Vis, at Ligningen $X^4 - 7X^3 + 21X^2 - 34X + 28 = 0$ har Roden $1+i\sqrt{3}$, og løs derved Ligningen fuldstændigt.

Opg. 7. Vis, at den binome Ligning $X^n = 1$ for $n > 1$ altid har (mindst) en primitiv Rod, d. v. s. en saadan, der ikke tillige er Rod i nogen anden binom Ligning $X^m = 1$, hvori $m < n$. Vis dernæst, at hvis ϵ er en primitiv Rod i Ligningen $X^n = 1$, da er samtlige Rodder i denne Ligning netop givet ved Potenserne $\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3, \dots, \epsilon^{n-1}$.

Opg. 8. Find de til Afbildningen $W = \frac{kZ+B}{\ell Z+D}$ hørende „Dobbelpunkter“, d. v. s. de Punkter, der svarer til sig selv.

Opg. 9. Find de to „almindelige“ Cirkler i W -Blanen, der ved Afbildningen

$$W = \frac{1-3Z}{2+Z}$$

svarer henholdsvis til Cirklen $|Z-1| = 2$ og til Cirklen $|Z-3| = 1$.

Opg. 10. To komplekse Variable Z og W er forbundne ved Ligningen $Z^2 + Z = W$, hvilken Kurve i den komplekse Plan beskriver det ene af de to Punkter Z og W , naar det andet beskriver en ret Linie.

Opg. 11. Undersøg den ved Ligningen $Z^2 - 4Z - W = 0$ bestemte Afbildning af W -Planes Punkter i Z -Planes Punkter (Angiv særlig, hvorledes Z varierer, naar W gennemløber en Cirkel med Centrum i Punktet $W = 4$).

Opg. 12. Eder A_1 og A_2 er to komplekse Tal, dannes Talfølgen

$$A_1, A_2, A_3 = \frac{1}{2} (A_1 + A_2), A_4 = \frac{1}{2} (A_2 + A_3), \dots$$

Vis, at denne Talfølge er konvergent og find dens Grænseværdi.

Opg. 13. Vis (ved Anvendelse af Ligningen om uendelige Rækker Multiplikation), at Rækken $1 + 2Q + 3Q^2 + \dots + nQ^{n-1} + \dots$ er konvergent for $|Q| < 1$ med Summen $\frac{1}{(1-Q)^2}$

Kontinuerke Funktioner.

15. Indledende Definitioner og Sætninger. Lad $F(Z)$ være en Funktion af den komplekse Variable Z defineret indenfor et Omraade Ω i den komplekse Plan. I fuldkommen Analogi med Definitioner indenfor de reelle Funktioners Teori siger vi da om den komplekse Funktion $F(Z)$, at den er kontinueret i et Punkt Z_0 indenfor Omraadet Ω , dersom $\lim_{Z \rightarrow Z_0} F(Z) = F(Z_0)$, altsaa dersom ¹⁾ Funktionen $F(Z)$ nærmer sig til en bestemt Grænserværdi for $Z \rightarrow Z_0$, og ²⁾ denne Grænserværdi netop er Funktionens Værdi i selve Punktet Z_0 . Endvidere siger vi om Funktionen $F(Z)$, at den er kontinueret indenfor hele Omraadet Ω , hvis den er kontinueret i ethvert af Omraadets Punkter.

Ud fra Definitionen paa Kontinuitet i Forbindelse med tidligere beviske Sætninger om Regning med Grænserværdier følger umiddelbart, at dersom Funktionerne $F(Z)$ og $G(Z)$ begge er kontinuerke i Punktet Z_0 , da er Funktionerne $F(Z) + G(Z)$, $F(Z) - G(Z)$, $F(Z) \cdot G(Z)$ ligeledes kontinuerke i dette Punkt og at det samme gælder om Funktionen $F(Z) : G(Z)$, saafremt blot $G(Z_0) \neq 0$ (hvad der naturligvis medfører, at den kontinuerke Funktion $G(Z)$ ligeledes er $\neq 0$ i en vis Omegn af Punktet Z_0).

Ekse. I det Funktionerne $F(Z) = K$, hvor K er en vilkaarlig kompleks Konstant, og $G(Z) = Z$ ijerensynlig er kontinuerke i hele den komplekse Plan (d. v. s. er kontinuerke for enhver Værdi af Z), følger det umiddelbart ud fra de foregaaende Sætninger, at ethvert Polynomium $P(Z)$ er kontinueret i hele den

komplekse Plan, og at enhver brudløs rational Funktion $P(Z): Q(Z)$ er kontinuert for enhver Værdi af Z med Undtagelse af Nævnerpolynomiets Nulpunkter; thi disse Funktioner $P(Z)$ og $Q(Z): Q(Z)$ opbygges jo ud fra Funktionerne $F(Z) = K$ og $G(Z) = Z$ ved blotte rationale Regnesoperationer.

Man beviser endvidere umiddelbart (ganske som ved Funktioner af reelle Variable), at en kontinuert Funktion af en kontinuert Funktion paany er kontinuert; d. v. s. i nøjagtig Formulering, at dersom $U = F(Z)$ er kontinuert i Punktet Z_0 og $Y = G(U)$ er kontinuert i det til Z_0 svarende Punkt $U_0 = F(Z_0)$, da vil den ved Ligningerne $Y = G(U)$, $U = F(Z)$ indirekte givne Funktion, altsaa Funktionen $Y = G(F(Z))$, ligeledes være kontinuert i Punktet Z_0 . Endelig nævner vi, at dersom $F(Z)$ er kontinuert i Punktet Z_0 , vil det samme gælde om Funktionen $|F(Z)|$; thi af $F(Z) \rightarrow F(Z_0)$ følger jo $|F(Z)| \rightarrow |F(Z_0)|$.

Ekse. Idet ethvert Polynomium $P(Z)$ er kontinuert i hele den komplekse Plan, vil Polynomiets numeriske Værdi $|P(Z)|$ ligeledes være det.

Vi tilføjer at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at den komplekse Funktion $F(Z) = F(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ er kontinuert i Punktet $Z_0 = x_0 + iy_0$, bestaar deri, at de to reelle Funktioner $u(x,y)$ og $v(x,y)$ af det reelle Variabelpar (x,y) begge er kontinuerte i Punktet (x_0, y_0) ; thi Ligningen $\lim_{Z \rightarrow Z_0} F(Z) = F(Z_0)$ er jo ensbetydende med de to Ligninger $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x,y) = u(x_0, y_0)$ og $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x,y) = v(x_0, y_0)$.

16. Algebraens Fundamentalsætning. Lad

$$(1) \quad P(Z) = Z^n + A_{n-1}Z^{n-1} + \dots + A_1Z + A_0.$$

være et vilkaarligt egentligt Polynomium i den komplekse Variable $Z = x + iy$, hvis Grad n er ≥ 1 , og hvori vi for Simpelteds Skyld har antaget, at Koefficienten til Z^n er lig med 1. Vi skal da bevise den allerede tidligere nævnte Hovedsætning, at ethvert saadant Polynomium altid (og som vist i 5) paa kun een Maade kan opløses i n Faktorer af 1^{ste} Grad, d. v. s. kan skrives paa Formen

$$P(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2) \dots (Z - Z_n),$$

hvor $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ er komplekse Konstanter, med andre Ord, at ethvert egentligt Polynomium af n te Grad har netop n (ens eller forskellige) Rødder.

Beweis. Vi begynder med at bemærke, at det i øjensynligt er tilstrækkeligt at bevise, at ethvert egentligt Polynomium (af mindst 1^{ste} Grad) har mindst een Rod, altsaa at ethvert saadant Polynomium kan skrives som Produktet af en linear Funktion og et nyt egentligt Polynomium. Thi er $P(Z)$ et vilkaarligt egentligt Polynomium af n te Grad, finder vi ved $n-1$ paa hinanden følgende Omvendelser af den sidstnævnte Sætning

$$P(Z) = (Z - Z_1)P_1(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2)P_2(Z) = \dots = (Z - Z_1)(Z - Z_2) \dots (Z - Z_n)P_n(Z),$$

hvor $P_1(Z), P_2(Z), \dots, P_n(Z) (= 1)$ er egentlige Polynomier af henholdsvis Graderne $n-1, n-2, \dots, 0$.

Det drejer sig altsaa om at bevise, at der til ethvert egentligt Polynomium $P(Z) = u(x, y) + iv(x, y)$, hvis Grad er > 0 , findes (mindst) et Punkt $Z_1 = x_1 + iy_1$, for hvilket $P(Z_1) = 0$. Vi betragter hertil Polynomiets numeriske Verdi, altsaa Funk

tionen $|P(Z)| = |P(x+iy)| = \sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2} = Q(x,y)$, og skal om denne i hele XY -Planen definerede reelle, ikke negative, Funktion $Q(x,y)$ bevise, at den antager Værdien 0 i mindst et Punkt (x_2, y_2) . Vi bemærker hertil for det første, at idet Funktionen $Q(x,y)$ er kontinuert i hele XY -Planen og opfylder Betingelsen $Q(x,y) = |P(Z)| \rightarrow \infty$ for $x = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty$, vil den (som vist i Punkt II, 64) have en mindste Værdi, d. v. s. der findes (mindst) et saadant Punkt (x_2, y_2) , at Uligheden $Q(x,y) \geq Q(x_2, y_2)$ er opfyldt for alle $(x,y) \neq (x_2, y_2)$. Om dette Minimumspunkt (x_2, y_2) vil vi nu vise, at det er et saadant Punkt, som vi søger, altsaa, at $Q(x_2, y_2) = 0$, dette følger ud fra en i 12 bevist Hjælpesætning om Polynomier, i Følge hvilken vi, dersom $Q(x_2, y_2) = |P(x_2+iy_2)|$ var > 0 , kunde bestemme et andet Punkt (x_2, y_2) saaledes, at $Q(x_2, y_2) = |P(x_2+iy_2)|$ var $< |P(x_2+iy_2)| = Q(x_2, y_2)$, hvad der jo strider mod den for alle $(x,y) \neq (x_2, y_2)$ gyldige Ulighed $Q(x,y) \geq Q(x_2, y_2)$. Hermed er Algebrens Fundamentalsætning bevist.

Ekse I det Tilfælde, hvor Polynomiet $P(Z)$ er af 2^{den} Grad, eller hvor det har Formen $P(Z) = Z^2 + I_0$, har vi allerede tidligere bevist Sætningens Rigtighed, idet vi jo i disse specielle Tilfælde var i Stand til direkte at løse Ligningen $P(Z) = 0$ og angive Formler for Rodderne.

Vi fremhæver særlig det Tilfælde, hvor Polynomiet (1) er reeltalligt, hvor altsaa alle Koefficienterne $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ er reelle Konstanter. Om et saadant Polynomium har vi i 5 bevist, at det, dersom det har den komplekse Rod $\alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) ligeledes har det konjugerede Tal $\alpha - i\beta$ til Rod, samt at to saadanne konjugerede Rodder $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ er lige ofte Rod i Polynomiet. Her antager Polynomiet $P(Z)$ altsaa ved Sönderdelingen Formen

$$(Z-a_1)^{m_1} (Z-a_2)^{m_2} \dots (Z-(\alpha_1+i\beta_1))^{m_{2k-1}} (Z-(\alpha_1-i\beta_1))^{m_{2k}} \dots (Z-(\alpha_2+i\beta_2))^{m_{2k-1}} (Z-(\alpha_2-i\beta_2))^{m_{2k}} \dots,$$

hvor $a_1, a_2, \dots$ er de reelle Rodder, medens $(\alpha_1+i\beta_1), (\alpha_1-i\beta_1); (\alpha_2+i\beta_2), (\alpha_2-i\beta_2); \dots$ er de konjugerede komplekse Rodpar. Idet $(Z-(\alpha+i\beta))(Z-(\alpha-i\beta)) = (Z-\alpha)^2 + \beta^2$, kan Tønderdelingen ogsaa skrives saaledes:

$$P(Z) = (Z-a_1)^{m_1} (Z-a_2)^{m_2} \dots ((Z-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{m_{2k-1}} \dots ((Z-\alpha_2)^2 + \beta_2^2)^{m_{2k}} \dots$$

Opfatter vi her Z ikke som en kompleks, men som en reel Variabel, har vi saaledes faaet bevist følgende, allerede i et tidligere Afsnit omtalte, Hovedsætning om reelle Polynomier, d. v. s. om Polynomier, hvori saavel Koefficienter som Variabel er reelle Størrelser: ethvert reelt Polynomium kan opløses i et Produkt af reelle Faktorer, af hvilke nogle er Polynomier af 1^{ste} Grad, medens de øvrige er opløselige Polynomier af 2^{den} Grad. Vi tilføjer til Orientering, at skønt denne sidste Sætning jo udelukkende handler om reelle Tal, har man dog ikke kunnet bevise den, saalange man forblev indenfor det reelle Talomraade, men Beviset er først lykkedes, efter at man havde fundet paa at indføre det komplekse Talbegreb og (som ovenfor) undervejs i Beviset lægge dette Talbegreb til Grund; dette Forhold hænger naturligvis nøje sammen med, at den virkelig fuldstændig simple og almen gyldige Sætning (nemlig Abels Brauers Fundamentalsætning om, at ethvert Polynomium kan opløses "til Bunds") jo kun gælder indenfor det komplekse Talomraade.

Eks. Af den ovennævnte Sætning om reelle Polynomiers Opløselighed i reelle Faktorer fremgaar specielt, at ethvert

reelt Polynomium af slige Grad er deleligt med mindst et reelt Polynomium af 1^{ste} Grad, altsaa har mindst een reel Rod. Vi minder os, at vi for denne specielle Sætning allerede tidligere (Afsnit II 23) har ført et direkte Bevis indfor det reelle Talomraade.

17. Dekomposition af en egte brudde rational Funktion.
Lad $P(Z):Q(Z)$ være en vilkaarlig egte brudde rational Funktion, om hvilken vi naturligt vil antage, at Tæller og Nævner ingen fælles Nulpunkter har, idet fælles Faktorer tænkes bortdivideret. Endvidere vil vi tænke os, at Nævnepolynomiet $Q(Z)$ har sin højeste Koefficient lig med 1, saaledes at det ved Oplosning i lineære Faktorer faar Formen

$$Q(Z) = (Z-A)^m (Z-B)^m \dots (Z-D)^p,$$

hvor de (indbyrdes forskellige) komplekse Tal $A, B, \dots, D$ er Polynomiets Rødder. Vi vil bevise den vigtige Sætning, at den givne egte brudte rationale Funktion $P(Z):Q(Z)$ indenfor hele sit Definitionsomraade, d. v. s. for alle $Z \neq A, B, \dots, D$, kan skrives paa Form

$$(2) \left(\frac{K_m}{(Z-A)^m} + \frac{K_{m-1}}{(Z-A)^{m-1}} + \dots + \frac{K_1}{Z-A} \right) + \left(\frac{L_m}{(Z-B)^m} + \frac{L_{m-1}}{(Z-B)^{m-1}} + \dots + \frac{L_1}{Z-B} \right) + \dots,$$

hvor Tællere $K_1, \dots, K_m; L_1, \dots, L_m, \dots$ er (komplekse) Konstanter, af hvilke i hvert Fald $K_m, L_m, \dots$ er $\neq 0$. Vi tilføjer, at vi i 16 har vist, at en saadan Dekomposition højt er mulig paa een Maade.

Ved Beviset for denne Sætning betragter vi Brøken Forhold, naar Z nærmer sig til et af Nævnepolynomiets Nulpunkter, f. Eks. naar $Z \rightarrow A$, og skriver Brøken paa Form

$$\frac{P(Z)}{Q(Z)} = \frac{P(Z)}{(Z-A)^m Q_1(Z)}$$

hvor $Q_1(Z) = (Z-B)^m \dots (Z-D)^p$. Idet det for $Z \rightarrow A$ gælder, at Nævneren $Q(Z) \rightarrow 0$, medens Tælleren $P(Z) \rightarrow P(A) \neq 0$, vil saabenbart $P(Z):Q(Z) \rightarrow \infty$ for $Z \rightarrow A$. Nøjagtligere indser vi, idet $P(Z):Q_1(Z) \rightarrow P(A):Q_1(A)$, at Brøken $P(Z):Q(Z)$ for $Z \rightarrow A$ forholder sig „omtrent“ som $H_m:(Z-A)^m$, hvor $H_m = P(A):Q_1(A)$, og det ligger derfor nær at betragte Differensen $P(Z):Q(Z) - H_m:(Z-A)^m$. Vi finder herfor Udtrykket

$$\frac{P(Z)}{Q(Z)} - \frac{H_m}{(Z-A)^m} = \frac{P(Z) - \frac{P(A)}{Q_1(A)} \cdot Q_1(Z)}{(Z-A)^m Q_1(Z)}$$

I den sidste Brøk bliver saavel Tæller- som Nævnerpolynomiet et Null for $Z = A$, og vi kan derfor af Tæller og Nævner bortsdividere en (eller muligvis flere) Faktorer $Z-A$, hvorefter vi finder

$$\frac{P(Z)}{Q(Z)} = \frac{H_m}{(Z-A)^m} + \frac{P_1(Z)}{(Z-A)^{m-n} Q_1(Z)} \quad (m > n).$$

Her er den sidste Brøk paaany (ligesom $P(Z):Q(Z)$) en egte brudt den rational Funktion (idet den jo er fremkommen som Differens mellem to egne brudne rationale Funktioner) og dens Nævner er fremgaaet af det oprindelige Nævnerpolynomium $Q(Z)$ ved at slette en eller flere af Faktorerne $Z-A$. — Fortsætter vi paa denne Maade, indtil alle Faktorer $Z-A$ er bortskaffet af Nævneren, og anvender vi derefter den samme Methode til at bortskaffe de øvrige Faktorer i Nævneren, finder vi sluttelig $P(Z):Q(Z)$ skrevet paa Formen

$$\frac{P(Z)}{Q(Z)} = \frac{H_m}{(Z-A)^m} + \dots + \frac{H_2}{Z-A} + \frac{L_m}{(Z-B)^m} + \dots + \frac{L_2}{Z-B} + \dots$$

Hermed er den opstillede Løsning bevist.

Ligesom før betragter vi særlig det Tilfælde, hvor de givne Polynomier $P(Z)$ og $Q(Z)$ begge er reeltallige Polynomier. Vi kan i dette Tilfælde bevise, at dersom a er en reel Rod i Nærmestpolynomiet $Q(Z)$, vil i den Del af Dekompositionsudtrykket, der hidrører fra denne Rod, altsaa Udtrykket

$$\frac{H_m}{(Z-a)^m} + \frac{H_{m-1}}{(Z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{H_2}{Z-a} ,$$

alle Tellerkonstanterne være reelle Tal, samt endvidere, at i den Del af Dekompositionsudtrykket, der hidrører fra to indbyrdes konjugerede komplekse Rodder $\alpha + i\beta$ og $\bar{\alpha} - i\beta$, altsaa Udtrykket

$$\frac{R_m}{(Z-A)^m} + \frac{R_{m-1}}{(Z-A)^{m-1}} + \dots + \frac{R_2}{Z-A} + \frac{L_m}{(Z-\bar{A})^m} + \frac{L_{m-1}}{(Z-\bar{A})^{m-1}} + \dots + \frac{L_2}{Z-\bar{A}} ,$$

vil tilsvarende Tellerkonstanter være indbyrdes konjugerede, d. v. s. $L_m = \bar{R}_m$, $L_{m-1} = \bar{R}_{m-1}$, $\dots$, $L_2 = \bar{R}_2$. For at bevise dette bemærker vi først, at det nye Udtryk (2^a), der fremkommer af det fundne Dekompositionsudtryk (2) for Brøken $P(Z):Q(Z)$ ved overalt i dette (saavel i Tællere som Nævne) at erstatte de indgaaende Konstanter med deres konjugerede Værdier, øjensynlig ligesaavel som (2) vil være et Dekompositionsudtryk for den givne Funktion $P(Z):Q(Z)$; thi idet den Brøk $P_1(Z):Q_1(Z)$, der fremkommer ved elementær Sammentrækning af dette nye Udtryk (2^a), øjensynlig kun afviger fra den givne Brøk $P(Z):Q(Z)$ (der jo fremkommer ved elementær Sam-

menstrækning af det oprindelige Dekompositionsudtryk) derved, at alle de indgaaende Konstanter (Koefficienter) ombyttes med deres konjugerede Værdier, maa Broken $P(Z):Q(Z)$ være identisk med Broken $P(\bar{Z}):Q(\bar{Z})$, da denne sidste Brok jo forbliver uforandret, naar de indgaaende Konstanter erstattes med deres konjugerede Værdier, fordi disse Konstanter (i Folge Forudsætning) alle er reelle. — Udfrå denne Bemærkning følger nu umiddelbart Rigtigheden af den ovenstaaende Paastand om Tællerkonstanterne K, R, S , idet vi gør Brug af Sætningen om Dekompositionens Entydighed; thi de to for omtalte Udtryk (2) og (2^a) er jo begge Dekompositionsudtryk for Broken $P(Z):Q(Z)$, og maa derfor i Folge Entydighedssætningen være (formelt) identiske, men idet (2^a) er fremkommet af (2) ved at erstatte de indgaaende Konstanter med deres konjugerede Værdier, er Betingelsen for at (2) og (2^a) er identiske åbenbart netop den, at ¹⁾ Konstanterne K alle er reelle og ²⁾ at tilsvarende Konstanter R og S er indbyrdes konjugerede, idet jo i dette (og kun i dette) Tilfælde Brokerne $\frac{K_p}{(Z-a)^p}$ gaar over i sig selv, medens to Broker som $\frac{R_q}{(Z-\beta)^q}$ og $\frac{S_q}{(Z-\bar{\beta})^q}$ ombyttes med hinanden ved den omhandlede Erstatning af Konstanterne med deres konjugerede Værdier.

Vi afslutter vor Behandling af ægte brudne rationale Funktioners Dekomposition med at bevise en vigtig Sætning, som vi allerede tidligere (ved Integration af brudne rationale Funktioner) har gjort Brug af, og som viser, hvorledes man i det Tilfælde, hvor Tæller- og Nævnerpolynomiet er reeltalligt, kan sonderdele Broken $P(Z):Q(Z)$ ved en noget andetartet Dekomposition end den ovenfor betragtede, saaledes at alle de i Ernderesultatet indgaaende Konstanter bliver reelle Tal. Vi vil nemlig bevise, at dersom $\beta = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$)

og $\bar{I} = \alpha - i\beta$ er indbyrdes konjugerede Rødder (og begge m -dobbelte Rødder) i Kernepolynomiet $Q(Z)$, da kan den Del af det tidligere fundne Dekompositionsudtryk, der hidrører fra dette Rodpar, altså et Udtryk som

$$(3) \quad \frac{P_m}{(Z-I)^m} + \dots + \frac{P_2}{Z-I} + \frac{\bar{P}_m}{(Z-\bar{I})^m} + \dots + \frac{\bar{P}_2}{Z-\bar{I}},$$

ogsaa skrives paa Formen

$$(4) \quad \frac{\pi_m Z + s_m}{((Z-\alpha)^2 + \beta^2)^m} + \frac{\pi_{m-1} Z + s_{m-1}}{((Z-\alpha)^2 + \beta^2)^{m-1}} + \dots + \frac{\pi_2 Z + s_2}{(Z-\alpha)^2 + \beta^2},$$

hvor de lineære Polynomier i Tællerne har reelle Koefficienter.

For at bevise denne Sætning bemærker vi for det første, at vi ved Sammenbrækning af Udtrykket (3) kommer til en brudten rational Funktion

$$\frac{P_1(Z)}{(Z-I)^m (Z-\bar{I})^m} = \frac{P_2(Z)}{((Z-\alpha)^2 + \beta^2)^m},$$

hvor Tællerpolynomiet $P_1(Z)$ er af højst $(2m-1)^{te}$ Grad (fordi Brøken i Følge sin Konstruktion jo er en egte brudten rational Funktion), og hvor $P_2(Z)$ er et reeltalligt Polynomium (hvad man viser ved en ganske lignende Betragtning som ovenfor, idet man benytter, at Tællerkonstanterne i (3) er indbyrdes konjugerede). Dette Tællerpolynomium $P_1(Z)$ dividerer vi med det reeltallige 2^{de} Grads Polynomium $(Z-\alpha)^2 + \beta^2$, d. v. s. vi skriver det paa Formen

$$P_1(Z) = ((Z-\alpha)^2 + \beta^2) P_2(Z) + \pi_m Z + s_m,$$

hvor $P_2(Z)$ er et reeltalligt Polynomium af højst $(2m-3)^{te}$ Grad og α_m, β_m reelle Konstanter. Herved finder vi

$$\begin{aligned} \frac{P_2(Z)}{((Z-\alpha)^2+\beta^2)^m} &= \frac{1}{((Z-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} \cdot \frac{P_2(Z)}{(Z-\alpha)^2+\beta^2} \\ &= \frac{1}{((Z-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} \left(P_2(Z) + \frac{\alpha_m Z + \beta_m}{(Z-\alpha)^2+\beta^2} \right) = \frac{\alpha_m Z + \beta_m}{((Z-\alpha)^2+\beta^2)^m} + \frac{P_2(Z)}{((Z-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} \end{aligned}$$

Anvender vi nu den samme Metode paa den sidste Brøk, og fortsætter vi paa denne Maade, kommer vi ogsynlig slutte-
lig til den ønskede Formel (4).

18. Ligelig Konvergens. Lad $F_1(Z), F_2(Z), \dots, F_n(Z), \dots$ være en Følge af komplekse Funktioner, der alle er defineret indenfor et og samme Omraade Ω i den komplekse Plan. Vi siger om denne Følge, at den indenfor Omraadet Ω konvergerer mod en Grænsfunktion $F(Z)$, dersom det for ethvert fastholdt Z indenfor Ω gælder, at Talfølgen $F_1(Z), \dots, F_n(Z), \dots$ er konvergent med Grænserværdien $F(Z)$. Om en sådan konvergent Funktionsfølge siger vi endvidere, at den indenfor Omraadet Ω konvergerer ligelig mod sin Grænsfunktion $F(Z)$, eller at Differensen $F(Z) - F_n(Z)$ gaar ligelig mod 0 for $n \rightarrow \infty$, dersom det til ethvert givet $\varepsilon > 0$ er muligt at bestemme et af Z uafhængigt helt Tal $N = N(\varepsilon)$, saaledes at Uligheden

$$|F(Z) - F_n(Z)| < \varepsilon$$

for ethvert $n \geq N$ er opfyldt indenfor hele Omraadet Ω .

En $U_1(Z) + U_2(Z) + \dots + U_n(Z) + \dots$ en uendelig Række, hvis enkelte Led alle er Funktioner af den komplekse Variable Z indenfor et Omraade Ω , siger vi om denne Række, at

den er konvergent indenfor Ω , hvis den er konvergent for enhver fastholdt Værdi af Z indenfor Ω , og vi siger end videre om en saadan indenfor Ω konvergent Række, at den er ligelig konvergent indenfor Ω , hvis den af Afsnitene $S_1(Z), \dots, S_n(Z), \dots$ dannede Funktionsfølge konvergerer ligelig mod Rækkesummen $S(Z)$, eller (anderledes udtrykt) hvis Restleddet $R_n(Z) = S(Z) - S_n(Z)$ konvergerer ligeligt mod 0 indenfor Ω .

Man beviser, nøjagtigt som indenfor Læren om reelle Funktionsfølger, at dersom en kompleks Funktionsfølge $F_1(Z), \dots, F_n(Z), \dots$, hvis enkelte Led er kontinuerlige Funktioner af Z indenfor et Omraade Ω , i dette Omraade konvergerer ligeligt mod en Grænsfunktion $F(Z)$, da vil denne Grænsfunktion $F(Z)$ (ligesom de enkelte Tilræknelsesfunktioner $F_n(Z)$) være kontinuerlig indenfor Ω . Heraf følger atter, at Summen $S(Z)$ af en indenfor et Omraade Ω ligelig konvergent Række $U_1(Z) + U_2(Z) + \dots + U_n(Z) + \dots$, hvis enkelte Led er kontinuerlige indenfor Ω , selv vil være kontinuerlig indenfor Ω .

19. Potensrækker. Ved en Potensrække i den komplekse Variable Z forstås en uendelig Række af Formen

$$A_0 + A_1 Z + A_2 Z^2 + \dots + A_n Z^n + \dots,$$

hvor Koefficienterne $A_0, A_1, \dots$ er givne komplekse Tal. Saa som indenfor Læren om reelle Variable beviser man her, at dersom en Potensrække er konvergent for en vis (kompleks) Værdi $Z_0 \neq 0$ af den Variable, da er den ligesledes konvergent, og endda absolut konvergent, for ethvert Z , for hvilket $|Z| < |Z_0|$, d. v. s. i ethvert Punkt Z , der lig-

ger indenfor en Cirkel med Centrum i 0 og Radius $|Z|$.
 Betegner vi oven Grænse for de reelle positive Værdier af Z ,
 for hvilke Rækken er konvergent, med λ , indser man umid-
 delbart ud fra den foregaaende Løsning, at Rækken er kon-
vergent, endda absolut konvergent, indenfor hele Cirklen
 $|Z| < \lambda$, divergent i alle Punkter udenfor denne Cirkel. Det
 tal λ kaldes Potensrækkes Konvergenradius, og Cirklen
 $|Z| = \lambda$ kaldes Potensrækkes Konvergenscirkel. I det specielle
 Tilfælde, hvor Potensrækken har litter reelle Koefficienter,
 falder Potensrækkes Konvergenradius λ sjensynlig sammen
 med det Tal, som vi i Afsnit III, hvor vi kun beskæftigede
 os med reelle Størrelser, kaldte Potensrækkes Konvergenstal.
 Vi tilføjer, at det naturligvis kan indtræffe, at en Potens-
 rækkes Konvergenradius λ er 0, nemlig hvis Rækken kun
 er konvergent i det ene Punkt $Z=0$, eller at Konvergenradi-
 us er ∞ , d. v. s. at Rækken er overalt konvergent.

Ved Hjælp af en Majorantbrække beviser man endvidere,
at en Potensrække er ligelig konvergent indenfor enhver Cir-
kel, der ligger helt indenfor Konvergenscirklen, altsaa f. Eks.
indenfor enhver Cirkel $|Z| < \mu$, hvor $\mu < \lambda$. Af denne sidste
 Løsning følger atter, at den ved en Potensrække indenfor
sin Konvergenscirkel fremstillede Funktion $F(Z)$ er konti-
nuert indenfor hele denne Cirkel. Thi er Z_0 et vilkaar-
 ligt Punkt indenfor Konvergenscirklen, kan vi jo altid
 omkring dette Punkt lægge en Cirkel C , der ligger helt
 indenfor Konvergenscirklen, og idet Potensrækken er lige-
 lig konvergent indenfor denne Cirkel C og de enkelte
 Led kontinuerke Funktioner, vil Summen $F(Z)$ ligeledes
 være kontinueret indenfor Cirklen C , altsaa specielt i
 Punktet Z_0 .

Lad $F(Z) = A_0 + A_1 Z + \dots$ være en vilkaarlig Potensrække, hvis Konvergensradius λ er > 0 . Idet den ved Rækken fremstillede Funktion $F(Z)$ er kontinuert i Punktet 0, og idet $F(0) = A_0$, gælder der for $Z \rightarrow 0$ Grænseligningen $F(Z) \rightarrow A_0$ eller, anderledes skrevet, $F(Z) = A_0 + o(1)$. Heraf udleder vi (ganske som ved Potensrækker af en reel Variabel), at der for ethvert fastholdt positivt helt Tal n og $Z \rightarrow 0$ gælder Grænseligningen

$$\begin{aligned} F(Z) &= A_0 + A_1 Z + \dots + A_{n-1} Z^{n-1} + Z^n (A_n + A_{n+1} Z + \dots) \\ &= A_0 + A_1 Z + \dots + A_{n-1} Z^{n-1} + Z^n (A_n + o(1)) \\ &= A_0 + A_1 Z + \dots + A_{n-1} Z^{n-1} + A_n Z^n + o(Z^n), \end{aligned}$$

hvor x som sædvanlig betegner Modulen $|Z|$. Af denne vigtige Grænseligning $F(Z) = A_0 + \dots + A_n Z^n + o(x^n)$ følger atter (stadig ganske som ved Potensrækker af en reel Variabel) Potensrækkenes Gæltidighedsætning, der udsiger, at dersom en kompleks Funktion $F(Z)$ indefor en Cirkel $|Z| < \alpha$ overhovedet kan fremstilles ved en Potensrække, kan dette kun ske paa en Maade.

Det er klart, at man ved Addition af to Potensrækker med henholdsvis Limmene $F_1(Z)$ og $F_2(Z)$ paany kommer til en Potensrække, der indefor den mindste af to oprindelige Potensrækkes Konvergenscirkler er konvergent og fremstiller Funktionen $F_1(Z) + F_2(Z)$. Ogsaa Sætningen om Multiplikation af to Potensrækker gælder imidlertid ligesaa vel indefor det komplekse Talomraade, som i sin Tid indefor det reelle Talomraade, idet Potensrækkerne jo begge er absolut konvergente indefor den mindste af de to Konvergenscirkler, og idet Multiplikationssætningen for uende-

lige Rækker jo gælder for hvilkesomhelst absolut konvergente Rækker, hvad enten de har reelle eller komplekse Led.

I det følgende skal vi studere nogle specielle Potensrækker, der alle har reelle Koefficienter. Om en saadan Potensrække med lutter reelle Koefficienter $F(Z) = A_0 + A_1 Z + \dots$ gælder det saubent, at hvis Punkket Z_0 , og folgelig ogsaa Punkket $\bar{Z}_0$, er beliggende indenfor Konvergensevirklen $|Z| < \lambda$, vil Funktionsværdierne $F(Z_0)$ og $F(\bar{Z}_0)$ være indbyrdes konjugerede, thi idet tilsvarende Led i de to Rækker $A_0 + A_1 Z_0 + A_2 Z_0^2 + \dots$ og $A_0 + A_1 \bar{Z}_0 + A_2 \bar{Z}_0^2 + \dots$ er indbyrdes konjugerede, er Rækkesummene $F(Z_0)$ og $F(\bar{Z}_0)$ det ligeledes.

20. Funktionen e^Z . Indenfor Læren om reelle Variable blev det vist, at Potensrækken i den reelle Variable x

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

harde Konvergenstallet $\lambda = \infty$ og indenfor hele sit Konvergenstervial $-\infty < x < \infty$ fremstillede Funktionen e^x . Vi betragter nu Potensrækken

$$1 + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \dots + \frac{Z^n}{n!} + \dots,$$

hvor Z er en kompleks Variable; idet denne Potensrække har Konvergenstallet ∞ , har den ligeledes Konvergenradius ∞ , d. v. s. den er konvergent, og endda absolut konvergent, i hele den komplekse Plan. Vi fastsætter ved Definition, at den ved denne Potensrække fremstillede Funktion af Z skal betegnes med e^Z . Hermed er Eksponentialfunktionens Definition udstrakt fra kun at gælde det Tilfælde, hvor den uafhængige Variable er reel til at omfatte det

Tilfælde, hvor den uafhængige Variable Z er en indskrænket kompleks Variable, og idet e^Z er defineret som Summen af en (overalt konvergent) Potensrække følger det umiddelbart, at Eksponentialfunktionen e^Z er kontinuert i hele den komplekse Plan.

Af Eksponentialfunktionens Definition ved Hjælp af en Potensrække følger umiddelbart, at der for ethvert fastholdt n og $Z \rightarrow 0$ gælder Grænseligningen

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \dots + \frac{Z^n}{n!} + o(|Z|^n),$$

specielt finder vi altsaa (for $n=1$) Grænseligningen

$$e^Z = 1 + Z + o(|Z|)$$

eller anderledes skrevet

$$\lim_{Z \rightarrow 0} \frac{e^Z - 1}{Z} = 1,$$

af hvilket Resultat vi senere vil gøre Brug.

Lader vi i Definitionsligningen for e^Z den Variable Z være rent imaginær, d. v. s. sætter vi $Z = 0 + iy = iy$, finder vi den vigtige Ligning

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} \dots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \dots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \dots\right) = \cos y + i \sin y.$$

Eks. $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$

Udtrykket $\cos y + i \sin y$, som vi tidligere har truffet paa ved Fremstillingen af et komplekst Tal ved Hjælp af Modulus og Argument, kan altsaa betegnes med e^{iy} . Et komplekst Tal $a + bi$

med Modulus $r = |z|$ og Argument φ kan følgende skrives paa Formen $z = r \cdot e^{i\varphi}$; Faktoren $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = \frac{z}{|z|}$ betegnes ved sign. z og kaldes z 's Fortegn. Fortegnet sign. z for et komplekst Tal $z \neq 0$ er altsaa det komplekse Tal med Modulen 1, som afbildes i det Punkt paa Enhedscircelen, hvori denne skæres af Halvlinien Oz ; benytter vi Vektorforestillinger af komplekse Tal, bestemmes sign. z altsaa ved en Vektor af Længden 1, ensrettet med den Vektor, der bestemmer selve Tallet z . I Modsætning til hvad der finder Sted ved de reelle Tal, hvor vi jo kun taler om de to Fortegn $+$ og $-$, er der saaledes ved de komplekse Tal Tale om uendelig mange forskellige Fortegn, svarende til de forskellige Retninger i den komplekse Plan. To komplekse Tal har da og kun da samme Fortegn, naar de ligger paa samme Halvlinie ud fra O , modsat Fortegn, naar de ligger paa to modsatte Halvlinier ud fra O . Man ser umiddelbart Rigtigheden af de fra den elementære Aritmetik bekendte Regler: Adderes to Tal med samme Fortegn, faar Summen ligeledes dette Fortegn; adderes to Tal med modsat Fortegn, faar Summen det numerisk største Fortegn. To komplekse Tal multipliceres ved at multiplicere de numeriske Værdier for sig og Fortegnene for sig.

Eks. Idet Tallet $1+i$ har Modulen $\sqrt{2}$ og Argumentet $\frac{\pi}{4}$, kan det skrives paa Formen $1+i = \sqrt{2} \cdot \text{sign.}(1+i) = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Vi vil bevise, at den Funktionsligning for Eksponentialfunktionen, der er fundamental for Studiet af denne Funktion indenfor det reelle Talomraade, gælder uforandret indenfor det komplekse Talomraade, d. v. s. at der, idet z_1 og z_2 er to vilkaarlige komplekse Tal, gælder Ligningen $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. Rigtigheden heraf følger umiddelbart

(udfra Eksponentialfunktionens Definition) ved Multiplikation af de to absolut konvergente Rækker

$$e^{Z_1} = 1 + \frac{Z_1}{1!} + \frac{Z_1^2}{2!} + \dots$$

og

$$e^{Z_2} = 1 + \frac{Z_2}{1!} + \frac{Z_2^2}{2!} + \dots$$

Her herved finder vi jo netop

$$e^{Z_1} \cdot e^{Z_2} = 1 + \frac{Z_1 + Z_2}{1!} + \frac{(Z_1 + Z_2)^2}{2!} + \dots + \frac{(Z_1 + Z_2)^n}{n!} + \dots = e^{Z_1 + Z_2}.$$

Lad $Z = x + iy$ være et vilkårligt komplekst Tal. Vi har da

$$e^Z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

eller

$$|e^Z| = e^x, \text{ sgu } e^Z = e^{iy},$$

d. v. s. Tallet e^{x+iy} har Modulen e^x , Argumentet y og For-
tegnet e^{iy} .

Eks. $e^{3+i\frac{\pi}{4}} = e^3 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = e^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i).$

Ud fra Eksponentialfunktionens Funktionallikning og det (ved Benyttelse af denne Ligning afledede) Udtryk for e^{x+iy} ved Hjælp af kendte Funktioner af de reelle Variabler x og y vil vi drage nogle vigtige Slutninger. Vi bemærker for det første, at Eksponentialfunktionens e^Z er periodisk med Perioden $2\pi i$, idet der jo for ethvert Z gælder Ligningen

$$e^{Z+2\pi i} = e^Z \cdot e^{2\pi i} = e^Z.$$

For at undersøge Eksponentialfunktionens behøver vi derfor blot at undersøge den indenfor en Skammel parallel

med de reelle Tals Akse og af Bredden 2π , f. Eks. indenfor Parallelstriimler $-\pi < y \leq \pi$ (se Fig. 15); thi deler vi Z -Planen

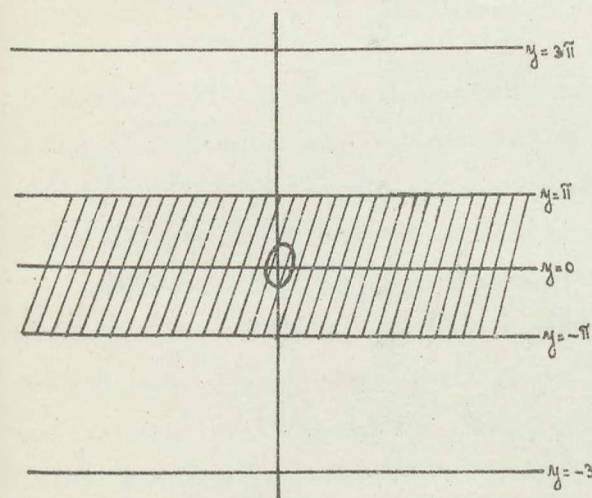


Fig. 15.

op i Strimler parallelle med x -aksen og af Bredden 2π , vil Eksponentialfunktionerne forholde sig „fuldstændig ens“ indenfor enhver af disse Parallelstriimler, idet Funktionen jo antager samme Værdi i to Punkter Z_1 og Z_2 , der ligger „lodret“ over hinanden med en Afstand, der er et helt Multiplum af 2π . End videre bemærker vi, at Funktionen e^Z er overalt $\neq 0$, idet der jo i ethvert Punkt

$Z = x + iy$ gælder Uligheden

$$|e^Z| = e^x > 0.$$

Derimod vil vi vise, at Eksponentialfunktionen antager enhver fra 0 forskellig Værdi, og at den antager den næste Gang indenfor enhver af de nævnte Parallelstriimler af Bredden 2π , f. Eks. indenfor Strimlen $-\pi < y \leq \pi$. Thi er A et vilkaarligt komplekst Tal $\neq 0$, og betegner vi dets Modul med r og et (vilkaarligt) af dets Argumenter med ν , altså $A = r \cdot e^{i\nu}$, er Ligningen

$$e^Z = e^{x+iy} = A = r \cdot e^{i\nu}$$

substantielt da og kun da tilfredsstillet, naar $x = l \cdot \pi$, $y = n + 2p\pi$,
altsaa

$$Z = l \cdot \pi + i(n + 2p\pi),$$

hvor Parameteren p er et vilkaarligt helt Tal; disse uendelig mange Værdier af Z har alle den samme reelle Del, nemlig $l \cdot \pi$, og ligger paa Liniern $x = l \cdot \pi$ med en indbyrdes Afstand af 2π , saaledes at der altsaa er en og kun en beliggende indenfor en Parallelstrimmel $y_0 < y \leq y_0 + 2\pi$.

21. Logarithmefunktionen. Indenfor det reelle Talomraade er Funktionen $x = l \cdot y$ defineret som den omvendte Funktion til Eksponentialfunktionen $y = e^x$, hvorved $l \cdot y$ blev en enslydig Funktion af den Variable y , defineret for $y > 0$. Paa tilsvarende Maade definerer vi indenfor det komplekse Talomraade Logarithmefunktionen $Z = \log W$ som den omvendte Funktion til Eksponentialfunktionen $W = e^Z$. Idet Eksponentialfunktionen e^Z antager enhver Værdi $\neq 0$, men ikke Værdien 0 selv, er den omvendte Funktion $Z = \log W$ defineret i hele den komplekse W -Plan med Undtagelse af Punktet 0, men denne Funktion $\log W$ bliver en uendelig liggydig Funktion af $W \neq 0$, idet der jo til ethvert $W \neq 0$ findes, ikke en, men uendelig mange Værdier af Z , for hvilke $e^Z = W$, nemlig alle Værdierne

$$Z = l \cdot |W| + i \arg(W),$$

hvilke Værdier afviger indbyrdes med hele Multipla af $2\pi i$. I mange Tilfælde er det imidlertid bekendt at fastlægge en bestemt af de uendelig mange Værdier for $Z = \log W$, man betegner da som Hovedværdien af $\log W$, og skriver

Log W, den Værdi af $\log W = \ln |W| + i \arg(W)$, hvis 2den Koordi-
nat er beliggende mellem Grænserne $-\pi$ (ekskl.) og $+\pi$ (inkl.),
altsaa den (enlydig bestemt) Løsning

$$Z = \ln |W| + i \operatorname{Arg}(W),$$

til Ligningen $e^Z = W$, der i Z-Planen er beliggende indenfor
Parallelstrikerne $-\pi < y \leq +\pi$. Herefter fores vi til at dele
den uendeliggyldige Funktion $\log W$ op i uendelig mange en-
lydige Funktioner

$$\dots, F_{-2}(W), F_{-1}(W), F_0(W), F_1(W), F_2(W), \dots,$$

hvor $F_0(W) = \operatorname{Log} W = \ln |W| + i \operatorname{Arg} W$, medens $F_q(W) = \operatorname{Log} W + 2q\pi i$
($q = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Eks. Idet Tallet $1+i\sqrt{3}$ har Modulen 2 og Argumentet $\frac{\pi}{3} + 2p\pi$,
finder vi $\log(1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2p\pi)$ og specielt $\operatorname{Log}(1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\frac{\pi}{3}$.

Eks. For et reelt positivt Tal A bliver $\log A = \ln A + 2p\pi i$,
 $\operatorname{Log} A = \ln A$. For et reelt negativt Tal A bliver $\log A = \ln |A| + (2p+1)\pi i$,
 $\operatorname{Log} A = \ln |A| + \pi i$.

Eks. Af Ligningen $e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1} \cdot e^{Z_2} = W_1 \cdot W_2$ følger (idet vi sæt-
ter $Z_1 = \log W_1$, $Z_2 = \log W_2$ og løser Ligningen bagfra)

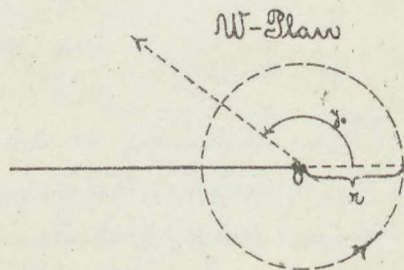
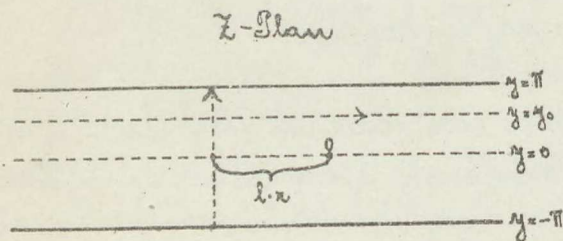
$$\log(W_1 \cdot W_2) = \log W_1 + \log W_2,$$

hvilken Ligning er at forstå saaledes, at idet $\log W_1$ og
 $\log W_2$ betegner vilkaarlig valgte af Logarithmefunktionens
Værdier, vil Summen $\log W_1 + \log W_2$ være en af
Værdierne for $\log(W_1 \cdot W_2)$. — Derimod gælder der (selv-
følgelig) ikke altid Ligningen $\operatorname{Log}(W_1 \cdot W_2) = \operatorname{Log} W_1 + \operatorname{Log} W_2$,

saaledes er jo f. Eks. $\text{Log}(-1) + \text{Log}(-1) = \pi i + \pi i = 2\pi i$ og ikke $= \text{Log}\{(-1)(-1)\} = \text{Log}(1) = 0$.

Eks. Af Ligningen $\log W_1 W_2 = \log W_1 + \log W_2$ følger specielt, idet vi sætter $W_1 = W$, $W_2 = \frac{1}{W}$, at der for $W \neq 0$ gælder Ligningen $\log \frac{1}{W} = -\log W$ (eller, om man vil Ligningen $\log \frac{1}{W} = -\log W + 2p\pi i$).

Ved den nærmere Undersøgelse af Funktionen $Z = \log W$ betragter vi (ganske som ved Behandlingen af Funktionerne $Z = \sqrt{W}$) den langs den negative Halvakse opskaaene W-Plan. Indenfor denne opskaaene Plan er Hovedværdien $\text{Log } W = \log |W| + i \text{Arg } W$ en kontinuerlig Funktion af W , idet jo saavel den reelle Del $\log |W|$ som Koefficienten til den rent imaginære Del $\text{Arg } W$ forandrer sig kontinuert med W , saalænge vi forbliver indenfor den opskaaene Plan (medens $\text{Log } W$ lider et pludseligt Spring paa $2\pi i$, naar W overskrider den negative Akse, idet jo $\text{Arg } W$ derved springer 2π). Ud fra Ligningerne $Z = \log |W| + i \text{Arg } W$, $W = e^Z$ følger endvidere, at Logarithmusens Hovedværdi $Z = \text{Log } W$ afbilder den opskaaene W-Plan eenenlydigt paa Parallelstriimlerne $-\pi < y < \pi$ over i Z-Planen (idet de to Rande af Imidlertid svarer til hver sin af Parallelstriimlens Begrænsningslinier $y = -\pi$ og $y = +\pi$). Til en ret Linie $y = y_0$ ($-\pi < y_0 < \pi$) i Z-Plan



men svarer der i W -Planen en Halvlinje ud fra 0 (se Fig. 16^a og 16^b), nemlig den, der bestemmes ved $W = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$, hvor x varierer fra $-\infty$ til $+\infty$, altsaa e^x fra 0 til ∞ , bevæger Linien $y = y_0$ i Z -Planen sig op igennem Parallelstriimler fra Stillingen $y = -\pi$ til Stillingen $y = +\pi$, vil den tilsvarende Halvlinje i den opskaarne W -Plan samtidig dreje sig 1 Gang rundt i positiv Omløbsretning fra Snittets „neder“ til Snittets „ovre“ Rand. Endvidere bemærker vi, at der ved Abbildningen $Z = \text{Log } W$ til en Cirkel i W -Planen med Centrum i 0 og Radius r ovre i Z -Planen svarer et ret Liniestykke af Længden 2π vinkelret paa den reelle Akse, nemlig Liniestykket $Z = h \cdot r + i v$ ($-\pi < v < \pi$), og lader vi i W -Planen Cirkelens Radius r vokse fra 0 til ∞ , vil ovre i Z -Planen det tilsvarende Liniestykkets Skæringspunkt $h \cdot r$ med den reelle Akse gennemløbe denne Akse fra $-\infty$ til $+\infty$. — Paa ganske tilsvarende Maade afbilder Funktionen $F_q(W) = \text{Log } W + 2\pi q i$ den opskaarne W -Plan eenenbydig paa Parallelstriimler $-\pi + 2q\pi < y < \pi + 2q\pi$, og de forskellige Parallelstriimler, der fremkommer paa denne Maade (svarende til $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), udfylder tilsammen hele Z -Planen.

Betragt vi sluttelig den opskaarne W -Plan, og lader vi Punkket W kredse omkring Nulpunktet, f. Eks. i positiv Retning gennemløbe en Cirkel omkring dette Punkt, vil derved (naar vi ikke tillader noget pludseligt Spring for Logarithmen) de forskellige „Grene“ af Logarithmefunktionen $\dots F_{-1}(W), F_0(W), F_1(W), \dots$ af sig selv gaa over i hinanden saaledes, at naar vi gaar ud fra Funktionsværdien $F_q(W)$ og lader W kredse netop 1 Gang i positiv Retning omkring $W = 0$, vil vi ende med Funktionsværdien $F_{q+1}(W)$ (idet Overgangen fra $F_q(W)$ til $F_{q+1}(W)$ sker i det Øjeblik

hvor W overskrider den negative Halvakse). Idet de uendelig mange Grene af Funktionen $\log W$ saaledes „hænger sammen“ i Punktet $W=0$ og gaar over i hinanden, naar W omkredser dette Punkt, siger man om $W=0$, at det er et Forgreningspunkt af uendelig høj Orden for den (uendeligtydige) Funktion $\log W$.

22. Funktionerne $\cos Z$ og $\sin Z$. Paa ganske lignende Maade, som vi udtrakke Eksponentialfunktionens Definition fra kun at gælde i det Tilfælde, hvor den uafhængige Variable var reel, til at omfatte det almindeligere Tilfælde, hvor den er en mindskranket kompleks Variabel, udvider vi Definitionerne af de trigonometriske Funktioner $\cos Z$ og $\sin Z$ til at gælde i det Tilfælde, hvor Z er en mindskranket kompleks Variabel. Vi betragter hertil de to (fra Løren om reelle Variable kendte) Potensrækker

$$1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \frac{Z^6}{6!} + \frac{Z^8}{8!} - \dots$$

og

$$Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \frac{Z^7}{7!} + \dots,$$

der begge har Konvergenstallet $\lambda = \infty$, og som derfor, naar vi opfatter Z som en kompleks Variabel, er absolut konvergente i hele den komplekse Plan, og vi fastsætter da ved Definition, at de ved disse to Potensrækker fremstillede kontinuerlige Funktioner af den mindskrankede komplekse Variabel Z skal betegnes henholdsvis med $\cos Z$ og $\sin Z$.

Eks. Idet Potensrækken for $\cos Z$ indeholder litter lige Eksponenter, er $\cos(-Z) = \cos Z$, og idet Potensrækken for $\sin Z$ indeholder litter ulige Eksponenter er $\sin(-Z) = -\sin Z$. Idet

endvidere begge Potensrækkerne har kun reelle Koefficienter er for ethvert Z Tallene $\cos Z$ og $\cos \bar{Z}$, ligesom ogsaa Tallene $\sin Z$ og $\sin \bar{Z}$, indbyrdes konjungerede.

Vi udleder straks en overnaade vigtig Forbindelse mellem Funktionerne $\cos Z$, $\sin Z$ og e^Z , af hvilken vi allerede ovenfor har nævnt et specielt Tilfælde (nemlig Ligningen $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, hvor y er reel), men som først faar sin fulde Betydning, naar vi lader den uafhængige Variable være en mindskænket kompleks Variabel, medens den derivod forbliver skjult, saalænge vi udelukkende opererer indenfor det reelle Talomraade. Til denne Forbindelse kommer vi gennem følgende Regning, hvor Z betegner et vilkaarligt komplekst Tal

$$e^{iZ} = 1 + \frac{iZ}{1!} - \frac{Z^2}{2!} - \frac{iZ^3}{3!} + \frac{Z^4}{4!} \dots = \left\{ 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} \dots \right\} + i \left\{ Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} \dots \right\}$$

$$= \cos Z + i \sin Z;$$

paa fuldkommen tilsvarende Maade udleder vi Ligningen

$$e^{-iZ} = \cos Z - i \sin Z,$$

og af disse to Ligninger finder vi de søgte fundamentale Formler

$$\cos Z = \frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2}, \quad \sin Z = \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i}.$$

Hermed er eftervist, at Funktionerne $\cos Z$ og $\sin Z$ kan udtrykkes ved Eksponentialfunktioner, hvad der naturligvis er af stor Vigtighed ved almindelige omvendelser, idet

vi jo derved i Virkeligheden helt kan undgaa de trigonometriske Funktioner og kun regne med den ene Funktion z .
Eks. For z specielt rent imaginær, $z = iy$, finder vi

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad \sin iy = \frac{e^{-y} - e^y}{2i},$$

hvilke Formler viser, hvorledes de hyperbolske Funktioner $\cos y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ og $\sin y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ kan udtrykkes ved de elliptiske trigonometriske Funktioner, idet der jo gælder de simple Formler

$$\cos y = \cos iy, \quad \sin y = -i \sin iy.$$

Eks. Som et karakteristisk Eksempel paa Anvendelsen af Udtrykkene for $\cos$ og $\sin$ ved Hjælp af Eksponentialfunktionerne anfører vi følgende Metode til Omskrivning af et Udtryk som $\cos^4 x$ (i Almindelighed $\cos^m x \sin^n x$) til en flerleddet Størrelse i $\cos$ og $\sin$ af hele Multipla af x (hvilken antilogarithmiske Omskrivning man jo har Brug for i Integrationsregningen)

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{1}{8} \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{3}{8} = \\ &= \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Man viser umiddelbart, at de indenfor det reelle Talomraade gældende Hovedrelationer mellem de trigonometriske Funktioner udenvidere bevarer deres Gyldighed

indenfor det komplekse Talomraade. Vi tænker her særlig paa Relationen

$$\cos^2 Z + \sin^2 Z = 1$$

samt paa Additionsformlerne

$$\cos(Z_1 + Z_2) = \cos Z_1 \cos Z_2 - \sin Z_1 \sin Z_2, \quad \sin(Z_1 + Z_2) = \sin Z_1 \cos Z_2 + \cos Z_1 \sin Z_2.$$

At disse Ligninger gælder for vilkaarlige komplekse Værdier af de Variable, kan man vise enten ved direkte Regning med de Potensrækker, der definerer $\cos$ og $\sin$, eller derved, at man benytter Udtrykkene for $\cos$ og $\sin$ ved Hjælp af Eksponentialfunktioner. Benytter vi den sidstnævnte Metode forløber Beviset for f. Eks. den første af disse Relationer saaledes:

$$\cos^2 Z + \sin^2 Z = \left(\frac{e^{iZ} + e^{-iZ}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2iZ} + e^{-2iZ} + 2}{4} + \frac{e^{2iZ} + e^{-2iZ} - 2}{-4} = 1.$$

Id Additionsformlerne finder vi (ved at sætte $Z_1 = Z$, $Z_2 = 2\pi$) Ligningerne

$$\cos(Z + 2\pi) = \cos Z$$

$$\sin(Z + 2\pi) = \sin Z,$$

der viser, at Funktionerne $\cos Z$ og $\sin Z$ begge er periodiske med Perioden 2π ; vi behøver saaledes ved Studiet af disse Funktioner blot at betragte dem indenfor en Strimmel af Bredden 2π , parallel med den imaginære Akse. Endvidere finder vi f. Eks.

$$\cos(Z+\pi) = -\cos Z, \quad \sin(Z+\pi) = -\sin Z, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-Z\right) = \sin Z,$$

hvilken sidste Formel $\sin Z = \cos\left(\frac{\pi}{2}-Z\right)$ viser, hvorledes vi umiddelbart behersker Funktionen $\sin Z$, naar vi kender Funktionen $\cos Z$, saaledes at vi blot behøver at beskæftige os med denne sidste Funktion.

Skedens Funktionen e^Z antog alle Værdier med Undtagelse af 0, vil vi bevise, at Funktionen $\cos Z$ (og folgelig ogsaa Funktionen $\sin Z = \cos\left(\frac{\pi}{2}-Z\right)$) antager alle Værdier uden nogen som helst Undtagelse, altsaa at Ligningen

$$\cos Z = W,$$

hvor W er et vilkaarligt givet komplekst Tal og Z en kompleks Ukendt, altid har en Løsning (iøvrigt uendelig mange Løsninger). Af Ligningen $\frac{1}{2}(e^{iZ} + e^{-iZ}) = W$ finder vi nemlig ved Multiplikation med $2e^{iZ}$ ($\neq 0$) og Omordning af Ledene

$$e^{2iZ} - 2We^{iZ} + 1 = 0,$$

og denne 2den Grads Ligning i e^{iZ} giver os ved Løsning de to (aaenbart fra 0 forskellige) Rødder

$$e^{iZ} = W \pm \sqrt{W^2 - 1},$$

hvoraf følger

$$Z = \frac{1}{i} \log(W \pm \sqrt{W^2 - 1}).$$

Af den saaledes fundne fuldstændige Løsning til Ligningen $\cos Z = W$ fremgaar ikke blot, at der til et hvilket som

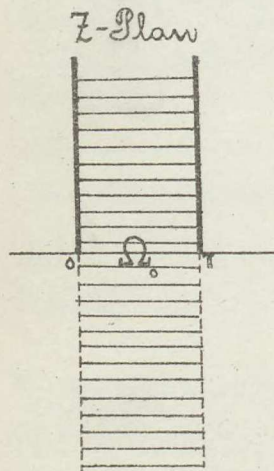
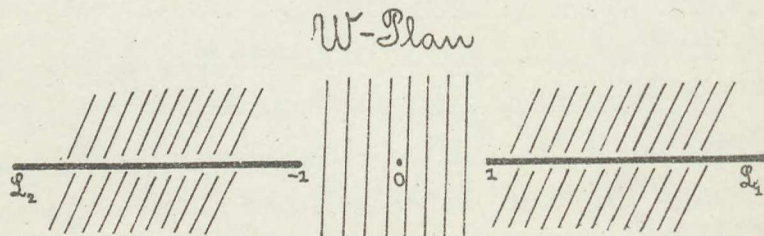
helst givet W svarer uendelig mange Værdier af Z , men
 nøjagtigere, at hvis vi betegner en (vilkaarlig valgt) af dis-
 se Løsninger med Z_0 , vil samtlige Løsninger (ligesom i
 den elementære Trigonometri) være givet ved $Z = \pm Z_0 + 2p\pi$,
 hvor p er et vilkaarligt helt Tal. Hvis vi betegner de to Gør-
 relser $W \pm \sqrt{W^2 - 1}$ med M_1 og M_2 er jo $M_1 \cdot M_2 = 1$, altsaa $M_2 = 1/M_1$,
 og den ovenfor fundne fuldstændige Løsning til Ligningen
 $\cos Z = W$ bliver følgende $Z = \frac{1}{i} \log M_1$, $Z = \frac{1}{i} \log M_2 = -\frac{1}{i} \log M_1$, altsaa

$$Z = \pm \frac{1}{i} \log M_1,$$

hvor $\log M_1$ er Fællesbetegnelsen for Logarithmens uendelig
 mange Værdier (hvilke Værdier afviger indbyrdes med hele
 Multipla af $2\pi i$).

For Eksponentialfunktionen $W = e^Z$ var Parallelskim-
 len $-\pi < y \leq \pi$ et saadant Omraade i Z -Planen, at e^Z i det-
 te Omraade antog enhver af sine Værdier (altsaa enhver
 Værdi $W \neq 0$) en og kun en Gang. Paa tilsvarende Maade
 vil vi søge at bestemme et saadant (simpelt) Omraade
 i Z -Planen, at Funktionen $W = \cos Z$ indenfor dette Om-
 raade antager enhver af sine Værdier (altsaa en hvil-
 kensomhelst Værdi W) en og kun en Gang. Udfra den
 fundne Form $Z = \pm Z_0 + 2p\pi$ af den fuldstændige Løsning til
 Ligningen $\cos Z = W$ fremgaar, at Betingelsen for, at et
 Omraade Ω i Z -Planen er af den ønskede Art, bestaar
 deri, ¹⁾ at der ikke findes to Punkter Z_1 og Z_2 i Omraadet Ω ,
 for hvilke $Z_1 - Z_2$ eller $Z_1 + Z_2$ er et helt Multiplum af 2π
 (idet jo Funktionen $\cos Z$ i saadanne to Punkter vilde ha-
 ve samme Værdi), og ²⁾ at der til et hvilket som helst Punkt
 Z i Planen findes et (og i Følge det foregaaende kun eet)

tilsvarende Punkt Z_1 i Omraadet Ω , for hvilket $\cos Z = \cos Z_1$, d. v. s. for hvilket $Z = \pm Z_1 + 2p\pi$. Som man meget let overbeviser sig om, har vi et Omraade Ω_0 af den ønskede Art (d. v. s. som opfylder de nævnte to Betingelser) i Strimlen $0 < x < \pi$ parallel med den imaginære Akse (se Fig. 17^a), idet vi af Parallelstrimlens Begrænsning reg-

Fig. 17^aFig. 17^b

ser de to Halvlinier $x=0, 0 \leq y < \infty$ og $x=\pi, 0 \leq y < \infty$ over den reelle Akse med til Omraadet Ω_0 , medens de under Abscisseaksen liggende Halvlinier $x=0, 0 > y > -\infty$ og $x=\pi, 0 > y > -\infty$ ikke medregnes. Til Orientering vil vi sluttelig undersøge, hvorledes Punktet $W = \cos Z$ varierer, naar Z gennemløber de to Begrænsningslinier $x=0$ og $x=\pi$ for Parallelstrimlen Ω_0 . Betragt vi først Begrænsningslinien $x=0$, finder vi

$$W = \cos(iy) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \cosh y,$$

der er reel for alle (reelle) y , og som naar y varierer fra $-\infty$ til 0 , aftager fra $+\infty$ til 1 , for derefter igen at vokse fra 1 til ∞ , naar y vandrer videre fra 0 til ∞ . Paa tilsvarende Maade finder vi for den anden Begrænsningslinie $x = \pi$, idet $\cos(\pi + iy) = -\cos(iy)$, at W hele Tiden er reel, og at W , naar y gaar fra $-\infty$ over 0 til $+\infty$, først vokser fra $-\infty$ til -1 for derefter at vandre tilbage fra -1 til $-\infty$ igen. — Idet vi sammenfatter de sidste Resultater, har vi fundet, at Funktionen $W = \cos Z$ afbilder det Indre af Parallelstriken $0 < x < \pi$ eenentydigt paa det aabne Omraade, der fremkommer af W -Planen, naar den skæres op langs de to (modsat rettede) Halvlinier L_1 og L_2 , der gaar fra 1 til $+\infty$ og fra -1 til $-\infty$ (se Fig. 17^b), og endvidere at Parallelstriken to Rande $x = 0$ og $x = \pi$ afbildes i hver sin af de to Halvlinier L_1 og L_2 , og saaledes at disse Halvlinier herved er at opfatte som „Dobbelthaltvlinier“ (ombøjede Heltlinier, se Fig. 18)

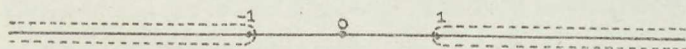


Fig. 18.

23. Funktionerne $\arccos W$ og $\arcsin W$. Ved $Z = \arccos W$ betegner vi den omvendte Funktion til Funktionen $W = \cos Z$, og ved $Z = \arcsin W$ betegner vi den omvendte Funktion til $W = \sin Z$. Idet enhver af Funktionerne $W = \cos Z$ og $W = \sin Z$ kan antage en vilkaarsmæssigt kompleks Værdi W , er de omvendte Funktioner $Z = \arccos W$ og $Z = \arcsin W$ defineret i hele den komplekse W -Plan, og de er begge envedtystige Funktioner af W , idet jo saavel $\cos$ som $\sin$ antager en vilkaarlig given Værdi

Uendelig mange Gange. Af Ligningen $\sin Z = \cos(\frac{\pi}{2} - Z)$ følger

$$\arcsin W = \frac{\pi}{2} - \arccos W,$$

saaledes at vi kun behøver at studere Funktionen $\arccos W$, idet vi, naar vi behersker denne, tillige behersker Funktionen $\arcsin W$.

For Funktionen $Z = \arccos W$ har vi i forrige Paragraf fundet et eksplicit Udtryk ved Hjælp af den (ligeledes uendeligtydige) Logarithmefunktion, idet vi jo har løst Ligningen $\cos Z = W$ og derved fundet

$$Z = \arccos W = \frac{1}{i} \log(W \pm \sqrt{W^2 - 1}).$$

Ved Hovedværdien $\text{Arccos } W$ betegner vi den enentydigt bestemte Værdi af den (uendeligtydige) Funktion $Z = \arccos W$, der er beliggende i det (i forrige Paragraf omtalte) Omraade Ω_0 i Z -Planen. Funktionen $Z = F_0(W) = \text{Arccos } W$ afbilder altsaa den langs Hæklommerne $(1, +\infty)$ og $(-1, -\infty)$ opskaaene W -Plan enentydigt paa det Indre af Omraadet Ω_0 , d. v. s. paa Parallelstrikkene $0 < x < \pi$. Heraf følger atter, at af de andre „Grene“ af Funktionen $\arccos Z$, nemlig

$$F_q(W) = \text{Arccos } W + 2q\pi \quad (q = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

og

$$G_q(W) = -\text{Arccos } W + 2q\pi \quad (q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

vil Funktionen $F_q(W)$ afbilde den opskaaene W -Plan enentydigt paa Parallelstrikkene $2q\pi < x < (2q+1)\pi$, medens Funktionen $G_q(W)$ afbilder den opskaaene W -Plan paa Parallel-

skindlen $(2q-1)\pi < x < 2q\pi$. — Medens den uendeligtydige Funktion $Z = \arccos W$ saaledes naturligt deler sig op i de uendelig mange entydige Funktioner $Z = F_q(W)$ og $Z = G_q(W)$, saalange vi kun opererer indenfor den opskaarne W -Plan, gælder dette ikke lenger, naar vi lader Punkket W bevæge sig frit indenfor den uopskaarne W -Plan, idet de forskellige Grene af Funktionerne $\arccos W$ af sig selv gaar over i hinanden, naar Punkket W omkredser det ene eller det andet af de to „Forgreningspunkter“ $W = +1$ og $W = -1$, eller dem begge. Vi skal ikke her komme nærmere ind paa den Maade, hvorpaa de forskellige Grene der ved gaar over i hinanden, men skal blot bemærke, at dette Spørgsmaal umiddelbart kan behandles ud fra det ovenfor fundne eksplicite Udtryk for $\arccos W$ ved Hjælp af Logarithmefunktionen.

24. Funktionerne $W = \lg Z$ og $Z = \operatorname{arctg} W$. Fra Læren om reelle Variable vides Funktionerne $\cos Z$ at have Værdien 0 i de reelle Punkter $Z = \pm \frac{\pi}{2} + 2p\pi$, og ud fra det foregaaende følger, at $\cos Z$ ikke har andre Nulpunkter; thi samtlige Løsninger til Ligningen $\cos Z = W$, hvor W er et vilkaarligt givet Tal (her specielt Tallet 0), indbefattes jo i et Udtryk af Formen $Z = \pm Z_0 + 2p\pi$. Brøken $\frac{\sin Z}{\cos Z}$ er folgelig defineret i hele den komplekse Plan med Undtagelse af Punkterne $Z = \pm \frac{\pi}{2} + 2p\pi$; denne Funktion af den komplekse Variable Z betegnes med $\lg Z$. Idet

$$\lg(Z + \pi) = \frac{\sin(Z + \pi)}{\cos(Z + \pi)} = \frac{-\sin Z}{-\cos Z} = \frac{\sin Z}{\cos Z} = \lg Z,$$

er Funktionerne $\lg Z$ periodisk med Perioden π . Af Udtrykkene for $\cos Z$ og $\sin Z$ ved Hjælp af Eksponential-

funktionen finder vi den vigtige Formel

$$\operatorname{tg} Z = \frac{1}{i} \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{e^{iZ} + e^{-iZ}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iZ} - 1}{e^{2iZ} + 1}$$

Ved $Z = \operatorname{arctg} W$ forstaaer vi den omvendte Funktion til $W = \operatorname{tg} Z$. Udfraa

$$W = \operatorname{tg} Z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iZ} - 1}{e^{2iZ} + 1}$$

finder vi

$$e^{2iZ} = \frac{1 + iW}{1 - iW}$$

altsaa

$$Z = \operatorname{arctg} W = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iW}{1 - iW}$$

Af disse Regninger fremgaar, at $\operatorname{tg} Z$ antager enhver Værdi W med Undtagelse af de to Værdier $W = i$ og $W = -i$ (for hvilke henholdsvis Tæller og Nævner i Brøken $\frac{1 + iW}{1 - iW}$ bliver 0), altsaa at $Z = \operatorname{arctg} W$ er defineret i hele den komplekse Plan med Undtagelse af Punkterne $W = i$ og $W = -i$, og det fundne Udtryk for $\operatorname{arctg} W$ ved Hjælp af Logarithmefunktionen viser, at $\operatorname{arctg} W$ er uendeliggyldig Funktion af W , samt at hvis en af dens Værdier betegnes med Z_0 , vil samtlige Værdier (ligesom i den elementære Trigonometri) være indbefattede i Udtrykket $Z = Z_0 + p\pi$. Vi skal ikke gaa nærmere ind paa Studiet af Funktionen $\operatorname{arctg} W$, hvad man uden Vanskelighed kunde gøre udfraa dens Udtryk ved Hjælp af Logarithmefunktionen, men blot nævne, at man ved Hovedværdien $\operatorname{arctg} W$ forstaaer den „Gren“ af den uendeliggyldige Funktion $\operatorname{arctg} W$, hvis Værdier er

beliggende indenfor Parallelstriken $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$.

25. Komplekst Integral. Vi afslutter vor gennemgang af de kon-
limerede Funktioners Teori med at indføre det vigtige Begreb
„komplekst Integral“. Lad $F(Z) = u(x, y) + iv(x, y)$ være en kontinu-
ert Funktion af $Z = x + iy$ indenfor et Omraade Ω i den kom-
plekse Plan, og lad der indenfor dette Omraade være givet
en differentiabel Kurve l (eller, almindeligere, en brudt dif-
ferentiabel Linie) ved en Parameterfremstilling $x = f(t), y = g(t)$
($\alpha \leq t \leq \beta$) eller kortere skrevet ved Parameterfremstillingen
 $Z = x + iy = f(t) + ig(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$). Vi vil da definere, hvad vi for-
staar ved det komplekse Integral af Funktionen $F(Z)$ taget
langs Kurven l . Vi deler her til Integrationsvejen l op i
smaa Stykker (se Fig. 19) ved Indskydelse af en Række Dele-

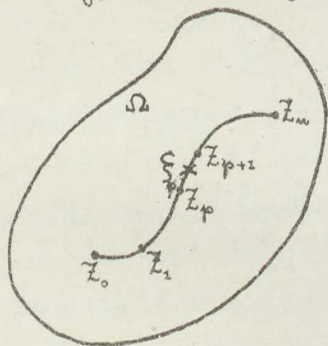


Fig. 19.

punkter. Lad $Z_p = x_p + iy_p = f(t_p) + ig(t_p)$ og $Z_{p+1} = x_{p+1} + iy_{p+1} = f(t_{p+1}) + ig(t_{p+1})$ være to paa hinanden føl-
gende Deler punkter svarende hen-
holdsvis til Parameterverdier
ne t_p og t_{p+1} ; lad endvidere
 $\xi_p = \xi_p + i\eta_p$ være et vilkaarligt
Punkt paa Kurvestykket $Z_p Z_{p+1}$.

Vi betragter da Summen
 $\sum F(\xi_p) \cdot (Z_{p+1} - Z_p)$ eller kortere skre-

vet $\sum F(\xi) \Delta Z$. Vi foretager nu en Graenseovergang, idet vi
gør Inddelingen „finere og finere“, og vil da bevise, at den
omhandlede Sum $\sum F(\xi) \Delta Z$ nærmer sig til en bestemt
Graenseverdi, der er uafhængig saavel af den Maade, hvor
paa Deler punkterne Z_p vælges under Graenseovergangen, som
ogsaa af den Maade, hvorpaa Punkterne ξ_p vælges paa de
enkelt Stykker. Rigtigheden heraf indses umiddel-

bort, naar vi betragter den reelle og den rent imaginære Del af Summen hver for sig. Vi har nemlig

$$\Sigma F(\xi) \Delta Z = \Sigma (u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta)) (\Delta x + i \Delta y) =$$

$$\Sigma \{u(\xi, \eta) \Delta x - v(\xi, \eta) \Delta y\} + i \Sigma \{v(\xi, \eta) \Delta x + u(\xi, \eta) \Delta y\},$$

og om hver af de to sidste reelle Summer ved vi jo, at de nærmer sig til bestemte Grænseværdier, nemlig til de krumlinede Integraler

$$\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy \quad \text{og} \quad \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Den saaledes fundne Grænseværdi

$$\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy = \int_C (u(x, y) + i v(x, y)) (dx + i dy)$$

for Summen $\Sigma F(\xi) \Delta Z$ kaldes det komplekse Integral af $F(Z)$ langs Kurven C og betegnes med $\int_C F(Z) dZ$.

For $F(Z) = u(x, y) + i v(x, y)$ en fuldkommen vilkaarlig kontinuerlig Funktion af Z , d. v. s. er $u(x, y)$, $v(x, y)$ et vilkaarligt (kontinuerlig) reelt Funktionspar af det reelle Variabelpar (x, y) , vil $\int_C F(Z) dZ$ naturligvis i Almindelighed være afhængigt, ikke blot af Integrationsvejens Begyndelsespunkt og Endepunkt, men ogsaa af den Vej C , langs hvilken Integralet tages. Vi skal imidlertid senere (ved Behandlingen af de differentiable Funktioner) se, hvorledes det gælder for saa at sige alle de komplekse Funktioner, man ved Invendelserne vil kunne faa Brug for, at det komplekse Integral kun afhænger af Begyndelsespunkt og Endepunkt, men ikke af

Integrationsveje, og vi skal se, hvorledes det er netop denne Egenskab ved de komplekse Integraler, der giver dem deres store Betydning.

Eks. Løn det simplest mulige Eksempel betragter vi den i hele den komplekse Plan kontinuerlige Funktion $F(Z) = K$, hvor K er en kompleks Konstant. Er l en vilkårlig differentiabel Kurve, der fører fra Punktet $Z = A$ til $Z = B$, finder vi for den ovenfor betragtede Sum $\sum F(\xi_p)(Z_{p+1} - Z_p)$ Værdien $\sum K(Z_{p+1} - Z_p) = K(B - A)$. Denne Sum er altsaa under hele Grænseovergangen lig med Tallet $K(B - A)$, og Summens Grænseværdi $\int_K F(Z) dZ$ er folgelig ogsaa lig med $K(B - A)$. Her er det komplekse Integral altsaa kun afhængigt af Begyndelsespunktet A og Endepunktet B , men ikke af Integrationsvejen.

Lad den differentiable Kurve $l: x = f(t), y = g(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ have Længden λ , og lad den numeriske største Værdi, som Funktionerne $F(Z)$ antager langs Kurven l , betegnes med M , med andre Ord, lad M betegne den største Værdi, som den reelle kontinuerlige Funktion $\Phi(t) = |F(f(t) + ig(t))|$ antager i Intervallet $\alpha \leq t \leq \beta$. Af Uligheden

$$|\sum F(\xi_p)(Z_{p+1} - Z_p)| \leq M \sum |Z_{p+1} - Z_p|$$

følger da umiddelbart ved Grænseovergang, idet

$$\sum F(\xi_p)(Z_{p+1} - Z_p) \rightarrow \int_l F(Z) dZ, \quad \sum |Z_{p+1} - Z_p| \rightarrow \lambda,$$

den vigtige Ulighed

$$|\int_l F(Z) dZ| \leq M \cdot \lambda,$$

der ganske svarer til kendte Uligheder for reelle Integraler.

Opg. 14. Dekomponer Brøken

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{(x^2 + 4)^2 (x - 1)^3},$$

dels i Partialbrøker med konstante Tællere, dels i reelle Partialbrøker.

Opg. 15. Bævis at Potensrækken

$$1 + \frac{m}{1} Z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} Z^2 + \dots,$$

hvor m er et vilkårligt komplekst Tal $\neq 1, 2, 3, \dots$, har Konvergensradius 1.

Opg. 16. Find $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x \, dx$, idet Funktionen $\cos^3 x \sin^2 x$ først gøres „antilogarithmisk“ ved Hjælp af Udtrykkene for $\cos$ og $\sin$ ved Eksponentialfunktioner.

Opg. 17. Løs Ligningerne $e^{2Z} = 2 + 3i$ og $e^{Z^2} = 1 + i$.

Opg. 18. Løs Ligningerne

1) $\cos Z = i$

2) $\sin Z = i$

3) $\cos Z = 2$

4) $\sin Z = 2$

Opg. 19. Undersøg, hvorledes de forskellige Grene af Funktionen $Z = \arccos W$ gaar over i hinanden, naar W omkredser et af Forgreningspunkterne $+1$ og -1 .

Opg. 20. Hvorledes vil det vare det naturligste at definere Hovedværdien af arcsin W , naar denne for reelle W mellem $+1$ og -1 skal falde sammen med den fra Læren om reelle Variable kendte?

Opg. 21. Løs Ligningerne

$$1) \lg Z = 2i$$

$$2) \lg Z = 1-i$$

Differentiable Funktionener.

26. Indledende Definitioner og Regneregler. Lad $W = F(Z)$ være en Funktion af den komplekse Variable Z defineret indenfor et Område Ω i den komplekse Plan, og lad Z_0 være et vilkårligt Punkt indenfor dette Område. Vi siger jo da om Funktionen $F(Z)$, at den er kontinuerlig i Punktet Z_0 , dersom den opfylder Betingelsen $F(Z) \rightarrow F(Z_0)$ for $Z \rightarrow Z_0$, eller anderledes udtrykt, dersom Funktionsstilvæksten $\Delta W = F(Z_0 + H) - F(Z_0)$ er uendelig lille (d. v. s. $\rightarrow 0$) for $H \rightarrow 0$. For saa at sige alle de i et Punkt Z_0 kontinuerlige Funktionener, man ved anvendelse vil kunne få Boring for, gælder det imidlertid (ganske som indenfor de reelle Funktioners Teori), at denne Funktionsstilvækst $\Delta W = F(Z_0 + H) - F(Z_0)$ ikke blot vil være uendelig lille for $H \rightarrow 0$, men nøjagtigere, at den vil være "særlig" proportional med Stilvæksten H til den uafhængige Variable, d. v. s. der vil for $H \rightarrow 0$ gælde en Grænseligning af Formen

$$\Delta W = F(Z_0 + H) - F(Z_0) = A \cdot H + o(|H|),$$

hvor A er en kompleks Konstant, eller (anderledes skrevet) Grænseligningen

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{F(Z_0 + H) - F(Z_0)}{H} = A.$$

Vi siger i dette Tilfælde om Funktionen $W = F(Z)$, at den

er differentiable i Punktet Z_0 med Differentialkvotienten A , og betegner Størrelsen $A \cdot H$ som Differential dW af Funktionen $W = F(Z)$ i Punktet Z_0 , svarende til Tilvæksten H til den uafhængige Variable.

Ved talrige undersøgelser over differentiable komplekse Funktioner — navnlig hvor det drejer sig om at bestemme Grænsforholdet mellem uendelig små Størrelser eller lignende — kan man simpelthen erstatte Tilvæksten $\Delta W = F(Z_0 + H) - F(Z_0)$ med Differential $dW = A \cdot H$, idet Forskellen $\Delta W - dW$ jo er uendelig lille af højere Orden end Tilvæksten $\Delta Z = H$. I visse særlige Tilfælde, nemlig for de lineære Funktioner $W = AZ + B$, gælder det endogsaa, at Tilvæksten ΔW og Differential dW er nøjagtig lige store under hele Grænsforgangen, idet jo her $\Delta W = A \cdot H = dW$, dette gælder specielt for Funktionerne $F(Z) = Z$, hvor $dZ = \Delta Z = H$. Vi udtrykker dette ved at sige, at for den uafhængige Variable Z er Differential dZ og Tilvæksten ΔZ et og samme (komplekse) Tal.

Lad nu $W = F(Z)$ være en vilkårlig i Punktet Z_0 differentiable Funktion med Differentialkvotienten A , og indfører vi i Ligningen $dW = A \cdot H$ i Stedet for Tilvæksten $\Delta Z = H$ det dermed ligestore Differential dZ , finder vi $dW = A \cdot dZ$, eller, idet vi dividerer paa begge Sider af Lighedstegnet med dZ ,

$$\frac{dW}{dZ} = A,$$

hvilken sidste Ligning forklarer, hvorfor Grænsforholdet $A = \lim \frac{\Delta W}{\Delta Z}$ betegnes som en "Differentialkvotient".

En indenfor et Omraade Ω kontinuert Funktion $W = F(Z)$ siges at være differentiabel indenfor Ω , hvis den er differentiabel i ethvert af Omraadets Punkter; i dette Tilfælde bestemmer Funktionens Differentialkvotient os oven-
synlig en ny Funktion af den komplekse Variable Z in-
denfor Omraadet Ω , hvilken Funktion sædvanligvis be-
tegnes med $F'(Z)$.

Eks. Funktionen $F(Z) = K$, hvor K er en vilkaarlig kom-
pleks Konstant, er differentiabel i hele den komplekse
Plan med Differentialkvotienten 0; thi for ethvert fast-
holdt Z og $h \rightarrow 0$ gælder der jo Grænseligningen
$$\frac{F(Z+h) - F(Z)}{h} = 0 \rightarrow 0.$$

Eks. Funktionen $F(Z) = Z$ er (som vi iøvrigt allerede ovenfor
har nævnt) differentiabel i hele den komplekse Plan med
Differentialkvotienten $F'(Z) = 1$, idet jo $\frac{F(Z+h) - F(Z)}{h} = 1 \rightarrow 1$
for $h \rightarrow 0$.

Eks. Ud fra den tidligere fundne Grænsformel $\frac{e^h - 1}{h} \rightarrow 1$
for $h \rightarrow 0$ udleder vi umiddelbart, at Exponentialfunkti-
onen e^Z er differentiable i hele den komplekse Plan med
Differentialkvotienten e^Z ; thi for ethvert fastholdt Z og
 $h \rightarrow 0$ gælder der jo Grænseligningen

$$\frac{e^{Z+h} - e^Z}{h} = e^Z \cdot \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow e^Z.$$

Man viser umiddelbart (nøjagtigt som indenfor det
reelle Talomraade) Rigtigheden af følgende elementære
Regneregler for differentiable Funktioner: Er $F(Z)$ og $G(Z)$
begge differentiable i Punktet Z , med henholdsvis Diffe-
rentialkvotienterne $F'(Z)$ og $G'(Z)$, da er Funktionerne
 $F(Z) + G(Z)$, $F(Z) - G(Z)$, $F(Z) \cdot G(Z)$ og, saafremt $G'(Z) \neq 0$, Funkti-

enen $F(Z):G(Z)$ ligeledes differentiable i Punktet Z_0 med henholdsvis Differentialkvotienterne

$$F'(Z_0)+G'(Z_0), F'(Z_0)-G'(Z_0), F(Z_0)G'(Z_0)+F'(Z_0)G(Z_0)$$

og

$$\frac{G(Z_0)F'(Z_0)-F(Z_0)G'(Z_0)}{(G(Z_0))^2}$$

Ek. Ud fra de førnævnte Eksempler paa differentiable Funktioner: $F(Z)=K$ og $F(Z)=Z$ følger umiddelbart ved anvendelse af de foregaaende Regneregler, at ethvert Polynomium $P(Z)=A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + \dots + A_1 Z + A_0$ er differentiablet i hele den komplekse Plan med Differentialkvotienten $P'(Z)=n A_n Z^{n-1} + (n-1) A_{n-1} Z^{n-2} + \dots + A_1$. Vi tilføjer, at dersom Polynomiet $P(Z)$ har det komplekse Tal A til p -dobbel Rod, vil dette Tal A være netop $(p-1)$ Gange Rod i Polynomiet $P'(Z)$ (hvor specielt er indeholdt, at dersom A er Enkeltrød i $P(Z)$, vil det slet ikke være Rod i $P'(Z)$); thi af Ligningen

$$P(Z) = (Z-A)^p \cdot Q(Z) \quad (Q(A) \neq 0)$$

følger ved Differentiation

$$P'(Z) = p(Z-A)^{p-1} Q(Z) + (Z-A)^p Q'(Z) = (Z-A)^{p-1} \cdot Q_1(Z),$$

hvor Faktoren $Q_1(Z) = p Q(Z) + (Z-A) Q'(Z)$ ikke er delelig med $Z-A$, idet jo $Q_1(A) = p Q(A) \neq 0$.

Ek. Regnereglerne lærer os endvidere, at enhver brudt den rational Funktion $P(Z):Q(Z)$ er differentiable indens

for hele sit Definitionsomraade, d. v. s. i hele den komplekse Plan med Undtagelse af Nærmestpolynomiet's Nul-punkter, og at dens Differentialkvotient er bestemt ved $(Q(Z)P'(Z) - P(Z)Q'(Z)) : (Q(Z))^2$.

Man indser endvidere umiddelbart, at den fra Læren om reelle Funktioner kendte Regneregler vedrørende Differentiation af en indirekte givne Funktion uendvidere bevarer sin Gyldighed indenfor det komplekse Talomraade, d. v. s. at dersom Funktionen $U = F(Z)$ er differentiable i Punktet $Z = Z_0$ og Funktionen $W = G(U)$ er en differentiable Funktion af U i det til Z_0 svarende Punkt $U_0 = F(Z_0)$, da vil den ved Ligningerne $W = G(U)$, $U = F(Z)$ indirekte givne Funktion, altsaa Funktionen $W = G(F(Z))$, ligeledes være differentiable i Punktet Z_0 , og dens Differentialkvotient vil være bestemt ved

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{dW}{dU} \cdot \frac{dU}{dZ} = G'(U_0) \cdot F'(Z_0).$$

Eks. Er Funktionen $F(Z)$ differentiable i Punktet Z_0 med Differentialkvotienten A , vil Funktionen $F(-Z)$ være differentiable i Punktet $-Z_0$ med Differentialkvotienten $-A$; saaledes vil Funktionen $F(Z) = e^Z$ være differentiable i hele den komplekse Plan med Differentialkvotienten e^Z . Almindeligere gælder det, at Funktionen e^{KZ} , hvor K er en vilkaarlig kompleks Konstant, er differentiable i hele den komplekse Plan med Differentialkvotienten $K \cdot e^{KZ}$.
Eks. Funktionerne $\cos Z = \frac{1}{2}(e^{iZ} + e^{-iZ})$ og $\sin Z = \frac{1}{2i}(e^{iZ} - e^{-iZ})$ er differentiable i hele den komplekse Plan med Differentialkvotienterne

$$\frac{d \cos Z}{dZ} = \frac{i}{2} (e^{iZ} - e^{-iZ}) = -\sin Z \text{ og } \frac{d \sin Z}{dZ} = \frac{1}{2} (e^{iZ} + e^{-iZ}) = \cos Z.$$

Eks. Ud fra Formlerne $\cos' Z = -\sin Z$, $\sin' Z = \cos Z$ følger (ganske som indenfor det reelle Talomraade), at Funktionen $\operatorname{tg} Z = \frac{\sin Z}{\cos Z}$ er differentiable indenfor hele sit Eksistensomraade, d. v. s. for alle $Z \neq \frac{\pi}{2} + p\pi$, med Differentialkvotienten

$$\frac{d \operatorname{tg} Z}{dZ} = \frac{\cos Z \cdot \cos Z + \sin Z \cdot \sin Z}{\cos^2 Z} = \frac{1}{\cos^2 Z}$$

27. Analytisk Funktion. En kompleks Funktion $F(Z)$ siges at være analytisk indenfor et Omraade Ω , dersom den ¹⁾ er differentiable indenfor hele Omraadet, og ²⁾ dens Differentialkvotient $F'(Z)$ er kontinuerlig indenfor Omraadet.

Eks. Alle de i forrige Paragraf nævnte Eksempler paa komplekse Funktioner er analytiske indenfor hele deres Definitionsomraade, idet de jo alle er differentiable med kontinuerlige Differentialkvotienter indenfor hele dette Omraade; saaledes er et Polynomium $P(Z)$ og Funktionerne e^Z , $\cos Z$, $\sin Z$ analytiske i hele den komplekse Plan, medens Funktionen $\operatorname{tg} Z$ er analytisk for alle $Z \neq \frac{\pi}{2} + p\pi$, altsaa i hele Planen, naar de nævnte (uendelig mange) Punkter $\frac{\pi}{2} + p\pi$ prikkes ud.

Ud fra de i forrige Paragraf nævnte Regneregler følger umiddelbart, at man ved elementær Regning med analytiske Funktioner paa ny kommer til analytiske Funktioner, samt at en analytisk Funktion af en ana-

lyfisk Funktion paa ny bliver analytisk; saaledes er f. Eks. Funktionen $F(Z) = \sin(Z)$ analytisk i hele Planen.

Vi gaar nu over til at bevise følgende Hovedsætning:

Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at en indenfor et Omraade Ω defineret Funktion $F(Z) = F(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ er analytisk indenfor Ω , bestaar deri, at de to reelle Funktioner $u(x,y)$ og $v(x,y)$ af det reelle Variabelpar (x,y) tilfredsstiller følgende Fordringer:

1) Funktionerne $u(x,y)$ og $v(x,y)$ skal indenfor hele Omraadet Ω besidde partielle kontinuerede Afledede af 1ste Orden $u'_x(x,y)$, $u'_y(x,y)$, $v'_x(x,y)$ og $v'_y(x,y)$, og 2) disse partielle Differentialkvotienter skal i ethvert Punkt (x,y) indenfor Ω tilfredsstille Ligningerne

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y) \quad , \quad u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) ,$$

hvilke Ligninger kaldes de for en analytisk Funktion $u(x,y) + iv(x,y)$ karakteristiske partielle Differentialligninger.

Bevis: Vi vil først bevise, at Betingelsen er nødvendig, altsaa at de nævnte Fordringer vedrørende Funktionerne $u(x,y)$ og $v(x,y)$ er tilfredsstillet, dersom Funktionen $F(Z)$ er analytisk indenfor Ω , d. v. s. dersom $F(Z)$ er differentiable indenfor Ω med en kontinueret Differentialkvotient $F'(Z)$. Det er altsaa her givet, at for ethvert fastholdt $Z = x + iy$ indenfor Ω vil Brøken

$$\begin{aligned} \frac{F(Z+h) - F(Z)}{h} &= \frac{F(x+iy+h+ik) - F(x+iy)}{h+ik} \\ &= \frac{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k) - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{h+ik} \end{aligned}$$

naar sig til en bestemt Grænseværdi $F'(Z)$, naar den komplekse Tilvækst $H = h + ik$ paa vilkaarlig Maade gaar mod Null. Dette gælder følgende specielt, naar vi lader Tilvæksten H gaa mod 0 gennemløbende lutter reelle Værdier, altsaa sætter $H = h + i \cdot 0 = h$, eller naar vi lader H gaa mod 0 gennemløbende lutter rent imaginære Værdier, altsaa sætter $H = 0 + ik = ik$. Vi finder herved de simple Grænseligninger

$$\lim_{h \rightarrow 0 \pm h} \left\{ \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right\} = F'(Z)$$

og

$$\lim_{k \rightarrow 0 \pm k} \left\{ \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} - i \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} \right\} = F'(Z),$$

hvilke Ligninger, idet vi spaltes Differentialkvotienten $F'(Z)$ i dens reelle og rent imaginære Komponent, d. v. s. idet vi sætter $F'(Z) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$, er ensbetydende med følgende 4 Grænseligninger

$$\lim_{h \rightarrow 0 \pm h} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = \alpha(x, y), \quad \lim_{h \rightarrow 0 \pm h} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} = \beta(x, y),$$

$$\lim_{k \rightarrow 0 \pm k} \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} = \alpha(x, y), \quad \lim_{k \rightarrow 0 \pm k} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} = -\beta(x, y).$$

Disse Ligninger udsiger imidlertid netop, hvad vi skulde bevise; thi de lærer os jo, ¹⁾ at Funktionerne $u(x, y)$ og $v(x, y)$ virkelig har partielle Afledede, nemlig de Afledede

$$u'_x(x, y) = \alpha(x, y), \quad u'_y(x, y) = -\beta(x, y), \quad v'_x(x, y) = \beta(x, y), \quad v'_y(x, y) = \alpha(x, y),$$

og²⁾ at disse partielle Afledede er kontinuerlige indenfor Ω , idet jo Funktionerne $F(Z) = u(x, y) + i v(x, y)$ (og dermed ogsaa de reelle Funktionerne $u(x, y)$ og $v(x, y)$) i Folge Foundsætning er kontinuerlige indenfor Ω , og endelig³⁾ at der gælder Ligningerne $u'_x(x, y) = v'_y(x, y)$ og $u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$.

Vi skal dernæst bevise, at den opstillede Betingelse er tilstrækkelig, altsaa at hvis de reelle Funktionerne $u(x, y)$ og $v(x, y)$ tilfredsstiller de nævnte Fordringer: $u'_x(x, y) = v'_y(x, y)$ og $u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$, da vil den komplekse Funktion $F(Z) = u(x, y) + i v(x, y)$ være analytisk indenfor Ω . Vi betragter hertil for et fastholdt $Z = x + iy$ indenfor Ω og en vilkårlig (lille) komplekse Tilvækst $\mathcal{K} = h + ik$ Differensen

$$F(Z + \mathcal{K}) - F(Z) = u(x+h, y+k) - u(x, y) + i \{v(x+h, y+k) - v(x, y)\}.$$

Idet Funktionerne $u(x, y)$ og $v(x, y)$ i Folge Foundsætning har partielle kontinuerlige Afledede indenfor Ω og derfor begge er differentiable i Punktet (x, y) , gælder der heri for $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ Grænseligningerne

$$u(x+h, y+k) - u(x, y) = h \cdot u'_x(x, y) + k \cdot u'_y(x, y) + o(x)$$

og

$$v(x+h, y+k) - v(x, y) = h \cdot v'_x(x, y) + k \cdot v'_y(x, y) + o(x)$$

hvor $x = \sqrt{h^2 + k^2} = |\mathcal{K}|$ betegner Afstanden fra det faste Punkt (x, y) til det variable Punkt $(x+h, y+k)$. Indfører vi disse Udtryk for Tilvækstene Δu og Δv i det ovenstaaende Udtryk for $F(Z + \mathcal{K}) - F(Z)$, finder vi

$$F(Z + \mathcal{K}) - F(Z) = h \{u'_x(x, y) + i v'_x(x, y)\} + k \{u'_y(x, y) + i v'_y(x, y)\} + o(x),$$

altsaa, idet vi gør Brug af Ligningerne $u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$,
 $v'_y(x, y) = u'_x(x, y)$,

$$F(Z+h) - F(Z) = (h+ik) \cdot \{u'_x(x, y) + i v'_x(x, y)\} + o(r)$$

eller

$$F(Z+h) - F(Z) = h \{u'_x(x, y) + i v'_x(x, y)\} + o(|h|).$$

Denne Ligning viser os umiddelbart, at $F(Z)$ er analytisk indenfor Ω , idet den jo udsiger, at $F(Z)$ er differentiable i det (indenfor Ω vilkaarligt valgte) Punkt $Z = x + iy$ med Differentialkvotienten

$$F'(Z) = u'_x(x, y) + i v'_x(x, y) = v'_y(x, y) - i u'_y(x, y),$$

hvilken Differentialkvotient er kontinuert indenfor Ω , fordi $u'_x(x, y)$ og $v'_x(x, y)$ i Følge Forudsætning er det.

Exs. Vi har ovenfor direkte eftervist, at Funktionen e^Z er analytisk i hele den komplekse Plan. Som et Gældsseksempel vil vi vise, hvorledes Beviset herfor ogsaa umiddelbart kan føres ved Hjælp af den ovenfor udledte nødvendige og tilstrækkelige Betingelse. Vi opfører her til først e^Z i sine Komponenter, d. v. s. vi sætter

$$e^Z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

altsaa

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Disse to Funktioner $u(x, y)$ og $v(x, y)$ har ¹⁾ partielle kontinuerlige Afledede i hele XY -Planen, nemlig

$$u'_x(x,y) = e^x \cos y, \quad u'_y(x,y) = -e^x \sin y, \quad v'_x(x,y) = e^x \sin y, \quad v'_y(x,y) = e^x \cos y,$$

og²⁾ tilfredsstiller disse partielle afledede Ligningerne $u'_x(x,y) = v'_y(x,y)$, $u'_y(x,y) = -v'_x(x,y)$; hermed er Beviset for, at Funktionen F er en i hele Planen analytisk Funktion, ført. Vi finder endvidere ad denne Vej (hvad vi ogsaa vidste i Forvejen), at Differentialkvotienten af $F(Z) = e^Z$ er givet ved

$$F'(Z) = u'_x(x,y) + i v'_x(x,y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^Z.$$

Eks. Lad $W = F(Z)$ være en Funktion af den komplekse Variable Z , som hvilken det er givet, at den indenfor et Omraade Ω tilfredsstiller Differentialligningen $\frac{dW}{dZ} = 0$. Vi vil bevise, at dette kun kan være Tilfældet, dersom Funktionen $F(Z)$ er en Konstant, d. v. s. har en og samme (komplekse) Værdi K i alle Omraadets Punkter. Vi bemærker hertil for det første, at $F(Z)$ nødvendigvis er analytisk indenfor Ω , idet den jo indenfor hele dette Omraade har en kontinuerlig Differentialkvotient, nemlig Differentialkvotienten $F'(Z) = 0$. Lættet vi $F(Z) = u(x,y) + i v(x,y)$, ved vi derfor om Funktionerne $u(x,y)$ og $v(x,y)$, at de har partielle kontinuerlige Afledede indenfor Ω , og at disse er forbundne med Differentialkvotienten $F'(Z)$ ved Ligningerne

$$F'(Z) = u'_x(x,y) + i v'_x(x,y) = v'_y(x,y) - i u'_y(x,y),$$

hvoraf følger, idet $F'(Z) = 0$, at de fire Afledede u'_x, u'_y, v'_x, v'_y alle er 0 indenfor hele Ω . Af $u'_x = u'_y = 0$ følger imidlertid $u(x,y) = k_1$, og af $v'_x = v'_y = 0$ følger $v(x,y) = k_2$, hvormed er bevist, at

$F(Z)$ indenfor hele Ω har den konstante Værdi $k_1 + ik_2 = H$.

— Ud fra denne Sætning slutter vi endvidere, at dersom to Funktioner $F(Z)$ og $G(Z)$ har samme Differentialkvotient indenfor et Omraade Ω , d. v. s. dersom der i ethvert af Omraadets Punkter gælder Ligningen $F'(Z) = G'(Z)$, or $G(Z) = F(Z) + H$, hvor H er en Konstant; thi Differensen $G(Z) - F(Z)$ har jo Differentialkvotienten 0 indenfor hele Ω og er folgelig konstant indenfor dette Omraade.

28. Omvendt Funktion til en analytisk Funktion. Lad $F(Z)$ være en indenfor et Omraade Ω analytisk Funktion, og lad Z_0 være et vilkårligt fastholdt Punkt indenfor Ω . Idet $F(Z)$ er differentiable i Punktet Z_0 med Differentialkvotienten $F'(Z_0)$, gælder der for $Z \rightarrow Z_0$ Grenseligningen

$$F(Z) = F(Z_0) + F'(Z_0) \cdot (Z - Z_0) + o(r),$$

hvor $r = |Z - Z_0|$. Or her Tallet $F'(Z_0) \neq 0$, vil Funktionen $F(Z)$ altsaa i den umiddelbare Omegn af Punktet Z_0 forholde sig „omtrent“ som en linear Funktion, nemlig som Funktionen

$$W = F(Z_0) + F'(Z_0) \cdot (Z - Z_0),$$

hvilken sidste Funktion sjensynlig afbilder Omegnen af Punktet Z_0 i Z -Planen eenetydig og kontinuert paa Omegnen af Punktet $W_0 = F(Z_0)$ i W -Planen, nemlig afbilder Punkterne indenfor eller paa Randen af en lille Cirkel med Centrum i Z_0 og Radius R henholdsvis i Punkterne indenfor eller paa Randen af en tilsvarende Cirkel med Centrum i W_0 og Radius $R \cdot |F'(Z_0)|$. Vi vil bevise,

at et tilsvarende Resultat ogsaa gælder for selve Funktio-
nen $F(Z)$ (altsaa ogsaa gælder, naar vi tager Hensyn til
Restleddet $o(x)$), idet vi vil bevise følgende vigtige Sætning:

En indenfor et Omraade Ω analytisk Funktion
 $W = F(Z)$ afbilder Omegnen af et vilkaarligt Punkt $Z_0 =$
 $x_0 + iy_0$ indenfor Ω , der opfylder Betingelsen $F(Z_0) \neq 0$, enen-
tydigt og kontinuert paa Omegnen af det tilsvarende
Punkt $W_0 = F(Z_0)$ i W -Planen (se Fig. 19).

Sætter vi som sædvanlig $Z = x + iy$, $W = F(Z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$, kan den ved Funktionen $W = F(Z)$ bestemte Af-
bildning af Punkter i Z -Planen paa Punkter i W -Planen

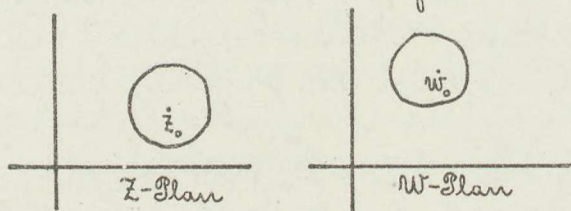


Fig. 19.

i reel Fremstilling karakteriseres som den Afbildning
af Punkter i XY -Planen paa Punkter i UV -Planen, der
bestemmes ved det reelle Funktionspar $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.
Idet begge disse Funktioner $u(x, y)$ og $v(x, y)$ har partielle
kontinuerte Afledede indenfor Ω (altsaa specielt i Om-
egnen af Punktet (x_0, y_0)) er i Følge en tidligere bevist Ko-
rdsætning (Afsnit II, § 69) Rigtigheden af den opstillede
Paastand om, at Funktionsparret $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ vir-
kelig bestemmer en enenstydig og kontinuert Afbild-
ning af Omegnen af Punktet (x_0, y_0) paa Omegnen af Punk-
tet $(u_0, v_0) = (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ godtgjort, naar vi blot har eftervist,
at Funktionsdeterminanten

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} u'_x(x_0, y_0) & u'_y(x_0, y_0) \\ v'_x(x_0, y_0) & v'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = u'_x(x_0, y_0) \cdot v'_y(x_0, y_0) - u'_y(x_0, y_0) \cdot v'_x(x_0, y_0)$$

er $\neq 0$. Dette følger imidlertid umiddelbart ud fra Ligningerne $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, der jo giver os

$$D(x_0, y_0) = (u'_x(x_0, y_0))^2 + (v'_x(x_0, y_0))^2,$$

naar vi samtidig erindrer Forudsætningen om, at $F'(Z_0) = u'_x(x_0, y_0) + i v'_x(x_0, y_0) \neq 0$, d. v. s. at $(u'_x(x_0, y_0), v'_x(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$.

Vi tilføjer straks til Orientering, at den nævnte Sætning ikke gælder, naar Forudsætningen om, at $F'(Z_0) \neq 0$, udelades. Betragter vi saaledes Funktionerne $W = F(Z) = Z^n$ ($n \geq 2$), er $F(0) = 0$, og Funktionerne $W = Z^n$ afbilder jo heller ikke Omegnen af $Z = 0$ eenetydigt paa Omegnen af Punktet $W = F(0) = 0$, idet der jo vel (naturligvis) til ethvert Z svarer et og kun et W , men ikke omvendt til ethvert W svarer kun en Værdi af Z ; hvortimod svarer der til ethvert W i Omegnen af $W = 0$ ialt n forskellige Værdier af Z i Omegnen af $Z = 0$, nemlig de n Værdier af Z , for hvilke $Z = \sqrt[n]{W}$ er en Føllesbetegnelse. Vi tilføjer, at idet $F'(Z) = n \cdot Z^{n-1}$ er $\neq 0$ for ethvert $Z \neq 0$, vil Funktionerne $W = Z^n$ i Følge den omhandlede Sætning afbilde Omegnen af ethvert $Z \neq 0$ eenetydigt paa Omegnen af det tilsvarende Punkt W .

Lad $F(Z)$ paany være en vilkaarlig indenfor et Omraade Ω analytisk Funktion og Z_0 et vilkaarligt Punkt indenfor Ω , blot underkastet den ene Betingelse, at

$F'(Z) \neq 0$, vi kan da omkring Punkket Z , afgrænse en lille Omegn $\mathcal{S}$, saaledes at for det første $F'(Z)$, der jo er en kontinuerlig Funktion af Z , er $\neq 0$ indenfor $\mathcal{S}$, og for det andet Funktionen $F(Z)$ afbilder Omraadet $\mathcal{S}$ i Z -Planen eenetydigt og kontinuert paa en tilsvarende Omegn $\mathcal{T}$ af Punkket $W_0 = F(Z)$ i W -Planen. Saalange vi kun betragter dette Omraade $\mathcal{S}$, kan vi da tale om den omvendte Funktion $Z = G(W)$ til Funktionen $W = F(Z)$, hvilken omvendte Funktion er defineret og kontinuert indenfor Omegnen $\mathcal{T}$ af Punkket W_0 i W -Planen, og naturligvis afbilder dette Omraade $\mathcal{T}$ eenetydigt paa Omraadet $\mathcal{S}$ i Z -Planen. Vi vil om denne omvendte Funktion $Z = G(W)$ bevise, at den er differentiabel indenfor Omraadet $\mathcal{T}$. Vi betragter hertil et vilkaarligt (fastholdt) Punkt W indenfor $\mathcal{T}$ og det tilsvarende Punkt $Z = G(W)$ indenfor $\mathcal{S}$; lad endvidere $W + \Delta W$ være et nærliggende Punkt indenfor $\mathcal{T}$ og $Z + \Delta Z = G(W + \Delta W)$ det tilsvarende Punkt i Nærheden af Z . Vi lader nu $\Delta W \rightarrow 0$ eller (hvad der kommer ud paa det samme) $\Delta Z \rightarrow 0$; da vil i Folge Fødsætning

$$\frac{\Delta W}{\Delta Z} \rightarrow F'(Z),$$

hvoraf umiddelbart følger (idet $F'(Z) \neq 0$), at

$$\frac{\Delta Z}{\Delta W} \rightarrow \frac{1}{F'(Z)}.$$

Hermed er Beviset for, at Funktionen $Z = G(W)$ er differentiabel indenfor Omraadet $\mathcal{T}$, fuldført. Den fundne Værdi for Differentialkvotienten, nemlig

$$g'(W) = \frac{1}{F'(Z)} = \frac{1}{F'(g(W))}$$

lærer os endvidere det vigtige Resultat, at den omvendte Funktion $Z = g(W)$ er analytisk indenfor Omraadet T (ligesom den oprindelige Funktion $W = F(Z)$ er analytisk indenfor Omraadet S), thi Differentialkvotienten $g'(W) = 1/F'(g(W))$ er jo en kontinuerlig Funktion af W indenfor T , fordi $F'(Z)$ er en kontinuerlig Funktion af Z og $Z = g(W)$ er en kontinuerlig Funktion af W .

Eks. Funktionen $W = F(Z) = e^Z$ er analytisk i hele den komplekse Plan, og dens Differentialkvotient $F'(Z) = e^Z$ er overalt $\neq 0$. Denne Funktion $W = e^Z$ vil folgelig afbilde Omregnen af et vilkaarligt Punkt Z eenetydigt og kontinuerligt paa en tilsvarende Omegn af Punktet $W = e^Z$, og vi kan derfor, naar vi indskrænker os til at betragte disse Omegne af Punkterne Z og W , tale om den omvendte (eenetydige) Funktion $Z = g(W)$. Er det betragtede Punkt $Z = x + iy$ beliggende indenfor Parallelstriken $-\pi < y < \pi$, vil den omvendte Funktion $Z = g(W)$ netop være den Gren af den uendeligheds Funktion $\log W$, som vi har kaldt Logarithmefunktionens Hovedværdi og betegnet med $\text{Log } W$; er Z beliggende indenfor Parallelstriken $-\pi + 2q\pi < y < \pi + 2q\pi$, bliver den omvendte Funktion til $W = e^Z$ naturligvis Grenen $Z = \text{Log } W + 2q\pi i$. I alle Tilfælde (d. v. s. ligegyldig, hvor Z er beliggende) bliver den omvendte Funktion $Z = g(W)$ en analytisk Funktion af W , og dens Differentialkvotient er bestemt ved

$$g'(W) = \frac{1}{F'(Z)} = \frac{1}{e^Z} = \frac{1}{W}.$$

Dette vigtige Resultat $\frac{d \log W}{dW} = \frac{1}{W}$ er den umiddelbare Generalisation af den indenfor det reelle Talomraade kendte Formel $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$.

Eks. Funktionen $W = F(Z) = \cos Z$ er analytisk i hele den komplekse Plan med Differentialkvotienten $\frac{dW}{dZ} = -\sin Z$. Idet denne Differentialkvotient har Værdien $\frac{dZ}{dW}$ i Punkterne $Z = p\pi$, og kun i disse Punkter, kan vi, naar vi indskrænker os til at betragte Omegnen af et vilkaarligt Punkt $Z \neq p\pi$, tale om den omvendte Funktion $Z = G(W)$ til Funktionen $W = \cos Z$, hvilken omvendte Funktion (alt efter Beliggenheden af Punktet Z) bliver den ene eller den anden Gren af den uendelighedsrige Funktion $Z = \arccos W$. i alle Tilfælde finder vi (ganske som indenfor det reelle Talomraade) Differentialkvotienten $G'(W)$ bestemt ved

$$G'(W) = \frac{1}{F'(Z)} = \frac{1}{-\sin Z} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 Z}} = \frac{1}{\sqrt{1-W^2}},$$

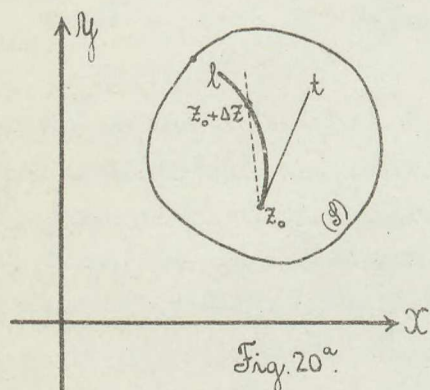
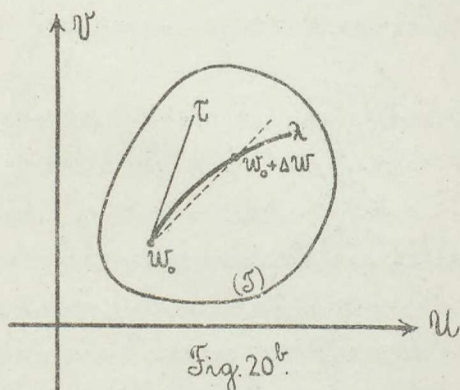
hvor $\sqrt{1-W^2}$ betegner den af Kvadratkodens to Værdier, der er lig med $-\sin Z$.

Eks. Paa ganske tilsvarende Maade viser man, at de forskellige Grene af Funktionen $Z = \operatorname{arctg} W$ er analytiske Funktioner, og at Differentialkvotienten af enhver af disse Grene (der afviger indbyrdes med hele Multipla af π) er bestemt ved

$$\frac{d \operatorname{arctg} W}{dW} = \frac{1}{1+W^2} = 1: \frac{1}{\cos^2 Z} = \cos^2 Z = \frac{1}{1+\tan^2 Z} = \frac{1}{1+W^2}.$$

29. Konform Abbildning. Lad $F(Z)$ være en indenfor et Omraade Ω analytisk Funktion, og lad Z_0 være et vilkaarligt

Punkt indenfor Ω , blot underkastet den Betingelse at $F(Z) \neq 0$. Funktionen $F(Z)$ vil da afbilde Omegnen Ω af Punktet Z_0 i Z -Planen eenetydigt og kontinuert paa Omegnen Ω af det tilsvarende Punkt W_0 i W -Planen (se Fig. 20^a og 20^b).

Fig. 20^a.Fig. 20^b.

Lad l betegne en lille kontinuert Kurve uden Dobbeltpunkter, der i Z -Planen løber ud fra Punktet Z_0 , og lad λ betegne den (ved Afbildningen $W = F(Z)$) tilsvarende Kurve, der over i W -Planen løber ud fra Punktet W_0 . Vi vil bevise, at dersom Kurven l i Endepunktet Z_0 har en bestemt Halvtangent t , vil den tilsvarende Kurve λ i W -Planen ligeledes have en bestemt Halvtangent τ i sit tilsvarende Endepunkt W_0 . Vi bemærker herhvil, at den Egenskab ved Kurven l at have en bestemt Halvtangent t i Endepunktet Z_0 - altsaa at den Halvlinje, der ud fra Punktet Z_0 drages igennem et nærliggende Kurvepunkt $Z_0 + \Delta Z$, vil nærme sig til en bestemt Grænsestilling t , naar Punktet $Z_0 + \Delta Z$ langs Kurven nærmer sig til det faste Punkt Z_0 - opsynslyg i analytiske Formulering kan udtrykkes derved, at Forholdet $\frac{\Delta Z}{|\Delta Z|}$ for Vektoren $\Delta Z = (Z_0 + \Delta Z) - Z_0$ skal nærme sig til en bestemt

Grauseværdi A , naar Punktet $Z_0 + \Delta Z$ langs Kurven nærmer sig til Z_0 , nemlig til det Tal A , der angiver „Fortegnet for Halvtangentens Retning“; med andre Ord, der gælder Grænseligningen

$$\operatorname{sign}(\Delta Z) = \frac{\Delta Z}{|\Delta Z|} \rightarrow A.$$

Opgaven er at vise, at Kurven λ ligeledes har en bestemt Halvtangent τ i Punktet W_0 , altsaa at Størrelsen $\operatorname{sign}(\Delta W) = \frac{\Delta W}{|\Delta W|}$ nærmer sig til en bestemt Grauseværdi B (hvilken Grauseværdi da vil være Fortegnet for Halvtangentens Retning), naar Punktet $W_0 + \Delta W$ langs Kurven λ rykker ind mod Punktet W_0 . Idet Abbildningsfunktionen $W = F(Z)$ er differentiabel i Punktet Z_0 med Differentialkoefficienten $F'(Z_0)$, gælder der Grænseligningen $\Delta W = F'(Z_0) \cdot \Delta Z + o(|\Delta Z|)$, hvorved vi faar

$$\frac{\Delta W}{|\Delta W|} = \frac{F'(Z_0) \Delta Z + o(|\Delta Z|)}{|F'(Z_0) \Delta Z + o(|\Delta Z|)|}.$$

I denne sidste Brøk kan vi under Grauseovergangen udenvidere bortkaste Leddet $o(|\Delta Z|)$, idet vi jo derved (da $F'(Z_0)$ er $\neq 0$) blot erstatter Tæller for sig og Næner for sig med andre uendelig smaa Størrelser, hvis Grauseforhold til de første er lig med 1. Vi finder herved, idet

$$\frac{F'(Z_0)}{|F'(Z_0)|} = \operatorname{sign} F'(Z_0), \quad \frac{\Delta Z}{|\Delta Z|} \rightarrow A,$$

at

$$\frac{\Delta W}{|\Delta W|} \rightarrow \operatorname{sign} F'(Z_0) \cdot A.$$

Hermed er bevist, at Kurven γ i Punktet W har en bestemt Halvtangent T , og vi har tillige fundet, at Retningen for denne Halvtangent T er bestemt derved, at det tilsvarende Forlegn B har Værdien $B = \operatorname{sign} F'(Z_0)$. I , hvor I er den til Halvtangenten T hørende Forlegn.

Lad a , b og k betegne de tre (hvor paa nær et Multiplum af 2π bestemte) reelle Tal, for hvilke

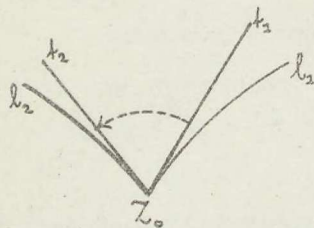
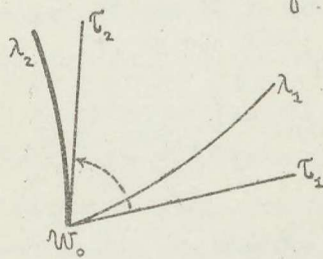
$$I = e^{ia}, \quad B = e^{ib}, \quad \operatorname{sign} F'(Z_0) = e^{ik};$$

da angiver a den Vinkel, som Halvtangenten T danner med den reelle Akse i Z -Planen, b angiver den Vinkel, som Halvtangenten T danner med den reelle Akse i W -Planen, og k er den Vinkel, som Differentialkvotienten $F'(Z_0)$, opfattet som Vektor i en kompleks Plan, danner med den reelle Akse i denne Plan. Den ovenfor fundne Ligning $B = I \cdot \operatorname{sign} F'(Z_0)$, altsaa Ligningen

$$e^{ib} = e^{ia} \cdot e^{ik} = e^{i(a+k)},$$

lærer os da, at der (bortset fra hele Multipla af 2π) gælder Ligningen $b = a + k$, d. v. s. den Vinkel $b - a$, som Halvtangenten T skal drejes (i positiv Omlobsretning) for at blive ensrettet med Halvtangenten T , har Værdien k og afhænger altsaa kun af Tallet $F'(Z_0)$, d. v. s. af Punktet Z_0 , medens den er uafhængig af, hvilket Par til hinanden svarende Kurver γ_1 og γ_2 (udfra henholdsvis Z_0 og W), vi betragter. Lad nu γ_1 og γ_2 være to Kurver i Z -Planen, der løber ud fra Punktet Z_0 og i dette Punkt har henholdsvis Halvtangen-

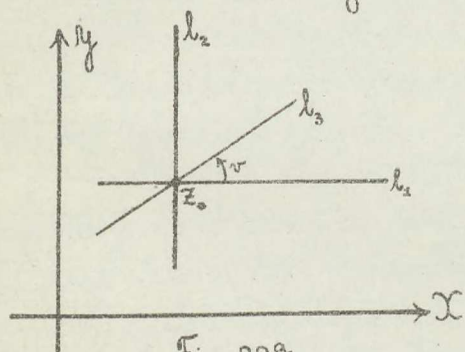
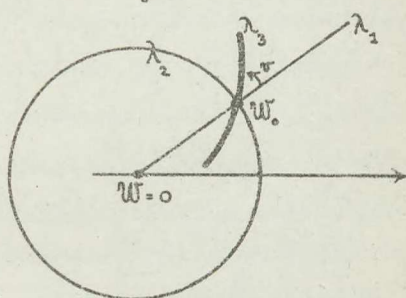
terne t_1 og t_2 (se Fig. 21^a), og lad λ_1 og λ_2 være de to tilsvarende Kurver i W -Planen, som løber ud fra Punktet W_0 , og hvis Halvtangenter i dette Punkt vi betegner med henholdsvis τ_1 og τ_2 (se Fig. 21^b). Da er $\angle(t_1, t_2) = \angle(\tau_1, \tau_2)$. Her vi skal jo dreje Halvlinierne t_1 og t_2 den

Fig. 21^a.Fig. 21^b.

samme Vinkel α for at opnaa, at de bliver ensrettet med henholdsvis τ_1 og τ_2 . Vi har hermed bevist den fundamentale Sætning, at den ved en analytisk Funktion $W = F(Z)$ bestemte Afbildning er vinkeltro, i den Forstand, at dersom to Kurver i Z -Planen skærer hinanden i et Punkt Z_0 under en vis Vinkel α , da vil de tilsvarende Kurver i W -Planen skære hinanden i Punktet $W_0 = F(Z_0)$ under den samme Vinkel α , under Forudsætning af, at Differentialkvotienten $F'(Z) \neq 0$.

Denne Egenskab ved Afbildning ved Hjælp af en analytisk Funktion $W = F(Z)$ bevirker øjensynlig, at der til enhver „uendelig lille“ Trekant i Z -Planen, som ligger i et Omraade, hvori $\frac{dW}{dZ} \neq 0$, svarer en „uendeligt ligedannet“ lille Trekant i W -Planen; man siger derfor om en saadan Afbildning, at den er ligedannet i de mindste Dele, eller kortere, at den er konform.

Eks. Funktionen $W = e^Z$ er analytisk i hele Planen og dens Differentialkvotient $\frac{dW}{dZ} = e^Z$ er overalt $\neq 0$. Det gælder derfor her om to vilkårlige Kurver i Z -Planen, som skærer hinanden i et Punkt Z_0 under en given Vinkel ν , at deres Billedkurver i W -Planen skærer hinanden i det tilsvarende Punkt W_0 under samme Vinkel ν . Lad os f. Eks. betragte de to paa hinanden vinkelrette Parallelbundter i Z -Planen, som indeholder henholdsvis X -Aksen og Y -Aksen (se Fig. 22^a), hertil maa der da svare over i W -Planen to Kurvesystemer, der ligeledes er hinandens retvinklede Trajektorier, og dette er da ogsaa Tilfældet, idet der jo til Linjerne $x = k$ svarer koncentriske Cirkler med Centrum i $W = 0$ og til Linjerne $y = k$ Halvlinjer ud fra Punkket $W = 0$ (se Fig. 22^b). Lad os der

Fig. 22^a.Fig. 22^b.

næst i Z -Planen betragte Parallelbundtet $y = x \operatorname{tg} \nu + k$, hvor ν er en given Vinkel ($0 < \nu < \frac{\pi}{2}$) og k en variabel (reel) Parameter, og lad os søge det tilsvarende Kurvesystem i W -Planen. Vi finder

$$W = e^Z = e^{x+iy} = e^{x+i(x \operatorname{tg} \nu + k)},$$

altsaa, idet vi indfører polare Koordinater (ρ, θ) , d. v. s. sætter $W = \rho \cdot e^{i\theta}$,

$$\rho = e^x, \quad \theta = x \operatorname{tg} v + k,$$

hvoraf følger ved Elimination af x

$$\rho = e^{-\frac{k}{\operatorname{tg} v} + \frac{\theta}{\operatorname{tg} v}} = H \cdot e^{m \cdot \theta},$$

hvor $m = \frac{1}{\operatorname{tg} v}$, medens $H = e^{-\frac{k}{\operatorname{tg} v}}$ er en (reel, positiv) Parameter. Det fundne Kurvesystem er et System af (indbyrdes ligedannede) logaritmiske Spiraler med $W=0$ som Pol; dette Resultat kunde vi iøvrigt have angivet paa Forhaand (uden nogen Begning), idet det søgte Kurvesystem i W -Planen, fordi den omhandlede Afbildning er vinkeltrø, jo netop maatte være Trajektorierne, svarende til den givne Vinkel v , til det ovenfor fundne System af Halvlinier ud fra $W=0$.

30. Cauchy's Integralsætning. Som nævnt i et tidligere Afsnit siges et Omraade Ω i Planen at være enkelt-sammenhængende, dersom det opfylder den Betingelse, at enhver Polygon, hvis Omkreds forløber helt indenfor Omraadet Ω , ogsaa med hele sit Indre tilhører dette Omraade.

Eks. Som simple Eksempler paa Omraader, der umiddelbart ses at være enkelt-sammenhængende, nævner vi: hele Planen, en Halvplan, den langs en Halvlinje opskaarne Plan, samt (som et almindeligere Eksempel) den Del af Planen, der ligger indenfor en lukket kontinuerlig Kurve uden Dobbelpunkter. — Som et

typisk Eksempel paa et Omraade, der ikke er enkelt-sammenhængende, nævner vi den Del af Planen, der ligger udenfor en lukket kontinuerlig Kurve uden Dobbeltpunkter; thi en Polygon, der omslutter denne Kurve, har jo sin Omkreds forløbende indenfor Omraadet, uden at dens Endre helt tilhører det. Som et vigtigt Grænsehilfælde heraf (nemlig svarende til at Begrænsningskurven har trukket sig sammen til et enkelt Punkt) nævner vi, at den „udprikkede“ Plan, d. v. s. hele Planen med Undtagelse af et enkelt Punkt, ikke er et enkelt-sammenhængende Omraade, hvad man (i Analogi med ovenfor) straks ser ved at betragte en Polygon, der omslutter det udprikkede Punkt.

Lad Ω være et enkelt-sammenhængende Omraade i XY -Planen, og lad $L(x,y)$ og $M(x,y)$ være to indenfor Ω givne reelle Funktioner, som har kontinuerlige partielle Afledede L'_x, L'_y, M'_x og M'_y indenfor hele Ω . Som vi beviste ved Behandlingen af reelle krumlinede Integraller, gælder det da, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at det krumlinede Integral

$$\int_L L(x,y) dx + M(x,y) dy,$$

taget langs en vilkaarlig, indenfor Ω forløbende, differentierbar Kurve l fra Punktet (a_1, a_2) til Punktet (b_1, b_2) , er uafhængig af Integrationsvejen l , d. v. s. kun afhængig af Udgangspunktet (a_1, a_2) og Endepunktet (b_1, b_2) , be-
staar deri, at der indenfor hele Ω gælder Ligningen

$$L'_y(x,y) = M'_x(x,y).$$

Ud fra denne Sætning om det reelle krumlinede Integral kan vi umiddelbart udlede følgende Sætning om komplekse Integraler, der under Navn af Cauchys Integralsætning spiller en fundamental Rolle indenfor de komplekse Funktioners Teori.

Er $F(Z) = u(x, y) + iv(x, y)$ en indenfor et enkelt sammenhængende Omraade Ω i den komplekse Plan analytisk Funktion, da har det komplekse Integral $\int_{\gamma} F(Z) dZ$, taget langs en vilkaarlig differentiabel Kurve γ , der forløber indenfor Ω fører fra Punktet $A = a_1 + ia_2$ til Punktet $B = b_1 + ib_2$, en Verdi, der er uafhængig af den Vej γ , langs hvilken Integralet føres, og kun afhængig af Udgangspunktet A og Endepunktet B .

Her spalter vi det komplekse Integral i sin reelle og rent imaginære Del, finder vi

$$\int_{\gamma} F(Z) dZ = \int_{\gamma} (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) =$$

$$\int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

og for ethvert af de to reelle krumlinede Integraler

$$\int_{\gamma} L_1 dx + M_1 dy = \int_{\gamma} u dx - v dy, \quad \int_{\gamma} L_2 dx + M_2 dy = \int_{\gamma} v dx + u dy$$

er jo den ovenfor nævnte Betingelse opfyldt, idet Funktionerne L_1, M_1, L_2, M_2 har kontinuerlige partielle Afledede indenfor Ω (fordi Funktionerne u og v har det), og disse Afledede paa Grund af de karakteristiske partielle Differentialligninger $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ tilfredsstiller Betingelsesligningerne

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial x}.$$

Eks. Idet Funktionen $F(Z) = e^{iZ} \sin(iZ)$ er analytisk i hele Planen, er $\int_{\gamma} e^{iZ} \sin(iZ) dZ$, taget fra et vilkaarligt Punkt A til et vilkaarligt andet Punkt B, uafhængigt af hvilken Vej Integralet føres, d. v. s. $\int_{\gamma} e^{iZ} \sin(iZ) dZ$ afhænger kun af A og B. Vi skal senere udregne dette Integrals Værdi.

Eks. Funktionen $F(Z) = \frac{1}{Z}$ er analytisk i hele Planen bortset fra det ene Punkt $Z=0$. Idet den udprykkede Plan jo ikke er et enkelt sammenhængende Omraade, kan vi ikke her ud fra Cauchy's Løsning slutte, at $\int_{\gamma} F(Z) dZ$ er uafhængigt af Integrationsvejen, eller, hvad der kommer ud paa det samme, at Integralet taget langs en vilkaarlig lukket Kurve har Værdien 0. Dette er da heller ikke Tilfældet, som vi umiddelbart kan vise ved at udregne Integralet taget f. Eks. langs en Cirkel C med Centrum i Begyndelsespunktet. Betegner vi Cirkelens Radius med R, og sætter vi $Z = R e^{i\theta}$ altsaa $dZ = R \cdot e^{i\theta} i d\theta$, finder vi, at det søgte Integral har Værdien

$$\int_C \frac{dZ}{Z} = \int_0^{2\pi} \frac{R \cdot e^{i\theta} i d\theta}{R e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

altsaa en Værdi $\neq 0$. Indskrænker vi derimod den Variable Z til at variere indenfor den opskaarne Plan, der fremkommer ved at borttage ikke blot Punktet $Z=0$, men en hel Halvlinje ud fra dette Punkt, gælder det indenfor dette Omraade B, at $\int \frac{dZ}{Z}$ taget langs en vilkaarlig lukket Kurve har Værdien 0, idet den opskaarne Plan (i Modsetning til den udprykkede Plan) jo er et enkelt sam-

menhængende Omraade. Vi tilføjer, at den Indskrænkning, vi pålægger Integrationsvejen ved at operere med den opskårne Plan i Stedet for med den udsprikkede Plan, åbenbart gaar ud paa at forhindre, at Punktet Z (som i det ovenfor nævnte Eksempel med Cirklen) "kredser" omkring det singulære Punkt $Z=0$.

31. Bestemt Integral. Lad som i forrige Paragraf $F(Z)$ være en indenfor et enkelt sammenhængende Omraade Ω analytisk Funktion. I det det komplekse Integral $\int F(Z) dZ$ taget langs en vilkaarlig, indenfor Ω forløbende, differentiabel Kurve fra et Punkt A til et andet Punkt B kun afhænger af Punkterne A og B og ikke af Vejen Γ , vil det være naturligt at give Udtryk herfor i bestemte Be-
legrelsen for Integralet ved i Stedet for at angive Integrationsvejen Γ kun at angive Udgangspunktet A og Endepunktet B . Dette gør man ved i Stedet for $\int_{\Gamma} F(Z) dZ$ at skrive

$$\int_A^B F(Z) dZ,$$

og man taler da simpelthen om det bestemte Integral af Funktionen $F(Z)$ fra A til B .

Er A , B og C tre vilkaarlige Punkter indenfor Ω , gælder der sjælsynlig Ligningen

$$\int_A^C F(Z) dZ = \int_A^B F(Z) dZ + \int_B^C F(Z) dZ,$$

idet vi jo kan tænke os Integrationsvejen fra A til C valgt saaledes, at den fører igennem Punktet B . Heri er specielt indeholdt (hvad der naturligvis ogsaa føl-

ger umiddelbart ud fra Integralets Definition), at $\int_a^b F(Z) dZ = -\int_b^a F(Z) dZ$, idet jo

$$\int_a^b F(Z) + \int_b^a F(Z) dZ = \int_a^a F(Z) dZ = 0.$$

Holder vi i det bestemte Integral $\int_a^b F(Z) dZ$ Udgangspunktet a fast, medens Endepunktet b opfattes som en Variabel, der frit kan variere indenfor Omraadet Ω , bliver det bestemte Integral aabenbart en Funktion af sin øverste Grænse b . Idet vi i Stedet for Bogstavet b skriver Bogstavet Z , vil vi om denne Funktion

$$G(Z) = \int_a^Z F(Z) dZ$$

bevise, at den i ethvert Punkt Z_0 indenfor Ω er differentiable med Differentialkvotienten $F(Z_0)$, hvorefter følger, at det bestemte Integral $G(Z) = \int_a^Z F(Z) dZ$ er analytisk indenfor Ω , idet $G(Z)$ jo har den kontinuerlige Differentialkvotient $F(Z)$.

Beweis: Lad Z_0 være et vilkaarligt fastholdt Punkt indenfor Ω og $\mathcal{H}$ en vilkaarlig (lille) kompleks Tilvækst. Vi betragter da Differensen

$$G(Z_0 + \mathcal{H}) - G(Z_0) = \int_a^{Z_0 + \mathcal{H}} F(Z) dZ - \int_a^{Z_0} F(Z) dZ = \int_{Z_0}^{Z_0 + \mathcal{H}} F(Z) dZ,$$

hvor vi vil tænke os Integrationsvejen i det sidste Integral forløbende relinet fra Z_0 til $Z_0 + \mathcal{H}$ (se Fig. 23). Idet Funktionen $F(Z)$ er analytisk og altsaa specielt kontinuerlig i Punktet Z_0 , vil $F(Z) \rightarrow F(Z_0)$ for $Z \rightarrow Z_0$, d. v. s. $F(Z) = F(Z_0) + \mathcal{E}(Z)$, hvor $|\mathcal{E}(Z)| = |F(Z) - F(Z_0)|$ kan gøres

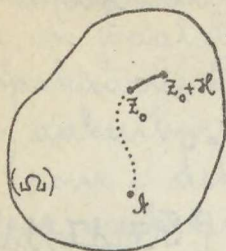


Fig. 23

vilkaarlig lille (d. v. s. $< \varepsilon$) ved blot at vælge $|Z - Z_0|$ tilstrækkelig lille (d. v. s. for $|Z - Z_0| < \delta$), med andre Ord, betegner $\alpha = \alpha(H)$ ovre Grænse for Funktionens $|g(Z)|$ indenfor Omraadet (Cirklen) $|Z - Z_0| \leq |H|$ vil $\alpha \rightarrow$

0 for $H \rightarrow 0$. Vi finder herved

$$\int_{Z_0}^{Z_0+H} F(Z) dZ = \int_{Z_0}^{Z_0+H} \{F(Z_0) + g(Z)\} dZ = H \cdot F(Z_0) + \int_{Z_0}^{Z_0+H} g(Z) dZ,$$

hvor

$$\left| \int_{Z_0}^{Z_0+H} g(Z) dZ \right| \leq \alpha \cdot |H|,$$

idet Integrationsvejen har Længden $|H|$ og der i alle Punkter undervejs gælder Uligheden $|g(Z)| \leq \alpha$. Idet $\alpha \rightarrow 0$ for $H \rightarrow 0$, gælder der altsaa Grænseligningen

$$\int_{Z_0}^{Z_0+H} g(Z) dZ = o(|H|).$$

Det saaledes fundne Resultat

$$g(Z_0+H) - g(Z_0) = \int_{Z_0}^{Z_0+H} F(Z) dZ = H \cdot F(Z_0) + o(|H|)$$

udsiger imidlertid netop, at $g(Z)$ er differentiabel i Punktet Z_0 med Differentialkvotienten $F(Z_0)$.

32. Ubestemt Integral og dets Sammenhæng med bestemt Integral. Lad $F(Z)$ være en kompleks Funktion givet indenfor et Omraade Ω , og lad os betragte Differentialligningen

$$\frac{dW}{dZ} = F(Z).$$

Ligesom indenfor det reelle Talomraade betegner vi enhver (eventuel) Løsning til denne Differentialligning, altsaa enhver Funktion $W = G(Z)$, der er differentiabel indenfor Ω med Differentialkvotienten $G'(Z) = F(Z)$, med $\int F(Z) dZ$ og kalder den et ubestemt Integral af Funktionen $F(Z)$. Der gælder i øjensynlig den Sætning, at hvis Differentialligningen $\frac{dW}{dZ} = F(Z)$ overhovedet har en Løsning $G(Z)$, da har den uendelig mange Løsninger, nemlig samtlige Funktioner $H(Z) = G(Z) + K$, hvor K er en vilkaarlig (kompleks) Konstant, og ingen andre. Thi er $G(Z)$ en indenfor Ω differentiabel Funktion, er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $H(Z)$ ligeledes er differentiabel indenfor Ω og med samme Differentialkvotient som $G(Z)$, jo den, at Differensen $H(Z) - G(Z)$ er konstant indenfor Ω .

Vi gaar nu over til at bevise følgende Hovedsætning: Er Ω et enkelt sammenhengende Omraade, og er $F(Z)$ en indenfor Ω analytisk Funktion, da besidder $F(Z)$ altid et ubestemt Integral (og folgelig uendelig mange), d. v. s. da har Differentialligningen $\frac{dW}{dZ} = F(Z)$ altid en Løsning $W = G(Z)$.

Beriset for denne Sætning følger umiddelbart ud fra et i forrige Paragraf fundet Resultat vedrørende det bestemte Integral. Thi er $F(Z)$ analytisk indenfor det enkelt sammenhengende Omraade Ω , og betegner z et vilkaarligt fast Punkt indenfor Ω , har vi jo i det bestemte Integral $\int_z^Z F(Z) dZ$ netop en Funktion af den for

lange Beskaffenhed, idet denne Funktion $G(Z) = \int^Z F(Z) dZ$ er differentiable indenfor Ω med Differentialkvotienten $F(Z)$.

Vi anfører dernæst nogle simple Eksempler paa ubestemt Integration.

Eks. Idet Funktionerne $\sin Z$, $-\cos Z$ og e^Z er differentiable i hele den komplekse Plan med Differentialkvotienterne $\cos Z$, $\sin Z$ og e^Z , gælder der i hele Planen Ligningerne

$$\int \cos Z dZ = \sin Z, \quad \int \sin Z dZ = -\cos Z, \quad \int e^Z dZ = e^Z.$$

Endvidere gælder der i hele Planen Ligningen

$$\int Z^n dZ = \frac{Z^{n+1}}{n+1} \quad (n \text{ positiv hel}),$$

idet jo $\left(\frac{Z^{n+1}}{n+1}\right)' = Z^n$.

Eks. Idet Funktionen $\frac{1}{Z}$ er analytiske i det enkelt sammenhengende Omraade, der fremkommer, naar den komplekse Plan skæres op langs en Halvlinje ud fra 0, f. Eks. langs den negative Halvakse, eksisterer der i Folge den ovenstaaende Hovedsætning sikkert et ubestemt Integral af Funktionerne $\frac{1}{Z}$ i den opskaaene Plan. Vi finder da ogsaa i den opskaaene Plan

$$\int \frac{dZ}{Z} = \text{Log } Z,$$

idet jo $\frac{d \text{Log } Z}{dZ} = \frac{1}{Z}$ indenfor hele det nævnte Omraade. Vi tilføjer, at der ikke eksisterer noget ubestemt Integral af Funktionerne $\frac{1}{Z}$ i hele det, ikke enkelt sammenhengende, Omraade, der fremkommer af Planen, naar kun det singulære Punkt $Z=0$ borttages, d. v. s. der findes ikke no-

gen (entydig) Funktion $F(Z)$ defineret for alle $Z \neq 0$, der er differentiablel i hele den udprykkede Plan med Differentialkoefficienten $\frac{1}{Z}$.

Eks. 3 Modsatning til Funktionen $\frac{1}{Z}$ har Funktionen $\frac{1}{Z^n}$ (n positiv, hel, ≥ 2) et ubestemt Integral i hele den udprykkede Plan, skønt dette Omraade ikke er sammenhængende; vi finder nemlig i hele den udprykkede Plan

$$\int \frac{dZ}{Z^n} = \frac{-1}{(n-1)Z^{n-1}},$$

idet Funktionen $\frac{-1}{(n-1)Z^{n-1}}$ jo er differentiablel for alle $Z \neq 0$ med Differentialkoefficienten $\frac{1}{Z^n}$.

I det Regnereglerne for ubestemt Integration umiddelbart udledes ud fra Regnereglerne for den omvendte Regnoperation, Differentiation, og idet Regnereglerne for denne sidste Operation jo er formelt de samme indenfor det komplekse Talomraade som indenfor det reelle Talomraade, er det klart, at Integrationsregningens Teknik i det store og hele kan overføres fra det reelle Talomraade til det komplekse Talomraade. Vi skal ikke her komme nærmere ind paa dette Forhold, men blot eksempelvis udregne Integralet $\int e^{3Z} \sin iZ dZ$, hvor Z er en kompleks Variabel; vi finder her ved delvis Integration

$$\int e^{3Z} \sin iZ dZ = \frac{1}{3} e^{3Z} \sin iZ - \frac{i}{3} \int e^{3Z} \cos iZ dZ =$$

$$\frac{1}{3} e^{3Z} \sin iZ - \frac{i}{9} e^{3Z} \cos iZ + \frac{1}{9} \int e^{3Z} \sin iZ dZ$$

altsaa

$$\int e^{3Z} \sin iZ dZ = \frac{1}{8} e^{3Z} (3 \sin iZ - i \cos iZ).$$

Vi beviser sluttelig følgende vigtige Sætning om Sammenhængen mellem bestemt og ubestemt Integral.

Lad $F(Z)$ være en i et enkelt sammenhængende Omraade Ω analytisk Funktion og lad $G(Z) = \int_a^Z F(Z) dZ$ være et vilkaarligt af Funktionens ubestemte Integraler. Lad endvidere A og B være to vilkaarlige Punkter indenfor Omraadet Ω . Da er

$$\int_A^B F(Z) dZ = G(B) - G(A).$$

Beviset for denne Sætning forløber ganske som Beviset for den analoge Sætning indenfor det reelle Talomraade: Idet de to Funktioner $\int_a^Z F(Z) dZ$ og $G(Z)$ begge er Løsninger til Differentialligningen $\frac{dW}{dZ} = F(Z)$, er deres Differens $\int_a^Z F(Z) dZ - G(Z)$ konstant indenfor Ω , denne Differens har imidlertid i Punktet $Z = A$ Værdien $0 - G(A) = -G(A)$, og det gælder derfor i ethvert Punkt Z indenfor Ω , specielt i Punktet $Z = B$, at $\int_a^Z F(Z) dZ = G(Z) - G(A)$.

Eks. For det i 30 betragtede bestemte Integral $\int_0^B e^{3Z} \sin iZ dZ$ finder vi, idet det ubestemte Integral $\int_a^Z e^{3Z} \sin iZ dZ = \frac{1}{8} e^{3Z} (3 \sin iZ - i \cos iZ)$,

$$\int_a^B e^{3Z} \sin iZ dZ = \frac{1}{8} [e^{3Z} (3 \sin iZ - i \cos iZ)]_a^B.$$

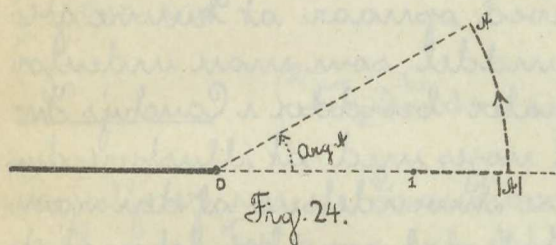
Er f. Eks. $A = 0$, $B = \frac{\pi}{2} \cdot i$, finder vi

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2} i} e^{3Z} \sin iZ dZ &= \frac{1}{8} \left\{ e^{\frac{3\pi i}{2}} (3 \sin(\frac{\pi}{2}) - i \cos(\frac{\pi}{2})) - (-i) \right\} \\ &= \frac{1}{8} \{ (-i) (-3) - (-i) \} = \frac{1}{2} i. \end{aligned}$$

Eks. Lad Z indskrænkes til at variere i den langs den negative Halvakse opskårne Plan, finder vi for et vilkårligt Punkt t i dette Omraade

$$\int_1^t \frac{dZ}{Z} = [\text{Log } Z]_1^t = \text{Log } t.$$

Vi tilføjer som et Gældseseksempel, at dette bestemte Integral $\int_1^t \frac{dZ}{Z}$ ogsaa uden Vanskelighed kan bestemmes direkte ud fra selve Definitionen paa det bestemte Integral, uden at gaa over ad det ubestemte Integral. Vi vælger hertil til Integrationsvej den brudte differentiable Linie (se Fig. 24), der først langs den reelle Akse fører fra Punktet 1 til Punktet



fra Punktet 1 til Punktet $|t|$ og dernæst langs en Cirkel med Centrum i 0 fra Punktet $|t|$ til Punktet t . Paa den første, retlinede, Del af Integrationsvejen er den Variable Z reel, og vi betegner den derfor med x , medens vi paa Cirkelbuen sætter $Z = |t| \cdot e^{i\theta}$, hvor θ varierer fra 0 til $\text{Arg } t$. Vi finder herved

$$\int_1^t \frac{dZ}{Z} = \int_1^{|t|} \frac{dx}{x} + \int_0^{\text{Arg } t} \frac{|t| \cdot e^{i\theta} i d\theta}{|t| e^{i\theta}} =$$

$$\int_1^{|t|} \frac{dx}{x} + i \int_0^{\text{Arg } t} d\theta = l \cdot |t| + i \text{Arg } t = \text{Log } t.$$

Vi tilføjer til Orientering, at dersom vi ikke havde indskrænket den Variable til at forblive indenfor den opskårne Plan, men havde tilladt den at kredse omkring det singulære Punkt $Z=0$, vilde $\int_1^t \frac{dZ}{Z}$ ikke have været

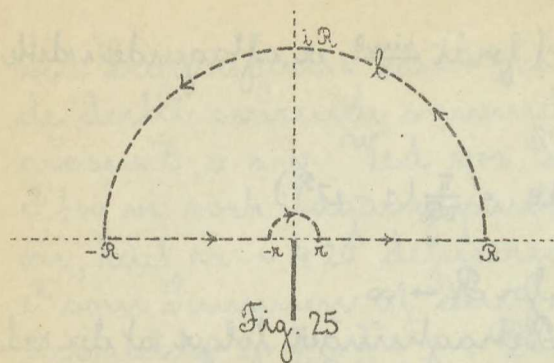
afhængig af Integrationsvejen, idet ethvert Omløb af Z omkring Begyndelsepunktet vilde forøge Integralets Værdi med $2\pi i$ (smlg. Eks. Side 127); vi vilde saaledes ikke altid komme netop til Hovedværdien $\log A$, men vilde kunne komme til de (uendelig mange) forskellige Værdier af Funktionen $\log A$, alt efter det Antal Gange den Variable Z omkredser Punktet 0, naar den gennemløber Integrationsvejen fra 1 til A .

33. Anvendelse af Cauchy's Integralsætning til Udregning af reelle Integraler. Ved Forsøg paa Udregning af bestemte Integraler indenfor det reelle Talområde er det ofte fordelagtigt undervejs i Mellemregningerne at operere med komplekse Variable i Stedet for med reelle Variable, idet man derved opnaar at kunne gøre Brug af det vigtige Hjælpermiddel, som man indenfor Læren om komplekse Integraler besidder i Cauchy's Integralsætning. Vi skal her nøjes med at illustrere denne Bemærkning ved at vise Anvendelsen af den nævnte Metode overfor et enkelt Integral, nemlig det egentlige Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, som man træffer paa ved forskellige Anvendelser.

Vi betragter hertil Funktionen

$$F(Z) = \frac{e^{iZ}}{Z} = \frac{\cos Z + i \sin Z}{Z},$$

der er analytisk i hele den komplekse Plan bortset fra Punktet $Z=0$. Idet $F(Z)$ saaledes er analytisk i det enkelt sammenhængende Område Ω , der fremkommer af Z -Planen ved at skære den op f. Eks. langs den



negative imaginære Halv-akse (se Fig. 25), har $\int F(Z) dZ$ taget langs den paa Figuren ankydede lukkede Kurve l Værdien 0. Vi finder herved

$$0 = \int_l F(Z) dZ$$

$$= \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^\pi e^{-R \sin \theta + i R \cos \theta} i d\theta + \int_R^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\pi^0 e^{-r \sin \theta + i r \cos \theta} i d\theta.$$

Ved Sammenbrækning af det 1^{ste} og det 3^{die} Integral finder vi

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_\pi^0 \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta.$$

Vi udfører nu en Grænseovergang, idet vi lader $0 \leftarrow r$ og $R \rightarrow \infty$. For $0 \leftarrow r$ vil det 4^{de} Integral nærme sig til Grænseværdien $-\pi i$; thi idet $e^Z \rightarrow 1$ for $Z \rightarrow 0$, vil Integranden $i e^{-r \sin \theta + i r \cos \theta}$ langs hele Integrationsvejen $\pi \geq \theta \geq 0$ gaa ligelig mod i for $0 \leftarrow r$, saaledes at

$$\int_\pi^0 e^{-r \sin \theta + i r \cos \theta} i d\theta \rightarrow \int_\pi^0 i d\theta = -\pi i.$$

Endvidere vil det 2^{de} Integral nærme sig til Grænseværdien 0 for $R \rightarrow \infty$. Dette følger umiddelbart idfra Ulikheden

$$\left| \int_0^\pi e^{-R \sin \theta + i R \cos \theta} i d\theta \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta;$$

thi idet $\sin \theta > \frac{2}{\pi} \cdot \theta$ for $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (fordi $\frac{\sin \theta}{\theta}$ er aftagende i dette Interval), er jo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}),$$

hvilken sidste Størrelse $\rightarrow 0$ for $R \rightarrow \infty$.

Ud fra de foregaaende Betragtninger følger, at der ved Grænseovergangen $0 \leftarrow \pi$, $R \rightarrow \infty$ gælder Grænseligningen

$$2i \int_{\pi}^R \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \pi i,$$

d. v. s.

$$\int_{\pi}^R \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Herved er bevist, at Integralet $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ er konvergent med Værdien $\frac{\pi}{2}$.

Vi tilføjer, at Integralets Konvergens (men ikke dets Værdi) allerede i Forvejen var os bekendt; thi i Integrationsvejens venstre Endepunkt $x=0$ har Funktionen $\frac{\sin x}{x}$ simpelthen en havelig Diskontinuitet (idet jo $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ for $0 \leftarrow x$), og hvad den uendelig lange Integrationsvej angaar, har vi i Afsnit III, § 41 bevist, at $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (og altsaa ogsaa $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$) er konvergent, omend kun betinget konvergent.

34 Analytiske Funksioners Udvikling i Potensrække. De specielle Funksioner af en kompleks Variabel z , som vi i dette Afsnit har betragtet, har, bortset fra de rationale Funksioner, væsentlig været Eksponentialfunktio-
nen e^z , de trigonometriske Funksioner, der jo umiddelbart kan føres tilbage til Eksponentialfunktio-

ved Ligningerne $\cos Z = \frac{1}{2}(e^{iZ} + e^{-iZ})$, $\sin Z = \frac{1}{2i}(e^{iZ} - e^{-iZ})$, samt de dertil svarende omvendte Funktioner $\log Z$, $\arccos Z$, $\arcsin Z$, o. s. v. Ved vor Definition af Hovedfunktion e^Z tog vi vort Udgangspunkt indenfor Potensrækkenes Teori, idet vi i § 20 definerede Eksponentialfunktionen e^Z som Summen af den (i hele Planet konvergente) Potensrække $1 + \frac{Z}{1!} + \frac{Z^2}{2!} + \dots$. Det nærmere Studium af denne Funktion e^Z og af de dermed forbundne Funktioner byggede vi imidlertid ikke paa Eksponentialfunktionens Potensrække, men derimod paa den (udfra Potensrækken udledt) simple Formel $e^Z = e^x(\cos y + i \sin y)$, og vi har derfor ikke haft Anledning til af Hensyn til vort Hovedformaal, Studiet af de omhandlede specielle Funktioner, at udvikle nogen videregaaende Teori for Potensrækker. Disse Rækker spiller imidlertid ved alle dyberegaaende Undersøgelser indenfor de analytiske Funktioners Teori en saa vigtig Rolle, at det vil være naturligt, inden vi afslutter Behandlingen af denne Teori, at give en orienterende Oversigt over Potensrækkenes Betydning herfor, idet vi dog skal nøjes med at fremdrage nogle enkelte Hovedsætninger og skal udelade alle Beviser.

Lad

$$A_0 + A_1(Z-Z_0) + A_2(Z-Z_0)^2 + \dots + A_m(Z-Z_0)^m + \dots = F(Z)$$

være en vilkaarlig Potensrække, hvori vi af Hensyn til det Følgende har betegnet den Variable med $Z-Z_0$ i Stedet for med Z , og lad ρ angive Rækkeens Konvergenzradius, saaledes at Rækken er konvergent indenfor Cirklen med Centrum i Punktet Z_0 og Radius ρ , divergent uden

for denne Cirkel.

I Analogi med en Løsning indenfor det reelle Talomraade gælder der da for det første den vigtige Sætning, at Potensrækken kan differentieres vilkaarligt ofte ledvis indenfor hele sit Konvergensomraade, d.v.s. den ved p Gange ledvis Differentiation fremkomne nye Potensrække er ligeledes konvergent for $|Z-Z_0| < r$ og fremstiller netop den p te Differentialkvotient $F^{(p)}(Z)$ af den oprindelige Funktion $F(Z)$ (der altsaa er vilkaarlig ofte differentiablel). Som en speciel Anvendelse af denne Sætning nævner vi, at vi ved at differentiere Potensrækken p Gange ledvis og derefter sætte $Z = Z_0$ finder følgende Formel for Koefficienterne

$$A_p = \frac{1}{p!} F^{(p)}(Z_0) \quad (p=0, 1, 2, \dots),$$

saaledes at Potensrækken kan skrives paa Formen

$$F(Z) = F(Z_0) + \frac{F'(Z_0)}{1!} (Z-Z_0) + \frac{F''(Z_0)}{2!} (Z-Z_0)^2 + \frac{F'''(Z_0)}{3!} (Z-Z_0)^3 + \dots$$

og derfor kan karakteriseres som den i det Ubegrænsede fortsatte Taylor'ske Række. — I den nævnte Løsning er endvidere specielt indeholdt, at den ved en vilkaarlig Potensrække indenfor Konvergenscirklen fremstillede Funktion $F(Z)$ er analytisk indenfor denne Cirkel, thi idet $F(Z)$ her er vilkaarlig ofte differentiablel, er den da yderligere en Gang differentiablel med en kontinuerlig Differentialkvotient.

Vi gaar dernæst over til at omtale følgende Hovedsætning, der i Modsætning til den foregaaende indek

Analogon har indenfor Læren om Potensrækker af en reel Variabel, d. v. s. som netop er karakteristisk for de komplekse, i Modsætning til de reelle, Funktioner:

Lad $F(Z)$ være analytisk indenfor et Omraade Ω , og lad Z_0 være et vilkårligt Punkt indenfor dette Omraade, samt lad r betegne Radius i den største Cirkel med Centrum i Punktet Z_0 , hvis Indre helt tilhører Omraadet Ω (se Fig. 26). Da kan Funktionen $F(Z)$ indenfor Cirklen $|Z - Z_0| = r$ udvikles i en Potensrække i den Variable $Z - Z_0$, d. v. s. der eksisterer en (og kun en) Potensrække $A_0 + A_1(Z - Z_0) + \dots$, der er konvergent indenfor denne Cirkel og fremstiller Funktionen $F(Z)$.

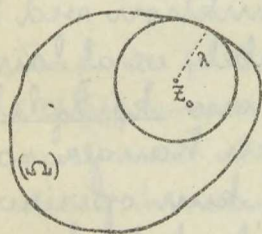


Fig. 26.

— I løs Formulering kan vi udtrykke denne Sætning saaledes: Indenfor de analytiske Funktioners Teori gælder det ikke blot, at enhver Potensrække fremstiller en analytisk Funktion, men ogsaa omvendt, at enhver analytisk Funktion kan udvikles i Potensrække.

— I løs Formulering kan vi udtrykke denne Sætning saaledes:

Indenfor de analytiske Funktioners Teori gælder det ikke blot, at enhver Potensrække fremstiller en analytisk Funktion, men ogsaa omvendt, at enhver analytisk Funktion kan udvikles i Potensrække.

Ved at kombinere denne sidste Sætning om, at en indenfor et Omraade Ω analytisk Funktion i Omegnen af ethvert Punkt Z_0 indenfor Ω kan udvikles i en Potensrække i den Variable $Z - Z_0$, med den ovenfor nævnte Sætning om, at enhver Funktion, der er fremstillet ved en Potensrække, er vilkårlig ofte differentiel, kommer vi til det overordentlig interessante Resultat, at enhver indenfor et Omraade analytisk Funktion af sig selv er, ikke blot (som forlangt i Definitionen)

nen) en Gang differentiabel med en kontinuerlig Differentialkvotient, men vilkaarlig ofte differentiabel. Denne Løsning staar i skarp Kontrast til Forholdene indenfor de reelle Funktioners Teori, hvor man jo meget let kan konstruere Funktioner, der er f. Eks. 3 Gange differentiable i et Interval (a, b) , uden at være 4 Gange differentiable. Denne væsentlige Forskel mellem Rækkevidden af Differentiabilitetsbegrebet indenfor det reelle og det komplekse Talomraade hindrer fra, at det Bædd, der pålægges en Funktion ved Fordringen om, at den skal være differentiabel, er af langt mere indgribende Art, naar Taler er om komplekse end om reelle Variable, hvad der igen hænger sammen med, at vi i det sidste Tilfælde kun opererer med reelle, altsaa endimensionale, Tilvækster h , medens vi i det første Tilfælde opererer med komplekse, altsaa bidimensionale, Tilvækster h .

Opg. 22. Bevis direkte (ved at sonderdele Funktionerne i sine Hovedkomponenter og anvende Løsningen om de karakteristiske partielle Differentialligninger), at Funktionen $\frac{1}{z}$ er analytisk i den udprykkede Plan, der fremkommer af Z -Planen ved at borttage Punktet $Z=0$, og at Funktionen $\text{Log } z$ er analytisk i den opskårne Plan, der fremkommer ved at borttage Punkterne paa den negative Halvakse. Angiv endvidere Funktionernes Differentialkvotienter.

Opg. 23. Vis, at den ene (og kun den ene) af de to Funktioner

$$(x^2 - y^2 - 4xy + 2x - y + 1) + i(2x^2 - 2y^2 + 2xy + x + 2y + 1)$$

og

$$(2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 2y + 3) + i(6x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 7y + 1)$$

er en analytisk Funktion af den komplekse Variable $z = x + iy$, og vis dernæst om denne Funktion, at den er et Polynomium i z .

Opg. 24. Find de to Cirkler i W -Planen, der ved Afbildningen $W = \frac{z-3}{z-4}$ svarer til Cirklerne $|z|=1$ og $|z-\sqrt{3}|=2$ i z -Planen, og eftervis, at Cirklerne i z -Planen og Cirklerne i W -Planen skærer hinanden under samme Vinkel.

Opg. 25. Udregn $\int_1^{2+3i} (2+3z+4z^2) dz$ og $\int_0^{3i} \cos^2(\pi iz) \sin^2(\pi iz) dz$.

Opg. 26. Lad $F(z)$ være en indenfor et enkelt sammenhængende Område Ω analytisk Funktion, og lad A være et vilkårligt Punkt indenfor Ω . Blevs, at

$$\int_{\gamma} \frac{F(z)}{z-A} dz$$

taget i positiv Omløbsretning langs en vilkårlig indenfor Ω forløbende lukket Kurve, der omslutter Punktet A , har Værdien $2\pi i F(A)$. Hvilken Værdi har Integralet, naar A ligger udenfor den lukkede Kurve γ ?

Op. 27. Find

$$\int_C \frac{z^2 - iz + 1}{(z-1)(z-2)(z-i)} dz$$

taget langs en differentiabel Kurve γ , der fører fra Punkt
 $z = -i$ til Punktet $z = 2i$ uden at skære de to Halvlinier
 $y=0, x \leq 2$ og $y=1, x \leq 0$.

Den lineære homogene Differentialligning med konstante Koefficienter.

35. Følgende Bemærkninger. Følgelig de reelle Funktioners Teori betragtede vi (Afsnit II, § 152) den lineære homogene Differentialligning

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + k_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + k_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + k_2 \frac{dy}{dx} + k_0 y = 0,$$

hvor $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ er vilkaarligt givne (reelle) Tal. Vi viste, at Mængden af Integraler (Løsninger) til denne Differentialligning danner en n -dobbelts uendelig Mængde, nemlig, nøjagtig talt, at der gennem et vilkaarligt givet Linieløsningspunkt $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ gaar en og kun en Integralkurve, d. v. s. der findes et og kun et partikulært Integral $y = f(x)$, der opfylder de n Betingelser

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y'_0, \quad \dots \quad f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

I det specielle Tilfælde, hvor den til Differentialligningen (1), svarende "algebraiske Ligning"

$$(2) \quad P(x) = x^n + k_{n-1}x^{n-1} + k_{n-2}x^{n-2} + \dots + k_1x + k_0 = 0$$

hvor n indbyrdes forskellige reelle Rødder $x_1, x_2, \dots, x_n$, kunde vi endvidere explicit angive det fuldstændige

Integral, nemlig

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x},$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n$ er vilkaarlige af hinanden uafhængige (reelle) Konstanter.

Vi afslutter vor Gennemgang af de komplekse Tals Teori med at vise, hvorledes man ved undervejs i Helteknegningerne at operere med komplekse Tal i Stedet for med reelle Tal – og specielt ved at benytte Eksponentialfunktioner for komplekse Værdier af den Variable – bliver i Stand til paa simpel Maade at kunne bestemme den fuldstændige Løsning til en hvilken som helst Differentialligning (1), altsaa til ogsaa at kunne løse Ligningen i det (almindelige) Tilfælde, hvor den tilsvarende algebraiske Ligning (2) ikke har lutter reelle Rødder. Den følgende Undersøgelse afgiver et nyt interessant Eksempel paa den store Betydning, det kan have at indføre komplekse Tal ved Behandlingen af Opgaver, der i sig selv intet har at gøre med disse Tal, d. v. s. som er stillet indenfor det reelle Talomraade.

36. Komplekse Integraler til Differentialligningen. Ved et komplekst Integral til den lineære homogene Differentialligning (1) med konstante (reelle) Koefficienter, forstaar vi en kompleks Funktion $F(x) = f(x) + iq(x)$ af den reelle uafhængige Variable x , som indsat i Differentialligningen tilfredsstiller den, d. v. s. hvor Ligningen

$$(3) (f^{(n)}(x) + iq^{(n)}(x)) + k_{n-1} (f^{(n-1)}(x) + iq^{(n-1)}(x)) + \dots + k_0 (f(x) + iq(x)) = 0$$

er tilfredsstillet for alle reelle Værdier af x . Idet venstre Side af Ligningen (3) kan skrives paa Formen

$$\{f^{(n)}(x) + k_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \dots + k_0 f(x)\} + i \{g^{(n)}(x) + k_{n-1}g^{(n-1)}(x) + \dots + k_0 g(x)\},$$

og idet et komplekst Tal da og kun da er 0, naar begge dets Komponenter er 0, er den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Funktionen $F(x) = f(x) + ig(x)$ er et komplekst Integral til Differentialligningen (1), saabenbart den, at de to Komponenter $f(x)$ og $g(x)$ begge er reelle Integraller til Ligningen. Forskellen mellem at betragte komplekse Integraller $F(x) = f(x) + ig(x)$ og reelle Integraller $f(x)$ kan altsaa siges at bestaa simpelthen deri, at vi betragter reelle Integralpar $(f(x), g(x))$ i Stedet for at betragte de reelle Integraller $f(x)$ hvert for sig. Heraf følger umiddelbart, at der gennem et vilkaarligt "komplekst" Linielement $(x, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0)$, hvor x_0 er et vilkaarligt reelt Tal og $y_0 = u_0 + iv_0, y'_0 = u'_0 + iv'_0, \dots, y^{(n-1)}_0 = u^{(n-1)}_0 + iv^{(n-1)}_0$ er $n-1$ vilkaarlige komplekse Tal, gaar en og kun en kompleks Integralkurve, d. v. s. at der findes et og kun et komplekst Integral $F(x)$, der opfylder de n Betingelser

$$F(x_0) = y_0, F'(x_0) = y'_0, \dots, F^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0,$$

nemlig den komplekse Funktion $F(x) = f(x) + ig(x)$, hvis Komponenter $f(x)$ og $g(x)$ er de to (entydig bestemte) reelle Integraller, der opfylder henholdsvis Betingelserne

$$f(x_0) = u_0, f'(x_0) = u'_0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = u^{(n-1)}_0 \text{ og } g(x_0) = v_0, g'(x_0) = v'_0, \dots, g^{(n-1)}(x_0) = v^{(n-1)}_0.$$

Vi fremhæver, at de komplekse Integraler $F(x) = f(x) + i g(x)$ som specielle Tilfælde omfatter de reelle Integraler $f(x)$, nemlig svarende til at Funktionen $g(x)$ er Differentialligningens Løsning $y = 0$.

Man indser endvidere umiddelbart, at dersom $F(x)$ er et vilkaarligt komplekst Integral til den lineære homogene Differentialligning (1), vil Funktionen $C \cdot F(x)$, hvor C er en vilkaarlig kompleks Konstant, ligeledes være et Integral til Ligningen, samt at hvis $F_1(x)$ og $F_2(x)$ er to komplekse Integraler, vil Funktionen $C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)$, hvor (C_1, C_2) er et vilkaarligt komplekst Konstantpar, ligeledes være et Integral.

For nu at bestemme de komplekse Integraler til Differentialligningen (1) sætter vi forsøgsvis $y = e^{Rx}$, hvor R er en kompleks Konstant, medens x stadig er en reel Variabel. Idet den indenfor det reelle Talområde gældende Formel

$$\frac{d e^{Rx}}{dx} = R e^{Rx}$$

jo bevarer sin Gyldighed, ogsaa naar R er en kompleks Konstant (den vilde jo iøvrigt ogsaa gælde, hvis x var en kompleks og ikke som her blot en reel Variabel), finder vi ved Indsættelse af $y = e^{Rx}$ i Differentialligningens venstre Side

$$e^{Rx} (R^n + k_{n-1} R^{n-1} + \dots + k_1 R + k_0) = e^{Rx} \cdot P(R),$$

og idet $e^{Rx} \neq 0$, bliver den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at e^{Rx} er et komplekst Integral til (1), derfor

den, at R er en (kompleks) Rod i den tilsvarende alge-
braiske Ligning

$$I(R) = R^n + k_{n-1}R^{n-1} + \dots + k_1R + k_0 = 0.$$

I Modsætning til hvad der gælder indenfor det reelle Talområde, gælder det nu her, hvor vi regner med komplekse Tal, at den algebraiske Ligning $I(R) = 0$ af n^{te} Grad (der ibrigt har reelle Koefficienter) altid har netop n Rødder $R_1, R_2, \dots, R_n$, af hvilke dog nogle specielt kan falde sammen, og ved at gøre Brug heraf kan vi, som vi i det følgende skal se, uden Vanskelighed bestemme det fuldstændige komplekse Integral til Differentialligningen. Ved den følgende nærmere Undersøgelse vil vi først behandle det (almindelige) Tilfælde, hvor Ligningen $I(R) = 0$ har lutter indbyrdes forskellige Rødder, og dernæst kort betragte det (specielle) Tilfælde, hvor visse Rødder er sammenfaldende.

37. Det almindelige Tilfælde (indbyrdes forskellige Rødder i $I(R) = 0$)
I det Tilfælde, hvor den algebraiske Ligning $I(R) = 0$ har n indbyrdes forskellige Rødder $R_1, R_2, \dots, R_n$, har vi ovenfor fundet n forskellige partikulære (komplekse) Integraler, nemlig de n Funktioner $e^{R_1 x}, e^{R_2 x}, \dots, e^{R_n x}$. Vi skal vise, at den fuldstændige Samling af komplekse Integraler er givet ved Formlen

$$(3) \quad y = C_1 e^{R_1 x} + C_2 e^{R_2 x} + \dots + C_n e^{R_n x},$$

hvor $C_1, C_2, \dots, C_n$ er n indbyrdes uafhængige komplekse Konstanter.

3 Følge en Bemærkning ovenfor er det klart, at Funktionen (3) for ethvert komplekst Konstantset $(C_1, \dots, C_n)$ virkelig er et Integral til (1). Det drejer sig derfor kun om at vise, at vi har faaet samtlige komplekse Integraler med, d. v. s. at der til ethvert komplekst Integral F eksisterer et (og kun et) komplekst Konstantset $(C_1, \dots, C_n)$, saaledes at der for alle x gælder Ligningen $F(x) = C_1 e^{R_1 x} + \dots + C_n e^{R_n x}$. Vi skal med andre Ord vise, at der findes en (og kun en) Funktion af Typen (3), som indeholder et vilkaarligt givet komplekst Linielement $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0)$, altsaa at de n Ligninger til Bestemmelse af de n Konstanter $C_1, \dots, C_n$

$$\begin{aligned} C_1 e^{R_1 x_0} + C_2 e^{R_2 x_0} + \dots + C_n e^{R_n x_0} &= y_0 \\ C_1 R_1 e^{R_1 x_0} + C_2 R_2 e^{R_2 x_0} + \dots + C_n R_n e^{R_n x_0} &= y'_0 \\ \vdots \\ C_1 R_1^{n-1} e^{R_1 x_0} + C_2 R_2^{n-1} e^{R_2 x_0} + \dots + C_n R_n^{n-1} e^{R_n x_0} &= y^{(n-1)}_0 \end{aligned}$$

har en og kun en Løsning. Idet disse Ligninger er lineære i de Ube kendte $C_1, \dots, C_n$, er Betingelsen herfor den, at Ligningerenes Determinant

$$\begin{vmatrix} e^{R_1 x_0} & e^{R_2 x_0} & \dots & e^{R_n x_0} \\ R_1 e^{R_1 x_0} & R_2 e^{R_2 x_0} & \dots & R_n e^{R_n x_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{n-1} e^{R_1 x_0} & R_2^{n-1} e^{R_2 x_0} & \dots & R_n^{n-1} e^{R_n x_0} \end{vmatrix} = e^{(R_1 + R_2 + \dots + R_n) x_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ R_1 & R_2 & \dots & R_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{n-1} & R_2^{n-1} & \dots & R_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$\neq 0$, dette er imidlertid Tilfældet, fordi de n komplekse Tal $R_1, \dots, R_n$ i Følge Forudsætning er indbyrdes forskellige (se Side 9).

38. Grænsetilfældet (sammenfaldende Rodder i $\mathcal{P}(R)=0$). Vi betragter først det specielle Tilfælde, hvor nogle af Rodderne $R_1, R_2, \dots, R_n$ i den algebraiske Ligning $\mathcal{P}(R)=0$ er sammenfaldende; lad os f. Eks. antage, at $R_1=R_2$ er en dobbelt Rod. Idet her $e^{R_1 x}$ falder sammen med $e^{R_2 x}$, eksisterer der kun $n-1$ partikulære Integraler af Formen $e^{R x}$, og vi kan derfor i dette Tilfælde ikke ved lineær Sammensætning af disse $n-1$ partikulære Integraler danne den fuldstændige n -dobbelt uendelige Samling af Integraler. Vi kan imidlertid her vise, ud fra Forudsætningen om at $R_1=R_2$ er en dobbelt Rod i $\mathcal{P}(R)=0$, at ikke blot Funktionen $e^{R_1 x}$ men ogsaa Funktionen $x e^{R_1 x}$ er et partikulært Integral, saaledes at vi i dette Grænsetilfælde kan lade det partikulære Integralpar $e^{R_1 x}, x e^{R_1 x}$ træde i Stedet for det (her sammenfaldende) Integralpar $e^{R_1 x}, e^{R_2 x}$. At $x e^{R_1 x}$ virkelig er et partikulært Integral, ses umiddelbart ved Indsættelse i Differentialligningen, idet vi gør Brug af, at ikke blot Polynomiet $\mathcal{P}(R)$ men ogsaa Polynomiet $\mathcal{P}'(R)$ bliver 0 for $R=R_1$. Thi af $y = x e^{R_1 x}$ følger

$$\frac{dy}{dx} = e^{R_1 x} (1 + R_1 x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{R_1 x} (R_1 + R_1 + R_1^2 x) = R_1 e^{R_1 x} (2 + R_1 x),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = R_1^2 e^{R_1 x} (R_1 + 2R_1 + R_1^2 x) = R_1^2 e^{R_1 x} (3 + R_1 x), \dots \frac{d^m y}{dx^m} = R_1^{m-1} e^{R_1 x} (m + R_1 x)$$

altsaa

$$\begin{aligned} \frac{d^m y}{dx^m} + k_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + k_0 y &= e^{R_1 x} \{ x(R_1^m + k_{m-1} R_1^{m-1} + \dots + k_0) + (m R_1^{m-1} + (m-1) k_{m-1} R_1^{m-2} + \dots + k_1) \} \\ &= e^{R_1 x} \{ x \mathcal{P}(R_1) + \mathcal{P}'(R_1) \} = 0. \end{aligned}$$

Det fuldstændige Integral bestemmes i dette Tilfælde ved

$$(4) \quad y = C_1 e^{R_1 x} + C_2 x e^{R_1 x} + C_3 e^{R_2 x} + \dots + C_n e^{R_n x},$$

hvad man viser ved ligesom ovenfor at efterwise, at der findes en og kun en Funktion af Typen (4), der gaar igennem et vilkaarligt komplekst Liniellement $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(m-1)})$.

Er $R_1 = R_2 = R_3$ en tre dobbelt Rod i den algebraiske Ligning $P(R) = 0$, viser man paa tilsvarende Maade, at de partikulære Integraller $e^{R_1 x}$, $x e^{R_1 x}$, $x^2 e^{R_1 x}$ i Udtrykket (3) for det fuldstændige Integral skal erstattes med $e^{R_1 x}$, $x e^{R_1 x}$, $x^2 e^{R_1 x}$.

39. Det fuldstændige reelle Integral til Differentialligningen. Efter at vi i det foregaaende har bestemt samtlige komplekse Integraller til Differentialligningen (1), kan vi naturligvis nu bagefter umiddelbart bestemme samtlige reelle Integraller, hvad der jo er vort egentlige Formaal. Thi idet de reelle Integraller er specielle Tilfælde af komplekse Integraller, skal vi jo her til blot indenfor Samlingen af komplekse Integraller udskille de reelle Funktioner og kaste de andre bort. Inden vi foretager denne Udskiltning vil det imidlertid være bekvemt først at foretage en simpel Omformning af det fundne Udtryk for det fuldstændige komplekse Integral, idet vi gør Brug af, at Konstanterne $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ i Differentialligningen (1) er reelle Tal, og at de ikke-reelle Rodder i den algebraiske Ligning $P(R) = 0$ derfor forekommer to og to konjugerede. Ved denne Omformning vil vi for at simplificere Betegnelserne tænke os,

at vi har at gøre med en Differentialligning af 3^{die} Orden, og at den tilsvarende algebraiske Ligning $P(R)=0$ har den reelle Rod $R_1=\alpha$ og de to indbyrdes konjugerede komplekse Rodder $R_2=\alpha+i\beta$, $R_3=\alpha-i\beta$. Det fuldstændige komplekse Integral er da

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{R_1 x} + C_2 e^{R_2 x} + C_3 e^{R_3 x} = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_3 e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_3 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ &= C_1 e^{\alpha x} + D_2 e^{\alpha x} \cos \beta x + D_3 e^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

hvor $D_2 = C_2 + C_3$ og $D_3 = iC_2 - iC_3$ er to af hinanden (og naturligvis af C_1) uafhængige komplekse Konstanter, fordi C_2 og C_3 er det og Determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{vmatrix} = -2i \neq 0$. If denesidste Form for det fuldstændige komplekse Integral fremgaar saa at sige umiddelbart, idet de indgaaende Funktioner $e^{\alpha x}$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ alle er reelle Funktioner, at de reelle Integraler simpelthen udskilles ved kun at tildele de arbitrære Konstanter C_1, D_2, D_3 reelle Værdier, det fuldstændige reelle Integral er altsaa givet ved

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_3 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

hvor c_1, c_2, c_3 er indbyrdes uafhængige (reelle) Konstanter.
Ekz. For den lineære homogene Differentialligning af 2^{den} Orden

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_1 \frac{dy}{dx} + k_0 y = 0$$

maa vi skelne mellem tre forskellige Tilfælde, svarende til de tre forskellige Muligheder angaaende Rødderne i den tilsvarende algebraiske Ligning

$$P(R) = R^2 + k_1 R + k_0 = 0.$$

1) Har $P(R) = 0$ de to indbyrdes forskellige reelle Rødder α_1 og α_2 , er det fuldstændige Integral givet ved

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}.$$

2) Har $P(R) = 0$ de to indbyrdes konjugerede komplekse Rødder $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$, finder vi

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

3) I Overgangstilfældet, hvor Ligningen $P(R) = 0$ har de to sammenfaldende reelle Rødder $\alpha_1 = \alpha_2$, er

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x} = e^{\alpha_1 x} (c_1 + c_2 x).$$

For Ligningen af 2den Orden har vi øvrigt allerede i den for de reelle Funktioners Teori (Afsnit II, § 134) angivet og diskuteret den fuldstændige Løsning.

Opg. 28. Find det fuldstændige Integral til Differentialligningen

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} - 2y = 0.$$

Op. 29. Los Lyringen

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

Indholdsfortegnelse.

	Side
<u>Indledning</u>	1
1. Definitioner og Regneregler.....	3
2. Modulus og Argument.....	4
3. Roduddragning.....	16
4. Funktion af en kompleks Variabel.....	20
5. Polynomium.....	22
6. Afbildning ved brudten lineær Funktion.....	26
7. En Hovedsætning om den brudte lineære Funktion.....	33
8. Afbildning af de komplekse Tal i Punkterne af en Kugleflade.....	38
9. Afbildning ved Funktionen $W = Z^n$	40
10. Følge med komplekse Elementer.....	44
11. Uendelig Række med komplekse Led.....	49
12. Grænseværdi for en Funktion af en kompleks Variabel.....	54
13. Uendelig små Størrelser.....	55
14. Uendelig store Størrelser.....	58
 <u>Kontinuerede Funktioner</u>	 63
15. Indledende Definitioner og Sætninger.....	63
16. Algebraens Fundamentalsætning.....	64
17. Dekomposition af en ægte brudten rational Funktion.....	68

18.	Ligelig Konvergens	Side 73
19.	Potensrækker	74
20.	Funktionen z	77
21.	Logarithmefunktionen	82
22.	Funktionerne $\cos z$ og $\sin z$	86
23.	Funktionerne $\arccos W$ og $\arcsin W$	93
24.	Funktionerne $W = \lg z$ og $z = \operatorname{arctg} W$	95
25.	Komplekst Integral	97

Differentiable Funktioner.....102

26.	Indledende Definitioner og Regneregler	102
27.	Analytisk Funktion	107
28.	Omvendt Funktion til en analytisk Funktion	113
29.	Konform Afbildning	118
30.	Cauchy's Integralsætning	124
31.	Bestemt Integral	128
32.	Ubestemt Integral og dets Sammenhæng med bestemt Integral	130
33.	Anvendelse af Cauchy's Integralsætning til Udreg- ning af reelle Integraler	136
34.	Analytiske Funktioners Udvikling i Potensrække	138

Den lineære homogene Differential- ligning med konstante Koefficienter.....145

35.	Indledende Bemærkninger	145
36.	Komplekse Integraler til Differentialligningen	146
37.	Det almindelige Tilfælde (indbyrdes forskellige Rødder i $P(R)=0$)	149
38.	Grausetilfældet (sammenfaldende Rødder i $P(R)=0$)	151
39.	Det fuldstændige reelle Integral til Differentialligningen	152

