DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

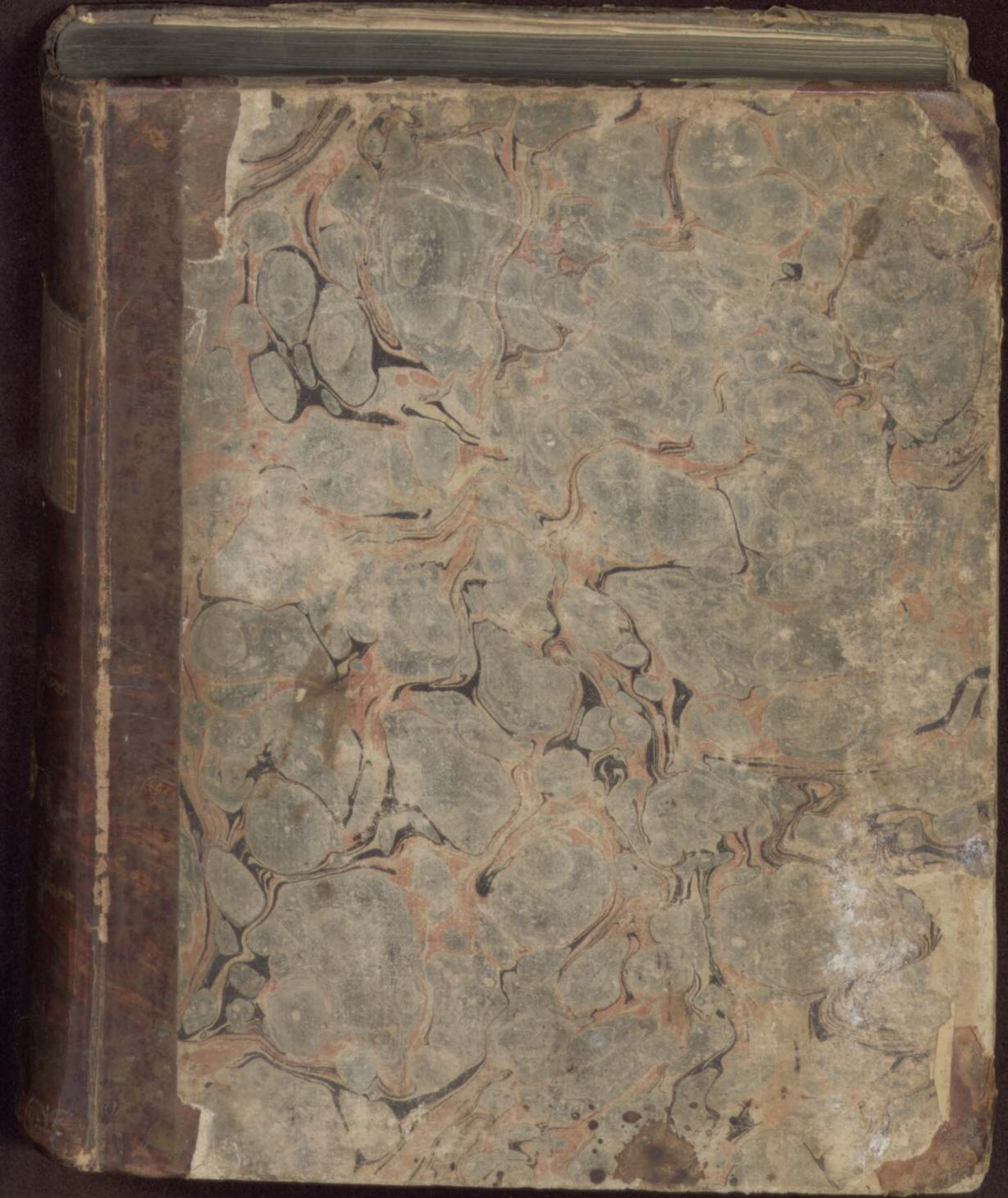
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*



24-1-85 I Quoted 3bd sail 1000.-

C Danielsen

531.0 Kra
1763 Bd. 1

Det kgl. Bibliotek

Forelæsninger
over
Mekanik
med hosføiede
Tillæg.

Efter
Kongelig Allernaadigst Befalning
ved Trykken meddeelte
af
Jens Kraft
Justits-Raad og Professor udi Mathematik ved Ridder-Akademiet.

Sorøe, 1763.
Trykt hos Jonas Lindgren, det Ridderlige Akademies Bogtrykker.

144403 M

Til

Kongen.

Ruhe.

Stormægtigste,
Allernaadigste
Arve-Herre og Konge!

Deres Kongelige Majestæts allernaadigste Befalning, i allerunderdanigst Følge af hvilken dette Værk er blevet sammenskrevet, anseer jeg med Føie, som en allernaadigst Tilladelse, at jeg ved dets Udfærdigelse og endelige Slutning allerunderdanigst tør nedlægge det ved Deres Majestæts Fødder.

Deres

Deres Majestæts Befalning er Aarsagen til dets Begyndelse, Deres Høi-Kongelig Gavmildhed til dets Fremgang. Kan jeg deraf giøre mig andet, end det allerunderdanigste Haab, at Deres Majestæt med naadige Øine vil anfee et Arbeid, paa hvilket hverken Flid eller Møie er blevet fpart, for, faa fnart fom mueligt og uden Ophold, at efterkomme Deres Allernaadigfte Befalning.

Hvor meget Deres Majestæt er Fædrene-Landets fande Fader, vidne og bevife utallige Stiftelfer, Naader og Gavmildheder, fom have givet alt i alle Stænder et nyt Liv, og hvorved, i at forge for det nærværende, paa mange Maader Planen er tillige blevet lagt, endog til de fildige Efterkommeres Lyksalighed. Himmelen felv fynes udi alle diffe ftore Foretagender øienfynlig at have rakt Deres Majestæt Haanden, i at have kronet DEM med Titel af uforfærdet Helt og med de Ære-riigefte Laurbær-Krantfe midt i den ønfkeligfte og meft blomftrende Fred. Midt

iblant

iblant saa mange store Sceptrets Bemøielser og uafladelige Sorger for det almindelige Beste, have Videnskaberne havt deres lykkelige Øieblik, som Thronen haver værdiget dem. De ere bestandig blevne anseete af Deres Majestæt for det de virkelig ere, for Livet og Sielen i alle menneskelige Indretninger, for Menneskets sande og store Rigdom. De ere derfor og af Deres Majestæt blevne understøttede med særdeles Naade og Nidkierhed. For en Herre, der tænker saa høit og saa vel, haver det ikke været nok alene at have havt sines Lykksalighed i Sigte, den af det hele menneskelige Kiøn, som ved Forstandens Oplysning befordres, haver tillige været Deres Majestæts Øiemeed. Deres Majestæts Ære-Støtte bør derfor og i Erindringens og Videnskabernes uforgiængelige Tempel til evigt Æreminde blive helliget Efterkommerne, som endnu efter utallige Tider skulle vide at fortælle, hvad Fridrich den Femte var Viis, Naadig og Stor.

Denne

Denne er de Store Kongers Løn, at være inderlig elsket i Tiden, og at blive med en dyb Høiagtelse omtalte af Eftertiden. Jeg forbliver

Stormægtigste,

Allernaadigste

Arve-Herre og Konge!

Deres Kongel. Majestæts

allerunderdanigste
Arve-Undersaat og Tiener
Jens Kraft.

Fortale.

Det er saa almindelig bekiendt, og en af alle saa antagen Sandhed, at de mathematiske Videnskaber iblant de øvrige menneskelige ere nogle med af de nyttigste og mest fornødne; saa det ikke behøves, derom at handle udførlig. Jeg vil desangaaende derfor ikke tale uden kortelig, for alene i faa Ord at vise Mathematikens Fortieneste af Mennesket, betragtet som Borger, betragtet som fornuftigt.

Nytten i det Borgerlige falder strax i Øinene. Hvo veed ikke, at en Stats Forsvar beroer paa en Mængde Indretninger, som ingen kan udføre eller iverksætte, uden ved Geometriens Hielp? Ligesaa lidet er man uvidende om Maskin-Væsenets Nytte. Der behøvedes vel intet andet til at bringe en heel Stat i Uorden

og et heelt Folk i Forvirring, end om man endog for en ganske kort Tid skulde tabe Brugen af de nødvendigste Maskiner. Hvad Mængde Arme hvile ikke i vor Tid eller bruges til andet, imidlertid at vi overlade Vind og Vand de Forretninger, som kostede vore Forfædre deres egne Kræfter og en ubeskrivelig Møie?

Ei alene det Nødvendige, men endog det Magelige og Behagelige i Livet behøver i utallige Henseender Mathematikens Hielp. Vore Bygninger ere iblant andet derpaa et sienfynligt Beviis, skiønt Architekturen dog aldrig bliver uden en med af de mindst betydelige Videnskaber, hvoraf Geometrien haver giort Menneskет Forærring: Med mindre at man under Navn af Architektur tilligemed vil forstaae Berg- og Vandverkernes Anlegning. Architektur, tagt i en saa vidtløftig Mening, udfordrer en anselig mathematisk Kundskab.

Alle Konster, og fast alle Haandverker, laane enten til stor, eller til nogen Deel det af Mathematik, som de behøve til deres Fuldkommenhed og Drift. Land-Maalningen, Seiladsen med Søe- og Land Korterne ere heel igiennem Mathematikens Arbeid. Saafremt man derfor i en Stat ikke nok skiønnede paa Mathematikens Nytte og store Fortieneste af det Almindelige, da kan intet andet deri være Aarsag, end den sædvanlige menneskelige Efterladenhed i at tænke, som alene elsker at nyde Fordelene, uden at bekymre sig om eller at sætte Priis paa de Kilder, udaf hvilke de flyde.

For

Fortale.

For at giøre Brug af Mathematiken i det Borgerlige, eller for at forstaae den saa kaldte anvendte eller applicerte Mathematik, maa man nødvendig først have lært den theoretiske, hvilken sidste bestaaer af Geometrie og Algebra. Den første er en af de mindste, men paa alle Fundamenters Maade den betydeligste af alle mathematiske Videnskaber. Den handler ikke uden om rette Linier og Cirkel-Linien, hvis Egenskaber i den og anvendes til Legemernes Udregning. Den kan derfor med Føie ansees som Mathematikens A, B, C, og man bruger ikke lang Tid, for at giøre sig disse første Grunde bekiendte, skiønt den menneskelige Forstand haver behøvet hele Aar-Hundrede, for at udvikle dem. Saa indskrenket som Geometrien er, saa uomskrenket er Algebren. Alt maaleligt henhører under dens Methoder, og man siger ikke for meget, naar man kalder den de nyere Tiders Ære, Nøglen til de store geometriske Opdagelser, og den Ariadneiske Traad, hvilken lettere end alt andet kan hielpe ud af det store og forviklede Undersøgningernes-Labyrinth. De bedrage sig derfor meget, som troe, at til at være Geometer, intet andet udfordres, end den egentlig saa kaldte Geometrie og Bogstav-Regning i Algebra, tilligemed de løbende Sætninger af den applicerte Mathematik. Intet andet kan være denne Videnskabs Tilvext og Fremgang meer hinderligt end denne Tanke. Derved alene at blive Geometer, er at blive det med ringe Bekostning, og man tør ikke vente, at Mathematiken vil giøre stor Fremgang i et Land, saa længe som man ikke giør Forskiel imellem Videnskabens første Elementer og Videnskaben selv. Desuagtet vil jeg ikke, ved at sige, at Algebren og dens Anvendelse langs

hen efter i Mathematiken et et betydeligt og besværligt Arbeid, bestyrke den Tanke, som synes at have rodfæstet sig hos mange, at nemlig denne Videnskab er saa tung, som om man for at give sig af med den maatte have tabt Lysten til det Angenemme udi Livet. Algebren er langt fra ikke saa farlig, skiønt den paa andre vanskelige Videnskabers og Konsters Maade udfordrer Arbeid og Møie, Naturel, Flid og Skarpsindighed. Langt fra at kunde kalde den det Tungeste af Mathemathiken, bør man vide, at den bestaaer af en Mængde, i Sammenligning med de Synthetiske, lette Methoder, hvorved man undgaaer en anseelig Møie, som man maatte underkaste sig, om man fulgte disse sidste; ikke at tale om, at man gier ved de analytiske Oplosninger en Mængde Undersøgninger muelige, som det maaskee blev plat umueligt at finde og at komme afsted med ved de synthetiske alene.

Geometrie og Algebra ere saaledes høist-nødvendige, deels for at sætte de Videnskaber, som nytte i det Borgerlige, i Udøvelse, deels og for at bringe dem immerfort til en større Fuldkommenhed, end den kan være, hvilken de allerede virkelig have. Men ere de, saavelsom de øvrige Mathematikens Dele, om ikke plat umistelige, dog i høi Grad nyttige for Mennesket, ikke meer betragtet som Borger, men som fornuftigt? Skierpe de virkelig Forstanden? Give de den et nyt Lys? Man maa vel agte, at naar jeg dertil siger Ja! jeg da derved langt fra ikke paastaaer, enten at der jo kunne findes, og findes virkelig, ypperlige og af Naturen opvakte Genier, som uden al Hielp af Geometrie ere dannede til at handle

og

og tænke paa en meget fuldkommen Maade; og endnu meget mindre, at den, som enten af Naturen er uheldig dannet, eller ved Omstændighederne blevet fordervet, med et Ord, at det, som i sig er middelmaadigt og slet, ved Geometrien alene skulde kunde blive noget uligneligt og stort. Det, som her spørges om, bliver alene: Om ikke de i sig store Genier ved Mathematikens Hielp kunde blive bragte til at overgaae sig selv, og de maadelige derimod ligeledes kunde komme til at stige en Grad høiere? Dette, mener jeg, kan sikker bekræftes. Alt hvad der befordrer det Tydelige i Forstanden, i sær om det twinger den til, deri at faae en Vane, maa unegtelig kunde forhøie den. Men Tydelighed og Orden i Tankerne ere Sielen i Mathematik. Ikke det alene. De største Genier have gierne den Feil tilfelles med de smaae, at de troe ofte af Vane og Overilelse, af løse Beretninger, af Yndest og Had, uden at være nok i Stand til at skille det Meente fra det Sande. Sandheds rette Undersøgning, i sær i praktiske Tilfælde, er Menneskets almindelige Anstøds-Steen, og den sædvanlige Klippe, hvorpaa vi alle saa tidt lide Skibbrud. Jeg tør ikke sige, at den Dueligheed, som Mathematiken indplanter Forstanden, aldeles kan forekomme dette store Onde, men jeg troer, at den anseelig kan forringe det, da den i og af sin Natur er usikre og indbildte Meningers Svøbe og Riis i alt det, som falder inden for dens Grendser, og meer end alle andre Videnskaber viser os Veien, som maa følges i Henseende til det, som falder uden for dem. Men kan den skaffe Forstanden Færdighed og Vane i at tænke med Orden, og at indsee Sandhedernes sande Sammenhæng. Kan den skaffe Forstanden en Fær-

dighed i at afskaffe forudfattede Meninger; denne Menneskets sande Pest og de Fornuftiges Vanære: Skulde den da ikke og kunde ansees som almindelig nyttig, og som fast nødvendig for Mennesket; hvad heller at dette var et i sig stort Genie eller lidet.

Ved alt dette bliver disse Videnskabers Fortieneste af det fornuftige Menneske endnu langt fra ikke staaende. Gaaer man tilbage til Forfædrenes ældgamle Tider, og undersøger, hvad der haver været Aarsag i den utallige Mængde falske Meeninger, som i den Tid havde overstrømmet Verden, da kan der ingen Tvivl være paa, at denne ikke haver været nogen anden end en falsk Forklaring af Naturen. Soel, Maane og Stierner bleve Guder, fordi man ei kiendte Tingenes Løb. Alle falske Religioner spirede ud af denne Plante-Skole. Man meente sig at see overalt onde og gode Aander i Naturen, fordi man fandt den i alle sine Dele virksom. Uvidenheden giorde Mennesket urimeligt nok til at tilbede de foragteligste Insekter, som de traadde paa, og de Urter, de aade. Men hvad haver heri hiulpet Mennesket til Rette igien, for saa vidt som Fornuftens Dannelse i deslige Ting kan have Sted? Intet andet, end den fornuftige og uimodsigelige Forklaring af Naturen, som baade først og sidst haver været, ligesom den endnu er og altid bliver Mathematikens immervarende Arbeid. Man kan sige, at den saa meget, som Fornuften kan giøre det, haver kuldkastet de falske Guders Throner ved at give Naturen igien, hvad der saa uimodsigelig var dens. Derved aabnede den Døren for alle store og høie Tanker. Denne Mathematikens Fortieneste af Mennesket

bliver

bliver der sædvanlig ikke lagt saa meget Merke til, som det sig burde, uagtet at den i sig er den allerstørste og allerædelste.

Det er af denne sidste Aarsag, at man sædvanlig ikke sætter saa stor Priis paa Astronomien, som man burde og skulde. Denne Videnskab haver unegtelig sin meget store Fortieneste af det Borgerlige. Navigationens sidste Fuldkommenhed beroer paa den. Vores Kundskab om Tiden, denne saa høit nødvendige Indretning i det Borgerlige, beroer, saa at sige, ikke uden paa nogle faa astronomiske Jagttagelser. Beviser det ikke, hvor høit man bør agte Resten? Men Astronomiens Nytte for Menneskет, som Borger, maa være saa stor, som den være vil, dens Fortieneste af Menneskет, som fornuftigt, bliver altid større. Ingen anden Videnskab viser os klarere Tingenes store Herre og Mester. Tanken om Verden, saaledes som Astronomien lærer os den, er noget med af det Lykkeligste og Største i Menneskets Kundskab. Hvor meget feile da ikke de, som holde Astronomien for en simpel Nysgierrighed, og tale om dens Opdagelser, som om Folkene i Maanen, fordi de kiende lige meget til begge?

Jeg tør derfor sige, at saasnart som man vilde indføre iblant Menneskет et almindeligt Barbarie igien, kunde dertil intet bedre Middel foreslaaes, end at bringe, hvad man kalder Mathematik, udi Forglemmelse. Alt vilde da snart løbe ud paa: Jeg mener; Jeg holder for. Og naar ingen meer kunde bevise, kom det endelig an paa, hvad Mening der fik størst Partie. Historien viser,

at

at det Urimeligste haver gemeenlig, naar Tingene stod paa denne Fod, fort det fornuftigste i Triumph. Saa det saaledes vel baade er og bliver unegteligt, at Nødvendigheden af Mathematiken er i det Menneskelige overmaade stor.

Det allerede sagte giver mig Anledning til at tale om Mathematiken, for saa vidt den læres paa Akademier. At den Lærdom, som paa dem gives, er nyttig for Mennesket, betragtet som fornuftigt, mener jeg, er i det foregaaende meer end nok blevet beviist. Men man kan med en Slags Feie sperge, om de akademiske Theorier og ere ligesaa i det Borgerlige og Praktiske. De, som denne Personer af det, de give sig ud for, ville vel neppe troe det. For dem er det nødvendigt, at den, som skal ansees for duelig i Praktik, skal kalde sig Praktikus. For de fleste Mennesker behøves ikke stort andet end Titlen, for i deres Tanke at være alt. De, som tænke bedre, ville derimod let finde, at Udevelsen ikke kan gaae videre end Kundskaben; og denne sidste er intet andet end det, som man paa Akademierne kalder Theorie. En Person, som forener med Theorien den Færdighed i at sætte den i Verk, som en lang Øvelse giver, fortiener først det Navn af duelig Praktikus. Et Navn, som tilforladelig er stor Høiagtelse værd. Alle andre arbeide i blinde, hvad der lykkes, lykkes; hvad der vanlykkes, gaaer galt. Til Lykke arbeides der de fleste Tider for Personer, som troe, at Sagen ei kunde gjøres bedre, saa man kalder umueligt, hvad der ikke er uden Uvidenhed, og naar noget lykkes til Deels, ansees det som mageløst og uden Lige. Dette er en Slags

uheldig

uheldig Skiebne, som Mangel af Kundskab haver fast overalt bebyrdet det Menneskelige med. Men for at komme nærmere til Sagen, kan videre spørges, om ved Theorien meer er at udrette, end ved det, man kalder Praktik? Man kan dertil paa en vis Maade svare baade Nei! og Ja! Naar Praktik udøves som en Følge af Theorien, saaledes som den bør; da bliver ved Theorien ikke meget meer at giøre end ved den, af Aarsag; at, saasnart som noget Nyt ved de theoretiske Undersøgninger findes, bliver det strax til Nytte i Brugen meddeelt udi lette Regler, hvilke man siden følger, uden ofte at vide hvorfor? Derimod, da Theorien idelig gaaer videre og videre, skiønt Anledningerne dertil meget ofte gives saavel af heldige som uheldige praktiske Forsøg, saa er intet vissere, end at de borgerlige Indretningers Fuldkommenhed alt meer og meer iverksættes ved de theoretiske Undersøgninger af Sandhedernes almindelige Sammenhæng, imidlertid at Praktiken immer bliver staaende ved det den veed, uden at kunde selv udvide de Grendser, inden for hvilke den allerede staaer.

Desuagtet var det høist urimeligt, om nogen vilde troe, at man i Mathematik havde, i Henseende til det Borgerlige, bragt det saa vidt, at intet bedre kunde giøres. Langt fra! I de fleste Ting er det mindste giort, det meste er endnu tilbage at giøre. Mathematiken er, som alle andre menneskelige Videnskaber, høist ufuldkommen. Man martrer sig længe, man regner, man undersøger, man tænker efter, man tretter sig omsider, uden derved at vinde de fleste Tider andet, end en nye Overbeviisning om, at Menne-

skets Forstand er svag, og at den Mine, man arbeider i, er utaknemmelig og haard. Men ber deraf følge andet, end at man, langt fra at forsømme Theorien, bør være uendelig bekymret for at giere det alt fuldkommere og fuldkommere, endskiønt at dette de fleste Tider maa skee ved at aabne nye Veie, som ere vanskelige at gaae og fortrædelige at bane?

Imidlertid beroer Sandhedernes Tilvext ikke alene paa Geometrernes Dueligbed og Flid, men de fleste Tider paa de Omstændigheder, hvori de leve, saavelsom paa de Opmuntringer, hvilke de have. Ikke det alene, men da disse Videnskabers Fuldkommenhed i en Mængde Tilfælde beroer paa Forseg, giorte i Stort, som ikke, uden ved store Fyrsters besynderlige Gavmildhed og Hielp, kunde foretages, saa staaer Opdagelsen af de endnu skiulte Naturens Love til stor Deel ikke i Geometrernes Magt, skiønt det endnu blev uvist, naar man endog fandt Mœcenater, og havde alle Hielpe-Midler, for hvorvidt Opdagelsen endda stod i Menneskets. Saa længe, som vi saa lidt kiende de sande Naturens Love, som endnu i vor Tid, er det meer at undre, at man i den lærde Verden endda haver bragt Kundskaben saa vidt, som at man ikke haver bragt den videre. Men deri er intet andet Aarsag, end de ypperlige geometriske Methoder, skiønt de, som alt Menneskeligt, have deres visse Grændser. Saasnart som man er lykkelig nok til at finde nye, gaaer man gierne ved dem med en utroelig Hastighed en vis Vei fort, som man før ei kunde betræde. Denne Udlebet, begynder siden et hvert Skrit at blive meer og

meer

meer møisomt, indtil at man endelig og omsider finder et nyt Grendse-Skiel sat, som ei kan overstiges, før man ved en nye Lykke faaer nye Hielpe-Midler og Kræfter.

Man seer deraf, hvor meget de Navne fortiene at foreviges, som rekke det hele Menneskelige Haanden i at befordre ved vise Indretninger og sande Opmuntringer saa vanskelige og nyttige Dele af den menneskelige Kundskab. Videnskaberne tabe sig let, dertil behøves ikke meget. De sættes derimod vanskelig igien i Flor. Destomeer bør man skionne paa et for Videnskaberne saa gunstigt Seculum, som vor Store **Friderichs**, saavelsom paa Dem, der under Hans lykkelige Regiering ere sande Mœcenater.

Paa Akademierne, som Videnskabernes faste Sæder, bør man i de offentlige Forelæsninger særdeles see paa, at saa meget læres, som Tilhørerne behøve, for strax at faae Kundskab om det, for dem Nødvendige og Nyttige efter Videnskabernes paa den Tid værende Tilstand. Saa tidt det lader sig giøre, er det tienligt, at lempe sig efter enhvers Bestemmelse og Hensigt. Men da dette sidste fast ikke er mueligt, bør i de offentlige Forelæsninger en Middel-Vei banes, som nogenlunde kan gaaes af alle. Til Videnskabens Fremvext bør man derimod see paa, at de, som af den giøre sig en Hoved-Sag, kunde ved det de lære, siden ved egne Kræfter, uden videre Hielp arbeide sig fort i Resten. Dette sidste iverksættes til en stor Deel best ved nogenlunde fuldstændige Skrifter.

Det er denne *Idée*, som jeg bestandig haver giort mig Umage for at følge under Udarbeidelsen af dette Verk, hvilket her overleveres det Almindelige; for ikke at skrive over min Materie meer, og ikke heller mindre, end jeg burde. Jeg haver meent paa denne Maade best at kunde efterkomme Hensigten af den Allernaadigste Befaluing, som er Aarsag i dette Arbeide, hvilket jeg meget heller havde ønsket var faldet i Personers Lod af større Sinds- og Helbreds-Gaver end mine.

For at giøre dette Arbeide desto nyttigere, haver jeg inddeelt det i Forelæsninger og Tillæg. Ved de første, som virkelig læses i de offentlige Timer her ved Akademiet, haver jeg søgt at bane den nylig omtalte Middel-Vei, som af alle kan gaaes. Forelæsningerne kunne læses af enhver, som forstaaer den elementære Geometrie og de quadratiske Ligheder af Algebra. Videre behøves til dem ikke. De indeholde derfor Elementerne af Mekaniken, men saaledes, at efter hvad jeg haaber, ville de fleste Læserne i dem alene finde, hvad de ønske at vide. Ydermere indeholde disse Forelæsninger ei alene det, som angaaer Bevægelsen, men endog til stor Deel Kiernen af Physik; fordi disse to Videnskaber i en Mængde Artikler henge sammen ved et uadskilleligt Baand, og en fast Kundskab i den sidste ikke kan være den første foruden.

I Tillæggene derimod findes de almindelige Methoder anførte, som vise, hvorpaa den almindelige Spørsmaalenes Opløsning kommer an udi Mekanik, saa de kunde ansees for de store Hielpe-Midler,

ler, hvorved ei alene det i Mekaniken allerede fundne kan forstaaes, men endog til stor Deel det, som i denne Videnskab søges, endnu ydermere kan opløses. I dem haver jeg i før anført alt det, som ikke kan beviſes uden ved Integral- og Differential-Regning, med mindre at man skulde indlade sig i kiedsommelige og vidtløftige Beviser paa de Gamles Maade. Det er langt fra, at jeg derfor ikke sætter Priis paa disse Methoder. Tvertimod! de giøre den menneskelige Forstand alt for stor Ære dertil. Men ligesom jeg mener, at de kunde være gode og brugelige for de store Mestere i Konsten, saa er jeg ligeledes af den Tanke, at intet var utienligere, end at ville efter dem afhandle alt i Lære-Maaden. Euclidis, Archimedis og Apollonii Skrifter ere unegtelig ypperlige Verker; men naar man vil standse Mathematikens Fremgang i et Land, skede det aldrig snarere, end ved at legge dem til Grund for den lærende Ungdom, og siden efter denne Plan fremdeles at gaae fort i den applicerte Mathematik.

Ligesom i Tillæggene de almindelige Methoder overalt forklares, hvorpaa de mekaniske Spørsmaals Opløsning beroer; saa forekomme i dem ligeledes de Beviis, som behøves, for at forstaae, hvad jeg hist og her, skiønt sielden, i Forelæsningerne haver antaget, uden videre Beviis, som sandt, for at giøre disse sidste derved saa meget desto udførligere og nyttigere. Dog er det ikke i Tillæggene alene, at disse Beviis findes, men endog i egne Anmerkninger under Forelæsningers Paragrapher, hvor de med Flid ere blevne saaledes anførte, saa tidt som Beviserne i Korthed kun-

de gives; paa det at de Læsere, som derom bekymrede sig, ikke skulde have nødig at søge langt bag efter udi Tillæggene det, som de ventelig ønskede at see i uoverbrudt Sammenhæng med Resten. I Tillæggene selv haver jeg saa meget som mueligt, seet paa, ikke at bebyrde Læseren med vanskelige og mindre nyttige Applikationer af Reglerne og Methoderne. Man kan i dette Slags Materier ikke giøre alt saa let, som man ønskede og vilde, men dette bør Læseren anseе som uadskillelig fra Materien, og for en Sag, der ikke beroer paa Skribenten.

De faa Steder i Forelæsningerne, som ere tegnede med *, haver jeg ikke vildet skille fra den øvrige Materie, til hvilken de hørte hen. De ere derved giorte kiendelige fra de øvrige, hvilke i de offentlige Timer her ved Akademiet foredrages og forklares. Henviisningerne angaaende, maae jeg kortelig melde; at saa tidt, som det haver været nødig, er i Tillæggene ved Citationen sat F. eller For., hvilket altid tilkiendegiver en Henviisning til en Paragraph udi Forelæsningerne.

Ved begge Delene, saavel nemlig ved Tillæggene, som ved Forelæsningerne, haver jeg søgt at udarbeide alle de Artikler af Mekanik, som vare af nogen betydelig Nytte. Uden Tvivl vil Læseren finde, at jeg i de vanskeligere ikke haver gaaet Vanskelighederne forbie, men tvertimod viist deres sande Beskaffenhed, og hvorpaa Oplesningen beroer. Jeg tvivler ikke paa, at jo en Deel Læsere vilde mene, at jeg haver skrevet for udførlig: Nogle faa

ville

ville maaskee derimod ønske, at jeg havde skrevet meer. Et saa ulige Omdømme er en Forfatter altid underkastet, som intet vissere kan vente sig af sit Arbeid, end alles Critique. Men det er billigt, at man lader den lærde Verden denne Frihed.

Det vi i vor Tid kalde Mekanik, var i det gamle Grækenland, ellers Videnskabernes frugtbare Moder, fast ubekiendt. Den ensdanne Bevægelse synes at have været den eneste, som dette Lands Vise og virkelig store Genier havde giort sig et Begreb om. Denne Videnskabs rette Begyndelse kan ikke regnes uden fra forrige Seculo, først i hvilket den store Galilæus indsaae Lovene for de faldende Tyngder, og giorde dem almindelig bekiendte. Torricelli, Borellus og en Deel andre Lærde fortsatte Galilæi Lærdom, og udarbeidede den videre, i sær i det, som angaaer den ensdan formerte Bevægelse, Bevægelsen af Tyngden i Almindelighed og Tyngdens Center. Omtrent paa samme Tid, som Galilæus, levede den store Kepler; Han begyndte at giere Brug af Kræfternes Parallelogram. Med alt dette blev Mekanikens Tilvext endnu ikke stor. Mersennus, Carteſius og andre bekymrede sig vel om at bestemme Kræfterne af Stedet, men de bestemte dem ilde. Imod Aar 1679 fandt først Wallis, Huygens og Wren, den ene uden at vide af den anden, de sande Love for Tingenes Stød, hvorved Mekaniken vandt anseelig, uagtet at Kræfternes Maal endnu blev ubekiendt. Men strax efter kom de store Hugenianske Opfindelser, angaaende Pendulerne, Cykloiden og Svingets Center, for Lyset. Mekaniken vandt derved en nye

Glands

Glands, og begyndte nu at blive en ordentlig Videnskab, da den før var indsluttet inden for meget smaa og trange Grændser.

Al denne Tilvext uagtet, var den største endnu tilbage, som den lærde Verden stutsede over, da den store Neuton udgav sine *Principia Philosophiæ Naturalis Mathematica.* Det var da ikke meer de Galilæanske Tyngdens Love, der blev handlet om, men om de, som regierte hele Naturen; om en almindelig Tyngde. Fra den Tid af kan man først sige, at den menneskelige Forstand begyndte at forstaae de store Naturens Love; Central-Kræfterne og den almindelige Gravitation viste Aarsagerne til det, som ingen menneskelig Eftertanke før havde været i Stand til at gisre sig det mindste Begreb om. De Neutonske Principia vare et rigt Magazin af nye Sandheder i sig, og endnu rigere paa Methoder, efter hvilke utallige andre kunde undersøges og findes. Dette sidste er og virkelig, hvad en Mængde Lærde efter Neuton have giort. Bernoullierne tilkommer især den Berømmelse, at de ikke alene have i denne Henseende givet Mekaniken en nye Tilvext, men de have i sær forbundet sig den lærde Verden derved, at de have bragt de tungere Neutonske Methoder til de lette analytiske, hvilke sidste ikke mindre have befordret Opdagelsernes Mængde, end de Neutonske Princips selv.

Videnskabernes Selskaber og en Mængde andre høist-berømmelige Geometrer have paa mange Maader udvidet Mekanikens Grendser, ved at følge deels den Neutonske, deels Bernoulliernes

Plan.

Plan. Det blev her alt for vidtløftigt, at ville handle om hver i sær af de ypperlige Genier, som utrettelige i at arbeide, og lykkelige i at tænke, have efterladt sig et Navn, hvilket Efterkommerne aldrig uden Ærbødighed bør nævne. Gregori, Tailor, Mac-Laurin, Herman, Euler, Clairault, Maupertuis, d'Alembert, ere Skribentere af første Klasse, hvis Skrifter ville blive ærede, lige saa længe som Videnskaben selv.

Desuagtet er og bliver, i Henseende til de almindelige Naturens Love, den store Theorie dog altid Neutons Arbeid, endskiønt dette sidste af Eftertiden er blevet fuldkommere udarbeidet. Siden den Tid ere de mekaniske Methoder endnu idelig blevne formerede. Bernoullierne have viist Maaden, hvorledes man kan i en Mængde Tilfælde afhandle Bevægelsen af et heelt System, som om det var et eneste Punkt. Den berømte Daniel Bernoulli i sær haver arbeidet udi denne vanskelige Deel af Mekaniken. I det, som angaaer Omveltnings-Bevægelsen, haver saavel han, som den store Geometer Leonhard Euler, lagt en nye Plan. Den zittrende Bevægelses Bestemmelse have vi den berømte Brok Tailor at takke, og denne Theorie er ikke en af de mindst agtbare udi Mekaniken.

Maalet af de levende Kræfter er den store Leibnitzes Arbeid. Intet i den hele Mekanik haver fundet meer Modsigelse paa den ene og Medhold paa den anden Side, end dette Princip. Det af den mindste Virkning er af Mr. Maupertuis. Det

 fandt

fandt og Imodsigelse, og den Deel af det, som angaaer Bevægelsen, er endnu ikke fuldkommen blevet beviist.

Læseren vil finde alt det hidtil anførte nogenlunde fuldstændig afhandlet udi dette Verk, hvis Indretning er den, at om ikke flere Dele skulde komme for Lyset, tabe dog derved hverken Kiøbere eller Læsere, fordi denne Deel er fuldstændig i sig, uden Hensigt paa andre. Da alle de Tings Fremgang, som udfordre Tid, beroer paa Omstændighederne og Tidernes Forandringer, som ingen forud kan see, saa kan jeg for det nærværende alene love, at om Gud sparer Liv, Helbred og Kræfter, skal, saa snart skee kan, den følgende Deel blive meddeelt, hvilken indeholder Statiken og Hydrodynamiken med Maskin-Væsenets Theorier.

Jeg haver overalt bestræbt mig paa at være tydelig og klar, dog saa, at jeg ikke tillige blev Læserne kiedsommelig. De Ord af Theoreme, Probleme o. s. v. haver jeg ikke brugt, for i et Verk, som desuden blev nogenlunde vidtløftigt, at spare Rummet og Papiret. Tydeligheden, vil jeg haabe, bliver derfor ikke destomindre. Men ihvormeget jeg end haver holdt et Øie med denne sidste, forefalder dog et og andet udi Verket, hvorom jeg i Forveien kortelig maa erindre Læseren. Saaledes forstaaer jeg i den første og femtende Forelæsning ved den absolute Kraft Inertien eller Massen multipliceret med den hastiggiørende, eller med et Ord, det, der kan ansees paa samme Fod, som Tingenes Vægt. Andre kalde dette Slags Pressioner de relative. Benævningerne ere ligegyldige, alene at de

af

af Læserne først forstaaes, men enhver seer let, at den første er den rigtigste.

Paa den 56de Side §. 21. Lin. 10. bør den Ligheds $b = \frac{r^n a^n - 1}{1+n}$ alene forstaaes om de Tilfælde, udi hvilke Hastigheden er endelig. Hvilket og udførlig siges Side 57. No. 2.

Paa den 59de Side sees maaskee ikke strax, hvorledes man Lin. 19 og 20 kommer til den Ligheds $gx = Pr$. Man kan da agte, at Central-Kraften kaldes P i den Distance fra Centret x, og at den ansees at være saa stor som Tyngden i den Distance fra Centret r. Men i r forandres Kraften P til $\frac{rP}{x}$, fordi den er overalt Distancen fra Centret proportionert, i Følge Hypothesen; saaledes bliver $\frac{rP}{x} = g$. og $rP = gx$. Følgelig maa flere Kræfter, som i den Distance fra Centret x ere af adskillig absolut Størrelse, i den Distance r forholde sig som $\frac{1}{r}$, fordi g og x da ansees som bestandige, men P og r som foranderlige.

I den ottende Forelæsning §. 159 tales om de sammensatte Pendulers dobbelte Sving, det ene hen efter Basin, og det andet hen efter Siden. Jeg kalder og det første Svinget hen efter det horizontale Plan, det andet hen efter det vertikale. Den første Benævning haver egentlig Sted, naar

Svinget ikke er uden lidet, men jeg haver deraf giort Benævning for alle dette Slags Sving, af Aarsag; at hele Svinget igiennem ligge alle Punkterne i Grund-Linien af Figuren ligedan situerte imod Horizontal-Linien, uagtet at de igiennemvandre under Svinget adskillige horizontale Planer.

Pag. 233. *d.* 2. kan agtes, at ved *r* forstaaes Kuglens Halv-Diameter.

Pag. 395. §. 197. sees maaskee ikke strax, hvorfor $B = 2sch$. Til desto større Oplysning kan agtes, at Ordinaten y faaer bestandig to ulige Værdier, forvi den fra Abscissen $\pm x$ af at regne overskier Parabolen i to Punkter. Naar derfor $x = 0$, skulde og $y = 0$, men da bliver $y = 2sch$, saa at $2sch$ er den bestandige Forskiel imellem begge Værdierne af y. Og derfor Taf. XI. Fig. 6. $2sch = GM = AL$. Felgelig, naar baade y og $x = 0$, bliver og $2sch - B = 0$, og $B = 2sch$.

Det ovrige, mener jeg, vil ikke holde en eftertænksom Læser under Læsningen oppe, i sær om Trykfeilene før eller under Læsningen rettes, saaledes som de ere blevne anførte. Jeg havde ønsket, at forekomme dem alle; men da Trykning og Correktur er i dette Slags Materier unegtelig vanskelig, og jeg iblant en Mængde Embeds-Forretninger ikke altid haver haft den Tid, saa nøie at efterse Correkturen, som jeg ønskede og vilde, ere en Deel Feil indløbne, hvoraf dog de fleste ere i høi Grad ubetydelige.

Reka-

Mekanik.

Den første Deel
af
Mekanik,
som handler
om Bevægelsen.

Første Forelæsning.

Almindelige Grunde.

§. 1.

I hele Naturen, i alle dens Dele, de mindste med de største foregaa i en uoverbrudt Orden utallige og ideelige Forandringer, som alle iverksættes ved Bevægelsen. Den og dens skiulte Aarsager, de, som vi sædvanlig kalde Tingenes Kræfter, ere de store Hiul og de virksomme Drive-Fiedre, som give alt det Materielle det Liv, hvorved Skue-Pladsen af Verden idelig deels vedligeholdes, deels fornyes. I det at snart nye Ting begynde, voxe og tage til, snart de igien, som have været, forandres eller tage af eller vexle om med

Hvorved de naturlige Virkninger i sær kunne forstaaes.

hverandre, eller forgaae: Men for at forstaae, saavidt mueligt, hvorfor alt dette skeer og hvorved, er os intet andet Middel ovrigt, end at kiende **Kræfterne i Naturen og den af dem foraarsagede Bevægelse**, for at indsee de usvekkede Love, som i Virkningerne altid iagttages og aldrig forandres.

§. 2.

Hvad Mekanik er, saavelsom, hvori den er adskillig fra Statik.

Den Videnskab derfor, som man sædvanlig kalder Mekanik, eller den Videnskab om Bevægelsen, og de den foraarsagende Kræfter, ansees med Ret som Noglen til Naturen. Den er det, høistærede Tilhørere! som vi i disse vore offentlige Forelæsninger ville handle om, for at giøre os fremdeles bekiendt med Naturen selv, og for at indsee, hvorledes man kan betiene sig af dens Love og Kræfter, dens Virkninger og brugbare Tilegnelser til Nytte for det borgerlige, til Hielp i det menneskelige Liv. Men for vi gaa videre, ville vi agte, at denne Videnskab sædvanlig inddeles i **Mekanik og Statik. Den første handler om Lovene for Bevægelsen og deres Følger, den sidste om Kræfternes Ligevægt**, forstaa; naar den ene af dem ei kan udrette noget i Henseende til en virkelig Bevægelse, som skulde foraarsages i den anden.

Vi ville her betragte begge, og hver for sig, dog altid saaledes, at vi tillige see paa den letteste Orden i Sandhedernes Følge.

§. 3.

Om hvad Ting Mekaniken handler.

Strax i Begyndelsen er det nødvendigt, at giøre nogle almindelige Anmerkninger over de materielle Ting, uden dog at

at indlade os i vidtloftige Betragtninger over Tingenes første Natur, siden alt den angaaende hører andensteds hen. Enten til den egentlig saa kaldte Physik og Videnskab om Naturen, eller til de høiere Betragtninger, som man med et Ord kalder Metaphysik. Vi erindre derfor, at her alene handles om den materielle Verden, og om de sammensatte Ting, af hvilke den bestaaer.

§. 4.

Det Ord Materie behøver Forklaring: Imidlertid at hele Naturen er i alle sine Forandringer det den er ved Bevægelsen; yttrer alt, hvad den bestaaer af, det mindste med det største, en Modstand imod Bevægelsen, og viser, om jeg saa skal tale, en naturlig Seendrægtighed og Modbydelse imod al Forandring. Vil man for Exempel skyde en Ting afstæd, den strider da unegtelig ligesaa stærk imod: Heste trække en Vogn, og den disse Dyr igien imod sig med lige Magt. Man behøver til at overbevise sig om denne første store og almindelige alle Tings Lov i Naturen, intet andet, end de allergemeneste og hvert Øyeblik forekommende simpleste Erfaringer. Det er utænkeligt, at en Virkning skulde kunde skee paa det, som ei stod imod; paa det, som da ei længere blev en Ting, men en Art Skygge af Tingene, noget saadant, som de Billeder, vi have seet, Høistærede! male sig af i Brende-Punktet af de hule Brende-Speile. Just fordi Tingene kunde staae det Virkende imod, ere de Ting, og noget adskilligt fra Rummets Dele, der have Ud-

Hvad der forstaaes ved Materie; Den yttrer altid en Modstand imod Bevægelsen, der er ligesaa stor som Virkningen.

strækning, ligesaavel som de. Den første store Lov i Naturen er derfor, at Virkning og Igien-Virkning ere hverandre lige. For saavidt en Ting ei kan virke imod en anden, for saavidt er det ei heller mueligt, at den kan af den lide, eller tage imod nogen Forandring. Forfølges en Ting, saa at sige, af den anden, i det de bevæges efter hverandre, da lider den dog aldrig nogen Forandring af den Deel af den Forfølgendes Kræfter, der beroer paa den Fart af Hastighed den, som er fælles for begge.

§. 5.

Hvad Inertien er og naar den yttrer sig.

Vi kalde derfor Tingene Materielle, for saavidt, de ei allene ere sammensatte, men yttre og en virkelig Modstand, eller en saa kalden Inertie imod al Bevægelse. Denne deres Kraft eller naturlige Modstand er dem indvendig, og yttrer sig ikke, uden i det Øieblik, da de virkende Aarsager søge at forandre deres Tilstand.

§. 6.

Hvad det er at bevæges. Hvad Direktion, Hastighed og Tid ere. Og for hvorvidt al Bevægelse kan siges at skee i ret Linie.

De første Sandheder ere saa nøie forbundne, een i at oplyse den anden, saa man maa, saa at sige, paa eengang have dem alle i Sigte, for desto bedre at see enhver af dem i sær, ved det Lys den laaner af de andre. Bevægelsen er Tingenes Modstand naturlig Viis imod; men behøves til at forstaa den, saa vi derfor agte følgende:

1. Gaaer en Ting bestandig fort efter en Linie, hvilken (saalænge som en eneste Kraft altid virker paa den ensdan, er altid ret,) da siges den at bevæges, fordi den i denne Tilstand

stand aldrig kan tænkes paa et Sted, men altid fra Sted til Sted.

2. I Bevægelsen maa derfor to Ting vel sættes ud af hverandre, naar den tænkes. Den ene er, det vi kalde **Direction eller Drive-Linien.** Den anden er, hvad vi kalde **Hastighed.** Directionen er den rette Linie, hvorhen efter en Ting idelig enten bevæges, eller og søger at bevæge sig. Forandres under Bevægelsen denne Linie end idelig, fordi flere adskillige Kræfter tumle det Bevægede paa adskillige Maader, kan dog for en uendelig liden Tid ingen Bevægelse tænkes at kunde skee uden i den, saa man kan med denne Indskrænkning sige, at **al Bevægelse skeer i ret Linie.**

3. Hastigheden er det andet, som i Bevægelsen maa agtes. **Den er den Formue, som det Bevægede besidder i en vis given Tid, at igiennemlobe et vist given Rum.** Den er derfor den Henseende, som det igiennemlobne Rum haver til Tiden, hvori det igiennemlobes. Den kan saaledes være mindre og større efter utallige Grader.

4. Det tredie, som i Bevægelsen kan agtes, er **Tiden,** at forflyttes fra Sted til Sted udfordrer **en Følge af Forandringer; den nemlig, som vi kalde Tid.**

§. 7.

Alt Materielt derfor, indeholder under sin ydere Omkreds Deele, som have lige Bequemhed til at staae Bevægelsen imod, og at tage imod den. De ere det, som vi i det følgende ville kalde Materie eller Massen. Saavidt man kan erfare,

Bevægelsen deeler sig ligedan ud over alle Materiens Deele, og Inertien er altid Materiens

gaaer

Mængde proportionert.

gaaer deres Delelighed overmaade vidt. Vi ville derved paa dette Sted ei opholde os, men derimod erindre, at den Bevægelse, som af Kræfterne meddeles, inddeler sig over dem alle ensdan. Thi, om efter Virkningen, Hastigheden ei var den samme i alle de allermindste Deele, maatte Tingen splittes ad, og de langsomme eller mindre hurtige Dele under Bevægelsen blive forladt af de, som gik frem med større Fart. Desuden da alle disse Dele staa naturlig Viis ved deres Inertie ligemeget Bevægelsen imod, er det klart, at de alle i lige Grad maa tage imod den. Og man seer deraf videre.

At Inertien altid er Materien proportionert. Saa en dobbelt Materie kan giøre dobbelt Modstand imod samme Kraft, en tredobbelt tre Gange meer end en enkelt, o. s. v.

§. 8.

Hvad Hvile er. Materien kan ei af sig selv forandre sin Bevægelse eller Hvile.

Intet er klarere, end at jo alt, hvad vi kalde Materie, er i og af sin Natur ligevel skikket til at antage alle Grader af Bevægelse. En Kanon-Kugle for Exempel, som et Øieblik hviler, som et andet stødt med Foden, trilder langsom hen ad Jorden, med hvad ugemeen Hastighed bevæger sig den ikke ud af en Kanon, om Ladningen haver været i nogen Grad anseelig? Hvile og al Slags Bevægelse er derfor i Henseende til Materien lige mulige. Men Hvile er Mangel af Bevægelse og denne imodsat. Da saaledes alt Materielt i og af sin Natur ei meer er skikket til den ene af disse forandelige Omstændigheder end til den anden af dem, saa folger

ger og, at det heller ikke kan af sig selv enten forandre sin Hastighed, eller dens Grader, eller sin Bevægelse til Hvile, eller denne igien til Bevægelse. Det er en Følge af Inertien, §. 4. at i Materien al Forandring maa komme udvendig fra. Den selv, langt fra at foraarsage nogen ny, staaer al Forandring imod.

§. 9.

ei heller Direktionen i Bevægelsen.

Ligesaa lidet kunne Tingene forandre af sig selv deres Direktion. Ville vi for et Øieblik sætte, (see Taf. I. Fig. I.) at det skulde kunde skee. Af hvad Aarsag maatte da en Ting *a*, som bevæges efter *fa*, meer tage den Direktion *ba* end den imodsatte *ea*, eller en som *da*, o. s. v.? Det samme gielder alt om den Tilstand, hvori Tingene hvile, saa de naturlig Viis besidde ingen Kræfter til at forandre sig selv.

§. 10.

Hvad imodsatte og overeenstemmende Direktioner ere. Inertien virker altid i en imodsat Direktion imod de virkende Kræfter, men tager tillige imod Bevægelsen.

Jeg kaldte *ae* og *ab* imodsatte Direktioner. Dersom nemlig to Kræfter virke paa hverandre over samme Linie, men efter de dens Deele, som lobe imod hverandre, *ea* og *ba*, da kaldes *ea* og *ba* imodsatte Direktioner. Dette hielper endnu bedre til at forstaa Inertien, Maaden nemlig, hvorpaa den yttrer sig: I det Øieblik, da der virkes paa en materiel Ting, virker den efter en imodsat Direktion ligesaa stærk igien paa det, som vilde forandre den. Men, endskiønt at Tingene saaledes virkelig staae Bevægelsen imod i det Øieblik, da den meddeles, er det dog efter det forhen sagte §. 4. allene for

deſto bedre at kunde tage imod deres Forandring. Juſt naar de ſtaaer alt imod, meddeeles alt. Man ſeer ellers let af det allerede ſagte, at derſom Kræfternes Virkninger yttre ſig over den ſamme Linie efter den ſamme Deel af den, for Ex. om fleere Kræfter virke efter *ea*, da kaldes deres Direktioner overeenſtemmende Direktioner.

§. 11.

Inertien, eller den naturlige Materiens Modſtand er derfor altid i lige Forhold med Virkningen. Rører man en Ting loslig, dens Modſtand er neppe kiendelig. Slaaer man den med Magt, den hævner ſig net op, man foler, hvad den burde fole, om den kunde. I øvrigt kan agtes, at endſkiønt Inertien ſædvanlig kaldes en Kraft, hører den dog ingenlunde til de bevægende Kræfter i Naturen. Thi, ſom vi have ſagt, ved Inertien have Tingene en Drift til at blive beſtandig i den Stand de ere. Saa at, om alt i Verden hvilede, og ingen anden Kraft levendegiorde Naturen, end Inertien, hvilede alt i den evig, uden mindſte Forandring.

§. 12.

Hvad den eensdanne Bevægelſe er, og hvori dens Love beſtaaer.

De ſimpleſte Betragtninger over Tingene ere efter den menneſkelige Tænke-Maade de, ſom bane Veien ſaa got for de allervanſkeligſte. Det er i vores Nærværende det ſamme. Af al Slags Bevægelſe kan ingen tænkes mere ſimpel, end den vi kalde den eensdanne, den nemlig, ſom hele Tiden igiennem, i hvilken Tingen bevæger ſig, bliver uforandret og i

alle

alle Henseende den samme. I Henseende til den seer man: 1. At saafremt Hastighederne i to Ting, som bevæges, ere de samme, maa de af Tingene igiennem lobne Rum være som Tiderne, hvori de bevæges. 2. Er derimod Tiden i begges Bevægelse den samme, men Hastighederne adskillige; da ere de igiennemlobne Rum Hastighederne proportionerte.

§. 13.

Kaldes derfor i den eensdanne Bevægelse det igiennemlobne Rum R, Hastigheden H, Tiden T. Da er det igiennemlobne Rum altid, som Hastigheden multipliceret i Tiden, eller $R = HT$. §. 12. Forklares videre.

§. 14.

Folgelig er og $\frac{R}{T} = H$ eller Hastigheden i Forhold med Rummet dividert ved Tiden, og ligeledes

2 $\frac{R}{H} = T$, eller Tiden i Forhold med Rummet dividert med Hastigheden.

§. 15.

Videre sees. At om de i en eensdan Bevægelse igiennemlobne Rum ere lige store, og i den Forhold $\frac{R}{T} = H$. sættes R bestandig, T og H foranderlige. Da blive Hastighederne i forkeert eller omvendt Forhold af Tiderne. $H = \frac{1}{T}$.

2. Ligeledes; at Tiderne ere i omvendt Forhold af Hastighederne, om de igiennem lobne Rum ere lige store.

§. 16.

Forskiellen imellem de bevægende Kræfter. De trykkende, og de, som virker med en virkelig Bevægelse, eller imellem døde og levende Kræfter. Hvad man forstaaer ved hastiggiørende Kræfter.

Efter at have betragtet Lovene af Bevægelsen i den simpleste Tilfælde, bliver det nødvendigt, at giøre sig en Tanke om det, hvorved den bliver tilveiebragt i Naturen.

Nemlig 1) denne sidste bruger dertil ikke uden een af to Maader, thi enten meddeles Bevægelsen ved Ting, hvilke i Henseende til den Virkning de iverksætte, selv ingen Bevægelse have, og som for et Øieblik ingen kiendelig Bevægelse foraarsage; eller og ved Ting, som forandre andre ved deres virkelige Bevægelse, saa at, saa tit som Modstanden er overvindelig, en kiendelig Bevægelse i et Øieblik bliver frembragt. De første kalder man **trykkende Kræfter og deres Virkning en Trykning eller Pression.** De sidstes Virkning derimod forklarer man ved de Ord **at støde og at slaae.** Disse ere de to store Hoved-Maader, hvorpaa der virkes i Naturen; i det mindste kiende vi i det Materielle ikke andre, og alt lader sig deraf forklare i Mekanik. Man kalder, saa tit som man seer alene paa Tingenes Beqvemhed i og Dygtighed til at virke, **de første eller de trykkende Kræfter døde, de sidste eller de stedende, levende Kræfter.** Vi finde i det følgende Leilighed til at vise begges sande Forskiel. De saa kaldte trykkende Kræfter ere i Naturens Forklaring, som tidest de vigtigste, hvorfore vi og her først ville ved dem særdeles opholde os.

Man seer imidlertid 2) at de begge ere **bevægende Kræfter,** thi man forstaaer i Almindelighed under dette Navn alt, hvad der kan foraarsage og forandre Bevægelsen i Tingene.

3. De

3. De trykkende kaldes hastiggiorende Kræfter, naar deres vedvarende Virkning i en vis given Tid foraarsager i det Bevægende en vis given Hastighed.

4. Pressionen selv, som man og kalder den absolute Kraft, er derfor at ansee som noget virkende, der er Tingene selv indvendigt, af hvad Aarsag det end kommer. Thi om end den trykkende Kraft virkelig bevæges tillige med Modstanden, skeer dog Trykningen aldeles, som om begge hvilede, §. 16. Den hastiggiorende Kraft derimod, er igien at ansee som dennes Virkning, i Henseende til Hastigheden paa et hvert givet Punkt af Materien. Thi Virkningen af Pressionen deler sig over alle Materiens mindste Partikler ensdan, §. 7. og driver enhver af dem lige stærk med mindre eller større Hastighed udi samme Tid, eftersom Pressionen eller den Tingene indvendige Kraft selv er i sig større eller mindre til. Man kan videre agte, at i de tunge Ting er Pressionen deres Vegt, og at i Almindelighed, saa tidt som Inertierne ere lige store, ere Pressionerne udi samme Forhold, som de hastiggierende Kræfter.

§. 17.

Kræfterne og deres Størrelse kunne ei forstaaes uden af deres fulde Virkninger. Deres virkelige Væsen er os ubekiendt. Følgelig maa de dømmes af den Modstand, som de kunne overvinde i samme Tid, eller af den Drift, de kunne give een og den samme Materie i samme Tid. Denne Anmærkning i Henseende til Tiden er saa meget meer nødvendig, som de trykkende Kræfter i Naturen, der overalt foraarsage den ide-

Kræfterne maa dømmes af den Modstand de kunde overvinde i samme Tid.

lige Bevægelse i dens store, og en idelig Drift til samme i dens mindre Dele; alt det nemlig, som vi kalde med det Navn af Tyngde, altid over en uophorlig vedvarende Trykning. Man maa derfor agte, at de trykkende Kræfter ere under sig i samme Forhold, som de Virkninger, de foraarsage paa hvad der staaer imod, udi lige store Tider.

§. 18.

Hvorledes de trykkende Kræfter virke.

Egentlig betragter man de trykkende Kræfters Trykning eller Pression, ikke som andet, end det, der staaer paa allene en uendelig liden Tid. Derimod fornyes den hvert Øieblik igien uden Ophør i Lobet af Naturen. Saaledes tynger en Ting paa den anden bestandig. Vi dele Virkningen i Tankerne, den varer uophorlig ved i Tingene selv; fuldkommen, som man seer dette at skee i en Vægt, hvis begge Skaaler staae inde med hverandre, legges da paa den ene et Lod, synker Skaalen bestandig med Loddet og trykkes af dette uophorlig: Eet af to treffer derfor altid ind, naar Kræfterne trykke paa. Enten kan det, som staaer Trykningen imod, overvindes eller ikke. Det første burde naturlig viis altid skee, §. 4. 10. dersom udvortes fra forhindrende Aarsager ei standsede Bevægelsen. Den største Materie maatte da drives fort og blive bevæget, skiønt uendelig langsom, af den mindste Kræfternes Trykning, og saaledes vinde en Slags Bevægelse, om intet uden Inertien stod imod. Saa tidt derimod nogen anden Modstand haver Sted. da kan den sidste Tilfælde treffe ind. En Trykning tilintetgiores da af en anden imodsat og ligesaa

ligesaa stærk; saa at om den i første Øieblik ei foraarsager en Bevægelse, foraarsager den den aldrig, med mindre at de udvortes Omstændigheder forandres.

§. 19.

Saa tidt derimod, som udvortes Aarsager ei ere Bevægelsen imod, foraarsages den altid ved de trykkende Kræfters Virkning. Bevægelsen voxer lidt efter lidt, og fra at have været i Begyndelsen liden, bliver den kiendelig og endelig anselig stor, om Trykningen bestandig varer ved. Derved faaer Materien Fart (vim insitam) og levende Kræfter, som imodsatte Trykninger kunde tilintetgiøre paa samme Maade, som de for bragte den til Veie.

De foraarsage altid en Bevægelse, naar intet staaer imod.

Jeg taler her om Pressionerne, saaledes som Naturen tilveiebringer dem, hvilke altid ere vedvarende, som de af Tyngden. Men i Mekanik, for saavidt, som man i den tillige afhandler Statik, behøves endnu at betragte et andet Slags Trykninger, hvilke ikke i og af deres Natur kunde virke uophørlig, som for Ex. Menneskenes og Dyrenes Kræfter. Men da disse høre allene til Statik, og vi i den egentlig saa kaldte Mekanik ikke handle om andre end de naturlige Kræfter, saa ville vi her paa dette Sted derved ikke opholde os.

Et andet Slags Trykninger.

§. 20.

Da Virkningen af de trykkende Kræfter deler sig ensdan over alle Materiens Dele, saa er det klart, at Virkningen af en og den samme Trykning paa adskillige

Den samme Tryknings Virkning er i forkeert Forhold af Materien.

skillige Materier er i forkeert Forhold af Materiernes Størrelse.

§. 21.

Adskillige Trykninger, som virke i samme Tid, ere under sig som deres Virkninger paa en og den samme Inertie.

Ligeledes sees, at om Trykningerne ere af adskillig Grad i Henseende til deres indvendige Beqvemhed i at virke udi samme Tid paa en og den samme Materie eller Inertie; da ere de under sig i Forhold med deres Virkninger paa samme, siden man ikke kan tvivle paa, at jo Aarsagerne ere som deres fulde uhindrede Virkninger.

§. 22.

Hvoraf Kræfterne i Almindelighed maa dømmes; og hvad man kalder Kræfternes Modstand.

Vi have sagt §. 17. at Kræfterne bør dømmes af deres fulde Virkninger. Disse maa og bør derfor sluttes af den Modstands Størrelse, som bevæges. Jeg forstaaer her og i det følgende ved Modstand den materielle Ting, som staaer imod; og ved den hele Virkning den hele Forandring, som samme lider; hvad heller man vil dømme denne sidste af Hastighedens eller af Rummets Forandring, thi af en af begge maa den altid sluttes.

§. 23.

Fortsættes videre.

Folgelig er det sandt om alle Kræfter, naar deres hele eller fulde Virkninger betragtes; at, dersom de virke udi samme Tid, uhindrede i at yttre deres fulde Kræfter, da ere de under sig, som den Modstand de bevæge, multiplicert med de Rum, igiennem hvilke samme meo en eensdan Bevægelse bevæges.

ges. Thi er Modstanden dobbelt, Rummet det samme; da bliver Virkningen dobbelt, og ligeledes; om Rummet er det samme, som Modstanden bevæges igiennem, men dennes Inertie derimod er dobbelt, saa bliver Virkningen og dobbelt, o. s. v. Saa ingen Tvivl er paa, at jo de hele Virkninger ere proportionerte Modstandens Storrelse, multiplicert med det Rum, igiennem hvilket at samme bevæges. Folgelig maa og Kræfterne selv være udi denne Forhold, naar de dommes af deres fulde Virkninger.

§. 24.

Hoved-Regler for lige store Kræfter.

Deraf sees, at de hele Kræfter, som trykke i samme Tid, ere under sig som den Modstand de bevæge, og det Rum, hvorigiennem de bevæge den. Hvoraf folger videre: at om Trykningerne kaldes T og t, de Modstand, de virke paa M og m; de Rum, igiennem hvilke de bevæge dem r og R da bliver

$$T : t = Mr : mR.$$

hvoraf flyder folgende vigtige Regel,

At om de Modstand der virkes paa, skulle være ulige, M nemlig og m ei af samme Storrelse, men Trykningerne eller Pressionerne lige store, $T = t$

da bliver $Mr = mR$ og $M : m = R : r$

det er, Kræfternes Modstand, maa være de Rum, igiennem hvilke de i samme Tid bevæges, forkeert Viis proportionerte, om Kræfterne skulle være lige store.

§. 25.

Og atter igien: Kræfterne ere altid lige store, saa tidt som de Inertier, eller den Modstand, som de bevæge, ere af Storrelser, hvilke ere de Rum forkeert-viis proportionerte igiennem hvilke de i samme Tid af disse Kræfter bevæges.

§. 26.

Agtsomhed, som behøves, i at skille Kræfterne fra hverandre, naar de dømmes af den Hastighed, som de meddele de Ting, hvilke de bevæge.

Af den Ligheds $Tm\mathrm{R} = t\mathrm{M}r$ kan enhver, som er nok saa lidet øvet i Æquationernes eller Lighedernes Oplosning i Proportioner, ved at sætte snart $\mathrm{M} = m$, snart $r = \mathrm{R}$, o. s. v. Enhver, siger jeg, kan giøre sig mange flere Regler, som ei ere unyttige, men vi ville ved dem ei opholde os, for at agte, at denne Regel er almindelig for alle Kræfters hele Virkning. Vil man derimod domme Kræfterne af de Hastigheder, de foraarsage; da er det klart, at siden i den eensdanne Bevægelse, naar Tiden er den samme, Hastighederne ere som de igiennemlobne Rum, §. 12. 2. saa tit da, som man kan betragte den hele Bevægelse fra Begyndelsen af Tiden til dens Ende som eensdan, kan man ligesaavel sige, at Kræfterne ere under sig i Forhold af Inertien multiplicert med Hastigheden, som at vi §. 24. have sagt, at de ere under sig, som Inertien multiplicert med det igiennemlobne Rum. Thi imellem begge Forhold er da ingen Forskiel.

Da derfor Pressionerne altid tænkes, som at skee i en uendelig liden Tid §. 18, saa kan man altid uden Forskiel, om Tiden er den samme, sige, at disse saa kaldne døde Kræfter ere under sig som Inertien multiplicert med det igiennemlobne

lobne Rum, eller som Inertien multiplicert med Hastigheden. Thi en Kraft, som yttrer sig i en udelelig eller uendelig liden Tid, kan ikke tænkes, at meddele sin Modstand en større Bevægelse i Enden end i Begyndelsen af denne Tid.

Med de levende Kræfter derimod, eller de, som virke ved Stod, er det noget andet. Man kan om dem ikke sige, naar de end virke udi samme Tid sammen, at den Bevægelse, som de meddele deres Modstand, er udi Begyndelsen og Enden af den Tid, der virkes i, den samme; skiønt vi i det følgende skulle faae at see, at Stodet meddeler sig i en overmaade liden Tid. Thi Virkningen formindskes idelig, alt som den meddeles, og der er desuden en anseelig Vanskelighed i at sammenligne disse Kræfters Virkning i Henseende til den samme Tid.

Saa deraf sees, at man altid vel maa giøre Forskiel imellem, hvad man i Kræfterne kalder Trykning og Stod, eller Pression og levende Kræfter.

§. 27.

I Anledning af det, som i denne Forelæsning er bleven talt om Bevægelsen, kunne vi fast ikke forbigaa at røre ved det her sædvanlige Spørsmaal, hvori at Bevægelsens Størrelse bestaaer. Der skal da ikke meget til at see, at, naar et Legeme er i Bevægelse og støder an paa et andet, virker det paa dette andet ikke alene med sin Hastighed, men endog med sin hele Masse, fordi Bevægelsen er lige fordeelt over alle Materiens Dele, saa der er den samme Fart i enhver Parti-

Bevægelsens Størrelse er proportionert Hastigheden, multiplicert med Massen.

kel af Materien, og følgelig maa Tingens hele Fart, eller dens Bevægelses hele Størrelse, være proportionert Materiens Mængde i det Legeme, som bevæges, multiplicert med Hastigheden, hvormed det bevæges.

§. 28.

Bevægelsens Størrelse er ei Maaler til Kræfternes Virkning i de Ting, der bevæges med virkelig Hastighed.

Denne Bevægelsens Størrelse reigne nogle som Maalet af de Kræfter, hvilke de Ting besidde, der ere i virkelig Bevægelse, og man haver lang Tid anseet den almindelig som et saadant Maal. Vi skulle derom handle udførligere siden. Her paaminde vi alene derom, for strax i Begyndelsen at forekomme alle falske Begreb om de første Grunde, og for at sige, at Virkningerne af Tingenes Stød, eller hele Kræfter paa denne Maade ei kan udreignes, men alene Pressionerne, §. 26.

§. 29.

Lige store imodsatte Trykninger tilintetgiøre hverandre.

Vi ville til Slutning af denne Forelæsning betragte de Trykninger, som virke imod hverandre efter imodsatte Drive-Linier, da man strax seer. At dersom de ere lige store, gior den ene den anden til intet, saa at ingen Bevægelse følger. Og deraf kan man altid domme lige store Pressioner.

§. 30.

Hvorledes en Modstand virker, som ei kan vige.

Virker en Pression paa en Modstand, som ikke kan vige, da virker denne ligesaa stærk imod ved sin Inertie §. 11, saa man da har net op det samme Tilfælde, som §. 29.

Hvoraf

Hvoraf sees, hvorledes man bør domme om al den Modstands Virkning, som ei kan vige.

§. 31.

Bevægelsens Beskaffenhed, naar ulige Trykninger efter imodsatte Direktioner virke paa hverandre.

Men hvad skeer, om efter imodsatte og stridige Drive-Linier to Kræfter eller Pressioner virke paa hverandre, som under sig ere ulige? f. E. Om Taf. I. Fig. I. efter *ea* og *ba* to Kræfter virke imod hverandre, som ere ulige store. Da tilintetgiøres den mindre, og den tilintetgiør ligesaa meget, som den selv er, i den større. Med Forskiellen af Pressionerne skeer siden Bevægelsen efter den stærkeres Direktion.

§. 32.

Verkets foresatte Grændser.

Denne ringe Grundlægning er stor nok, for paa den videre at anlægge den uendelige Mængde af Betragtninger, hvilke en saa vidtloftig Videnskab, som den om Bevægelsen, kan give Anledning til at giøre. Vi ville af en ubeskrivelig Mængde herhid herende, og i Mængde af de berømte Geometrer opløste Spørsmaal i vore Forelæsninger og i dette hele Verk alene afhandle de, som ere i sær nyttige, betydelige, og hvoraf Resten siden let forstaaes, som her ikke anføres. I en Mark, skatteret med et uendeligt Broderie af utallige prægtige Blomster, ville vi forundre os over de store Forandringer i Skionhed, imidlertid at vi ikke søge for os selv uden de nyttigste Frugter.

Første Tillæg.

Om Maaden, at bestemme de hastiggiørende Kræfters Forhold under sig.

§. 1.

Den Lighed $pdt = mdv$ er Hoved-Ligheden, hvoraf de trykkende hastiggiørende Kræfter kunne vurderes.

Da paa de i denne Forelæsning forklarte Sandheder fast alt det beroer, som den hele høiere Mekanik igiennem bør legges til Grundvold i de forekommende Spørsmaals Opløsning, saa kan jeg ikke undlade at anføre følgende for de, som ville gaae videre.

Da efter §. 26 i Forel. Trykningens Størrelse i en vis given Tid bør dømmes af den Materies Størrelse, som bevæges, og af Hastigheden, hvormed den, i den Tid Pressionen staaer paa, bevæges. Videre: Da Trykningerne altid betragtes at skee, som i en uendelig liden Tid, §. 18. og følgelig, som de der ei kunne i samme tilveiebringe uden en uendelig liden Hastighed, saa sees; at om man kalder en uendelig liden Deel af Tiden eller et dens Element dt; et Element eller en uendelig liden Tilvext af Hastigheden dv; Pressionen eller Trykningen p; Materien, som skal bevæges, m; da bliver §. 17. 26.

$$pdt = mdv...$$

eller Pressionen multipliceret med det Øieblik den varer, er proportionert den Mængde Elementær-Bevægelse, som den imidlertid bringer til Veie. Man maa her nødvendig betragte den hele Tid, hvori der virkes, thi derpaa beroer Maalet af Pressionens hele Virkning, og den hele elementære Bevægelse. I denne uendelig liden Tid er ligeledes

den

den hele Virkning Bevægelsens Størrelse. Følgelig bliver pdt den hele Virkning af Pressionen, mdv ligeledes, og derfor

$$Pdt = mdv$$

som er den store Hoved-Lighed for Bevægelsens Tilvext i Almindelighed.

§. 2.

Man kan deraf giøre en Mængde Slutninger, for at dømme om og at sammenligne de trykkende Kræfter under sig, og i Henseende til deres Virkninger. Thi antager man Tiden dt, i vores forrige Sætning $Pdt = mdv$, altid som bestandig, da er det klart §. 12. 2. at de i uendelig smaae Tider ved de trykkende Kræfter tilveiebragte Elementer af Hastighederne maa være som de igiennemløbne Rum, kaldes da et Element af Rummet, eller en dets uendelig liden Deel dy, da forandres den Forhold $Pdt = mdv$ til denne anden

$$Pdt = mdy,$$

hvoraf følger følgende Hoved-Slutninger, som tildeels og ere blevne afhandlede i Forelæsningen:

Dette forklares nærmere i de fornemmeste enkelte Tilfælde.

a) At om i samme Tid ulige store Materier drives af trykkende Kræfter igiennem lige store Rum, da forholde disse Kræfter sig til hverandre, som de bevægede Materier. Thi da dy og dt ere i denne Tilfælde i Følge vores antagne bestandige, bliver $P = m$, siden man i en Forhold af foranderlige Størrelser alene haver at see paa det foranderlige, og det bestandige hverken giør til eller fra i at dømme om Forholden.

b) Ere derimod Materierne, som bevæges, de samme. Da ere i Sætningen, $Pdt = mdy$, P og dy alene foranderlige, følgelig de i samme Tid trykkende Kræfter i samme Forhold til hverandre, som de igiennemløbne Rum.

c) Ere

c) Ere baade Rummene og de bevægede Materier adskillige, men Tiden den samme; da blive de trykkende Kræfter under sig, som Materierne multiplicerede med de igiennemløbne Rum. Eller, hvilket er det samme, i sammensat Forhold af begge, thi da er $P = mdy$.

d) Vil man finde, hvad der udfordres til, at de i samme Tid trykkende Kræfter kunne blive lige store i Henseende til Virkningen. Da sees, at i den Forhold $Pdt = mdy$, maa, foruden at dt ansees som bestandig, mdy og blive en bestandig Størrelse, dertil udfordres, at naar n betyder en bestandig Størrelse, dy maa forholde sig som $\frac{n}{m}$ eller i en bestandig forkeert Forhold af den bevægede Materie, thi da bliver $Pdt = mdy = \frac{mn}{m}$ følgelig og $P = n$, det er, P bliver en bestandig Størrelse, fordi n er ei foranderlig, men en bestandig Størrelse,

saa Trykningerne paa adskillige Materier ere lige store, dersom de i samme Tid igiennemløbne Rum ere i forkeert eller omvendt Forhold af de bevægede Materier.

e) Man kan deraf ligeledes domme Modstandens Størrelse. Er nemlig Tiden den samme, bliver den som Pressionen ligefrem og det igiennemløbne Rum forkeert tagne. Men man maa i alt dette vel agte, at her ikke handles om vedvarende, men alene om elementære Pressioner, for saavidt som Rummet betragtes.

Den

Den anden Forelæsning.

Om Tyngden, og de fra den nedstammende Hoved-Love i Naturen.

§. 33.

Vi saae, Høistærede! i vores forrige Forelæsning de trykkende Kræfters almindelige Beskaffenhed. Den af dem alle, som vi i det nærværende bør ansee som mest betydelig, er den vi kalde Tyngden: Den er, saa at sige, Livet og Sielen i det, der henhører til Mekanik, ligesom den er det i hele Naturen. Men hvad forstaa vi under dette Navn? For desto bedre at forklare vore Tanker, ville vi kaste Øinene hen paa Fig. 2., hvor den Cirkel G H I forestiller os Jorden. Vi antage her det, som siden, uden Sammenhæng med det nærværende, og uden Cirkel i at slutte, skal blive bevist, at Jorden er rund, og kan ansees som en fuldkommen Kugle. Forestiller man sig en Materie enten inden i Jorden, eller i dens yderste Omkreds, eller over Jorden, som i A for Exempel, da beviser al Erfaring, at den bestandig trykkes ned imod Jordens Middelpunkt T. Den skiulte Kraft, som uophørlig, naar og hvor det er, trykker Materierne ned imod Jordens Middelpunkt, kaldes Tyngden. Den meddeler derfor alle Ting i en uendelig liden Tid en elementair

Hvad Tyngden er og Tingenes Vægt.

Hastighed, hvormed de synke ned efter imod Jorden §. 18, denne er det, som vi kalde Tingenes Vægt, saa Vægten i Tingene er intet andet, end en elementær eller uendelig liden Hastighed, hvormed de selv og alle deres Dele ligedan drives ned imod Jordens Center. Staaer noget imod, da tilintetgiores Tyngdens Virkning, enten ganske eller tildeels af denne Modstand, og det er egentlig i denne Tilfælde alene, at vi tillegge Tingene Vægt.

§. 34.

Hvad Brug Naturen gier af deslige Kræfter, som Tyngdens.

Det henhører egentlig til Physik at afgiore, hvad Tyngden virkelig er i Naturen, i Henseende til sit Væsen. Vi ville her alene erindre, at vi uimodsigelig kunne bevise, at den ei alene virker paa, i, og omkring vores Jord, men endog i Planeterne og overalt hele Verden igiennem, saavidt vi ved vore Erfaringer og de paa dem anlagte Udregninger kunne være i Stand til at komme paa Sporene af Naturens hemmelige Love og skiulte Virkninger. Imidlertid bor denne Anmerkning giore os desto opmerksommere til ret at lære og at forstaa Lovene for Tyngden, da de saa meget bruges i Naturens Huusholdning, og ere, saa at sige, dens anden Haand.

§. 35.

Tyngden virker, som om den var Tingene indvendig, og disses Vægt er derfor altid Ma-

Saa meget kunne vi ikke undlade her at sige, at den trykkende Kraft i Naturen, som vi kalde Tyngden, er noget, som er Tingene indvendigt, og som overalt følger dem, som yttrer sig paa deres mindste Dele, og ei alene paa deres

deres yderste Omsvob eller den saa kaldte Superfice af Tingene. Derfor er det, at i et luftledigt Rum en Fieder og et Stykke Guld, eller det Lætteste og det Tungeste falde lige hastig ned efter, fordi alle Tingenes mindste Dele drives, hver for sig, lige stærk af Tyngden. Dette kan ikke skee udi Luften, fordi denne staaer meer det Lettere, end det under samme udvortes Omsvob tungere, imod. Men da denne Sags nærmere Undersogning henhorer egentlig til Physik, saa ville vi her i sær deraf alene giore en Slutning, som vi i det folgende overalt antage, at nemlig **Tyngden giver Tingene en Vægt, som er deres Materies Storrelse proportionert.** Saa Ting af dobbelt Vægt have dobbelt mange Partikler, af tredobbelt, tredobbelt mange, o. s. v. Dette kan ikke mangle at være, saasnart som Tyngden udover altid en indvendig og ligedan Trykning paa Materiernes mindste Dele, og paa hver af dem i sær, som om den ei stod i Sammenhæng med de andre.

teriens Mængde proportionert.

§. 36.

Denne vigtige Sætning fortiener at giores saa tydelig som muelig. Er et Pund Vox, som det sædvanlig antages, 20 gange saa let som et Pund Guld, saa er det klart, at det og maa rumme og indtage 20 gange saa stor en Plads, som et Pund Guld. Var nu Tyngden en Kraft, der var Tingene udvendig og virkede alene omkring Peripherien, maatte den hvert Øieblik drive et Pund Vox 20 gange stærkere ned imod Jordens Center end et Pund Guld, thi Voxets Peripherie, som den virkede paa, var 20 gange storre.

Folgelig maatte de tunge Ting falde langsommere end de lette, hvilket er imod al Erfaring.

Men en Ting falder hverken fastere eller langsommere end den anden. Tingene falde de letteste med de tungeste lige hastig og folge hverandre bestandig jevnsides i et luftledigt Rum. Altsaa kan Tyngden ikke virke paa Peripherien, den maae nødvendig virke indvendig paa Tingenes mindste Dele, saa hver drives for sig, ellers kunde denne Virkning ikke skee.

§. 37.

Naar Tingene siges at falde. Hvad horizontale og verticale Linier ere.

Naar de elementære Virkninger af Tyngden ei tilintetgiores hvert Øieblik af en hindrende Modstand, iverksætte de og tilveiebringe i Tingene paa alle de trykkende Kræfters Maade §. 18. 19. en Bevægelse i Materien. Saasnart den er bleven til, sige vi at Tingene falde, og dette deres Fald, saavelsom de Love, hvorefter det bør altid skee, naar intet hindrer, ere just, hvad vi i denne Forelæsning ville undersøge. Men for at handle desto ordentligere, ville vi igien kaste Øinene paa Fig. 2, og forud agte, at vi forstaa

1.) ved Horizontal-Linie enhver Linie AF, hvis alle Punkter staa bestandig lige langt fra Jordens Mitte T.
2.) ved verticale Linier alle de, som BT, TC, der staa lodret eller perpendiculair paa den horizontale Linie AF.

§. 38.

Forskiellen imellem de synlige og sande Horizontale.

Da i de store Cirkler over et anseeligt Stykke af den krumme Linie, Rore-Linien eller Tangenten AC paa et temmelig

melig stort Stykke AD ikke løber kiendelig af fra Cirkel-Buen, men kan ansees som at falde ind i og at giøre en Linie med den, saa kaldes Rore-Linien AC derfor ligeledes Horizontal-Linien; men for at giøre Forskiel imellem begge, kalder man AF **den sande**, og AC **den synlige eller apparente Horizontal-Linie.** zontal- og Vertical-Linier.

Ligeledes kaldes alle Perpendiclerne, som DE; eller de Linier, der ere lodrette paa den synlige Horizontal-Linie, de synlige Verticaler, da derimod de foromtalte, som BT, CT, kaldes de sande Verticaler.

§. 39.

Man seer derfor let, i Følge §. 37 og 38, Forklares videre.

1.) at den sande Horizontal-Linie er en Cirkel-Linie eller et Stykke af en Cirkel, hvis Middelpunkt er Jordens Center.

2.) at de sande Verticaler ere Jordens Diametrer, forlængede, om nødig giøres.

3. at paa smaa Løb i ret Linie, saavel den synlige Horizontal-Linie, som de synlige Verticaler, kunne bruges i Steden for de sande af samme Navn, uden kiendelig Feil. Thi endskiønt de sande Verticaler løbe sammen i Jordens Middelpunkt, er dog Jordens Halv-Diameter saa lang, at paa smaa Løb i ret Linie som AD, Vinklen ATD kan ansees for intet, og følgelig Linierne AT og DT som ligeløbende eller parallele.

§. 40.

De tunge Ting falde altid i de sande Verticaler ned imod Jordens Center.

Vi skulle i det følgende faae at see, at saa ujevn som den øvrige Jord er, saa horizontale derimod staae Vandene, man kalder derfor med Ret Horizontal-Linien Vand-Linien. Virkelig er det og deraf, at nemlig alle tunge Ting falde lodret ned paa Vandene, at vi vide og overbevise os om, **at de tunge Tings Fald altid skeer i Verticalen.** Man kunde derfor kalde denne sidste den Vand-Lodrette Linie.

§. 41.

Maade at bestemme den synlige Vand-Linies Afvigning fra den sandes.

Da vi have begyndt at tale om Forskiellen imellem den sande og synlige Vand-Linie, saa ville vi til videre Brug i det følgende fortsætte disse Betragtninger. Da man strax seer, at i store Lob over AC Forskiellen imellem Rore-Linien AC og Buen AF (see Fig. 2.) altid maa blive anseelig; i C nemlig er man virkelig borte fra det sande Horizontale-Punkt om den Linie CF. Denne Forskiel er imidlertid let at finde, alene at Jordens Halv-Diameter er bekiendt. Thi vil man antage, at AF er en Bue af Jordens Cirkel-Runding, da bliver

$$CK.\ CF = AC^2.$$

Men FC bliver altid i de Maalninger, vi kunne foretage, en uendelig liden Deel af KF eller af Jordens Diameter, følgelig CK = FK. Og altsaa

$$FK.\ CF = AC^2 \text{ eller } \frac{AC^2}{KF} = FC,$$ som var den søgte Linie, eller den synlige Vand-Linies Afvigning udi C fra den sande i F.

§. 42.

§. 42.

I vore Geographiske Forelæsninger skulle vi vise, hvorledes Jordens Diameters Størrelse kan findes. Man haver, under Betingning af, at den holdt i Længde 6538594 franzoske Roder, forferdiget følgende Tabelle, hvilken og paa en Længde af synlig Vand-Linie, der ei er større end 1000° kan ansees, som gandske noie og rigtig, skiønt Jordens Diameter virkelig er omtrent $\frac{1}{464}$ længere end det i Udreigningen antagne Maal. Man seer af Tabellen, at Udreigningen er giort i 12 Tomme Maal. Det samme i enkelte Tilfælde.

Synlig Horizontal-Længde. Ruter.	Afvigninger eller CF. Ruter. Fod. Tom. Linier.
50° — — — —	0 . 0 . 0 . $\frac{1}{3}'''$
100° — — — —	0 . 0 . 0 . $1\frac{1}{3}'''$
150° — — — —	0 . 0 . 0 . $3'''$
200° — — — —	0 . 0 . 0 . $5\frac{1}{3}$
250 — — — —	0 . 0 . 0 . $8\frac{1}{3}$
300 — — — —	0 . 0 . $1''$. 0
350 — — — —	0 . 0 . $1''$. $4\frac{1}{3}$
400 — — — —	0 . 0 . $1''$. $9\frac{1}{3}$
450 — — — —	0 . 0 . $2''$. 3
500 — — — —	0 . 0 . $2''$. 9
550 — — — —	0 . 0 . $3''$. 6
600 — — — —	0 . 0 . $4''$. 0
650 — — — —	0 . 0 . $4''$. 8
700 — — — —	0 . 0 . $5''$. 4
750 — — — —	0 . 0 . $6''$. 3

800°	—	—	—	—	0 . 0 . 7″ . 1‴
850°	—	—	—	—	0°. 0°. 7″ . 11½‴
900	—	—	—	—	0 . 0 . 8 . 11
950	—	—	—	—	0 . 0 . 10. 0
1000	—	—	—	—	0 . 0 . 11. 0.

Man seer let, hvorledes en saadan Tafle videre kan fortsættes, saavidt man selv vil, thi da $FC = \frac{AC^2}{KF}$, og KF er bestandig, imidlertid at AC^2 og FC ere foranderlige, saa er FC altid som AC^2, og folgelig alle Afvigningerne fra den sande Horizontale-Linie som Quadraterne af Længderne udi den synlige Vand-Linie.

§. 43.

Tyngden paa Jorden er egentlig som Quadraten af Distancen fra Jordens Center forkeert tagen, men den kan desuden anses her hos os, som en bestandig hastiggiørende Kraft.

Man beviser i Physik, og vi skulle i disse Forelæsninger forklare de didhen horende Grunde, at **Tyngden uden for Jorden yttrer sig i dens Virkningers Af- og Tiltagelse efter Quadraterne af Distancerne fra Jordens Center forkeert tagne.** For desto bedre at forstaae dette, ville vi antage (see Taf. 1. Fig. 2.), at T er Jordens Middelpunkt, LT en simpel Distance fra samme, AT derimod en tredobbelt, da forholder sig Tyngden i L til Tyngden i A, som Quadraterne af TL og TA. forkeert tagne som 9 : 1. Det er, Tyngdens Trykning udi A er ikke uden $\frac{1}{9}$ af Trykningen udi L. Var AT = 4TL, blev Tyngden udi A = $\frac{1}{16}$ af Tyngden udi L, eller Tyngden i L forholdt sig til den i A = 16 : 1. o. s. v. Men deraf sees, at om det Fald, Tingen gior igiennem en Linie, som AM, er af den Beskaffenhed, at

AM

AM altid er som Intet at regne i Henseende til AT eller MT, da bliver altid $\frac{1}{AT^2} = \frac{1}{MT^2}$ hele Faldet igiennem, og følgelig Trykningen af Tyngden over den hele Linie AM, eller igiennem det hele Fald, eensdan.

Da nu i alle de Tilfælde, som ei alene i vores Mekanik kunde forekomme, men endog i alle mulige, i hvilke vi kunne bruge Tyngderne, AM altid bliver, som intet imod AT, eller imod den hele Distance, reignet fra Jordens Centro af. Saa kan og over alle de Distancer, igiennem hvilke tunge Ting her hos os kunde falde, Trykningerne af Tyngden bestandig, hele Faldet igiennem, ansees for at være eensdanne. Saa Tyngden med Ret siges her hos os at være en Kraft, som alle Øieblik meddeler Tingene en ligedan Fart, eller, som alle Øieblik virker eensdan. Og dette er, hvad vi i Machin-Væsenet og i Tyngdens Virkninger her hos os, herefter bestandig antage; da vi derimod, saa tidt vi handle om de store Naturens Virkninger i store Distancer uden for Jorden, holde os til den anden Hypothese af Tyngden, den, der er som Quadraten af Distancen forkeert.

§. 44.

Disse to Hypotheser; den ene, at Tyngden paa korte Distancer hos os er bestandig, den anden, at den er, som Quadraten af Distancen forkeert; ere iblant en utallig Mængde, som de mekaniske og physiske Skribentere, i sær under Navn af Central-Kræfter, giøre over Tyngden, de to eneste, som stemme med Naturen. Deres Nytte er derfor og

ubeskrivelig stor. Imidlertid maa man ikke troe, at de geometriske Undersøgninger ere unyttige, som i adskillige andre Hypotheser ere blevne giorte med en saa besynderlig Konst og med saa megen Genie. Tvertimod; iblant Naturens Handlinger forekomme nogle vanskeligere, hvor flere Aarsager stode sammen, hvis Virkning de sædvanlige Tyngdens Love ei ere tilstrekkelige nok til at forklare, der er det, at man maa giette sig fort; der er det, at disse Hypotheser behoves.

§. 45.

Bevægelsen af Tyngden her hos os er en eensdan formert Bevægelse. Og Hastighederne i de tunge Tings Fald ere proportionerte Tiderne, i hvilke Faldet staaer paa.

Bevægelsen af Tyngden, eller de tunge Tings Fald her hos os kaldes en eensdan formert Bevægelse, fordi Hastigheden maa nødvendig i den voxe og formeres i lige Forhold med Tiden. Thi da vi her antage, at ingen udvortes Forhindring giør Virkningerne af Tyngden til intet, saa folger, at den i første Øieblik tilvebragte Hastighed bliver ved, §. 8. 19. men, da i det andet en ligesaa stor bliver til ved den anden Trykning af Tyngden, og begge blive ved; imidlertid at Tyngdens tredie Virkning foraarsager en endnu ligesaa stor Hastighed, som de forrige; saa er det klart, §. 43, at Hastighederne i de tunge Tings Fald altid blive i samme Forhold som Tiderne.

§. 46.

De, som ikke med desto større Agtsomhed have eftertænkt det foregaaende, ville maaskee troe, at det er en blot Hypothese, naar vi antage, at Tyngden her hos os virker alle

alle Øieblik eensdan, og ville maaskee sporge, hvorfor vi antage dette sidste saa tilforladelig. Sikkerlig bor Grundsætningen til den storste Deel af Mekanik og Physik ei være hypothetisk. Man maa derfor agte, at foruden, at vi i det følgende skulle bevise denne Sag ved experimentale Beviis, er den allerede bleven beviist §. 43. Thi at Tyngden er i sig som Quadraten af Distancen forkeert, veed man vist, og det skal i det følgende blive uimodsigelig beviist, uden Hielp af det her antagne: men deraf flyder, §. 43. at Tyngden, her hos os, maa blive alle Øieblik eensdan i sin Virkning paa de smaa Distancer, over hvilke Legemerne her kunde falde. Saa det er egentlig af Maaden, hvorledes Tyngden virker i Planeterne, at vi vide, hvorledes den virker hos os.

§. 47.

Deraf følger, at de fra Begyndelsen af Faldet indtil Enden igiennemlobne Rum i adskillige Tings Fald, ere som Quadraterne af Tiderne; eller, om man vil, som Quadraterne af de ved det hele Fald vundne Hastigheder; begge Dele kommer paa et ud, da Hastighederne og Tiderne ere hverandre proportionerte. §. 45.

I de tunge Tings Fald ere de igiennemløbne Rum under sig som Quadraterne af Tiderne, hvori Faldet staaer paa, eller, som Quadraterne af de ved det hele Fald vundne Hastigheder.

Thi, om i Trianglet EFG. (Taf. 1. Fig. 3.) Tiden forestilles ved den Linie EF: saa i E Faldet begynder, varer siden i saa lang Tid ved som EF, og endes udi F, da kunde Hastighederne, som ved Faldet ere blevne vundne i de Tider E*a* og EF, forestilles ved de ligelobende eller parallele Linier *ab* og FG, §. 45. hvoraf følger, at siden i en uendelig liden

Deel af Tiden Hastigheden maa i Bevægelsen være eensdan, §. 35; om da *ca* er en saadan uendelig liden Deel af Tiden, blive *ab* og *dc* lige store, og *abcd* et Parallelogram, thi *ab* falder uendelig nær ved *dc* og den Parallel. Men dette Parallelogram forestiller det i den Tid eller Element af Tid *ca* igiennemløbne Rum, hvilket er som Hastigheden multiplicert med Tiden, §. 13. Men betragter man den hele Tid EF, som inddeelt i lutter deslige uendelig smaa Tider, som *ca*, da er det klart, at det hele Triangel-Rum EFG bliver derved inddeelt i lutter smaa Parallelogrammer, som *abcd*, og følgelig, at det igiennemløbne Rum i Tiden E*a* er i Forhold med Trianglet E*ab*, og ligeledes i Tiden EF med Trianglet EFG. Følgelig ere de i Tiderne E*a* og EF igiennemløbne Rum som Trianglerne E*ab* og EFG: Men disse Triangler ere ligedanne Triangler, fordi *ab* er parallel eller ligeløbende med FG, og ligedanne Trianglers Rum forholde sig som Quadraterne af deres proportionelle Sider, altsaa er Trianglet E*ab* til EFG, det er; de i Tiderne E*a* og EF igiennemløbne Rum ere som $Ea^2 : EF^2$. Det er, som Quadraterne af Tiderne, følgelig og som Quadraterne af Hastighederne. §. 45.

§. 48.

Tiderne derimod og Hastighederne ere som Quadrat-Rødderne af de igiennemløbne Rum.

Deraf flyder; at saavel **Tiderne**, som **Hastighederne ere under sig som Quadrat-Rødderne af de igiennemløbne Rum**, ved at falde igiennem hvilke, Hastighederne vindes.

§. 49.

§. 49.

Med Hastigheden i Enden af Faldet kan i ensdan Bevægelse et dobbelt Rum igiennemlobes, imod det, som igiennemlobes ved Faldet selv i samme Tid.

Og endnu meer. At i samme Tid, i hvilken ved en idelig formert Bevægelse et Rum A kan igiennemlobes, kan med den i Enden af Faldet vundne Hastighed FF et dobbelt Rum 2 A igiennemlobes.

Thi det i Tiden EF i idelig formert Bevægelse igiennemlobne Rum er som Trianglet EFG, §. 47. men, om i samme Tid EF med den uforandrede Hastighed FG et Rum var bleven igiennem Lobet, da var det som Parallelogrammet EFGH, der med Trianglet EFG haver samme Grund-Linie og Høide. Thi i den eensdanne Bevægelse ere de igiennemlobne Rum, som Tiderne multiplicerte med Hastighederne. §. 13. Folgelig er det sidste Rum dobbelt saa stor som det første.

§. 50.

De ved Tingenes Fald i lige store Tider igiennemlobne Rum ere under sig i Forhold som de ulige Tal.

Videre folger, at de i lige Dele af Tiden, i hvilken Faldet varer, igiennemlobne Rum forholde sig i den arithmetiske Forhold af de ulige Tal: 1. 3. 5. 7. 9. 11. o. s. v.

Thi, dersom den Deel af Rummet, som i den første Deel af Tiden er igiennemloben, kaldes 1, da er den i to lige Tider igiennemlobne = 4, §. 47, i 3 Tider igiennemlobne = 9, i 4 Tider igiennemlobne = 16, o. s. v. trekkes de første idelig fra de sidste, saa er

Tider =	1.	2.	3.	4.	5.	6.	o. s. v.
igiennemlobne Rum i de hele Tider =	1.	4.	9.	16.	25.	36.	o. s. v.
igiennemlobne Rum i enkelte Tider =	1.	3.	5.	7.	9.	11.	o. s. v.

§. 51.

At bestemme, hvor langt en tung Ting falder i frie og ubindret Fald i en given Tid.

Man veed; at en Ting, som falder frit uden Modstand, igiennemløber i et Secund af Tid $15\frac{1}{12}$ Pariser Fod, eller $15\frac{1}{2}$ Danske Fødder, (naar Forholden imellem den første Fod til den sidste sættes at være den af 7200 : 7017) og vi skulle i det følgende vise, hvoraf man veed det. Vi ville her sætte, at det i et Secund igiennemløbne Rum er $15'$, følgelig findes deraf let, hvad Rum der igiennemløbes i enhver given Tid t. Thi

$$1'' : 15' = t^2 : 15t^2. \text{ §. 47.}$$

Saa man haver alene nødig at multiplicere Quadraten af den givne Tid med $15'$, for at finde de i den ved Faldet igiennemløbne Fødder.

§. 52.

De tunge Ting kunde, om inter svækkede deres Fald i et Minut igiennemløbe et Rum, større end 3 og tre femte deel Miil.

Man seer deraf, at om Luften ei svækkede Hastigheden, blev den, endog i en kort Tid, overmaade anseelig. Thi sættes Tiden alene et Minute eller $60''$, og man vil søge det i samme igiennemløbne Rum, da er det 3600 multiplicert med 15, eller 54000'. Regnes nu Milen til 3000 geometriske Skrit, hver paa 5 Pariser Fod, og altsaa paa 15000 Fødder, da igiennemløbes af en faldende Tyngde i et Minut saa omtrent $3\frac{3}{7}$ Miil.

§. 53.

At finde de i lige Tider hele Faldet igiennem

Naar man saaledes veed, hvad Rum der igiennemløbes i en Deel af Tiden, er det let, at finde de i andre ligesaa

store

store Dele igiennemlobne Rum ved de §. 50 givne Forhold: 1 : 3 : 5 : 7. o. s. v. igiennemlobne Rum.

Thi er det i en Deel af Tiden igiennemlobne Rum $= a$, bliver det i den anden nestfolgende lige store Deel igiennemlobne $3a$, i den tredie $5a$, o. s. v. Saaledes, naar i det forste Secund igiennemlobes 15′, igiennemlobes i det andet 45, i det tredie 75, o. s. v.

§. 54.

Ligeledes; om man vil, af det i en heel Tid t igiennemlobne og bekiendte Rum a finde, hvad Rum der i en anden Tid d fra Begyndelsen af Faldet til Enden skal igiennemlobes, da om samme Rum kaldes x, er Ligeledes, at finde af det i en given heel Tid igiennemlobne Rum, det hele Faldet igiennem i en anden Tid igiennemlobne Rum.

$$a : x = t^2 : d^2 \quad \text{§. 47.}$$

$$\frac{ad^2}{t^2} = x.$$

§. 55.

Vi have seet, hvorledes de i givne Tider igiennemlobne Rum kunde findes. Men for at giore de nodvendige Udregninger, som here til denne Theorie af Tyngden, og som i Mekanik og Machin-Væsenet i utallige Tilfælde behoves, er dette langt fra ikke nok. Man maa vide, at sammenligne Hastighederne med de igiennemlobne Rum, og Tiderne med begge, og i alt dette agte, at saa tidt, som man vil have et tydeligt Begreb om den eensdan formerte Bevægelse, og den ved samme tilveiebragte Hastighed, maa man altid bringe det dertil, Den uligedanne Bevægelse maa, for at kunne forstaaes, altid bringes paa den eensdanne, og denne igien gives i Secunder.

dertil, at denne sidste i Enden af Faldet saaledes forklares, at man veed, hvor mange Fod den faldende Ting i eensdan Bevægelse kan igiennemlobe i et Secund af Tid; thi ellers har man intet nyttigt og tydeligt Begreb om Hastigheden. Vi ville oplyse dette videre, ved at igiennemgaae de fornemmeste og vigtigste herhid hørende Tilfælde, i hvilke vi ikke ville see paa de simple Forhold, men paa de virkelige Størrelsers virkelige Bestemmelse.

§. 56.

At finde, hvor mange Fødder i eensdan Bevægelse og i et Secund af Tid et Legeme kan lobe, som er Faldet igiennem et vist Rum.

Saaledes sporges, naar et Legeme falder igiennem et Rum R, hvad Hastighed haver det da vundet i Enden af Faldet, det er, hvor mange Fødder kan det i eensdan Bevægelse igiennemlobe i et Secund af Tid?

For at opløse dette Spørsmaal, maa man agte, at den store Hoved-Unitè, til hvilken, som Maal, vi henføre alt, faaes ved den Erfaring, at et Legeme ved sin Tyngde i det første Second af Faldet, falder 15 Pariser Fod; hvilket man i Brugen eller Praxis altid kan antage, uden at faae for lidet, fordi Luften, ved at staae imod, svekker Bevægelsen.

Legger man til denne Anmerkning den anden, §. 49, saa er det klart, at et Legeme, ved at falde igiennem 15, vinder en eensdan Hastighed i et Secund af 30. Følgelig opløses let det foresatte Spørsmaal, thi da Hastighederne ere som Quadrat-Rødderne af de igiennemlobne Rum, saa bliver, om den søgte Hastighed kaldes x,

$\sqrt{15}$:

$\sqrt{15} : 30 = \sqrt{R} : x$ og $x = \frac{30\sqrt{R}}{\sqrt{15}} = \sqrt{2.30.R.}$

folgelig $x = \sqrt{60R.}$

saa man deraf let forstaaer folgende Regel.

For at finde, hvad Hastighed i eensdan Bevægelse henregnet til et Secund, et Legeme kan vinde, ved at falde igiennem en vis Hoide R, behoves intet andet, end at multiplicere denne Hoide med 60, og af det udkommende at trække Quadrat-Roden.

Exempel. Et Legeme falder igiennem 400′, saa bliver den eensdanne Hastighed i et Secund $= \sqrt{400 . 60} = \sqrt{24000,}$ eller noget nesten 155 Pariser Fod.

§. 57.

Af den givne Hastighed at finde det til samme svarende Rum.

Ligeledes, naar den Hastighed er given, hvormed et Legeme i eensdan Bevægelse i et Secund af Tid lober fort, da at finde den Hoide, ved at falde igiennem hvilken denne Hastighed kan vindes.

Uniteten er her ligeledes de 15 Pariser Fod i et Secund. Thi da en eensdan Hastighed i et Secund af 30′ vindes ved at falde igiennem et Rum af 15 Pariser Fod, saa om den givne Hastighed kaldes H, det Rum, igiennem hvilket den ved Faldet skulde vindes, x, da siden, ligesom i nest forrige Oplosning, Hastighederne ere som Quadrat-Rodderne af de igiennemlobne Rum, saa bliver

$30 : \sqrt{15} = H : \sqrt{x}$, og $x = \frac{H^2}{60}$

hvoraf flyder folgende Regel.

For at finde den Høide, ved at falde igiennem hvilken en vis Hastighed kan vindes, behoves alene at tage Quadraten af denne Hastighed, og at dividere den med 60, saa faaes i Fodder den søgte Høide.

Exempel. En faldende Tings eensdanne Hastighed i et Secund er i Enden af Faldet $\sqrt{24000}$, hvad er Rummet, ved at falde igiennem hvilket denne Hastighed vindes. Saa sees, at det bliver $\frac{24000}{60}$ eller 400 Fod.

Vi kunde her giøre ligedanne Anmerkninger i Henseende til Tidens Sammenligning med Rummet og Hastigheden, men da disse Betragtninger ikke ere saa vigtige, som de forrige, ville vi derved ei opholde os. (*)

Andet Tillæg.

Almindelig Theorie for Bevægelsen, i sær for den, som skeer udi ret Linie, saavelsom Udregning af de fornemmeste Tilfælde i Inertiernes frie og retlinede Bevægelse.

§. 3.

I den frie Bevægelse er Lighed imellem Tiden, Hastigheden og den hidtil sagte, og kan ved Hielp af følgende Anmerkninger let forrettes.

Alt hvad der henhører til at udreigne og at forstaa Beskaffenheden af Tingenes frie Bevægelse udi ret Linie, beroer paa det

Man

(*) Man finder dem i Tillægget til denne Forelæsning.

Man maa agte, at alle de herhid hørende Spørsmaal beroe paa at finde enten Hastigheden af Bevægelsen, eller den Tid, hvori den skeer, eller Rummet, som uden Hinder og Modstand igiennemlobes, eller Kræfterne, som foraarsage Bevægelsen. Saa maa man see paa de almindelige Sætninger, hvilke, naar visse foranderlige Størrelser efter Omstændighederne forandres, da kunne passe sig til alle Tilfælde. Af deslige Sætninger have vi i det foregaaende §. 1. allerede anført den fornemmeste, $pdt = mdv$, som er den Forhold, der er imellem den trykkende Kraft, Tiden, hvori den virker, og Hastigheden, som den i den bevægede Materie tilveiebringer eller forandrer. Men da $pdt = mdv$ er her alene en Forhold, og vi antage, at Virkningerne ere bestandig deres Aarsager paa samme Maade, fuldkommen nemlig, proportionerte; saa bliver $npdt$ saa stor som mdv, n er her en altid bestandig og uforanderlig Størrelse, som man engang for alle bestemmer udi et enkelt Tilfælde ved Erfaring.

stiggiorende Kraft, som idelig driver et Punkt, $npdt = mdv$.

§. 4.

I den Ligheð $npdt = mdv$, som kan forandres til denne anden $dv = \frac{np}{m}dt$, er $\frac{p}{m}$ det man kalder den accelererende eller hastiggiorende Kraft, thi da p er den hele Trykning paa Inertien eller Materien m, fordi vi betragte her ingen anden Modstand end Inertiens, saa er $\frac{p}{m}$ Virkningen af den trykkende Kraft paa et hvert Punkt i Materien eller enhver dens mindste Deel; altid noget saadant, som det vi kalde Tyngden, i Henseende til Maaden, hvorpaa der virkes. Dette er og Aarsagen, hvorfor vi her anse den bevægede Materie, som et Punkt. See §. 35. Forelæsn.

I denne Ligheð er $\frac{p}{m}$ den hastiggiorende Kraft.

§. 5.

Er $\frac{p}{m}$ en altid ligedan virkende Kraft, som Tyngden hos os, da bliver Ligheden $ngdt = dv$.

Vi ville giøre Brug af det allerede sagte, for at see dets Nytte, og derfor undersøge, hvad Henseende Hastigheden faaer til Rummet i det feromtalte Tilfælde, da Tyngden eller en anden saadan Kraft virker, og naar den virker som her hos os, altid eensdan og lige stærk. I dette Tilfælde bliver $\frac{p}{m}$ en bestandig Størrelse. Thi p kan ellers være given i foranderlige Størrelser, algebraiske eller transcendentale og bestandige, som man selv vil, og enhver given enkelt Tilfælde det udfordrer. Sættes da $\frac{p}{m} = g$, da forandres saaledes Ligheden $\frac{np}{m} dt = dv$ til denne anden

$$ngdt = dv.$$

som er den simpleste, men fast nyttigste Tilfælde af alle.

§. 6.

Den almindelige Lighed imellem Rummet og Hastigheden i en uendelig liden Tid er $dy = vdt$

Før vi nu kunne deraf udlede, hvad vi ville, i Henseende til Rummet, der igiennemløbes; maa vel agtes, at dertil behøves en Sætning, hvilken viser, hvad Forhold Hastigheden haver til det Rum, som igiennemløbes i en uendelig liden Tid. Da nu i denne sidste Hastigheden altid er eensdan, saa er Rummet i Forhold med Hastigheden multiplicert med Tiden, og altsaa, om Hastigheden kaldes v, Tiden dt, som før et uendelig lidet Stykke Rum, som igiennemløbes udi Tiden dt, dy. Da bliver

$$dy = vdt.$$ §. 13. Forelæsn. (*)

§. 7.

(*) Vil man, at den Lighed $dy = vdt$ skal være i sit Slags den alleralmindeligste, da bliver $y = fvdt$, hvor Hastigheden v kan være, hvad den skal, eller, som man kalder det, hvad for en Function af Størrelser, som man vil, af algebraiske foranderlige og bestandige, af transcendentale, af

§. 7.

Saaledes bliver $\frac{dy}{v} = dt$. Hvilket om sættes i Steden for dt i Ligheden §. 5. $ngdt = dv$, da faaes $\frac{ngdy}{v} = dv$ eller $ngdy = vdv$, som er en Ligheb, der altid viser Forholden af Hastigheden til det igiennemløbne Rum. Og for Kræfterne i Almindelighed bliver $\frac{np}{m}dy = vdv$.

Den almindelige Ligheb for Kræfterne, Rummet og Hastigheden i en uendelig liden Tid er $\frac{np}{m}dy = vdv$. For Tyngden $ngdy = vdv$.

§. 8.

Slutningerne selv ere nu i det Tilfælde, da g er en bestandig Størrelse, overmaade lette. Man kan alene forud agte, at naar en trykkende Kraft driver bestandig mod et og det samme Punkt B,

Hvad Kræfternes Center er.

Størrelser, som indeholde andre, der ikke kunne integreres, af exponentielle, med et Ord; af alle de, som man i Algebre kiender og kunde tænkes. men saa tidt som $\int vdt$ ei kan integreres, eller i det mindste af integrable Ligheder construeres, er denne almindelige Ligheb i enkelte Tilfælde til ingen Nytte.

Hvad der i Mekanik beroer paa mekaniske Constructioner af utallige Punkter og uintegrable Formuler, tiener ikke stort til almindelig Nytte. Imidlertid kan jeg, i Anledning af dette, ikke undlade, at sige med et par Ord, hvad det er, man i de mekaniske Skrifter kalder Hastighedernes Sted, (Locus eller Scala celeritatum). Det er da (see Taf. 2. Fig. 2.) en Linie, krum eller ret, som ADL, udi hvilken i vor Tilfælde, da $dy = vdt$. AB Axeln af den krumme Linie forestiller Tiden, den krumme Linies Ordinater BD og CE forestille v eller de idelig foranderlige Hastigheder, saaledes som den givne Hypothese det medfører. Saa bliver BDEC $= dy =$ det igiennemløbne Rum, som man veed, hvad er, saa tidt som den krumme Linies ADL innere Rum, som ABD, ere integrable. Man kan giøre ligesaa almindelige Anmerkninger, i Henseende til Rummet, Tiden og Kræfterne. De krumme Linier, hvis Ordinater, eller Buer, eller Rum, eller visse Dele, paa hvad Maade de end tages i en uoverbrudt Orden, vise

(Taf. 1. Fig. 4.) saaledes, for Er. som Tyngden bestandig driver imod Jordens Middel-Punkt, da kaldes det Punkt B Kræfternes Center.

§. 9.

Naar den hastiggiørende Kraft er hele Virkningen igiennem bestandig, er altid det igiennemløbne Rum proportionert Quadraten af Hastigheden i Enden af Faldet.

Er da AB den Linie, igiennem hvilken en Tyngde falder, (Taf. 1. Fig. 4.) B Kræfternes Center; i A Begyndelsen af Faldet; $Ad = x$, $de = dx$, og den trykkende Kraft eller Tyngden er en bestandig Størrelse $= g$. Da er §. 7. $ngdx = vdv$, (thi dv forandres her til dx,) af hvilken Differential-Ligheds, naar tages hele Summen eller Integralen, bliver $ngx = \frac{1}{2}vv + B$. B betyder en bestandig og altid uforanderlig Størrelse, som, fordi den er uforanderlig, under Differentiationen altid forsvinder. For at bestemme B, maa agtes, at i A, hvor $x = 0$ er og $v = 0$, følgelig bliver og $B = 0$, thi man faaer $0 = 0 + B$, saa at man finder simpel hen $ngx = \frac{1}{2}vv$.

Da nu ng og $\frac{1}{2}$ ere uforanderlige Størrelser, i Følge vores antagne: saa bliver altid $x = vv$, eller det igiennemløbne Rum, i Forhold med Quadraten af Hastigheden. Saa at, saa tidt som den hastiggiørende Kraft er bestandig, hvad heller den er saa stor som Tyngden eller ei, gielder altid den samme Regel som før, §. 47. Forel., at nemlig det igiennemløbne Rum er som Quadraten af Hastigheden.

§. 10.

Ere deslige Kræfter forandelige under

Da i Almindelighed $ngx = \frac{1}{2}vv$, saa er $v = \sqrt{2ngx}$, altsaa Hastigheden i Forhold med Quadrat-Roden af Høiden eller Rum-

Hastighedernes, eller Tidernes, eller Kræfternes Foregang, kaldes disse deres Stader.

Rummet, igiennem hvilket Faldet skeer. Den Hastighed nemlig, som saaes i Enden af Faldet. Thi $2ng$ er en bestandig Størrelse og derfor $v = \sqrt{x}$, eller v proportionert $\sqrt{x}$.

sig, da blive de endelige Hastigheder proportionerte den sammensatte Forhold af Rummets og af Kræfternes Quadrat-Rødder.

Ansees videre de bestandige hastiggiørende Kræfter under sig som foranderlige, da sluttes videre:

1) at v er som $\sqrt{gx}$, det er; Hastighederne, som tilveiebringes i samme Tid af adskillige hastiggiørende, men bestandige, Kræfter, ere altid i sammensat Forhold af disse hastiggiørende Kræfters Quadrat-Rødder og af Rummets Quadrat-Rødder.

2) Er v bestandig, da bliver $x = \frac{1}{g}$. Følgelig blive de Høider, ved at falde igiennem hvilke lige store Hastigheder vindes, i forkeert Forhold af de bestandige Kræfter, som foraarsage dem.

§. II.

Vil man af den Ligheds $ngx = \frac{1}{2}vv$ eller $2ngx = vv$, i hvilken som helst given enkelt Tilfælde, strax af x finde v eller hvad Hastigheden er udi Fødder, som med en ligedan Bevægelse kunde igiennemløbes udi et Secund. Da maa ved et Forsøg i en enkelt Tilfælde Størrelserne af n og g forskfastsættes. Dertil tiener, hvad i den anden Forelæsning er bleven sagt, og vi for have betient os af, at de tunge Ting løbe i frie og uhindret Bevægelse omtrent igiennem et Rum af $15\frac{1}{12}$ Pariser Fod. Eller endnu neiere af $15' 1'' 8'''$, som giør noget nesten i Decimal-Brøk 15, 0976 Pariser Fod. Man kan betiene sig af dette sidste Tal, saa tidt som det er magtpaaliggende meget neie at finde den igiennemløbne Høide, og endnu bedre af den Rhinske Fod, for at faae $\sqrt{g}$ i hele Tal. Thi naar den Rhinske Fod forholder sig til den Franske som 139 : 144 eller 1000 : 1035 beløber

Maade at bestemme den bestandige Størrelse ng i Ligheden $ngx = \frac{1}{2}vv$ For af x strax at finde v, eller af v at finde x.

15,

15,0976 Pariser Fod sig i Rhinske Fødder til 15, 626, hvorfor kan tages 15,625, fordi den nøie Quadrat-Rod er deraf 125. Man kan derfor i Sætningen $ngx = \frac{1}{2}vv$ (siden to gange det Rum igiennemlebes med den i Enden af Faldet vundne Hastighed, som det Rum selv er, igiennem hvilket Hastigheden vindes, §. 36. F.) sætte til $x = 15.625$, $v^2 = (15.625)^2 . 4$, saa bliver $2ngx = v^2 = (15,625)^2 . 4$. Men x er da $= 15,625$, altsaa $ng = (15,625).2$. Sættes $n = 1$, bliver $g = 31250$ Rhinske Fod. Saa man deraf seer, at naar denne Værdie for g vedligeholdes, som er Tyngdens naturlige Virkning i et Secund, maalt efter den foraarsagede Hastighed i eensdan Bevægelse, saa kan overalt i de forrige Ligheder n sættes $= 1$. Men en saa nøie Bestemmelse af g behøves ikke uden sielden.

§. 12.

Det samme anderledes. Og hvorledes af Høiden altid den eensdanne Hastighed til et Secund i Enden af Faldet kan findes.

I de fleste Regninger kan det være nok at sætte $ng = 30'$ Pariser eller Dansk Maal, siden Forskiellen imellem begge ikke er af Betydenhed, eller $n = 2$, $g = 15$ eller $n = 1$, $g = 30$, og bliver da bestandig $v = \sqrt{60x}$. Er $x = 40$, bliver Hastigheden $= \sqrt{2400}$ Fod, i eensdan Bevægelse i et Secund. Er $x = 50$, bliver $v = \sqrt{3000}$ Fod, hvilket ligeledes findes af de foregaaende Regler §. 56. Forel.

§. 13.

Ligeledes, naar denne Hastighed er given, at finde den til samme

Ligeledes sees, hvorledes man altid kan, naar Hastigheden til et Secund er given, finde det Rum eller den Høide, ved at falde igiennem hvilken denne Hastighed kunde findes, og det endnu lettere end

§. 57.

§. 57. Forel. hvor vi søgte, at giøre denne Sag saa klar, som mueli Tingenes Fald svarende Høide.
lig; thi da $v = \sqrt{60x}$, er da $v = \sqrt{3000}$, saa bliver $3000 = 60x$ og $x = 50$. Er $v = \sqrt{2400}$, da er $2400 = 60x$ og $x = 40$, saa man ikke behøver uden den samme Ligned for at opløse begge disse Tilfælde §. 12 og 13.

§. 14.

Man kan ligeledes giøre deslige Anmerkninger i Henseende til Tiden; thi om $n = 1$ er $gdt = dv$, og $gt = v$, altsaa kan altid af Hastigheden de Secunder Tid findes, i hvilke Hastigheden ved Tyngdernes uhindrede Fald kunde vindes. For Ex. sættes $2g = 60'$, som før, er $g = 30$, og $30t = v$. Er da den eensdanne Hastighed $30'$, bliver $t = 1''$, er Hastigheden 60 Fod i Secundet, bliver $t = 2''$, er den 90 Fod i Secundet, bliver $t = 3''$, og overalt sees: Ligedanne Anmerkninger i Henseende til Tiden, eller af den givne eensdanne Hastighed i Enden af Faldet, at finde Tiden af Faldet.

1.) At altid, saa længe Tyngden er bestandig, bliver Tiden i lige Forhold med Hastigheden, og

2.) at under adskillige, men bestandige hastiggiørende Kræfter, ere Tiderne af Faldet, som Hastighederne ligefrem tagne, og de hastiggiørende Kræfter forkeert tagne.

§. 15.

Den tredie Tilfælde, som her er af Vigtighed, bestaaer i at finde en Ligned imellem Rummet og Tiden, for at have en Hoved-Sætning for alle de Tilfælde, som dertil henhøre. Man maa da vel agte, at, saasnart som der handles om en vedvarende Pression, er ikke meer $\frac{p}{m}dt = dy$. Hvilket vi og forhen have erindret §. 2. Ligned imellem Rummet og Tiden i Tingenes Fald.

Thi denne Lighed gielder ikke, uden for saavidt som en Elementær-Pression forvolder en aldeles simpel og eensdan Bevægelse ved en eneste simpel Virkning. Saa tidt, som Virkningen varer ved, seer man let; at det igiennemløbne Rums Størrelse beroer ei alene paa Pressionernes umiddelbare Virkning i enhver af de uendelig smaa Tider, men desuden paa den Hastighed og Fart, som allerede ved de foregaaende Virkninger er bleven meddeelt. Da derimod den hele Hastighed er intet andet end Summen af alle de elementære Hastigheder, som i samtlig de uendelig smaa Tider og i hver af dem for sig meddeles. Den sande Forhold, hvilken her er imellem Rummet, Hastigheden og Tiden, er den af $dy = vdt$ §. 6. Altsaa; for at komme til en Differential-Lighed imellem Rummet og Tiden, maa v gives i y, og desuden Forholden $dy = vdt$ forandres til den Lighed, $mdy = vdt$. Da nu §. 12. $v = \sqrt{2gy}$, thi i Steden for Hastigheden kan altid Quadrat-Roden af den Høide sættes, ved at falde igiennem hvilken denne Hastighed vindes. §. 10. Om ellers de virkende Kræfter ere bestandige. Saa bliver $\frac{mdy}{\sqrt{2gy}} = dt$, hvoraf Summen er $\frac{2m\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$, uden at legge en bestandig uforanderlig Størrelse til af de §. 9. anførte Aarsager.

Deraf sees 1) at saa tidt som de hastiggiørende Kræfter ere bestandige, ere Tiderne som Quadrat-Rødderne af de igiennemløbne Rum. Og

2) at, naar disse Kræfter vel ere bestandige, men under sig foranderlige, ere Tiderne i sammensat Forhold af Quadrat-Rødderne af de igiennemløbne Rum simpel hen tagne, og af Quadrat-Rødderne af de bestandige hastiggiørende Kræfter forkeert tagne.

3) At

3) At i den samme Hypothese, naar nemlig de bestandige Kræfter under sig ere foranderlige, da; om Tiden antages ydermere som bestandig, bliver $\sqrt{y} = \sqrt{g}$, og derfor blive de i samme Tider igiennemløbne Rum proportionerte de hastiggiørende Kræfter.

§. 16.

I Tingenes Fald af Tiden at finde det igiennemløbne Rum, eller af Rummet Tiden.

Vil man af Tiden finde Rummet, eller af Rummet Tiden, da maa i Ligheden $\frac{2m\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$, m og g først bestemmes udi virkelig Størrelse. Sættes da $t = 1$ Secund, saa bliver $4mmy = 2g$, eller $2mmy = g$. Sættes som før $g = 31,250'$ §. 11, da bliver $2y = 31,250' = g$, altsaa $m = 1$; saa man kan simpel hen sætte $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$.

I de fleste Udregninger er det nok, naar $\sqrt{2g}$ sættes som før $= \sqrt{60}$. Sættes da videre $t = 1''$, saa bliver $4y = 2g$, $y = \frac{g}{2} = 15$. Er $t = 2''$, da bliver $\sqrt{y} = \sqrt{2g}$, og altsaa $y = 60$. Er $t = 3''$, da bliver $4y = 9.60 = 135$.

§. 17.

Man kan giøre Ligheden imellem Hastigheden og Tiden meget simplere, end i den før fundne $ngdy = vdv$ §. 7; saafremt nemlig, at man i Steden for Hastigheden selv betiener sig af den Høide, ved at falde igiennem hvilken Hastigheden kan vindes. Thi er, som før, y det igiennemløbne Rum, igiennem hvilket at den naturlige Tyngde driver et Legeme, og x tilkiendegiver den Høide, ved at falde igiennem hvilken Hastigheden i Enden af Faldet kan vindes, da bliver $dy = dx$,

og $y = x$. Er Hastigheden v, da bliver $v^2 = x$ og v som $\sqrt{y}$, hvilket tilkiendegiver det Antal Fødder, som Tingen i Faldet igiennemløber i uligedan Bevægelse, for at naae den søgte Hastighed. Men deraf findes let, hvad Hastigheden bliver i den eensdanne Bevægelse for et Secund alene ved at multiplicere med $\sqrt{4g}$, naar $g = 15'$. Eller ved at sige, $\sqrt{15} : 30 = \sqrt{y} : \frac{30}{\sqrt{15}}\sqrt{y} = \sqrt{60}\sqrt{y} = \sqrt{60y} = \sqrt{4gy}$, som før, naar ved g forstaaes $15'$, eller $\sqrt{2gy}$, om ved g forstaaes $30'$, eller $\sqrt{gy}$, om ved g forstaaes $60'$. §. 12. og §. 56 Forel.

§. 18.

Man maa videre agte, at saa tidt som man paa denne Maade haver fundet Hastigheden $v = \sqrt{y}$, og man af den vil betiene sig, for at finde som før Tiden i den Lighed $\frac{mdy}{\sqrt{2ngy}} = dt$, der forandres nu til denne anden $\frac{mdy}{\sqrt{y}} = dt$, da maa for m sættes $\frac{1}{\sqrt{4g}}$ (ved g atter igien forstaaet 15 Fod) Saa deraf sees, at saa tidt som man faaer i Følge af denne sidste Maade at beregne Hastighederne og Tiden paa den Lighed $t = \int\frac{dy}{\sqrt{y}}$, da for at finde Tiden i virkelig Størrelse udi Secunder behøves intet andet, end at dividere $\int\frac{dy}{\sqrt{y}}$ med $\sqrt{4g}$.

§. 19.

Maade at bestemme Bevægelsen, naar Tingene i Begyndelsen af Faldet

Vi saae, at i de forrige Tilfælde var det unødigt, at bekymre sig om at legge en uforanderlig Størrelse til Integral-Summen, fordi naar $x = 0$, bliver saavel Hastigheden, som Tiden $= 0$. Dette

er

er just, hvorudi den Tilfælde, da en Ting i Begyndelsen af Faldet udi A haver allerede en given Hastighed ned efter Linien Ad, før Tyngden begynder at virke, og drives saa siden af en bestandig Tyngde eller trykkende Kraft; er adskillig fra de forrige. Thi søger man, hvad Hastighed den maa faae i hvad for et foranderligt Punkt man vil, da er (Fig. 4. Taf. 1.) om Hastigheden i Begyndelsen kaldes c, og den i d, $c + v$, Differential-Hastigheden dog dv; om A$d = x$, er atter igien som før, om man vil betiene sig af Ligheden §. 7. 12. $gdx = vdv$, $gx = \frac{1}{2}vv + B$. Da nu, naar $x = 0$, $v = c$, saa bliver $-\frac{cc}{2} = B$ og $2gx = vv - cc$. Følgelig $v = \sqrt{2gx + c^2}$, men $\sqrt{2gx}$ er §. 10. den Hastighed, som vindes ved Faldet igiennem den Høide x; kaldes da denne Hastighed Q, da bliver $v = \sqrt{QQ + c^2}$. Er x for det hele Fald $= a$, den Hastighed, som svarer til $\sqrt{a} = b$, bliver i Enden af Faldet $v = \sqrt{b^2 + c^2}$. have en vis given Hastighed.

For at vise Nytten af Lighederne §. 17, 18; da, om h er den Høide, som svarer til Hastigheden v, og man sætter $dx = dh$, i Stæden for $gdx = vdv$; faaes $x = h + B$. Er d den Høide, igiennem hvilken Hastigheden c ved Faldet bliver til; da, naar $x = o$, er $h = d$, altsaa bliver $h = x + d$. Da nu $\sqrt{b} = v$, saa er $v = \sqrt{x + d}$, og om x bestemmes til en vis Størrelse a for det hele Fald, er $v = \sqrt{a + d}$, men $d = cc$ §. 17. og $a = bb$ §. 17. Benævningerne af Hastighederne giorte her som strax oven for, følgelig faaes som før, $v = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Er Hastigheden given, da bestemmes let Ligheden for Tiden, siden denne sidste altid er proportionert Elementet af det igiennemlebne

Rum dividert med Hastigheden, saa at i vores nærværende Tilfælde derfor, $dt = \frac{dx}{\sqrt{x+d}}$ og $t = 2\sqrt{x+d} + B$. B findes deraf, at naar $x = 0$ er Integralet $= 2\sqrt{d}$, saa at derfor $t = 2(\sqrt{x+d} - \sqrt{d})$ hvilken Størrelse endnu maa multipliceres med $\sqrt{\frac{1}{4g}}$ §. 18, om man vil have Tiden tilkiendegivet udi Secunder. Da det forstaaer sig selv, at x og d desuden maa gives i samme Maal som g, nemlig; om $g = 15'$, i Parisiske eller i Danske Fødder.

§. 20.

Ligeledes naar $\frac{p}{m}$ ei er som før en bestandig hastiggivrende Kraft, for Er. naar den er som Quadraten af Distancen fra Kræfternes Center forkeert tagen: da at bestemme den retlinede Bevægelse.

Sættes $\frac{p}{m}$ ei som en bestandig og uforanderlig Størrelse, men tvertimod at være foranderlig, er Opløsningen dog altid den samme, alene at $\frac{p}{m}$ bestemmes.

Man seer let, at den Mængde adskillige Spørsmaal, som her kan forekomme, beroer paa Kræfternes Adskillighed, eftersom de enten antages at forholde sig saa, eller anderledes. Vi ville i sær see paa de Love for Kræfterne, som enten virkelig forekomme, eller som meest nærme sig til de, der forekomme i Naturen. Hvorfor vi og særdeles betragte de, i Følge hvilke Kræfterne virke efter Høiderne af Distancen fra visse Punkter, til hvilke de altid søge og imod hvilke de altid drive det Bevægede.

En af de vigtigste Tilfælde af alle, som her kunde forekomme, er den, naar Tyngden sættes at være foranderlig efter Quadraten af Distancen fra Kræfternes Center forkeert tagen. Er B dette Center, (Fig. 4. Taf. 1.) i A Begyndelsen af Faldet, $BA = a$, $Bd = x$, da er $de = -dx$, fordi x idelig formindskes, imod at Hastigheden voxer,

voxer. Er Jordens Halv-Diameter $BC = r$, Tyngden hos os eller i $C = g$, da er i Følge vores antagne $xx : rr = g : \frac{rr}{xx}g = \frac{p}{m}$ og i Stæden for Ligheden $vdv = \frac{npdx}{m}$ §. 9. faaes $vdv = -nrrg \cdot \frac{dx}{xx}$, altsaa

$$\tfrac{1}{2}vv = \frac{nrrg}{x} + B$$

For at finde den bestandige Størrelse B, maa agtes, at, naar $x = a$ er $v = 0$, følgelig $B = -\frac{nrrg}{a}$, og saaledes bliver

$$vv = \frac{2nrrg}{x} - \frac{2nrrg}{a} \text{ og } v = r.\sqrt{2gn}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}} = r\sqrt{2gn}\sqrt{\frac{a-x}{ax}}$$

sættes $2ng = 1$, bliver Heiden, som svarer til Hastigheden $v_1 = r^2.\left(\frac{a-x}{ax}\right)$

For enhver endelig Størrelse af x findes v i virkelig Størrelse efter det forhen sagte. Men bliver $x = 0$, hvilket haver Sted for det hele Fald igiennem AB, er $v \infty$, eller uendelig stor. Det er, i Kræfternes Center selv bliver Hastigheden uendelig stor, hvilket er den merkelige Forskiel imellem dette Tilfælde og det nest forrige, da Tyngden blev antagen som bestandig. Thi i Kræfternes Center selv bliver Hastigheden da endelig, om a er endelig, siden den aldrig bliver større end Quadrat-Roden af det igiennemløbne Rum. §. 10.

Paa den anden Side af Kræfternes Center er x negativ, eller en nægtende Størrelse; saa $v = r.\sqrt{2gn}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}$ forandres til den umuelige Størrelse $\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}$, som synes at vise, at ingen videre Bevægelse skulde kunde have Sted paa den anden Side af Kræf-

ternes

ternes Center, men at den tunge Ting skulde igien i B begynde at stige fra B op imod A, fordi paa hin Side Kræfternes Center bliver v umuelig. Men man maa tillige agte, at Kraften bliver der en nægtende (*) Størrelse.

§. 21.

Det samme, naar den hastiggiørende Kraft er som den Høide n af Distancen forkeert eller lige frem tagen.

Dersom man i Stæden for Quadraten af Distancen, tog hvad anden Høide n af den, som man vilde, i forkeert Forhold; da blev alt som før, alene at $x^n : r^n = g : \frac{r^n}{x^n}g$, hvilket da blev den hastiggiørende Kraft. Følgelig blev og, Benævningerne giorte som før, $vdv = -\frac{r^n}{x^n} ngdx = -gnr^n x^{-n}dx$. Er ligesom udi §. 17 og 19, h den Høide, der svarer til v; da bliver $dh = -r^n x^{-n}dx$, og ved at summere; $h = \frac{r^n x^{-n+1}}{n-1} + B$. Da nu, naar $x = a$, $h = 0$, saa er $B = -\frac{r^n a^{-n+1}}{n-1}$ og derfor

$$h = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}$$

For det hele Fald er $x = 0$ og $h = \frac{r^n a^{-n+1}}{1-n}$

Hvoraf sees, efter de adskillige Forandringer af n,

1) At saa længe n er en bekræftende Størrelse eller Positiv, bliver $v = \sqrt{h} = \sqrt{\frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}}$, og, naar $x = 0$

er

(*) See videre desangaaende Eulers Mekanik tom. I. cap. 3. prop. 32. schol. 1.

er $\frac{r^n}{x^{n-1}} = \infty$. Følgelig i Kræfternes Center selv Hastigheden altid uendelig, om n er positiv og > 1.

2) Er derimod n positiv, men < 1; eller og negativ. (hvilket sidste skeer, om den hastiggiørende Kraft er i ligefrem Forhold af Distancen.. Da bliver, som før sagt, Hastigheden for det hele Fald endelig. Thi, naar $x = 0$, er da $x^{-n+1} = 0$. Og egentlig $h = (r^n a^{-n+1}) : \overline{1-n}$, naar n er positiv, men < 1. hvilket forandres til $(a^{n+1}) : r^{n(n+1)}$ naar n er negativ. Ellers er Hastigheden efter det nylig beviiste i Kræfternes Center selv uendelig, og derfor ubestemmelig.

3) Dersom i den første Tilfælde af $+n$, sættes i Ligheden

$$v = \sqrt{\frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}}, \quad n = 1;$$

da bliver $v = \sqrt{\frac{r-r}{1-1}} = \frac{0}{0}$, følgelig maa v findes af Differential-Ligheden selv, som da bliver $dh = -\frac{rdx}{x}$, hvoraf Summen er, $h = -r \operatorname{Log.} x + r \operatorname{Log.} a = r \operatorname{Log.} \frac{a}{x}$. Da L. $\frac{a}{x}$ om $x = 0$, er ∞, saa bliver og, saasnart som den hastiggiørende Kraft er som Distancen fra Kræfternes Center forkeert tagen, Hastigheden i dette Center uendelig stor. Men denne uendelige Hastighed bliver tillige iblant alle af sit Slags den mindste, fordi $\operatorname{Log.} \frac{1}{0}$ er den mindste uendelige Størrelse af alle. Hvorfor og denne Tilfælde er at anseе som Grændse-Skiellet imellem alle de, udi hvilke Hastigheden i Kræfternes Center paa den ene Side er endelig, og uendelig derimod paa den anden.

4) Dersom i det Tilfælde af $-n$ sættes $n = 1$, det er, om Tyngden er som Distancen fra Kræfternes Center, hvilken Lov for Tyngden vi paa sit Sted skulle faae at see, haver Sted, om de tunge Ting falde inden i Jorden, da bliver $v = \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2r}}$.

§. 22.

Maade at bestemme Tiden, viist i det Tilfælde, da Faldet skeer i ret Linie og Tyngden er som Distancen fra Kræfternes Center.

I denne sidste Tilfælde, da nemlig Tyngden er Distancen fra Kræfternes Center bestandig proportionert; er det af Vigtighed at finde Tiden. Da derfor §. 18. $\frac{dy}{\sqrt{y}} = dt$, men $\sqrt{y}$ er her, hvad i §. 21. 4. $\sqrt{b}$ var, og dy forandres til $-dx$, saa bliver, alle Benævningerne tagne som før, $-\frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2r}}} = dt$.,

Da nu, om Cirklens Halv-Diameter $= a = AB$ (Taf. 1. Fig. 4.) og man fra Centret B trekker den Quart-Cirkel AF. Elementet af Buen fg er $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, saa bliver $-\frac{dx\sqrt{2r}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{2r}}{a} \cdot \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$

$= -\frac{\sqrt{2r}}{a} Ff + B$. B betyder en bestandig Størrelse, som faaes derved, at naar $x = 0$, bliver den hele Tid af Faldet fra A til B $= \frac{\sqrt{2r}}{a} FfA$. Thi da Buen egentlig er negativ, og Ff, om $x = 0$, $= 0$, maa man tage i Steden for Ff dens Rest, som fyldestgier den hele Quadrant. Følgelig er Tiden, da Faldet skeer igiennem Ad $= Af \frac{\sqrt{2r}}{a}$. Heraf følger

I dette Tilfælde

1) At da Tiden igiennem $AB = \frac{AF}{a} \cdot \sqrt{2r}$, og $\frac{AF}{a}$; (om Periphe-

Peripherien kaldes p, Diametern d. $= \frac{1}{4}p : \frac{1}{2}d = p : 2d$, saa bliver Tiden igiennem $AB = t = \frac{\sqrt{2r}}{2} \cdot \frac{p}{d}$; da derfor denne Størrelse altid er bestandig, saa følger. At saa tidt som de hastiggiørende Kræfter ere Distancerne fra Kræfternes Center proportionerte, saa bliver altid Tiden den samme, i hvilken Tingene falde indtil dette Center, hvad heller at den Vei AB, som de have at falde, antages at være stor eller liden, hvilket er en af de meget smukke Egenskaber, der er denne Hypothese af Kræfterne egentlig.

De er Tiden af Faldet ind til Kræfternes Center den samme, enten Distancen er stor eller liden.

2) Da $t = \frac{\sqrt{2r}}{2} \cdot \frac{p}{d}$, saa kan r sættes at være foranderlig, hvilket maa have Sted, saa tidt som flere Kræfternes Centrer sammenlignes under sig, hvis absolute eller virkelige Kræfter ere adskillige, saa at derfor den Distance fra Centret, i hvilken Kraften er saa stor som Tyngden, bliver foranderlig. I denne Hypothese er $t = \sqrt{r}$, det er. Tiderne ere under sig, i hvilke Tingene falde til Centret, som Quadrat-Rødderne af de Distancer, i hvilke den fra Centret virkende Kraft er saa stor som Tyngden.

Men Central-Kræfterne selv ere altid under sig, som de Kræfter, hvilke de kunde yttre paa lige store Distancer fra Centret. Følgelig da de i denne Hypothese, ere desuden som Distancen fra Centret, og $gx = pr$, saa blive de under sig forkeert som de Distancer, i hvilke de ere saa store som Tyngden. Følgelig, naar Central-Kraften kaldes P, er i denne Hypothese altid $P = \frac{1}{r}$, derfor er $r = \frac{1}{P}$ og $t = \sqrt{\frac{1}{P}}$. Saa man deraf seer, at Tiderne af Faldet ere under sig, som Quadrat-Rødderne af Centrernes absolute Kræfter forkeert tagne.

§. 23.

Tidens Bestemmelse af Faldet til Centret, naar Tyngden er som Quadraten af Distancen forkeert.

Vil man i Fig. 4. Taf. 1. antage D som Kræfternes Center, og derpaa ligeledes søge Tiden af Faldet igiennem AD i det Tilfælde, da den hastiggierende Kraft er som Quadraten af Distancen forkeert. Da sees af §. 20. at Høiden, igiennem hvilken Hastigheden v faaes ved Faldet, er $r^2 \cdot \left(\frac{a-x}{ax}\right)$ og at derfor, naar $Dh = x$ Ligheden for Tiden bliver §. 18. $dt = -\frac{dx\sqrt{ax}}{r\sqrt{a-x}} = -\frac{\sqrt{a}}{r} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}}$.

Hvoraf Summen faaes, ved at legge det manglende Stykke udi Differentialen til. Hvilket, naar er giort, bliver

$$dt = \frac{\sqrt{a}}{r} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax-xx}} - \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}} \right)$$

Af det første Stykke, nemlig af $\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{\sqrt{ax-xx}}$ er Summen eller Integralen $\sqrt{ax-xx}$, og $\int \frac{-adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ er en Cirkel-Bue, hvis Diameter $= a$. Tager man da $AD = a$, og over den videre slaaer Halv-Cirklen AFD. Da, om $Dh = x$, er $\int \frac{-adx}{2\sqrt{ax-xx}} = Ai$. Ligeledes er $hi = \sqrt{ax-xx}$, saa $\int \frac{-xdx}{\sqrt{ax-xx}} = hi + Ai$. $t = \frac{\sqrt{a}}{r}(Ai + hi.)$ hvilket er Tiden igiennem Ah. Ligeledes er Tiden igiennem AD, $\frac{\sqrt{a}}{r}$ AFD. Thi, for det hele Fald, er $hi = 0$ udi D.

Tiderne ere i dette Tilfælde som Quadrat-Rødderne af Distancernes Kubis.

Da den hele Tid af Faldet saaledes er $\frac{\sqrt{a}}{r}$ AFD. Sættes da $1 : p$ at være Forholden af Diametern til Peripherien, saa bliver til den Diameter a, Peripherien $= ap = 2$ AFD, og altsaa Faldets hele

Tid

Tid proportionert $a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$. Saa at, naar Distancerne a ere adskillige og under sig foranderlige, blive Tiderne af Faldet igiennem disse adskillige Høider proportionerte Quadrat-Rødderne af Kubis, som er den Forhold, hvilken man sædvanlig kalder Sesquiplicata ratio.

§. 24.

Man kan paa selvsamme Maade finde en almindelig Lighed for Tiden, naar Central-Kraften er $= \frac{1}{x^n}$. Thi, da Hastigheden er i alle disse Tilfælde given §. 21. $= \sqrt{\frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}}$ saa bliver Tiden $= \int \frac{dx \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}}$. Men, da denne Differential-Lighed ei er almindelig integrabel, ville vi ved den ei ophol-de os. Almindelig Oplosning af andre Tilfælde.

§. 25.

Derimod ville vi kortelig agte: 1) At saafremt man antager, at i A, hvor Faldet begynder, den faldende Ting strax i Begyndelsen havde en vis given Hastighed, saaledes som vi forhen have udregnet en ligedan Tilfælde §. 19. Da kan man ligeledes i Almindelighed let bestemme for dette Tilfælde den hele Bevægelse, saa tidt som Central-Kraften er proportionert $\frac{1}{x^n}$; hvor vi ved x bestandig tilkiendegive Distancen fra Centret. Giøres alle Benævningerne, som i §. 21. faaes for dette Tilfælde, ligesom der; $dh = -r^n x^{-n} dx$ og $h = \frac{r^n x^{-n+1}}{n-1} + B$. Denne bestandige Størrelse bestemmes

ved at fastsætte den Høide, som svarer til Hastigheden i Begyndelsen af Faldet, eller naar $x = a$. Sættes denne Høide da $= b$, saa bliver $h - b = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}$ og derfor

$$h = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1} + (n-1)b}{n-1}.$$

§. 26.

2) I samtlig disse Tilfælde bestemmes videre den Høide, igiennem hvilken en Inertie, dreven af de vedkommende Central Kræfter kunde vinde en saadan Hastighed, som den er, med hvilken den antages at begynde sin Bevægelse ned ad imod Kræfternes Center. Er, for Ex. Taf. 1. Fig. 4. D Kræfternes Center, h det Punkt, hvorfra Tingen begynder at falde imod D med en Hastighed, som kunde vindes ved at falde igiennem Ah, naar nemlig, Tingen fra at hvile udi A blev dreven igiennem Ah af Central-Kraften udi D. Da om denne sidste er $= \frac{1}{x^n}$, og ved x forstaaes enhver Distance fra D over Linien AD; er det klart, at om en Inertie hvilte i A, og faldt derfra ned efter Ah, blev den Høide, som svarer til Hastigheden udi $h = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}$ §. 21. Men da Hastigheden udi h er antaget at svare til den Høide b, om samme Hastighed skulde vindes ved den naturlige Tyngdes frie Virkning. Saa bliver udi h. $b = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}$. Videre $b - \frac{r^n x^{-n+1}}{n-1} = -\frac{r^n a^{-n+1}}{n-1}$, følgelig bliver $a = Ad = \sqrt[1-n]{\frac{r^n x^{-n+1} - (n-1)b}{r^n}}$,

som

som er den søgte Distance fra Kræfternes Center D. Hvilken, om i et hvert enkelt Tilfælde $hD = d = x$; forandres til $\sqrt[1-n]{\frac{r^n d^{-n+1} - (n-1)b}{r^n}}$.

Følgelig bliver $Ah = \sqrt[1-n]{\frac{r^n d^{-n+1} - (n-1)b}{r^n}} - d$.

Man kan heraf giøre en Mængde Slutninger, iblant hvilke vi ville alene anføre følgende:

a) Er $n = 0$, bliver $Ah = b$, eller saa stor som den Høide, ved at falde igiennem hvilken Hastigheden kan vindes, naar Central-Kraften altid er af bestandig Virkning.

b) Er n positiv og > 1, saa at Kraften er i forkeert Forhold af Høiderne af Central-Distancen. Da bliver $Ah = -d + \frac{r^{n:(n-1)}}{(r^n d^{-n+1} - (n-1)b)^{\frac{1}{n-1}}}$, hvoraf sees. At saa tidt som $(n-1)b = r^n d^{-n+1}$, bliver $Ah = \frac{1}{0}$ og følgelig ∞, men bliver $(n-1)b > r^n d^{-n+1}$, maa derfor Ah være større end det uendelige selv, og følgelig ubegribelig eller imaginair. Saa ikke alle Hastigheder ved disse Central-Kræfter kunne faaes, saaledes som ved de altid bestandige Central-Kræfter, hvorfor disse sidste og ere de bequemmeste til at udregne Hastighederne, og de til dem svarende Høider.

5) Er $1-n$ en positiv Størrelse, som for Ex., naar Kræfterne virke lige frem i simpel Forhold af Central-Distancernes Høider. Da bliver vel Ah positiv, men den beroer dog, med mindre at $n = 0$, paa r og d, hvilke i de fleste Tilfælde kunde holdes for uendelige Størrel-

Størrelser. Desuden have disse Central-Kræfter lidt Sted i Naturen, saa vor forhen brugte Maade i at bestemme de Høider, som svare til alle muelige Hastigheder, er den tienligste og beste; da vi nemlig altid ved den til Hastigheden svarende Høide forstaae den, igiennem hvilken Hastigheden ved Faldet kan vindes, naar et Legeme drives af den naturlige Tyngde; med mindre at man ved dette Ord et eller andet Sted udtrykkelig vilde give noget andet tilkiende. Vi giøre derved Tyngden her hos os til den store Unitet for alle Kræfter, og de her hos os maalelige Hastigheder til Maalet for alle andre.

§. 27.

Dersom man antager andre Love for Kræfternes Virkning, end de, der ere som Distancernes Høider. Da er den almindelige Oplesning dog altid let, og siden kommer det alene an paa, hvad der i enkelte Tilfælde lader sig integrere eller ikke. Saaledes kan man sætte, at Kræfternes Virkning i et hvert Punkt skulde tilkiendegives ved en Function af Distancen, hvad heller denne sidste blev regnet fra Kræfternes Center D (Taf. 1. Fig. 4.) eller fra hvad andet Punkt A man vilde. Er da Fx den Function af x og bestandige Størrelser, som man vil antage, skal tilkiendegive Loven for Kræfternes Virkning, naar ved x forstaaes Distancen Ah eller Dh, ved v den Høide, som svarer til den ubestemte Hastighed udi h; da bliver $(Fx)\,dx = \pm\, dv$, og $v = \int (Fx)\,dx$, hvoraf følger, at Tiden $= \int \frac{dx}{\sqrt{\int (Fx)\,dx}}$, hvoraf i alle enkelte Tilfælde enkelte Oplesninger kunde giøres, saa tidt som de ere udregnelige. Men da de hverken i Naturens Betragtning, eller i Mekanik, i det mindste ikke, efter

hvad

hvad vi endnu vide, have nogen Nytte, ville vi ved dem ei ophol-de os.

§. 28.

Maade at bestemme de virkende Kræfter af Hastighedernes, Tidernes, eller de igiennemløbne Rums Beskaffenheder.

Vi ville derimod til Slutning af dette Tillæg (som allerede er blevet vidtløftigt) vise, hvorledes man af de givne Love for Hastighederne i alle Punkter af den rette Linie, hvori Faldet skeer; eller af ligedanne Love for Tiderne af Bevægelsen, kan bestemme Beskaffenheden af de hastiggiørende Kræfter, og følgelig af Kræfterne i Naturen.

1) Hvad Hastighederne angaaer. Da siden $\frac{P}{m}dx = vdv$ bliver altid, naar V er Høiden, som svarer til Hastigheden. $P = \frac{dV}{dx}$.

a) Er derfor Hastigheden altid som Quadrat-Roden af det igiennemløbne Rum, bliver $v^2 = V$. vdv proportionert dV, derfor $dV = dx$ og $P = \frac{dv}{dx} = 1$. Saa at; saa tidt som denne Lov af Hastigheden haver Sted, er Central-Kraften altid bestandig. Saa man deraf seer, at den naturlige Virkning af Tyngden her hos os er saaledes, som vi forhen have antaget det, nødvendig Virkningen af en bestandig Kraft; siden denne sidste Lov for Kræfterne er den eneste, som kan komme ud af Forholden $\frac{dv}{dx}$ i dette Tilfælde.

b) Ere Hastighederne proportionerte de igiennemløbne Rum, eller $\sqrt{V} = x$, da bliver $V = x^2$. $dV = 2xdx$. Følgelig bliver $P = \frac{2xdx}{dx}$ eller $= x$; saa at Kræfterne da bestandig maa virke i

Forhold af det igiennemløbne Rum. En Hypothese, som ei passer sig til Naturen; esterdi da, naar $x = 0$, $P = 0$, eller Kræfterne i Begyndelsen af Bevægelsen skulde ganske ophøre at virke, og Bevægelsen dog ikke destomindre skulde gaae for sig.

c) Er $V = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n-1}$ som §. 21. og derfor $dV = -r^n x^{-n} dx$, da bliver $P = -\frac{r^n x^{-n} dx}{-dx} = \frac{r^n}{x^n}$. Man maa agte, at dx tages her negativ, fordi x betyder (Taf. 1. Fig. 4.) Dh eller Distancen fra Centret, som i Faldet ned efter idelig formindskes.

§. 29.

2) Angaaende Tiden.

Vil man ligeledes af de givne Love for Tiderne, i hvilke Bevægelserne skeer, visse Rum nemlig igiennemløbes eller visse Hastigheder blive til: Vil man deraf finde Kræfterne, som i Følge Lovene af Tiden kunne foraarsage Bevægelsen. Da beheves alene atter igien at betiene sig af de almindelige Ligheder. Saaledes fordi $pdt = dv$, §. 4. sættes da $v = t$ og $dv = dt$, bliver $p = \frac{dv}{dt} = 1$. Hvoraf sees, at saa tidt som Hastigheden er proportionert Tiden, ere Kræfterne bestandige, ligesom vi forhen have beviist, at saa tidt som Kræfterne ere bestandige, forholde sig Hastighederne som Tiderne af Faldet, saa dette sidste ei kan skee uden i denne eneste Kræfternes Hypothese.

Den forhen §. 15 givne Ligheds imellem Rummet og Tiden $\frac{mdv}{\sqrt{gy}} = dt$ er ikke uden for det Tilfælde, da den hastiggiørende Kraft

er

er bestandig, siden at Hastigheden er i den blevet antaget $= \sqrt{2gy}$. Saa tidt derfor, som man vil have en almindelig Ligheð imellem Rummet og Tiden, af hvilken den hastiggiørende Kraft kan bestemmes, behøves intet andet end at betiene sig af den §. 25 forhen givne meget almindelige Ligheð, i Følge hvilken; Tiden $= t = \int \frac{dx}{\sqrt{\int P dx}}$, thi (Fx) og P betyde her det samme. Man faaer deraf $dt = \frac{dx}{\sqrt{\int P dx}}$, $\int P dx = \frac{dx^2}{dt^2}$ og ved at differentiere $P = \frac{2ddx\,dt - 2ddt\,dx}{dt^3}$, eller, om i Differentiationen, for at giøre Ligheden simplere, dx blev antagen som bestandig, saa at $ddx = 0$; blev $P = -\frac{2ddt\,dx}{dt^3}$, hvoraf altid Kræfterne kunne bestemmes, naar Ligheden eller Forholden er given imellem Tiden og Rummet.

Saaledes; om $t = \sqrt{x}$, eller $t^2 = x$ og $2t\,dt = dx$ og $-ddt = \frac{dt^2}{t}$; da bliver $-\frac{2ddt\,dx}{dt^3} = P$ altid en bestandig Størrelse, saaledes som vi have antaget den at være i de forhen giorte Anmærkninger over Tyngden.

Tredie Forelæsning.

Om
Kræfternes Ligevægt under sig, og de tunge Tings Fald over skraaliggende Linier.

§. 58.

Udfaldet af flere Kræfters Virkning over samme Linie med, eller imod hverandre.

For vi gaae videre i at undersøge Reglerne for de tunge Tings Bevægelse, er det tienligt, endnu engang at foretage Kræfterne; for at see de almindelige Love, efter hvilke de virke, naar flere af dem over et og det samme Plan stode sammen, som fælles Aarsager, til en og den samme Bevægelse. I denne Henseende er det strax øiensynligt, at saa tidt som flere Kræfter drive en Materie efter den samme Linie, bevæges den af dem alle, som om de ei udgiorde uden en eneste, der var saa stor, som de alle. Saa tidt derimod, som de virke over den samme Linie paa den samme Ting med imodsatte Directioner, hindre de hverandre saaledes, at den hele Kraft til at bevæge, saa tit som de imodsatte Kræfter ere ulige, ere alene disse Kræfters Forskiel i Størrelse. Imod at tilforn, i det Tilfælde, da de alle drev Materien efter den samme Drive-Linie, den hele bevægende Kraft var saa stor, som deres hele Sum. §. 29. 31.

§. 59.

§. 59.

Men virke to adskillige Kræfter A og B bestandig eensdan efter Directioner AC og BD, (Fig. 5. Taf. 1.) som giøre en Vinkel med hverandre, da om de i Størrelse ere som Linierne AC og BD, eller, hvilket er det samme; om deres Kræfters Størrelser ere i Forhold af Linierne AC og BD, og de tillige uforanderlig virke efter samme Direktioner med samme Forhold af Kræfter. Da bliver deres Virkning som BE Diagonalen, eller Tver-Linien af Parallelogrammet DBCE.

To Kræfter eller Hastigheder i Størrelse og Direktioner, som et Parallelograms Sider foraarsage en Bevægelse efter Diagonalen i samme Tid, da enhver af dem for sig skulde igiennemløbe Side-Linierne.

Thi forestiller man sig, at Trykningen af disse Kræfter skeede, som om de virkede hver for sig, saa at først den Kraft A drev Materien fra A til *a*, og siden B samme Materie fra *a* til *d*, da maatte A*a* blive som AC, og *ad* som BD eller CE, thi Kræfterne ere, som de Veie eller Rum, igiennem hvilke de i den samme Tid kunde frie og uhindret bevæge den samme Materie i eensdan Bevægelse §. 23. Men er A*a* : *ad* som AC: CE, og det bestandig overalt; da maa alle Punkter som *d* være i Diagonalen eller i Tver-Linien af Parallegrammet. Thi antager man Tiden af begge Kræfternes Virkning lidt større end før, saa at Virkningen af A er A*b* og af B, *he*. Da fordi Bevægelsen immerfort antages at blive eensdan, bliver endnu A*a* : *ad* = A*b* : *he* = AC : BD. Følgelig fordi A*ad* og A*he* ere ligedanne Triangler; ere Punkterne *d* og *e* i en og den samme rette Linie, og fordi A*a* : *ad* = AC : CE = AC: BD; ere de i Diagonalen af Parallelogrammet, hvis Sider ere AC og BD.

Det samme sees, om Virkningerne i to lige store Tider betragtes. Thi da *dg* er parallel og = A*a* i Følge Hypothesen, ligeledes *ge* parallel og = *ad* af samme Aarsag, saa bliver A*h* = 2A*a* og *he* = 2*ad*, og derfor, som før, A*h* : *he* = A*a* : *ad*.

For at forstaae dette saa meget desto bedre, kan agtes, at denne Regel ei alene gielder for det Tilfælde, da 1) de trykkende Kræfter ikke virke uden et Øieblik eller en uendelig liden Tid, men endog 2) saa tidt som de foregaaende Virkninger ikke efterlade en virkelig Bevægelse, men Kræfternes Virkning saa at sige alle Øyeblik døer ud. 3) Naar en virkelig Hastighed bliver til i det Bevægende af de foregaaende Virkninger, men Kræfterne virke endnu bestandig alle Øieblik saaledes at de bestandig blive under sig som AC : BD. Thi i dette Tilfælde kan man atter igien, som før sagt, betragte enhver af Kræfterne, som at virke for sig og at bevæge den ene efter *dg*, den anden efter *de*, saa at det Punkt *e* bliver i Diagonalen, og dette giort; kan man endnu betragte den i første Øieblik vundne Hastighed, som at bevæge Tingen hen efter Diagonalen om det Stykke *ef*. 4) Kan agtes, at det ei behøves, at de virkelige Størrelser af de bevægende Kræfter blive hele Bevægelsen igiennem de samme, alene at deres indbyrdes Forhold under sig altid bliver den af AC : BD. 5) Og endelig, at om ved AC og BD ei forstaaes trykkende Kræfter, men virkelige Hastigheder, med hvilke paa engang et Legeme bevæges, er Bevist endnu i alle Henseende det samme i Henseende til den hele sammensatte Hastighed.

Da

Da derfor Kræfterne ere som de Rum, igiennem hvilke de kunne bevæge den samme Materie i eensdan Bevægelse i den samme Tid §. 23, og en Kraft, som AE kan bevæge den samme Ting fra A til E, imidlertid at A kan bevæge den fra A til C, og B fra B til D, saa følger.

En Kraft i Størrelse og i Direktion, som Diagonalen, gior den samme Virkning som to andre, der ere i Størrelse og Direktion, som Side-Linierne af et Parallelogram.

At en Kraft AE, saa stor som Diagonal- eller Tver-Linien, og i dens Direktion, gior altid i samme Tid den samme Virkning, som de to Side-Kræfter BD og AC, naar de ere i Størrelse og Direktion som BD og AC. (*)

§. 60.

(*) Dette Principe, som er unegtelig et af de allersterste og allernyttigste, som man haver kundet opfinde og betiene sig af udi Mekanik, kan beviſes endnu anderledes af Kræfternes foranførte Love. Thi (Taf. 1. Fig. 1.) om den Inertie *a* drives af de tre Kræfter *ea*, *ad*, *fa*, saaledes; at *fa* skal staae i Ligevægt med de to andre, med *ea* og *ad*; da er der ingen Tvivl paa, at jo de Kræfter *ea* og *ad* udgiøre den Modstand, som *fa* have at overvinde, og at ligeledes *fa* er den Modstand, som *ea* og *ad* haver at overvinde. Kaldes da *ea*, A, *ad*; B; *fa*. C. det elementære Rum *nh* Inertien forflyttes over ved A, *dx*. Det, over hvilket den forflyttes ved B ligeledes i en uendelig liden Tid *dy*, da er Igienvirkningen af den Kraft $fa = Adx + Bdy$, §. 16. 4. og 22. 23. i Forel. og §. 2. *c*. i Tillæg. Kaldes ligeledes det elementaire Rum *dZ*, igiennem hvilket tillige med Inertien *a*, Kraften *fa* for et Øieblik bevæges, da bliver

§. 60.

At finde en Kraft saa stor som to andre givne.

Folgelig kan man altid i Steden for to givne Kræfter AC og BD betiene sig af en eneste Kraft, der gier samme Virk-

---

den hele Modstand, som Kræfterne *ea* og *ad* forefinde = C. *df*. Men da disse Kræfter skulde i Følge vores antagne staae udi Ligevægt sammen, saa bliver

$A dx + B dy = -C df$. *df* tages negtende, fordi Bevægelsen i Henseende til *df* maa ansees som at gaae tilbage.

For at bestemme *dx*, *dy*, og *df*. kan man betragte Inertien udi *a*, som forflyttet over det uendelige lidet Rum fra *a* til *h*, da er i Henseende til denne Forflytning, om *an* er en Cirkel-Bue, hvis Center er udi *e*, $dx = nh$; men da *ae* kan ansees som Parallel *he*, fordi Punkterne *a* og *h* ere, i Følge Hypothesen, uendelig nær ved hverandre, saa bliver Vinklen $cae = che$. Kaldes denne Vinkel α, og den hele Sinus = 1. Da, fordi *n* er en ret Vinkel, er $nh = dx = ah$. Cos. α. Kaldes Vinklen *ead* β, Vinklen *daf*, γ, da findes paa selvsamme Maade, at $dy = ah$. Cos. $\alpha + \beta$, og $dZ =$ Cos. $\alpha + \beta + \gamma$. Cosinus er her positiv, fordi Vinklen *fac* fyldestgier $\alpha + \beta + \gamma$ til 360°.

Saaledes bliver A Cos. α + B Cos. $\alpha + \beta$ + C. Cos. $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Men Cos. $\alpha + \beta$. = Cos. α. Cos. β — Sin. α. Sin. β. Som man veed af Trigonometrie, følgelig faaes

A Cos. α + B Cos. α. Cos. β — B Sin. α. Sin. β + C. Cos. α Cos. $(\beta + \gamma)$ — C Sin. α. Sin. $\beta + \gamma$. = 0.

Virkning i samme Tid som de, og denne Kraft findes ved at beskrive over Kræfterne, givne i Direction og Storrelse, Parallelogrammet BCED. Thi Kraften BE bliver alene saa stor i Virkning, som begge Kræfterne BC og BD.

§. 61.

---

hvilken Ligbed opløses i disse Enkelte.

1) $A \operatorname{Cos.} \alpha + B. \operatorname{Cos.} \alpha. \operatorname{Cos.} \beta + C. \operatorname{Cos.} \alpha. \operatorname{Cos.} \beta + \gamma = 0$ og

2) $B. \operatorname{Sin.} \alpha. \operatorname{Sin.} \beta + C. \operatorname{Sin.} \alpha. \operatorname{Sin.} \beta + \gamma = 0$,

som igien forandres til

a) $A + B \operatorname{Cos.} \beta + C. \operatorname{Cos.} \beta + \gamma = 0$.

b) $B. \operatorname{Sin.} \beta + C. \operatorname{Sin.} \beta + \gamma = 0$. I Følge denne sidste Ligbed bliver $B : C = -\operatorname{Sin.} \beta + \gamma : \operatorname{Sin.} \beta$. Men $\operatorname{Sin.} \beta + \gamma = -\operatorname{Sin.} fae$, fordi *fae* fyldestgior β og γ til 360°. Følgelig bliver $B : C = \operatorname{Sin.} fae : \operatorname{Sin.} \beta$. hvilket er net op Egenskaben af Kræfternes Parallelogram. At nemlig en af Side-Kræfterne forholder sig til Diagonal-Kraften, som Sinus af den Vinkel, hvilken Diagonal-Kraften gior med den tredie af Side-Kræfterne, til Sinus af den Vinkel, som begge Side-Kræfterne giøre under sig.

Søger man i den Ligbed b) Værdien af B, og sætter samme i Steden for C i den Ligbed a), da findes ligeledes Forholden imellem A og C, thi man faaer

$$B = \frac{C. \operatorname{Sin.} fae. \operatorname{Cos.} \beta}{\operatorname{Sin.} \beta}, \text{ og derfor}$$

$$A + \frac{C. \operatorname{Sin.} fae. \operatorname{Cos.} \beta}{\operatorname{Sin.} \beta} + C. \operatorname{Cos.} fae. = 0$$

§. 61.

At opløse en Kraft i flere andre.

Ligeledes; naar en eneste Kraft BE er given, kan man opløse den i to andre, som foreenede giøre net op samme Virkning som den. Man har alene nødig over Linien BE at trække et Triangel BCE, saa er det det samme i Henseende til Virkningen, hvad heller man bruger den ene Kraft BE, eller i dens Sted de to BC og CE, naar de nemlig ere baade af Størrelse og af Direktion som disse Linier. §. 59 og 58.

§. 62.

At finde en Kraft, som giør samme Virkning med flere givne.

Ligeledes; om tre eller flere Kræfter ere givne, AB, AC og AD, da findes let en eneste AF (Fig. 6. Taf. 1.) som er i Henseende til Virkningen saa stor som de alle. Man haver alene nødig at giøre over AB og AC et Parallelogram, saa

---

eller og, A Sin. β + C. Sin. *fae*. Cos. β + C. Cos. *fae*. Sin. β. = 0.

Men Sin. *fae*. Cos. β + Cos. *fae*. Sin. β = Sin. (β + *fae*.) som man veed af Trigonometrien: Følgelig bliver

A Sin. β = — C. Sin. (β + *fae*). Og atter igien, A : C = — Sin. (β + *fae*) : Sin. β. Men — Sin. (β + *fae*.) = + Sin. *fad*. Derfor bliver A : C = Sin. γ : Sin. β, hvilket er atter igien Beskaffenheden af Parallelogrammet. Man kan her videre efterslaae *Memoires de l'Academie de Berlin*, Année 1742. pag. 170 o. f. saavelsom *Acta Petropol.* Tom. II.

saa er Tver-Linien AE Størrelsen og Direktionen af den Kraft, som i Virkning kan sættes i Stæden for AB og AC, §. 60. Gior man fremdeles over den nylig fundne AE og over AD et Parallelogram, saa kan AF bruges i Steden for AE og AD, følgelig og i Steden for alle tre AB, AC og AD.

§. 63.

At finde en eneste Kraft, som kan holde flere givne eller tilintetgiøre deres Virkning.

Man finder derfor let en eneste Kraft, som kan holde Ligevægt med to, tre eller flere andre givne. Man kan alene agte (Fig. 6. T. 1.). At da AB og AC ere af samme Virkning som AE; forlænger man da Diagonalen EA, og tager GA = EA, da bliver GA baade Størrelsen og Directionen af den Kraft, som kan holde Ligevægt med BA og AC. §. 58.

Ligeledes, om Diagonalen AF forlænges, saa AF = AH, da er AH baade Directionen og Størrelsen af den Kraft, som kan holde Ligevægt med alle tre givne Kræfter AB, AC og AD.

§. 64.

Hvad der behøves, naar flere ei imodsatte Kræfter skulle staae i Ligevægt sammen.

Man seer deraf, at saa tidt som tre Kræfter skulde over det samme Plan være udi Ligevægt sammen med Direktioner, der ei ere i ret Linie imodsatte, da maa de nødvendig forholde sig i Direktioner og i Størrelse, som Siderne og Diagonalen i et Parallelogram, og om Kræfterne ere flere, da efter Reglerne. §. 62. 63.

§. 65.

Støde to Kræfter sammen under en spits Vinkel, da hielpe de hverandre tildeels, under en stump Vinkel hindre de hverandre.

Deraf følger fremdeles (Fig. 7. 8. T. 1.) at dersom to Kræfter AD og AB virke paa et og det samme Punkt, enten under sammenløbende Direktioner af en spits Vinkel, (som Fig. 7.) eller af en stump Vinkel. (som Fig. 8.) Da i den første Tilfælde hielpe de, i den andre hindre de hverandre om en vis Deel af deres Kraft; hvilket strax sees, naar man oploser AD i de to Side-Kræfter AB og AC, da AB er i den første Tilfælde (Fig. 7.) den hielpende, i den sidste den hindrende Deel af Kraften, og dette er Aarsagen, hvorfor en mindre Kraft kan ene giøre samme Virkning som to større.

§. 66.

Og altid i Forhold af Cosinus af Inklinations-Vinklen.

Søger man den hielpende eller hindrende Deel af den ene Kraft, som trekker skievt imod den anden, da om den hele Kraft kaldes K; Vinklen, hvorunder Kræfternes Directions-Linier løbe sammen, kaldes o, bliver, som den hele Sinus til Cosinus o, saa den hele Kraft AD eller K til den hindrende eller hielpende AB, som derfor altid bliver $\frac{K. Cos. o}{Sin. tot.}$

(Vi forstaae ved Sin. tot. den hele Sinus.)

§. 67.

To Kræfter, som virke perpendiculair paa hverandre, forandre alene Direktionen, uden

Bliver Vinklen $o = 90^{\circ}$, da er Cos. $o = o$, eller intet. Følgelig, saafremt Kræfterne staae vinkelret eller perpendiculaire paa hverandres Directions-Linier, da hverken hielpe eller hindre de hinanden.

Saa

Saa derfor to Kræfter, hvis Direktions-Linier stode perpendikulair sammen, ei hindre eller hielpe hverandre, men bevæge de, da forandre de alene Direktionen. Jo spitsere derimod Vinklen er, desto meer befordre de, jo stumpere den er, desto meer hindre de Bevægelsen. at hindre eller hielpe hverandre.

§. 68.

Man seer fremdeles. At, dersom de to Kræfter AB og AD ere i A af samme Virkning med AC (Fig. 9. Taf. 1.). Da om man kaster fra hvad Punkt man vil i AC, Perpendiklerne CE og CF ned, da forholde sig de udi B og D med AC i Ligevægt staaende Kræfter forkeert Viis som Perpendiklerne CE og CF. To Side-Kræfter i Parallelogrammet forholde sig som de fra et Punkt i Diagonalen paa dem nedkastede Perpendikler forkeert tagne.

Thi antages *AC* som fælles Sinus totus for CE og CF, da bliver CE Sinus til Vinklen x og CF Sinus til Vinklen o, men trekkes Parallelogrammet ABCD, da bliver x = ACB og derfor AB : AD = Sinus ACB til Sin. o = Sin. x : Sin. o, derfor og AB : AD = CE : CF. Det samme gielder om IG og IH og alle andre ligedan nedkastede Perpendikler, thi IG : IH = CF : CE.

§. 69.

Ligeledes bliver Diagonal-Kraften AC, naar den er saa stor, som to Side-Kræfter; til enhver af dem i forkeert Forhold af de Perpendikler, som kastes ned fra et Punkt i den tredie Krafts Direktions-Linie paa disse to Kræfter. Diagonal-Kraften er til en af Side-Kræfterne som Perpendiklerne fra den tredie Kraft

nedskrede paa den bege og forkert tegne.

Thi (Fig. 10. T. 1.) AC er som Sinus o, og AD som Sinus x. Men, naar AB ansees som Sinus totus, bliver og BE som Sinus $x + z$ = Sin. o, = Sin. BAD og BF som Sin. x; følgelig forholde sig AC : AD = BE : BF.

§. 70.

Hvad en skraae Linie eller et inklinert Plan er.

Efter at have giort disse Anmerkninger over Kræfternes Ligevægt, ville vi undersøge efter hvad Love de tunge Ting bevæge sig over skraaliggende Linier eller Planer, som AB. Man kan agte, at en Linie AB kaldes en skraae Linie, (Fig. 11. Taf. 1.) naar den gior med Horizontalen eller Vand-Linien BC en Vinkel ABC mindre end 90°. Ligger en Superfice, hvis alle Punkter ere i et Plan ligeledes, da kaldes den et inklinert Plan.

§. 71.

Hvorledes og med hvad sin Deel at Tyngden virker paa skraae Linier.

For desto bedre at fuldføre dette vores Forsæt, ville vi agte; at da Linien AB, som vi her ansee for uboielig og ubevægelig, bær en Deel af Tyngden, saa kan samme Deel ei drive Materien T ned ad Planet med sin hele Kraft, men alene, med en vis Deel af den hele Kraft; den nemlig, som Planet ikke bær. Til den Ende om den hele Drift af Tyngden forestilles ved den verticale Linie TD, som baade skal betyde os den naturlige Tyngdes Direction og hele virkelige Storrelse; da om TD oploses i 2 andre FT og TE, den første nyttig og saa stor som den er, ganske tienlig til at bevæge Tyngden hen efter den skraaliggende Linie AB dens Direction.

tion. Den anden TE perpendikulær paa Planet, og følgelig ganske unyttig til at bevæge T, siden den trykker T kuns ind til Planet eller Linien AB; da er det klart, at den naturlige Tyngde forholder sig til den Deel af den, hvilken her gior Virkning, som TD til TF; Altsaa kommer alt alenean paa at finde disse Liniers Forhold.

Da TD er ligelobende med eller parallel AC; saa bliver FTD og BAC ligedanne Triangler. Følgelig TD:FT = BA : AC. Kaldes den naturlige Tyngde g, Planets Længde BA, L. Dets Høide AC, h. Da bliver $L : h = g : \frac{gh}{L}$, og altsaa den naturlige Tyngde til den, der virker over AB, som $L : h$. som Planets Længde til dets Høide. Saa

1) at jo meer Planet forhøies, jo større er Tyngdens Kraft til at drive ned efter, fordi $\frac{h}{L}$ tager til.
2) Jo meer Planet synker imod Horizonten, desto mindre ere de drivende Kræfter af Tyngden.
3) Og de ere endelig paa Horizontalen selv slet intet, saa den allerstørste Tyngde kan paa den bevæges med den allermindste Kraft, thi da er $h = 0$.

§. 72.

Deraf sees, at, skiønt Tyngden over de skraaliggende Linier er af mindre Trykning end den naturlige, er den dog hele Faldet igiennem en bestandig hastiggiorende Kraft, ligesaa vel som i Verticalen, og følgelig gielder i Henseende til de skraaliggende Linier ligesaa vel, som i Henseende til de Verticale i Tingenes frie Fald.

De faldende Ting drives over skraae Linier af en bestandig Tyngde, men hvis Kraft er mindre end den, der virker i

1) At

Verticalen og i øvrigt efter samme Regler, som i det verticale Fald.

1) At Hastighederne ere som Tiderne, og
2) At de igiennemløbne Rum ere som Quadraterne af Tiderne, ligeledes og som Quadraterne af Hastighederne i Enden af Faldet.

§. 73.

De ved Tyngden i samme Tid igiennemløbne Rum i Verticalen og paa en skraae Linie, forholde sig som denne sidstes Længde til dens Høide.

Da de hastiggiørende Kræfter i Verticalen og over skraaliggende Linier ere til hverandre i bestandig Forhold som $g : \frac{gh}{L} = L : h$, som Planets Længde til Planets Høide §. 71, saa maa deres fulde Virkninger i samme Tid og være udi samme Forhold, det er; de i samme Tid igiennemløbne Rum i Verticalen og over den skraaeliggende Linie maa ligeledes forholde sig til hverandre som Længden af samme Linie til Høiden (Taf. 1. Fig. 12.) som AB : AC. §. 24.

§. 74.

Følgelig kan man let finde, hvad Stykke paa den skraaeliggende Linie AB der igiennemløbes af Tyngden, imidlertid at den hele Vertical AC igiennemløbes. Man har alene nødig fra Enden C af Verticalen at kaste en Perpendikel ned paa BA, CD nemlig; saa er AD det paa AB igiennemløbne Rum §. 73.. Thi i det retvinklede Triangel BAC er AB : AC = AC : AD.

§. 75.

Hastighederne i begge disse Til-

Man seer ligeledes, at den Hastighed, som paa den skraaeliggende Linie foraarsages i samme Tid, som Verticalen

len igiennemlobes, forholder sig til Hastigheden vunden ved Faldet igiennem Verticalen, som den skraaeliggende Linies Hoide til dens Længde. sælde forholde sig ligeledes.

Thi de i samme Tid i Verticalen og paa den skraae Linie igiennemlobne Rum forholde sig som AC: AD = AB: AC §. 73. folgelig og Hastighederne i Enden af Faldet, som 2AB: 2AC §. 49. 72. folgelig og som AB: AC, som Liniens Længde til Liniens Hoide.

§. 76.

Videre sluttes (Fig. 13. Taf. 1.), at dersom fra det verticale Punkt A i Diametern trækkes saa mange Strenge eller Chordæ AE som man vil, da igiennemlobes de alle udi en Tid, og i samme Tid som Diametern AB. Diametern og alle fra dens vertikale Spitse trokne Strenge igiennemlobes i samme Tid.

Thi forlænges AE til F og BE trekkes, da er AEB en ret Vinkel, folgelig AF: AB = AB: AE. Saa at alle Strenge, som AE, igiennemlobes i den Tid som Diametern AB. §. 73.

§. 77.

Man kan indsee den sande Aarsag til denne Isochronisme eller Lighed i Tiden ved at betragte de hastiggiorende Kræfter selv. Over alle Planer eller skraaeliggende Linier af samme Hoide ere de hastiggiorende Kræfter, som Længderne af Korderne eller Strengene AE, folgelig altid Virkningerne i samme Orden proportionerte. En anden denne Sags Aarsag.

Thi da den hastiggiorende Kraft er som $\frac{bg}{L}$; ere da baade b og g bestandige Storrelser, bliver det foranderlige som $\frac{1}{L}$,

følgelig som Længden af Planet forkeert. Men $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$. $\frac{AB^2}{AF} = AE$, men AB er en bestandig Størrelse, følgelig bliver $\frac{1}{AF} = AE$; eller, den hastiggiorende Kraft over Korden AE er dens Længde proportionert.

§. 78.

Ved at falde ned ad en skraaeliggende Plan vindes den samme Hastighed i Enden af Faldet, som ved at falde igiennem den skraaeLinies verticale Høide.

Falder en Ting, dreven af Tyngden (Fig. 12. Taf. I.) ned over den skraaliggende Linie AB; da er Hastigheden i B dog net op den samme, som den, den skulde vinde ved at falde igiennem Høiden AC udi C. Thi kaldes Hastigheden udi C, h, da bliver den i D $= \frac{AD}{AC} . h$ §. 75. Thi AC : AD $= h$ til Hastigheden udi D. Men Hastigheden udi D er til den udi B $= \sqrt{AD} : \sqrt{AB}$. §. 72. følgelig $\sqrt{AD} : \sqrt{AB} = \frac{AD}{AC} . h : \frac{\sqrt{AD} . \sqrt{AB}}{AC} h$, som er Hastigheden udi B, og derfor bliver Hastigheden udi B til den i C, som $\frac{\sqrt{AD} . \sqrt{AB}}{AC} . h : h = \frac{\sqrt{AD} . \sqrt{AB}}{AC} : 1$. men AB : AC $=$ AC : AD. Følgelig bliver $AC = \sqrt{AB} . \sqrt{AD}$, og derfor $\frac{\sqrt{AD} . \sqrt{AB}}{AC} = 1$, saa Hastigheden i B er til den i C $= 1 : 1$, følgelig ere de lige store.

§. 79.

Det samme gielder i flere Planer bøiede over hinanden.

Følgelig; da de Hastigheder, som vindes ved at falde over Planerne AB, BC. CD. (Fig. 1. No. 1. T. 2.) ere de samme,

samme, som de der i Faldet vindes ved at igiennemlobe Hoiderne, som svare til Planerne Af, Bh, CK; eller den hele Hoide AE.

imod hinanden og i alle krumme Linier, saa Hastigheden altid kan tilkiendegives ved Quadrat-Roden af den verticale Hoide.

Og da videre den hele krumme Linie AGF er intet andet end en Mængde af deslige Planer eller skraae Linier, bøiede under meget stumpe Vinkler imod hverandre, saa sees,

1) At i Almindelighed vindes ved ald Fald over alle Slags krumme og skraaeliggende rette Linier en Hastighed, der er som Quadrat-Roden af deres Hoide efter Verticalen AE. Saa
2) al Hastighed kan tilkiendegives ved denne Quadrat-Rod.

§. 80.

At finde det Rum, som i Tingenes Fald svarer til en vis given Hastighed.

Man kan derfor altid, naar det Rum er givet, igiennem hvilket en vis Hastighed vindes, finde, igiennem hvad Rum en tung Ting maatte falde, for at faae i Enden af Faldet en anden given Hastighed, om Faldet skeer over Planer af samme Inklination.

Thi dersom ved at falde igiennem det Rum r over et inklinert Plan den Hastighed h faaes, og man soger det Rum x, som svarer til en given Hastighed H, da er $r : x = hh : HH$ og $x = r \cdot \frac{HH}{hh}$. §. 72. 2.

Men man seer uden Moie, at det er i alle deslige Tilfælde nok at giore Udregningerne for de verticale Hoider alene.

§. 81.

Tiden af Faldet igiennem et skraaeliggende Plan er til Tiden igiennem dets verticale Høide, som dets Længde til dets Høide, og over ligedan inkline-te Planer ere de, som Quadrat-Rødderne af deres Længder.

Tiden af Faldet angaaende, da er

1) Tiden, i hvilken den skraaeliggende Linie AB (F. 12. Taf. 1.) selv igiennemløbes, i Forhold til Tiden, i hvilken samme Høide AC igiennemløbes, som AB : AC, som Liniens Længde til dens Høide.

Thi da AC og AD igiennemløbes i samme Tid, saa er Tiden i D og C den samme, men Tiden i D er til Tiden i B som $\surd AD : \surd AB$. §. 57. Men $AB : AC = AC : AD$, og $AC = \surd AD . \surd AB$. Folgelig, $\frac{AC}{\surd AB} = \surd AD$. Og

$$\surd AD : \surd AB = \frac{AC}{\surd AB} : \surd AB = AC : AB$$

2) Ligeledes sees, (Fig. 1. No. 1 og 2. Taf. 2.) at Tiderne over skraaeliggende Planer, som under samme Vinkler staae paa Horizontal-Linien, ere som Quadrat-Rødderne af disse Planers-Længder. §. 72. 2. Og

3) ligeledes, at Tiderne igiennem flere deslige ligedan imod hverandre og imod Horizontal-Linien, det er, under lige store Vinkler boiede Planer, ere som Quadrat-Rødderne af samtlig Planernes Længder. (Taf. 2. Fig. 1. No. 1 og 2.)

Thi da Planerne AB, BC, CD og *ab*, *bc*, *cd* antages at være ligedanne i deres hele Stilning; saa er det klart, at *ab*, *bc*, *cd* kunne ansees som Dele af AB, BC, CD, men Tiderne igiennem mindre og større Dele af det samme Plan forholde sig som Quadrat-Rødderne af deres Længder; §. 72. folgelig og Tiden igiennem *ab* og AB, igiennem *bc* og BC,

BC, igiennem *cd* og CD som Quadrat-Rødderne af disse Planer.

4) Derfor ere og Tiderne igiennem alle ligedanne krumme Linier, som Quadrat-Rødderne af deres Længder.

5) Og af No. 1. flyder strax, at Tiderne igiennem adskillig inklinerte Planer til samme Høide, som AB, AE (Fig. 12. Taf. 1.) ere i Forhold af disse Planers Længder.

§. 82.

En anden Isochronismus i Faldet over Cirklens Korder.

Ligesom §. 76. Tiden igiennem alle Strengene eller Korder AE i Cirklen var den samme, er og Tiden igiennem alle Korder som BE den samme. Den samme nemlig, som igiennem Diametern AB. (Taf. 1. Fig. 13.)

Thi kaldes Tiden igiennem Diametern AB, x; den igiennem BE, T, igiennem EC $= t$, da er §. 81. 1. $T : t = BE : GE$. Altsaa $t = T.\frac{GE}{BE}$, men $t : x = \sqrt{GB} : \sqrt{AB}$. Folgelig er $t.\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{GE}} = x$ og $x.\frac{\sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = t$, altsaa er $x.\frac{\sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = T.\frac{GE}{BE}$, men $AB : BE = BE : GB$ altsaa $BE = \sqrt{GB}.\sqrt{AB}$, thi EG er parallel AB; og derfor

$$x.\frac{\sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = T.\frac{GE}{\sqrt{GE}.\sqrt{AB}},$$

folgelig $x = T$. Eller; Tiden igiennem Diametern AB er ligesaa stor som Tiden igiennem en hver Korde som BE.

Tredie Tillæg.

Om Faldet over de krumme Linier, i sær om Faldet af Tyngden.

§. 30.

Bevægelsen af Tyngden over det inklinerte Plan bevises af de i forrige Tillæg anførte Slutninger.

Efter Bevægelsen i ret Linie, hvilken vi have afhandlet udi forrige Tillæg, bør den tages udi Betragtning, som skeer i og over de krumme Linier. Denne sidste er igien to Slags. Den ene, som vi her ville vise de almindelige Regler for, naar Tingene, drevne af visse Kræfter, finde en Modstand i de Linier de bevæges over, som over ligesaa mange Kanaler, saa dees Bevægelse ei kan skee frit. Den anden, naar de uden at finde en saadan Modstand, frit og uhindret kunne beskrive krumme Linier. Denne sidste Omstændighed i Bevægelsen ville vi betragte siden. I dette Tillæg ville vi alene bekymre os om den første, og i den igien først og fornemmelig bekymre os om Bevægelsens Beskaffenhed i den Kræfternes Hypothese, da disse sidste enten ere bestandige som Tyngden, eller og Tingene virkelig drives af Tyngden selv.

Iblant de krumme Linier kan man regne den rette. Thi den samme Ligheds, som indbefatter et Slags af krumme Linier, indbefatter og den rette, naar Ligheden til den krumme Linie paa en vis Maade bestemmes, saaledes som Cirklen forandres til en ret Linie, naar Halv-Diametern bliver uendelig stor. Vi ville derfor først betragte de tunge Tings Fald over den rette Linie, som den simpleste. Er den

verti-

vertical, da er Faldet frit, og desangaaende er bleven handlet i nest forrige Tillæg. Følgelig hører herhid ikke uden de skraaeliggende rette Linier. Men alt, dem angaaende, bestemmes af det forhen sagte overmaade let, naar Tingene over dem drives alene af Tyngden eller en anden ligesaadan bestandig Kraft. Thi man kan endnu betragte Bevægelsen som frie, alene at de hastiggiørende Kræfters Værdie derefter indrettes, og Tingene i sig selv ikke ansees uden som Punkter, eller som Inertier, hvis alle Dele have en og den samme Hastighed.

Saaledes, om man simpel hen vil undersøge Faldet af Tyngden, (fordi Beskaffenheden af de andre bestandige Kræfter er den samme) da kommer det paa et ud, enten man betragter den hele Tyngde g, som at have i naturlig Direktion den verticale Linie, eller den Deel af den $\frac{b}{L}g$ at have til naturlig Direktion den skraaeliggende Linie, hvis Høide er b og hvis Længde er L, thi $\frac{b}{L}g$ er den bestandige Kraft, som driver hen efter det inklinerte Plan. §. 71. Forel.

Alene at dette iagttages, seer man strax, at alt det gielder i Henseende til Faldet over de skraaeliggende Linier, hvad vi forhen have sagt om Faldet i Verticalen. Thi

1. Angaaende Hastighederne, følger af §. 10. At dersom Legemet hviler i Begyndelsen af Faldet (hvilket vi med mindre at andet udtrykkelig siges, ville have her forstaaet overalt), da bliver

a) Hastigheden, som Quadrat Roden af det igiennemløbne Rum.

b) Og i Følge §. 10. 2. vindes ved Faldet igiennem Planets Længde den samme Hastighed, som den et Legeme vinder i frit Fald igiennem Verticalen. Thi, naar Hastighederne

skulle

skulle være de samme i begge Tilfælde, blive de igiennemløbne Rum som $g : \frac{bg}{L} = L : h$

c) saa forholde sig og, i Følge §. 14, de i samme Tid udi Verticalen og over det skraaeliggende Bret vundne Hastigheder, som de over begge drivende Kræfter, fordi $gt = v$; og derfor, naar t er en bestandig Størrelse, bliver $g = v$. Saa at de i samme Tid i Verticalen og over det skraaeliggende Bret vundne Hastigheder forholde sig imod hverandre, som Planets Længde til Planets Høide.

2. Angaaende Rummet: Da bliver, i Følge §. 15, 3, de udi samme Tider igiennemløbne Rum i Verticalen nemlig, og over det skraaeliggende Bret, som Planets Længde til Planets Høide.

3. Og i Henseende til Tiderne.

a) Da ere de over det samme Plan, som Quadrat-Rødderne af de igiennemløbne Rum. §. 15. 2.

b) Tiden over det skraaeliggende Plan er til Tiden igiennem Planets Høide udi det frie Fald, som Planets Længde til Planets Høide. Thi §. 14. 2. er $gt = v$. Er v den samme, eller bestandig; bliver $t = \frac{1}{g}$. Derfor Tiden i Verticalen $= \frac{1}{g}$, og den over det inklinerte Plan $= \frac{L}{bg}$, følgelig blive de $= h : L$ eller som Planets Høide til dets Længde. Og saa videre.

§. 31.

Indledning til at forstaae Tingenes Fald

Vi ville her ikke igientage Resten, som er sagt om de tunge Tings Bevægelse over skraaeliggende Linier; da man af det allerede sagte

sagte fuldkommen seer de algebraiske Ligheders store Nytte, og hvor meget lettere man bringer Slutningen ud af dem, end ved de sædvanlige Maader at bevise paa. Vi ville her alene agte, at intet lettere sees, end at den Hastighed, hvilken en tung Ting vinder ved at falde igiennem en hver krum Linie, er den samme, som den der faaes ved at falde igiennem den Vertical, der maaler dens Høide; og dette ville vi saa meget meer vise, som vi derved bane Veien til at udregne de faldende Tings Bevægelse over de krumme Linier. Men man maa vel iagttage, at vi sætte fremdeles den hastiggiørende Kraft som bestandig. over krumme Linier.

§. 32.

Kræfterne af Tyngden deres almindelige Bestemmelse i Faldet over de krumme Linier.

Til den Ende maa agtes (Fig. 2. Taf. 2.) at, om ADL er en krum Linie, hvad for en man vil, da er de tunge Tings Bevægelse over den den samme i en uendelig liden Tid, som over en skraaeliggende Linie, og over den hele krumme Linie den samme som over en Mængde af deslige sammenføiede skraaeliggende Linier. For derfor, at finde en Bestemmelse for den hastiggiørende Kraft hele Linien igiennem, kommer det alene an paa at finde en bestandig Forhold i foranderlige Linier imellem disse smaa Planers Længde og Høide.

Er DE et af disse smaa Planer eller et Element af den krumme Linie AEL, hvis Axel vi antage at være horizontal, AB dens Absciisse, BD dens halve Ordinate, DIE et elementaire Triangel, som bestaaer af Absciissens, den krumme Linies og Halv-Ordinatens Elementer, FGH derimod et Triangel, i hvilket FH er Røre-Linien, betragtet som et skraaeliggende Plan; FG Planets Høide, GH dets Grund- eller Horizontal-Linie, da bliver DE:EI=FH:

FG, thi ved I og G ere rette Vinkler, og GE ligeløbende med FG. Da derfor denne Proportion er den samme til alle Punkter i den krumme Linie. Kaldes da AB x, BD y; bliver IE $= dy$ og siden den hastiggiørende Kraft over alle skraaeliggende Linier, naar den naturlige Tyngde, er $g = \frac{FG}{FH}g$, kaldes da AD, s, saa DE $= ds$, da bliver denne hastiggiørende Kraft til alle Punkter i den krumme Linie ADL $= \frac{dy}{ds}g$, og den derimod, som trykker i alle Punkter perpendikulær paa den krumme Linie $= \frac{dx}{ds}g$. Vi ville her alene betragte nogle Følger af den første, som den nyttigste.

§. 33.

Hastigheden er i alle krumme Linier som Quadrat-Roden af deres verticale Høide.

Da nu §. 7. $ngdy = vdv$. Saa er i alle krumme Linier, over hvilke Tyngder falde, $\frac{ngdy}{ds}ds = vdv$, §. 32. og følgelig

$$ngdy = vdv$$

er h den Høide, som svarer til v, bliver $dy = dh$, og $y = h$. §. 17. Følgelig er Hastigheden i Enden af Verticalen AG, udi G, den samme som i Enden af den krumme Linie AL udi L, naar nemlig en Tyngde falder igiennem begge.

§. 34.

Man seer let, at jeg i denne Oplosning haver antaget som sandt, at saa tidt som en Inertie bevægede sig med en given Hastighed ned over en krum Linie, uden at blive i sin Bevægelse hindret eller befordret af hastiggiørende Kræfter, saa at dens Bevægelse alene var en Følge af den ensdanne Hastighed, hvormed den gleed ned efter den krumme Linie,

nie, at da denne Hastighed aldeles ikke blev forandret ved Faldet over Linien. Thi saasnart som dette er, da følger, at de hastiggiorende Kræfter ikke anderledes kunde befordre eller hindre Hastigheden af Bevægelsen, end paa den nylig sagte Maade. Den Deel af Kraften nemlig, som er perpendiculær paa den krumme Linie hindrer Bevægelsen ikke i og for sig. §. 67 F. men gier alene, at Direktionen forandres. Den Deel af Kraften derimod, som virker efter Tangenten, gier alene den her udregnede Forandring. Følgelig er vores Slutning uimodsigelig rigtig, om ellers den Hastighed, som engang er bleven til, i Inertiernes eensdanne Bevægelse over de krumme Linier ikke forandres. Men det forstaaer sig selv, at vi her ikke bekymre os om den Modstand af Bevægelsen, der sædvanlig tilkiendegives ved Navn af Friction, og som kommer af Planets Ujevnhed.

Man kan let overbevise sig om denne Sandhed; thi er Taf. 1. Fig. 14. BAE en krum Linie, eller rettere AB og AE to af dens Elementer, da saafremt disse sidste, saaledes som vi her antage det, gisre under sig en saa stump Vinkel BAE, saa at Vinklen DAE, der gisres af Tangenten AD og Elementet AE er uendelig liden. Og AC, CE ere Radii Osculi til AE, eller Halv-Diametrer af den Cirkel, som over AE er med den krumme Linie fuldkommen af samme Krumning, da er Vinklen ACE = DAE.

Bevægedes Inertien frit, skulde den fra BA gaae fort efter Tangenten AD, men siden den, formedelst den krumme Linies Modstand og Hindring bevæger sig fremdeles i et dens Element AE, saa synes virkelig Hastigheden at maatte kunde lide nogen Forandring i det Inertien tvinges fra den Direktion AD, hvilken den af sin naturlige Drift søger, til at gaae udi Direktionen AE; allermest, da Be-

vægelsen efter AD maa opløses udi tvende andre, i AF perpendikulær paa den krumme Linie og AE, som er den Deel af Bevægelsen udi AD, der driver efter Tangenten af AE, og følgelig er den Deel af den, som vedligeholdes efter AE.

Deraf sees, at dersom AD — AE, som tilkiendegiver Forskiellen af Hastighederne udi Elementerne B*A* og EA er en uendelig liden Størrelse af første Orden, bliver den ved Integrationen altid funden at være en endelig Størrelse, og følgelig af den Beskaffenhed, at Hastigheden altid formindskes. Er den derimod et differentiel, eller en uendelig liden Størrelse af den anden eller af de høiere Ordener, bliver den ved Integrationen aldrig en endelig Størrelse, følgelig ubetydelig, og af den Beskaffenhed, at den aldrig forvolder noget betydeligt Tab i Hastigheden.

Men man beviser let, at dette Tab i Hastighederne fra Element til Element altid er et Differentiel af tredie Orden. Thi sættes Røre-Cirklens Halv-Diameter = R, og i det retvinklede Triangel DEA, DE = α. Da er DE : EA = EA : EC, fordi ved DAC er en ret Vinkel. Det er $\alpha : ds = ds : R$, saa at (naar EA $= ds$) $\alpha = \frac{ds^2}{R}$.

Men $DA^2 = DE^2 + EA^2$. Følgelig bliver $DA = \sqrt{ds^2 + \frac{ds^4}{R^2}}$ og Forskiellen imellem D*A* og *AE*, bliver $\sqrt{ds^2 + \frac{ds^4}{R^2}} - ds = \frac{ds^3}{2R^2}$ hvoraf sees; at det hele Tab, som i dette Tilfælde Hastigheden lider, siden det er proportionert $\frac{ds^2}{R^2}$, altid bliver en uendelig liden Størrelse af anden Orden, og følgelig intet. Hvoraf flyder, at Hastigheden i Bevægel-

vægelsen over den krumme Linie ingenlunde beroer paa dens Figur, men alene paa Høiden af Faldet. Dog maa R ei være uendelig liden.

§. 35.

Bevægelsen i krumme Linier bestemmes og først Hastigheden af Faldet i alle deres Punkter.

Dette forudsat; ville vi undersøge, hvorledes Hastigheden og den bevægende Kraft kunne findes til et hvert given Punkt i en krum Linie, saa tidt som de hastiggiørende Kræfter ere bestandige, eller af den Beskaffenhed som Tyngden; da et af to Tilfælde altid møder, enten at en Ting bevæger sig ned efter den krumme Linie, eller og at den bevæger sig op efter den. Da derfor Tyngden altid driver ned efter, bliver Tangential-Kraften altid i det første Tilfælde positiv, i det sidste negativ. Følgelig bliver §. 7. 32. i Almindelighed Ligheden, hvoraf Hastigheden i et hvert Punkt bestemmes den $\pm\frac{gdy.ds}{ds} = vdv$ eller $\pm gdy = vdv$, eller $\pm gdy = dV$, naar ved V forstaaes den Høide, som svarer til Hastigheden v. Følgelig bliver altid $\frac{1}{2}v^2 = \pm gy$ eller $V = \pm gy$, som er den almindelige Lighed, der bestemmer Hastigheden, i hvorledes end den bestandige Kraft er i sig, som driver Tingen ned efter i Direktioner perpendikulære paa den krumme Linies Axel. Alene at i Ligheden $V = \pm gy$ en bestandig Størrelse legges til, om nødig giøres. Dersom i det Tilfælde, da Tingene falde ned efter, Hastigheden udi A, $= 0$, behøves dette Tillæg ikke, men dersom, enten i Begyndelsen af Bevægelsen udi A, Tingen antages at have allerede forud en vis Hastighed, eller den stiger fra L til A, da den i Begyndelsen af Bevægelsen altid maa have en bestemt Hastighed, hvilken er Aarsag i at den stiger; saa maa denne bestandige Størrelse bestemmes af det, hvad V bliver, naar $y = 0$, og den fuldstændige Lighed, der bestemmer Hastigheden, er denne $V = B \pm gy$.

Man seer deraf let, hvorledes i det Tilfælde, da et Legeme stiger, det Punkt i den givne krumme Linie kan bestemmes, til hvilket det kan stige og ikke høiere, om den givne Bue af Linien nemlig er lang nok. Thi da $V = B - gy$, da om $V = 0$, som er det der bestemmer dette Tilfælde, da bliver $B = gy$ og $y = \frac{B}{g}$. Følgelig da y er given, kan Punktet i den krumme Linie altid findes.

§. 36.

Videre bestemmes Tiden af Bevægelsen ved Faldet i de krumme Linier.

For nu at finde Tiden, maa videre agtes, hvad vi udførlig have viist i nest forrige Tillæg, at i Almindelighed Tiden kan overalt forstaaes af den Ligbed $dt = \frac{dy}{v}$. Men dy, $= ds$ i dette Tilfælde, da Faldet skeer i en krum Linies Bue, og v eller $\sqrt{V} = \sqrt{B \pm gy}$, følgelig $t = \int \frac{ds}{\sqrt{B \pm gy}}$. For da at finde Tiden, har man alene nødig at give v ved en Function af s, det er i en sammensat og hvorledes man vil, indviklet Forhold af s og bestandige Størrelser, f. E. Om v er $= s^n$, da bliver $\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int ds . s^{-n}$, og følgelig $\frac{1}{(1-n)s^{n-1}} + B$. Er $n-1$ positiv, bliver $B = \frac{1}{0} = \infty$, naar $s = 0$; og igiennem det mindste Rum Tiden umuelig, følgelig og Bevægelsen umuelig, saa denne Tilfælde ei kan have Sted i Naturen. Er $n-1$ derimod negativ, bliver $t = \frac{s^{1-n}}{1-n}$ og $B = 0$, naar $s = 0$, saa Bevægelsen er i denne Tilfælde altid muelig.

§. 37.

Bevægelsen i Cykloiden bestemmes.

Da af alle de herhid hørende Tilfælde ingen er vigtigere end den, naar en tung Ting falder eller ruller ned ad en Cykloide, saa ville vi ved

ved det særdeles opholde os (Fig. 3. Taf. 2.). AGE foreſtiller da en halv Cykloide, BFE den Cirkel, i hvis Peripherie et Punkt E beſkriver Cykloiden, imens at Cirklen BFE ſelv veltes hen efter Linien AB, ſom er Axlen af Cykloiden. Man maa erindre ſig, at Længden af Cykloidal-Buen gE er saa ſtor ſom to gange den til den ſvarende Streng, eller Chorda FE i den Cirkel BFE, ſom beſkriver Cykloiden. Dette forudſat, kaldes da Diametern i Cirklen BFE nemlig BE, $2a$; den Linie Ed, ſom ſvarer til Buen Eg, b, et hvert ubeſtemt Stykke af EB, x; og et Element af ſamme dD, dx; et Element af Cykloiden gh, ds, og Eg $= s$, da ſiden §. 32. i alle krumme Linier den haſtiggiørende Kraft af Tyngden i et hvert Punkt er $\frac{gdy}{ds}$, og efter den her giorte Benævning af x, $\frac{gdx}{ds}$, maa denne Kraft beſtemmes i Cykloiden.

Da derfor i denne Linie 2FE $= g$E, eller $2\sqrt{2ax} = s$, saa er $8ax = ss$ og $sds = 4adx$, altſaa $\frac{dx}{ds} = \frac{s}{4a}$, saaledes bliver altid den haſtiggiørende Kraft udi Cykloiden $\frac{s}{4a}g$, følgelig er den idelig proportionert Længden af Buen, hvilket ſtrax, i Følge af hvad vi forhen have fundet, §. 22, kunde give en Formodning for at Tiden igiennem den hele Cykloide AE, og enhver anden dens Bue, ſom gE eller TE, burde være lige ſtor, thi man kunde paa en vis Maade anſee E, ſom det Punkt, hvortil Kræfterne drev.

Men for at ſee dette deſto tydeligere, ville vi først ſøge Haſtigheden til et hvert Punkt i Cykloiden, ſom en Forberedelſe til ſiden at finde Tiden. Da nu §. 4. i Almindelighed $dv = pdt$, saa bliver i Cykloiden, hvor $p = \frac{s}{4a}g$, beſtandig i alle dens Punkter $dv = \frac{s}{4a}gdt$,

og

og $dt = -\frac{ds}{v}$, $vdv = -\frac{g}{4a}sds$, følgelig $\frac{1}{2}vv = -\frac{g}{8a}ss + B$.

For at finde B, maa fastsættes i hvad Punkt g af den krumme Linie AgE at Bevægelsen begynder; er til samme $ED = b$, da er $EF = \sqrt{2ab}$, og naar $vv = 0$, bliver $\frac{g}{8a}ss$ forandret til gb. Følgelig er $B = gb$ og $\frac{1}{2}vv = gb - \frac{g}{8a}ss$, saa man faaer

$v = \sqrt{\frac{8agb - gss}{\sqrt{4a}}}$, som er Hastigheden i Cykloiden.

§. 38.

Ligeledes Tiden af Bevægelsen

For nu videre at finde Tiden, i hvilken Cykloiden og dens Buer af en tung Ting kunne igiennemløbes, da bliver §. 7. $dt = \frac{dy}{v}$ forandret til $dt = -\frac{ds.\sqrt{4a}}{\sqrt{8agb - gss}}$ §. 37.

$$= \frac{-ds}{\sqrt{8ba - ss}} \cdot \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} = \frac{-\sqrt{8ab}.ds}{\sqrt{8ab - ss}} \cdot \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{8abg}}.$$

Ansees $\sqrt{8ab}$ som den halve Diameter i en Cirkel, da bliver $-\int \frac{\sqrt{8ab}.ds}{\sqrt{8ab - ss}}$ (om LE er denne Halv-Diameter og $LQ = s$,) i den Quart-Cirkel MNE, Buen NE. Og for Faldet igiennem den hele Cykloidal-Bue gE, Quart-Cirklen MNE Integralen; thi naar Faldet er til Ende udi E, er $s = 0$. Man behøver ei at legge en bestandig Størrelse til, fordi i g, hvor Faldet begynder, bliver Integralen $= 0$, som den bør.

Tiden igiennem store og smaa Buer i den omvendte

Altsaa er Tiden af Faldet igiennem enhver Bue liden eller stor i den omvendte Cykloide, naar nemlig Faldet endes udi Spitsen E,

= Qua-

$= \frac{\text{Quadrans-Circuli}}{\text{Halv-Diametern}} \cdot \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$, og da denne Størrelse altid er beſtandig, saa bliver Tiden igiennem den hele Cykloide og alle dens Buer lige stor. vendte Cykloide er lige stor.

§. 39.

Da nu Tiden af Faldet igiennem Diametern $2a$, Diametern nemlig af den Cirkel, som beſkriver Cykloiden, er §. 16, $\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{2g}} = \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$, saa sees; at Tiden af Faldet i den forkeert vendte Cykloide AgE, hvis Spitse nemlig staaer i E, er til Tiden af Faldet igiennem BE eller den verticale Diameter i Cirklen BFE, der beſkriver Cykloiden; som Cirklens halve Peripherie til Diametern, eller noget neſten som 11 : 7. Og Tiden igiennem en saadan Bue er til Tiden igiennem den verticale Diameter af Cirklen, der beſkriver Cykloiden, som den halve Peripherie til Diametern.

Thi Forholden er; om $d : p$ betyder som §. 23: den af $\frac{\frac{1}{4}p}{\frac{1}{2}d} \cdot \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} : \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2}p : d.$

§. 40.

Man kan ellers beviſe det samme paa en endnu lettere og kortere Maade. Thi da $Ed = b$, saa bliver den Haſtighed, som svarer til et hvert givet Punkt T i Cykloiden imellem g og $C = \sqrt{2gb - 2gx}$ §. 79. 1 Forel. og §. 12. Till. Følgelig bliver $dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{ds}{\sqrt{b-x}}$ og fordi i Cykloiden $ds = \frac{4adx}{\sqrt{gax}}$, bliver $dt = \frac{\sqrt{4a}}{b\sqrt{g}} \cdot \frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx - xx}}$.

Er da Taf. 11. Fig. 10. $AB = b$ og AcB en Halv-Cirkel over AB.

$BD = x$, da er $Ac = \int \frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx - xx}}$, hvilket, naar $x = 0$, forandres til den halve Peripherie AcB. Følgelig bliver, for den hele Tid af Faldet, Tiden igiennem Cykloiden $\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} \cdot \frac{AcB}{AB}$. Men $\frac{AcB}{AB}$ er Forholden af den halve Peripherie til Diametern, eller af Qvadranten til Halv-Diametern, ligesom før udi §. 38.

§. 41.

Tiden af Faldet igiennem smaa Cirkel-Buer, som ere af adskillig Størrelse, er den samme; ligesom i Cykloiden.

Man seer af det allerede sagte, hvorledes Tiden af Faldet kan ved en almindelig Differential-Værdie bestemmes i den hule Deel af enhver Cirkel-Bue, men det, som i denne Henseende er videre af Vigtighed, bestaaer i at finde den Forhold, som Tiden igiennem smaa Cirkel-Buer haver til Tiden af et ligedant Fald igiennem Cykloiden.

Er da FBH en Cirkel-Bue, hvis Halv-Diameter AB (Taf. 2. Fig. 4.) vi ville sætte saa stor som $4a$, for at holde en Lighed i disse Regninger med de i Cykloiden, (thi det cykloidalske Pendul er saa lang, som den halve Cycloide, og denne igien 2 gange saa stor som Diametern af den Cykloiden beskrivende Cirkel, det er 4 gange saa stor som dens Halv-Diameter) Er BE, eller Sinus versus af den givne Bue $FB = b$, thi Begyndelsen af Bevægelsen antages her at skee udi F, $BG = x$, da er Hastigheden udi $D = \sqrt{2g.(b-x)}$ §. 12. 30. 1. *b*.

Da derfor igiennem den uendelig liden Bue Dh, om $DB = s$, $dt = \frac{-ds}{v}$ §. 15. er her $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(b-x)\,2g}}$. Men i Cirklen er Elementet af Buen $ds = \frac{4adx}{\sqrt{8ax - xx}}$, naar $BG = x$. Følgelig bliver

ver $dt = \frac{-ds}{\sqrt{b-x}\sqrt{2g}} = \frac{-4adx}{\sqrt{8ax-xx}.\sqrt{b-x}.\sqrt{2g}}$,

og $t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{8ax-xx}.\sqrt{b-x}.\sqrt{2g}}$.

Tages nu alt som før i Cycloiden, da er Tiden igiennem en Cycloidal-Bue af samme Høide, som Cirkel-Buen FB

$= \int \frac{-\sqrt{8ab}.ds}{\sqrt{8ab-ss}.\sqrt{2gb}}$, §. 38. og fordi i Cykloiden $s = \sqrt{8ax}$,

følgelig og $ds = \frac{4adx}{\sqrt{8ax}}$, saa bliver

$$\frac{-\sqrt{8ab}.ds}{\sqrt{8ab-ss}.\sqrt{2gb}} = \frac{-4adx}{\sqrt{8ab-ss}.\sqrt{2gx}} = \frac{-4adx}{\sqrt{8ab-8ax}.\sqrt{2gx}}$$
$$= \frac{-4adx}{\sqrt{8abx-8axx}.\sqrt{2g}},$$

sættes nu i Ligheden for Tiden i Cirkel-Buen, som er i Følge det forrige $t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{8ax-xx}.\sqrt{b-x}.\sqrt{2g}}$, x at være overmaade liden, da forsvinder xx imod x, og man faaer saavel for Cirklen, som for Cykloiden den samme Ligheds, $t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{8abx-8axx}.\sqrt{2g}}$.

Følgelig er Tiden igiennem ganske smaa Cirkel-Buer den samme, som Tiden af Faldet igiennem den forkeert lagte Cykloide og dens Buer. Saa man derfor i denne Henseende altid kan betiene sig af smaa Cirkel-Buer, i Stæden for Cykloidale.

§. 42.

Tiden af Faldet i Cirkel-Buerne bestemmes.

Vil man vide en nøiere Forhold af Tiderne og deres Forskiel i Cirklen og i Cykloidal-Buerne. Da maa man af den uendelige Følge, hvori $\frac{1}{\sqrt{8ax-xx}}$, eller $\overline{8ax-xx}^{-\frac{1}{2}}$ kan opløses, beholde de Dele af Følgen, som i Henseende til alle de andre i samme ere af nogen betydelig Størrelse, hvilke ikke ere uden de to første, og bliver derfor

$$\frac{1}{\sqrt{8ax-xx}} = \frac{1}{\sqrt{8ax}} + \frac{x}{16a\sqrt{8ax}}. \quad \text{Saa derfor}$$

$$t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{8ax-xx}\cdot\sqrt{b-x}\cdot\sqrt{2g}} = \frac{4a}{\sqrt{16ag}}\cdot\int\frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}} + \frac{1}{4\sqrt{16ag}}\int\frac{-xdx}{\sqrt{bx-xx}}.$$

Det første Stykke af Summen $\frac{4a}{\sqrt{16ag}}\int\frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}}$ er som man seer af §. 41. tilfælles baade for Cirklen og for Cykloiden, er (T. 2. F. 10.) AcB en Halv-Cirkel, da er det, om $AB = b$, $Bd = x$, Cirkel-Buen BC, og saa tidt som Summen er negtende, denne Bues Forskiel fra den halve Cirkel-Peripherie, nemlig Buen Ac.

Summen derimod, eller Integralen af det andet Stykke $\frac{1}{4\sqrt{16ag}}$ $\int\frac{-xdx}{\sqrt{bx-xx}}$ er den søgte Forskiel imellem Tiden i Cirkel- og Cykloidal-Buerne. Da nu $\frac{-xdx}{\sqrt{bx-xx}} = \frac{\frac{1}{2}bdx-xdx}{\sqrt{bx-xx}} - \frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx-xx}}$, saa er Integralen $\left(\sqrt{bx-xx} + \int\frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx-xx}}\right)\frac{1}{4\sqrt{16ag}}$. Men $\int\frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{bx-xx}}$

er

er igien, som før, Cirkel-Buen Ac, følgelig bliver $\frac{8a}{b\sqrt{16ag}}$, Ac $+ (\sqrt{bx-x^2} + Ac) \frac{1}{4\sqrt{16ag}}$ det søgte Integral.

Da nu for den hele Tid af Faldet $x = b$, er og $\sqrt{bx-xx} = 0$, og $Ac = AcB$. Kaldes da Tiden i Cykloiden R, bliver Tiden i Cirkel-Buen $R + \frac{b}{32a}R$. Er Buen overmaade liden, bliver b at ansee som $= 0$, og Tiden i Cirkel-Buen $= R$, det er, som før er blevet sagt, den bliver saa stor som Tiden igiennem Cycloiden.

§. 43.

Herved kan videre agtes:

1) At ligesom den i §. 38 fundne Størrelse for Tiden $R + \frac{b}{32a}R$ ikke er uden for smaa Cirkel-Buer, saa kan samme altid ligeledes bestemmes for de Større ved at opløse $\overline{(8ax-xx)}^{-\frac{1}{2}}$ i en uendelig Følge, af hvilken saa mange Leed integreres, som Buens Størrelse udfordrer, paa det at de øvrige Leed i Følgen kunde blive regnede for intet.

2) I den Hypothese af smaa Sving over Cirkel-Buerne forholde de noget større sig til det, som virkelig er uendelig lidet, noget nesten som $R + \frac{b}{32a}R : R$, følgelig $= 32a + b : 32a$, eller; som 4 gange Diametern forstørret om Sinus versus af Buen, i hvilken Svinget skeer, til 4 gange Diametern.

3) Følgelig, da til en Bue af $7^\circ\ 30'$, b eller Sinus versus er 0,09, saa bliver for en Bue af denne Størrelse $\frac{b}{32a} = \frac{9}{8000}$.

Følgelig kan in Praxi, eller i Brugen, en Bue af 15° ansees som ikke at være adskillig fra Cykloidal Buerne. Endnu under et Sving af 18° bliver $\frac{b}{32a}$ ei større end $\frac{12}{8000}$.

4) Dette sidste giver Cirklen et virkeligt Fortrin i Henseende til Pendulernes Bevægelse, hvorom udførlig skal blive handlet i det følgende. Thi det er klart, at saa længe, som Svinget er virkelig uendelig lidet, da haver den ingen Fortrin frem for de fleste andre krumme Linier. Thi saa tidt som den liden Bue, hvorover Tyngden falder, er fuldkommen af samme Beskaffenhed, som den, hvorover samme Tyngde stiger, da behøves alene, at søge Radium Osculi, eller Røre-Cirklens Halv-Diameter, for at giøre Pendulet saa lang som den. Ere disse to Buer ulige, maa Røre-Cirklens Halv-Diameter søges for dem begge, da man altid ved en simpel Stift, som forkorter Pendul-Traaden, kan giøre, at Pendulet i at falde kan have en Længde, og i at stige en anden.

5) Ydermere kan agtes, at saa længe Svinget er virkelig over en uendelig liden Bue, kan det være det samme, hvad heller at den virkende Kraft sættes i sig bestandig eller foranderlig, siden den ikke saa liden Bevægelse dog aldrig kan ansees for andet end en bestandig Kraft.

§. 44.

I hvad Tilfælde en Mængde rette Linier igiennemløbes udi samme Tid.

Vi have i vore Forelæsninger §. 76, 82, talt om en Deel rette Linier, som kunne igiennemløbes i den samme Tid, man kan af desligе Linier paa denne anden Maade finde en Mængde. (Fig. 5. T. 2.)

Der-

Dersom over en Linie ACEG, slaaes saa mange Halv-Cirkler ABC, AHE, AFG, som man vil, og Hastighederne i alle Punkter af AC ere, som de halve Ordinater DB af Cirklen ABC, der svare til Punkterne i AC. Over AE ligeledes, som de halve Ordinater DH af den halve Cirkel AHE, over AG, som de halve Ordinater DF udi AFG o. s. v. i det uendelige; da igiennemløbes alle disse Linier i den samme Tid.

Thi da; om AC eller AE eller AG kaldes $2a$. AD, x. DB eller DH eller DF $= \sqrt{2ax - xx}$, saa bliver i denne Tilfælde

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$$

og $t = \frac{1}{a} \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, følgelig er den som $\frac{p}{d}$, om $\frac{p}{d}$ er Forholden imellem Diametern og Peripherien. t betyder her den hele Tid, hvori Diametern AC eller AE, eller AG igiennemløbes. Men den hastiggiørende Kraft, som til denne Bevægelse udfordres, er $= a - x$ §. 50. som Distancen fra Centret. See §. 22. 1.

§. 45.

Saavelsom Buer af andre.

Imidlertid kan man, saavel i Henseende til de rette, som i Henseende til de krumme Linier i den Hypothese af bestandige Kræfter bestemme en Mængde, som alle igiennemløbes udi samme Tid. Saaledes T. V. Fig. 1. ville vi antage, at ABC, AEF ere ligedanne Linier, hvis Buer AB og AE af faldende Tyngder skulde igiennemløbes udi samme Tid, i samme nemlig, som Faldet skeer ned efter Verticalen AG. Er da AB en saadan Bue i en af disse krumme

Linier,

Linier, og AN $= x$, da bliver Tiden i Almindelighed i den Hypothese af beſtandige Kræfter proportionert $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Er a en given beſtandig Størrelſe, maa i alle Buerne AB, AE, $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = a$. Saa tidt derfor, ſom $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ er virkelig integrabel, er det altid meget let at finde Differential-Ligheden til ſamtlig de foreſatte Linier, thi er $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ $= R$ og $R = a$, bliver $dR = 0$, ſom er den Ligheð, der beſtemmer alle Punkterne, ſom B, E, G, alene at man vel agter, at om ellers dR ſkal kunde paſſe ſig til alle de foreſatte Linier, maa Differentialen af en af diſſe ligedanne Linier tages ſaaledes, at Parametern behandles, ſom en foranderlig Størrelſe under Differentiationen.

Da ved denne Differential-Ligheð x altid maa kunde beſtemmes af den ſærlige Værdie af Parametern, ſaa tidt ſom $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ er integrabel; ſaa kan og i dette Tilfælde y altid beſtemmes, og ſaaledes de ſøgte Punkter B og E findes, men da diſſe Punkter beſtemme den krumme Linie BEG, hvilken gaaer igiennem dem alle, og derfor kaldes Linea ſynchrona, eller de lige Tiders Linie; ſaa ſees ligeledes, hvorledes den kan beſtemmes, ei alene ved Conſtruction, men endog ved at finde dens virkelige Ligheð; naar nemlig i Steden for Parametern ſættes dens Værdie i x og y udi den ſidſt fundne Ligheð.

Man kan og finde deslige Buer i de Tilfælde, da $\int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ ei er integrabel, endog i Tilfælde, da de givne Linier ei ere ligedanne, men

da

da denne Lærdom ei er stort til Nytte, ville vi ikke indlade os i de vidtløftige Underſøgninger, ſom her behøvedes, men alene oplyſe det allerede ſagte udi et Par af de ſimpleſte Tilfælde.

§. 46.

Ere ſamtlig Linierne AB, AE, AG rette Linier. Taugenten af Inklinationen, hvilken de have med Vertikalen, t. Den hele Sinus $= 1$, bliver $y = tx$, $s = AI = x\sqrt{1+t^2}$ og $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ $= \sqrt{\frac{1+t^2}{g}} \int dx.x^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1+t^2}{g}}\, x^{\frac{1}{2}}$; men efter, hvad vi forhen have ſagt, er $2\sqrt{\frac{1+t^2}{g}}\, x^{\frac{1}{2}} = a$, og derfor $dx + t^2dx + 2txdt = 0$ eller $\frac{dx}{x} = -\frac{2tdt}{1+t^2}$, hvoraf faaes, $x = \frac{1}{1+t^2}$.

Da nu videre $t^2 = \frac{y^2}{x^2}$, ſaa bliver $x^2 + y^2 = x$, og fordi Størrelſerne overalt bør være af et Slags i den ſundne Ligheds, bliver $x^2 + y^2 = bx$, naar Høiden $AG = b$, thi b eller $\frac{a\sqrt{g}}{2}$, hvilket er det ſamme; er den beſtandige Størrelſe, der gik bort under Differentiationen, og, ſom man let ſeer, beſtemmer her alene den krumme Linie, ſom Parameter. Skiønt man ſeer det og deraf, at naar $y = 0$, ſkal x være ſaa ſtor ſom b, fordi den krumme Linie maa ſelv gaae igiennem G. Men $y^2 = bx - x^2$, er til en Cirkel, hvis Diameter $= b$, eller Høiden AG.

Saa man deraf atter igien seer, hvad vi forhen have sagt §. 76. F. at alle Cirklens Chordæ eller Strenge trokne fra Diameterns øverste Spitse til Peripherien, igiennemløbes alle udi en og den samme Tid.

§. 47.

Er de givne Linier AB, AE, Cykloider, da findes Buerne og følgelig Punkterne i den synchrone Linie selv overmaade let, uden at det gieres nødig af den almindelige og forhen omtalte Opløsnings-Maade at finde disse Punkter. Thi er KMC den Cirkel, hvis Punkt C beskriver Cykloiden CA, da er Tiden igiennem $AB = \frac{2}{\sqrt{g}} \cdot \frac{KM}{\sqrt{KC}}$ og den givne Tid igiennem $AG = b$; er $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$, følgelig bliver i Følge Hypotheſen $\frac{KM}{\sqrt{KC}} = \sqrt{b}$. Derfor er KM den mitlere proportionelle imellem KC og AG; naar da denne Bue tages saaledes, og Halv-Ordinaten DM trekkes ud til B, da bliver AB den forlangte Bue af Cykloiden, og paa samme Maade kunde de synchrone Buer bestemmes i alle de andre givne Cykloider, som gaae fra det Punkt A.

§. 48.

Almindelige Regler, naar Kræfterne ere foranderlige og centrale.

Ligesom vi hidtil have opløst dette Slags Problemata i den Hypotheſe af de bestandige Kræfter, kan man ligeledes opløse dem i hvad andre Hypotheſer af Kræfterne, som man vil. Den almindelige Opløsnings-Maade bliver altid den samme. Forskiellen i Kræfternes Love beroer enten paa hvad de ere i sig selv, eller hvorledes de virke i Henseende til deres Direktioner. Det sidste giver to Hoved-Tilfælde,

den

den ene, som vi allerede have afhandlet, naar Direktionerne overalt antages som Parallele, den anden, naar de sættes idelig at søge ind til et og det samme Punkt, som Central-Kræfterne. I begge disse Hypotheser kunde igien utallige Love for Kræfterne have Sted. Vi ville derfor alene vise, hvorledes i Almindelighed de Problemata kunne opløses, som henhøre til det sidste Tilfælde, da nemlig Kræfterne altid virke efter Direktioner, som søge til et Punkt.

Overalt i dette Tilfælde (Taf. X. Fig. 2.) ville vi sætte, at Kraften K virker efter de Direktioner CB, DB, som søge til et og det samme Punkt B. Distancen CB ville vi i Almindelighed anse som semiordinate $= y$, og naar Cirkel-Buerne CE, DF trekkes, bliver $CL = -dy$, om nemlig CB er uendelig nær ved DB; og $CD = ds$ bliver Elementet af den krumme Linie. Foreſtilles den hele Kraft ved DB, og denne igien opløses i de to Side-Kræfter DI, som er i Direktion af Tangenten CDI, og DK, som er perpendikulær paa den krumme Linie, og $=$ BI. Da ſees let, at DI er som den Kraft, der driver efter Tangenten; BI derimod proportionert den, som virker perpendikulær paa den krumme Linie. Men CB og BD kunne anſees som parallele, saa at CLD og DBI ere ligedanne Triangler, og derfor $CD : DL = DB : DI$. Kaldes den hele Kraft K, Tangential-Kraften T, da bliver $ds : -dy = K : \frac{-Kdy}{ds} = T$, hvilket er det samme, som vi forhen have fundet for Tangential-Kraften. §. 32. Derimod bliver $CD : DL = DB : BI$ eller $ds : \sqrt{ds^2 - dy^2} = K : \frac{K\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds}$, hvilket bliver Værdien af den perpendikulære Kraft, som forandres til $\frac{Kdx}{ds}$, som før §. 32, om $\sqrt{ds^2 - dy^2} = dx$ og saaledes $DF = x$.

Ere Kræfterne saaledes fundne, da er i øvrigt Opløsningen ligesom før, thi om V er Høiden, som svarer til Hastigheden, bliver bestandig $\frac{-Kdyds}{ds} = -Kdy = dV$ og $V = \int -Kdy + B$, følgelig bliver $dt = \frac{ds}{\sqrt{\int(-Kdy) + B}}$; som ere de almindelige Ligheder for Hastigheden og Tiden.

§. 49.

Sætter man i Steden for K hvad Kræfternes Lov, som man selv vil i disse sidste Formuler, og ligeledes i Steden for g i de forhen givne §. 30, da kunne Opløsninger gjøres for alle Slags Kræfter, siden Differential-Lighederne for Hastigheden og Tiden altid kunde findes, og følgelig dette Slags Problemata altid almindelig opløses. Men de fleste af disse Spørsmaal ere, saavidt man endnu veed, ikke til stor Nytte, saasnart som nemlig deslige Love antages for Kræfter, hvilke ei findes i Naturen, med mindre at man vil betiene sig af dem, for at undersøge Rigtigheden eller Urigtigheden af en Hypothese.

En Post er dog særdeles Anmærkning værd i den næst forhen anførte Formul af Hastigheden $V = \int -Kdy + B$. At saa tidt som K er en Function af Distancen y alene, kan ved Faldet igiennem den krumme Linie AC ingen anden Hastighed vindes, end den, som skulde faaes ved Faldet igiennem AB, naar nemlig samme Kraft drev Legemet igiennem AC og AE, thi Udregningen af Hastigheden maa, som man let seer; nødvendig blive for begge Tilfælde den samme, følgelig Hastigheden selv, som alene beroer paa y, altid den samme, saa tidt som Distancerne fra Centret ere lige store.

§. 50.

§. 50.

Ligeledes; saa tidt som flere Kræfter virke paa et og det samme Punkt, der af dem drives og falder ned efter en krum Linie, da er Oplosningen i Almindelighed endnu den samme, siden man altid kan oplose enhver af dem for sig i to andre. En, som driver efter Tangenten, og en anden, som virker perpendikulær paa den krumme Linie. Ere de saaledes af adskillige Kræfter fundne tangentielle Kræfter T, T′, T″ + &c. da bliver (V taget som før) $dV = (T+T'+T'')\,ds$, og $V = \int \overline{(T+T'+T''++)}\,ds + B$ og

$$t = \int \frac{ds}{\overline{\int (T+T'+T''++)\,ds\,(+B}}^{\frac{1}{2}}.$$

Vi ville ikke opholde os ved enkelte Exempler, fordi Nytten af dem ikke er betydelig.

§. 51.

Af Faldets givne Egenskaber, i Henseende til Tiden, eller Hastigheden, eller Rummet, at finde den krumme Linie, hvori Bevægelsen skeer. Exempel derpaa i den saa kaldte Isochrona.

Man kan paa en omvendt Maade, naar Egenskaberne af Tiden eller Hastigheden og det igiennemlobne Rums indbyrdes Henseender til hverandre ere givne, ligeledes altid finde i det mindste den Differential-Ligned, som tilkiendegiver den krumme Linie, i hvilken Tiden eller Hastigheden og Rummet i deres indbyrdes Henseender til hverandre have en vis given og bestemt Beskaffenhed. Thi man seer let, at det kommer alene an paa at forandre den foranderlige Forhold af Hastighed eller Rum eller Tid til en Forhold imellem Ordinaterne og Abscisserne af en krum Linie, paa den Maade, som de foresatte Betingninger det udkræve.

Saaledes, om man søger for Ex., hvad det er for en krum Linie, i hvilken en tung Ting skulde falde, for i lige store Tider at nær-

me sig lige meget til Horizonten, eller i dem at beskrive lige store verticale Rum; da siden $dt = \frac{ds}{v}$ kommer det an paa at give t og v i s i Følge den antagne Betingning, eller hvilket de fleste Tider er bequemmere t, v og s i x og y, naar ved disse sidste Linier forstaaes Abscissen og den halve Ordinate af den søgte krumme Linie.

Saafremt nu i den Tilfælde, naar Tyngden er bestandig saaledes som hos os, Faldet antages at skee i en Linie som gbe og $hc = x$, cd, dx (Fig. 6. Taf. 2.) $ca = y$, $bk = dy$, $ab = ds$, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, Hastigheden i $a = v = \sqrt{x}$, og i Følge Betingningen $t = x$ og derfor $dt = dx$, saa bliver

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}} = dx \text{ og derfor}$$

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{x}$ eller $dy^2 = \overline{x-1}\,dx^2$ og $dy = dx.\sqrt{x-1}$, men $\int dx.\,(x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{x-1}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$, følgelig er $\frac{4}{9}\overline{x-1}^3 = y^2$.

Denne Linie er derfor Algebraisk, nemlig den saa kaldte anden Cubiske, eller Quadrat = Cubiske, og Neilianske Parabol, hvis Abscisse er $x - 1$, dens halve Ordinate y, og dens Parameter $\frac{9}{4}$. Er $y = 0$, bliver $x = 1$, altsaa rører den krumme Linie sin Axel udi g, der hvor $hg = x = 1$, og naar $x = 0$, er y umuelig eller imaginair og $= \sqrt{-\frac{4}{9}}$: Saa Parametern er $2\frac{1}{4}hg$, fordi $hg = 1$; og med den Hastighed, som i Faldet vindes ved at falde igiennem hg, maa i den krumme Linie Tyngden begynde at bevæge sig.

§. 52.

§. 52.

Denne Linie, som man kalder sædvanlig Curva Isochrona, kan paa samme Maade uden synderlig Meie findes i en Deel andre Betingninger af Tyngdens antagne Love, men vi ville derved ei opholde os, da Nytten deraf ikke er betydelig. For at øve Læserne i Udregninger af dette Slags, ville vi endnu legge et Exempel til af den saa kaldte Paracentriske Linie. Ligeledes i den Paracentriske.

Ved den Paracentriske Linie (Fig. 7. T. 2.) forstaaes en krum Linie, i hvilken om en tung Ting bevæges, da kommer den i lige Tider lige langt fra, eller nærmer sig i lige Tider lige meget til et Punkt C. Er denne paracentriske Linie AGE, og CG, CT Distanceerne af dens Punkter fra det givne Punkt C, da bliver efter Hypothesen CG, i Forhold med Tiden, og om CG kaldes y, er $y = t$ og $dt = dy$.

Men $dt = \frac{ds}{v}$, ere da CG og CT to Linier, der løbe begge ud fra Punktet C, og somlere hinanden uendelig nær, da er GT $= ds$, og følgelig $dy = \frac{GT}{v}$.

For at bestemme GT, er i de Slags krumme Linier, hvis Ordinater, som CG, løbe sammen udi et Punkt, intet beqvemmere end at legge en Cirkel til Grund for Abscisserne. Er A det Punkt, i hvilket den tunge Ting begynder at falde, slaaes da med den Halv-Diameter CA den halve Cirkel A*f*B, saa er det den, som mageligst kan legges til Grund for Abscisserne. Vi ville kalde AC eller Halv-Diametern af denne Cirkel *a*.

Saasnart dette er giort. Kaster man da fra *f*, det Punkt nemlig, hvor Ordinaten CG skier Cirklen, en perpendikel *fo* ned, og kalder

der Co, x, da sees strax, at der er aldeles ingen større Vanskelighed i at komme til en Differential-Ligheed imellem x og y i denne Tilfælde end i den forrige, thi alt kommer alene an paa at bestemme GT.

Trekker man da med CG, som Halv-Diameter, den liden Cirkel-Bue Gr, saa er $Cf : fa = CG : Gr$. Men er Cirklens Halv-Diameter $= a$ og $Co = x$, efter vores forhen antagne, da bliver altid Elementet af Cirklen $fa = \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, følgelig og

$$a : \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}} = y : \frac{aydx}{a\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{ydx}{\sqrt{a^2-x^2}} = Gr.$$

Videre da $rT = dy$ og $GT^2 = Gr^2 + rT^2$, saa bliver

$$GT^2 = \frac{y^2dx^2+a^2dy^2-x^2dy^2}{a^2-x^2}, \text{ og følgelig er}$$

$$dy^2 = \frac{GT^2}{v^2} = \frac{y^2dx^2+a^2dy^2-x^2dy^2}{v^2.(a^2-x^2)}$$

For at bestemme $v = \sqrt{AP}$, maa CP bestemmes deraf, at $Cf : Co = CG : CP$ eller $a : x = y : \frac{xy}{a} = CP$, følgelig er $v = \sqrt{AP} = \sqrt{a+\frac{xy}{a}}$ og $v^2 = \frac{a^2+xy}{a}$, følgelig bliver $dy^2 = \frac{GT^2}{v^2} = \frac{y^2dx^2+a^2dy^2-x^2dy^2}{\left(\frac{a^2+xy}{a}\right)\left(a^2-x^2\right)}$, og Differential-Ligheden for Paracentrica bliver, $\frac{(a^2-x^2)dy^2}{a} = \frac{y^2dx^2+a^2dy^2-x^2dy^2}{a^2+xy}$, eller for at føre alle Stykkerne til samme Dimensioner

$$\frac{(a^2-x^2)dy^2}{a^2} = \frac{y^2dx^2+a^2dy^2-x^2dy^2}{a^2+xy.} \text{ eller}$$

$$a^4dy^2+a^2xydy^2-a^2x^2dy^2-yx^3dy^2 = a^4dy^2-a^2x^2dy^2+a^2y^2dx^2$$

som er en Ligheed til krumme Linier, der ikke kan construeres, uden

saa

saa tidt som de Ubekiendte kunne skilles fra hverandre. Til den Ende kan sættes:

$$a^2xydy^2 - yx^3dy^2 = a^2y^2dx^2,$$ hvorved faaes,

$$\frac{adx}{\sqrt{a^2x-x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{y}},$$ som er en speciel Tilfælde (*), men vi ville derved ei opholde os, for at foretage en anden af Cykloidens smukke mekaniske Egenskaber, som bør vides, og vi ei kunne undgaae at nævne i vore Forelæsninger.

§. 53.

I Cykloiden kommer i den korteste Tid en faldende Tyngde fra Punkt til Punkt.

Sagen er; i den Hypothese af bestandige Kræfter at finde den krumme Linie AE, (Taf. 2. Fig. 8.) som gaaer igiennem de to Punkter AE, som har til Abscisse og Høide Verticalen AB, og dette forudsat, er desuden af den Beskaffenhed, at en Tyngde, som falder over den, kommer i den korteste muelige Tid fra A til E. Man veed, at Faldet i Verticalen selv er det hastigste i alle andre Tilfælde fra Punkt til Punkt er den Linie, som svarer til det hastigste Fald aldrig en ret Linie, men en krum og den føromtalte Cykloide.

For at opløse dette Spørsmaal, maa igien som før den Ligheds

$dt =$

(*) Constructionerne af den paracentriske Linie ere artige, man kan desangaaende efterslaae *Acta Lipsienf.* for Aar 1694 og 95. *Memoires de l'Academie des Sciences de Paris.* Anneé 1699. *Opera Jac. Bernoulli.* Tom. I. og *Chriſt. Wolfs Element. Matheſ.* Tom. 2. Cap. 8. Vi udelade dem her, saavelsom en Mængde andre ligedanne Constructioner, for ei at giøre dette Verk alt for vidtløftigt, fordi Nytten ikke just er stor, og Theorien, som er artig, udfordrer intet andet, end at man haver giort sig de sædvanlige algebraiske Methoder nogenlunde bekiendt.

$dt = \frac{ds}{v}$, foretages; og da flyder det strax af den foresatte Sags Natur, at $ddt = 0$. Som er den almindelige Oplosning af alle Tilfælde, da det, man betragter som foranderligt, er enten i sit mindste, eller i sit største, følgelig maa og Differentialen af $\frac{ds}{v} = 0$, saa den almindelige Oplosning er intet mindre end vanskelig. Men da dette Slags af mindste Forhold er deri adskillig fra de gemeene og sædvanlige, at her ei spørges om noget, som bliver mindst eller størst i den krumme Linie selv paa dens Ordinaters Maade; Men den krumme Linie selv skal være et største eller mindste. Saa maa i alle deslige saa kaldte Isoperimetriske Tilfælde vel agtes, hvad det er i den til Differentiation foresatte Størrelse, som i den givne Tilfælde er bestandigt, og hvad der i den derimod er foranderligt.

Den almindelige Oplosning af samtlig de herhid hørende Spørsmaal er meer en analytisk, end en mekanisk Afhandling. Vores Foresatte er ikke uden en meget enkelt Tilfælde iblant utallige andre, som paa samme Maade kunde opløses. Men da den herhid hørende Oplosnings-Maade ikke er saa almindelig bekiendt, som andre analytiske, ville vi kortelig vise, hvorpaa det i deslige Spørsmaals Oplosning i Almindelighed kommer an, og siden anvende den almindelige Oplosnings-Maade til det foresatte enkelte Tilfælde.

Man maa da allerførst agte, at saa tidt som (Taf. 2. Fig. 8.) en krum Linie selv skal have den Egenskab, at den i sig iblant alle andre Muelige, henført til samme Axel AB og til samme Absciße AD, skal være den, ved hvilken en given Egenskab allerbest skal kunde iverksættes, da maa denne Egenskab findes i hvad Deel af den krumme

Linie,

Linie, som man endog vil betragte. Følgelig saavel i dens mindste Elementer, som i den krumme Linie selv. Men da det her kommer an paa at betragte den Beqvemhed, som flere krumme Linier have under sig, for at befordre denne Egenskab, saa maa nødvendig Elementerne af flere krumme Linier i samme Henseende og under samme Betingning tages under Betragtning, for at finde den, som best og lettest iverksætter det forlangte. Følgelig maa man i det mindste, for at denne Sammenligning skal kunde skee, betragte to Elementer af disse Linier. Saaledes om $AC = s$ antages at være den søgte krumme Linie; Ca og ae to af dens Elementer, AB alle Liniernes fælles Axel, $AD = x$ den givne Abscisse, $DG = GH = dx$ Elementet af Abscissen, $Ca = ds$, $ae = dS$. Antages ligeledes cd og de; eller Cn og ne at være to Elementer af en af de andre krumme Linier; da er det klart, at siden disse sidste kunne være utallige, da jo nærmere de falde ind imod Cae og jo mindre de i deres Elementer ere fra dens Elementer adskillige, desto beqvemmere maa de være i Henseende til den foresatte Egenskab; og endelig, dersom Cde falder uendelig nær ind ved Cae, maa den søgte Egenskab i Ca og ae være den samme som i Cd og de. Betegnes den søgte Egenskab ved E, da maa $E.Ca + E.ae = E.Cd + E.de$. eller $E.Ca - E.Cd = E.de - E.ae$, som er Hoved-Beskaffenheden af dette Slags mindste og største.

Kaldes DC, y: Da er, om Perpendiklen ch kastes ned, $ha = dy$, og om da ansees som uendelig mindre end ha, er $da = ddy$. Men da bør ansees som uendelig mindre end ha, fordi af den uendelige Mængde Linier, som have y tilfælles, skal Cde i Følge Hypothesen være den, som er allernærmest Cae. Følgelig kommer det nu alene an paa at bestemme, hvad $E.Ca - E.Cd$ bliver, det er; hvad Differentialet

rentialet af E bliver, naar C*d* og C*a* sammenlignes. Ligeledes og, hvad Differentialet af samme E bliver, for saavidt E betragtes i Henseende til den Forandring, som det lider ved Sammenlignelsen imellem *ae* og *de*.

Hvad det første angaaer; nemlig at bestemme *d*E eller Differentialen af E; det er, hvad den er meer eller mindre i C*d* end i C*a*. Da seer man strax, at naar E er, hvorledes man vil en Function af *x*, *dx*, y, *dy*, *s* og *ds*. Da maa dette Differential af E dog altid tages saaledes, at under Differentiationen, *x*, *dx*, y og *s* tages som uforanderlige. Thi i det C*d* falder over i C*a*, forandres ingen af disse Størrelser, men alene *ha*, *dy* og C*d*, *ds*. Følgelig, naar efter disse Foranderlige Differentialet indrettes, bliver det i Almindelighed A*ddy* + B*dds*, men $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Derfor, naar *dx* er bestandig, bliver $dds = \frac{dy\,ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy\,ddy}{ds}$, saa at den almindelige Form af *d*E bliver $\left(A + \frac{B\,dy}{ds}\right) dds$. Ved A og B forstaaes Størrelser, som ikke indeholde de foranderlige Differentialer *ddy* og *dds*.

Saaledes er Beskaffenheden af *d*E almindelig bestemt i Henseende til den Forandring, som E lider udi C*d* meer end udi C*a*. For nu ligeledes at bestemme *d*E i Henseende til *de* og *ae*, maa vel agtes, hvad der forandres i det *ea* falder hen i *ed*, siden Forandringen udi E derpaa beroer.

Man seer da strax, at imidlertid at *ae* falder hen i *de*, eller om man vil, *de* udi *ae*, bliver, imidlertid at dette skeer; AG = *x* uforanderlig, saavelsom GH = *dx*. Forlænger man derimod G*a* = y, og trekker H*e*. Kastes desuden Perpendiklen *ef* = *dx* = GH ned, da bliver *af* = *ke* = *dy*. I Bevægelsen derfor fra *ae* til *de* voxer

fa

fa om *ad* (= *ddy* efter det forhen sagte) og med samme Størrelse *ddy* formindskes ligeledes y selv eller G*a*. Den krumme Linie A*a* eller og S forandres om en uendelig liden Deel af C*a* eller *dds*, og *ds* ligeledes om den uendelig liden Deel *dds*.

Efter at baade samtlig Forandringerne og det, hvorudi at de bestaae, saaledes ere blevne eftertænkte, bliver det nødvendigt, naar E differentieres som før, at den almindelige Skikkelse af Differential-Ligheden maa blive.

$$\begin{array}{l} -\alpha ddy - \beta dds \\ +addy + bdds \end{array}$$

Hvor — og + sættes, efterfom at Størrelserne enten tage af eller tage til om *ddy* og om *dds*. Men $dds = \frac{dyddy}{ds}$, fordi *dx* er uforanderlig. Følgelig faaes $(a - \alpha)\, ddy + (b - \beta)\, \frac{ddy.\, dy}{ds}$ for Differentialet af E betragtet i Henseende til Forskiellen af E udi *ae* og *de*, da derfor efter det forhen forklarte

E. C*a* — E. C*d* = E. *de* — E. *ae*, saa bliver og

$$\left(A + \frac{Bdy}{ds}\right) ddy = (a - \alpha)\, ddy + (b - \beta)\, \frac{dy}{ds} ddy$$

$$\text{eller } A + \frac{Bdy}{ds} = (a - \alpha) + (b - \beta)\, \frac{dy}{ds}.$$

$$\alpha + \beta \frac{dy}{ds} = a - A + b\frac{dy}{ds} - B\frac{dy}{ds}.$$

Men $a - A$ er Differentialet af A og $b - B$ ligeledes Differentialet af B, siden E maa saavel i *ca* som *ae* være det samme paa de uendelig smaa Differencer nær. Derfor bliver omsider.

$$\alpha + \beta \frac{dy}{ds} = d\left(A + B\frac{dy}{ds}\right)$$

Hvoraf flyder:

1) At man maa, for at bestemme $A+B\frac{dy}{ds}$, differentiere den givne Størrelse E, som skal være et Mindste eller Største, saaledes; at ikke uden dy og ds sættes foranderlige; hvilket flyder af det vi, angaaende Differentialets Forskiel udi Ca og Cd, allerførst have sagt. Men da ddy gaaer ud af Ligheden, som nu sidst er blevet viist, kan man strax sætte $ddy = 1$, og derfor dds eller $\frac{dydd y}{ds} = \frac{dy}{ds}$. Det udkommende Differential af E er $A+\frac{Bdy}{ds}$.

2) For at finde af den samme Størrelse E, $\alpha+\beta\frac{dy}{ds}$; da siden i den ikke forekommer andre Differentialer end dy og ds, maa i denne Differentiation y og s alene sættes at være foranderlige, men hverken x, dx, dy eller ds. Men da $\frac{\beta dy}{ds}$ alene kommer ved Differentiationen af ds, saa kan i denne Differentiation strax sættes $dy = 1$ og $dds = \frac{dy}{ds}$.

3) Ere disse to Differentiationer giorte, og man kalder det Udkommende af den første L, af den sidste M, da bliver $M = dL$. Og da i dette sidste Differential, i dL nemlig, ingen videre Betingninger have Sted, differentieres det paa den gemeene Maade, hvorved faaes $M = dL$, eller

$$\alpha+\beta\frac{dy}{ds} = d\left(A+B\frac{dy}{ds}\right)$$

saaledes, som Spørsmaalets Natur udi alle deslige Tilfælde det udkræver.

Oplø-

Oplosning af Linien af det hastigste Fald.

Da her spørges om den Linie, udi hvilken iblant alle, som have samme Abscisse, Tiden skal være den samme, og Tiden igiennem CA er $\frac{ds}{\sqrt{x}} = E$. Differentieres da E efter No. 1, ved at sætte $dds = \frac{dy}{ds}$, faaes $A + \frac{Bdy}{ds} = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$.

Differentierer man E, eller $\frac{ds}{\sqrt{x}}$ igien paa den Maade, som før er bleven sagt i No. 2. Da siden ds og x ere bestandige, bliver $d.\frac{ds}{\sqrt{x}} = 0 = \alpha + \beta\frac{dy}{ds}$. Følgelig er $d\left(A + B\frac{dy}{ds}\right) = 0$, og derfor $A + B\frac{dy}{ds}$ selv en bestandig Størrelse, det er $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$ er en bestandig Størrelse, som skal være en Function af samme Slags, med $\frac{dy}{ds\sqrt{x}}$, og derfor $= \frac{1}{\sqrt{B}}$. Saaledes bliver Ligheden til den søgte krumme Linie $\frac{dy^2 B}{x} = dx^2 + dy^2$, eller $dy = \frac{dx.\sqrt{x}}{\sqrt{B-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{Bx-xx}}$, som er Ligheden til Cykloiden.

Thi $\frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{xdx-xdx}{\sqrt{ax-xx}} - \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}} = \sqrt{ax-xx} - \int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}$

og derfor er $\int\frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}} - \sqrt{ax-xx}$.

Er da (Fig. 9. Taf. 2.) ACE en halv Cykloide, BDE den halve Cirkel, af hvis Punkt i Peripherien E den beskrives, AO =BH

$= BH = x$, da bliver $BD = \int \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax - xx}}$, naar $BE = a$; og bliver saaledes $y = BD - DH$.

Da nu i Cykloiden $CD = ED$, saa er, fordi $AB = BDE$, $AI + FB$, det er $OC + FB = DB$, følgelig og $DB - FB$, det er $DB - DH = OC = y$, hvoraf sees; at denne krumme Linie, som vi søgte, haver de gemeeneste og mest bekiendte Egenskaber af Cykloiden.

Man kan paa samme Maade, og efter selvsamme Regler opløse en stor Mængde andre Spørsmaal af samme Natur. Imidlertid opløse disse Regler dog ikke alle Isoperimetriske Tilfælde. Men da den hele Isoperimetriske Materie er alt for vidtløftig til at blive her forklart, kunde Læserne, angaaende de Tilfælde, som indeholde endnu flere Betingninger, efterslaae: *Jac. Bernoulli Opera.* Tom. 2. *Joh. Bern. Opera.* Tom. 2. *Acta Petropolit.* Tom. VI. og VIII. men i sær *Eulers solut. Problemat. Isoperimetrici, latissimo sensu accepti.*

Fierde

Fierde Forelæsning.

Beviis tagne ved Erfaring paa de forhen anførte Naturens Love i Henseende til Tyngden. Videre: om den ensdan forsinkede Bevægelse. Om de svingende Tyngders, eller om Pendulernes Bevægelse.

§. 83.

De forhen anførte Love for Tyngden ere af saa stor Vigtighed, at man kan aldrig blive formeget forvisset om deres uimodsigelige Rigtighed og Sandhed. Vi have, for at udfinde disse Love, antaget, at Tyngden var en Kraft, som bestandig virkede ensdan, og uforanderlig paa samme Maade drev Tingene. Vi have beviist, at denne Sags Theorie var umodsigelig, ikke destomindre er det got, at see en Sag af den Vigtighed bekræftet ved Erfaring, og det er det, hvilket vi her ville giore. Ved ligefremgiorte Erfaringer kunne Tyngdens Love ei findes.

Da Luften staaer imod. Da dens Modstand imod de Ting som falde, bliver alt større og større, eftersom Hastigheden af Faldet selv bliver større til, saa seer man let, at det var ikke mueligt, med tilforladelig Vished at undersøge disse Love ved simpel hen at lade Tingene falde ned efter, og ved at iagttage Tiderne, i hvilke Faldet stod paa. De Feil og

Urigtigheder, som i Forsog af den Beskaffenhed maatte indlobe, seer man let, burde blive saa mange, at man af de giorte Forsog intet Tilforladeligt skulde kunde slutte.

§. 84.

Men vel ved Erfaringer giorte i Cykloiden.

Uden den hoiere Geometrie, uden en meer end almindelig Indsigt i denne Videnskab, var det umueligt, at stadfæste den Grundvold, hvorpaa al Mechanik maa bygges. Man faldt paa at betragte Cykloiden, og fandt i den alt, hvad der behoves til en saa vigtig Undersogning.

Men for vi nærmere forklare, hvad ved Cykloiden i denne Henseende kan udrettes; maa man erindre sig, hvad vi forhen i andre af vore Forelæsninger have sagt, at denne Linie (Fig. 9. Taf. 2.) beskrives af et Punkt E i Peripherien af en Cirkel BDE, imidlertid at BDE velter sig hen over BA.

§. 85.

En denne Linies mekaniske og en dens geometriske Egenskab ansores.

Vi ville her ikke videre indlade os i de prægtige geometriske Egenskaber af denne Linie, hvorpaa alle dens mekaniske grundes. Vi ville alene agte, i Henseende til disse sidste, at man kan bevise:

1) At dersom ACE er en omvendt Cykloide, hvis Spitse er E, AB horizontal; da hvad heller af en tung Ting smaa eller store Buer, som AE eller CE eller KE igiennemlobes, skeer Faldet igiennem dem alle altid i samme Tid. (*)

2) Læng-

(*) Dette er beviist i Tillæggene §. 38.

2) Længden af Cykloidens krumme Linie ACE er saa stor som 2BE, eller som to gange Diametern af den Cirkel, der beskriver Cykloiden.

§. 86.

Beskrivning af det Instrument, som kaldes Cykloiden og dets Brug.

Dette forudsat; forstaaes let Brugen af det Instrument, som vi kalde Cykloiden, og hvorledes vi ved det kunde bevise Lovene af de tunge Tings Fald ved en øiensynlig Erfaring (Taf. 3. Fig. 1.).

Instrumentet er *o*CH*h* eller en Udhulning af en halv og omvendt Cykloide. A*ch* er en anden Udhulning, i alt ligedan, som den forrige. Fra *h* og H af lobe lige Linier, eller rettere, horizontale Planer *h*HDB og HDKQ. Instrumentet hviler paa 3 Skruer, ved hvis Hielp det kan sættes horizontal; dets horizontale Stilning kiendes deraf; at et Lod P, som kan vindes op og ned i S, falder lige over et i P tegnet Punkt.

I begge Cykloiderne ere adskillige Punkter merkede til at giøre adskillige Forsøg efter over de tunge Tings Fald. Ere to af dem E og G, og fra dem Linier nedkastede paa den horizontale Linie, der stryger Cykloiden, EF og GL begge Verticale og i Størrelse under sig, som 9 og 4. Da er det klart af §. 79, at den Hastighed, som vindes ved Faldet igiennem Cykloidal-Buen EH, er $= \sqrt{EE}$, og den, som vindes ved Faldet igiennem den anden Cykloidal-Bue, C*h*, er som $\sqrt{CL}$, §. 79. Følgelig, om to tunge Ting falde fra E og C i disse Cykloider, da blive Hastighederne i Enden af Faldet, i de horizontale Punkter, nemlig H og *h*, som 3 : 2.

Fordelen af Cykloiden bestaaer da deri, at de to faldende Ting, om de paa samme Tid begynde at falde fra E og G, komme begge tillige og paa en Tid til de horizontale Punkter H og *h*, hvorpaa de siden lobe med en eensdan Hastighed hen over de horizontale Rum efter *h*B og QK. Tages disse Rum under sig som 2 og 3, da i samme Øieblik, som den ene Tyngde slaaer an i *t*, slaaer den anden an i R, om *ht*:HR = 2:3.

For desto bedre at forvisse sig om Rigtigheden af denne Erfaring, kan man giore ligedanne Forsog under adskillige deslige Høider, som EF og GL, saavelsom andre til dem svarende horizontale Rum, men i anden Forhold; da man finder altid det samme.

§. 87.

Et andet Cykloidal-Instrument og dets Brug.

Saaledes beviser man ved Erfaring, at de igiennemlobne Rum ere som Quadraterne af Hastighederne, hvilke de tunge Ting vinde ved Faldet. Men foruden denne fortrefflige Egenskab af Cykloiden, hvoraf vi i det følgende endnu skulle oftere betiene os, haver den en anden mekanisk Egenskab, den; at Cykloiden er den Linie, i hvilken en tung Ting ved at falde kommer hastigst fra Punkt til Punkt. Skiønt Nytten heraf ei er saa stor, som af den denne Linies Egenskab, at alle dens Buer igiennemlobes i samme Tid, kan jeg dog ikke undlade her at forevise et andet af vore Instrumenter, hvorved bevises, at Faldet i Cykloiden skeer ulige hastigere imellem to Punkter, end i en ret Linie trokken imellem samme Punkter. (Taf. 3. Fig. 2.) (*)

(*) Dette er bleven beviist i Tillæggene §. 53.

I Instrumentet er *abd*G en heel udhult og omvendt Cykloide, til hvilken er heftet i *a* en firkantet Lineal *a*G, udhulet i Form af en Rende. Langs hen ad Cykloiden er en Mængde Huller, hvori en Stift kan heftes, saa at over den Linealen hviler. Instrumentet kan i H, H, stilles horizontal ved Skruer, ligesom det forrige; og en Tyngde I, som maa staae lige over et Punkt K med Spitsen, viser som forhen, at Stilningen er horizontal. Lader man to Kugler falde paa samme Tid fra *a*, en over Linealen *a*G, en anden i Cykloiden *ab*S, da kommer den sidste ulige for til G end den første til S, skiont G og S kunne begge ansees som et eneste Punkt.

§. 88.

Den af Tyngden forsinkede Bevægelses Beskaffenheder.

Vi have i det forrige overlagt med hverandre, hvorledes ved de virkende Kræfters idelige Virkning Hastigheden bliver til; dersom da, naar en saadan Hastighed engang er bleven tilveiebragt, den samme Kraft, som gav den sin Oprindelse, begyndte strax derpaa at virke efter en imodsat Direktion, og for Resten paa selvsamme Maade uden Forskiel som for. Da er det klart, at Hastigheden og Bevægelsen maatte tabes paa samme Maade og i samme Forhold, som den forhen blev til.

§. 89.

Forklares.

Saasnart derfor, som den engang givne Bevægelse gaaer efter en Direktion, men de nylig omtalte Kræfters Virkning efter en anden og imodsat; da treffer just dette Tilfælde ind.

Virke de svækkende Kræfter bestandig eensdan, da kaldes Bevægelsen en ligedan svækket Bevægelse.

Saaledes; da §. 79 al Hastighed kan ansees som at være blevet til ved Faldet igiennem en vertical Linie AB (Fig. 1. Taf. 4.) saa folger, at om en Ting stiger op efter BA med en Hastighed, som ved at falde kunde vindes igiennem AB, da kan den net op stige fra B til A, saa at i A Hastigheden først = 0. Vi betragte her, ligesom for, en frie og uhindret Bevægelse. Aarsagen er i sig klar, da Tyngden ved ensdan imodsatte Pressioner maa tilintetgiore, hvad den forhen havde tilveiebragt.

§. 90.

Og endnu udforligere.

Folgelig, saa tidt som den forsinkede Bevægelse kommer af en ensdan forsinkende Kraft, som Tyngden, da folger §. 88. 89.

1) At om noget falder igiennem den krumme Linie AE, da kan det stige ligesaa hoit i enhver Linie CE, CD, som Faldets Høide AB var. Og Hastighederne ere i lige høie Punkter F og G de samme.

2) Dersom ED er en i alt lige saadan krum Linie, som EA, da er Tiden igiennem EA og ED altid den samme, ellers ikke: Siden over adskillige skraaeliggende Linier af samme Høide, Tiderne, i hvilke de igiennemlobes, forholde sig som Længderne §. 81, 4, og ere folgelig adskillige.

3) De

3) De af Hastigheden tabte Dele ere i den ensdan forsinkede Bevægelse, som Tiderne. §. 72. 1. og 89.

§. 91.

Hvorledes i den et tungt Legeme stiger, naar Hastigheden i Begyndelsen er bekiendt.

Vil man finde i en ensdan forsinket retlinet Bevægelse, hvis Hastighed i Begyndelsen er given, hvad Rum siden igiennemlobes i givne lige Dele af Tiden; da haver man alene nodig (Fig. 1. Taf. IV.) at efterregne de, som en tung Ting i Faldet igiennem den Linie AB, over hvilken ved at falde den givne Hastighed kunde vindes, skulde fra Begyndelsen af sin Bevægelse til dens Slutning igiennemlobe. De samme tagne i forkeert Orden give de sogte Rum.

Da man desuden veed, at disse Rum vore efter de uligе Tal §. 50, saa sees let, at de i den forsinkede Bevægelse maa tage af i forkeert Forhold af samme Tal.

Saaledes, om en Tings ensdanne Hastighed er til at lobe over et Horizontal-Rum 120′ i et Secund, da findes §. 57. at den Hoide, som svarer til denne Hastighed, er $\frac{120.\ 120}{60} = 240'$, og $\frac{240}{15}$ = Quadraten af Tiden §. 48. 56, saa Tiden, hvori denne Hastighed kan vindes = 4″. Da nu i samme igiennemlobes Rum, som 1 : 3 : 5 : 7, eller 15, 45, 75, 105, saa folger; at om Hastigheden i en Ting, som stiger op efter, er i Begyndelsen til 120′, da stiger den i forste Secund 105′, i andet 75′, i tredie 45, i fierde 15.

§. 92.

§. 92.

Den forsinkede Bevægelse haver Sted i Pendulerne.

En saadan Bevægelse, som den nylig omtalte, der nemlig paa samme Maade forsinkes, som den er bleven til, kommer for i Pendulerne eller i de svingende Tyngders Bevægelse. Er (Fig. 2. Taf. IV.) CD en uboielig Linie, i hvis Ende D er et tungt Punkt, saafremt da at samme henges op udi C, saa CD frit kan svinge i den Bue EDF frem og tilbage, da kaldes D **en svingende Tyngde, eller en Pendule, og dens Sving igiennem den hele Bue** EDF **er det, man kalder Pendulens Oscillation, eller Vibration.**

§. 93.

Pendulernes Sving forklares.

Deraf sees, efter hvad der er blevet sagt §. 90, at om et Pendul loftes op til E, da synker det eller falder ned igiennem Buen ED, og stiger med den i Faldet indtil D vundne Hastighed igien op til F over Buen DF. Siden falder det igien ned efter samme til D, for at stige igien til E. Disse Sving frem og tilbage maatte blive ved uden Ophør, dersom ingen Forsinkning skede i Pendulens Bevægelse, deels af Luftens idelige Modstand, deels af Rivningen eller Modstanden i det Punkt C; hvilket, naar ikke var, blev Buen DE bestandig saa stor som DF.

§. 94.

Cykloiden udvikler sig selv.

Da Pendulernes Egenskaber ere af en uendelig Vigtighed i en Mængde Tilfælde, saavel i, som uden for Mekanik, saa tidt som det kommer an paa at kiende Tiden noie; saa kunne vi

ikke

ikke undlade at giore os bekiendt med denne Slags Bevægelse (*). Til den Ende er det nodvendigt, igien at foretage Cykloiden, for at betragte allerforst en af dens meget smukke geometriske Egenskaber, uden hvilken vi ei kunne forklare os i Henseende til den mekaniske, som vi have for at giore forstaaelig (Fig. 3. Taf. IV.).

Er da AB en halv Cykloide, FGB den Cirkel, som beskriver den, da have vi allerede sagt §. 85. 2. at Buen af den halve Cykloide AB er saa stor som 2FB. Tager man derfor en Traad, saa lang som 2FB, og slaaer samme om Cykloiden, antagende tillige, at den igien falder lidt efter lidt ud fra denne Linie, og bestandig efter Direktion af Cykloidens Tangenter, som *b*H; da beskriver Traaden ved denne Udvikling en krum Linie BHE, som bliver just den selvsamme halve Cykloide

(*) Man kan agte, at det er nueligt, at lade et Pendul AH Taf. IV. Fig. 3. svinge i hvad krum Linie BC, man vil, alene at man henger det op imellem to andre Linier AB og AC, ved hvis Udvikling den tredie BEC, i hvilken Pendulet skal svinge, kan beskrives; saaledes, som vi nu strax skulle udforligere forklare denne de krumme Liniers Udvikling, og den deraf flydende Pendulernes Bevægelse udi Cykloiden; thi vi betragte her denne Linie i sær, fordi dens og Cirklens Buer ere i disse Henseende de mest betydelige og nyttigste udi Brugen af Pendulerne, frem for alle øvrige Linier, som disse sidste kunne ved deres Sving beskrive.

Cykloide som AB, men omvendt; saa Spitsen B af Cykloidal-Linien ligger i E. Cykloiden udvikler sig saaledes selv, og dette var den mærkværdige Egenskab, som vi lovede først at forklare.

§. 95.

Et Pendul, som er hengt op imellem to Cykloider, bevæges, som om den faldt ned efter en halv saadan Cykloide og steeg igien i den anden halve.

Er A et Punkt, i hvilket Cykloiden AB er sat fast med den ene Ende; dens Tangent BD horizontal; ADE et Pendule, hvis Længde er = 2FB, da maa det ved at svinge hen ad E til, beskrive en halv Cykloide BE. Er AC en anden just ligedan Cykloide, da er det ligeledes upaatvivleligt, at Pendulen i at svinge hen efter EC, maa beskrive en ligesaadan halv Cykloide §. 94. Følgelig, at i Svinget BEC, som vi kalde det hele Sving, og det igiennem BE, eller EC derimod det halve: Pendulen eller det tunge Punkt H beskriver bestandig i sin hele Bevægelse fra B igiennem E til C en heel Cykloide. Saa det kan imidlertid ansees for at være faldet igiennem den hele Cykloide.

§. 96.

Tiden, hvori et Pendul svinger imellem to Cykloider, forholder sig til Tiden af Faldet igiennem Pendulens halve Længde, som Peripherien til Diametern.

Man beviser videre, at den Tid det tunge Punkt H bruger for at falde igiennem den halve Cykloide BE, forholder sig til Tiden af det frie verticale Fald igiennem DE, eller Diametern af den Cirkel, der beskriver Cykloiden, ligesom den halve Peripherie af Cirklen forholder sig til Diametern.

Da derfor Diametern af Cirklen, der beskriver Cykloiden, er den halve Længde af Pendulen: Saa forholder sig

og

og Tiden igiennem den halve Cykloide, til Tiden igiennem DE den halve Penduls Længde, der svinger i en Cykloide; som den halve Peripherie til Diametern, følgelig noget nesten som 11 : 7 (*).

Da videre Tiden igiennem den halve Cykloide CE er den samme, som Tiden igiennem den halve Cykloide BE §. 90. 2. saa sees; at Tiden af det hele Sving igiennem BEC, maa være til Tiden af Faldet igiennem Pendulens halve Længde DE, som Peripherien til Diametern, eller noget nesten som 22 : 7.

§. 97.

Af det, som er blevet sagt §. 94, kan man strax see, at Pendulet AE, (F. 3. Taf. IV.) maa omkring ved E, i det den beskriver Cykloiden, beskrive Cirkel-Buer, da derfor Tiderne igiennem Cykloiden og dens mindste Buer ere de samme, saa maa og

Det samme gielder endnu, naar Pendulen svinger frit i smaa Cirkel-Buer.

1) Tiden igiennem meget smaa Cirkel-Buer være den samme, ligesom igiennem smaa Cykloidal-Buer.
2) Tiden af Svinget igiennem en Cirkel-Bue af liden Størrelse, maa være den selvsamme, som Tiden i Cykloiden selv, nemlig Tiden igiennem Buen EDF Fig. 2. Taf. IV.) maa være til Tiden igiennem Pendulens halve Længde $\frac{1}{2}$CD, som Peripherien til Diametern, som 22 : 7.

(*) Dette er beviist i Tillæggene §. 35, og i samme Tillæg er ligeledes alt det herhid hørende beviist.

3) Følgelig kan man i Pendulernes Sving altid betiene sig af smaa Cirkel-Buer, i Steden for de Cykloidale, hvilket i Brugen er meget bequemt. Thi de Cykloidale Penduler have den Ulejlighed, at, siden de tvende cykloidale Plader, imellem hvilke de henge, ere elastiske eller fiederhaarde, saasnart da Pendulet slaaer lidt stærk an paa dem, give de et Igjenslag og bringe Pendulet derved i Urigtighed. Men man gior vel i, saasnart som løse Penduler bruges, der svinge i Cirkel-Buer, da at bruge dem af nogen anseelig Længde, fordi de da ei let lobe ud over en Bue af 15 til 18° i deres hele Sving; desuden gior man vel i at bruge Lod i Enden af tung Materie, thi de Lettere svekkes snarere af Luften. Man gior dem i denne sidste Henseende og Lenticulaires, eller af Figur som Linser.

4) * Endelig kan agtes; at Tiden, som et Legeme falder igiennem Buen er kortere end Tiden, i hvilken det falder igiennem Chorden. Thi kaldes Tiden af et heelt Sving igiennem Buen T, igiennem Pendulets halve Længde t, da er $T:t=p:d$, og $t=\frac{dT}{p}$. Men Tiden igiennem Chorden er den samme som Tiden igiennem Diametern §. 76. 82; følgelig maa den Tid søges, som svarer til Faldet igiennem fire gange Pendulets halve Længde.

Da nu de igiennemlobne Rum af Tyngden ere som Quadraterne af Tiderne §. 47, kaldes da Pendulets dobbelte

dobbelte Længde L, saa bliver: $\sqrt{\frac{1}{4}L} : \sqrt{L} = \frac{dT}{p} : \frac{2dT}{p}$, som er Tiden igiennem Diametern, eller hvilket er det samme igiennem Chorden: Sættes $d:p = 7:22$ er denne Tid $= \frac{14}{22}T$, hvilken maa tages dobbelt, om Tiden igiennem Chorden skal sammenlignes med Pendulens hele Sving, saa Faldet skeer igiennem en Chorda, og Stigningen over den anden. Skulde et heelt Sving derfor skee af Pendulen først ned af en Chorda siden op af den anden, saa blev Tiden $\frac{28}{22}T = \frac{14}{11}T$, men Tiden af det hele Sving igiennem Buen er T. Altsaa forholder sig Svinget over Chorderne til Svinget over Buen $= \frac{14}{11} : 1 = 14:11$. Derfor er og Tiden af Svinget igiennem Chorderne længere end Tiden igiennem Buen, hvilket og bør være, siden Cirkel-Buen heri §. 97. 2. er som Cykloiden, og denne sidste er Linien af det hastige Fald. §. 87.

Femte Forelæsning.

Om Tyngdens Center.

§. 98.

Hvad Tyngdens Center er.

For vi gaae videre fort i vore Betragtninger over Pendulerne, er det tienligt, først at tale om det saa kaldte Tyngdens Center. Vi have i det foregaaende (F. 2. Taf. IV.) i Pendulerne ikke betragtet uden et Punkt D, som var tungt; henges i D en liden Tyngde for at drive Pendulen, da er det Punkt D noget nesten den i D fæstede tunge Tings Tyngdes Center. Og man maa agte, at ved **Tyngdens Center forstaaes det Punkt i en Ting, paa alle Sider af hvilket dens Vægt er lige stor, og det i alle Stilninger i, over og under Horizontal-Linien** (*)

§. 99.

(*) Man kan agte, at et saadant Punkt, som det vi her have kaldt Tyngdens Center; i hvilket nemlig, naar et Legeme er bestandig ophengt, det da altid skulde hvile og beholde den givne Stilning, hvad heller at det laae horizontal med eller skiev imod Horizonten: Et saadant Punkt findes ikke i Tingene, naar Tyngden er bestandig, med mindre at dens Direktioner kunne ansees at være parallele. Følgelig, da Direktionerne af Tyngden virkelig løbe sammen enten udi Jordens

§. 99.

Erfaring lærer uimodsigelig, at et saadant Punkt findes i alle de tunge Ting, og intet er lættere end ved en ligedan Erfaring at bestemme Tyngdens Diametrer. Ved disse Linier forstaaer man enhver Linie, som i Legemerne gaaer igiennem Tyngdens Center.

Et saadant Center forekommer i alle Ting. Hvorledes det i Legemerne paa en mekanisk Maade kan bestemmes.

For

dens Center, eller strax ved samme (siden Jordens sphæroidiske Figur fast er Sphærisk) saa er det i Theorien ikke sandt, at de tunge Ting have et Tyngdes Center, som passer til alle Stilninger, men alene for saavidt, at man i Brugen kan betragte Distancerne fra Centret, som at være saa uendelig langt borte, saa de i Henseende til alle de Ting, der ere af meget liden Udstrekning, kunde ansees som parallele.

For derom at overbevise sig, behøves intet andet, end at betragte to Partikler af et Legeme i A og B (T.V.F. 2.), som drives af bestandige Kræfter imod et Center D, og hvis Masser vi ville kalde A og B. Antager man dem først, som at staae udi Ligevægt over den horizontale Linie AB og at have i C deres fælles Tyngdes Center; Men siden, som om A kom i den Stilning, som *acb*. Da om de i den horizontale Stilning ACB skulde staae i Ligevægt sammen, maa §. 68 Pressionerne, (det er Vægten i A og B) forholde sig til hverandre, som $ce : cd = A : B = \text{Sin. } x : \text{Sin. } o$, om $CDA = o$ og Vinklen $CDB = x$. Ligge de derimod i den Stilning som *acb*: da for at Ligevægten kan have Sted,

maa

For at bestemme disse Linier, haver man alene nodig (Taf. IV. Fig. 4.) at legge den Ting GEHK, hvis Tyngdes Center man vil finde over en skarp Kant eller Linie. For Exempel, over den skarpe Side AD af et Prisma ABCDM, og over samme at skyde det frem og tilbage, saa længe til den Deel

---

maa A : B = *cq* : *cf* = Sin. CD*b* : Sin. CD*a*; Følgelig skulde altid blive Sin. CD*b* : Sin. CD*a* = Sin. *x* : Sin. o, om i alle Stilninger Ligevægten skulde have Sted, hvilket da ikke kan være, som let sees, saa er heller intet Tyngdes Center egentlig mueligt, naar Tyngden er en bestandig Kraft, som søger imod et Center.

Alene i det ene Tilfælde, da Centret D ansees som uendelig langt borte imod Længden AB, bliver bestandig Sin. CD*b* : Sin. CD*a* = Sin. *x* : Sin. o. Følgelig er og alene i denne Hypothese (hvilken er den samme med den af de parallele Direktioner) et egentlig Tyngdes Center mueligt; og man seer uden Møie, at dette Center da maa have Sted under alle Hypotheser af Central-Kræfter, fordi de i en uendelig Distance fra Centret altid kunde ansees som bestandige og Inertierne proportionerte.

Derimod er det klart, at til enhver given Stilning uden for den horizontale kan et andet Punkt F bestemmes, som i Henseende til A og B bliver Tyngdens Center. Fordi dertil behøves alene, at Vinklen *a*D*b* ved den Linie DF saaledes deles, at Sin. *x* : Sin. o = A : B, hvorved det Punkt F i denne Stilning bliver Tyngdens Center.

Deel GI staaer i Ligevægt med den Deel IK; saa bliver IF enten en Diameter af Tyngden, om det er i en simpel Figur at Tyngdens Center søges, eller en Linie parallel med Diametern af Tyngden, om det er et Legeme. Paa samme Maade findes en anden Linie LM, hvilken paa for sagte Maade enten er en Tyngdens Diameter, eller med den parallel. Folgelig er i N, hvor disse to fundne Linier i de simple Figurer overskiere hverandre Tyngdens Center. §. 98. I Legemerne derimod, som have en Tykkelse, maa man paa to Sider finde et saadant Punkt som N.

Ere to deslige Punkter givne; da, siden den verticale Direktion er Direktionen af Tyngdens Center §. 40. saa findes af den uden Vanskelighed dette Punkt. Man haver alene nodig at forestille sig Verticalerne fra disse Punkter (naar nemlig hvert af dem for sig, vender ned efter) som trokne, og som de, der overskiere hverandre inden i Legemet i det tredie Punkt, saa er dette sidste Tyngdens Center.

Denne Oplosning er almindelig, og af den forstaaes, at saa tidt som et Legeme er et Parallelopipedum, eller og af lige Snit heel igiennem, og overalt af eensdan Materie, at da Tyngdens Center falder i Midten af den Linie, som gaaer igiennem Punkterne N, fundne paa dets imodsatte Sider.

§. 100.

Ting ophengte eller understøttede i deres Tyngdes Cen-

Man seer deraf. At dersom (Fig. 5. Taf. IV.) en tung Ting AB, der kan falde frit, henges i Tyngdens Center op i den Linie DC; eller om Tyngdens Center C, eller et Punkt i dets

ter, hvile i alle Direktioner.

Direktion, understøttes af CEF, da maa i den første Tilfælde den Ting AB henge i skraae eller horizontal Stilning, som man vil, uden at dens ene Deel kan overveie den anden. I den sidste Tilfælde maa det Punkt C, hvorpaa Centret af Tyngden hviler, bære den hele Tyngde, og den ene Deel af Tyngden paa den ene Side af C kan da ei overveie den anden paa den anden Side. Thi Pressionerne staae i Ligevægt sammen, naar de ere lige store og virke efter imodsatte Direktioner §. 29.

Da, for at Legemet skal kunde hvile, det er nok, naar et Punkt i Direktions-Linien af Tyngdens Center understøttes, saa behoves alene at finde et eneste af de i §. 99 omtalte Punkter N, og at understøtte det, for at bringe Legemet til at hvile.

§. 101.

Tyngdens Center kan sættes i Steden for den hele tunge Ting.

Saa tidt som Centret af Tyngden hviler, uden at kunde bevæges, maa den hele tunge Ting hvile, følgelig kan man ansee dens hele Vægt, som forenet i dette Center, siden det Punkt, som bær det, maa anvende en Styrke til at bære saa stor som den hele Tyngde §. 100.

§. 102.

Anmerkning, de Underlag angaaende, som understøtte de tunge Ting.

Saa tidt derfor, som Tyngdens Center ei kan bevæges, kan den hele Ting ei heller bevæges eller falde. Man sætter derfor sædvanlig Tingene saaledes over de horizontale Underlag A og B (Fig. 6. Taf. IV.) som skulle bære dem, at Centret

tret af Tyngden C falder imellem dem begge. Er Tingen da ei boielig, maa den nodvendig hvile, fordi Tyngdens Center C ikke meer kan falde, men hviler.

Man seer let, at de bærende Underlag A og B her atter igien maa have en Styrke til at staae imod med saa stor, som Vægten af det, der bæres. §. 100.

§. 103.

Saa længe som Direktions-Linien af Tyngdens Center falder over Grund-Linien af et Legeme, kan det ei falde; om Tyngden virker frit i Verticalen uden Hindring.

Virker Tyngden frit, yttrer dens hele Virkning sig bestandig efter Verticalen §. 40, og man kan i Steden for hele Materiens Vægt tage Centret af Tyngden. §. 101. Deraf er det fremdeles klart, at saa længe som Direktions-Linien af Tyngdens Center kastet ned paa den Grund-Linie, hvorpaa Tingen hviler, falder over denne Grund-Linie, da kan Tingen ei falde, eller glide, i hvorledes den end inklineres over et horizontal Plan. Saafremt derimod, at denne Linie falder uden for Basis af Legemet, maa det nodvendig falde forover, saa længe til dette Center understottes; siden Centret af Tyngden da ingen Hinder finder i at falde efter Verticalen, og paa dets Bevægelse den hele Materies Bevægelse beroer. §. 102.

Deraf forstaaes let, at der intet besynderligt er i, at de beromte Taarne til Pisa og Bologna ikke falde, uagtet, at de staae skievt paa Horizonten; thi Vertikalen eller Perpendiklen fra Tyngdens Center i disse Taarne falder et stort Stykke ind over deres Basis. Det samme kan agtes i Henseende til Dyrenes Bevægelse. Paa hvad Deel af Legemet endog at det ovrige Legeme hviler, da ere de frie for at falde, saa længe

som Direktions-Linien af deres Tyngdes Center falder over denne Basis. Jo bredere den er; jo længere Vei denne Direktions-Linie haver at bevæges over, for den kan falde uden for sin Basis; desto sikrere hviler Legemet, og desto vanskeligere stodes det om. Jo mindre derimod, at denne Basis er, jo kortere den Vei er, som Direktions-Linien af Tyngdens Center kan beskrive, for den falder uden for Basin; desto lettere stodes et Legeme om, og desto nærmere er det ved at falde. Det derfor, som vi finde forunderligt i Balancer-Kunsten, haver alene deraf sin Oprindelse, at vi finde Vanskelighed i at troe, at Tyngdens Center i de Legemets Stilninger er understottet, udi hvilke det falder paa eller imod de yderste Grendser af Basis.

Vi ville derved ikke opholde os, men iagttage to andre Anmerkninger.

1. At saa tidt som Tyngdens Center enten aldeles ikke er understottet, eller ei uden tilveels, men kan falde, saa maa og altid Legemet selv falde efter den Kant, hvorhen, efter at Tyngdens Center kan falde, og at derfor

2. Saa tidt Bevægelsen af Tyngdens Center ei er frie, det er, saa tidt dette Punkt hindres i at falde efter Verticalen, men dog derfor ikke hindres i at falde efter andre Direktioner, ligesaa tidt kan det hele Legeme falde, uagtet at Verticalen fra Tyngdens Center falder over Basin. Saaledes glide de tunge Ting ned efter de skraaeliggende Planer, endskiont at Direktions-Linien fra Tyngdens Center falder over Basis. Thi som vi have seet §. 71. driver i denne Stilning

en

en Deel af Tyngden Legemet hen efter Planets Direktion. Centret af Tyngden haver da en dobbelt Drift, og maa derfor, om det skal hvile, holdes af en Kraft parallel Planet; skiont det ei kan falde for over, saa længe som Verticalen fra Tyngdens Center falder over Basis.

§. 104.

De høie Ting af samme Grund-Linie falde lettere, naar de helde, end de lave.

Man kan deraf altid vide, hvad heller at en Ting i en given Stilning kan paa et horizontal Plan staae, uden at falde eller ikke. Man seer desuden videre, at dersom Ting, som hvile, komme i Sving eller til at helde over, da falder det Høiere ulige lettere ved en og den samme Vinkel-Bevægelse, end det Lavere. Saaledes, (Taf. IV. Fig. 7.) om ABLK er et lavt, ABGF et høit retvinklet Parallelogram, da falder det sidste ulige lettere for over end det første: thi bevæge begge Parallelogrammerne sig tillige om det Punkt B, da sees; at naar Verticalen eller Perpendiklen fra Tyngdens Center C i AFGB, som nu er i den Stilning *afgb*; falder efter *d*M langt hen over Basin i M, da falder Perpendiklen fra Tyngdens Center i KLBA, som nu staaer udi den Stilning K*l*B*a* over Grund-Linien eller Basis udi H. Følgelig bevæger den første sig ulige stærkere til at falde uden for Grund-Linien AB, end den sidste; naar ellers Vinkel-Bevægelsen er i begge den samme.

Dette bestemmes videre.

* Vil man i dette Tilfælde bestemme noiere, hvor stor Vinkel-Bevægelsen kan være i begge de tunge Ting, før de falde, for deraf at slutte, hvorvidt man kan vove dem i at helde over, saa de endnu kunne komme alene paa den yderste

Grændse af Faldet, men dog desuagtet staae, og siden falde tilbage igien; Da haver man alene nodig, at kaste Øinene paa Figur 7 og 8, som viser, at naar fra begge Tynders Center C og D, de Linier CB og DB trekkes, da er Sin. BDC = CB, og Sin. BCH = DB. For nu at finde den yderste Grendse, paa hvilken Tingene i deres største Vinkel-Bevægelse over Buerne D*m* og CL kunne staae, uden at falde, maa agtes: At saa tidt som Bevægelsen antages at skee om det Punkt B, da naar Centret af Tyngden C i ABLK haver bevæget sig i Buen LC, staaer det paa sin yderste Grændse til at falde; og ligeledes, naar Centret af Tyngden D haver beskrevet Buen D*m*, staaer det paa sin yderste Grændse i samme Henseende. Men HCB = CBG, og HDB = DBG. Folgelig kan KLBA, for det falder, net op beskrive den Vinkel HCB, og AFGB den Vinkel HDB, hvilke Vinkler bestemmes, ved at lade Perpendiklerne fra Tyngdens Centrer falde ned paa Grund-Linierne, og fra samme Centrer af at trekke andre Linier hen til det yderste Punkt af Grund-Linien, paa hvilken Tingen hviler. Man seer deraf videre:

1) At da Fig. 8. Sinus af Vinklerne HCB og HDB ere som DB og CB, kaldes da Høiderne af Tyngdens Centrer DH, H; CH, *h*; disse Centrers Brede at hvile paa HB, *b*, da blive disse Sinus = $\sqrt{H^2+b^2} : \sqrt{h^2+b^2}$, folgelig, jo større Høiden H er, desto hastigere falder Tingen, om Basis eller Grund-Linien er den samme, siden Sinus af Vinkel-Bevægelsen bliver da mindre.

2) Da

2) Da $\frac{b}{h}$ er Tangenten eller Rore-Linien til Vinklen HCB, saa sees; at jo større Grund-Linien b, og jo mindre Høiden af Tyngdens Center over Grund-Linien h bliver, desto større bliver Tangenten, følgelig og Vinklen, hvorunder de tunge Ting kunde helde, for de falde.

§. 105.

Tyngdens Center bestemmes i et Triangel.

Vi have seet, hvorledes Centret af Tyngden kan bestemmes ved Forsøg eller paa en mekanisk Maade §. 99. Vi ville fremdeles oplyse, hvorledes man kan i adskillige Tilfælde finde dette Punkt ved den simple Geometrie, og vi ville derpaa give et Par Exempler, af hvilke vi ville siden betiene os i det Følgende. Det første bestaaer i at finde Tyngdens Center i et Triangel, naar denne Figur antages overalt at have en eensdan Vægt i alle sine Dele.

Er da (Taf. IV. Fig. 9.) ADB et Triangel, hvis to Sider AB og DB ere i C og F blevne overskaarne udi to lige store Dele. Da veed man, at den Linie DC skiær alle de, som *ab*, der ere trokne ligelobende med AB, udi to lige store Dele, saa derfor DC er en Diameter af Tyngden, og man seer paa samme Maade, at AF, der overskier alle, som *gh*, parallele DB, udi to lige store Dele; er en anden Diameter af Tyngden: Saa derfor det Punkt *e*, hvor disse Diametrer overskiære hverandre, maa være Centret af Tyngden. Altsaa er tilbage at undersøge, hvad Deel Linien *e*C er af Linien DC.

Trek-

Trekkes PC parallel med DB, da ere Trianglerne P*e*C og D*e*F ligedanne Triangler, og D*e*:*e*C = DF:PC. Men da APC og AFB ere og ligedanne Triangler, og AC = ½AB, i Følge Constructionen, er PC = ½BF = ½DF, følgelig og *e*C = ½D*e* = ⅓DC.

Saa man seer, at i Trianglet ligger Tyngdens Center i hvad for en, man vil, af de Linier, som trekne fra en af Spitserne overskiere den overliggende Basin af Trianglet i to lige Dele; og det falder i denne Linie ⅔ fra Spitsen eller ⅓ fra Basis.

§. 106.

Ligeledes og i Cirkel-Buerne.

Det andet bestaaer i at finde Tyngdens Center for enhver given Cirkel-Bue. Til den Ende ville vi først vise, hvorledes dette Center kan findes for Omkredsen af saa mange lige store Korder i en Cirkel, som man vil, naar de stode paa hverandre.

Er da (Taf. IV. Fig. 10.) i den Cirkel-Bue ABCDE, AB = BC = CD = DE de omtalte Korder i Cirklen. Da er det klart, om de deles i lige Dele udi *a*, *b*, *c* og *d*, og de overalt ansees som eens tunge, bliver i *a*, *b*, *c*, *d* deres Tyngdes Center. Trækkes derpaa Linierne *ab* og *cd*, for igien at deles i to lige store Dele udi *e* og *f*, da bliver atter igien i *e* det fælles Tyngdes Center for AB og BC, og i *f* ligeledes det fælles Tyngdes Center for CD og DE. Trækkes igien den Linie *ef*, da naar samme deles igien i lige Dele udi *g*, bliver det Punkt *g* det fælles Tyngdes Center for samtlig

lig Korderne AB, BC, CD, DE, og dette Center kan ligeledes bestemmes for saa mange deslige Linier, som man vil.

For nu at bestemme videre det Punkt *g*, i Henseende til Halv-Diametern GC, behoves alene at trække den Linie G*d*, som staaer perpendikulær paa DE, fordi DE er i *d* deelt i to lige Dele; og ligeledes Halv-Diametern GE med Strengen eller Korden CE. Da man let seer, at *fd*G og DFE blive ligedanne Triangler, fordi ved F og *f* ere rette Vinkler, og Vinklen i Peripherien DEC staaer paa en dobbelt saa stor Bue, som Vinklen i Centret DG*d*. Saaledes bliver DE:EF = G*d*: G*f* og 2DE: 2EF = G*d*: G*f*, det er: CD + DE: CE = G*d*: G*f*. Videre; da Trianglerne CEH og G*fg* ere ligedanne Triangler, fordi ved *g* og H ere rette Vinkler, og Vinklen i Centret CG*f* ei staaer uden paa halv saa stor en Bue, som Vinklen i Peripherien GEH, saa er CE: EH = G*f*: G*g*. Folgelig, da og er CD + DE: CE = G*d*: G*f* efter den forrige Proportion; saa bliver CD + DE: CH = G*d*: G*g*, og derfor 2(CD + ED): 2EH = G*d*: G*g*; eller AB + BC + CD + DE: EA = G*d*: G*g*, hvoraf folger:

a) At da man kommer til samme Slutning, i hvor mange Strenge, som CB, man end i lige Antal tager paa begge Sider af en Halv-Diameter CG, om man derfor betragter en heel Bue ACE, som at bestaae af utallige deslige smaa Korder, saa man den hele Sum af samtlig disse smaa Sider, det er, den hele Bue ACE, forholde sig til sin Chorda AE, som sig forholder Perpendiklen paa en af disse Korder, hvil-

ken i dette Tilfælde er Halv-Diametern, til Buens Tyngdes Centers Distance fra Cirklens Center.

b) **Folgelig bliver; som den halve Peripherie til Diametern, saa Halv-Diametern igien til den halve Peripheries Tyngdes Centers Afstand fra Cirklens Center.**

§. 107.

Ligeledes for Cirkel-Snittene.

* Er Tyngdens Center funden for Buen, bliver det siden overmaade let at finde samme for hele Cirkel-Snittet fra Centret (Taf. IV. Fig. 11.). Thi anseer man det hele Cirkel-Snit AEB, som at bestaae af en utallig Mængde ligesidede eller isoskele Triangler, som *fg*E, *gh*E, *hi*E, o. s. v. da er det af det forhen sagte §. 105 øiensynligt, at Stedet, hvori alle Tyngdens Centrer for de smaa Triangler *fg*E o. s. v. samles, er en Cirkel-Bue CKLD, hvis Halv-Diameter $= \frac{2}{3}$AE. Folgelig, om for denne Bue Tyngdens Center atter søges, faaes efter §. 106. a. CKD til Korden af CD som CE til det søgte Centers Distance fra E. Eller og (hvilket er det samme) $\frac{2}{3}$A*g*B til $\frac{2}{3}$AB $= \frac{2}{3}$AE til dette Centers Distance. Det er, AGB: Korden AB $= \frac{2}{3}$AE til den søgte Distance, hvoraf følger:

a) **At Buens Tyngdes Centers Distance i Sector af Cirklen forholder sig til den hele Sectors Tyngdes Centers Distance, naar begge regnes fra Cirklens Center** E, **som** 3 : 2.

b) Og

b) Og fremdeles. At Halv-Cirklens Tyngdes Centers Distance fra Cirklens Center er $\frac{3}{8}$ af Diameterns Quadrat, divideret med Peripherien.

§. 108.

Vi maa endnu fortsætte den Lærdom om Tyngdens Center. Vi have endnu ikke seet dets Henseender til Kræfternes Ligevægt. Dette skal blive viist i følgende Forelæsning. Vi ville her til Slutning alene agte den Forskiel, som er imellem Tyngdens og Størrelsens Center. Ved dette sidste forstaae vi det Punkt i de tunge Ting, hvorfra de i Henseende til deres geometriske Indhold deles i to lige Dele, enten af et Plan, som overskier det Korperlige; eller af en Linie, som overskier de simple Figurer. Ved det første derimod, efter det, som allerede sagt er, see vi paa at dele Tingene efter deres Vægt i lige Dele, Legemerne ved Planer, Figurerne ved Linier. §. 99. Hvad Størrelsens Center er.

Saa meget forstaaes strax, at Tyngdens og Størrelsens Centrer falde i et og det samme Punkt, saa tidt, som Tingene ere reguliere Legemer, eller Parallelopipeda, eller have som Kuglen i egentlig Mening et Center, og ere desuden overalt af lige tunge Dele.

Men i denne Anledning er det got at agte, hvor Tyngdens Center falder i endeel Legemer, nemlig: Tyngdens Centers Bestemmelse i adskillige Legemer, nemlig

1) I alle Parallelopipedis, som tillige ere rette, seer man let, at Midt-Punktet falder midt i den Linie, som gaaer fra Midt-Punktet i den øverste Basis til Midt-Punktet i den nederste, og kan ansees som Axlen af disse Legemer: 1) i de prismatiske firkantede.

mer: Thi det Plan, som igiennem denne Linie staaer perpendikulær paa det hele prismatiske Legeme, deler det i to lige Dele, og deles igien selv i to lige Dele af den Linie, som gaaer igiennem Midt-Punkterne af begge Bases. Følgelig maa saavel Størrelsens som Tyngdens Center falde midt i denne Linie.

Saaledes, om (T. VI. F. 10.) *abhkd* er et ret Parallelopipedum, da ved at trekke, som Geometrien lærer, Diagonalerne *ac*, *bd*, findes Midt-Punktet i den øverste Basis *e*, og i den nederste ligeledes Midt-Punktet *g*, ved at trekke Diagonalerne *hk*, *or*. Understøttes da Legemet udi *e*, *g*, eller paa Midt-Punkterne af Siderne, som ligeledes faaes ved Diagonalernes Trekning, da hviler det.

2) I de rette triangulære prismatiske.

2) I de rette triangulære prismatiske Legemer findes Tyngdens Center i Basis ikke som for ved Størrelsens Center, thi disse to Punkter ere i Trianglet ikke et og det samme, men man maa (T. VI. F. 12.) søge Tyngdens Centrer *e* og *g* udi Bases øven og neden, nemlig udi *abc* og *dor*, da Midtpunktet *f* af Linien *eg* er Tyngdens Center i Prisma.

Men Tyngdens Center udi Bases findes let af §. 105. Ved at søge ligeledes Tyngdens Centrer i Grund-Fladerne af alle andre rette prismatiske Legemer, eller og paa tvende af deres Sider, som man veed, ere altid Parallelogrammer, kunde Diametrerne af Tyngdens Center i dem altid bestemmes. §. 99.

3) I de rette Cylindrer er derfor ligeledes saavel Tyngdens som Størrelsens Center i Midten af Axlen.

4) I Tillægget beviſes, og det er ikke vanſkeligt at ſee, at det ſamme gielder om alle ſkieve prismatiſke Legemer, at nemlig Tyngdes Center falder midt i den Linie, ſom gaaer igiennem Tyngdens Centrer af begge Legemets Baſes.

5) Tyngdens Center ligger i Pyramiden og Keilen, ſaa tidt de ere rette, om $\frac{3}{4}$ af Axlen borte fra Pyramidens og Keilens Spitſe. (*)

(*) Den lærde Wallis er den første, ſom haver i den første Deel af hans Verk, i det Stykke, ſom bær Titel af *Calculo Centri Gravitatis*, viiſt noget ret udførligt om Tyngdens Center. Han bruger den artige Maade af de uendelige Følger, ſom man betiente ſig af, før Integral-Regningen blev fundet. Walliſii Maade er vidtløftig, undertiden vanſkelig, og brugelig for faa, men for ſin Tid fortreflig. De Maader, hvilke vi viſe ſiden i følgende Tillæg, for ved Integral-Regningen at udregne dette Center, ſtrekke ſig ulige videre, og ere ulige lettere end de ſynthetiſke og de af Wallis.

Angaaende de ſynthetiſke Methoder at finde dette Center paa, da haves i det Stykke intet bedre, end hvad man finder hos Ozanam i hans *Cours des Mathematiques*, Tom. 4. Liv. 2. Dog ſtikker hans Beviis ſig ikke til ſtort andre Legemer, end de egentlig ſaa kaldte geometriſke, hvilke vi og deels have talt om, og deels i Tillægget paa en ſyntethiſk Maade ſkulle afhandle dem til Tieneſte, hvis Leilighed det ikke

§. 109.

Hvorfor visse Tyngder kunne bevæge sig op efter.

Den Anmerkning om Forskiellen imellem Tyngdens og Storrelsens Center behoves iblant andet, for at forstaae følgende. Vi have sagt, at Tingene maa falde, saa tidt, som deres Tyngdes Center ikke hviler. Da dette Punkt nu ei hviler over et inklinert Bret, eller en skraaeliggende Linie, uden tildeels, og derfor med endeel af Tyngden drives ned ad Linien, eller ned efter Brettet §. 71, 72, saa er intet klarere, end at de tunge Ting maa falde ned efter over alle skraaeliggende eller inklinerte Linier og Planer i Tingenes sædvanlige Fald. Imid-

---

ikke er at bekymre sig om Integral-Regningen, og dens almindelige Methoder.

Et af de Legemer, hvis Tyngdes Center Ozanam ei beviser, hvor ligger, men vel tilkiendegiver, er Pyramiden. Man kan bevise det saaledes:

Er (Taf. VII. Fig. 4.) ABCD en Pyramide, BDC dens Grund-Flade, i hvilken CF deler Basis BD udi to lige store Dele udi F, saa er i CF Tyngdens Center af Trianglet, og i det Punkt E, om $FE = \frac{1}{3}FC$ §. 105. Trekkes fra Spitsen af Pyramiden A den Linie AE, da gaaer den og igiennem alle de enkelte Tyngdens Centrer af de andre Snit, der ere parallele Basis, som *btc*, følgelig er i AE Tyngdens Center af Pyramiden.

Ansees nu ABD, som Grund-Fladen af Pyramiden, i Henseende til hvilken den lige over for liggende Spitse af Pyramiden

Imidlertid synes Erfaring i følgende Tilfælde at vise noget andet. (Taf. III. Fig. 3.) BC er et skraae Bret, hvorpaa naar legges den Cylinder A, da langt fra at falde ned efter

---

ramiden er C, da om AF trekkes, som deler Grund-Linien BD af Grund-Fladen ADB udi to lige store Dele, saa er som før i AF Tyngdens Center, og det saaledes i G, at $FG = \frac{1}{3}AF$. §. 105. Trekkes da videre CG, er den af samme Aarsag, som AE, en Diameter af Pyramidens Tyngde. Følgelig maa Pyramidens Tyngdes Center være i *o*, hvor de to Diametrer GC og AE overskiere hverandre.

Trekkes G*p* parallel FC, da ere G*po* og *o*EC ligedanne Triangler, saavelsom AG*p* og AFE, saa AG : G*p* = AF : FE, følgelig da $AG = \frac{2}{3}AF$, er og $Gp = \frac{2}{3}FE = \frac{1}{3}EC$, thi FE : EC = 1 : 2. Men, som G*p* : EC = *po* : *o*E, følgelig er $po = \frac{1}{3}oE$, og AG : AF, A*p* : AE, følgelig $Ap = \frac{2}{3}AE$.

Altsaa er $po = \frac{1}{12}AE$, og $Ao = (\frac{8}{12} + \frac{1}{12}) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}AE$. Saa deraf sees, at i Pyramiderne ligger Tyngdens Center om $\frac{3}{4}$ af den Linie AE borte fra Spitsen, og om $\frac{1}{4}$ fra Grund-Fladen. men AE er den Linie, som gaaer fra en af Spitserne af Pyramiden til Tyngdens Center i den lige over for liggende Basis.

Da Keilen er intet andet end en Pyramide, saa sluttes af det forrige Beviis, at i den ligeledes Tyngdens Center ligger i Axlen $\frac{3}{4}$ af dens Længde borte fra Spitsen.

efter Brettet, løber den meget meer op efter det, og stiger saaledes virkelig, langt fra at den skulde falde.

For at forstaae denne Virkning af Tyngden, maa man vide, hvorledes Cylindren A er giort. Den selv er af Træe, men inden i den oppe imod Peripherien A er i F lagt en anden mindre Cylinder af Blye. Centret af Storrelsen i Cylindren A er derfor midt i dens Midt-Linie, eller Axel, f. E. Fig. 4. i E. Centret af Tyngden i Blye-Cylindren er og det samme med denne lille Cylinders Storrelses Center. Folgelig falder det Center af Tyngden, som er tilfælles baade for Træe-Cylindren og for den af Blye, ulige nærmere oppe imod Peripherien, end Storrelsens Center, f. Ex. udi D. §. 108. 3.

Da nu alle de tunge Ting falde efter den Kant hen, efter hvilken at deres Tyngdes Center kan bevæge sig, §. 103. da om man, som i Fig. 4. forestiller sig i Steden for Cylindren A, den Cirkel A, der gaaer igiennem Tyngdens Centrer, som at ligge over det skraae Plan NBC, og i samme Cirkel Storrelsens Center i E, Tyngdens udi D. Var da Tyngdens Center D, det samme med Storrelsens Center E, faldt Perpendiklen fra det efter E*f*, og folgelig enten rullede eller gleed Tingen altid ned efter Planet, thi denne Perpendikel kunde ei falde i denne Tilfælde som E*b*, over det Punkt nemlig, i hvilket at Cirklen rører Planet, med mindre BN blev horizontal, som BC. Falder derimod Tyngdens Center som i D op imod Peripherien, da kan Cylindren staae stille paa Planet, om Perpendiklen fra dette Center falder just over E*b*, thi da trykker den hele Tyngde perpendikulær

paa

paa Planet, og ingen Deel af Tyngden driver ned efter Planets Direktion. Falder den derimod som Dg, da maa Tingen rulle hen, eller falde efter samme Side, som Dg eller Perpendiklen fra Tyngdens Center falder hen efter, og følgelig løbe op efter Planet. (*)

§. 110.

(*) Angaaende denne Cylinder kunde mange Anmerkninger giøres, hvoraf en Deel findes hos *Desaguliers* i hans Physik i Tillægget til den anden Forelæsning, som kan efterslaaes. Vi ville her alene agte følgende Poster.

1) At det er ikke alene over skraae Planer, men endog over det Horizontale, at denne Cylinder kan bevæge sig. Dens hastigste Bevægelse er virkelig over det Horizontale. Bevægelsen bliver langsommere alt som Planerne ere meer inklinerte, men da stiger den i Høiden.

Man forstaaer dette overmaade let, alene ved at eftertænke, at den Kraft, som driver Cylindren op ad Planet, kommer alene af den Forskiel i Tyngden, som er imellem Blye-Cylindern og en ligedan Træe-Cylinder. For saavidt nemlig, at Tyngdens Center derved bliver forrykt hen til D (T. V. Fig. 10.) og falder ei udi Størrelsens Center C; hvorover Cylindren stiger, efter det, der er blevet forklart §. 109.

Men uden at bekymre sig neiere om den neie Bestemmelse af denne Kraft, seer man strax, at i hvad den end og er, alene at den altid i sig bliver den samme; da maa, i Følge Beskaffenheden af det inklinerte Plan §. 71, dens Virkning

§. 110.

Hvad der er Aarsag i at nogle Legemer rulle og velte sig hen over de inklinerte Planer.

Man maa agte, at dersom det Plan, over hvilke Tingene blive drevne af Tyngden, ingen Modstand yttrede imod Bevægelsen; burde samtlig de tunge Ting falde hen efter de skraaeliggende Linier, som efter de verticale, skiont med adskillige

til at drive op efter, idelig blive saa meget mindre betydelig, som Planet nærmer sig meer hen ad Verticalen til; siden jo større denne Elevation bliver, med en desto større Kraft driver den hele Tyngde af Cylindren ned efter Planet; hvilken Drift ned efter omsider kan blive saa stor, saa den ganske kan tilintetgiøre den Kraft, som driver op efter.

Men da jo mindre Planet er inklinert over Horizonten, desto mindre er Cylindrens Drift ned efter, saa følger og, at den deraf kommende Modstand imod den op ad Planet drivende Kraft maa være allermindst over et horizontal Plan, saa at derfor Cylindren over det bevæges hastigst, og siden immer langsommere og langsommere, alt som Planet meer løftes op til en større Vinkel over Horizonten.

2) Sættes (Taf. V. Fig. 10.) Cylindren paa det horizontale Plan BF saaledes, at Tyngdens Center D ligger i den Linie ADB, der gaaer igiennem Centret C og Røre-Punktet D, da hviler Cylindren. Falder det derimod nok saa lidt uden for Linien CB, da ruller den hen efter BF, indtil det Punkt A, haver beskrevet en halv Cykloide AF, eller indtil i F. Tyngdens Center D falder over Røre-Punktet A, og paa sit nederste.

skillig Tyngde. §. 73. Det er; Faldet maatte altid skee saaledes, at alle Delene i Legemet bevægede sig med en eensdan Bevægelse, siden det saa var lige meget, enten enhver Partikel for sig bevægede sig ned efter Planet, eller om de

nederste i F. Men da Cylindren i Faldet fra A til F haver vundet en Hastighed, kan den ei blive staaende, men maa bevæge sig videre fort efter FG; paa samme Maade, som vi forhen have forklart det om Pendulerne §. 93: Indtil nemlig, at Tyngdens Center kommer i den høieste Stilning og A falder over D. Siden maa den bevæges med Sving frem og tilbage, indtil endelig Tyngdens Center, som i Pendulerne, bliver staaende i sin laveste Stilning udi F.

3) Deraf sees, at over et horizontalt Bret falder Tyngdens Center D i Cylindern fra en Stilning, der er fast vertical igiennem den horizontale til en anden Vertical, i hvilken det er paa sit laveste. Faldet er saaledes, naar det regnes efter Buen AmB, af 180°. Man seer let, at et Fald over saa mange Grader aldrig bliver mueligt over de inklinerte Planer; og man bestemmer ligesaa let Forhøinings-Vinklen af det Plan, (Taf. V. Fig. 13) over hvilket, saasnart som Tyngdens Center D kommer til at ligge horizontal, Cylindren ikke meer kan bevæges, men maa over dette Plan staae stille.

For at forstaae dette saa meget desto bedre, kan man agte: At om, som i Taf. V. Fig. 10. Brettet er horizontal, og man betragter Linien CD, der sammenføier Tyngdens og

Størrel-

alle i Sammenhæng bevægede sig med Hastigheden af deres Tyngdes Center. Folgelig maatte da Tingene alene glide ned efter Planet, saa tidt som dette sidste paa ingen anden Maade stod imod, end for saavidt, at det alene bar en Deel af

---

Størrelsens Centrer, som at ligge horizontal; da bliver D*d* Direktions-Linien af Tyngdens Center D og CB, eller den Linie, som gaaer fra Centret C til Rore-Punktet, begge parallele. Beholder CD sin horizontale Stilning og Planet bliver inklinert, da falder CB alt nærmere ind til D*d*, indtil at endelig, som i Fig. 13, C*d* og D*d* falde over det samme Punkt eller over Rore-Punktet *d*. Da derfor, fordi G*d*F er et retvinklet Triangel, *d*GF = E*d*F = C*d*D. Saa sees, at siden CD er Sinus til C*d*D, saa maa i den horizontale Stilning af Tyngdens Center Cylindren staae ubevægelig paa det inklinerte Plan, uden at kunde stige, naar Planet GA er forhøiet under den Vinkel AGC, hvis Sinus er DC eller Tyngdens Centers Distance fra Sterrelsens Center.

4) Hvoraf følger atter igien: At jo mindre DC er, eller jo nærmere Tyngdens Center falder ind til Størrelsens Center, desto mindre Sving kan Cylindren giere op efter Planer af samme Inklination, og desto mindre bliver den høieste Forhøinings-Vinkel, under hvilken Cylindren kan stige. Jo større derimod at DC bliver, desto større Sving kan den giøre over eens inklinerte Planer, og desto stærkere kunde Pla-

af Tyngden, og denne Bevægelse maatte altid have Sted, hvad heller at Tingene vare firr- og meerkantede, eller og, om de vare runde; hvad heller at Perpendiklen fra Tyngdens Center faldt over eller uden for Grund-Linien.

Planerne nærme sig Verticalen, før den over dem ei mere skulde kunde løbe op efter.

5) For at forstaae det allerede sagte endnu saa meget desto bedre, maa ydermere agtes, at det ei er alene i dette Tilfælde, da Planets Inklinations Vinkel (Fig. 13) AGC = C*d*D og CD er horizontal, at Cylindren hviler; men den maa endog hvile over alle andre Planer, under hvad Vinkel at de end ere inklinerte, saa tidt som Tyngdens Centers Direktions-Linie gior med C*d* en Vinkel C*d*D, saa stor som Planets Inklinations-Vinkel; og dette sidste er det egentlige, som bør skee paa et hvert Plan, naar paa det Cylindren ei skal kunde rulle høiere op efter Planet. Men Forskiellen imellem alle disse og den No. 4. omtalte Tilfælde er, at over de andre Planer ligger CD ei, som i Fig. 13. horizontal, naar Cylindren er kommen til Hvile paa Planet, men den kan have to adskillige Stilninger, som i Fig. 15. En, udi hvilken at Tyngdens Center paa den Linie *e*B staaer paa sit høieste udi D. En anden, da den over samme Linie staaer paa sit Laveste udi *d*. Den i No. 4. omtalte Tilfælde er derfor den da DB = *d*B, eller Tyngdens Center, for at blive staaende paa Planet, ikke kan have uden en eneste Stilning, som bliver den nederste.

Efter-

Da derfor Erfarenhed lærer, at de Ting, som falde hen efter et inklinert Plan, have snart en, snart en anden Bevægelse. En, som man kalder at glide ned efter Planet, naar det nemlig idelig rores af de samme Dele af den faldende Ting. En anden, naar de anrorende Dele idelig forandres, som

Eftertænker man lidt nøiere, hvorledes Bevægelsen af Tyngdens Center skeer i disse to adskillige Stilninger, (hvilke ligeledes have Sted paa den horizontale Linie) da seer man strax, at om dette Punkt er i sit nederste, da hvad heller man vil bevæge Cylindren hen imod G eller op imod A, maa Tyngdens Center altid stige, følgelig falder det igien tilbage til *d*, saa Bevægelsen hen over Planet i dette Tilfælde ikke haver Sted.

Staaer derimod Tyngdens Center paa sit høieste udi D, helder da Cylindren over imod G, falder den der henester. Helder den hen imod A, falder den der henester; thi man seer strax, at i begge Tilfælde falder idelig Tyngdens Center alt lavere og lavere, saa dets Bevægelse ei er hindret. Forstyrres derfor Cylindrens Hvile udi D, løber den saa længe op efter Planet, indtil den naaer den Stilning /D, da Centret af Tyngden kommer i sit nederste, hvor det nødvendig, som før sagt, maa blive staaende.

Men deraf flyder, at i det i No. 4. omtalte Tilfælde Cylindren aldeles ikke, i hvorledes man end gier det, kan løbe op efter Planet. Thi da i denne Stilning DB = *d*B, saa

har

som i Kuglernes Fald; hvilket man kalder at rulle eller veltes ned ad Planet. Af hvilke begge Bevægelser, naar de findes tillige i en og den samme Ting, endnu en tredie kan sammensættes. Saa sees strax, at disse to sidste tildeels maa foraarsages af den Modstand hen efter Planet, som man sædvanlig kalder Friction.

Fore-

har Tyngdens Center ingen høieste Stilning, hvilken alene kan foraarsage, at den løber op efter Planet. Saa den yderste Grendse, da den kan staae paa Planet og ei mere løbe op ad, er den, naar CD eller rettere $\frac{CD}{CB}$ er Sinus til Planets Inklinations-Vinkel AGC.

6) Da vi have sagt, at Cylindren sadt paa det horizontale Plan i sin høieste Stilning (Fig. 10.) beskriver 180°, før den kan komme til at hvile i den laveste, eller en Linie BF = A*n*B. Saa kan man ligeledes bestemme, hvor mange Grader af den halve Peripherie Cirklen beskriver over et givet inklinert Plan, før Tyngdens Center fra den høieste Stilning D kan komme til at ligge i den laveste *d* Fig. 15. Thi da i Cylindrens Omveltning Distancen DC altid bliver den samme, saa bliver *d*B = *e*D. Videre sees let, om *b* trekkes ud til *x*, at *b x* G, AGC og C*b*B ere ligedanne Triangler, saa at Vinklen *b*CB = AGC = AC*a* = *a*C*e*.

I det D falder og søger den Stilning *d*, ville vi sætte, at Cylindren bevæger sig op efter Planet til *l*, saa B*l* = B*g*, og naar *l* er det Punkt, hvor Cylindren staaer stille, falder *g* over *l*.

For

Forestiller man sig (Taf. V. Fig. 3.) Planets Modstand eller Ujevnhed, som en Kraft udi E, der driver Basis DE af Parallelogrammet HD hen efter EA, imidlertid at i Tyngdens Center en Deel af Tyngden FG driver DH hen efter FG parallel med AC, saa sees strax; at disse to Kræfter, som

---

For at bestemme dette Punkt, maa agtes, at om igiennem D trekkes den Korde gDm, da maa $gD = De = dB$. Thi naar det Punkt g i l haver denne Egenskab, er det vienskynligt, at Tyngdens Center D er paa sit Laveste udi l. Fordi, naar $gD = eD$, bliver og $Dm = DB$, fordi i Cirklen altid er eD. $DB = gD$. Dm. Derfor og $gDm = eDb$, saa Stilningen i l bliver den den bør.

Deraf bestemmes let Buen $Bg = 180° - Ag = 180° - ACE (= 2AGC) - eg$, saa at alt kommer an paa at bestemme Buen eg. I Trianglerne eDC og gDC ere alle 3 Sider lige store, følgelig Vinklen $ecf = gcf$ og $ge = 2fg$, saa alt kommer fremdeles an paa at bestemme fg, eller Vinklen DCG: Hvilket let skeer, om i Trianglet Dcg, hvori to Sider DC og Cg ere givne, den tredie Dg og bliver bekiendtgiort.

For at finde Dg, maa agtes at $Dg = dB$. I Trianglet CKB findes CK af CB, som er given; af 90° ved K, og af Vinklen $CBK = AGC$. Videre findes Kd af Cd og CK givne i det retvinklede Triangel CKd. $KB - Kd = dB = Dg$. Følgelig er Vinklen fcg bekiendt, hvilken saaledes uden Udregning strax kan bestemmes.

Fra

som drive Legemet efter imodsatte Direktioner, let kunde faae den Forhold imod hverandre, saa at det ved deres forenede Virkning maa veltes om, saa tidt som Vertikalen fra Tyngdens Center falder uden for Grund-Linien. Hvoraf flyder:

1) At da Vertikalen altid over inklinerte Planer falder uden for Grund-Linien i Kuglerne og de runde Legemer, saa rulle disse ned over de inklinerte Planer bestandig, fordi Frictionen af Brettet ikke behøver at være stor, for at drive dem om, med mindre, at som i Taf. III. Fig. 4. Vertikalen fra Tyngdens Center D falder paa den Side imod A, saaledes, som nylig er blevet forklart i §. 109, da de rulle op ad Planet. De rulle af samme Aarsag med en veltende Bevægelse hen over horizontale ujevne Planer, naar de kastes ud over dem med en progressiv Bevægelse og Hastighed.

2) Jo bredere derimod at Grund-Linien er i de Legemer, som have platte Baser, alt for Resten lige; desto større maa Kraften af Frictionen eller Modstanden være, for at kaste Legemet om, saa det velter ned efter Planet.

Saa

Fra B eller Røre-Punktet paa Planet trekkes Diameteren ACB med Vertikalerne *ax* og *e*B, *ace* tages = AC*a*, igiennem Tyngdens Center D, eller det Punkt, hvor den Cirkel, som beskrives fra C med CD, skier *e*B, trekkes C*f*, og man tager *ef* = *fg*. Saa er *g*B den søgte Bue, hvis Længde er den Vei B*l*, som Cylindren kan løbe op efter Planet.

Saa man deraf seer, at et Legeme ikke bør vælte sig ned over et inklinert Plan, af den ene Aarsag, at Vertikalen fra Tyngdens Center ikke falder over Grund-Linien. Planets Ujevnhed eller Friction maa nødvendig i en vis Grad give det en Bevægelse efter ED, tvertimod den af Tyngden efter FG, om det skal rulle ned efter Planet. Vi skulle handle om denne Friction udførlig siden.

§. III.

En anden fast ligedan Erfaring.

Kaster man Øinene paa dette andet Instrument, (Taf. IV. Fig. 5.) saa seer man endnu et andet Tilfælde, i hvilket en Tyngde bevæger sig op efter Planet, uden at man haver lagt Centret af Tyngden ud af sit rette og naturlige Sted, saaledes som i nestforrige Tilfælde ved en fremmed Tyngde af anden Slags. For at forstaae Aarsagen til denne, efter hvad der synes unaturlige Bevægelse, maa man agte, at i I er en Cirkel af Træ, i Midten af hvilken er indlagt en dobbelt Keile, ligeledes af Træ, hvilken igien ligger an paa de to verticale og oven til skraaeliggende Bretter CE og BD, som løbe sammen efter Vinklen DKE, ligesom Figuren viser. Hele Instrumentet hviler paa to Fødder F og G, som bør sættes i Horizontal eller nesten Horizontal-Stilning. Da Rundingen af den dobbelte Keile idelig voxer fra H til L, som bedre (skiønt i mindre Tegning) vises i Giennemsnittet Taf. III. Fig. 6, hvor HL og H/ ere Snittene midt over begge Keiler; HM derimod er Halv-Diametern af Cirkel-Fladen I. Saa ligger Tyngden i A virkelig høiere, da den

den ligger an paa den brede Deel af Keilen inde ved H (Fig. 6) end bedre op ad paa Planet, for Ex. udi CB, hvor den kommer til at ligge an ud imod de tynde Spitser L og I af Keilene: Og da Tingene altid falde ned efter, det er, fra det Høiere til det Lavere, indtil at de omsider naae det laveste Sted, saa er der ingen Vanskelighed i at see, hvorfor denne Tyngde maa bevæge sig op ad Planet, siden Tyngdens Center, og følgelig den selv, da virkelig falder ned efter.

For at forstaae denne Bevægelse saa meget desto bedre, kan man agte (Taf. V. Fig. 12.) at, naar FCH er Midt-Cirklen af den dobbelte Keile, BD Planets EB Høide, CE Halv-Diametern af Cirklen, da maa BD=AE være noget mindre end CE. Om Tyngdens Center af den dobbelte Keile skal falde langs hen efter Linien CB.

Siette Forelæsning.

Om Kræfterne af Tyngden deres Ligevægt under sig.

§. 112.

Afhandling om Kræfternes Ligevægt ved Tyngden, og hvorudi denne Ligevægt bestaaer.

Vi lovede i vores sidste Forelæsning, at tale om Kræfternes Ligevægt ved Tyngden. Dette Stykke af Mekanik er høist nyttigt; Det kommer overalt, men i sær i Machin-Væsenet, saa ofte for, saa det er et af dem, der bør læres med en besynderlig Flid, og som fortiener at eftertænkes med en særdeles Agtsomhed. Man veed da, at to Kræfter siges at staae i Ligevægt med hverandre, naar den ene ikke kan overvinde eller bevæge den anden. For Ex. (Taf. IV. Fig. 12.) Om AB er en Stang, der ligger an paa et Punkt C af Underlaget CG, som understøtter den; og paa AB ere heftede to Tyngder A og B saaledes, at A ei kan bevæge B, ei heller B, A, da ere disse to Kræfter udi Ligevægt med hverandre.

Hvad Hvile-Punkter er.

Det Punkt C kaldes gemeenlig Hvile-Punktet.

§. 113.

Første og simpleste Tilfælde af lige store Tyngder.

Saa meget seer man strax, at dersom Taf. IV. Fig. 12. over en Stang AB, som hviler udi C, to lige store Tyngder

A og

A og B trykke paa den i lige store Distancer AC og CB fra Hvile-Punktet, at disse to Tyngder da maa staae i Ligevægt med hverandre, siden Kræfterne anvendes i A aldeles paa selvsamme Maade, og efter samme Størrelse som i B, saa paa begge Steder er ingen Forskiel. ders Ligevægt i lige store Distancer fra Hvile-Punktet.

§. 114.

Men hvad maa skee, paa det at Kræfternes Ligevægt kan finde Sted, dersom ulige store Tyngder D og *a* trykke paa Distancer DC og *a*C fra Hvile-Punktet C, som ligeledes under sig ere ulige? Dette Tilfælde er vanskeligere, men forstaaes dog let af, hvad vi forhen have sagt om Kræfternes Ligevægt §. 25, at nemlig Pressionerne ere indbyrdes under sig lige store, og følgelig Kræfterne udi Ligevægt, saa tidt som de Modstand, de skulde bevæge, ere i Størrelse af Inertie, de Rum forkeert Viis proportionerte, igiennem hvilke de skulde bevæges, om virkelig Bevægelse skulde skee. Almindelig Oplösning af alle de andre Tilfælde, naar Distancerne fra Hvile-Punktet ere ulige.

Anvender man denne Regel paa vor nærværende Tilfælde, da er det klart, at Inertierne i *a* og D ere som Vægten af Tyngderne *a* og D §. 35. De Rum, igiennem hvilke *a* og D i samme Tid skulde bevæges, ere *a*A og DE. Følgelig, om Ligevægt skal have Sted, maa Inertien *a* multiplicert med *a*A, være saa stor som Inertien D multiplicert med DE, eller, da DE og A*a* ere ligedanne Buer, og derfor deres Halv-Diametrer *a*C og DC proportionerte, maa, om Ligevægt imellem *a* og D skal have Sted,

a . *a*C = D . DC, eller *a* : D = DC : *a*C. Det er:

Inertierne, eller, hvilket er det samme, Tyngderne *a* og D maa være deres Distancer fra Hvile-Punktet C, nemlig *a*C og DC forkeert Viis proportionerte, om de skulle staae i Ligevægt med hverandre.

§. 115.

Folgelig om, som i §. 113, AC = BC, og A = B, er A*a* = B*b* og Tyngderne i Ligevægt, fordi de ere Distancerne fra Hvile-Punktet, forkeert Viis proportionerte.

§. 116.

Tunge Ting staae i Ligevægt over Vægt-Stænger, dersom deres Inertier ere deres Hastigheder forkeert viis proportionerte.

Jeg haver tilforn sagt §. 23, at i de elementære Pressioner, saadanne som de, der have Sted i Tyngdernes Ligevægt over Stænger, kommer det paa et ud, hvad heller man vurderer Kræfterne af Rummet eller af Hastigheden, siden de ere hinanden begge proportionerte.

Folgelig kan man og sige, at to Tyngder staae i Ligevægt med hverandre paa ulige Distancer fra Hvile-Punktet, dersom deres Inertier eller Tyngder ere deres Hastigheder forkeert Viis proportionerte; thi i dette Tilfælde, hvad det Mindre haver mindre i Masse, haver det meer i Hastighed; og hvad det Storre haver meer i Masse, haver det Mindre igien i Hastighed.

§. 117.

En Vanskelighed hæves.

Men man kunde sporge: I Kræfternes Ligevægt, hvor alt hviler, hvorledes kan der Betragtning skee, som om de i Ligevægt

vægt staaende Ting bevægede sig igiennem virkelige Rum, eller med virkelige Hastigheder? Tilforladelig var intet urimeligere, end om man vilde sige, at Tyngder, som stode i Ligevægt, bevægedes eller havde en virkelig Hastighed. Men det er heller ikke, hvad man siger. Men at, endskiont Ligevægt er, søger dog Pressionerne af Tyngden ligefuldt at meddele Inertierne Bevægelse og Hastighed, saa de have en bestandig Bestræbelse til at iverksætte disse sidste, og at disse Bestræbelser, som i sig ikke ere uden elementære, ere i Forhold med de virkelige Rum *a*A, DE, (Taf. IV. Fig. 12.) og de dem proportionerte endelige Hastigheder. Saa det er paa denne Maade, at man maa forstaae, hvad vi have i Kræfternes Ligevægt sagt om Bevægelse og Hastighed.

§. 118.

En Stang, som ACB, kalder man ellers en Vægt-Stang. Distancerne fra Hvile-Punktet C, som AC og CE, kalder man Vegt-Stangs-Armene, og i Henseende til disse nye Benævninger giver man Regeln §. 114, endnu paa en anden Maade, skiont alt kommer ud paa et med det forrige.

Hvad en Vægtstang er, og at Tyngderne holde Ligevægt under sig, naar de ere som Vægtstangs-Armene forkeert tagne.

At nemlig, Tyngder staae over en Vægtstang udi Ligevægt, dersom de udi Vægt ere de til dem svarende Vægt-Stangs-Armers Længder proportionerte.

§. 119.

Vi ville her ikke videre indlade os i de Betragtninger over Ligevægten, som høre til Statik, og som vi i det følgende

I hele Systemer af adskilte Legemer under-

de

tiden, og i hele sammenhengende Legemer, som i hule Ringe eller Kugler, o. s. v. falder Tyngdens Center i det Ledige.

de skulde foretage, da vi her have anfort saa meget af Vægt-Stangens Egenskaber, som vi i Mekanik nodvendig bruge. Men Eet kunde vi ikke undlade at erindre, at da vi tilforn have talt om Tyngdens Center, have vi alene betragtet det Tilfælde, da det falder inden i det Materielle selv; man maa desuden agte, at der gives andre, da i et Systeme af flere sammenhengende Legemer, og undertiden i et eneste, Tyngdens Center falder uden for Materien i den frie Luft, saa at sige. Som om (Taf. V. Fig. 4.) AD er en Ring, hvis Materie er indsluttet imellem Cirklerne AD og BE; men inden for BE er den huul; da, om denne Ring er overalt af ensdan Materie, er der ingen Tvivl paa, at jo Tyngdens Center falder i C, og folgelig i det Ledige.

§. 120.

Hvorledes desslige hule Ting kunde understottes.

Man understotter et saadant Legeme, dersom Tyngdens Center C, og den fra det faldende Vertikal-Linie CF falder i F perpendikulær over FG, som man haver sat til Fod-Stykke, for at understotte AD.

§. 121.

Andre Tilfælde, i hvilke Tyngdens Center falder uden for det Materielle.

Men for at komme paa andre og i Mekanik vigtigere Tilfælde af dette Slags, ville vi (T. V. F. 5.) betragte to Tyngder A og B, hvis Tyngders Centrer A og B hvile paa Enderne af en Stang AB, hvilken vi her betragte som uboielig stiv, men at være uden Tyngde. Da Stangen er, efter Hypothesen, uden Tyngde, saa er det klart, at Tyngdens fælles Center for A

og

og B hverken kan falde over A, eller over B, men paa et Sted C i den Linie AB, som sammenfoier de enkelte Tyngders Center, og som findes af §. 118.

Meget meer maa Tyngdens Center falde i det Ledige, og ei paa det Materielle af Systemet, om, som i Fig. 6. Taf. V. Legemer henge over Stænger uden Tyngde, (skiont her kunde de og være med Tyngde) AC, CB og AB, som forene A, B, C; thi ere de enkelte Tyngdens Centrer Punkterne A, B, C, da faae A og B deres fælles Tyngdes Center et Sted i D. §. 118. D og C deres ligeledes et Sted i Linien DC udi E, hvilket Punkt saaledes bliver det fælles Tyngdens Center for alle tre Legemerne A, B og C. Og man seer uden Moie, at det falder uden for alt det Materielle af Systemet, fordi den hele Linie DF falder uden for det.

§. 122.

Hvorfor Vægtstængerne betragtes som umaterielle, og at det kommer paa et ud, hvad heller at de i Ligevægt staaende Tyngder ligge umiddelbar paa Vægtstangen, eller om de henge i længere eller kortere Linier.

Vi skulle strax vise, hvorledes de fælles Tyngdernes Centrer kunde findes, alene, at jeg i Forveien faaer giort et Par Anmerkninger. Den ene er, at man betragter Vægt-Stængerne, og Stængerne som AB, (Taf. V. Fig. 5.) som uden Tyngde. Dette gior man alene, for ikke at giore Hoved-Reglerne, som der egentlig sporges om, af vanskeligere Betragtning. Virkelig; at betragte Tyngden af Stangen, var og i sig unyttigt, thi den er accidentel og horer ei til Spørsmaalet.

I det følgende skulde vi i Machin-Væsenet tage denne Tyngde i Betragtning, thi der er Stedet. Her ville vi ale-

ne agte, at i et Tilfælde kan en tung Stang ansees, som om den var uden Tyngde; i den, da dens Tyngdes Center D er tillige dens Hvile-Punkt. Thi da forvirrer Armenes Tyngde ikke Virkningen af Tyngderne A og B (Taf. V. Fig. 5.) omendskiont at, naar Tyngdernes fælles Center C falder uden for Stangens Tyngdes Center D.

Det andet er, at det kommer paa et ud, hvad heller Tyngderne A og B ere umiddelbar skudte ind paa Stangen AB, og Distancerne til Hvile-Punktet regnes fra deres Tyngders enkelte Centrer A og B. (thi disse maa nodvendig ligge paa Linien AB, i hvilken Hvile-Punktet er) eller om Tyngderne a og b (=A og B) henge i Linier uden Tyngde udi A og B, som gaaer fra Tyngdens Centrer A og B.

Her kan ydermere agtes, at i dette sidste Tilfælde kommer det paa et ud, hvad heller Linierne A*a* og B*b* ere lange eller korte. Tyngden i *a* og *b* bliver derved hverken storre eller mindre, thi, som for er bleven sagt §. 43, endskiont Tyngden efter den strenge og meget noie Theorie voxer bestandig ned ad imod Jorden, saa ere dog de Distancer, paa hvilke vi kunde henge Tyngder, saa korte, at paa dem Forskiellen er virkelig intet.

Efter at have giort disse Anmerkninger, ville vi bestemme det fælles Tyngdes Center udforligere.

§. 123.

At finde Tyngdens felles Center for to Legemer.

Da Tyngdens Center er det Punkt, i hvilket, naar en bærende eller holdende Kraft, som er stærk nok, staaer Tyng-

Tyngden imod, denne sidste da hviler, uden at Vægten af det, som er paa den ene Side, kan overveie hvad der er af tung Materie paa den anden Side, saa findes altid det fælles Tyngdens Center af to givne sammenhengende Tyngder A og B, ved at søge (Taf. V. Fig. 5.) et Punkt C i Linien AB, fra hvilket af at regne Distancerne AC og CB ere i forkeert Forhold af Tyngderne B og A, §. 118.

Kaldes den hele Linie AB, a, Distancen AC, x, saa er $CB = a - x$ og $A : a - x = B : x$, §. 118, og $CA = x = \frac{aB}{B+A}$, Saa for at finde det fælles Tyngdens Centers Afstand eller Distance fra en af Tyngderne, haver man alene nodig at multiplicere den anden af Tyngdernes Vægt med Tyngdernes Distance, og at dividere det Udkommende med Summen af begge Tyngders Vægt.

§. 124.

Ligeledes for tre og flere, der ikke ligge i ret Linie.

Deraf sees ligeledes, hvorledes det Tilfælde af 3 Legemer (Taf. V. Fig. 3.) oploses, thi først søges D, §. 123, siden ligeledes E; da Tyngden i D ansees at være saa stor som A+B.

Vi ville ei betragte flere deslige Tilfælde, thi som man arbeider i en, maa man arbeide i alle. Men for Nyttens Skyld i andre Hensende, ville vi derimod foretage det Tilfælde, naar af flere tunge Ting alle de enkelte Tyngders Centrer ligge over en Linie, efter at vi først have giort et Par andre Anmerkninger.

§. 125.

Hvori en Tyngdes hele relative Kraft bestaaer.

Nemlig, at en tung Tings Styrke i at tynge imod en anden i Ligevegt med den staaende Tyngde, eller Momentum Ponderis, bør dommes af dens Vægt, multiplicert med dens Distance fra Hvile-Punktet. Siden at den Kraft, som A har til at veie imod B (Taf. V. Fig. 5.), er A. AC, og ligeledes den Kraft B har til at veie imod A, er B. BC. §. 123. 118.

§. 126.

Det samme agtes i Henseende til Pressionerne i Almindelighed.

Tages den ene Tyngde A pludselig bort, da bliv dog Momentet i B uforandret det samme; saa, naar en Pression B, hvad heller det er en Tyngde, eller ikke, virker lodret paa en Vægtstang (T. V F. 7.), hvis Hvile-Punkt er C, maa dens hele Kraft til at drive Stangen, altid dommes af B. BC. Var den samme Kraft udi E, bliv dens Kraft, til at drive Vægt-Stangen, ikke uden B × EC.

§. 127.

En Pressions hele Kraft i at virke er, som den Virkning, den giør paa Inertien i et Øieblik, multiplicert med denne sidstes enten virkelige eller mueli-ge Hastighed.

Med et Ord, saa tidt som Pressionerne virke paa Vægt-Stænger, maa man ingenlunde forglemme at multiplicere dem, (eller, hvilket er det samme, de Tyngder, de foraar-sage,) med deres vedkommende Vægtstangs-Arme.

Og da disse Vægtstangs-Arme ere i samme Forhold, som Hastighederne af de Inertier, paa hvilke Pressionerne virke. §. 116. Saa maa i Almindelighed Pressionens hele Kraft altid sluttes af Pressionen selv, multiplicert med den Inerties eller det Punkts Hastighed, paa hvilket den virker.

§. 128.

§. 128.

Efter at have giort disse Anmerkninger, gaae vi til det omtalte Tilfælde §. 124, da vi først agte (Taf. V. Fig. 8.) at saa tidt som flere Tyngder P, P′, P″, P‴, skulde holde Ligevægt under sig paa begge Sider af Hvile-Punktet A, over en Stang uden Tyngde, der holdes i B, da maa Momenta af Tyngderne paa begge Sider være lige store $P.PA+P'.P'A = P''.P''A+P'''.P'''A$.

Staae flere Tyngder udi Ligevægt sammen, ere Momenterne paa begge Sider af Hvile-Punkret dog altid lige store.

For at bevise dette, ville vi alene betragte tre Tyngder (Taf. V. Fig. 7.) for ikke at giore Beviset unødig vidtløftig, da alle andre Tilfælde kunne bevises paa samme Maade.

I Beviset kommer alt alene derpaa an, at man i Steden for de enkelte Tyngder E og B betragter dem som samlede i deres Tyngdes fælles Center D. Thi saa er ingen Tvivl paa, at jo $A.AC = (E+B).DC$. §. 114. Alt kommer da an paa at kunde bevise, at $(E+B).DC = E.EC+B.BC$.

For at bevise dette, maa det fælles Tyngdes Center D imellem E og B først findes, som §. 123 er $\frac{E.EB}{E+B} = BD$. Følgelig bliver $DC = BC - \frac{E.EB}{E+B} = \frac{E.(EC-EB)+B.BC.}{E+B}$, og videre $(E+B).DC = E.EC.+B.BC.$ Følgelig kommer det paa et ud, om begge Tyngderne E og B henge hver for sig til adskillige Distancer, fra Hvile-Punktet C, eller om de i deres fælles Tyngdes Center udgiore en eneste samlet Tyngde.

§. 129.

At bestemme det fælles Tyngdens Center for flere Legemer, hvis enkelte Tyngdens Centrer ligge over en og den samme rette Linie.

Man seer deraf let, hvorledes Tyngdens fælles Center, eller Hvile-Punktet, findes til flere Tyngder P, P′, P″, P‴, som henge over en og den samme uboielige Linie uden Tyngde, Taf. V. Fig. 8.

Thi kaldes den hele Linie PP‴, a, og Tyngdens Center antages at være udi A. $PA = x$, $PP' = b$. $P''P''' = c$. Da, naar alle Distancerne regnes fra Tyngdens enkelte Centrer i P, P′, P″, P‴, bliver §. 128.

$$P.x + P'.(x-b) = P''.(a-x-c) + P'''.(a-x)$$

$$Px + P'x - P'b = P''a - P''x - P''c + P'''a - P'''x$$

$$x = \frac{P'b + P''a - P''c + P'''a}{P + P' + P'' + P'''}$$

$$= \frac{P'.b + P''.(a-c) + P'''a}{P + P' + P'' + P'''}$$

Saa man har alene nødig, for at finde det fælles Tyngdes Centers Afstand eller Distance fra den ene af Tyngderne, at multiplicere alle de andre Tyngder med deres Distancer fra samme Tyngde, og at dividere det Udkommende med Summen af samtlig Tyngderne.

§. 130.

Hvorledes Kræfternes Overvægt bør dømmes.

Dersom flere Tyngder ere som for fæstede over en og den samme Linie, som P, P′, P″, P‴, (Taf. V. Fig. 8.) og en Styrke i B holder Linien efter BA, eller om Stangen eller

Linien

Linien henges op i B og bæres af BA: da om P, P′, ei ere i Ligevægt med P″, P‴, er det klart, at deres Overvægt maa være $P.PA+P.P'A-P''.P''A-P'''.P'''A$, siden disse Tyngder, om de skulle komme til at staae i Ligevægt omkring A, maatte i P″, og i P‴, formeres med Tillæg til Tyngden, saa længe, til Momenta paa begge Sider bleve lige store. §. 128.

§. 131.

Man kan til Slutning agte, at Tyngdens Center forandres overmaade let, (Taf. V. Fig. 7.) ei alene, om noget legges til eller tages fra Tyngderne A, E, B, men end og, om en af dem det allermindste forrykkes, thi da forkortes eller forlænges Vægt-Stangen, og Udregningen, som man let seer, bliver for Tyngdens Center strax en anden.

Den mindste Forrykkelse i Tyngderne over en Vægtstang maa foraarsage at det fælles Tyngdens Center forandres.

Fierde Tillæg.

I.

Om de med en given Hastighed stigende Tyngder.

§. 54.

Dersom (Taf. V. Fig. 9.) fra et Punkt B af en Tyngde stiger op efter BA, med en vis given og bestemt Hastighed, og $Bd=x$. Den i Begyndelsen eller i B givne Hastighed $=c$, den udi

Bestemmelse af Hastigheden i et hvert Punkt af den Linie, udi

hvilken en Tyngde med en vis given Hastighed stiger.

udi d derimod, som søges $= v$. Da bliver, fordi Direktionen af Hastigheden gaaer tvertimod den naturlige Drift af Tyngden, eller fordi x voxer, alt som v tager af, i Følge §. 9. $-vdv = gdx$, og $-vv = 2gx + C$, hvoraf Hastigheden umiddelbar kan findes i alle Punkter af x, alene at C først bestemmes. Hvilket let skeer ved at agte, at naar $x = 0$ er $v = c$. Og altsaa $vv = cc$, saa at $cc - vv = 2gx$ og $v = \sqrt{cc - 2gx}$.

§. 55.

Sættes derfor $vv = cc - 2gx$, og a er den Høide, som svarer til Hastigheden c, V derimod er den Høide, som svarer til Hastigheden v. Da bliver §. 17 $V = a - x$. Thi $\sqrt{2gx}$ er Hastigheden, som vindes igiennem x. §. 10. 12. Følgelig bliver Quadraten af Hastigheden $2gx$, og altsaa proportionert x. §. 17. Deraf sees

1) At om $x = a$. Bliver $V = 0$. Saa en Tyngde ei kan stige høiere, end den er falden, før den taber sin hele Hastighed.

2) At om den stigende Tyngde vandt sin Hastighed ved at falde igiennem en Høide AB, og steeg siden igien fra B af op efter samme eller en anden ligesaadan Høide med den Hastighed, den havde vundet ved Faldet igiennem AB. Da maatte den i lige høie Punkter i begge Tilfælde altid bevæges med lige Hastighed. Thi Høiden V, som svarer i det ubestemte Punkt d til Hastigheden, er overalt $a - x = AC$.

§. 56.

§. 56.

Man finder ligeledes alt, hvad der angaaer Tiden af Bevægelsen. Thi da $\frac{dx}{v} = dt$ og $v = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{a-x}$, saa $\frac{dx}{\sqrt{2g} \cdot \sqrt{a-x}} = dt$ og $t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{a-x})$, naar nemlig Integralen gjøres fuldstændig; saa seer man let, at alt det herhid hørende er ikke andet end en simpel Følge af hvad vi forhen have sagt i Tillægget til den anden Forelæsning.

2.

Om Tyngdens Center.

§. 57.

Grund-Regler, for at bestemme Tyngdens Center, beviises.

Dersom T.V.F.7.N.2. saa mange Tyngder, som man vil, henge over en Linie, der er bevægelig omkring sin ene Ende: F.E. om Tyngderne $P.P'$, $P''.P'''$ tynge alle paa den Linie AP'', hvilken vi ville anseе som bevægelig omkring det Punkt A, og man vilde finde et Punkt Q i Linien AP''', i hvilket, naar en Kraft P'''' holdt imod, der havde samme Styrke, som alle disse Tyngder, og hvilken derfor maatte være saa stor, som deres hele Sum; Kraften og Tyngderne da skulde staae udi Ligevægt sammen.

Da siden disse Kræfter, i Følge Hypothesen, skulle staae i Ligevægt sammen, maa nødvendig, §. 101. 128.

$$\frac{P.PA + P'.P'A + P''.P,A + P'''.P'''A + + = P''''.QA}{P.PA + P'.P'A + P''.P''A + P_{i}'''.P'''A + +} = QA$$

$$P + P' + P'' + P''' + +$$

thi $P'''' = P + P' + P'' + P''' + +$. §. 101.

Det er: samtlig Tyngderne skal multipliceres med deres Distancer fra det Punkt, om hvilke de kunne bevæge sig i Vinkel-Bevægelse. Det Udkommende skal divideres med Summen af alle Tyngderne, saa faaes det søgte Punkt Q. Man seer let, at dette Punkt er Tyngdens Center, siden Momentet af samtlig Tyngderne under et eller i en Sum tagne, giøre i det selvsamme Virkning, som alle de enkelte Tyngder hver for sig, multiplicerte med deres respective Distancer fra A, hvilket er just det, som er blevet beviist, at være en Egenskab af det fælles Tyngdernes Center. §. 129. Forel.

§. 58.

Reglen §. 57 anvendes, og først i Linier af ensdan Tyngde overalt.

For at vise i de simpleste Exempler, hvorledes ved Hielp af denne Regel Tyngdens Center kan findes, ville vi først undersøge, hvor dette Punkt ligger i de rette Linier.

Saaledes, (Taf. V. Fig. 9.) om AB er en ret Linie ophengt udi A, hvis alle Punkter ere lige tunge, da er cd en af disse smaa Tyngder. Sættes den hele Linie $AB = a$, $Ad = x$, da er $cd = dx$. Summen af alle de smaa Tyngder multiplicerte med deres Distancer fra $A = \int x dx$. Summen af dem alle derimod er $\int dx$. Følgelig er $\int x dx : \int dx$, eller $\frac{1}{2}x^2 : x = \frac{1}{2}x$ den søgte Størrelse.

Er $x = a$, bliver alt $= \frac{a}{2}$, saa derfor Tyngdens Center falder midt i den rette Linie. Man seer, at ingen bestandig Størrelse bør legges til; thi naar $x = 0$, er Integralet 0, som det bør være.

§. 59.

Videre i Linier, hvis Tyngde anses at være

Dersom samtlig Punkterne i den rette Linie AB sættes at have en Tyngde, som ei er ensdan, men for Ex. er proportionert Distancen

en fra det Punkt A, da om denne sidste som før kaldes x; cd, dx; og $AB = a$. Saa bliver for det søgte Punkt $\frac{\int x x dx}{\int x dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x$, og for den hele Linie $\frac{2}{3}a$; uden at legge noget til Integralen, fordi naar x er $= 0$, er den og $= 0$, som den bør være.

overalt Distancen fra det Punkt, hvori Linien er ophengt, forkeert Viis proportionert.

§. 60.

Saafremt derimod, at samtlig Punkterne i Linien sættes at være i Tyngde som Distancen forkeert fra A, og $Ad = x$ som før. Da bliver, om Tyngden i den Distance a fra $A = p$, i Almindelighed det søgte Punkts Distance fra $A = \frac{\int apdx}{\int (apdx) : x}$, hvoraf er Integralen $\frac{apx}{ap\,L.\,x}$. For den hele Linie derfor er det søgte Punkt $= \frac{a}{Log.\,a}$.

Ligeledes, om Tyngden er som Distancen forkeert.

§. 61.

Ligeledes findes Tyngdens Center overmaade let udi Figurerne, saa tidt som de kunde opløses ved deres Ordinater i lutter uendelig smaa Parallelelogrammer, af hvilke alle Tyngdernes enkelte Center ligge udi en og den samme Axel. Thi i dette Tilfælde er den hele Figur ikke at ansee for andet end en tung Linie.

Det samme i alle de Figurer, som kunne opløses i lutter uendelig smaa Parallelogrammer, hvis Tyngders Centrer ligge alle i en ret Linie.

Er (Taf. V. Fig. 18.) ACD et Triangel; da er, som strax sees, Tyngdens Center i den Linie AB, der deler alle Linier som Km, hvilke ere ligelobende med Grund-Linien CD udi to lige store Dele. Men da disse sidste ikke ere lodrette eller perpendikulære paa AB. Kastes da Perpendiklen AE ned, som altid er given, fordi Trianglets ACD Sider og Vinkler ere givne og AE kaldes p,

AB, a; CD, b; Ag, x, da er AB : CD = Ag : Km eller $a : b = x : \frac{bx}{a}$ = Km og AB : AE = Ag : Af eller $a : p = x : \frac{px}{a}$ = Af. Følgelig er $fh = \frac{pdx}{a}$ og fh. Km, eller den elementære Tyngde K$mni = \frac{bx}{a}\frac{pdx}{a}$, som multiplicert med Vægtstangen gA, §. 127, giver det hele Moment af Tyngden, hvilket derfor bliver for et hvert Element $\frac{bpx^2dx}{a^2}$. Men Summen af samtlig de smaa Tyngder er $\int\frac{bpxdx}{aa}$. Derfor bliver i det søgte Punkt $\int\frac{bpx^2dx}{a^2} : \int\frac{bpxdx}{aa} = \frac{\frac{1}{3}bpx^3 : a^2}{\frac{1}{2}bpx^2 : a^2} = \frac{2}{3}x$. Som for det hele Triangel er $\frac{2}{3}a$, thi da er $x = a$.

§. 62.

Det samme vises i Parabolerne.

Paa samme Maade findes Tyngdens Center i alle krumme Linier med lige Arme, eller som i Almindelighed have en Axel. (Taf. VI. Fig. 1 og 2.) Vi ville derpaa ikke anføre uden et Exempel, da heri ingen synderlig Vanskelighed findes.

Er Fig. 1. CAF en Parabol, som henger i det Punkt A. AB dens Axel. Er AE = x, CE = y, Parametern = p, bliver $px = y^2$ i denne krumme Linie. Videre er gf = y = $\sqrt{px}$ og $cefd = 2\sqrt{px}dx$. Følgelig Momentet af et hvert Element $= 2dx.\sqrt{px^3}$. Derfor bliver $\frac{2\sqrt{p}\int dx.x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}\int dx.x^{\frac{1}{2}}}$, det søgte Punkts Distance fra A $= \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}x$; og for det hele Stykke af Parabolen, naar AB = a, er den = $\frac{3}{5}a$.

Er

Er Parabolen ei given efter sin Axel, men efter sin Diameter; da er det klart, at Tyngdens Center er i Diametern, saa at alt er endnu som før; om ved p forstaaes Parameter til Diametern, som man veed af den koniske Geometrie er adskillig om en bestandig Størrelse, der beroer paa Abscissen, fra Axlens Parameter. Ligeledes i andre krumme Linier, saa tidt som alle de smaa Tyngder deres Tyngdes Centrer ligge i en og den samme Linie, findes dette Center ved en eneste Udregning, saaledes som i Exemplet er blevet beviist.

§. 63.

Tyngdens Center bestemmes i den ydere Parabol i et Tilfælde.

Men dermed ere vi langt fra ikke ferdige med Parabolen; der spørges videre om at finde Tyngdens Center i den ydere Parabol, bestaaende af de to Stykker HAC og IAF, (Taf. VI. Fig. 1.) henførte til Axlen HI. Ligge begge Delene sammen om en fælles Axel, som i Taf. VI. Fig. 2, da er Oplosningen let, thi den lader sig umiddelbar finde efter §. 57. Fordi i den ydere Parabol AB, Semiordinate og Abscisse ere net op forvexlede med de i den innere; Cd med bB, dB med Cb, saa Ligheden bliver til alle Punkter udi ABC, $ay = x^2$. Derfor $df = \frac{a dy}{2\sqrt{ay}}$, og det dobbelte Element CdfE $= \sqrt{ay}.dy$, som multiplicert med sin Vegtstang dB $= x = \sqrt{ay}$, giver det hele Moment $= ay dy$, hvoraf Summen er $\frac{1}{2}ay^2 = \frac{x^4}{2a}$

Derimod er Summen af alle de smaa Tyngder $= \int \sqrt{ay}.dy = \frac{2\sqrt{a}}{3}.\ y^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{a}}{3}.\ \frac{x^3}{a\sqrt{a}} = \frac{2}{3}\frac{x^3}{a}$. Naar man hermed dividerer $\frac{x^4}{2a}$, faaes $\frac{3}{4}x$. Da for det hele Stykke ydere Parabol BAD, BC $= b$; bliver Tyngdens Centers Distance fra B, BE $= \frac{3}{4}b$.

Saa man seer, det er overmaade let at finde dette Tyngdens Center, naar man skiller paa før sagte Maade den ydere Parabols Dele fra den innere, saaledes at begge legges omkring en og den samme Axel.

§. 64.

Endnu i et andet og vanskeligere.

Men, om alt er, som Taf. VI. Fig. 3. at AEF og AGH ligge paa hver sin Side af den innere Parabol, da siden EFHG er et Parallelogram, hvis Tyngdes Center falder udi Midten B af Axeln AK, saa beroer det hele Spørsmaal paa følgende: Naar Tyngdens Center er given af den hele saavel ydere som innere Parabol udi B, saa $AB = \frac{1}{2}a$, (thi vi kalde AK, a.) og desuden af det ene Stykke, den innere Parabol nemlig, saa $AC = \frac{1}{5}a$ §. 62. da at finde Tyngdens Center af de ydere Paraboler EFA og AGH.

Antager man dette Center at være udi D, da maa man betragte de 2 Tyngder D og B, som anlagte paa Vægt-Stangen KA, saaledes, at den hele Tyngde udi B, naar den virkede efter imodsat Drive-Linie eller Direktion, maatte staae i Ligevægt med D og C og følgelig $D.DA + C.CA = B.BA$. §. 128. Forel.

For at forstaae dette desto bedre, maa man erindre sig af den koniske Geometrie, at af Parallelogrammet GEFH er den innere Parabol $\frac{2}{3}$ og den ydere $\frac{1}{3}$; saa at, om Parallelogrammet EFHG kaldes c, forholder sig den innere Parabol til den ydere $= \frac{2}{3}c : \frac{1}{3}c = \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$.

Dette forudsat; kaldes da AD, x, saa bliver $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} . \frac{3}{5}a = \frac{1}{2}a$, derfor $x = \frac{3}{10}a = AD$, som er det søgte Punkts D Distance fra A.

§. 65.

§. 65.

Man kan paa samme Maade i andre Tilfælde bestemme Tyngdens Center; saa tidt som nemlig de enkelte Tyngders Centrer ere givne, kan af dem det fælles Center eller det, som svarer til det Hele, findes. Er dette sidste og en af Delenes given, da det andet af Delenes. Saaledes, om Tyngden af det Hele udi B er i Almindelighed B, af den ene Deel udi D, D, af den anden udi C, C, og Distancerne DA og CA ere givne, da findes let BA eller det Punkt B, som er det heles Tyngdes Center. Thi kaldes BA, x, da bliver B. $x = D.DA + C.CA$ og $x = \frac{D.DA + C.CA}{B}$.

Naar af Delenes enkelte Centrer og det fælles Center to ere givne, da at finde det tredie.

Ligeledes om Taf. VI. Fig. 6. til det parabolske Stykke ABC, hvis Vægt er K, Tyngdens Centers Distance fra B, KB nemlig var given, tilligemed HB, naar i H var den hele Parabols Tyngdes Center, hvis Vægt vi ville sætte $= H$. Da findes strax det Punkt I, som var Tyngdens Center i Stykket ACED. Thi kaldes dets Vægt I. og $IB = x$, da er $I.x + K.KB = H.HB$ og $x = \frac{H.HB - K.KB}{I}$.

§. 66.

Saafremt at alle de omtalte smaa Tyngdens Centrer ikke ligge i en Linie, men dog i det samme Plan, eller og om den Linie, udi hvilken disse Centrer ligge, er ikke strax bekiendt, maa man bruge to deslige Udregninger, for at bestemme Tyngdens Center, nemlig ved at udregne dette Punkts Afstand fra to Linier tagne i samme Plan, eftersom det i den givne Tilfælde kan synes mest bequem.

Maade at bestemme Tyngdens Center i Figurerne ved to efter Behag antagne Axler.

Vi ville oplyse denne Maade at arbeide paa med et Exempel, og til den Ende ville vi igien betragte Trianglet BDE (Taf. VI. Fig. 4.)

som

som fæstet i B og henført til den Linie ABC, parallel med Basis DE. Kaster man Perpendiklen BF ned, og betragter de smaa Tyngder *bcde*, som at hænge over ABC; da om BF kaldes *a*, og DE, *b*, bliver *bf* parallel $DE = \frac{bx}{a}$, om $Bb = x$. $be = \frac{bdx}{a}$ og $bcda = (a - x).\frac{bdx}{a}$. Da Tyngdens Center i dette Parallelogram falder i Midten, saa bliver dets Tyngdes Centers Distance fra Axlen $ABC = \frac{a+x}{2}$, og følgelig bliver den hele Styrke af *bcda* til at tynge paa Axlen AG $= (a - x).\frac{(a+x).bdx}{2a}$, og derfor er det søgte Punkts Distance fra

$$ABC = \frac{\int \frac{b}{2a}(a^2 - x^2)dx}{\int a - x.\frac{bdx}{a}} = \frac{\frac{a^2}{2a}bx - \frac{bx^3}{6a}}{bx - \frac{b}{2a}xx} = \frac{a^2 - \frac{1}{3}x2}{2a - x}.$$

Da *b* saaledes gaaer ud af sig selv i Regningen, er deraf at slutte, at Bredden af Basis i Trianglet gior intet til Sagen. Og for det hele Triangel, naar $x = a$ er Tyngdens Centers Distance fra ABC $= \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}BF$. Saa om man i *k*, hvor $Fk = \frac{1}{3}BF$, trækker en Linie R*k*M parallel ABC, da er et Sted i samme Tyngdens Center af Trianglet.

Gior man paa selvsamme Maade Udregningen for Trianglet, henført og betragtet i Henseende til GEH, som antages for desto større Bequemheds Skyld at være parallel med Grund-Linien i Trianglet DB; da findes, om Perpendiklen EK ligeledes kastes ned, at Trianglets Tyngdes Centers Distance fra GEH bliver, som før, $\frac{2}{3}EK = oE$. Trækkes da igiennem *o* en Linie *poq* parallel DB; hvor den i *n* overskier den forrige RM, der er Tyngdens Center i Trianglet. Thi dette Punkt er altid der, hvor to af Tyngdens Diametrer overskiære hverandre.

§. 67.

§. 67.

Maade, at bestemme Tyngdens Center i krumme Linier af ulige Arme.

Denne Maade er, som man seer, almindelig for alle Figurer, saa den ikke behøver videre Anmerkninger end at giøre Regningen efter forrige Plan, indrettet som et hvert forekommende Tilfælde det udfordrer. Man seer tillige, hvorledes Centret af Tyngden kan findes i de krumme Linier, som have ulige Arme eller i de Figurer, som ere sammensatte af uligedanne Stykker af krumme Linier. Man haver alene nødig efter §. 65. at søge Taf. VI. Fig. 5. Tyngdens Center G i den givne Figur ABE, og ligeledes samme Center F i Figuren A cD, og siden søge et Punkt H, fra hvilket af Distancerne FH og HG ere i forkeert Forhold af Tyngderne udi F og G, saa er H det søgte Tyngdens Center. §. 65. Till. og 114. Forel.

Og man seer deraf endnu meer, hvorledes denne Maade kan anvendes til en hver sammensat Figur, bestaaende af saa mange deslige adskillige Dele, som man vil.

§. 68.

Naar man ei behøver at giøre Udregningen for Figurerne uden efter en Axel.

Man skiønner let, at det ikke altid behøves at søge Tyngdens Center ved 2 Axler. Ofte er det strax bekiendt, i hvad Linie Tyngdens Center maa falde, og saa tidt det er, behøves ikke at henføre Figuren uden til en Axel. Saaledes, om man Taf. VI. Fig. 3. vil paa denne Maade søge Tyngdens Center til den ydere Parabol, henført til de to perpendikulære Axler EG og AK, som de bequemmeste Linier; da seer man strax, at i Henseende til Axlen AK, falder Tyngdens Center i den selv, thi AEF er ligedan og lige stor med AHG. Altsaa behøves alene at finde, hvor langt hen over AK at AD falder; alt efter Methoden §. 65.

Til den Ende er, efter det forhen sagte §. 53, $ay = x^2$, om $cd = y$, $AC = x$, $bc = dx = \frac{ady}{2\sqrt{ay}}$. Videre $bc \cdot ab = \frac{aydy}{2\sqrt{ay}} = \frac{\sqrt{a}}{2} y^{\frac{1}{2}} dy$. og $badc \cdot \frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{a}}{4} \cdot y^{\frac{3}{2}} dy$. Hvoraf Summen er $\frac{2\sqrt{a}}{4 \cdot 5} y^{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{10} \cdot y^{\frac{5}{2}}$. Hvilket skal divideres med Summen af $bcda$.

Da samme nu er, efter det nylig sagte $\int \frac{\sqrt{a}}{2} y dy = \frac{\sqrt{a}}{2} \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}}$. Saa bliver $\frac{\sqrt{a}}{10} y^{\frac{5}{2}} : \frac{\sqrt{a}}{3} y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{10} y$; som er Distancen fra Axlen EG, og da Tyngdens Center er i AK, saa bliver Distancen $AD = \frac{3}{10} AK = \frac{3}{10} a$; ligesom vi paa en anden Maade før have fundet den §. 64.

§. 69.

Maade, at bestemme Tyngdens Center i de afbrudte Figurer.

Man seer og, at denne samme Maade, at finde Tyngdens Center paa, strekker sig til de afbrudte Figurer: man kan alene agte (Fig. 6. Taf. VI.) at dersom de krumme Linier, og det af dem indsluttede Rum, ere af den Beskaffenhed, at de have en Axel, der gaaer igiennem alle de smaa Tyngders Centrer, og det afhugne Stykke ABC gaaer efter Løbet af Ordinaten AC; da, naar man anseer den hele Figur, som henført til et Plan parallel Ordinaten, og heftet til samme i det Punkt B, som er Spitsen af Axlen, da kan i alt Udregningen gieres som før §. 62, nemlig for den hele Figur; alene at man legger den bestandige Størrelse til Integralen, som gier Forskiellen imellem den forrige Tilfælde og denne.

For

For at oplyse dette, som i sig selv er let, med et Exempel, kan agtes, at efter §. 62 blev fundet for Parabolen $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ og $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Sættes nu, at det afbrudte Stykke er ABC, dets Høide efter Axlen b; da bør, naar $x = b$, Integralen være $= 0$. Følgelig bliver for det Stykke CEDA Integralen $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}b^{\frac{5}{2}}$, for det første Stykke, eller for Tælleren, og for det andet eller Nævneren $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$. Saa for det afkortede ubestemte parabolske Stykke DACE bliver det søgte Punkts Distance fra B, $\frac{3}{5}\frac{(x^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}})}{(x^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})}$, og om $x = a = Bg$, da for det hele Parabolske Stykke DACE som bestemt, $\frac{3}{5}\frac{(a^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}})}{(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})}$.

Saavel i dette, som i andre Tilfælde, seer man let, at man kunde have fundet Tyngdens Center efter det forhen sagte §. 65, eller og at man kunde have søgt Tyngdens Center H til den hele Figur BCED for sig. Til disse Centrer H og K kunde man videre have søgt et Punkt I, saaledes, at Tyngderne udi I og K vare i forkeert Forhold af IH og HK. Derved blev Tyngdens Center i DACE, fundet efter §. 114. Forel.

§. 70.

Tyngdens Center bestemmes i Cirkel-Buerne.

Saa tidt som man behøver at finde Tyngdens Center i Buerne, som i ABC (Fig. 8. Taf. VI.). Eller i Almindelighed af Perimetern eller Omkredsen af Figurerne, da kan det altid skee paa en af de foromtalte Maader. For Ex. Er ABC en Cirkel-Bue, hvis Cen-

ter er D. DC Halv-Diametern, BE den forkeerte, EC den rette Sinus. Da, om $Bg = x$. $hg = dx$. $BD = a$, bliver Elementet af Buen $= \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ansees Figuren, som hengt an i B efter en Axel parallel Løbet af fg eller AC; og BD skier Buen i to lige store Dele, da er Tyngdens Center udi BD, følgelig er man her i den letteste af de foranførte Tilfælde, da samtlig de smaa Tyngder beløbe $2\int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, og deres hele Styrke i at tynge imod det Punkt B, eller deres hele Moment beløber $2\int \frac{axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, hvorfor og det søgte Tyngdens Centers Afstand fra B beløber til

$$\frac{-a.\int \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} - \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}}{\text{Buen } Bf.} = \frac{a.\ B.\ Bf - a\sqrt{2ax - xx}}{B.\ Bf.}$$

$$= \frac{a.\ \text{Buen } fB.\ a\sqrt{2ax - x^2}}{\text{Buen } Bf.}$$; men $\sqrt{2ax - x^2}$ er den halve Streng eller Chorda fg, saa at følgelig, om for den hele Bue i Steden for x sættes b, bliver $fB = AB$ og fg forandres til AE. Hvoraf følger, at den givne Bue forholder sig til Diametern, som den givne Bue, formindsket om sin Sinus, til det søgte Centers Afstand fra $B = Bh$, om h er det Punkt, i hvilket at Centret af Tyngden skal være.

Vil man heller finde samme Afstand fra D, da er

$D h = \frac{a.\ AB - a.\ AB + a.\ AE}{AB} = \frac{a.\ AE}{AB}$, følgelig er den givne Bue til dens hele Korde, som Halv-Diametern til Dh, fuldkommen som før i §. 106. *a.* Forel. Men da vi i Forelæsningerne udførlig have afhandlet, hvad der angaaer Cirklen, er det nok her at have viist Methoden.

§. 71.

§. 71.

Saafremt Buer gives af andre krumme Linier, hvilke ei skieres midt over af en Linie, paa hvis begge Sider at de som smaa Tynger betragtede Elementer ere ligedanne, da maa Tyngdens Center søges efter §. 64 eller 65. Men da dette i Henseende til Maaden at arbeide paa, ingen Vanskelighed videre indeholder, saa ville vi derved ei længere opholde os, for at gaae til de materielle og korperlige Ting selv. I Buerne i Almindelighed.

§. 72.

Maaden at gaae frem paa i Henseende til dem, er den samme, som i det forrige. Men i Almindelighed maa de henføres til tre Planer, og Tyngdens Centers Afstand fra alle tre bestemmes; da det Punkt, hvori det sidste Oversnit skeer, er Tyngdens Center. De Vanskeligheder, som falde for efter denne almindelige Maade, undgaaer man i de nyttigste Tilfælde, hvor det nemlig er vigtigst at vide Tyngdens Centrer. Saaledes seer man strax, at i en Cylinder, hvis Dele ere overalt lige tunge, er Tyngdens Center i Midten af Axlen. I de Legemer, som blive til ved en Figurs Sving om en ubevægelig Axel, er altid Udregningen, som behøves, for at finde Tyngdens Center, overmaade let; fordi i dem Axlen er bekiendt, i hvilken dette Center ligger, saa at derfor Linien, hvori de to Plan overskiere hverandre, er bekiendt, og man alene haver nødig at søge Tyngdens Centers Distance fra det tredie. Saaledes findes derfor Tyngdens Center let i Keilen, og i alle de Ting, som man paa denne Maade kan forestille sig at blive til ved en udregnelig Figurs Omveltning. Tyngdens Center findes i den saa let, fordi Axlen af Tyngden forud er bekiendt, paa Tyngdens Center bestemmes i Legemerne.

hvilken samtlig Oversnittene, betragtede som smaa Tyngder, antages at tynge. Vi ville oplyse begge disse Methoder med et og andet Exempel.

§. 73.

Den Maade at bestemme Tyngdens Center strax bestemmes ved tre Planer.

Saaledes kan i de saa kaldte Parallelopipeder Tyngdens Center

Er Taf. VI. Fig. 9. *adchgeb* et Parallelopipedum i Almindelighed, hvis Høide paa den forlængte Basis er *ck*; da er Indholden *adcb.ck*, eller *ah*, om Indholden af Grund-Fladen *abdc* kaldes *a*, og Høiden *ck*, *h*. Følgelig; da Tyngdens Center er i de Planer, som dele Parallelopipedum i to lige store Dele, saa gaae disse Planer der, hvor Delene af Parallelopipedet ere $\frac{ab}{2}$. Hvilket indeholder et tredobbelt Plan.

Thi $\frac{ab}{2} = \frac{a}{2}.h$ og $a.\frac{b}{2}$. Det første viser, at det ene af Planerne er Diagonal-Planet *ache*; men da ingen Aarsag er, hvorfor meer Diagonalen *ac* skulde tages, end Diagonalen *bd*, saa er Tyngdens Center saavel i Diagonal-Planet *ache*, som i *dbgf*, følgelig i Linien *pq*, hvor de overskiere hverandre, og man seer let, at *qp* er Midt-Linien saavel af Parallelopipedet, som af disse Parallelogrammer selv, fordi *q* og *p* ere de Punkter, i hvilke Diagonalerne overskiere hverandre.

Men da $\frac{a.b}{2}$ er og $= a.\frac{b}{2}$, saa er det Plan, der gaaer igiennem den halve Høide *ck* udi *l*, nemlig *mpon*, det tredie. Dette Plan (hvoraf den Deel, der er inden i Parallelopipedet er *novt*) er

Den Maade at bestemme Tyngdens Center ved tre Planer oplyses ved et Exempel i Parallelopipederne.

perpen-

perpendikulær paa *ck*, og parallel Basis *efgh*, thi *ck* antages at være perpendikulær paa Basis *efhg*. Man seer let, at siden dette sidste Plan deler hele Parallelopipedet i to lige Dele, maa den Linie *r*CL gaae igiennem Midten af *qp*. Tyngdens Center er da i Linien *qp* i det Punkt C. Derfor i alle Parallelopipeder i Almindelighed falder Tyngdens Center i Midten af den Linie, som sammenfeier Midt-Punkterne af begge Grund-Fladerne.

§. 74.

Ligeledes i de prismatiske Legemer.

Da alle prismatiske Legemer kunne ligeledes gives ved *a.h*, saa maa den samme Maade at slutte paa og kunde gielde i dem, som i de forrige. Skiønt de tre Plan, i Henseende til deres Stilning, kunne antages paa flere adskillige Maader, ville vi dog her endnu vise, hvorledes de i det triangulære Prisma kunde betragtes paa samme Maade, som i §. 73.

Saaledes, om (Taf. VI. Fig. 11.) ABCEF er et triangulær Prisma. N et Punkt i samme Plan, som Grund-Fladen CDE. FN Høiden. Trekkes da igiennem Midt-Punkterne *o* og *l*, eller Tyngdens Centrer af de triangulære Grund-Flader to Linier, som A*h*, B*g* i den øverste Grund-Flade og C*i*, DK i den underste; saa bliver, naar Parallelogrammerne fyldestgiøres, ADK*h* det ene Plan, som deler hele Prisma i 2 lige Dele, og B*gi*C ligeledes det andet. Det tredie er Planet HRG*p*, som er parallel Grund-Fladen CDE, og gaaer igiennem Midt-Punktet T af Høiden. *ol* og *tv* ere de Linier af alle tre Planerne, som overskiære hverandre. Derfor er *p* Tyngdens Center, som det Punkt, hvori alle Planerne overskiære hverandre. Og $op = \frac{1}{2}ol$.

Der-

Dersom man i alle andre prismatiske Legemer finder ligeledes i begge Grund-Fladerne to ligedan trokne Diametrer af Tyngden. Da kan man anlegge Planerne, ligeledes som i de nylig anførte Exempler, saa at derfor i Almindelighed følger, **at i alle prismatiske Legemer Tyngdens Center er i Midten af den Linie, som sammenføier Midt-Punkterne af begge Grund-Fladerne,** eller, hvilket er det samme, disse Fladers Tyngdes Centrer. Imidlertid er dette alene sagt, for at oplyse den Methode, som i Legemerne er den egentligste, den at søge Tyngdens Center ved 3 Plan; thi intet kan være lettere, end strax af §. 99 at slutte, at i alle prismatiske Legemer Tyngdens Center er i Midten af den Linie, som sammenføier Tyngdens Centrer af de to imodsatte Sider, det er, af de parallele Baser, fordi de enkelte Tyngders Centrer af alle Snittene i Prisma, som gjøres parallele Basis, ligge i denne Linie.

§. 75.

Jeg maa ved den Anledning med et Par Ord tale om Størrelsens Center i Figurerne. Dette Ord defineres sædvanlig ikke for vel; thi forstaaer man derved et Punkt simpel hen, igiennem hvilket at Figuren kan deles i to lige Dele, da findes en Mængde deslige Punkter i de retlinede Figurer. Tager man Størrelsens Center i denne Mening, da sees meget let, som der er blevet sagt i Forelæsningen §. 108. 2. at Tyngdens Center i Trianglet er ikke altid det samme Punkt, som Størrelsens Center. Thi er Trianglet ABC, i E Tyngdens Center, og DEF parallel BGC, da er $ADF : ABC = AE^2 : AG^2$, fordi ADF og ABC ere ligedanne Triangler. Det er ADF : ABC = 4 : 9. saa at ADF er mindre end den halve Deel af Trianglet.

glet. Vil man derimod T. V. F. 16. finde i AG der Punkt I, igiennem hvilket at Linien HIK parallel BGC skal dele Trianglet i to lige store Dele, da bliver $AI^2 : AG^2 = 1 : 2$ og $AI = AG : \sqrt{2}$. Man seer fremdeles, at om fra B og C ligeledes bleve trokne Diametrer af Tyngden, da fandt man i dem paa samme Maader deslige Punkter som I, men adskillige fra I, igiennem hvilke de Linier, som blive trokne parallele med de vedkommende Bases, deelte Trianglet i to lige store Dele. Følgelig fandtes paa denne Maade ikke et, men flere Størrelsens Centrer.

Forstaaer man derimod ved Størrelsens Center, eller Midten af en Figur, det Punkt, fra hvilket alle igiennem det gaaende Linier dele Figuren i lige Dele, saaledes som Diametrerne i Cirklen og Ellipsen, da findes et saadant Punkt i Parallelogrammet, hvor nemlig Diametrerne overskiere hverandre, som let sees. Derimod findes et saadant Punkt ikke i Trianglet og andre retlinede Figurer.

Men forstaaer man ved Midten af Figurerne eller Størrelsens Center det Punkt, fra hvilket af at en Figur kan deles i saa mange lige store Triangler, som den haver Sider. Da passer denne Definition sig ikke paa alle de Figurer, der have i egentlig Mening et Center som paa Cirklen, men dog paa alle de reguliere Figurer, hvis Midte eller Størrelses Center, altid findes i Centret af den Figurerne indskrevne eller omskrevne Cirkel. Tages desuagtet Størrelsens Center i denne sidste Mening, da kan man sige, at Trianglens Tyngdes og Størrelses Centrer virkelig ere et og det samme Punkt. Thi trekker man til Tyngdens Center E Linierne BE og EC, da sees strax, at $EG = \frac{1}{3}AG$; kastes Perpendiklerne EL og AM ned, bli-

ver ligeledes Høiden EL = $\frac{1}{3}$AM og Trianglet BEC = $\frac{1}{3}$AM. $\frac{1}{2}$BC = $\frac{1}{6}$AM. BC = $\frac{1}{3}$ABC.

Dette Beviis er fuldstændigt, imidlertid kan man, om man vil, overbevise sig desangaaende paa denne Maade. Er Fig. 17. ABC et Triangel, BD = DC. i E Tyngdens Center, og derfor ED = $\frac{1}{3}$AD. Trekkes CEG, og DF Parallel AC. Da er DF = $\frac{1}{2}$GC, fordi BFD og BGC ere ligedanne Triangler. Men FED og AEG ere og ligedanne Triangler og derfor DE : DA = FD : AG, eller 1 : 2 = $\frac{1}{2}$GC : AG, saa AG = GC. Da derfor CG : CA = CD : CB, bliver og GD parallel AB. Derfor igien GED og AEB ligedanne Triangler, og GE : EB = DE : EA. Følgelig GE = $\frac{1}{3}$BG. Saa man seer, at i Trianglet de tre Diametrer af Tyngden AD, BG, CK, overskiere hverandre i et og det samme Punkt, nemlig i Tyngdens Center C og at derfor ABE = BEC = AEC, thi ethvert af disse Triangler = $\frac{1}{3}$ABC.

Man kan og betragte de retlinede Figurer paa samme Fod som de krumme, ved at kalde de rette Linier deres Diametrer, hvilke overskiere i to lige store Dele alle andre, som i Henseende til dem, hele Figuren igiennem, trekkes paa en og den samme Maade. Saaledes som vi Taf. IV. Fig. 9. og i §. 105. Forel. have viist det. Paa denne Maade bliver i Trianglet tre Diametrer, som gaae alle igiennem et Punkt efter det nylig beviiste. I alle Parallelogrammer 4, hvilke gaae igiennem Midten af de ovenstaaende Sider eller Vinkler. Man faaer i de reguliere Figurer ligeledes saa mange deslige Diametrer, som man haver Vinkler eller Sider, og de løbe sammen i et Punkt. Kalder man da Figurens Midte det Punkt, hvori disse Linier alle løbe sammen, da bliver Figurernes Midte og deres Tyngdes Center altid det sam-

samme, saa tidt som de bestaae overalt af eensdanne Dele. Denne sidste Bemærkelse af Størrelsens Center er den mest bequemme, saa tidt som man af Tyngdens Center vil slutte paa Midt-Punktet af Figurerne eller Legemerne, men man maa tillige agte, at det ikke er nok at kalde Størrelsens Center det Punkt, fra hvilket af Figuren deles i to lige store Dele. Man maa legge til, at i dette Punkt Delningen i lige Dele maa skee af de Linier, der kunne ansees, som Figurernes Diametrer, og i det overskiære sig.

§. 76.

Tyngdens Center bestemmes i den hele Keile.

Den Vanskelighed, at betragte tre Plan, falder altid bort, saa tidt som Oversnittet af de to strax er bekiendt, det er; saa tidt som en Diameter af Tyngden hele Legemet igiennem strax er given. Dette gier Udregningen saa let i alle de Legemer, hvilke man kan bilde sig ind, blive til ved en Figurs Omveltning om sin Axel. For Ex. Er ABC (Taf. VII. Fig. 1.) en Keile. Da om Ag, Axlen af Keilen $= a$, $gB = b$. Forholden af den halve Diameter til Peripherien $= 1 : p$, $Af = x$, $fE = dx$. Saa bliver $Ag : gB = Ae : ed$; eller $a : b = x : \frac{bx}{a} = de$ og Rummet i Cirklen, hvis halve Diameter er $de = \frac{pb^2x^2}{2a^2}$, følgelig bliver det Cylindriske Element af Keilen, hvis Tykkelse er dx, $= \frac{pb^2x^2dx}{2a^2}$. Antages nu Keilen i A at være fæstet fast til et Plan, ligeløbende med dens Basis eller Grund-Flade BC, da blive alle de smaa Tyngder $\int \frac{pb^2x^2dx}{2a^2}$ og deres hele Styrke i at overveie paa den Side af A, bliver $\int \frac{pb^2x^3dx}{2a^2}$, saa det søgte Punkts Distance fra A er

$\int\left(\frac{pb^2x^3dx}{2a^2}\right):\int\frac{pb^2x^2dx}{2a^2}=\left(\frac{pb^2}{2a^2}\cdot\frac{x^4}{4}\right):\left(\frac{pb^2}{2a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)=\frac{3}{4}x$. Saa at for den hele Keile, fra Spitsen af at regne, er Tyngdens Centers Distance $=\frac{3}{4}Ag$.

Og ligeledes i den afbrudte.

Saafremt Keilen var afbrudt, saa det Stykke Adh manglede, og $AE=c$, alle andre Benævninger ellers giorte, som før. Da, naar $x=c$, maatte Integralen være $=0$. Følgelig fandt man for Tyngdens Centers Distance fra A i dette Tilfælde $\frac{\frac{1}{4}(x^4-c^4)}{\frac{1}{3}(x^3-c^3)}$; nemlig for den forkortede Keile. Vil man uden Integral-Regning finde Tyngdens Center, da skeer det let efter §. 64; Thi om f er Tyngdens Center i den afbrudte Deel Adh, n i den hele Keile ABC, da findes af disse to efter de der givne Regler k, som vi ville antage at være Tyngdens Center for den Deel dECB.

§. 77.

Saavelsom i den parabolske Keile.

Vil man antage, at Keilen var parabolsk, nemlig bleven til ved en halv Parabols Omveltning om sin Axel (Taf. VII. Fig. 2.). Er da i Parabolen BAC, $Ae=x$, da bliver og $de=\sqrt{ax}$, Cirkel Rummet $dehq=\frac{p}{2}ax$. Det Cylindriske Element $=\frac{p}{2}axdx$, og følgelig de smaa Tyngder i en Sum $=\int\frac{p}{2}axdx=\frac{p}{4}ax^2$. Desuden er deres hele Overvægt $=\int\frac{p}{2}ax^2dx=\frac{p}{6}ax^3$. Saa den søgte Tyngdens Centers Distance fra A $=\frac{\frac{p}{6}ax^3}{\frac{p}{4}ax^2}=\frac{2}{3}x$, og for den hele parabolske Keile $=\frac{2}{3}Ag$. Hvortil maa, som før, legges en bestandig Størrelse, om den parabolske Keile er forkortet. Man seer deraf

deraf fuldkommen, hvorledes arbeides bør i alle andre deslige Tilfælde, saa det var til Unytte at vilde anføre flere og tungere Exempler uden synderlig Nytte.

§. 78.

I Anledning af Keilen kunne vi ikke undlade at tale videre om Pyramiden. Er (Taf. VII. Fig. 3.) GABC en Pyramide. GBA og GBC to af dens Sider. DEF et Snit Parallel ABC, som man veed af Geometrien, bliver altid en Figur, der ligner Basis ABC. Da ere ABC og alle Snit, som DEF, ligedanne Trianggler den hele Pyramide igiennem. Trekkes ligeledes den Linie, hvilken gaaer igiennem Midt-Punkterne s og t, af alle Trianglerne, eller i Almindelighed af alle Snittene, parallele Grund-Fladen, da kan iagttages, at GsE, GtB ere ligedanne Triangler; thi Vinklerne ved s og t ere lige store, og EGs er en fælles Vinkel, følgelig om Eb og Bk ere Høiderne af Trianglerne ABC og DEF, blive altid $DE:Eb$ og $AB:BK$ i bestandig Forhold; thi man veed, at i ligedanne Figurer ere Linier, som trekkes paa en og den samme Maade ligedanne, eller i samme Forhold med de øvrige. Ligeledes ere og $Gs:DF$ og $Gt:AC$, i bestandig Forhold, thi $DE:AB=DF:AC=GE:GB=Gs:Gt$. Følgelig om $Gs=x$, og $1:m$ tilkiendegiver en bestandig Forhold, saavelsom og $1:n$, kan man sætte $DF=mx$ og $bE=nx$, følgelig Trianglet $DEF=\frac{mnx^2}{2}$, og det elementære Prisma $=\frac{mnx^2dx}{2}$, saa Summen af alle de smaa Tyngder beløber $\frac{mn}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3$. Deres Overvægt derimod paa denne Side af G beløber

Og i Pyramiden.

slg til $\int \frac{mn}{2} x^3 dx = \frac{mn}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4$. Følgelig bliver Tyngdens Centers hele Afstand fra G $= \frac{3}{4}x$, og for den hele Pyramide $= \frac{3}{4}a$. Det er; i en Pyramide er Tyngdens Center om $\frac{3}{4}$ borte fra Spitsen udi den Linie, der gaaer fra dens Spitse igiennem Tyngdens Center af den overliggende Grund-Flade, eller et af de Planer, som med den er ligeløbende.

§. 79.

Tyngdens Center bestemmes i Keilen ved tre Planers fælles Oversnit, for ydermere at oplyse denne Methode, at søge Tyngdens Center paa.

Skiønt, som før er blevet forklart; udi alle de Legemer, der blive til ved Omveltning, Tyngdens Center let kan bestemmes, ville vi dog kortelig vise, hvorledes dette Punkt i dem ligeledes kan findes ved at henføre dem til tre Planer, og til den Ende ville vi igien foretage Keilen (Taf. VII. Fig. 5.). Henføres den da først til det Plan ACDB, hvori Linien *lk* er parallel med Keilens Axel *eh*, og Planet selv perpendikulær paa Midt-Linien *lb* af Snittet i Keilen, hvilket vi igien antage perpendikulær paa *eh* og parallel Basis. Ansees Keilen videre som fæstet til det Punkt *k* i Planet, da er enhver af de smaae elementære cylindriske Snit af Keilen, hvis Basis er *adc*, som før §. 76. $= \frac{pb^2x^2dx}{2a^2}$, og deres hele Sum $= \frac{pb^2}{6a^2} \cdot x^3$. Derimod da *d* er i det cylindriske Element Tyngdens Center, bliver *dl* samme Elements Vægt-Stang $= hk = b$, Benævningerne giorte som i §. 65. Videre bliver Elementernes hele Overvægt efter KI $= \int \frac{pb^3x^2dx}{2a^2}$ $= \frac{pb^3}{6a^2} \cdot x^3$. Saafremt det sidste divideres med det første, faaes *b* for Distancen fra Planet ABCD. Saa at man deraf seer, at Tyngdens

dens Center er i det Plan, der gaaer igiennem Axlen af Keilen parallel med ABCD.

For videre at bestemme, hvor dette Plan overskieres af et andet, som efter Bredden gaaer igiennem Tyngdens Center, maa, som før, den hele Keile henføres til det Plan GH*m*N, parallel med Grund-Fladen LKI; og da §. 76. $eb = \frac{3}{4}eh$, (thi den der giorte Udregning er den, som nu her skulde giores) saa er Tyngdens Center i den fælles Linie, hvor Planet igiennem Axlen overskierer Planet parallel Grund-Fladen. Det behoves egentlig ikke, at finde i hvad Punkt i den Linie, som er disse Planer fælles, at Tyngdens Center *b* ligger, da man allerede veed, at det er i Axlen *eh* selv; imidlertid om det skulde søges, maatte Keilen beregnes, som før, i Henseende til det tredie Plan EF*x*Q, da man igien finder, at i Linien *qbr*, som var de to forrige Planers fælles Linie, hvor de overskar hverandre, ligger Tyngdens Center udi *b*, saaledes, at $qb = rb = b$, og følgelig, at dette Punkt er i Axlen selv fra Spitsen *e* af regnet om dens $\frac{3}{4}$, fuldkommen som i §. 76.

§. 80.

Før jeg slutter denne Afhandling, vil jeg endnu for deres Skyld, som kunde ønske, at see de Tilfælde alle anførte, hvilke i Udøvelsen og Brugen i sær kunne have Nytte, anføre Følgende, som dog til stor Deel er overmaade let.

1. I ethvert Trapeze ABCD (Taf. VII. Fig. 6.) findes let Tyngdens Center efter §. 65. ved at trekke Midt-Linien eller Diagonalen BD, for først at bestemme Tyngdens Center i Trianglet ABD, og siden i BDC. Ere disse Centrer *a* og *b*; da ved at søge imellem Tyngdens Center i Trapezerne bestemmes.

dem

dem igien det fælles Center *c*, findes Tyngdens Center for det hele Trapeze. §. 123. Forel.

Ligeledes i alle de ved dem tilveiebragte prismatiske Legemer.

2. Deraf sees videre, at i alle prismatiske Legemer, beskrevne af Trapezer, findes den Linie, i hvis Midte er Tyngdens Center, ved at søge et Punkt som *c*, saavel i den øverste, som underste Basis eller Grund-Linie. Den Linie i Prisma, i hvis Midte Tyngdens Center er, gaaer igiennem disse Punkter.

Saa og i de regulære Figurer.

3) I alle Figurer, som ere regulære, seer man let, at Cirklen, som indskrives i dem, eller, som skrives uden om dem, dens Center maa være deres Tyngdes Center, thi haver den regulære Figur et lige Antal af Sider, seer man det i første Øiekast. Er den derimod af et ulige Antal Sider, er Beviset lidt vanskeligere, men det forstaaes dog i Almindelighed let paa denne Maade. Er f. E. T. V. F. 14. ABDGI en regulær Figur, EFHKL den omkringskrevne Cirkel. CE, CF o. s. v. Perpendiklerne paa Korderne forlængte til Peripherien. Da er den hele Cirkels Tyngdes Center udi *c*. Den hele Cirkel bestaaer af samtlig Trianglerne, som BCD, DCG, o. s. v. udi hvilke at den regulære Figur fra Centret C opløses, og af samtlig Segmenter, som BDE, DGF o. s. v. følgelig om Tyngdens Center af Segmenterne ere i *a* de af Trianglerne i *b*, og i *a* og *b* deres hele Tyngder betragtes, som samlede eller koncentrerte. Da er det klart, at alle Tyngder, som *a*, ligge lige langt fra *c*, og alle Tyngderne som *b* ligeledes.

Følgelig have alle *a* og alle *b* deres fælles Tyngdes Center udi C. Antager man, at alle *a* bleve forringede udi *a* paa hvert Sted om lige meget, da blev endnu Ligevægten paa Vægt-Stængerne EC, CF o. s. v. ligefuldt ved, fordi alle Momenta af Tyngden bleve

paa

paa alle Sider af *c* forringede lige meget. Følgelig om alle *a* blive til slet intet, maa Ligevægten endnu vare ved imellem alle *b*. Følgelig maa den regulære Figur endnu beholde sit Tyngdes Center udi C.

Vil man betiene sig af den Maade, som vi have brugt forhen i Forelæsningerne §. 105, da er den endnu fast lettere. Thi trekkes fra Vinklen B Perpendiklen BH paa den imodsatte Side IG, (eller om Sidernes Antal er lige i den regulære Figur, da man trekker Figurens Diagonaler) og hele Figuren betragtes som opløst i lutter Linier, som *ik*, perpendikulære paa BC, da deles de alle, følgelig og den hele Figur af Diametren BH i to lige store Dele, saa at i BH derfor er Tyngdens Center. Ligeledes bliver i enhver anden Linie som BH, for Ex. AF Tyngdens Center. Hvor derfor at to deslige Linier overskiere hverandre, der er dette Punkt. Men man seer strax, at det er i Centret af den i- eller omkringskrevne Cirkel, fordi saavel BH, som AF, staae perpendikulær paa Korderne IG, GD, og dele dem udi to lige store Dele.

Man seer ligeledes let, at de regulære Figurers Perimeter, som gior deres Omkreds ud, intet andet Tyngdes Center haver, end de selv. Og i disse Figurers Perimeter.

4. Men er Figuren irregulær (Taf. VII. Fig. 7.), da kan dog endnu ligefuldt Methoden bruges af §. 64. Thi i mange-Kanten eller Polygonen ABDEC, faaes ved at trekke Diagonalerne BC og CD, Trianglerne ABC, BCD, CDE, hvis enkelte Tyngdes Centrer, om ere *a*, *b*, *d*; imellem *a* og *b* det fælles Center *c*, imellem *c* og *d* ligeledes *e*; da er *e* den hele Figurs Tyngdes Center. Det samme i de irregulære Figurer, og i de ved dem tilveiebragte prismatiske Legemer.

Ved at søge fremdeles i begge Baser et saadant Punkt, seer man, at den Linie strax findes, i hvis Midte er Tyngdens Center i

alle prismatiske Legemer, der kunne blive til ved irregulære Figurers Synkning.

§. 81.

Tyngdens Center bestemmes i Kugel-Snittene.

For den hele Kugle er Tyngdens Center let funden, men det er i adskillige Tilfælde nyttigt at finde Tyngdens Center af afskaarne Stykker af Kuglen. Taf. VII. Fig. 8.

Saa meget seer man strax, at siden Basis i Snittene af Kuglen BC bør være Cirkler parallele med den største Cirkel i Kuglen, saa blive de til ved Cirkel-Buens BAC Omveltning om Axlen eller Diametern. Er BACB et Kugel-Stykke; EAF en af Kuglens største Halv-Cirkler; AD Halv-Diametren, og Diameter kaldes a. Ad, x. Da er $ad = \sqrt{ax - x^2}$. Er Forholden af Diametern til Peripherien $1 : p$, da bliver Peripherien af Kugel-Snittet $abf = 2p\sqrt{ax - xx}$. Dets Indhold $= p.(ax - xx)$. Det lille Cylindriske Element, som faaes, naar den cirkulære Grund-Flade afb multipliceres med fd, eller dx, bliver $p.(ax - xx)\,dx$; og da de enkelte Tyngders Centrer ligge alle i Axlen AD, bliver af enhver af dem Momentet $= p.(ax - xx).\,xdx$, hvoraf Summen er $p.(\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4)$. Summen af de elementære Tyngder derimod er $p.(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$. Det første dividert med det sidste $= \frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x}$, som er Tyngdens Centers Distance fra Spidsen A for ethvert ubestemt afskaaret Stykke af Kuglen, som BAC. Sætter man $x = \frac{1}{2}a$, for at bestemme Tyngdens Center for den halve Kugle EACF, da om dette Punkt er e, faaes $AE, = \frac{(\frac{1}{6} - \frac{1}{16})a^2}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})a} = \frac{5}{8}a = Ae$.

Saa

Saa man seer, at $Ae : ed = 5 : 3$, det er Tyngdens Center i en halv Kugle ligger om $\frac{3}{8}$ af Halv-Diametern borte fra Centret (*).

Sættes $a = r$, om man nemlig ei vidste Tyngdens Center i den hele Kugle, da fik man $\frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x} = \frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})a^2}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})a} = \frac{1}{2}a$, det er: Den hele Kugle haver sit Tyngdes Center i sit eget Sterrelses Center.

§. 82.

Dersom Snittet var Elliptisk, eller af en Elliptisk Spheroide, da veed man af den Koniske Geometrie, at saa tidt som (Taf. VII. Fig. 10.) Abscissens AD Begyndelse er i Spitsen A af Ellipsen, og Og i Snittene af Ellipsoiderne.

(*) Ozanam paa foranførte Sted beviser dette paa en synthetisk Maade meget artig, som jeg ikke kan undlade her at anføre, esterdi jeg forhen paa samme Maade haver viist, hvorledes Tyngdens Center i alle øvrige egentlig kaldte geometriske Legemer kan findes. Hans Beviis er dette:

Da den halve Kugle (Taf. VII. Fig. 9.) beskrives, som man veed, af den Quart-Cirkel BA, Keilen af en Triangel BED, og Cylindren af en Parallelogram EBAD; Forestiller man sig da disse Figurer saaledes, som Figuren viser, saa EDF bliver Keilen; ABC den halve Kugle; EACF Cylindren; da er, som man veed af Geometrien $EDF = \frac{1}{3}EACF$. Altsaa maa det hule Rum EADCF være saa stor som den halve Kugle. Men man veed, at Tyngdens Center af Keilen er i I saaledes, at $BI = \frac{1}{4}BD$, og Cylindrens i Midten H, saa $BH = \frac{1}{2}BD$. Deraf kan §. 64 K findes, eller Tyngdens Center i den halve Kugle. Thi da Kuglens Tyngde er som 2, og Keilens som 1, er $HI = 2$ og $HK = 1$, §. 114 Forel. saa $HK = \frac{1}{2}HI$. Men $BH - BI = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Følgelig er $HK = \frac{1}{8}$ og $BK = \frac{7}{8}$. Følgelig $BK : KD = 5 : 3$.

dennes Axel AB kaldes a. Parametern b. Abscissen Ad, x. Den halve Ordinate Ed, y. Da er Ligheden til Ellipsen $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$. Halv-Diametern cd beskriver ved den halve Ellipses Omveltning en Cirkel *fcge* i Spheroiden. Er da Peripherien til Diametern $= p : 1$, bliver samme Cirkels Indhold $= y^2 p = p.(bx - \frac{bx^2}{a})$. Er $fd = dx$, bliver det cylindriske Element af Ellipsen, eller $sq\text{E}f.\ fd = p\,(bx - \frac{bx^2}{a})\,dx$, og dets hele Moment findes at være $= p.(bx - \frac{bx^2}{a})\,xdx$, hvoraf Integralen er, som man strax seer, $p.(\frac{1}{3}bx^3 - \frac{b}{4a}x^4) = \text{A}$.

Derimod er Summen af Tyngderne $= \int p.\,(bx - \frac{bx^2}{a})\,dx$ $= p.(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}x^3) = \text{B}$.

Divideres A med B, faaes $\frac{\frac{1}{3}x - \frac{x^2}{4a}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{x}{a}} = \frac{\frac{1}{3}ax - \frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x}$, som er det selvsamme, hvilket vi forhen have fundet for Cirklen, hvoraf man seer,

at dersom omkring en Elliptisk Spheroide beskrives en Kugle AaB, saa at begge have samme Axel, da have og deres afskaarne Stykker det samme Tyngdes Center.

Man beviser paa samme Maade, at denne Regel gielder og for Cirklen og Ellipsen selv, naar de have samme Axel. Deres afskaarne Stykker have altid det samme Tyngdes Center, saa at man ved at bestemme det ene, og kan bestemme det andet. §. 83.

§. 83.

Før vi forlade den Betragtning om Tyngdens Center, ville vi endnu agte, at hvad heller alle de smaa Dele, i hvilke Tyngderne, som i lige saa mange smaa Elementer, betragtes at være deelte. Hvad heller, siger jeg, at disse smaa Dele deres Tyngders Centrer multipliceres hver for sig med deres Distancer fra et horizontalt Plan, til hvilket de alle henføres; eller og om deres hele Tyngde multipliceres alene med det fælles Tyngdes Centers Distance fra samme Plan, da faaes i begge Tilfælde den samme Størrelse.

De enkelte Tyngder multiplicerte hver for sig med deres Distance fra et horizontal Plan give det samme Moment, som deres fælles Tyngdes Center multiplicert alene med sin Distance fra dette Plan.

Thi forestilles (Taf. VI. Fig. 7.) de enkelte Tyngders Centrer ved a, b, i, k, l, og de i dem concentrerte Tyngder benævnes med disse Bogstaver. Er ab den Linie, som sammenføier de to af dem a og b, da findes disses fælles Tyngdes Center f, ved at tage $af : fb = b : a$. §. 123. Forel. Trekkes fra f den Linie fe perpendikulær paa det horizontale Plan ABCD, saa fe derfor bliver parallel da og bc, og videre paa efg fra a og b Perpendiklerne ag og bh kastes ned, da blive afg og hbf ligedanne Triangler, og fordi $a.af = b.bf$, bliver og $a.fg = b.hf$, det er; $a.(ad - fe) = b.(fe - bc)$ eller $a.ad + b.bc = a.fe + b.fe = (a+b).fe$.

Da nu den selvsamme Betragtning kan giores imellem f og i, siden imellem deres fælles Tyngdes Center og k, og saa videre fort, saa Slutningen immer bliver den samme, i hvor mange enkelte Tyngders Centrer at der end ere antagne, saa følger; at den hele Tyngde multiplicert med sit Centers Distance fra det hele Plan, udgior alene lige saa meget, som samtlig Tyngderne af alle enkelte Elementer af Tyngden, multiplicerte hver for sig med deres Tyngders Centrers enkelte Distancer fra det horizontale Plan.

Syvende Forelæsning.

Fortsættelse om de svingende Tyngder.

§. 132.

Af Pendulerne bevises, at en Tyngde falder i det første Secund $15\frac{1}{12}$ Pariser Fod.

Efter at have forklart det nødvendigste om Tyngdens Center, ville vi igien foretage den Sag om de svingende Tyngder, eller om Pendulerne, og strax begynde med at vise en overmaade stor Nytte, som denne Lærdom fører med sig, i det den sienspynlig beviser, hvor meget man behøver endog de høiere og vanskeligere geometriske Beregninger og Undersøgninger, naar man vil gaae lykkelig frem i Naturens Kundskab. Det her handles om, er en af de store Hoved-Forsøg, hvorpaa man maa anlegge alt i de mekaniske Udregninger, forstaae; engang for alle ved en upaatvivlelig Erfaring at afgiøre, hvor langt en Ting falder i Vertikalen ned efter i en vis given Tid, for Ex. i et Sekund; naar den drives af den naturlige Tyngde. Dertil udfordres intet andet, end at afgiøre ved Erfaring Længden af et Pendul, som svinger i en vis given Tid. Saaledes, da man paa denne sidste Maade noie haver fundet, at et Pendul, som svinger i et Sekund Tid, holder i Længde 3 Fod $8\frac{1}{2}$ Linie Pariser Maal (*), og man tillige maa anse som bekiendt, §. 97. 2. at

(*) Mr. *Mairan Memoires de l'Acad. des Scienc. An.* 1735.

at Tiden af Svinget igiennem Buen, naar denne ei er uden liden, det er, ei overgaaer 15°, 30′ (*), forholder sig til Tiden igiennem Pendulets halve Længde, som Peripherien til Diametern. Saa findes let Tiden, i hvilken et faldende Legeme igiennemlober Sekund-Pendulets halve Længde, eller $220\frac{1}{4}$ Linie, ved at sige, som 314 : 100 = 1″ : Tiden igiennem $220\frac{1}{4}$ Linie, hvilken Tid derfor bliver = $\frac{100''}{314}$. Veed man saaledes, at i den Tid af $\frac{100''}{314}$ igiennemlobes $\frac{881}{4}$ Linie, kan ligeledes det efter Vertikalen i et Sekund igiennemlobne Rum let findes; da disse Rum forholde sig som Quadraterne af Tiderne, §. 48. og følgelig, om det søgte Rum kaldes x,

bliver $\frac{881}{4} : x = \frac{100000''}{98596} : 1''$. Hvoraf videre faaes $\frac{86863076'''}{40000} = x$, men $\frac{86863076'''}{40000} = 2171\frac{23076}{40000}$, for hvilken Brok vi sætte 1, saa man faaer $x = 2172''$, samme dividert med $144 = 15\frac{12}{144} = 15\frac{1}{12}$ Pariser Fod, som er den vertikale Høide, hvilken et Legeme igiennemlober i et Secund.

§. 133.

Saaledes kan man ved Hielp af Pendulerne afgiøre en Sag, som ellers er høist vanskelig ved Erfaring rigtig at bestemme, Maade, at undersøge Tiden, som et Legeme

(*) Dette er bevist §. 43. 3. i Tillæggene.

som med størst Flid synes at have undersøgt Sekund-Pendulets Længde, sætter den til $440\frac{17}{30}'''$, men sædvanlig bruger man $440\frac{1}{12}'''$.

igiennemløber i et Secund ved umiddelbar Erfaring.

stemme, og som mange have forsøgt, uden at en Erfaring nogensinde haver vildet stemme ret med den anden, deels fordi Luften svekker de faldende Tings Hastighed anseelig, naar denne bliver nogenlunde stor; deels og, fordi man ei lettelig kan sige sig frie for at begaae betydelige Feil i den simple Erfaring ved at bestemme, hvor det faldende Legeme net op var ved Slutningen af den foresatte Tid. Hugenius synes at have optænkt (*) den beste Maade af alle, som man og nogenlunde kan vente at være lykkelig i: Den bestaaer i at henge et fort anloben Pendul op paa en horizontal Nagle perpendikulær imod en Veg, saa Pendulet, naar det hviler, rører Veggen, og kan, naar det loftes op, falde om sit halve Sving net op, før det støder an paa den. Lader man da paa en og den samme Tid baade Pendulen, loftet ud fra Veggen, og ligeledes en Tyngde, heftet til et langt Stykke Papiir, falde hoit oven fra, da viser Slaget af Pendulen paa det lange Papir, som den faldende Tyngde trekker efter sig, hvor langt denne sidste er falden i den Tid, Pendulen haver giort sit halve Sving; hvilken kan, eftersom man finder det bequemmest til, være en vis Deel af et Secund. Hugenius fortæller, sig at have igientaget dette Forsog adskillige gange, og altid at have fundet Længden af Faldet i et Secund Tid = $15\frac{1}{12}$ Pariser Fod.

§. 134.

(*) Denne store Mand var den første, som i sit prægtige Verk, kaldet *Horologium Oscillatorium*, paa en fast synthetisk Maade beviiste de foromtalte merkelige Egenskaber af Cykloiden og Pendulerne. Man kan her see *Hor. Oscill. p. IV. prop.* 25.

§. 134.

Pendulernes Længder ere som Quadraterne af Tiderne, hvori de svinge.

Men for at finde Længden af et Pendul, som slaaer Secunder, er det nok, at vide Længden af et hvert andet Pendul og af den Tid tillige, hvori det svinger, hvilket kan befordres ved følgende Slutninger, som i en Mængde Tilfælde have en anseelig Nytte. Den første er, at Længderne af adskillige Penduler, som enten svinge over smaa eller over ligedanne Buer, forholde sig under sig som Quadraterne af de Tider, hvori de svinge. Dette sees overmaade let. Det sidste af §. 81. 4 Forel. Det første derimod saaledes. Ere (Taf. VII. Fig. 11.) AB og *ab* to Penduler, CDB og *cdb* de smaa Buer, i hvilke de svinge, da er Tiden over CDB til Tiden igiennem $\frac{1}{2}$AB = Periph. : Diametern, §. 97. Og ligeledes Tiden over *cdb* til Tiden igiennem $\frac{1}{2}ab$ = Periph. : Diametern. Derfor er Tiden i CDB til den i *cdb* = Quadrat-Roden af $\frac{1}{2}$AB til Quadrat-Roden af $\frac{1}{2}ab$. §. 48.

Kaldes den første Tid T, den sidste *t*, da bliver $T : t = \sqrt{\frac{1}{2}AB} : \sqrt{\frac{1}{2}ab}$, følgelig $T^2 : t^2 = \frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} = AB : ab$.

Saaledes er et Pendul, som svinger i dobbelt Tid, firedobbelt lang, og det, som svinger i halv Tid, ikke uden fierde-Delen saa lang, som det, der svinger udi enkelt Tid.

§. 135.

Af Tiderne, hvori to Penduler svinge, og den enes Længde, at

Deraf sees, hvorledes man altid kan, naar Længden af et Pendul er given, og den Tid, hvori det svinger, finde Længden af et andet Pendul, som svinger ligeledes i smaa

Finde Længden af den anden.

Buer i en anden given Tid. Thi er Længden af det givne l. Tiden, det svinger i t. Længden, som søges, x. Tiden, hvori det skal svinge, T. Da er $t^2 : T^2 = l : x$, og $x = \frac{lT^2}{t^2}$. For Ex. Et Pendul til Sekunder er 3 Fod $8\frac{1}{2}'''$, hvad er Længden af et Pendul, som skal svinge i $\frac{1}{3}'''$? Saa bliver $x = \frac{lT^2}{t^2}$ $= \frac{881}{18}$ Linie $= 48\frac{17}{18}'''$.

§. 136.

Af to Pendulers Længder og Tiden, hvori den ene svinger, at finde Tiden, hvori den anden svinger.

Ligeledes sees, hvorledes man kan, naar Længderne l og x af begge Pendulerne ere givne med Tiden T, hvori det ene svinger, finde Tiden, i hvilken det andet skal svinge. Thi $x = \frac{LT^2}{t^2}$ og t er den Tid, som søges, saa bliver $t = T.\sqrt{\frac{L}{x}}$. Da derfor et Pendul til $3' 8\frac{1}{2}'''$ Længde svinger i et Sekund, findes Tiden af Svinget for et Pendul af $48\frac{17}{18}'''$ Længde at være $= T\sqrt{\frac{l}{x}} = \sqrt{\frac{881}{2}} : \sqrt{\frac{881}{18}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ Sekund.

§. 137.

Pendule, som svinge bestandig i samme Tid, gjøre et Antal af Sving, som er Tiderne forkeert proportionerte, hvori de enkelte Sving skeer.

Da det er lettere at finde, hvor mange Sving et Pendul gjør i en vis Tid, end den Deel af samme, hvori et enkelte skeer, saa er det andet, man her maa agte: At naar to Penduler gjøre hver for sig i samme Tid alle deres enkelte Sving, eller bestandig svinge inden for 15°. Da ere Antallene af alle deres Sving i samme Tid forkeert, som Tiderne af de enkelte Sving. Dette er af sig selv overmaade klart, thi

gjør

gior den ene to Sving i den Tid, hvori den anden ikke gior uden et, maa Tiderne af de enkelte Sving være $= \frac{1}{2} : 1$. o. s. v.

§. 138.

Længderne af Pendulerne ere i forkeert Forhold af Quadraterne af de Sving, som de gjøre i samme Tid.

Folgelig om Antallene af Svingene i to Penduler, som svinge over smaa Buer, kaldes N og n, og Tiderne, hvori de enkelte Sving skee, kaldes T og t; (T svarer til N og t til n) da er $N : n = t : T$. §. 137. ere Længderne af Penduler-ne L og l, (L svarer ligeledes til N, og l til n) da ere $t : T = \sqrt{l} : \sqrt{L}$, §. 134. folgelig bliver $N^2 : n^2 = l : L$, det er:

Længderne af Pendulerne forholde sig som forkeert-Viis Quadraterne af de Antal Sving, hvilke samme Penduler gjøre udi en og den samme Tid.

§. 139.

Af det givne Antal Sving at finde Pendulets Længde.

Man kan derfor altid, saasnart som man veed Antallet af de Sving, hvilke et Pendul af en given Længde gior i en vis Tid, og hvor mange Sving et andet gior i samme Tid, finde Længden af dette sidste.

Saaledes; Da man veed, at Længden af et Pendul, som svinger engang i en Sekunde, er $\frac{881}{2}$ Linie, findes let Længden af det, som svinger 10 gange i et Sekunde, ved at sige, som $100 : 1 = \frac{881}{2}$ til den sogte Længde.

Man kan deraf ved Erfaring allerbest bestemme Længden af et Pendul til Sekunder; thi tager man et Pendul af en bekiendt Længde L, og lader det svinge med smaa Sving, jo længere desto bædre, for Ex. i en Time. Tæller man Svin-

gene, og finder deres Antal $= n$, da gior et Pendul af den Længde L i et Secund Sving, hvis Antal er $\frac{n}{3600}$. Deraf findes let den søgte Længde x af et Pendul, som i et Sekund skal giore et Sving. Thi

$$L : x = \frac{(3600)^2}{n^2} : 1. \S. 138. \text{ saa } x = \frac{Ln^2}{(3600)^2}$$

§. 140.

Et Slags besynderlig Brug, som kan giøres af det forrige.

Man kan af denne sidste Pendulernes Egenskab undertiden giore en anseelig Brug i at bestemme noget nesten Høiden af de Ting, fra hvilke i Snorer Tyngder hænge ned efter, som i at maale Hvelvingers Høider i Kirkerne, naar ved dem ere hengte Lyse-Kroner, og i andre deslige Tilfælde. Man haver alene nødig at bevæge de saaledes hengende Tyngder, og at tælle, hvor mange Sving de giore, for Ex. i et Minut, for efter §. 139 at finde Høiden. For Ex. Et saadant Legeme svinger frem og tilbage 30 hele Sving i et Minute, hvad er Høiden eller Længden af det simple Pendul? til hvilket et saadant Legeme altid kan bringes, efter hvad i det følgende udførligere skal blive vist.

Da Svingenes Antal i et Minut er 30 efter Hypothesen, saa er samme i $\frac{1}{60}'$ eller i $1'' = \frac{1}{2}$, følgelig da Længden af det Pendul, som svinger en gang i et Secund er $\frac{881}{2}'''$, saa bliver §. 138, $\frac{1}{4} : 1 = \frac{881}{2}$ til det søgte simple Penduls Længde; eller til $1762'''$, eller $12'\,2.''.10'''$,

§. 141.

§. 141.

Vi have seet i det forrige en anseelig Nytte af Pendulerne, men i Brugen er iblant alle, som de kunde have, ingen større end den, at de give Uhrene en jævn og ligedan Gang, saa disse noie og tilforladelig ved Hielp af dem kunne indrettes til at vise Tiden. Thi om de Uhret drivende Kræfter drive ulige, da er det klart, at Pendulen derved alene sættes nu i en stærkere, nu i en svagere Bevægelse; men siden disse Bevægelser skee efter det forhen sagte §. 97. alle i den samme Tid, saa holdes i den ene Tilfælde Takker og Hiul i Uhret oppe, at de ei gaae for hastig om, i den anden derimod befordres ved Pendulen deres Omveltning: Saa intet større og bedre Middel kunde optænkes til Uhrenes Forbedring og Tidens Indretning end disse svingende Tyngder, alene at de Buer, som de slaae, ei overgaae den foromtalte Størrelse af 15°. Hvorved man kan agte, at ligesom de cykloidalske Buer ere de beste i Theorien, ere derimod de cirkulære de bequemmeste i Brugen, og mindre Uleiligheder underkastede, end disse andre, efter det forhen sagte. Man gior i Brugen Pendulerne af Linse-Figur (Lenticulares), at de desto bedre kunne bevæge sig igiennem Luften. Pendulernes store Nytte i Uhrene.

§. 142.

Da Længderne af Pendulerne, fra Henge-Punktet til Tyngdens Center af en meget liden Tyngde, som vi have i det forrige antaget, skulde henges i Enden af Pendul-Linien: Da, siger jeg, disse Længder forholde sig som Quadraterne af Tiderne, Maade, at rette Uhrene ved Pendulerne.

eller, om man vil, Tiderne som Quadrat-Rodderne af Længderne, §. 134. saa maa et langt Pendul anvende længere Tid i sit Sving, et kort derimod en kortere. Følgelig, om man nok saa lidet forlænger eller forkorter Pendulen, ved at skrue Tyngden i Enden lidt op eller ned, saa er det eiensynligt, at Uhrets Gang derved maa forandres. Derfor er det, at man stiller og retter Uhrene, ved at skrue Tyngden i Enden af Pendulerne lidet op, om Uhret gaaer for langsom, og lidet ned, om det gaaer for fast.

§. 143.

Dette er saa meget meer nødvendigt, som Pendulerne ere tillige med alle Delene i et Uhr Veirligets Forandringer i høi Grad underkastede, fordi Snorer forkortes ved Fugtighed, og blive længere i Varmen; Metallen derimod breder sig videre ud i Hede, og trekker sig sammen i Kuld. Man har Instrumenter, de saa kaldne Pyrometrer, hvorved man undersøger Metallernes Forandringer. Men da Forklaringen af disse Instrumenter egentlig henhører til Physik, ville vi derved ei opholde os. Desagylier forsikrer i den femte Forelæsning af sin Physik §. 75, at Forandringen i en lang Pendul kan gaae til $\frac{1}{40}$ Tomme.

§. 144.

En anden betydelig Nytte, som kan gjøres af Pendulerne.

Men Nytten af Pendulerne bliver ikke staaende derved, de give os desuden et almindeligt Maal, om vi deraf ville betiene os. Et Maal, som aldrig kan blive tabt for Eftertiden, med mindre

dre Tyngden selv paa et og det samme Sted i Verden skulde forandre sig, og da i Eftertiden ei være meer den samme som nu. Disse og andre deslige store Hoved-Forandringer i Naturen, saa længe de ei treffe ind, er det altid let, at give i Steden for det nu værende og efter Behag tagne et i Naturen grundet og af den bestemt Maal, forstaae Længden af et Pendul, som slaaer Secunder, eller en dets Deel. For Exemp. med Hugenio Tredie-Delen, som da blev meget lidt adskillig fra en af vore nu brugelige Danske Fodder. Dersom de gamle Folk havde nok saa rigtig bestemt os i deres Fodder og Roder Længden af en Grad i Meridianen, hvilken man i vor Tid med saa stor Møie og Bekostning haver søgt, havde det dog i vor Tid ikke meer været os muelig, at vide Længden af denne Grad, fordi det af dem dertil tagne Maal i Tiden, som intet sparer uden den uforanderlige Natur selv, var forgaaet, uden at det var os nu meer mueligt at komme efter, hvad det var. Denne Ulejlighed kunde man undgaae paa for sagte Maade, ved at give vores Maal i Giemme til Naturen, det er, ved at giøre den Tredie-Deel af Sekund-Pendulets Længde til den brugelige Fod, og det var overmaade at ønske, at dette ved offentlig Myndighed virkelig skede, siden man da altid i Eftertiden kunde vide, hvad Maal det Folk paa det Sted havde brugt, og saaledes betiene sig af de af dem giorte enkelte Maalninger og Udregninger. Hvor brudt (*) man i de ældre Tider haver været med at give Efterkommerne et vist Maal

(*) See *Snellii Eratosth. Batav. Lib.* 1. *Cap.* 20.

Maal, kan iblant andet sees deraf, at Araberne dertil valgte Bygkorn 24 paa en Palme, og bestemte Bygkornets Størrelse igien ved 6 Heste-Haar af Halen, lagte umiddelbar hos hverandre; men om de Arabiske Heste-Haar alle vare lige tykke, og saa tykke som vore, er ondt at bestemme, saa kommer det og an paa, om de alle gange kunde legges eens, hvoraf sees, at dette Maal er meget uvist.

§. 145.

Hvad ved den tillige maa agtes.

Men herved maa agtes, at det Steds Bredde maa nogenlunde rigtig tillige angives, hvortil man regner Secund-Pendulets Længde, thi Erfaring lærer, at et Pendul, som slaaer Secunder er ei af samme Længde hele Verden over. Under Linien, eller omkring ved den, er det kiendelig kortere, end i Landene høiere oppe imod Polerne. Deraf følger, siden man kan bevise intet andet dertil, at kunne være Aarsag end Tyngdens Formindskelse, at Tyngden af Tingene ei er hele Verden over den samme. Man seer let, hvorledes dette maa følge. Da nemlig den hastiggiorende Kraft, som driver Pendulen, er Tyngden af Loddet, og følgelig den paa et hvert Sted i Verden regierende naturlige Tyngde; saa er det klart, at saasnart som Pendulen, alt for Resten lige, begynder at gaae langsommere, maa den drivende Kraft, det er Tyngden af Loddet paa Enden af Pendulen være bleven ringere: Siden det altid er en sikker Følge, at naar Virkningen bliver mindre, maa den virkende og uden Hindring handlende Aarsag og i sig være bleven mindre. En fuldkomnere Forklaring af dette skulle vi foretage i nestfølgende Forelæsning.

Ottende

Ottende Forelæsning.

Om den naturlige Tyngdes Foranderlighed paa adskillige Steder i Verden, og om Svingets Center i de sammensatte Penduler.

§. 146.

Fortsættelse af det forrige.

Vi sluttede vores sidste Forelæsning dermed, at Tyngden ei var hele Verden over den samme; men at den var mindre under Linien, større imod Polerne. Man maa vel agte, at den Forandring, vi her tale om, er den hastiggiorende Kraft selv af Tyngden i Naturen; den er det, som efter Stederne er foranderlig større eller mindre, hvoraf siden videre flyder Forandring i Vægten.

§. 147.

Hvorledes man haver fundet, at Tyngden er mindre under Linien, end imod Polerne.

Man stod længe i den Tanke, at Tyngden var eens hele Verden over, saa Tingene paa alle Steder veiede lige meget, og denne Vildfarelse havde vel blevet uforanderlig ved, om man i Geometrien ei havde begyndt at giore Pendulernes Beskaffenheder bekiendte; til al Lykke var dette Arbeide giort, da den store Hallei paa en Reise til St. Helena merkede, at

Pendulerne imod Linien maatte forkortes, dog uden at bestemme hvor meget. Men Aar 1679 førte Mr. Richer, en Franzos, et Pendul-Uhr med sig paa Reisen til Øen Cajenne, der ligger 5° at regne fra Linien, eller Æquator. Mr. Richers Uhr gik rigtig i Paris, men altid for langsom i Cajenne; man søgte Forskiellen i Varmen, men den var langt fra ikke dertil tilstrekkelig nok, Mr. Richer maatte forkorte sin Pendul, som var $3' 0'' 8\frac{3}{5}'''$ om $1\frac{1}{4}'''$, før det vilde gaae rigtig. Denne merkelige Jagttagelse, eller Observation, giorde de Europæiske Geometrer opmerksom, man sluttede deraf, at Tyngden maatte være foranderlig; mindre under Linien, større imod Polerne, og deraf igien, hvad vi paa sit Sted nærmere skulle vise, at Jorden maatte være aflang og ikke rund. Dette sidste er blevet ved den Kongelige Franske Gavmildhed saa vel bevist, og stemmer saa noie med hvad man i samme Henseende kan udregne af Pendulerne, saa at da den ene Erfaring saa stærk bekræfter den anden, ingen Tvivl er paa, at jo Tyngden er mindre under Æquator, og voxer siden immer hen imod Polerne.

Siden den Tid have vi en stor Mængde deslige Jagttagelser, hvoraf de nyeste og nest under Linien giorte vise, at til Quito, som ligger 0° 25' sydlig Bredde paa hiin Side Linien, var Længden af Secund-Pendulet, efter Efterretningerne af Mr. Bougver $438\frac{82}{100}$ Linie, efter Mr. Condamine $438\frac{84}{100}$. Da derimod til Pello, som er det høieste Sted imod Nord, hvor man haver observert Længden af Sekund-Pendulet, efter Mr. Maupertuis Beretning, under 66° 47' nordlig

nordlig Bredde Længden af Sekund-Pendulet beløb 441 $\frac{17}{100}$ Linie, som er en anseelig Forskiel fra dets Længde i Quitto. Men det er ikke her Stedet, at udføre alt det herhid hørende. Vi have dertil endnu heller ikke de fornødne Grunde.

§. 148.

Vægten er Materien proportionert.

Imidlertid trække vi af Erfaringerne om Pendulerne atter igien en nye Bekræftelse paa en af de meget vigtige Sandheder, som maa legges til Grund i Mekanik, paa den nemlig, at Tyngden altid er Materiens Mængde proportionert (*), hvorom vi have talt i det foregaaende §. 35. Thi dersom Tyngden ei drev alle Materier lige og efter deres mindste Dele, men efter deres ydere Omsvob, maatte lige lange Pendulers Bevægelse nødvendig være i Henseende til Tiden adskillig, saa snart som de bevægende Aarsager vare adskillige, det er, saa snart som de Tyngder, der drev dem, vare adskillige i Storrelse, og i hvor liden end denne Forandring var, maatte den dog nødvendig tilsidst røbe sig ved Svingenes Mængde. Men dette sidste er just, hvad alle Erfaringer over Pendulerne bevise, at hvad heller de Lod, som henges i Enden af Pendulerne, gjøres større eller mindre, alene at Længden af den hele Pendul derved ikke forandres, skee dog Svingerne desuagtet ligefuldt udi samme Tid. Det samme skeer, om Lod henges i Enden af Pendulerne, for at

(*) Dette findes af den Lærdom om Pendulerne udførligere bevist i nestfølgende Tillæg §. 76.

drive dem, hvilke vel ere af samme Tyngde, men af adskillig Materie, følgelig og af adskillig udvendig Peripherie eller Omkreds.

§. 149.

Penduler, som svinge i samme Tid, have deres Længder de drivende Kræfter proportionerte.

Vi have seet, at Pendulerne, saa snart som de drivende Kræfter blive mindre, maa forkortes; Men hvor meget? Altid i Proportion af Kræfterne, thi det er beviist (*), at dersom Penduler, der drives af adskillige Kræfter, skulle svinge med hinanden i en og den samme Tid, da maa de drivende Kræfter være Længderne af Pendulerne proportionerte, hvoraf sees, at man kan af Pendulernes Længde strax slutte til Størrelsen af Tyngden paa et hvert Sted paa Jorden. §. 147.

§. 150.

Tiderne af Svinget deres Forhold til de foranderlige drivende Kræfter og til Pendulernes Længde.

Det er ligeledes beviist (**), at saa tidt som de Kræfter af Tyngden, hvilke drive Penduler af ulige Længde, ere under sig adskillige, da forholde de sig til hverandre, som Længderne af Pendulerne lige frem tagne, og som Quadraterne af Tiderne forkeert tagne. Deraf kan man fuldkommen forstaae, hvad vi saa løslig beviiste §. 145.

§. 151.

* Thi man seer af denne sidste Sætning fuldkommen, hvad Overeenstemmelse der er imellem Pendulernes Sving og de

(*) Dette findes beviist i nestfølgende Tillæg.

(**) Dette ligeledes.

de Kræfter af Tyngden, som drive dem. Kaldes den drivende Kraft g, Tiden af Svinget t, Længden af Pendulen L, da er §. 150. $t = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$, er Længden af Pendulen den samme, da bliver $t = \frac{1}{\sqrt{g}}$ eller Tiden, som Quadrat-Roden af den hastiggiorende Kraft forkeert tagen. Hvoraf sees, at jo mindre denne Kraft bliver, desto større bliver Tiden af Svinget. Thi vare de drivende Kræfter som 1 og $\frac{1}{4}$, blive Tiderne som 1 : 2, følgelig varede Svinget dobbelt saa længe i det første, som i det sidste Tilfælde.

Og omvendt. Dersom Tiden, hvori Svinget skeer af samme Pendul, bliver længere, da bliver den drivende Kraft mindre. Thi da er $t = \frac{1}{\sqrt{g}}$. Bliver t større, maa Nævneren i Broken nødvendig blive mindre, hvoraf videre sees.

1) At man af Tidernes Forskiel i Svingene kan slutte sig til Tyngdens adskillige Beskaffenhed og Forhold paa adskillige Steder paa Jorden.

2) At i Almindelighed, naar Tyngden bliver mindre, maa Pendulen forkortes. Bliver den større, maa den forlænges.

§. 152.

Vi skulle i de Forelæsninger, som følge umiddelbar paa disse; i de, hvor vi handle om de saa kaldte Central-Kræfter, nærmere vise, hvad det kan være i Naturen, som gior, at

den naturlige Tyngde er saa foranderlig paa adskillige Steder paa Jorden. Her ville vi alene erindre, at da den Sag om Pendulernes ordentlige Gang, er, som man allerede haver seet, af en saa overmaade Vigtighed, bør man giøre sig stor Flid for at bringe de svingende Tyngder dertil, at man med dem kan giøre saa noie Erfaringer, som man behøver og bør have. Til den Ende maa agtes, at vi i det forrige have antaget Længden af Pendulen, eller af den Linie, hvori Loddet i Enden hengte, som uden Tyngde og ubøielig. Videre have vi betragtet Loddet selv fast som et Punkt, hvori Tyngden var koncentrert. Da nu begge Dele ere en pur geometrisk Betragtning, og det sidste ikke svarer til vores antagne, uden saa længe det paahængte Lod er af meget liden Størrelse, saa er det høi nødvendigt, endnu videre at betragte Pendulerne saaledes, som de i Brugen virkelig ere, som tunge Legemer, der overalt have en Materie, hvilken paa adskillige Steder af Pendulet, drives af Tyngden paa adskillige Maader, og med adskillig Bevægelse.

§. 153.

Foreløbende Anmerkninger om Svingets Center.

For at nærme os til disse Betragtninger, ville vi foretage den simpleste af alle Tilfælde; den nemlig, i hvilken vi endnu ansee Linien, der udgior Pendulet AB (Taf. VII. Fig. 12.) som pur geometrisk, men ubøielig og belagt hist og her med Tyngder, som for Exempel i *t*, E og B. Det man derpaa bør søge, er at finde, hvor langt et Pendul AL skulde være, i hvis Ende L om samtlig Tyngderne, som ligge hele

Stangen

Stangen over, bleve anhengte i deres Tyngdes Center, Svinget da af dette sidste Pendul burde skee i samme Tid, som af den hele Stang AB, med alle sine Tyngder.

Et Pendul, som Stangen belagt med Tyngder, kalder man et sammensat Pendul, da man derimod kalder det sidste et simpel: Men det er af dette sidstes Længde, at man bør, som man seer, domme det hele Sammensattes Længde.

Det Punkt L derimod, som bestemmer Længden AL af det simple Pendul, kaldes Svingets Center. Det Punkt A, hvori det hele Pendul ansees som ophengt, kaldes Henge-Punktet, eller, om man vil, Pendulens Center (Centrum Suspensionis).

§. 154.

Svingets Center er det Punkt i et Legeme, hvilket falder, som om det blev frit dreven af Tyngden.

Videre maa agtes, at da den hele Stang AB med sine Tyngder, drives af den naturlige Tyngde saaledes, at alle Punkterne *c*, E, B, igiennemløbe i samme Tid ligedanne Buer, fordi Stangen i at svinge kommer med alle sine Dele paa engang fra AB til AD, saa maa de Kræfter, som drive hver af disse Punkter *c*, E, B, forholde sig som deres Virkninger i samme Tid, som *c*C, EG, BD, det er; som Længderne fra Henge-Punktet eller Pendulets Center A. Saa deraf forstaaes, at man kan ansee den drivende eller hastiggiørende Kraft af Tyngden, som foranderlig over alle Punkterne A, E, B af den svingende Stang, fordi et Punkts Bevægelse hindres eller befordres af de andre Punkters Bevægelse

gelse i Stangen, og at i den derfor maa blive et Punkt L, og det alene, i hvilket den naturlige Tyngde yttrer sin Kraft frit og utvungen, saa det falder eller svinger, som om intet hindrede. Alle Punkterne over L drives med en mindre, alle derimod under L med en stærkere hastiggiorende Kraft, end den er, hvormed Tyngden naturlig Viis skulde drive Pendulen i frie Fald. Det Punkt L, hvori den naturlige Tyngde virker frit og uhindret, er just Svingets Center, som søges. Alle Punkter neden for det derimod vinde af de Kræfter, hvilke tabes i de oven for, og som kunne dømmes (naar man trekker den Linie KMI parallel AF) af den Forskiel, som er imellem Buerne *rc*, EG, BD, og den Bue LM, som beskrives af Pendulen, naar den svinger, dreven frit af Tyngden.

§. 155.

Regel for alle Inertiernes Omsvøbning i et helt Systeme til et eneste Punkt.

Men for vi foretage at bestemme det Punkt L, ville vi videre undersøge, hvad der udfordres til, at om den Deel Materie *r* blev lagt hen i et andet Punkt, for Exempel udi F, den da kunde endnu giøre den selvsamme Modstand, som om den laae udi *r*. Vi betragte her ingen anden Forandring, end den, som kommer af den blotte Inertie. Man maa derfor agte, at Inertiens Modstand er altid Forandringens Størrelse proportionert, §. 11. Eller, den er saa stor som den Vei, hvorigiennem den med eensdan Bevægelse bevæges, multiplicert med den selv. §. 23. Folgelig om Massen i *r* kaldes *m*, og den anden, som med den udi F skal giøre samme Virkning, kaldes M, bliver, naar paa begge Steder

Vægt-

Vægt-Stangs-Armene tillige tages under Betragtning. m. $A\iota . \iota C = M . AF . FK$. Thi ιC og FK ere de i samme Tid igiennemløbne Veie, da Systemet er sammenhengende. Men $\iota C : FK = A\iota : AF$. Folgelig bliver Momentet af Inertien udi ι saa stor som Momentet af Inertien udi F, eller m. $A\iota^2 = M . AF^2$ og $\frac{m(A\iota)^2}{AF^2} = M$.

Saa man seer, at Momentet af Inertien er denne selv multiplicert med Vægt-Stangens Quadrat, og at derfor, saa tidt som en Inertie skal i deslige Tilfælde flyttes fra et Sted til det andet, og dog saaledes, at Inertierne desuagtet uden Forskiel skulle giore deres forrige Modstand, og Bevægelsen i denne Henseende skal blive ubrandret, maa den omflyttede Inertie eller Materie forholde sig til den givne som Quadraterne af Distancerne forkeert. En Anmerkning, som i mange Tilfælde er af Vigtighed, saasnart som der handles om Bevægelsen af et helt legemligt Systeme.

§. 156.

Dette forudsat, da for at opløse det foresatte Spørsmaal om Svingets Center i de sammensatte Penduler paa den korteste og letteste Maade, kan man forestille sig et System af Legemer, som Taf. VIII. Fig. 5, H, D, G, R, E, at være ved umaterielle, men tillige uboielige og ikke vankende Stænger hengte fast til det Punkt C, om hvilket de i det samme Plan svinge frem og tilbage. G i Buen GI for Ex. o. s. v. Er Tyngdens Center F, og man igiennem det trekker fra Henge-Punktet C en Linie CFG, da kunne alle de svingende

Inertier H, D, G, E, omflyttes til at ligge i Tyngdens Center F, saaledes, at naar de bleve drevne af den der værende Pressíon, blev Pendulets Bevægelse endnu den samme, som for §. 155.

Betragter man derpaa samtlig disse Inertier, som virkelig omflyttede til F, blev §. 155 i dette Punkt deres virkelige Størrelse,

$$\frac{H.CH^2 + D.CD^2 + G.CG^2.}{CF^2.} \text{ o. s. v.}$$

Kaldes den naturlige Tyngde, for saavidt den er en hastiggiorende Kraft, g, da bliver Pressionen i Tyngdens Center $= g\,(H + D + G$ o. s. v.) Thi Pressionen i Tyngdens Center er Summen af Pressionerne over alle de andre Dele af Systemet. §. 101.

Da derfor den hastiggiorende Kraft er Pressionen dividert med Inertien, §. 16. 4. saa bliver den hastiggiorende Kraft, der i Tyngdens Center skulde drive den omflyttede Inertie,

$$\frac{g.(H + D + G).CF^2}{H.CH^2 + D.CD^2 + G. + CG^2}$$

Thi efter Omflytningen antages, i Følge vor Hypothese, saavel i Henseende til Inertien, som i Henseende til den hele Pressíon i Tyngdens Center, alt at være det samme.

Bør derfor Penduler, som svinge udi lige Tid, have hastiggiorende Kræfter, som ere deres Distancer fra Henge-Punktet proportionerte §. 149. og den naturlige hastiggiorende Kraft af Tyngden er den, som driver det simple Pendul, §. 154. Kaldes da det søgte simple Penduls Længde x, som vi ville antage $= MC$, da bliver

$$\frac{(H+D+G).\,g.CF^2++}{H.CH^2+D.CD^2+G.CG^2++} : g = CF : x$$

Følgelig er $x\,(=MC) = \frac{H.CH^2+D.CD^2+G.CG^2++}{FC.(H+D+G.)}$

hvilket er det søgte simple Penduls Længde, som er Isokron med det hele sammensatte, eller svingende med det udi samme Tid. (*)

Det er, at for at finde Længden af et simpelt Pendul, der svinge udi samme Tid frem og tilbage med det hele sammensatte, bør man multiplicere samtlig Tyngderne med Quadraterne af Distancerne fra Henge-Punktet til Tyngdernes Centrer, og dividere det udkommende med Summen af samtlig Tyngderne multiplicerte med deres vedkommende Distancer fra Henge-Punktet.

(*) Dersom man ikke forflytter den hele Inertie til Tyngdens Center, hvilket gior Beviset overmaade kort, men til et andet Punkt F, da blev dog alt endnu det samme. Thi kaldes Taf. VII. Fig. 12. Masserne eller Materiernes Mængder i t, E, B, ligeledes t, E, B; og man vil, som nylig sagt, forflytte disse adskillige Inertier fra Punkterne t, E, B til F, saa at deres Modstand efter Omflytningen endnu bliver den samme, som før; da maa §. 155. den hele Inertie være udi F, $t.\frac{At^2}{AF^2}+E.\frac{AE^2}{AF^2}+B.\frac{AB^2}{AF^2}++$ o. s. v. om flere Inertier vare. Men disse Inertier, hvilke i

t,

§. 157.

Da Tyngdens Center kan sættes i Steden for den hele Tyngde §. 101. i Henseende nemlig til Overvægten, saa følger: At i Steden for at multiplicere hver for sig af de enkelte Tyngder med deres dem egentlige Afstand fra Henge-Punktet, man i den Sted kan betragte dem under et samtlig, som koncentrerte i deres Tyngdes Center, da de i forrige Henseende altid giore samme Virkning, saa at man derfor kan multiplicere deres hele Vægt med deres Tyngdes Distance eller Afstand fra Henge-Punktet.

§. 158.

---

t, E, B have en Vægt, foraarsaget af den naturlige Tyngde g, maa i F drives af Kræfter saaledes, at det hele Moment i F bliver det samme, som Summen af de enkelte Momenter udi t, E og B. Følgelig blive de i F ei drevne af den hastiggiorende Kraft g, men af en anden, som vi ville kalde k, og som bestemmes deraf, at $K.t.\frac{At^2}{AF^2}.AF = g.t.At$, hvoraf faaes $K = g.\frac{AF}{At}$. Og saaledes bliver den hele Pression paa, eller Vægt af t udi $F = g.\frac{AF}{At}.t.\frac{At^2}{AF^2} = g.t.\frac{At}{AF}$. Ligeledes findes den hele Pression eller Vægten af E udi $F = g.E.\frac{AE}{AF}$ og af B udi $F, = g.B.\frac{AB}{AF}$. Men dividerer man Summen af Pressionerne med Summen af Inertierne, da faaes den hastiggiorende Kraft, hvilken derfor bliver G.t.

§. 158.

Svingets Center bestemmes i en Cylinder af uendelig smal Grund-Flade.

* Vi ville oplyse det allerede sagte med et Exempel i en af de meget simple og de mest nyttige Tilfælde, samme er, naar en tung cylindrisk Stang er hengt op ved skarpe Hager *a* og *b* i sin Ende, og svinger frem og tilbage, som AB (Taf. VII. Fig. 13.). I denne Tilfælde er det klart, at om man anseer Længden af Stangen AB, som Høiden *ac* af en ret Pyramide, hvis Grund-Plan eller Basis *degf* er det virkelige Quadrat af *ac*, da bliver et hvert andet Snit, som *iklm*, ligeledes et Quadrat af den Høide, som til den svarer, i Følge Geometrien; og da derfor Tyngden selv er Linien AB eller *ac* proportionert, saa maa den hele Tyngde af

$$\frac{g.\,t.\,\frac{At}{AF} + g.\,E.\,\frac{AE}{AF} + g.\,B.\,\frac{AB}{AF} + +\ \text{o. s. v.}}{t.\,\frac{At^2}{AF^2} + E.\,\frac{AE^2}{AF^2} + B.\,\frac{AB^2}{AF^2} + +\ \text{o. s. v.}} = \frac{(t.\,At + E.\,AE + B.\,AB + +)\,g.\,AF.}{t.\,At^2 + E.\,AE^2 + B.\,AB^2 + +}$$

Men naar Penduler skulde svinge udi samme Tid, maa de dem drivende Kræfter være deres Længder proportionerte. §. 149. Følgelig, da AF er Længden af det simple Pendul, som man ved Inertiernes Omflytning haver indbildt sig, AL derimod af det virkelige, og den i L hastiggiørende Kraft er den naturlige Tyngde selv $= g$, §. 154. saa bliver

$$\frac{(t.\,At + E.\,AE + B.\,AB + +)\,g.\,AF.}{t.\,At^2 + E.\,AE^2 + B.\,AB^2 + +} : g = AF : AL.$$

Og derfor igien $AL = \frac{t.\,At^2 + E.\,AE^2 + B.\,AB^2 + +}{t.\,At + E.\,AE + B.\,AB + +}$.

Stangen multiplicert stykkevis med samtlig Distancerne fra *a* deres Quadrater §. 156. udgiore i en Sum det samme, som Indholden af den hele Pyramide $= \frac{AC^3}{3}$. Samtlig Tyngderne derimod multiplicerte med deres fælles Tyngdes Centers Distance fra Henge-Punktet $= \frac{1}{2}AC^2$. §. 108. 3. Følgelig bliver Svingets Centers Distance fra Henge-Punktet eller fra Pendulets Center $= \frac{AC^3}{3} : \frac{AC^2}{2} = \frac{2}{3}AC$.

§. 159.

Det simple isokrone Penduls Længde anføres i de nyttigste og fornemmeste Tilfælde.

Da Svingets Center i de praktiske Dele af Mekaniken meget ofte behoves at være bekiendt, i sær i Figurerne, ville vi endnu kortelig opholde os ved følgende forelobende Anmerkninger. At man nemlig gior Forskiel imellem to Slags Sving udi Figurerne. Det ene er, naar de svinge over en Axel parallel deres Grund-Linie, det andet, naar de svinge hen efter Siden. Saaledes (Taf. VIII. Fig. 7.) om A er et Punkt, i hvilket Trianglet BDE betragtes som at være ophengt, saa det omkring samme frit kan svinge enten hen efter Horizonten, eller hen efter det vertikale Plan, som gaaer igiennem Tyngdens Center af ADE, da kaldes det første Slags af Sving, Sving efter Basin, det andet derimod kaldes Sving hen efter Siden.

I disse Tilfælde kalder man Svingets Axel den horizontale Linie FAG, som ligger, saa at sige, ubevægelig, imidlertid at Svinget skeer. Man bør derfor, i Henseende til begge Sving, betragte to Axler, den ene perpendikulær paa den anden, af hvilke den, efter hvilken Svinget ikke skeer,

altid

altid bevæger sig i Vinkel-Bevægelse med den svingende Figur. Enhver af dem staaer altid perpendikulær paa det Plan, hvorudi Svinget skeer.

§. 160.

Dette forudsat, beviser man følgende, (*) naar at Figurerne drives hen efter Grund-Linien eller efter Siden,

a) i Trianglerne (Taf. VIII. Fig. 9.).

1) Saa tidt som de henges op til at svinge i Spitsen B, falder Svingets Center i den Linie BC, som gaaer igiennem Tyngdens Center, om $\frac{3}{4}$BC borte fra Spitsen B, saa at, om Svingets Center er L, bliver BL $= \frac{3}{4}$BC, om de drives efter Grund-Linien.

2) Vender derimod Grund-Linien op efter, og de svinge i det Punkt C, bliver CL $= \frac{1}{2}$BC.

3) Er Trianglet (Fig. 7.) ophengt i et Punkt B i den uboielige Linie AB, og svinger horizontal hen over den Axel FG, i hvis Punkt A Linien AB og med den Trianglet selv er ophengt, saa Svinget skeer om A, da om AC $= a$, AB $= c$, og Svingets Center er udi L, bliver LA $= \frac{3a^2 + 2ca + c^2}{4a + 2c}$ Længden af det simple Pendul. Derimod bliver Taf. VIII. Fig. 4, naar DB $= a$ og ED $= c$; $\frac{a^2 + 6cc + 4ac}{6c + 2a}$ Længden af Pendulet.

2. J

(*) See femte Tillæg.

b. I Parallelogrammerne, drevne efter Grund-Linien.

1) (Taf. VIII. Fig. 6.) Om de ere ophengte udi c, saa cA er en ubøjelig, men ikke tung Linie. Kaldes cA, a. AG, c, da er Længden af det simple Pendul $= \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}$.

2) Følgelig, om $cA = 0$, eller Figuren er ophengt udi Midten af sin Grund-Linie A. Da bliver det simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}c$.

c. I Cirklerne.

1) Om en heel Cirkel svinger horizontal hen, og er ophengt udi et Punkt i Peripherien B, som Taf. VIII. Fig. 11. da er Svingets Centers Distance fra B $= \frac{5}{8}BF$.

2) Er Cirklen i dette samme Tilfælde ophengt i det Punkt I, og Diametern $BF = a$, da er det simple Penduls Længde, naar $IB = c = \frac{8ac + 5a^2}{16c + 8a}$.

3) Svinger en Cirkel paa Siden hen efter det vertikale Plan, og er ophengt i et Punkt af Peripherien, da bliver Længden af det simple isokrone Pendul $\frac{3}{4}$ af Diametern.

4) Og er den ophengt i det Punkt I, men svinger paa den sidst sagte Maade. Da bliver det simple Penduls Længde $= \frac{3a^2 + 4ca}{8c + 4a}$.

4. I

d. I Kuglerne.

1) Naar de henges op i et Punkt af deres Peripherie og Halv-Diametern $= a$, da er det isokrone simple Penduls Længde $= \frac{7}{10}a$.

2) Ere de ophengte i den Distance l over Peripherien, bliver dette Penduls Længde $= l + r + \frac{2rr}{5 \cdot (l+r)}$.

e. I Keilene.

1) Ophengte i Spitsen. Om Høiden af Keilen $= a$, Diametern i den cirkulære Grund-Flade $= b$. Da er det simple isokrone Penduls Længde $= \frac{4a^2 + b^2}{5a}$.

2) Henges de op i Centret af Grund-Fladen, da er dette simple Penduls Længde $= \frac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}$.

f. Er en Cylinder ligeledes ophengt i Centret af sin Grund-Flade, og Benævningerne gjøres, som i No. 5. Da bliver det simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$.

§. 161.

Man kan ligeledes bestemme Svingets Center i andre Tilfælde, men vi ville derved ei opholde os, for at fortsætte efter Løfte den Lærdom om Central-Kræfterne, og i den Anledning iblant andet vise, hvorledes at Hastigheden, eller Farten af Tingene kan til intet gjøre Tyngden enten til Deels, eller ganske og aldeles.

Femte Tillæg.

Om Pendulerne i Almindelighed, og i sær om de sammensatte Penduler.

§. 84.

Beviis paa de i den ottende Forelæsning antagne Sætninger.

Hvad sig angaaer de i Forelæsningerne §. 148 — 150 giorte Anmerkninger, angaaende, at slutte af de Tider, hvori Pendulerne bevæges, saavelsom af de adskillige paa dem hengte Lod og Tyngder, deels; hvorvidt man kunde holde for, at Materiens Dele vare Vægten i Tingene proportionert; Deels og for hvorvidt at de hastiggiørende Kræfter af Tyngden vare paa adskillige Steder i Verden under sig adskillige. Da kunne de Regler, hvoraf begge Dele bør sluttes, paa ingen anden Maade lettere og fuldstændigere findes, end ved at foretage igien den forhen §. 38 fundne Lighed imellem Hastigheden og Tiden, efter hvilken t er proportionert $\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$, naar nemlig Forholden af Diametern til Peripherien udelades, siden vi her alene see i Almindelighed paa Proportionen. Man erindrer sig, at $4a$ er Længden af Pendulet, og $\sqrt{g}$ Quadrat-Roden af den bestandige Kraft, som driver det. Antages g som foranderlig, da siden g i Almindelighed er $= \frac{p}{m}$ §. 5. saa bliver og ligeledes

$t =$

$t = \frac{\sqrt{4am}}{p}$. Hvilken Forandring i Ligheden vi her alene gjøre, for at vi derved kunde af den givne Ligheds slutte paa Inertierne.

§. 85.

Foretages da den givne Ligheds $t = \sqrt{\frac{4a.m}{p}}$, saa sees strax, at saa tidt som de Pendulerne drivende Pressioner p ere under sig adskillige, da forholde Tiderne af Svingene sig som Quadrat-Rødderne af Pendulernes Længde multiplicerede med Quadrat-Rødderne af de bevægede Materiers Størrelser, dividerte med Quadrat-Rødderne af de Pendulerne drivende Kræfter.

§. 86.

Sættes nu fremdeles i Ligheden $t = \sqrt{\frac{4a.m}{p}}$, Længderne af Pendulerne at være de samme eller en bestandig Størrelse, imidlertid at t, m og p ere foranderlige; da bliver $t = \sqrt{\frac{m}{p}}$, eller Tiderne i simpel Forhold af de bevægede Materiers Størrelse og i forkeert Forhold af Kræfternes Quadrat-Rødder.

§. 87.

I lige lange Penduler derfor kan Tiden af Bevægelsen umuelig ikke være den samme, med mindre $\sqrt{\frac{m}{p}}$ er en bestandig Størrelse, eller om $t = 1$, $\sqrt{p} = \sqrt{m}$. Det er med mindre at Materiens Mængde er Pressionen proportionert. Da derfor Tiden i lige

Materiens Mængde er Pressionen af Tyngden proportionert.

lange Penduler er virkelig efter hvad Erfaring lærer, den samme; Hvad heller at Tyngderne, som drive Pendulerne, ere større eller mindre, tungere eller lettere under samme Størrelse; saa bekræfte disse Erfaringer, forenede med Theorien, denne vigtige Sandhed, at Materiens Mængde udi Inertierne eller Legemerne ere altid Kræfternes Trykninger af Tyngden proportionerte.

§. 88.

Tyngden virker til alle Tider ensdan, og er i lige Distancer over Jorden den samme.

Er Materien den samme, da bliver $t = \sqrt{\frac{4a}{p}}$, det er Tiderne blive proportionerte Quadrat-Rødderne af Pendulernes Længde ligefrem tagne, og Quadrat-Rødderne af de bevægende eller hastiggiørende Kræfter forkeert tagne.

Saa man deraf seer, at dersom Tyngden virkede snart saa, snart anderledes, kunde lige lange Penduler ei svinge til alle Tider udi den samme Tid. Følgelig, da dette skeer, maa Pressionen af Tyngden være til en Tid, som til den anden.

Ligeledes sees heraf, at saafremt lige lange Penduler i adskillige Distancer over Jorden svinge udi samme Tid, da maa Tyngden selv i alle disse Distancer være en bestandig Kraft. Da de derfor i de Distancer, paa hvilke vi kunne giøre Forsøg, altid, i Følge af Erfaringerne, svinge udi samme Tid, saa er Tyngden paa alle disse Distancer en ensdan virkende Kraft.

§. 89.

Penduler, som svinge udi samme Tid have Længder, som ere de hastiggiorende Kræfters Størrelse.

Forudsat; at p er foranderlig, t derimod en bestandig Størrelse. Da fordi $t = \sqrt{\frac{4a \cdot n}{p}}$, saa sees: At om Tiderne, hvori

ulige

ulige lange Penduler svinge, skulle være de samme, da om $t = 1$, bliver $4a = \frac{p}{m}$, det er, Pendulernes Længder maa være de hastiggiørende Kræfter proportionerte.

de Kræfter proportionerte.

§. 90.

Man kan heraf ligeledes slutte paa de hastiggiørende Kræfter. Thi $\frac{p}{m} = \frac{4a}{t^2}$. Følgelig bliver den hastiggiørende Kraft altid proportionert Længden af Pendulet lige frem tagen, og Quadraten af Tiden, i hvilken Svinget skeer, forkeert tagen.

Maade, at finde Tyngdens adskillige Kræfters Forhold paa adskillige Steder i Verden.

Er derfor Tiden den samme, hvori ulige lange Penduler svinge under adskillige Grader af Bredden. Og disse Pendulers Længder ere L og l, da ere Kræfterne af Tyngden under samme Grader af Bredden ligeledes proportionerte L og l.

§. 91.

Hastighederne angaaende, vil jeg alene anføre det følgende. Man seer nemlig let (Taf. VII. Fig. 14.), at saa tidt som det samme Pendul svinger over adskillige Buer, som eb, db; da ere i det nederste Punkt b de vundne Hastigheder ved Faldet over Buer, der ei alene ere uendelig smaa, men af hvad Størrelse man selv vil, i samme Forhold, som Strengen eb til Strengen db.

Hastighederne undersøges i Cirkel-Buer, som have hvad Størrelse, som man vil.

Thi Hastighederne udi b, hvilke vindes ved Faldet igiennem eb og db ere som $\sqrt{cb} : \sqrt{ab}$. §. 79. F. Men da feb og fdb ere retvinklede Triangler, saa er $fb : bd = bd : ba$. Saa Korden $bd = \sqrt{fb.ba}$. Ligeledes bliver $eb = \sqrt{fb.bc}$. Derfor og $bd : eb = \sqrt{ba} : \sqrt{bc}$, og da disse sidste ere proportionerte Hastighederne

vundne ved Faldet igiennem *db* og *eb*, saa ere *db* og *eb* selv disse Hastigheder ligeledes proportionerte.

§. 92.

Ved Hielp af Cykloiden at finde Tiden af alle smaa isokrone Bevægelser.

Før jeg slutter disse Anmerkninger over de simple Penduler, som alle er en Følge af det, hvilket vi forhen have beviist om Bevægelsen i Cykloiden, kan jeg ikke undlade at vise, hvorledes man kan betiene sig af denne Linie, for at finde Tiden af alle smaa bekiendte isokrone Bevægelser i Legemerne. Hvilket i en Mængde Tilfælde er af en anseelig Nytte. Saa tidt nemlig, som Udløbene fra et vist Punkt, skiønt de under sig ere ulige, dog skee udi lige store Tider, og saavel de drivende Kræfter som Udløbenes Længder ere bekiendte.

Thi da i Cykloiden Tiderne igiennem store og smaa Buer altid ere lige store. §. 38. Og saa tidt som Kræfterne ere Distancerne proportionerte, enten fra et virkeligt Kræfternes Center eller fra et Punkt, imod hvilket at Kræfterne efter Omstændighederne kunne ansees som at drive immer hen ad; Tiderne af Bevægelsen over smaa og store Buer da ligeledes altid blive lige store. Saa kan man betragte de saaledes igiennemløbne Rum (hvilke de drivende Kræfter antages at være proportionerte), som om de vare smaa Cykloidal-Buer, og de drivende Kræfter selv, som Kræfter, der drive udi Cykloiden. Saa tidt derfor, som smaa Bevægelser skee omkring eller imod et Punkt over ulige eller lige Rum, men udi lige store Tider, kan, i Følge det allerede sagte, Længden af den halve Cykloide, i hvilken disse Bevægelser kunne antages at skee, let findes. Thi (Taf. IV. Fig. 3.) udi A, hvor den halve Cykloide begynder, er den naturlige Tyngde den drivende Kraft, fordi Tangenten af Cykloiden er der vertikal, og

denne

denne Kraft er i A desuden proportionert AB den halve Cykloides Længde. I n derimod er den i Cykloiden drivende Kraft proportionert nB. Dersom da det i en given Tilfælde igiennemløbne isokrone Rum forestilles ved nB, og den over samme drivende Kraft, som maa findes, kaldes K. Den naturlige Tyngde g. Da bliver $K : g = Bn : AB$, saa den halve Cykloides Længde saaledes findes.

Men denne Længde er det simple Penduls Længde, §. 85. 2 Forel., som svinger udi samme Tid med det givne Legeme. Følgelig, da Længden af Pendulen er bekiendt, er Tiden af Svinget ligeledes bekiendt. §. 136. Forel.

Fortsættelse om de sammensatte Penduler.

§. 93.

Vi ville her ikke opholde os ved at give et nyt Beviis for det Tilfælde, da de i det sammensatte Pendul svingende Dele ikke ligge alle i det samme Plan, siden man let seer, at Beviset altid maa blive det samme, alene, at Inertiernes Omflytning skeer paa den §. 156 anførte Maade.

Svingets Center bestemmes paa en anden Maade.

Derimod ville vi vise, hvorledes man kan simpel hen deraf, at det sammensatte Pendul skal svinge udi samme Tid med det simple, lige saa godt finde den forhen givne Regel, som af det forhen brugte Principe, at Svingets Center var det ene Punkt, hvilket i et heelt Systeme af Legemer bevægede sig frit og uhindret. Thi til at finde Regeln deraf, udfordres intet andet, end at søge Tiden af Bevægelsen i det sammensatte Pendul, og at sammenligne den med Tiden

den af Bevægelsen i et simpelt. Men for at søge Tiden af Bevægelsen i det sammensatte Pendul, bør man søge Tiden af Bevægelsen i det hele Systems Tyngdes Center, saaledes, som den i dette Tilfælde bestemmes af Spørsmaalets Betingninger.

Vi ville først bestemme Tiden af Bevægelsen i det simple Pendul, siden det drives af den naturlige Tyngde g, hvilken vi her ville sætte $= 1$. Er da, (Taf. VIII. Fig. 5.) ligesom før, CERGDH det svingende Systeme. CG Længden af det søgte simple Pendul, hvilket vi antage at være faldet fra I til G. Videre, om den vertikale Høide KG kastes ned og kaldes y. Da bliver Hastigheden, som er vunden ved Bevægelsen eller ved Faldet $= \sqrt{2y}$. §. 10. Tiden igiennem et af Buens Elementer $aG = \frac{aG}{\sqrt{2y}}$. Sættes $CG = r$. $CK = x$. bliver $y = \sqrt{rr - xx}$. $aG = \frac{rdy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$ og $dt = \frac{aG}{\sqrt{2y}} = \frac{rdy}{\sqrt{2r^2y - 2y^3}}$.

For at finde fremdeles Tiden af Bevægelsen i det sammensatte Pendul, maa agtes. At F antages som Tyngdens Center, udi hvilket den hele Tyngde af Systemet kan ansees som at være foreenet, og følgelig er i dette Punkt og den hele Pression samlet, som driver Systemet. Er Fl et Stykke af den Bue, som dette Center beskriver i en uendelig liden Tid, og som før $CL = x$. $FL = z$. Den hele drivende Kraft udi $F = K$. Da bliver §. 32. den Kraft, som driver efter Tangenten af Cirklen (om Elementet af Cirkel-Buen kaldes ds) $= \frac{Kdz}{ds}$. Kaldes den hele Tyngde af det sammensatte Pendul T.

CF.

CF, a. Da bliver $K = aT$, og $\frac{Kdz}{ds} = \frac{aTdz}{ds}$, som er den Kraft, der driver efter Tangenten af Cirklen det hele sammensatte Pendul.

Følgelig maa denne Krafts Virkning være lige saa stor, som den, Tyngden gior paa alle de øvrige Inertier udi samme Tid. Saafremt derfor at DN, PH ere de smaa Buer, som i den Tid igiennemløbes af Inertierne D og H, o. s. v. i hvilken nemlig at Tyngdens Center igiennemløber den lille Bue LF, saa bliver §. 5. $\frac{aTdz}{ds}dt = D.DC.DN + H.HC.HP.$ Men DN og HP ere Elementerne af Hastighederne proportionerte, saa om Hastigheden i $D = f$. i $H = p$. er $\frac{aTdz}{ds}dt = D.DC.df + H.HC\ dp$ + + o. s. v. men $dt = \frac{ds}{v}$ §. 7. Følgelig faaes, om ved v forstaaes Hastigheden udi Tyngdens Center F.

$$\frac{aT}{v}dz = D.DC.df + H.HC.dp + + \text{o. s. v.}$$

som er den Ligned, hvoraf Hastigheden udi Tyngdens Center kan bestemmes.

Nemlig, da i Følge det sammensatte Penduls Natur v er proportionert $FC = a$, og ligeledes $f = DC$ og $p = HF$ o. s. v. saa bliver $Tdz = D.f.df + H.p.dp$, hvoraf Integralen er $2Tz = D.f^2 + H.p^2$.

Men da dette ikke viser uden Forholden, saa maa man videre agte, for at føre de virkelige Hastigheder ind i Regningen, at, naar Hastigheden i F, den nemlig som søges, $= v$, bliver den i $D = f = \frac{DC.v}{a}$, den i $H = \frac{HC.v}{a} = p$, hvilke Værdier af f og p, naar

sættes i den forrige Ligned, faaes $2Tz = \frac{D.DC^2.v^2}{a^2} + \frac{H.HC^2.v^2}{a^2} + +$,

hvoraf endelig faaes $v = \frac{\sqrt[a]{2Tz}}{\sqrt{D.DC^2 + H.HC^2 + +}}$.

Da saaledes Hastigheden i Tyngdens Center er funden, findes let Tiden af Bevægelsen, fordi $dt = \frac{ds.\sqrt{D.DC^2 + H.HC^2 + +}}{\sqrt[a]{2zT}}$

men $ds = \frac{adz}{\sqrt{aa - zz}}$, følgelig bliver $dt = \frac{dz.\sqrt{D.DC^2 + H.HC^2 + +}}{\sqrt{2T.\sqrt{(aaz - z^3.)}}}$

Sammenlignes denne Værdie af Tiden i det sammensatte Pendul med den forhen fundne, som tilkommer Bevægelsen af det simple. Da bliver, fordi begge disse Tider, i Følge Hypothesen, skulle være lige store,

$$\frac{rdy}{\sqrt{2r^2y - 2y^3}} = \frac{dz.\sqrt{D.DC^2 + H.HC^2 + +}}{\sqrt{aaz - z^3}.\sqrt{2T}}$$

Men $r : y = a : z$. Følgelig bliver $\frac{rdy}{\sqrt{2r^2y - 2y^3}} = \frac{r^2dz}{\frac{\sqrt[a]{(a^2.2r^3z) - 2r^3z^3}}{a^3}}$

$= \frac{\frac{\sqrt{ar}}{\sqrt{2}}dz}{\sqrt{a^2z - z^3}} = \frac{dz.\sqrt{D.DC^2 + H.HC^2 + +}}{\sqrt{a^2z - z^3}.\sqrt{2T}}$. Og følgelig bliver

$r = \frac{D.DC^2 + H.HC^2 + +}{aT}$ fuldkommen, som i §. 156. Forel.

§. 94.

Almindelig Regel for Svingets Center,

Dersom man kalder enhver af de smaa Tyngder i det sammensatte Pendul z, Distancen fra Henge-Punktet for enhver af dem i Almindelighed x, da bliver $r = \frac{\int zxx}{\int zx}$.

§. 95.

§. 95.

For nu at komme til de enkelte Exempler, ville vi først begynde af de simpleste, og til den Ende undersøge Svinget af Tyngdens Center i de rette Linier, hvis lige store Dele overalt antages, som at have den samme Tyngde.

Svingets Center bestemmes i rette vertikale Linier.

Er da (Taf. VII. Fig. 15.) en saadan Linie *ab* vertikal, og ophengt til at svinge i sin ene Ende *a*. Kaldes desuden *ad*, *x*. *cd*, *dx*. den hele Linie *ab*, *a*. Da er $\mathfrak{z} = dx$, og $\frac{\int \mathfrak{z} xx}{\int \mathfrak{z} x} = \frac{\int xxdx}{\int xdx}$ $= \frac{2}{3}x$, og for den hele Linie $\frac{2}{3}a$.

§. 96.

Er alt som før, men alene den Deel *cb* af Linien tung, *ac* derimod uden Tyngde, da er, om $ac = b$. $\frac{\int \mathfrak{z} xx}{\int \mathfrak{z} x} = \frac{\int xxdx}{\int xdx}$, men naar $x = b$, bør Integralen være $= 0$, saa bliver $\int \mathfrak{z} xx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}b^3$ og $\int \mathfrak{z} x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}b^2$, følgelig bliver det søgte simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}\frac{(x^2 + bx + b^2)}{x + b}$, og for den hele Linie $ab = a$. er den $\frac{2}{3}\frac{(a^2 + ba + b^2)}{a + b}$. Er $b = 0$, faaes, som før, det simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}a$.

Det samme, naar en Deel af Linien ikke er tung.

§. 97.

Tages Henge-Punktet et Sted inde paa Linien, og den hele Linie ansees tillige som tung (Taf. VII. Fig. 16.) som om Henge-Punktet er udi A, og $AB = b$. $AC = x$. $cd = dx$, da bliver $\int \frac{\mathfrak{z} xx}{\int \mathfrak{z} x}$

Ligeledes, naar Henge-Punktet falder inden i den tunge Deel af Linien.

$= \int \frac{xxdx}{\int xdx}$, og derfor $\int \mathfrak{Z} xx = \frac{1}{3}(x^3 + b^3)$, fordi naar $x = -b$, bør Integralet være $= 0$. Ligeledes er $\int \mathfrak{Z} x = \frac{1}{2}(x^2 - b^2)$. Er den hele Linie fra Henge-Punktet af a, bliver det søgte simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}\left(\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}\right)$ og om $b = 0$, som før §. 95. $= \frac{2}{3}a$.

Man kan herved i Almindelighed agte, hvad der sees i dette Exempel; at nemlig den almindelige Regel strekker sig endog til de Tilfælde, da Henge-Punktet tages inden i Figurerne. Siden det alene kommer an paa at fyldestgiøre Integralen saaledes, som dette Tilfælde det udfordrer.

§. 98.

Svinget Center søges i horizontale Linier, som drives efter Siden.

Dersom (Taf. VIII. Fig. 1.) Linien CD er horizontal, svingende frem og tilbage hen efter et vertikal Plan, eller hen efter Siden. Da om Perpendiklen AB udi B deler Linien CD i to lige store Dele og $AB = a$. $CB = BD = b$. $Bc = x$. $cd = dx$. Bliver $Ac = \sqrt{aa + xx}$, og $\int \mathfrak{Z} xx = \int dx \cdot \overline{(aa + xx)} = aax + \frac{1}{3}x^3 + B$. B bestemmes deraf, at naar $x = -b$, er Integralet $= -aab - \frac{1}{3}b^3$, følgelig $\int \mathfrak{Z} xx = aax + \frac{1}{3}x^3 + aab + \frac{1}{3}b^3$, og for den hele Linie CD $= 2(aab + \frac{1}{3}b^3)$, men for den hele Linie er $\int \mathfrak{Z} x = 2ab$. §. 157. F. Følgelig bliver det simple Penduls Længde $= \frac{3aa + b^2}{3a}$.

Er $b = 0$, bliver det simple Penduls Længde $= a$, og saaledes det simple Pendul selv, som det bør være.

Er $a = 0$, bliver i Tyngdens Center Længden af det simple Pendul ∞.

§. 99.

§. 99.

Henger (Taf. VIII. Fig. 2.) den svingende Linie CD skiev, alt for Resten taget, som udi nest foregaaende Tilfælde. Da om man kaster den Perpendikel $Ab = p$ ned paa den (hvilken altid er bekiendt, fordi $AB = a$ er given, tilligemed Vinklerne AbB og ABb) og kalder den bekiendte Linie bB, q. Den halve Linie CB, b, $br = x$, $rm = dx$. Da bliver $\int 3xx = \int dx.\, xx + pp = \frac{1}{3}x^3 + p^2x + B$. B bestemmes deraf, at, naar $x = 0$, bliver endnu $-x = b - q$ eller $x = q - b$, saa $\int 3xx = \frac{1}{3}x^3 + p^2x - \frac{1}{3}(q-b)^3 - p^2(q-b)$ for den hele Linie er $x = b + q$. $\int 3xx = \frac{1}{3}(b+q)^3 + p^2(b+q) + \frac{1}{3}(b-q)^3 + pp(b-q) = \frac{1}{3}(2b^3 + 6q^2b) + 2ppb$. Ligeledes er for den hele Linie $2b$, $\int 3x = 2ab$, saa at det søgte simple Penduls hele Længde beløber $\frac{\frac{1}{3}(2b^3 + 6q^2b) + 2ppb}{2ab}$. Men $p^2 = a^2 - q^2$ Følgelig bliver det simple Penduls Længde $= \frac{\frac{1}{3}b^2 + a^2}{a} = \frac{3a^2 + b^2}{3a}$, og derfor den samme, som naar Linien ligger horizontal. §. 98.

Ligeledes i de skievliggende.

Vil man, som forhen, tage Begyndelsen til x udi B, da faaes $\int 3xx = \int dx.\, (a^2 + 2qx + x^2)$, fordi $Ar^2 = x^2 + 2qx + a^2$. Følgelig bliver Integralen $a^2x + qx^2 + \frac{1}{3}x^3$, hvortil maa legges den manglende Deel, som svarer til $-x = b$, saa det fuldstændige Integral bliver $a^2x + qx^2 + \frac{1}{3}x^3 + a^2b - qb^2 + \frac{1}{3}b^3$, og for den hele Linie, $2a^2b + \frac{2}{3}b^3$. Men $\int 3x = 2ab$. Følgelig bliver det simple Penduls Længde, ligesom før, $= \frac{2a^2 + b^2}{3a}$.

§. 100.

Alle disse Forandringer forandre ikke Svingets Center.

Da det saaledes ingen Forandring giver i det simple Penduls Længde, hvad heller Linien ligger horizontal eller skraae imod Horizonten, saa tidt som den drives paa Siden, og Tyngdens Centers Distance fra Henge-Punktet uforanderlig bliver den samme. Saa maa og dette Penduls Længde endnu blive uforandret, naar Linien henger vertikal, alene at den forrige Betingning vedbliver, at nemlig Tyngdens Centers Distance fra Henge-Punktet ikke forandres. For derfor at see, om dette og treffer ind med den forhen §. 95 giorte Udregning, maa agtes. At saa tidt som (Taf. VIII. Fig. 2.) CB skal falde over AB, bliver $b = a$ og $\frac{3a^2+b^2}{3a} = \frac{4}{3}a$. Men $a = \frac{1}{2}$CD. Følgelig faaes for det simple Penduls Længde $\frac{2}{3}$CD fuldkommen som i §. 95.

Saa deraf sees i Almindelighed. At saa tidt som Linierne drives paa Siden, eller, som vi her kalde det, hen efter det vertikale Plan. Da er det lige meget, hvad Beining eller Inklination at Linien haver imod Svingets Axel, alene at Distancen fra Tyngdens Center ei forandres i Henseende til Henge-Punktet, og at Planet, hvori Svingene skee, bestandig bliver det samme.

§. 101.

Svingets Center bestemmes i horizontale Linier, som drives hen efter Grund-Linien, eller sit eget Plan.

Svinger en Horizontal-Linie DC (Taf. VIII. Fig. 3.) hen over det horizontale Plan, og ei som før, langs hen ad det vertikale. Da maa man forestille sig en horizontal Axel FAE, trokken igiennem Henge-Punktet A, og fra alle Punkterne a i den svingende Linie CD Perpendikler som ab, der ere kastede ned paa denne Axel, saa blive de overalt

overalt Distancerne. Følgelig disse sidste overalt lige store $= a =$ AB og CB $=$ BD $= b$. Man faaer derfor $\int z x x = \int a a dx = aax + B$. Men B $= aab$, saa $\int z x x = aax + aab$, og for den hele Linie $2aab$, men $\int z x = 2ab$. Følgelig bliver det simple Penduls Længde $= \frac{2aab}{2ab} = a$.

Saa at et saadant Pendul er et virkeligt simpelt Pendul, eller rettere, en Mængde af lige lange simple Penduler, som svinge med hinanden. Hvilket og fuldkommen vel stemmer med det, som vi forhen have forklart om Tyngden, at den nemlig i den frie Bevægelse driver alle Inertiernes Punkter ensdan.

§. 102.

Forskiel imellem Udregningerne af Svinget paa Siden og hen efter Planet, som vel maa iagttages.

Dette sidste Exempel forklarer, hvad vi forhen have sagt, at der er Forskiel paa, naar Svinget skeer hen efter det vertikale og horizontale Plan. For derfor vel at kunde skille disse to Tilfælde fra hverandre, maa altid vel iagttages i disse Udregninger, paa hvad Liniers Bevægelse at Hastigheden af Inertierne beroer, for deraf at domme Distancen fra Henge-Punktet.

§. 103.

Svingets Center bestemmes i Parallelogrammerne.

Jeg har opholdt mig ved de rette Liniers Sving saa længe, fordi man i dem, som i de letteste Tilfælde, best kunde komme efter alle de Hoved-Poster, hvilke i Udregningerne for Svingets Center bør iagttages. Jeg gaaer fra dem til Figurerne. Da de to Tilfælde med Flid maa skilles fra hverandre, den ene, naar de drives hen efter Grund-Linien og Svingets Axel er i det samme Plan med Figuren.

Den

Den anden, naar Svinget skeer hen efter Siden og Axlen af Svinget staaer perpendikulær paa Planet af Figuren. Vi betragte her først det horizontale Sving som det simpleste, og i sær uden Vanskelighed, saa tidt som Figurerne have en Axel, paa begge Sider af hvilken de i alle Henseende ere ensdan beskafne.

Er da (Taf. VIII. Fig. 6.) BDFE et Parallelogram ophengt udi C, saa BA = AD og CA er perpendikulær paa BD. Fremdeles om CA = a. AG = c. Ae = x. $ef = ab = dx$. BD = b. Da er, fordi at $ac = b$; $\int \frac{3xx}{\int 3x} = \int \frac{bdx.\sqrt{a^2 + 2ax + x^2}}{\int bdx.(a+x)}$ $= \frac{a^2bx + abx^2 + \frac{1}{3}bx^3}{abx + \frac{1}{2}bx^2}$, uden at legge[1] en bestandig Størrelse til. Thi naar $x = 0$, er det hele Integral = 0, som det bør at være.

Da b gaaer ud af Regningen, er det et Tegn til, at Bredden intet gior til Sagen, saa at alle Parallelogrammer af samme Høide og paa denne Maade hengte, svinge eensdan, eller i samme Tid. Er da hele Parallelogrammets Høide AG = c, saa saaes for det hele Sving $\frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}$.

Er $a = 0$. hvilken Betingning haver Sted, saa tidt som Parallelogrammet er ophengt i Midten af sin Grund-Linie eller i det Punkt A. Da er det simple Penduls Længde = $\frac{2}{3}c$.

§. 104.

Man maa her iagttage en Sag af nogen Betydenhed, den nemlig, at hvad heller et Parallelogram henger paa den nylig sagte Maade og svinger; eller om Henge-Linien GA er bøiet imod Figu-

ren

ren og dens Grund-Linie GA, under hvad Vinkel GAD som man selv vil. Saa bliver dog altid Længden af det simple Pendul, og følgelig Svingets Centers Leie i Figuren, de samme; alene at Svingets Axels Distance fra Tyngdens Center bliver det samme. Thi man seer let, at alle Punkterne i Parallelogrammet deres Distancer fra Axlen blive endnu de samme, som før. Følgelig og Svingets Center det samme.

Man seer videre uden Møie, at denne samme Maade at slutte paa kan anvendes udi alle Figurer, og at dette derfor er i Henseende til dem alle almindelig sandt.

§. 105.

I Triangler, hvis Grund-Linie ligger horizontal.

Slynger et Triangel DBE (Taf. VIII. Fig. 7.) horizontal hen omkring det Punkt A, og Linien AB ansees som før, for at være ubøielig og uden Tyngde. Er da AC $= a$, DE $= b$. AB $= c$. AK $= x$. $kl = dx$. Da er og $a - c : b = x - c : fh$, saa $fh = \frac{bx - bc}{a - c}$, og $\int \frac{3xx}{3x} = \frac{\int \frac{bx - bc}{a - c} xxdx}{\int \frac{bx - bc}{a - c} xdx} = \frac{\frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{3}bcx^3}{a - c} : \frac{\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}bcx^2}{a - c}$.

Men naar $x = c$ ere Integralerne. Det første $= \frac{\frac{1}{4}bc^4 - \frac{1}{3}bc^4}{a - c}$.

Det andet $= \frac{\frac{1}{3}bc^3 - \frac{1}{2}bc^3}{a - c}$. Følgelig er det fuldstændige Integral $= \frac{\frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{3}bcx^3 - \frac{1}{4}bc^4 + \frac{1}{3}bc^4}{\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}bcx^2 - \frac{1}{3}bc^3 + \frac{1}{2}bc^3}$, hvilket er for alle Triangler af

samme Høide, siden b eller Grund-Linien gaaer plat ud af Regningen. Nemlig; om $x = a$, bliver for det hele svingende Triangel det simple Penduls Længde $= \frac{\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}ca^3 + \frac{1}{12}c^4}{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}ca^2 + \frac{1}{6}c^3}$, men Tæller og Nævner have den fælles Divisor $a^2 - 2ac + c^2$; naar derfor med samme divideres, findes det simple Penduls Længde at være

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{6}ca + \frac{1}{12}c^2}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}c} = \frac{3a^2 + 2ca + c^2}{4a + 2c}.$$

Er $c = 0$, det er, om Trianglet er hengt op til at svinge i sin Spitse B, da bliver Svingets Centers Asstand fra Spitsen $B = \frac{3}{4}a$.

§. 106.

Ligeledes i de, hvis Grund-Linie ligger skiev.

Af §. 105 sees, at Svingets Center er det samme i alle Triangler af samme Høide, naar de ere i samme Distance fra deres Spitse af ophengte, og deres Grund-Linie er Svingets horizontale Axel parallel.

Det andet Tilfælde derimod (Taf. VIII. Fig. 8.) da Trianglets Grund-Linie ED ei er parallel Axlen AF, med hvilken at Trianglet svinger i horizontal Bevægelse; Dette Tilfælde er lidt vidtløftigere at udregne, men man kommer altid paa den samme Slutning som før.

Thi er BED et saadant Triangel, da fordi det er given i en vis Stilning imod Axlen AF, og Trianglet er givet i sig, maa Vinklerne ABE og FBD være givne, tilligemed alle Sider, følgelig og alle Vinkler i Trianglet BED, da derfor BC er vertikal eller perpendikulær paa AF, er Vinklen $EBC = 90^\circ -$ ABE og

given,

given, følgelig og BC selv. Kastes Høiden af Trianglet BG ned paa ED, er den ligeledes bekiendt, saavelsom EG og EC.

Dette forudsat. Kalder man da B*c*, *a*. BG, *b*. BI, *x*. I*i*, *dx*. EG, *b*. E*c*, *c*. ED, *f*. og LH antages, at være trokken parallel ED og uendelig nær *th*. Da fordi de Linier, som i ligedanne Figurer trekkes fuldkommen paa samme Maade, altid ere under sig og de øvrige Linier proportionerte : Bliver BG : ED = BI : LH eller $b : f = x : \frac{fx}{b}$ = LH; og LH i *dx*, eller Elementet LH*ht* af Trianglet = $\frac{fxdx}{b}$, men for at faae $\int xx$, skal dette Element multipliceres med $MN^2 = (BK + lM)^2$, om KL er parallel AF, og M Tyngdens Center i *t*LH*h* eller LH.

For at bestemme BK + LM, maa agtes, at ED : B*c* = LH : BK, eller $f : a = \frac{fx}{b} : \frac{ax}{b}$ = BK = *l*N. Videre er B*c* : *c*E = BK : KL eller $a : c = \frac{ax}{b} : \frac{cx}{b}$ = KL. Men LM = $\frac{fx}{2b}$, saa er KM = $\frac{fx - 2cx}{2b}$ = L*l* − LK.

Ydermere er BG : G*c* = B*a* : *a*K, eller $b : c - b = x : \frac{(c-b)}{b}x$ = *a*K, men B*a*K og KLM ere ligedanne Triangler (MLN antages parallel BK) saa BK : *a*K = KM : M*l*, eller $\frac{ax}{b} : \frac{c-b}{b}x$ = $\frac{fx-2cx}{2b} : \frac{(\frac{f}{2}-c)c-b)}{ba}x$. Sættes $\frac{(\frac{f}{2}-c)c-b)}{ba} = \frac{g}{b}$, er M*l* = $\frac{g}{b}x$ og NM = $\frac{a+g}{b}x = lx$, om $\frac{a+g}{b} = l$. Saaledes bli-

ver Elementet LH*th* i $(MN)^2 = \frac{fl^2x^3dx}{b}$, hvoraf Summen er $\frac{fl^2}{4b}x^4 = \int\!\!\int xx$.

Men $\int\!\!\int x = \int\frac{flx^2dx}{b} = \frac{fl}{3b}x^3$ og $\frac{\int\!\!\int xx}{\int\!\!\int x} = \frac{3}{4}lx$.

Er ED parallel AF, bliver BG = BC, $b = a$. EG = EC. $c = b$, saa $g = \left(\frac{f}{2} - c\right)c - b) = 0$ og $l = \frac{a+g}{b} = \frac{a}{b} = 1$, følgelig bliver $\frac{3}{4}lx = \frac{3}{4}x$, fuldkommen som i neſt forrige Exempel.

Og deraf ſees, at ſaa tidt ſom to Triangler, T. VIII. F. 9. et, hvis Grund-Linie GH er parallel Axlen, ſom BGH, et andet, hvor den ikke er Axeln parallel, ſom BED, ſvinge over ſamme Plan eller Axel med lige Grund-Linier, og have fælles Tyngdes Center, ſaavelſom ens Diſtance af ſamme fra Axeln BL, da ſvinge de i ſamme Tid, men i det ſkieve Triangel maa vel agtes, at Svingets Center M maa tages i den Linie BLC perpendikulær paa GH, ſom gaaer igiennem Tyngdens Center L. Dette iagttaget, bliver Svingets Center i alle Triangler det ſamme.

§. 107.

I alle krumme Linier i Almindelighed, hvilke have en Axel, ſom Taf. VIII. Fig. 10. Linien DAE. Da, om de ere ophengte i Spidſen A, bliver, naar $cA = x$ og $cf = y$. $\int\!\!\int\frac{3xx}{\int\!\!\int 3x} = \int\frac{yxxdx}{\int\!\!\int yxdx}$. Ere de derimod ophengte udi andre Punkter, kan dog Udregningen altid gieres for Axlen, og ſaaledes alle de øvrige Tilfælde henføres til denne, efter hvad der er bleven ſagt §. 104. Er Henge-Punktet i C,

og

og $AC = a$; bliver, som i de nylig forhen anførte Exempler, $\frac{\int zxx}{\int zx}$ $= \frac{\int y(x+a)^2\,dx + B}{\int y(x+a)\,dx + b}$, hvilket altid lader sig integrere, saa tidt som i de krumme Liniers givne Ligheder x kan bestemmes udi y.

§. 108.

Saaledes, om $y = \sqrt{px}$, som i den simple Parabol ophengt i A, da faaes for denne Størrelse $\frac{\int 2\sqrt{p} \cdot x^{\frac{5}{2}}dx}{\int 2\sqrt{p} \cdot x^{\frac{3}{2}}dx} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 2\sqrt{p} \cdot x^{\frac{7}{2}}}{\frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{p} \cdot x^{\frac{5}{2}}} = \frac{5}{7}x$.

§. 109.

Ligeledes, i samtlig Paraboloiderne eller i de krumme Linier, som indbefattes under denne almindelige Ligned $y^m = ax$, er fordi $y = a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, Svingets Centers Afstand fra Spitsen af den krumme Linie, omkring hvilken Figuren antages at slynge,

$$\frac{\int a^{\frac{1}{m}} \cdot x^{\frac{1+2m}{m}}\,dx}{\int a^{\frac{1}{m}} \cdot x^{\frac{1+m}{m}}\,dx}$$, hvoraf det fuldstændige Integral er

$$\frac{a^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{1+3m} x^{\frac{1+3m}{m}}}{a^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{1+2m} x^{\frac{1+2m}{m}}} = \frac{1+2m}{1+3m}x.$$

Er $m = 2$, bliver $\frac{1+2m}{1+3m}x = \frac{5}{7}x$, som før i den simple Parabol.

Er $m = 3$, faaes for Svingets Center $\frac{7}{10}x$. o. s. v.

§. 110.

Vil man, i Steden for at lade Figurerne svinge om deres Spitse, henge dem op i et Punkt af deres Grund-Linie, som om et ligesidet Triangel ACB (Taf. VIII. Fig. 4.) svinger om Midt-Punktet D i dens omvendte Grund-Linie AB og $CD = a$, $AB = b$, $DL = x$, da er $ef = \frac{ba - bx}{a}$ og $\int \frac{1}{3} xx = \int \frac{ba - bx}{a} xx dx = \frac{1}{3}\frac{b}{a} ax^3 - \frac{1}{4}\frac{b}{a} x^4$ men $\int \frac{1}{3} x = \int \frac{ba - bx}{a} x dx = \frac{\frac{1}{2} bax^2 - \frac{1}{3} bx^3}{a}$, følgelig den søgte Længde af det isokrone eller i samme Tid svingende simple Pendul $= \frac{\frac{1}{3} ax - \frac{1}{4} x^2}{\frac{1}{2} a - \frac{1}{3} x}$, som for det hele Triangel, naar $x = a$, beløber $\frac{1}{2} a$.

§. 111.

Antages det Stykke *efc* at være afhuggen parallel med AB saaledes, at $DL = c$, da er det klart, at det forrige Integral forandres til $\frac{\frac{1}{3} ax - \frac{1}{4} x^2 - B}{\frac{1}{2} a - \frac{1}{3} x - b}$, hvori de bestandige Størrelser bestemmes deraf, at naar $x = c$ bør Integralet være $= 0$, saa følgelig den Deel gaaer af, som svarer til $x = a - c$, hvilken paa samme Maade, som forhen, kan bestemmes.

§. 112.

Tages i Horizontal-Slyng, som før, Punktet inden i Figuren, for Exempel, udi L i Trianglet ABC (Taf. VIII. Fig. 4.) og $CD = a$, $BA = b$, $CL = c$, $Lg = x$, da er $hi = \frac{bc + bx}{a}$ og $\int xx = \int \frac{bc + bx}{a} xx dx$, $\int dx = \int \frac{bc + bx}{a} x dx$

hvilke

hvilke Integraler fyldestgiøres ved at legge under stridig Tegn det til, hvad de blive, naar $x = -c$.

§. 113.

Videre. Af Cirklerne og deres Stykker.

Er den svingende Figur en Cirkel FABC (Taf. VIII. Fig. 11.) ophengt udi B. GBH et Snit af Cirklen, til hvis Sving man vil finde det simple Penduls Længde. BF Diametern $= a$. Ba $= x$. $ab = dx$. Da er A$a = \sqrt{ax - xx}$, og Elementet af Segmentet eller Cirkel-Snittet $=$ AC. $ab = 2dx.\sqrt{ax - xx}$. Følgelig $\int 3\overline{xx} = 2\int(x^2 dx.\sqrt{ax - x^2})$. En Størrelse, som let giøres integrabel, ved at sætte $ax - x^2 = x^2 z^2$. Da man faaer $x = \frac{a}{(1+z^2)}$ $dx = \frac{-2azdz}{(1+z^2)}$ og $x^2 dx\sqrt{ax - x^2} = \frac{-2a^4 z^2 dz}{(1+z^2)^5}$. Men da Divisores af $(1 + z^2)$ ere irrationelle, nemlig $1 + z\sqrt{-1}$ og $1 - z\sqrt{-1}$; saa dette Integral saaledes henhører til de logarithmiske Imaginaires, hvilke man igien veed, kunde paa en reel Maade forstaaes af Cirklen, saa ville vi integrere det ved denne sidste.

Man faaer da $\int xxdx.\sqrt{ax - xx} = \int\frac{(ax^3 - x^4)dx}{\sqrt{ax - xx}} = \int\frac{-x^4 dx}{\sqrt{ax - xx}}$

$+\int\frac{ax^3 dx}{\sqrt{ax - xx}} = \int\frac{-x^7 dx}{\sqrt{ax^7 - x^8}}\ (=A) + \int\frac{ax^3 dx}{\sqrt{ax - xx}}.\ (=\alpha).$

$\frac{1}{8}\int\frac{(-8x^7 + 7ax^6)dx}{\sqrt{ax^7 - x^8}} = \frac{1}{4}(ax^7 - x^8)^{\frac{1}{2}} - \int\frac{\frac{7}{8}ax^6 dx}{\sqrt{ax^7 - x^8}}\ (=B,$

$B + \alpha = \int\frac{-\frac{7}{8}ax^5 dx}{\sqrt{ax^5 - x^6}} + \frac{ax^5 dx}{\sqrt{ax^5 - x^6}} = -\frac{a}{8}\int\left(\frac{-x^5 dx}{\sqrt{ax^5 - x^6}}\right)$

$= -\frac{a}{48}\int\frac{(-6x^5 dx + 5ax^4 dx)}{\sqrt{ax^5 - x^6}} + \int\frac{a}{48}.\frac{5ax^4 dx}{\sqrt{ax^5 - x^6}}\ (=C)$

$= -\frac{a}{24}(ax^5 - x^6)^{\frac{1}{2}} + C.$

C

$$C = \tfrac{5}{48}\cdot\frac{a^2x^3dx}{\sqrt{ax^3-x^4}} = -\frac{5a^2}{4\cdot 48^*}\cdot\frac{-4x^3dx+3ax^2dx}{\sqrt{ax^3-x^4}} + \int\frac{5a^3x^2dx}{64\sqrt{ax^3-x^4}} \;(=D)$$

$$= -\tfrac{5}{96}a^2(ax^3-x^4)^{\frac{1}{2}} + D.$$

$$D = \frac{5a^3}{64}\int\frac{xdx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int\frac{5a^3}{64\cdot 2}\left(\frac{-2xdx+adx}{\sqrt{ax-xx}} + \int\frac{5a^4}{128}\cdot\frac{dx}{\sqrt{ax-xx}}\right.\;(=E)$$

$$= -\frac{5a^3}{64}\overline{ax-x^2}^{\frac{1}{2}} + E.$$

E derimod eller $\frac{5a^4}{128}\int\frac{dx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{5a^3}{64}\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}$, er en Cirkel-Bue, til hvilken Afsnittet eller Abscissen $BD = x$, og følgelig er den Buen BG selv,

saa $\frac{1}{2}\int\!\!\int xx = \frac{1}{4}\overline{(ax^3-x^6)}^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{24}(ax^5-x^6)^{\frac{1}{2}}$

$$-\tfrac{5}{96}a^2\overline{(ax^3-x^4)}^{\frac{1}{2}} - \frac{5a^3}{64}\overline{(ax-x^2)}^{\frac{1}{2}} + \text{Buen BG.}\;\tfrac{5}{64}a^3.$$

Saa vidtløftig, som denne Formular er for Cirkel-Snittene, saa kort bliver den for den hele Cirkel, da alle Leddene, fordi $x = a$ tilintet gjøres, undtagen det søgte, saa for den hele Cirkel er $\int\!\!\int xx = \frac{5}{32}a^3$. BF.

Da nu, om P betyder den halve Peripherie $\int dx = \frac{Pa}{4}$. §. 157. Forel. saa bliver $\frac{5}{8}a$ Svingets Centers Længde for den hele Cirkel, eller rettere dets Distance fra Spidsen B af Peripherien, hvor Cirklen er ophengt.

For den halve Cirkel derimod findes Svingets Centers Distance fra Spidsen af Peripherien, saa som for de øvrige Cirkel-Snit ved Hielp af Værdierne af $\int\!\!\int xx$ og $\int\!\!\int x$, som et hvert givet Tilfælde det udfordrer.

§. 114.

§. 114.

Paa samme Maade kan man udregne alle de Tilfælde, udi hvilke Cirklen er ophengt i et Punkt inden i eller uden for Figuren, siden det alene kommer an paa at integrere den almindelige Ligheð $\int \frac{(x^4+ax^3+bx^2+cx+d)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$. Men vi ville derved ei opholde os, da vi strax skulde vise en ulige kortere Maade, at finde det simple Penduls Længde paa; en Maade, som er almindelig i Henseende til alle Henge-Punkter, alene at det simple Pendul er givet, som svarer til et saadant Punkt, hvad for et det og er, og paa hvad Maade end at Figuren svinger.

§. 115.

For at forklare disse almindelige Methoder, ville vi forestille os T. VIII. F. 12. en Materie uden Forskiel FGH ophengt udi A. Ansees da ACB som at være Længden af det simple Pendul, der gaaer igiennem Tyngdens Center C af den hele Figur. Kaldes desuden en uendelig liden Deel af Materien $\mathfrak{z}$ og $\int\mathfrak{z} = P$. $AC = a$, $AD = x$, da er §. 66. $AB = \int\frac{xx\mathfrak{z}}{aP} = \int\frac{(DE^2+AE^2)\mathfrak{z}}{aP}$, men dette er $= \int\left(\frac{DC^2-CE^2+AE^2}{aP}\right)\mathfrak{z}$, (om DE er perpendikulær paa AB) $= \int\frac{DC^2+AC.(AC-2CE)}{aP} = \int\frac{DC^2+AC^2-2AC.CE}{aP}\mathfrak{z}$

Saa længe, som i det samme System af Legemer, Henge-Punktets og Tyngdens Centers Distance bliver uforandret, er det simple isokrone Penduls Længde altid det samme.

Da nu al den Deel af Tyngdens Virkning, hvilken er som CE. $\mathfrak{z}$, nødvendig maa tilintetgiøre hinanden paa begge Sider af Tyngdens Center C, §. 128. Forel. siden ellers i C ingen Ligevægt kunde

være, saa bliver $\int \frac{xx\mathfrak{z}}{aP} = \int \frac{\overline{DC^2 + AC^2}}{aP}\mathfrak{z} = \frac{\int DC^2\mathfrak{z} + \int a^2\mathfrak{z}}{aP}$

$= \int \frac{DC^2\mathfrak{z} + a^2P}{aP} = a + \int \frac{DC^2\mathfrak{z}}{aP}$, hvoraf sees.

At siden i det samme Systeme af Legemer $\int DC^2\mathfrak{z}$ altid bliver en bestandig og uforanderlig Størrelse, saa maa nødvendig, saa længe som Henge-Punktets Distance fra Tyngdens Center, eller a, er uforandret, saavelsom Planet, hvori Svinget skeer, den hele $\int DC^2\mathfrak{z} + a$ eller $\int \frac{xx\mathfrak{z}}{aP}$, det er, det simple Penduls Længde blive det samme og uforandret.

§. 116.

Følgelig om en given Figur (Taf. VIII. Fig. 13.) som f. Ex. EAD blev hengt op til at slynge i det Punkt o uden for Axlen pAg, saa on gaaer igiennem Tyngdens Center. Da om man med den halve Diameter no slaaer den Cirkel-Bue po, er det det samme, hvad heller den til at slynge givne Ting ophenges udi o eller i p. §. 115.

§. 117.

Svinget's Center falder altid under Tyngdens Center, og Forskiellene imellem Svinget's og Tyngdens Center ere altid Distancerne imellem Tyngdens Center og Hen-

Ligeledes kan man af denne Sætning $\int \frac{xx\mathfrak{z}}{aP} = a + \int \frac{DC^2\mathfrak{z}}{aP}$ altid bestemme, hvad Længden bliver af de simple Penduler, som svare efterhaanden til de ophengte Tings Sving, der henges op snart i en kortere, snart i en længere Distance fra Tyngdens Center. Thi da Længden af det simple Pendul er om $\int \frac{DC^2\mathfrak{z}}{aP}$ større end a, eller Tyngdens Centers Afstand fra Henge-Punktet, saa sees,

1) At

1) At det simple Pendul altid haver større Længde end Tyngdens Centers Afstand er fra Henge-Punktet. ge-Punktet, forkeert-viis proportionerte.

2) At da Forskiellen imellem disse to sidste Linier altid er $\int \frac{DC^2 z}{aP}$, som er for det samme System af Legemer bestandigt, saa bliver denne Forskiel, om a ansees som foranderlig, $= \frac{1}{a}$, thi $\int \frac{DC^2 z}{P}$ er ei en Function af a. Om derfor en Ting henges op i længere og kortere Distancer, da bliver Svingets Centers Distancer fra Tyngdens Center, forkeert Viis proportionerte Henge-Punktets Distancer fra samme Tyngdens Center.

§. 118.

Man seer meget let, at Nytten af disse Sætninger er meget stor i Theorien af Svingets Center. Ei alene, fordi, saa tidt som Figurerne, hvis Sving skal underseges, ere paa en skiev eller ubequem Maade ophengte, som Taf. VIII. Fig. 13. at man da altid kan udregne dem i Henseende til Axlen eller den Linie, som deler alle deres smaa Elementer udi lige Dele, efter hvad vi allerede have sagt §. 116. Men i sær, fordi man, for at finde Svingets Center, behøver alene, at udregne et af de letteste Tilfælde, for at vide, hvad det bliver i alle andre, siden i hvorledes end at man lader Figuren over det samme Plan bevæge sig omkring sit Tyngdes Center, Svingets Center dog altid bliver det samme, paa den Maade, som vi have sagt §. 115—117. Nytten af de forrige Sætninger bliver viist i Exempler.

§. 119.

For at forstaae dette saa meget desto bedre, ville vi oplyse det med nogle Exempler.

1) Veed man, efter hvad vi have sagt §. 106, (Taf. VIII. Fig. 7.) at et Triangel DBE, saa tidt som det er ophengt til at svinge udi det Punkt B, haver Svingets Center L i den Distance $BL = \frac{3}{4}BC$, borte fra B: Da finder man let, hvad Distancen bliver for samme Center, saa tidt som Figuren er ophengt, til at slynge udi et andet Punkt A. Thi kaldes BC, a. AB, c. Da bliver §. 117. 2.

$c + \frac{2}{3}a : \frac{2}{3}a = \frac{a}{12}$ til Svingets Centers Afstand fra Tyngdens Center, saa tidt som Henge-Punktet er udi A. Saaledes bliver denne Forskiel $= \frac{aa}{18.(c+\frac{2}{3}a)}$, derfor det simple Penduls hele Længde $= c + \frac{2}{3}a + \frac{aa}{18.(c+\frac{2}{3}a)} = \frac{3a^2+6c2+8ac}{6c+4a}$, og naar $c + a$, sættes $= a = \frac{3a^2+2ca+c^2}{4a+2c}$, aldeles saaledes som forhen §. 106.

2) Ligeledes, naar man veed, som før, at Pendulets Længde er $= \frac{3}{4}BC$ i det Tilfælde, da Trianglen er ophengt til at svinge udi Spitsen B, findes let, hvad det simple Penduls Længde bliver, naar Grund-Linien af Trianglet vender op ad, som i Fig. 4, hvor vi ville antage, at det er ophengt til at svinge udi det Punkt D. Thi da i dette sidste Tilfælde det simple Penduls Længde er det samme, som i det Tilfælde, da Trianglet er ophengt til at svinge i sin Spitse, alene at Henge-Punktets Distance fra Tyngdens Center bliver den samme. § 115. 116. Saa følger, at dersom Trianglet blev ophengt til at slynge i p, saaledes, at $pD = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}a$, var Svingets Centers Distance fra $p = \frac{3}{4}a$. Deraf findes let, hvad dette Punkts Afstand

fra

fra D bliver, saa tidt som Figuren er ophengt udi D. Nemlig §. 117. 2.

$\frac{1}{3}a : \frac{2}{3}a = \frac{1}{12}a$ til Svingets Centers Distance fra Tyngdens Center i det søgte Tilfælde, saa denne sidste Afstand eller Distance $= \frac{1}{6}a$. Og derfor bliver det simple Penduls hele Længde $= \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}a = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$DC, som er Svingets Centers Distance fra Henge-Punktet D i Trianglet ACB.

3) Er dette Tilfælde bekiendt, da findes ligeledes Svingets Center til et hvert andet Henge-Punkt E, naar nemlig Grund-Linien vender op ad i Trianglet, som Taf. VIII. Fig. 4. thi kaldes DC, a. ED, c. da bliver §. 117. 2.

$c + \frac{1}{3}a : \frac{1}{3}a = \frac{1}{6}a$ til Forskiellen imellem Svingets og Tyngdens Centrers Afstand fra Henge-Punktet, hvilken derfor bliver $= \frac{a^2}{18c + 6a}$. Og saaledes bliver, saa tidt som Trianglet er ophengt til at svinge udi E med Grund-Linien op ad; Det simple Penduls hele Længde $= \frac{a^2 + 6cc + 4ac}{6c + 2a}$.

4) I Cirklen ligeledes (Taf. VIII. Fig. 11. naar nemlig, det er først bekiendt, at det simple isokrone Penduls Længde $= \frac{5}{8}$BF for det Tilfælde, da Cirklen er ophengt til at svinge i et Punkt B af Peripherien. Saa findes dette Penduls Længde strax og uden Meie for det Punkt I, §. 117. 2. ved at sige (naar nemlig BF $= a$ og BI $= c$.

$c + \frac{1}{2}a : \frac{a}{2} = \frac{1}{8}a$: Forskiellen imellem Tyngdens og Svingets Centrers Distancer fra Henge-Punktet, som derfor bliver $= \frac{a^2}{16c + 8a}$. Saaledes bliver det søgte simple og isokrone Penduls

Længde $= \frac{1}{2}a + \frac{a^2}{16c+8a} = \frac{8ac+5a^2}{16c+8a}$, naar nemlig Cirklen er ophengt til at slynge udi det Punkt I.

§. 120.

Henge-Punktet og Svingets Center kunne forbyttes, uden at det simple isokrone Penduls Længde derved forandres.

Foruden de forhen giorte Anmerkninger, bør endnu en anden iagttages, at nemlig Henge-Punktet og Svingets Center altid kunde forbyttes med hverandre, uden at det simple isokrone Penduls Længde derved i det mindste forandres. Thi (Taf. VIII. Fig. 7.) om L antages som Svingets Center, der svarer til det Henge-Punkt A, og L forbyttes med A, saa Figuren henges op i L, til at svinge. Da bliver, i Følge §. 117. 2. om det Punkt M er Tyngdens Center, $\frac{1}{AM} : LM = \frac{1}{LM}$ til Forskiellen imellem Tyngdens og Svingets Centrers Afstand fra Henge-Punktet i det Tilfælde, da Figuren er ophengt i Svingets Center L, og saaledes bliver denne sidste Distance $= AM$, hvortil, naar legges Henge-Punktets Afstand fra Tyngdens Center, $= LM$, saa bliver det simple isokrone Penduls Længde i det Tilfælde, da Figuren er ophengt udi $L = AM + LM = AL$, og følgelig det simple isokrone Penduls Længde i begge Tilfælde det samme.

§. 121.

Maade at udregne det simple isokrone Penduls Længde i de Figurer, der svinge paa Siden.

Naar Figurerne drives paa Siden, ere, som man seer af Beviserne, alle disse Regler ligeledes at bruge. Vi have allerede viist Maaden, hvorpaa Udregningerne i dette Tilfælde bør skee i den rette Linies Bevægelser. §. 97. o. F. Vi ville her fare fort i nogle faa Exempler, for at vise det samme i Henseende til Figurernes Sving.

Da

Da man behøver en Anmerkning meer, end den forhen giorte i de Exempler, hvor den rette Linie svingede paa Siden.

Er (Taf. IX. Fig. 4.) DAE en Figur tagen efter Behag, er det klart af §. 156 F., at om man trekker de 2 Ordinater i Figuren *dn* og *fk*, som vi kalde her y; deres uendelig liden Distance fra hverandre *gh*, *dx* og A*g*, *x*. Da for at betiene sig af den forrige Regel, er det nødvendigt, at betragte det lille Parallelogram *dnkf*, som deelt i uendelig mange andre smaa fast forsvindende Parallelogrammer, hvis smaa Indhold fast ei ere adskillige fra deres Tyngdes Centrer; at multiplicere dem med Quadraterne af deres Distancer fra Henge-Punktet A, og siden at dividere, som før, med Summen af Inertierne, eller, hvilket kan være det samme, af Tyngderne multiplicerede med deres felles Tyngdes Centers Distance fra Punktet A. Denne Betragtnings-Maade er her nødvendig, fordi de smaa Dele i Elementet *dnkf* have ei meer, som før, i den horizontale Bevægelse samme Fart, men have hver for sig deres adskillige Bevægelse.

Kaldes da ethvert af disse smaa Parallelogrammer, som B eller L. Σ. Summerne af alle Σ i alle Quadraterne af Distancerne fra A, maa da under et tages. Men, om y sættes foranderlig i Henseende til den samme Absciisse A*g*, er altid $BA = \sqrt{x^2 + y^2}$ i Almindelighed, og $gh = dx$ er Høiden af det lille Parallelogram L eller B, hvis Bredde er *dy*, siden y i denne Henseende er bleven sat foranderlig: Derfor bliver Summen af alle disse smaa Parallelogrammer, der udgiøre Parallelogrammet *dfkn*, multiplicerte med Quadraterne af deres Distancer fra $A = \int dx dy . (x^2 + y^2)$. Men i denne Tilfælde blive bestandig, imedens at y og *dy* forandres, *x* og *dx* uforanderlige, derfor faaes

$$\int dxdy.(x^2+y^2) = x^2dxy + \tfrac{1}{3}y^3dx,$$

som er det Integral, eller den Forandring, der behoves, for at finde hvad hele Parallallelogrammet bliver, naar alle dets Dele ere multiplicerte i Quadraterne af deres til dem svarende Distancer fra A.

Dette giort; har man alene nedig, at tage baade x og y forandelige, som sædvanlig, hele Figuren igiennem, for at finde dennes Indhold eller Summen af alle Parallelogrammer, som *ndfk*, multiplicerte med de til dem svarende Distancer fra Henge-Puntet A deres Quadrater, og følgelig, da i Henseende til den hele Inerties Multiplication med dens Tyngdes Centers Distance fra A ingen Forandring i denne Henseende kan forekomme, da bliver, saa tidt som Figurerne drives paa Siden,

$$\frac{\int \frac{1}{3}xx}{\int \frac{1}{3}x} = \frac{\int x^2ydx + \frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}.$$

§. 122.

Svingets Center bestemmes i Parallelogrammer, som drives paa Siden.

Da den første Deel af dette Integral eller $\frac{\int x^2ydx}{\int xydx}$ er just det samme, som vi for §. 107. havde i den Tilfælde, da Figuren blev dreven hen efter Grund-Linien, thi y tagen for den halve eller hele Ordinat gior her ingen Forskiel, da den findes af samme Heide i begge Integraler; saa sees, at man har alene nedig at legge dertil det andet Stykke $\frac{\int \frac{1}{3}y^3dx}{\int xydx}$ hvilket vi ville oplyse med nogle faa af de nyttigste Exempler.

Som om Figuren er (Taf. VIII. Fig. 6.) et retvinklet Parallelogram, ophengt udi C, $cA = a$, $Ae = x$, $ef = dx$, $Ag = c$,

BD

$BD = b$, da er efter det allerede forhen fundne §. 103. $\frac{\int x^2 y dx}{\int xy dx} = \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}$. Videre findes, fordi her $y = \frac{1}{2}b$, $\frac{\int \frac{1}{3}y^3 dx}{\int xy dx} = \frac{\int \frac{1}{24}b^3 dx}{\frac{b}{2}\int dx(x+a)}$, som, naar $x = c$ beløber for det hele Parallelogram til $\frac{\frac{1}{12}b^2}{\frac{1}{2}c + a}$, hvoraf sees; at da Grund-Linien her ei gaaer ud af Regningen, er Bredden af Parallelogrammet ikke ligegyldig i dette Tilfælde, saaledes, som vi saae, at den var i det andet, naar den blev dreven paa Siden.

Er $a = 0$, da bliver det simple Penduls Længde $= \frac{\frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2}{\frac{1}{2}c}$, naar nemlig Henge-Punkten er midt i Grund-Linien, i A.

§. 123.

Ligeledes i Parallelogrammer, som svinge, ophengte i en af deres Kanter.

Den Tilfælde, da et retvinklet Parallelogram (T. VIII. F. 6.) DBEF henges op i en af sine Vinkler, som D, til at slynge, er lidt vanskeligere, men siden vi have seet §. 115. og følg. at Svingets Centers og det simple Penduls Længde er det samme, saa længe Distancen fra Tyngdens Center og Planet, hvori Svinget skeer, blive de samme, saa i Steden for at giøre Udregningen i Henseende til den halve Diagonal pD, kan den giøres i Henseende til Axlen AG, alene at, da p er Tyngdens Center, $pD = pK$, og at i K er Henge-Punktet.

Dette forudsat. Om da $BD = b$, $AG = c$, $AK = a = Dp - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2} - \frac{1}{2}c$, saa bliver Svingets Centers Distance. §. 122.

$= \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2}{a + \frac{1}{2}c}$, og naar i Steden for a sættes dens Værdie, $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2} - \frac{1}{2}c$; saa bliver $\frac{a^2 + ae + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2}{a + \frac{1}{2}c}$ $= \frac{\frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{c^2 + b^2} = \frac{2}{3}$ED, eller $\frac{2}{3}$ af den hele Diagonal.

§. 124.

Ligeledes i Trianglerne.

Ligeledes om et isoskel eller ligesidet Triangel er ophengt i sin Spitse og slynger paa Siden (Taf. VIII. Fig. 9.). Er da BC$= a$, HG$= b$, Bc$= x$, saa bliver $fh = \frac{bx}{a} = 2y$, og efter det forhen fundne §. 105 er $\frac{\int x^2 y dx}{\int xy dx} = \frac{3}{4}a$, men $\frac{\int \frac{1}{3}y^3 dx}{\int xy dx} = \frac{\int \frac{\frac{1}{24}b^3 x^3}{a^3} dx}{\int \frac{bx^2}{2a} dx}$ $= \frac{\frac{1}{16}b^2 x}{a^2}$, og for det hele Triangel $\frac{b^2}{16a}$, saa den hele Længde af det søgte simple Pendul er $\frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a}$.

§. 125.

Er et Triangel (Taf. VIII. Fig. 4.) ophengt i Midpunktet D af sin Grund-Linie, da er §. 119. 2. den første Deel af Integralen $= \frac{1}{2}a$. Den anden, eller $\frac{\int \frac{1}{3}y^3 dx}{\int xy dx}$, om DC a, AB$= b$, CL$= x$, $ef = \frac{bx}{a}$ er $\int \frac{\frac{1}{3}b^3 x^3 dx}{8a^3}$, dividert med $\int (a - x)\frac{bx}{c} dx = \frac{\frac{1}{12}b^3 x^4}{8a^3} : (\frac{abx^2}{2a} - \frac{\frac{1}{3}bx}{a})$ som

som, naar $x = a$, bliver for det hele Triangel $= \frac{\frac{1}{8}b^2}{a}$. Hvoraf man seer, at det simple Penduls Længde er i dette Tilfælde $\frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{8}b^2}{a}$.

§. 126.

Er derfor (Taf. VIII. Fig. 14.) et retvinklet isoskel Triangel CBD ophengt i Midt-Punkten A af sin Grund-Linie, da bliver i §. 125 $CA = \frac{1}{2}b$. $AB = a$, og det hele simple Penduls Længde $= \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{8}b^2}{a} = a$, saa i dette Tilfælde er den hele Høide AB det simple Penduls Længde; thi $\frac{1}{4}b^2 = a^2$, fordi CBD er 90°.

Men henges et saadant isoskel retvinklet Triangel op i sin Spitse B, da er det simple Penduls Længde $= \frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a} = a$, §. 124. fordi $b = 2a$. Hvoraf man seer, at det kommer ud paa et, hvad heller at et isoskel retvinklet Triangel henges op til at svinge i Spitsen af sin rette Vinkel B, eller i Midt-Punktet A, af sin Grund-Linie CD.

§. 127.

For Resten kan man kortelig agte, at alt, hvad der er blevet sagt fra §. 115—117, passer sig ikke mindre til Figurerne, saa tidt som de drives paa Siden, end vi forhen §. 119 have viist i Exempler, at det tilkommer dem i det Tilfælde, da de drives hen efter deres Flade. Nemlig, man haver her, ligesom forhen, den Fordeel, alene at søge, hvad Svingets Center bliver i det letteste Tilfælde, for siden at bestemme i alle andre, hvad det er.

Af de rette Figurer at bestemme Svingets Center i de skieve.

Videre sees, at saa tidt som Svingets Center er fundet for de rette Figurer, som for Ex. for det isoskele Triangel GBH (Taf. VIII. Fig. 9.) er det og fundet for alle andre skieve af samme Art, for Ex. for Trianglet BED, alene at Høiden BC er i begge Triangler den samme, saavelsom Grund-Linien ED. Thi da Svingets Center, saa tidt som de samme rette Linier drives paa Siden, er altid det samme, hvad heller Linien ligger horizontal eller skiev imod Horizonten. §. 100. Trekkes da i Trianglet BED, igiennem Midten C af Linien ED den horizontale Linie GH saaledes, at $CG = CE$ og at $DC = CH$; siden da ED svinger i samme Tid, som GH, og ligeledes *ecd* parallel ED i samme Tid, som *gch*, parallel med GCH, og dette gielder overalt i begge Figurerne, saa maa Svingets Center i begge være det samme. Man kan ligeledes og paa selvsamme Maade slutte til de andre Figurer, saa at, i Steden for at søge Svingets Center i de skieve, dette Punkt kan søges i de rette, det er i de, hvis Dele ere paa begge Sider af Axlen i alle Henseende de samme.

§. 128.

Udregning for Parabolerne.

Er den svingende Figur en Parabol, da er efter det forhen fundne §. 108. den første Deel af Integralen $\frac{5}{7}x$. Den anden Deel derimod $\int \frac{\frac{1}{3}y^3 dx}{\int xy dx} = \int \frac{px\sqrt{px}.dx}{3} : \int x\sqrt{px}.dx = \frac{\frac{2}{15}p\sqrt{(px)^5}}{\frac{2}{5}\sqrt{(px)^5}} = \frac{p}{3}$, saa det søgte simple Penduls hele Længde er $= \frac{p}{3} + \frac{4}{7}x$.

§. 129.

§. 129.

Er (Taf. VIII. Fig. 11.) GBH et Cirkel-Snit, som før §. 113, i B Henge-Punktet; da, naar det svinger i det vertikale Plan eller paa Siden, bliver $\frac{1}{3}\int y^3 dx$, eller simpel hen $\int y^3 dx$ $= \int (ax - xx).\sqrt{ax - xx}dx = \int \frac{(a^2x^2 - 2ax^3 + x^4)\,dx}{\sqrt{ax - x^2}}$, hvilket integrert, som før §. 113, giver Ligeledes i Cirklerne og deres Stykker.

$$\frac{1}{3}\int y^3 dx = \frac{1}{3}\left(\frac{\overline{x^8 - ax^7}^{\frac{1}{2}}}{4} = \frac{\overline{x^6 + ax^5}^{\frac{1}{2}}}{8} \cdot 3a\right.$$

$$\left. - \frac{\overline{x^4 + ax^3}^{\frac{1}{2}}}{32}a^3 + \frac{3a^3}{64}\overline{ax - xx^2}^{\frac{1}{2}} + \int \frac{3}{64}a^3 \cdot \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax - xx}}\right)$$

men $\int \frac{3}{64}a^3 \cdot \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{3}{64}a^3 \cdot BG$, om $BD = x$. Hvilket altsaa er Nævneren i Distancen af Svingets Center fra Henge-Punktet B i Segmentet GBH.

Man seer let, at for den hele Cirkel, eller naar $x = a$, bliver $\sqrt{ax - xx}$ overalt $= 0$, saa at alene $\frac{1}{3}\int \frac{3}{64}a^3 \cdot \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax - xx}}$ er i dette Tilfælde det fulde Integral. Kaldes Peripherien P, er dette Integral $\frac{1}{3}(\frac{3}{64}a^2 \cdot \frac{1}{2}P)$, og naar man dividerer med Halvdelen af den hele Cirkels Tyngde i Halv-Diametern, eller i Henge-Punktets Distance fra Tyngdens eller Cirklens Center, det er med $\int xy\,dx$, faaes

$$\frac{\int \frac{1}{3}y^3 dx}{\int xy\,dx} = \frac{\frac{1}{64} \cdot \frac{1}{2}a^3 P}{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{8}a^2 P)} = \frac{1}{8}a,$$

Men i Følge §. 113 var i Svinget hen efter Grundlinien det simple isokrone eller i samme Tid svingende Penduls Længde $= \frac{5}{8}a$, da derfor $(\frac{5}{8} + \frac{1}{8})a = \frac{3}{4}$, saa er det simple Penduls Længde i det vertikale Sving saa stor som de $\frac{3}{4}a$ Dele af Diametern. §. 130.

§. 130.

Er Figuren (Taf. VIII. Fig. 15.) en Sector af en Cirkel eller et Cirkel-Snit fra Centret, som CAB, ophengt i sit Center C, da er Udregningen ikke vanskelig, alene at man i Forveien agter, hvad der er bleven beviist §. 107. *a.* Forel., at om $AD = \frac{1}{2}ADB = \frac{1}{2}A$, $AE = \frac{1}{2}AB = C$, og Halv-Diametern $CD = R$, da bliver i Sector ACB Tyngdens Centers Distance fra Centret $C = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}C.R}{\frac{1}{2}A} = \frac{2C.R}{3A.}$.

Dette forudsat, er der ingen Vanskelighed i at bestemme Svingets Center i Cirkel-Snittet CAB, og det uden at bekymre sig om den sidste Regel §. 121. Thi man seer let, at om CD er Midt-Linien i Sector, og man med en ubestemt halv Diameter i den, som med CF, slaaer de Cirkel-Buer *ab*, *cd*, som vi ville sætte, at være hinanden uendelig nær, da er Farten eller Bevægelsen i alle Delene af Elementet *abdc* den samme, og dette Elements Tyngdes Center udi *f*. Kaldes da Cf, x, saa bliver $CD : AD = Cf : fa$, $R : \frac{1}{2}A = x : \frac{\frac{1}{2}Ax}{R}$, og $\frac{Ax}{R}dx$ er Elementet *abdc*, følgelig $\int xx\mathfrak{z} = \int \frac{Ax^3 dx}{R} = \frac{\frac{1}{4}Ax^4}{R}$, og for den hele Sector, da $x = CD = R = \frac{1}{4}AR^3$.

Altsaa bliver $\int \frac{xx\mathfrak{z}}{x\mathfrak{z}} = \frac{\frac{1}{4}AR^3}{\frac{\frac{2}{3}CR.}{A}\frac{1}{2}AR} = \frac{\frac{3}{4}AR}{C}$, som er i Cirkel-Snittet fra Centret CAB det simple Penduls Længde og Distance fra Henge-Punktet C.

§. 131.

§. 131.

I Henseende til de sammensatte Penduler, som forekomme i Brugen, ere de faste Ting i sær at betragte, og fornemmelig de af dem, som man forestiller sig, at blive til ved en Figurs Omvæltning om en fast Axel. Da i alle deslige Legemers Slyngning man efter det forhen sagte vel maa see paa, hvad Inertier der bevæges ensdan, saa kan det i de ved Figurers Omveltning til blevne Legemer gieres paa den Maade, som vi strax her skulle anføre, hvilken virkelig ikke bestaaer i andet, end at bringe deslige Legemer til den almindelige Regel §. 94, efter den §. 121 viiste Maade, nemlig ved en dobbelt Differentiations-Ligned, og de deraf paa en behørig Maade tagne Integraler.

Den almindelige Regel for Svingets Centers Bestemmelse i Legemerne, bevises.

Man veed, at i alle de Legemer, hvilke man kan forestille sig, som at være blevne til ved en Figurs Omveltning om sin Axel, er Snittet parallel Grund-Linien overalt en Cirkel.

Er ABC (Taf. IX. Fig. 1.) et saadant Legeme, EFGH er dets Snit parallel med Grund-Fladen BgCK, da om et af de smaa Punkter i EFGH som p slynger, er det klart, at om Diametern EG trekkes, og det materielle Punkt p kaldes z, bliver $\int z . Ap^2$ Summen af alle Inertierne i Cirklen EFGH multiplicerte med Quadraterne af deres Distancer fra Henge-Punktet A, og altsaa hvad vi før have kaldet $\int zxx$.

Men $Ap^2 = AD^2 + Dp^2$. Kaldes AD, x. DC, eller Dp v. Den halve Ordinate ab, y. ac, dv. Da er $\int z . Ap^2 = \int z . (x^2 + v^2) = \int z . x^2 + \int z . v^2$.

Man maa herved agte, at i Henseende til samtlig Inertiernes Sving i den samme Cirkel EFGH er x bestandig; følgelig, dersom et Element af Inertien i denne Halv-Cirkel antages som p, at bestaae af den perpen-

perpendikulære halve Ordinate ab i ac, eller af ydv, da skeer, i Henseende til x, Svinget, som om Bevægelsen i alle Punkterne var den samme, ligesom forhen i et efter Grund-Linien, saa man derfor alene behøver i $x^2 \int z = x^2 \int ydv$, at tage Summen af alle Inertierne, som man let seer, er Quart-Cirklen PGHE.

Er da Forholden af Diametern til Peripherien $1 : p$, bliver Peripherien til Diametern $2v = 2vp$, og $\frac{v^2 p}{4} =$ EHD, saa $x^2 \int z = \frac{p}{4} x^2 v^2$, og for den hele Cirkel $px^2 v^2$, hvilket, naar for v sættes DE $= r$, bliver for den hele Cirkels EDGF Integral $px^2 r^2$.

Saaledes have vi betragtet Inertiernes Moment efter Quadraten af Distancen, for saavidt som de langs hen efter ab, som før i Bevægelsen efter Grundlinien, det er, i Henseende til x have det samme Sving. I Henseende til $\int z v^2$, eller $\int ydv . v^2$, kunne de derfor nu ansees som smaa Tyngder, der ligge langs hen efter v, da deres Sving i alle Punkter, som a eller c bliver foranderlig, fordi v idelig forandres. Men $y = \sqrt{r^2 - v^2}$, saa $\int ydv . v^2 = \int v^2 dv . \sqrt{r^2 - v^2}$ $= \int \frac{(v^2 r^2 dv - v^4 dv)}{\sqrt{r^2 - v^2}}$, hvoraf Integralen er $\frac{1}{4}(r^2 v^6 - v^8)^{\frac{1}{2}}$ $- \frac{r^4}{8}(r^2 v^2 - v^4)^{\frac{1}{2}} + \frac{\int \frac{1}{8} r^4 dv}{\sqrt{r^2 - v^2}}$, men $\frac{vdv}{\sqrt{r^2 - v^2}}$ er Buen fra Centret regnet, som svarer til Abscissen fra Centret v, i en Cirkel, hvis Halv-Diameter $= r$.

Følgelig, naar $v = r$ bliver den den hele Quadrant, og i vores Tilfælde er, naar $v = r$, $\frac{rdy}{\sqrt{r^2 - v^2}} =$ HE. Følgelig bliver $\frac{1}{8} r^3 .$ HE $=$ $\frac{1}{4} r^3$.

$\frac{1}{4}r^2 HE.\frac{r}{2}$ = Quadrant-Rummet $EHD.\frac{1}{4}r^2$, og man betragter, som før i $\int z.x^2$, det hele Cirkelrum, saaes for det fuldstændige Integral $EHD.r^2$.

Thi, naar $r = v$, bliver $\frac{1}{4}(r^2v^6 - v^8)^{\frac{1}{2}} - \frac{r^4}{8}(r^2v^2 - v^4)^{\frac{1}{2}}$ $= 0$, saa det hele Integral af $\int z.v^2 = EHD.r^2$.

Er som før $1 : p$ Forholden af Diametern til Peripherien, da er Cirklens Indhold $= r^2p$, naar Halv-Diametern $= r$. Følgelig bliver $EHD.r^2 = \frac{1}{4}pr^4 = \int z.v^2$.

Altsaa bliver $\int z.\overline{x^2+v^2} = px^2r^2 + \frac{1}{4}pr^4$, som er Momentet af alle Inertierne i Quadraterne af Distancerne fra Henge-Punktet udi Cirkel-Fladen $EFGH$.

Dersom denne Cirkel-Flade multipliceres med dx, faaes en uendelig lidet høi Cylinder, og af lutter deslige Cylindriske Elementer bestaaer det hele givne Legeme ABC, men r, som før var bestandig i de forrige Integrationer, bliver nu i denne sidste Henseende foranderlig; vil man da kalde den y, for at holde Lighed med de forrige Integraler, saa faaes for Elementet af ABC, betragtet med alle sine Momenter som Quadraten af Distancen, dette nye Differential $px^2y^2dx + \frac{1}{4}py^4dx$ og $\int(px^2y^2dx + \frac{1}{4}py^4dx) = \int zxx$.

Siden, som før er seet §. 121, i Henseende til $\int zx$, ingen Forandring forefalder i det horizontale og vertikale Sving, saa bliver $\int zdx$, hvad den skulde være i den første Bestemmelse, som z fik i $\int z.x^2$, og da der $z = pr^2$, eller nu py^2, derfor og det cylindriske Element py^2dx, saa bliver $\int z.x = \int pxy^2dx$, og saaledes er for Legemerne, der beskrives ved Omveltning, $\frac{\int xxz}{\int xz} = \frac{\int(px^2y^2dx + \frac{1}{4}py^4dx)}{\int pxy^2dx}$.

§. 132.

Svingets Center bestemmes i Kuglerne.

Er det svingende Legeme en Kugle, ophengt i et Punkt af sin Peripherie (Taf. IX. Fig. 2.), da om $GH = x$, $IH = y$, $GF = a$, bliver $y = \sqrt{ax - xx}$, $yy = ax - xx$, $y^4 = a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$, og følgelig

$$\int \frac{4y^2x^2 + y^4}{4} dx = \frac{ax^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}a^2x^3 - \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{5}x^5}{4}$$

som sammenlagt, og siden for x sat a, for at faae den søgte Længde for den hele Kugle, beløber $\frac{7}{120}a^5$.

Derimod er $\int xy^2 dx = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$ og for den hele Kugle, naar $x = a = \frac{1}{12}a^4$, saa man faaer for den søgte Længde $\frac{7}{120}a^5 : \frac{1}{12}a^4 = \frac{7}{10}a$.

§. 133.

Veed man Længden af dette Penduls, som svarer til et Henge-Punkt, tagen i Kuglens Peripherie udi G, da finder man siden let, hvad Længden bliver for et hvert andet Punkt A, hvori Kuglen kan blive ophengt, thi er cb Pendulets Længde neden for Kuglens Tyngdes Center i den første Tilfælde, da samme er hengt op udi G; saa bliver Længden ca eller Distancen fra Tyngdens Center, naar den henger i A, deraf let at finde §. 117, at cb og ca forholde sig i forkeert Forhold af Længderne Gc og Ac, følgelig om $Gc = r$, $Ac = l + r$, da er cb (eller $\frac{7}{5}r - r =$) $\frac{2}{5}r : (ca)x = \frac{1}{r} : \frac{1}{l+r}$, saa $x = ca = \frac{\frac{2}{5}rr}{l+r}$ og det hele simple Penduls Længde, som svarer til Henge-Punktet udi $A = l + r + \frac{2rr}{5(l+r)}$.

Man

Man seer deraf, at dersom r er meget liden imod l, kan $\frac{2rr}{l}$ ansees som intet imod $l+r$, følgelig er dette den i Forelæsningerne omtalte Tilfælde, naar nemlig Pendulet er langt og den halve Diameter af den paahengte Kugle meget liden, at man kan holde Pendulets Længde for at være Distancen imellem Henge-Punktet og Tyngdens Center.

§. 134.

Er det slyngende Legeme en Keile, som slynger om sin Spitse, og Heiden (Taf. IX. Fig. 3.) $AB=a$, Diametern i Grund-Fladen $CD=b$, $Af=x$, da er $ef=y=\frac{bx}{a}$ og I Keilerne.

$$\int\frac{\frac{4y^2x^2+y^4}{4}dx}{\int xy^2dx}=\int\frac{\frac{(b^2x^4dx+b^4x^4dx)}{a^2}}{\int\frac{b^2x^2}{a^2}dx}\frac{}{4a^2}=\frac{\frac{1}{5}b^2}{a^2}x^5+\frac{b^4}{20a^2}x^5,$$

hvilket for den hele Keile, naar $x=a$, beløber $\frac{4a^2+b^2}{5a}$.

Saafremt Henge-Punktet antages at være udi F, kan det simple Penduls Længde findes paa samme Maade, som er bleven brugt udi nest forrige Exempel.

Antages Keilen at slynge, ophengt udi Midt-Punktet af sin Basi. Da om $Bf=x$ er $ef=y=\frac{ba-bx}{a}$ og

$$\int\frac{4y^2x^2+y^4dx}{4\int xy^2dx}=\left(\frac{\frac{1}{3}b^2a^2x^3-\frac{1}{2}b^2ax^4+\frac{1}{5}b^2x^5}{a^2}+\right.$$

$$\left.\frac{b^4a^4x}{1}-\frac{4b^4a^3x^2}{2}+\frac{6b^4a^2x^3}{3}-\frac{4b^4ax^4}{4}+\frac{b^4x^5}{5}\right):$$

$$4a^4$$

$(\frac{1}{2}b^2a^2x^2 - \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{4}b^2x^4) : a^2$. Hvilket, naar x sættes $= a$, og alle Størrelserne sammenlegges, giver for det simple Penduls Længde, som slynger i lige Tid med den hele Keile $\frac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}$.

§. 135.

I Cylindrene. Slynger en Cylinder om Centret af sin Grund-Flade, og dens Høide kaldes a, den halve Diameter i Grund-Fladen b, og Begyndelsen af x tages i Henge-Punktet, da er $y = b$ og

$$\int \frac{4x^2y\,dx + \overline{y^4\,dx}}{4\int xy^2\,dx} = \frac{\frac{1}{3}b^2x^3 + \frac{1}{4}b^4x}{\frac{1}{2}b^2x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{b^2}{2x},$$

er $x = a$, da faaes for den hele Cylinder det søgte simple Penduls Længde $= \frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$.

§. 136.

I parabolske Konoider. Ligeledes, om en parabolsk Konoide eller Keile slynger, da er $y = \sqrt{px}$, og man faaer, ligesom før,

$$\frac{\int 4x^2y\,dx + y^4\,dx}{4\int xy^2\,dx} = \frac{\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3}{\frac{1}{3}ax^3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a.$$

Man kan paa samme Maade giere Udregningerne udi andre Tilfælde, saa vi ei derved ville længer opholde os.

Niende

Niende Forelæsning.

Om Central-Kræfterne i den cirkulære Bevægelse.

§. 162.

Vi lovede i vores sidste Forelæsning at vise, hvorledes Tingenes Fart eller Hastighed, kunde tilintetgiøre Tyngden. For at sætte denne Sag i sit rette Lys, er det nødvendigt, at vi forud tale om Central-Kræfterne, og det saa meget meer, som det er paa dem, at de allervigtigste Forklaringer over Naturen beroer. De ere ei alene i Mekanik, men i Physik og den hele høiere Kundskab om det store Verdens System de vigtige Hielpe-Midler, hvorved vi see ind i det allermest skiulte i Naturens Virkninger, saa man kan med Sandhed sige, at Kundskaben om Central-Kræfterne er en med af de allervigtigste i det Menneskelige.

Den letteste Maade, at forestille sig Central-Kræfterne paa, bliver vist.

For derfor at giøre en Begyndelse med at forestille os de saa kaldte Central-Kræfter paa den forstaaeligste og letteste Maade, ville vi (Taf. IX. Fig. 6.) forestille os et Plan eller et Bret, som det Blad, f. Ex., hvorpaa Cirklen GAF er trokken. Vi ville i dette Plan betragte et Punkt C, og i det en Traad CA fæstet fast, og i Enden af Traaden i A en

liden Kugle. Er da Brettet horizontal, saa er det klart, at Tyngden af Kuglen hviler paa Brettet, Kuglen derfor maa blive ubevægelig liggende, følgelig ligger og Traaden CA i denne Tilfælde ganske slap og los, uden at være spendt af Kuglen.

§. 163.

Naar alt nu er i den nylig omtalte Stand, antager man da, at paa hvad Maade det end og skeer, Kuglen bringes til at løbe om i en cirkulær Bevægelse paa Brettet, f. Ex. om Brettet ligger med en bevægelig Tap i et hult cylindrisk Hul *f*, som i Taf. IX. Fig. 5, og drives om enten umiddelbar med Haanden, eller og middelbar ved Hielp af en Snor. Da seer man let, at Kuglen i A, siden Bevægelsen strax begynder at blive retliniet efter den Drive-Linie AD, maa søge at bevæge sig fort hen efter Tangenten AD, men da den holdes tilbage af Traaden AC, som er fæstet fast i det Punkt C, saa er det ligesaa klart, at Traaden staaer Bevægelsen imod, at den hindrer Kuglen i at løbe fort efter AB; at den, om Hastigheden i Kuglen idelig varer ved, tvinger denne til at bevæge sig omkring i Cirkel-Peripherien AFG, og at derfor Traaden selv under denne Bevægelse tillige med Punktet C maa spendes og trykkes ligesaa stærk, som de selv holde den i Bevægelse værende Kugle A tilbage, saa man ved at kiende Størrelsen af Centrifugal-Kraften, kiender tillige den Kraft, hvormed Traaden og Centret spendes.

§. 164.

§. 164.

Deraf forstaaer man let, at alt som Hastigheden i Kuglen bliver stærkere, bliver dens Fart, folgelig dens Kraft, til at trykke Centret C, og at spende Traaden CA, eller Ce, alt stærkere og stærkere; saa at tilsidst Traaden kan blive saa stærk spendt, at den maa briste, om den end selv er af en anseelig Fasthed og Styrke.

§. 165.

Ligeledes og hvorledes Bevægelsen paa Siden kan hæve Tyngden.

Dersom man i Steden for at ansee Traaden, efter det forhen sagte, fæstet udi C, betragter den nu som los, og forestiller sig i den Sted i dette Center en Tridse C med en Traad, som er los og gaaer omkring Tridsen, forende i sin ene Ende Kuglen A, i den anden en Tyngde T, da er det klart, at Tyngden T gior nu den Modstand, som Centret C for giorde, og at den trekker bestandig Kuglen ind imod Centret, imidlertid at dens Fart bestandig forer den fra Centret.

Og man seer fremdeles let uden Moie, at da Farten af Kuglen, som driver fra Centret, idelig bliver storre og storre, alt som Hastigheden voxer i dens Bevægelse, saa maa Drifften fra Centret nodvendig og kunne blive net op saa stærk, saa den er ligesaa stor som Kraften, der driver til Centret udi T, det er, saa stor som Tyngden. Folgelig seer man, at Hastigheden i Bevægelsen ei alene kan hæve en Deel af Tyngden, men endog hæve den ganske og aldeles.

§. 166.

§. 166.

Og den krumlinede Bevægelse kan blive vedvarende.

Antager man endelig i Steden for Tyngden T en Kraft i Naturen, hvilken ligesaa stærk som den og overalt drev den Inertie, der bevæges, ind imod Centret af Cirklen; imidlertid at Hastigheden af Bevægelsen, ligesom før, idelig forte Inertien længer bort fra dette Center; da maatte alt endnu blive af samme Beskaffenhed som før. Saa man deraf ydermere seer, hvorledes et Legeme idelig og bestandig kan blive ved at bevæge sig i en og den samme Linie, omkring et vist Punkt eller Center. Saafremt nemlig, at det bevæges med en Hastighed, der i en given Tid driver det ligesaa langt fra Centret, som en anden Kraft imidlertid driver det ind imod Centret.

§. 167.

Det foregaaende oplyses og bekræftes ved Erfaring.

Man kan ved meget lette og simple Erfaringer oplyse det allerede sagte, at nemlig af deslige Kræfter en kan hæve den anden, eller, for at tale mindre almindelig, at Hastigheden af Bevægelsen kan formindske Tyngden. Saaledes er det en gemeen Erfaring, at, naar et Glas er fyldt med Vand, og det bevæges med en vis Hastighed, da falder ikke en Draabe af Vandet ud af Glasset, uagtet at Mundingen vendes ned efter og intet hindrer Vand-Draaberne i deres Fald uden Bevægelsen alene. Driver man derpaa Glasset langsommere om, saa Hastigheden bliver mindre, og endelig meget liden, da falder Vandet ud af Glasset langsommere eller hastigere, eftersom Hastigheden af Bevægelsen er større eller mindre til.

Det

Det er af denne samme Aarsag, fordi nemlig at Hastigheden af Bevægelsen hæver Tyngden, at en Steen, som drives omkring i en Slynge, stiger alt høiere og høiere, det er, bliver alt lettere og lettere, eftersom at Hastigheden, hvormed Slyngen drives, bliver større og større.

§. 168.

Skiønt vi i disse Forelæsninger langt fra ikke foretage os de Forsøg, hvorved Theorien af Central-Kræfterne omstændelig vises. Saa kan jeg dog ikke undlade, at anføre en af de allersimpleste, hvorved det i §. 162 — 165 allerede sagte umiddelbar bekræftes.

ACB nemlig T. IX. F. 5. er en rund Skive i Form af et Bord, som hviler paa en Fod saaledes, at den overmaade villig kan bevæge sig omkring det Punkt *f*, naar ACB drives med Haanden rundt om paa et Sted i dens Peripherie, som for Ex. i B. En Blye-Kugle *c* hefter fast ved en Traad *dc* i det Punkt *d*, saaledes at *c* frit kan bevæge sig omkring det Punkt *d* paa alle Sider. I Begyndelsen, i sær om ACB drives hastig omkring, følger Kuglen saa langt fra ikke Bevægelsen af Skiven, at den meget meer synes at gaae tilbage; hvilket er en nødvendig Følge af Inertien, hvis Direktion altid gaaer tvertimod den bevægende Krafts Direktion, §. 10. Men siden bliver i *c* Hastigheden alt større og større, indtil den bliver omsider den samme, som Skivens. Da under Bevægelsen Traaden *cd* bliver alt stærkere og stærkere spendt, indtil endelig at brække, om Bevægelsen bliver meget hastig.

§. 169.

Saafremt man i Steden for at legge Kuglen over Skiven ABC paa den nylig omtalte Maade, skruer en Gaffel *gk* med to smaa Grene udi *k* saaledes fast i Brettet, saa Traaden *dge* (forlænget om nodig gieres) og lagt ind imellem de smaa Grene af Gaffeln udi *g*, bær Kuglen *e*, imidlertid at den selv er fast udi *d*. Da saa længe Skiven hviler, ligger *e* tilligemed Traaden *eg* i Vertikalen. Saasnart derimod, som Skiven drives om, stiger den op over Vertikalen fra *c*, f. Ex. til *b*, alt høiere og høiere, eftersom Hastigheden i Skiven og Gaffeln bliver større og større, indtil den i *c* omsider bliver horizontal og parallel med Skiven, naar Tyngden og den centrifugale Kraft, som foraarsages af Hastigheden eller Bevægelsen paa Siden, hæve hverandre fuldkommen. Bliver Hastigheden af Skiven derpaa mindre, synker strax Kuglen noget ned igien imod Vertikalen, og det saa meget meer, som Hastigheden i Skiven bliver mindre til.

§. 170.

Hvad Centripetal-Kraft er i Naturen.

Efter denne Forberedelse ville vi ordentlig foretage os den Lærdom om Central-Kræfterne. Da man nu strax seer, hvorfor de have dette Navn. Derfor nemlig, fordi de bestandig drive den bevægede Ting paa den ene Side fra, paa den anden Side til et fast Punkt; nemlig til og fra C. T. IX. F. 6. Dersom man derfor, i Steden for Tyngden T, foreстiller sig en virkende Kraft i Naturen, der bestandig driver imod Centret og ind til det, saa at om den alene virkede, Legemet i A i

Følge

Følge af den bestandig maatte falde imod dette Center, saa foreſtiller man ſig det, hvad man i Naturen kalder vis Centripeta, eller Centripetal-Kraften. Thi man kan beviſe uimodſigelig, at der ere ſaadanne Kræfter i Naturen, ſom altid og idelig drive Tingene i Verden imod viſſe Punkter; det er ved dem at de ſtore Bevægelſer i Verden ſkee, og af dem er Tyngden, den Tyngde en med, ſom vi i det forrige have talt om og forklart. Den driver altid imod et viſt Punkt, imod Jordens Center, og dette er, hvad vi kalde i den almindelige Tale med det Navn, at Tingene falde.

§. 171.

Ligeſom Centripetal-Kraften, efter det nylig ſagte, driver alle Tingene imod et viſt og faſt Punkt, ſaa er Centrifugal-Kraften det Navn, ſom man giver den anden, den, ſom kommer af den Haſtighed eller Fart i Tingen, hvormed den bevæger ſig fort efter Tangenten AD, men man maa meget vel agte, at Centrifugal-Kraften er ei Haſtigheden ſelv i A, men at den alene af denne Haſtighed bliver til, thi derſom Ae er en liden Cirkel-Bue, ſaa liden, at den faſt kan anſees for en ret Linie, da kan man ved den foreſtille ſig den heſe Kraft, ſom driver hen efter Tangenten, inddeler man denne i de to andre Side-Kræfter, Ag og AB, da er $Ag = Bx$ den Deel af Kraften, ſom kan kaldes Central, eller ſom driver fra Centret, da AB derimod foreſtiller Haſtigheden ſelv. Hvad Centrifugal-Kraften er.

§. 172.

Central-Kræfterne ere Pressioner.

Følgelig forestiller Be Central-Kraften, og det kommer paa et ud, hvad heller man kalder den i den cirkulære Bevægelse Centripetal- eller Centrifugal-Kraften, thi disse Kræfter ere i denne Bevægelse i sig eller i absolut Størrelse altid lige store, naar Kræfternes Center er tillige Cirklens Center, hvilket af det følgende bedre skal forstaaes. De giøre hverandre og derfor i Øieblikket af Virkningen altid, og følgelig alle Øieblik til intet. De ere ikkuns Pressioner eller trykkende Kræfter, skiønt Centrifugal-Kraften bliver til af en Bevægelse, der haver en virkelig og bestemt Hastighed.

§. 173.

Central-Kræfterne ere som Quadraterne af de i en uendelig liden Tid igiennemløbne Cirkel-Buer, dividerte med Halv-Diametrerne.

For nu tydeligere at see, hvad Kræfter Hastighederne kunne tilveiebringe, naar en Ting paa den forhen sagte og forklarte Maade ruller om i rund, og vi ville her sætte, i cirkulær Bevægelse, maa vi forud agte, at da de Central-Kræfter, som blive til af adskillig Hastighed, kunne forestilles (Taf. IX. Fig. 7.) ved de Linier *ba* og *cd*, §. 171, saa ere de og under sig $= \frac{Aa^2}{AB}$; eller som de smaa Buers Quadrater lige frem, hvilke i samme Tid i Cirklerne ved adskillige Hastigheder beskrives, og som Diametrerne af disse Cirkler forkeert tagne.

Thi da Aa eller Ac kan ansees som en ret Linie, fordi den antages at være en uendelig liden Bue af Cirklen, saa er AaB et retvinklet Triangel, og følgelig $AB : Aa = Aa : Af$, derfor

derfor er $Af = ba = \frac{Aa^2}{AB}$, og ligeledes om Centrifugal-Kraften var forestillet ved dc, blev $Ac = dc = \frac{Ac^2}{AB}$.

§. 174.

Følgelig om tvende Ting rullede om i lige store Cirkler med adskillige og altid ensdanne Hastigheder, som Ab og Ad, eller, om man vil, med Hastigheder, som Aa og Ac, da blive de af dem tilveiebragte Centrifugal-Kræfter, som Quadraterne af de i samme Tid igiennemlobne Buer, som $Aa^2 : Ac^2$. §. 173.

§. 175.

Men da disse Buer Aa og Ac ere efter det forhen sagte i Forhold af Hastighederne, saa følger deraf.

Følgelig, naar Bevægelsen skeer i lige store Cirkler, ere Central-Kræfterne som Quadraterne af Hastighederne.

At saa tidt som to Ting rulle om i lige store Cirkler, med ulige men altid ensdanne Hastigheder, da blive ved disse sidste eller ved denne Bevægelse Centrifugal-Kræfter til, hvilke ere som Quadraterne af Hastighederne, hvormed disse Ting bevæges.

§. 176.

Det er, Central-Kræfterne ere som Quadraterne af Hastighederne lige frem, og Diametrerne af de i en uende-

Bevæges de derimod om udi ulige store Cirkler med ulige store, skiønt altid ensdanne Hastigheder, da blive de ved denne Bevægelse tilveie bragte Centrifugal-Kræfter under sig som Quadraterne af Hastighederne lige frem, og Diametrerne af Cirklerne forkeert tagne.

lig liden Tid igiennemløbne Cirkel-Buer forkeert tagne.

Thi disse Kræfter ere §. 173 altid som $\frac{Aa^2}{Ad}$, og Aa er bestandig i Forhold med Hastigheden, hvormed Tingen ruller om.

§. 177.

Ere i det sidste Tilfælde Hastighederne Diametrerne proportionerte, da ere Central-Kræfterne som Diametrerne.

Dersom to Ting rulle om i lige store Cirkler med Hastigheder i ensdan Bevægelse, som ere Cirklernes Peripherier, i hvilke de rulle om, proportionerte, det er, om de rulle om i samme Tid, da ere de ved denne Bevægelse tilveie bragte Central-Kræfter som Diametrerne.

Thi Centrifugal-Kraften er $= \frac{Aa^2}{AB}$, §. 125. men i denne Tilfælde er Aa proportionert AB, fordi Peripherierne løbes ud i samme Tid, folgelig bliver Centrifugal-Kraften og $= \frac{AB^2}{AB}$ $= AB$, eller som Diametern.

§. 178.

Ere Cirklerne ulige, men Hastighederne de samme, da ere Central-Kræfterne som Diametrerne forkeert.

Ligeledes. Dersom to Ting rulle om i adskillige og ulige store Cirkel-Peripherier med lige store og altid ensdanne Hastigheder, da ere de ved denne Bevægelse tilveie bragte Centrifugal-Kræfter, som Diametrerne forkeert tagne.

Thi da Centrifugal-Kraften altid er som $\frac{Aa^2}{AB}$, men Aa er bestandig, AB foranderlig; da siden en Forhold ei forandres, naar den divideres med et og det samme, eller, med det bestandige, saa bliver Centrifugal-Kraften som $\frac{1}{AB}$, eller som Diametern forkeert.

§. 179.

§. 179.

Dersom en Ting løber om i Peripherien af en Cirkel, i den Tid da, i hvilken den med ensdan Hastighed i Cirklen igiennemløber en given Bue, bør den, dreven af Centrifugal-Kraften alene, igiennemløbe en Linie, som blev den tredie proportionelle til Diametern og til den i Cirklen imidlertid igiennemløbne Bue.

Thi er Aa en i en uendelig liden Tid igiennemløben Bue, og den i t Tider derfor med ensdan Bevægelse igiennemløbne Bue $t.Aa$. saa er den dertil svarende Centrifugal-Kraft ab, og da denne antages at virke altid ensdan, følgelig at foraarsage en ensdan forhastet Bevægelse, igiennemløber Tingen i t Tider, dreven af den alene, et Rum proportionert t^2. §.47. Men Ab eller Centrifugal-Kraften er som $\frac{Aa^2}{AB}$, følgelig er og det Rum, hvilket den i en uendelig liden Tid igiennemløber, ligeledes $\frac{Aa^2}{AB}$, siden det er dens fuldstændige Virkning. §.23. Altsaa ere de i Cirklen og af Centrifugal-Kraften i samme Tid igiennemløbne Rum $= t.Aa : t^2 . \frac{Aa^2}{AB} = AB : t.Aa$, eller som Diametern til den i samme Tid i Cirklen igiennemløbne Bue.

§. 180.

Deraf følger, at dersom en Ting ruller om udi ensdan Bevægelse i en Cirkel med den Hastighed, som bliver til af Tyngden ved Faldet igiennem fierde Delen af samme Cirkels Diameter, da bliver Centrifugal-Kraften saa stor som Tyngden.

I Cirklerne er Centrifugal-Kraften saa stor som Tyngden, om Hastigheden af Bevægelsen

Thi

er den, der vindes ved Faldet igiennem Fierde-Delen af Cirklens Diameter.

Thi kaldes Diametern D, da bliver ved at falde igiennem $\frac{1}{4}$D en saa stor Hastighed til, at med den kan i samme Tid i Cirkel-Peripherien igiennemløbes en Bue, hvis Længde er $\frac{1}{2}$D. §. 49. Men Rummet, som imidlertid af Centrifugal-Kraften alene skulde igiennemløbes, er $\frac{1}{4}$D. §. 179. Folgelig, da Virkningen af denne og af Tyngden ere lige store, ere de selv og lige store.

§. 181.

Deraf sees, at en Kugle kunde skydes ud med saa stor Hastighed, saa den aldrig meer faldt ned til Jorden, men at den efter at være bleven engang skudt ud, bestandig siden skulde bevæge sig omkring Jorden paa samme Maade, som Maanen. Thi dertil udfordredes alene, at Kuglen blev skudt eller kastet ud med den Hastighed, som ved Faldet kunde vindes igiennem den fierde Deel af Jordens Diameter, forstaae; naar under Faldet Kuglen blev bestandig dreven af den naturlige Tyngde; naar desuden ingen Modstand af Luft, ei heller Ujevnheder i og over Jordens Overflade, som Bierge og deslige, hindrede dens Bevægelse.

Thi man seer strax, at saasnart som Tyngden er hævet af Hastigheden, kan Kuglen ikke mere falde, og Tyngden hæves aldeles, §. 179, naar Hastigheden er den, som vindes ved Faldet igiennem Fierde-Delen af den Cirkels Diameter, udi hvilken Kuglen bevæges.

§. 182.

§. 182.

Hvad Hastighed i Maanens Himmel er Legeme maa kastes ud med, for at blive en bestandig Planet.

Vi bevise i det følgende uden al Sammenhæng med hvad her siges, at Tyngden bliver alt mindre og mindre i større Distancer fra Jordens Center. Vi bevise nemlig, at den tager af efter Quadraten fra dette Center forkeert, hvoraf vi og, som af en Hypothese, i det forrige have betient os indtil videre Beviis. Dette forudsat, forstaaer man let, at der behoves en meget mindre Hastighed i større Distancer fra Jorden, for at hæve Tyngden, end i mindre. Thi om i den Distance, som Maanen er fra Jorden, og vi ville sætte saa stor som 60 Jordens Halv-Diametrer, en Kugle blev skudt ud, net op med den Hastighed, som i cirkulær Bevægelse behovedes for at hæve Tyngden. Da siden Tyngden i Maanen ei er uden $\frac{1}{3600}$ Deel af Tyngden i Jordens overste; og man beviser (*) at Kræfter, som vel ere altid bestandige i deres Virkning, men dog under sig foranderlige, tilveiebringe ved Faldet igiennem samme Rum Hastigheder, hvilke ere som Quadrat-Rødderne af disse Central-Kræfter. Kaldes da Jordens Halv-Diameter r, Tyngden i Jordens overste 1, den Hastighed, som vindes ved at falde igiennem $\frac{1}{2}r$, med en Tyngde $= 1$, H. Da bliver den, som samme Tyngde i Maanens Distance fra Jorden kan foraarsage over et Rum $= \frac{1}{2}r$ ikke uden $\frac{H}{60}$.

Men

(*) §. 10. 1. i Tillæggene.

Men ved at falde igiennem Halv-Delen af Maanens Cirkels Halv-Diameter vinder et Legeme, som idelig drives af Jordens Tyngde i denne Distance, en Hastighed, der net op kan hæve denne Tyngde, §. 180. Denne Hastighed findes let deraf, at saa tidt som en Central-Kraft er i sin Virkning altid bestandig, blive de igiennemløbne Rum som Quadraterne af Hastighederne, følgelig $\sqrt{\frac{1}{2}r} : \frac{H}{60} = \sqrt{\frac{60}{2}r}$: den Hastighed, hvilken i en saa stor Cirkel, som Maanens, behoves for at hæve Tyngden. Hvilken Hastighed derfor bliver $= \frac{H}{\sqrt{60}}$.

Skulde denne Hastighed blive til ved den hos os værende Tyngde, da blev Høiden, ved at falde igiennem hvilken den kunde vindes $= \frac{r}{2.60}$, thi $H^2 : \frac{1}{2}r = \frac{H^2}{60} : \frac{r}{2.60}$. Følgelig behoves ikke dertil uden den 60de Deel af den Høide, som behoves her hos os, for at Tyngden i Maanens Himmel kunde blive hævet.

§. 183.

Virkelig er den Hastighed, som i denne Distance behoves, for at et hvert udkastet Legeme kunde blive en Planet, ikke saa overmaade stor. Thi da Jordens Halv-Diameter er omtrent 19615782 Par. Fod, saa bliver dens 120de Deel $= 163465'$ og Hastigheden som vindes ved Faldet igiennem samme $\sqrt{60.163465} = 3134'$ i et Sekund noget nesten.

Saa deraf sees, at saasnart som Maanen selv var kastet ud med denne Hastighed, og den af intet blev svækket, maatte

maatte Maanen blive ved bestandig at bevæge sig i Cirkel-Bevægelse omkring Jorden, uden enten at kunde nærme sig den eller gaae længere fra den. Hvilket vi i det følgende endnu fuldstændigere og almindeligere skulde forklare.

§. 184.

I hvad Tilfælde de af Central-Kræfter drevne Legemer beskrive Cirkler.

Man seer heraf, hvad der udfordres til, at Legemerne kunde bevæge sig i Cirkler, til hvis Centrer Centripetal-Kraften driver. Der udfordres, at den Kraft, som driver til Centret, eller Tyngden, maa overalt den hele Bevægelse igiennem være saa stor som Centrifugal-Kraften, eller den Kraft, der driver fra Centret. Og da dette ikke skeer §. 180, uden saa tidt som Legemet i Begyndelsen af Bevægelsen kastes ud perpendikulær paa Halv-Diametern med den Hastighed, som ved den til denne Distance svarende bestandige Central-Kraftes Drift kan vindes ved Faldet igiennem den halve Halv-Diameter; saa er dette Tilfælde af Hastighed og det eneste, i hvilket i den Hypothese af bestandige Kræfter Cirkler kunne beskrives.

§. 185.

Bevægelsen i Cirklen er derfor altid ensdan, Hastigheden aldrig større eller mindre, fordi begge Central-Kræfterne ere altid i sig lige store og virke efter imodsatte Direktioner en imod den anden.

§. 186.

Og i hvad Tilfælde ikke.

Saa tidt derimod, som et Legeme kastes ud perpendikulær paa Distancen fra Centret, med en enten større eller mindre Hastighed, end den sidst omtalte, da beskriver Legemet vel strax en Cirkel-Bue, men hvis Center er ikke det Punkt C, til hvilket at Kræfterne drive, følgelig bliver denne Bue en Bue af en krum Linie, hvorpaa Central-Kraften virker med skiev Virkning, saa Hastigheden derfor snart kan blive større, snart mindre; beroer Central-Kraften desuden paa Distancen, bliver saavel denne som Centrifugal-Kraften i et hvert Punkt af Bevægelsen adskillige. Den første, fordi Distancen fra Centret; den anden, fordi Hastigheden af Bevægelsen idelig forandres.

§. 187.

Og da alle Kræfter, saa tidt som de ikke beroe paa andet end paa Distancen fra Kræfternes Center, i den cirkulære Bevægelse om samme Center altid hele Bevægelsen igiennem ere bestandige. Saa følger, at i hvorledes end Kræfterne gives i Henseende til Distancen fra Kræfternes Center, beskrives dog altid Cirkler, saa tidt som Hastigheden er den, der vindes, formedelst disse Kræfters Drift, ved Faldet igiennem den halve Distance fra Centret, og de med samme Hastighed ere udkastede perpendikulær paa Halv-Diametern (*).

§. 188.

(*) Da efter §. 10. 2. saa tidt som et Legeme skal vinde den samme Hastighed ved at drives af adskillige bestandige, men under

§. 188.

Man seer fremdeles, at saafremt som et Legeme haver engang begyndt at bevæge sig i en Cirkel, hvis Center er begge Centripetal-Kræfternes Center, da maa det, om disse sidste ere

sig foranderlige Kræfter igiennem adskillige Høider, disse sidste maa forholde sig under sig som Kræfterne forkeert, saa følger, at da Hastigheden i enhver Cirkel er den, som vindes ved Faldet igiennem dens halve Halv-Diameter. Kaldes denne da R, Central-Kraften g, den naturlige Tyngde 1, og den Høide ved at falde igiennem hvilken Hastigheden ved den naturlige Tyngde kunde vindes h. Da bliver $\frac{1}{g} : \frac{1}{2}R = 1 : h$. eller $g : 1 = h : \frac{R}{2}$. Det er, saa tidt som Bevægelsen skeer i en Cirkel, forholder Central-Kraften sig til den naturlige Tyngde, som Høiden, igiennem hvilken Hastigheden af Bevægelsen ved den naturlige Tyngde kunde vindes, til Cirklens Halv-Diameter. Hvoraf, som man let seer, Central-Kraften strax kan findes i virkelig Sterrelse, naar Hastigheden er given.

Man kan deraf fast lettere giøre Udregningerne §. 182. 183. thi da $h = \frac{gR}{2}$ og $R = 60r$, men ved r forstaaes Jordens Halv-Diameter, saa bliver $h = \frac{60.r}{2.3600} = \frac{r}{120}$, hvoraf strax sees, at man skal søge den Hastighed, som kan vindes ved Faldet igiennem $\frac{r}{120}$, eller igiennem en Høide af 163465'.

alene en Function af Distancen, uophørlig blive ved at bevæge sig udi den samme Cirkel, fordi Hastigheden efter Tangenten aldrig kan forandres, følgelig kan Centrifugal-Kraften heller ikke tage til eller af, og derfor Distancen fra Centret i Legemet heller ikke forandres, saa at Centripetal-Kraften ligeledes altid bliver den samme, saa stor som Centrifugal-Kraften og med den i imodsat Direktion.

§. 189.

Aarsagen til den ucirkulære Bevægelse forklares.

Enhver krum Linies mindste Elementer kan man anse som smaa Cirkel-Buer, men saa tidt som Linierne ei selv ere Cirkler, er Kræfternes Center adskillig fra de smaa Cirkel-Buers Center. Saaledes (Taf. IX. Fig. 8.) om AF er en saadan elementær Cirkel-Bue, hvis Halv-Diameter er AD, og hvis Center er D, da maa Centrifugal-Kraftens absolute Storrelse dømmes af dens Virkning i imodsat Direktion af AD, Centripetal-Kraftens derimod af dens Virkning i Direktionen AC, om Kræfternes Center er C. I andre krumme Linier virke de derfor ikke i imodsatte Direktioner imod hverandre saaledes som i Cirklen. Følgelig kunde de i dem heller ikke tilintet giøre hverandre, som i den, om de end vare lige store i absolut Storrelse. Thi om BA forestiller den hele Centripetal-Kraft, kan den altid opløses i to andre Ac og Ad, hvoraf den første alene er Centrifugal-Kraften imodsat. Den anden virker derimod efter Tangenten AE, og formerer Hastigheden eller og formindsker den, eftersom CAE enten bliver under Bevægelsen en spids eller og en stump Vinkel.

Vinkel. §. 65. Men Ac er altid saa stor som Centrifugal-Kraften, fordi det lille Element Ad er at ansee som en Cirkel-Bue.

§. 190.

Denne Ulighed imellem de centrale Kræfter er derfor Oprindelsen til den ucirkulære Bevægelse i de andre krumme Linier. Desuagtet pleier man dog gemeenlig at sige, at Centrifugal og Centripetal-Kraften i de krumme Linier ere altid lige store. Dette er og rigtigt, for saavidt det enten forstaaes som i §. 184, eller for saavidt man ei henforer dem til adskillige Centrer D og C, men betragter hver for sig i Henseende til det samme Kræfternes Center C. Thi da er det ikke mindre rigtigt, at om AF er en liden Bue af den krumme Linie, som beskrives, og Centrifugal-Kraften haver over den bevæget Legemet ud fra den krumme Linie om det Stykke EF, da maa Centripetal-Kraften om samme Linie EF i samme Tid have trokket det ned igien til den krumme Linie, siden Legemet ellers ikke kunde findes i det Punkt F i den krumme Linie AF, saa at Central-Kræfterne betragtede paa denne Maade altid ere at ansee som lige store, som Virkning og Igienvirkning.

Efter at have forklart disse Poster, ville vi slutte denne Forelæsning med tvende andre Anmærkninger over den cirkulære Bevægelse.

§. 191.

§. 191.

Ere Hastighederne i Cirkel-Bevægelse som Quadrat-Rodderne af Diametrerne forkeert, da ere Central-Kræfterne som Quadraterne af Diameterne forkeert.

Dersom de Hastigheder, hvormed to Ting rulle om i ulige store Cirkel-Peripherier, men med ensdan Bevægelse, ere som Quadrat-Rodderne af Diametrerne forkeert tagne, da ere de ved denne Bevægelse tilveie bragte Centrifugal-Kræfter som Quadraterne af Diametrerne forkeert.

Thi efterdi Centrifugal-Kraften altid er $= \frac{Aa^2}{AB}$, er da $Aa = \frac{1}{\sqrt{AB}}$, saa bliver $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^2}$, folgelig, som Quadraten af Diametern forkeert.

§. 192.

Ere Hastighederne som Diametrerne forkeert, da ere Central-Kræfterne som Kubi af Diametrerne.

Og endelig, dersom to Ting rulle om i ulige Peripherier, med Hastigheder, hvilke ere som Diametrerne forkeert, da blive de ved denne Bevægelse tilveiebragte Centrifugal-Kræfter, som Cubi af Diametrerne forkeert.

Thi da atter igien som for, Centrifugal-Kraften altid er $\frac{Aa^2}{AB}$, er da $Aa = \frac{1}{AB}$, saa blive disse Kræfter $= \frac{1}{AB^3}$, folgelig, som Cubi af Distancerne forkeert.

§. 193.

Central-Kræfterne ere alt for Resten lige, Materiens Mængde proportionerte.

Vi have i alt det foregaaende betragtet de Legemer, hvilke bevægedes i cirkulær Bevægelse, som at være af samme Storrelse i Henseende til Materien eller deres Inertie. Er denne derimod i adskillige Legemer ulige, da maa, alt for Resten lige, Centrifugal-Kræfterne være Materiens Mængde proportionert, fordi en dobbelt Masse, i hvis alle Dele Kraften er den samme, virker med dobbelte Kræfter, og saa videre i Proportion.

Siette-

Siette Tillæg.

Fortsættelse om Central-Kræfterne.
Om Pendulernes koniske Bevægelse, eller Bevægelse i Hvirvel.

§. 137.

Endskient, at alt, hvad der angaaer Central-Kræfterne, kan bevises paa en ulige almindeligere Maade, end den her anføres, nemlig paa en, som passer sig til alle krumme Linier, hvilken vi og i det efterfølgende ikke skulle undlade at vise, hvori bestaaer, saa er dog alt det, som i denne Henseende angaaer Cirklen, saa let forstaaeligt paa den oven anførte Maade, saa man i saa nyttig en Lærdom, som denne, fast gier ilde, om man forlader denne simple Maade at gaae frem paa; thi da Bevægelsen her antages bestandig at være ensdan, er alt hvad den angaaer, saa let, saa de derhen hørende Spørsmaal fast ei ere foresatte og givne, før de tillige ere opløste. Vi ville derfor fremdeles blive ved at fortsætte disse Betragtninger, ved at foresætte adskillige Spørsmaal, og til den Ende igien erindre, at da Bevægelsen sættes at være altid ensdan, og den af den tilveiebragte Centrifugal-Kraft er $\frac{Aa^2}{AB}$, saa bliver i en og den samme Cirkel under den hele Bevægelse aldrig enten Aa eller AB foranderlig, men altid $\frac{Aa^2}{AB}$ en bestandig uforanderlig Størrelse, saa i den ensdanne Bevægelse i en Cirkel er Centrifugal-Kraften hele Bevægelsen igiennem altid den samme. §. 185. Forelæsn.

§. 138.

I cirkulær Bevægelse af de givne Kræfter at finde Hastigheden.

Vil man af Kræfterne slutte til Hastighederne, da haver man alene nødig at giøre for de førstes indvortes Forhold til hverandre en Hypothese, som man selv vil; at sammenligne den med Værdien af Centrifugal-Kraften, som efter det forhen sagte er $\frac{Aa^2}{AB}$, og deri agte, at Aa forestiller Hastigheden. AB Diametern af den Cirkel, i hvilken Tingen løber om og bevæges. (Taf. IX. Fig. 7.)

Første Tilfælde. Saaledes, om i 2 ulige store Cirkler Centrifugal-Kræfterne skulle være lige store, da bliver $\frac{Aa^2}{AB} = a$, om a betyder en uforanderlig Størrelse, følgelig er $Aa^2 = a$. AB og Aa proportionert $\sqrt{AB}$. Det er, Hastigheden bliver som Quadrat-Roden af den Cirkels Diameter, i hvilken Bevægelsen skeer.

Anden Tilfælde. Ere Central-Kræfterne i ulige store Cirkler som Quadraterne af Diametrerne forkeert, da bliver $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^2}$, følgelig $Aa^2 = \frac{1}{AB}$ og $Aa = \frac{1}{\sqrt{AB}}$, følgelig bliver i denne Tilfælde Hastigheden som Quadrat-Roden af Diametern forkeert.

Tredie Tilfælde. Ere i en ensdan Bevægelse i ulige store Cirkler Central-Kræfterne som Diametrerne forkeert, da bliver $\frac{Aa^2}{AB} = 1$, og Hastighederne som en bestandig Størrelse, eller lige store.

Man seer deraf, hvad man haver at giøre i alle andre ligedanne Tilfælde, saa jeg holder det for unødigt, derved længere at ophølde Læseren.

§. 139.

§. 139.

Ligeledes af de givne Kræfter at finde Tiden.

Man opløser ligeledes overmaade let alle de Spørsmaale, som kunne gjøres i Henseende til Tiden, thi da denne sidste er i al ensdan Bevægelse, som Rummet dividert med Hastigheden, saa haver man alene nødig af de givne Kræfter, efter §. 38, at søge Hastigheden, og dermed at dividere det igiennemløbne Rum, som i Cirkel-Bevægelsen altid er proportionert Peripherien, hvilket vi ville oplyse ved følgende Exempler.

Første Tilfælde. Dersom i ulige Peripherier Centrifugal-Kraften er den samme, da ere §. 138 Hastighederne som Quadrat-Rødderne af Cirklernes Diametrer. Følgelig, om Peripherien kaldes P, og Tiden T, bliver det igiennemløbne Rum, dividert med Hastigheden, $\frac{P}{\sqrt{AB}} = T$, men P er $= AB$, følgelig $T = \sqrt{AB}$, eller Tiderne, som Quadrat Rødderne af Diametrerne.

Anden Tilfælde. Ere Central-Kræfterne som Quadrat-Rødderne af Diameterne forkeert; da bliver, om Hastigheden kaldes V, $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{V^2}{AB} = \frac{1}{\sqrt{AB}}$ og $V = \sqrt[4]{AB}$, følgelig $T = \frac{P}{\sqrt[4]{AB}} = \frac{AB}{\sqrt[4]{AB}} = \sqrt[4]{AB^3}$.

Tredie Tilfælde. Ere Central-Kræfterne i ulige store Cirkler som Quadraterne af Diametrerne forkeert. Da er Hastigheden som Quadrat-Roden af Diameteren forkeert. §. 138. Følgelig $P.\sqrt{AB} = T = \sqrt{AB^3}$, følgelig er $T^2 = AB^3$, eller Quadraterne af Tiderne under sig som Cubi af Diametrerne.

Fierde Tilfælde. Ere Central-Kræfterne, som Diametrerne forkeert, da er Hastigheden bestandig, §. 138. og $T = P$, eller $= AB$,

$= AB$, det er; Tiderne, i hvilke Peripherierne igiennemløbes, ere under sig som Peripherierne, eller, hvilket er det samme, som Diametrerne.

Femte Tilfælde. Dersom Central-Kræfterne ere forkeert som Cubi af Diametrerne, da er $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^3} = \frac{1}{AB^2}$, og Aa eller Hastigheden $= \frac{1}{AB}$, eller forkeert som Diametern.

Følgelig er Tiden $T = P.\ AB = AB^2$, eller Tiderne, hvori Tingene bevæge sig om i Cirkel-Peripherierne, ere som Quadraterne af Peripherierne.

Siette Tilfælde. Er Central-Kraften saa stor som Tyngden, da er Tiden igiennem Peripherien eller $T = \frac{P}{\sqrt{\frac{1}{2}AB}}$, §. 180. 10. F. Men Tiden igiennem den halve Diameters halve Deel er $= \sqrt{\frac{1}{2}AB}$, thi den er Hastigheden i Enden af Faldet proportionert. Følgelig forholder sig Tiden igiennem Peripherien til Tiden af Faldet igiennem Halvdelen af den halve Diameter, i denne Tilfælde $= P : \frac{1}{2}AB$ eller som Peripherien til den halve Diameter.

§. 140.

Central-Kræfterne ere i Cirkel-Bevægelse altid som Diametrerne lige ſrem, og Omløbs-Tiderne forkeert tagne.

Man seer deraf overmaade let, hvorledes man her af de givne Hastigheder kan finde Tiderne, saa det er plat unødigt derom at handle vidtløftigere. Men man seer ikke mindre, at da Tiderne altid ere, om Hastigheden kaldes V, $= \frac{AB}{V} = T = \frac{AB}{Aa}$, saa bliver $Aa = \frac{AB}{T}$, hvilket, om sættes i Steden for Aa i vores forrige Værdie af Central-

Kraften

Kraften $\frac{Aa^2}{AB}$, da seer man, at denne Kraft bliver saa stor som $\frac{AB}{T^2}$, og følgelig, at Central-Kræfterne altid ere som de Cirklers Diametrer lige frem, i hvilke Bevægelsen skeer, og som Quadraterne af Tiderne, i hvilke Peripherierne igiennemløbes, forkeert tagne.

§. 141.

Af Omløbs-Tiderne at finde Central-Kræfterne.

Ved Hielp af denne nye Værdie, som saaledes er funden for Central-Kræfterne, kan man altid af de givne Tiders Beskaffenhed bestemme disse Kræfter, og omvendt igien af Kræfterne Tiden; men da vi allerede have viist en anden Maade for dette, ville vi alene opholde os ved det første.

Første Tilfælde. Ere Tiderne som Diametrerne, da blive Central-Kræfterne som $\frac{AB}{T^2}$, §. 140. som $\frac{AB}{AB^2} = \frac{1}{AB}$, eller som Diametrerne forkeert.

Anden Tilfælde. Ere Tiderne som Quadraterne af Diametrerne, da bliver Central-Kræfterne $= \frac{AB}{T^2} = \frac{AB}{AB^4} = \frac{1}{AB^3}$, eller forkeert, som Cubi af Diametrerne.

Tredie Tilfælde. Ere Tiderne som Quadrat-Rødderne af Diametrerne, da er Central-Kraften $\frac{AB}{T^2} = \frac{AB}{AB} = 1$, det er, Central-Kraften er i denne Tilfælde altid bestandig.

§. 142.

Hvad der forstaaes ved Pen-

Man kan paa denne Maade altid opløse lige saa mange deslige Spørsmaal, som man selv vil; os er det nok at have viist Maaden,

dulernes koniske eller hvirvlende Bevægelse.

for at gaae videre til at tale om Centrifugal-Kræfternes Beskaffenhed i de hvirvlende Penduler, i de nemlig, som hengende i et fast Punkt drives om med en konisk Bevægelse, siden vi ikke ville videre handle om Bevægelsen over de legemlige Superficer.

Er da (Taf. IX. Fig. 9) AC en Traad med et Lod i Enden fæstet fast udi A, og Traaden AC fuldkommen spendt af Loddet eller Tyngden; da er det klart, at naar den hengte, tvungen alene af Loddet, søgte den det nederste Sted udi B, eller hengte efter Axlen af Keilen AB, siden de tunge Ting altid synke, saa dybt som de kunde. Saafremt derimod at AC drives med en Hastighed, veed man, at Traaden med samt Loddet stiger og bevæger sig omkring Superficen af en Keile CEDA, hvis Cirkel CED Loddet beskriver. Jo stærkere Hastigheden bliver, desto høiere stiger Loddet: Det er denne koniske Bevægelse i Pendulen, som vi ville betragte.

§. 143.

I denne Henseende maa vel agtes, at Tyngden under Bevægelsen bestandig trekker Loddet efter Direktion af Vertikalen eller efter *Ch*. Centrifugal-Kraften derimod, som altid driver i Diameterns Direktion, trekker efter *f*C. Altsaa, naar i Parallelogrammet *fChg*, Central-Kraften forestilles ved *f*C og Tyngden ved *Ch*, da forestiller Diagonalen *Cg* den Kraft, hvormed Traaden spendes med forenet Magt af begge disse Kræfter.

§. 144.

Man kan agte, at da Central-Kraften, efter hvad nu saa ofte er bleven sagt er som $\frac{Aa^2}{AB}$, saa den altid i den samme Cirkel er som Aa^2, det

det er, som Quadraten af Hastigheden. Følgelig, om den Høide, igiennem hvilken, ved at falde, denne Hastighed kan vindes, kaldes V, er Central-Kraften i lige store Cirkler altid = V, og dersom den halve Diameter i Cirklen kaldes d, da er den Høide, ved at falde igiennem hvilken en Centrifugal-Kraft, saa stor som Tyngden, kan vindes = $\frac{1}{2}d$, §. 180. Forel. Dette er det Maal, hvoraf alle øvrige Centrifugal-Kræfter i deres virkelige Størrelse kan bestemmes.

§. 145.

At bestemme Hastigheden i denne Bevægelse.

Dette forudsat, er intet lettere, end at bestemme, hvad Hastigheden maa være, paa det at et Pendul AC kan bestandig blive ved at rulle om i konisk Bevægelse i den Cirkel CED, uden enten at gaae længere ud fra, eller at falde nærmere ind til Axlen AB. Man har alene nødig at bestemme Central-Kraften Cf paa tvende adskillige Maader, den ene af Bevægelsens geometriske, den anden af Bevægelsens physiske Beskaffenhed.

Hvad den første angaaer, da om $Cb = g$, $Cf = c$, AB = a, BC = b, da er AB : BC = gf : fC. Altsaa bliver $a : b = g : \frac{bg}{a} = c$, hvilket er den geometriske Bestemmelse af Central-Kraften.

Den Physiske bestemmes deraf, at $\frac{1}{2}b : g = x : \frac{2gx}{b}$, (see Anmerkningen til §. 187. Forel.). Ved x forstaaes den søgte Høide, ved at falde igiennem hvilken den Hastighed vindes, som net op behøves for at den koniske Pendulets Bevægelse altid kan skee i Cirklen CED.

Følgelig er $\frac{2gx}{b} = \frac{bg}{a}$ og $x = \frac{b^2}{2a}$, som er den Høide, ved at falde igiennem hvilken, den sidst omtalte Hastighed net op vindes; hvilken derfor bliver = $\sqrt{\frac{b^2}{a}g}$. §. 17.

§. 146.

§. 146.

Saasnart som Hastigheden er funden, er intet lettere end at fastsætte og at bestemme Tiden. Thi da Bevægelsen antages ensdan, efter det forhen sagte om Cirkel-Bevægelsen, saa er, om Tiden kaldes T, $T = \frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}}$, eller om man alene søger Forholden $T = \frac{P\sqrt{a}}{b}$.

§. 147.

Man kan deraf slutte.

Jo større Hastigheden er, desto høiere stiger det hvirvlende Pendul.

1) At da Hastigheden er $= \frac{b}{\sqrt{2a}}$, jo større da Hastigheden bliver, jo længere gaaer Tingen ud fra Axlen, og en jo større Basis faaer den Keile, i hvis Cirkels Grund-Linie den løber om.

2) Skal a være alt mindre og mindre, og b den samme Størrelse, det er, om Tingen skal stige høiere i Bevægelsen, da maa Hastigheden blive større.

Men det naaer ikke Spitsen af Keilen, med mindre at Hastigheden bliver uendelig.

3) Skal Tingen stige til den øverste Spitse af Keilen, og der beskrive en Cirkel, da fordi Hastigheden $\frac{b}{\sqrt{a}}$ bliver i denne Tilfælde $= \frac{1}{0}$, maa Hastigheden, før dette kan skee, blive uendelig stor.

§. 148.

Disse Pendulers Beskaffenheder i Henseende til Tiden forklares.

Tiden angaaende. Da, siden $T = \frac{P\sqrt{a}}{b}$, maa to ulige lange Penduler, som i konisk Bevægelse beskriver Cirkler parallele med Horizonten, om Keilerne, i hvis ulige Cirkler de rulle om, have samme Høide, faa Omløbs-Tider $= \frac{P}{b} = \frac{b}{b} = 1$, det er, Tiderne blive

de

de samme, saa de løbe i hvirvlende Bevægelse deres Cirkler omkring udi samme Tid.

§. 149.

Dersom to Penduler, som enten ere lige eller ulige lange, rulle om som før i konisk Bevægelse; da, om de beskrive Keiler af ulige Høide, men af samme Basis, blive Tiderne, i hvilke de hvirvle om, som Quadrat-Rødderne af Keilenes Høider.

Thi da $T = \frac{P\sqrt{a}}{b} = \frac{b\sqrt{a}}{b}$, saa er T som $\sqrt{a}$.

§. 150.

Da Tiden af Pendulets koniske Bevægelse er §. 146 $\frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}}$, og Tiden igiennem Keilens dobbelte Høide, om Tingen faldt igiennem samme, $= \sqrt{\frac{4a}{g}}$, §. 16. saa forholde sig disse Tider til hverandre $= \frac{P}{b}$: $2 = P : 2b$, eller som Cirklens Peripherie til dens Diameter.

Tiden af Pendulets koniske Bevægelse forholder sig til Tiden igiennem Keilens dobbelte Axel, som Peripherien til Diametern.

§. 151.

Da nu, om Forholden af Peripherien til Diametern kaldes p: d, og Tiden af et Penduls koniske Bevægelse kaldes T, af dens simple svingende Bevægelse kaldes t, da er §. 150. $P : d = T : \sqrt{\frac{4a}{g}}$ og §. 97. 2. For. $P : d = t : \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2}a}{g}}$, altsaa $T : t = \sqrt{\frac{4a}{g}} : \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2}a}{g}}$

Følgelig er Tiden af smaa Hvirvel-Bevægelser dobbelt saa stor som Tiden i et simpelt Pendul af samme Længde.

$= 2 :$

$= 2 : 1$, følgelig bliver $T = 2t$, det er, saa længe som de koniske Pendulers Hvirvel-Bevægelser ere meget smaa, eller disse Omløb skee i meget smaa Cirkler (thi i andre er ei $AC = AB$ eller Længderne af det koniske og af det simple efter Siden svingende Pendul den samme) saa maa Tiden af det koniske Penduls Bevægelser vare dobbelt saa længe, som Tiden af det simple Penduls Bevægelser, og følgelig to af disse sidste gaae paa et af de første.

Og deraf sees atter igien, at saa længe de koniske Penduler hvirvle om i smaa Cirkler, maa Tiderne, hvori de hvirvle om, altid være de samme, hvad heller at disse Cirkler ere lidet større eller mindre, saa længe de ikkuns ere meget smaa.

§. 153.

Under hvad Vinkel et Pendul svinger udi samme Tid, som Faldet skeer ved Tyngden igiennem samme Penduls Længde.

Vil man deraf fremdeles slutte sig til Forholden af det koniske Penduls Omløbe-Tid til Tiden, hvori en Ting falder igiennem samme Penduls simple Høide, eller igiennem Længden af Traaden AC. Da siden Tiden af et konisk Omløb er $\frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}}$, og Tiden igiennem AC Pendulets Høide eller Længde, som vi ville kalde l, er ligeledes $= \frac{\sqrt{2l}}{g}$, saa forholde disse Tider sig $= \frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}} : \sqrt{\frac{2l}{g}}$. Saa tidt som Tiden da af et konisk Omløb skal være saa stor som Tiden af Faldet igiennem Pendulets Længde, bliver $\frac{P^2}{2b^2} = \frac{l}{a}$, følgelig $a : l = 2b^2 : P^2$, og derfor igien Sinus af den Vinkel ACD, hvorunder Pendul-Traaden støder an paa Horizontal-Linien, til Sinum totum,

eller

eller den hele Sinus, som Quadraten indskreven i Cirklen ECD til Quadraten af denne Cirkels Peripherie.

§. 153.

Skeer Omløbet i en Cirkel i den Tid, da et Pendul af Halv-Diameterens Længde svinger to gange eller i en liden konisk Bevægelse en gang, da er Centrifugal-Kraften saa stor som den naturlige Tyngde.

Man kan paa selvsamme Maade opløse hvad Spørsmaal man vil, for at sammenligne Pendulernes koniske Bevægelse med Faldet, og den ved Faldet igiennem andre givne Høider vundne Hastighed, for Ex. igiennem Pendulets halve Længde, o. s. v. men da dette ei er af stor Nytte, er det nok, at have viist Maaden, uden at vi derved længere opholde os. Vi ville i den Sted agte. At dersom en Ting bevæger sig engang omkring i en Cirkels Peripherie i den Tid, da et Pendul, hvis Længde er samme Cirkels halve Diameter, i konisk Bevægelse en gang beskriver en meget liden Cirkel, eller, hvilket er det samme, imidlertid at et simpelt Pendul af samme Længde giorde to hele Sving. Da bevæges den forømtalte Ting i sin Cirkel med en Centrifugal-Kraft, der er lige saa stor som den naturlige Tyngde.

Thi naar den naturlige Tyngde kaldes g, da, om Central-Kraften skal være af lige Størrelse med Tyngden, bliver §. 180. F. Hastigheden, hvormed Tingen bevæger sig i Cirklen, den som vindes ved at falde igiennem samme Cirkels Diameters fierde Deel $= \sqrt{\frac{1}{2}dg}$, om Diametern kaldes d. Men Hastigheden af den koniske Bevægelse er efter det foregaaende §. 145, fordi Bevægelsen er ensdan $= \frac{b\sqrt{g}}{\sqrt{a}}$. Da nu her $b = \frac{1}{2}d = a$, fordi den koniske Bevægelse sættes at skee i meget smaa Cirkler, saa findes Hastigheden $\sqrt{\frac{1}{2}dg}$, da derfor Hastighederne i begge disse Tilfælde blive de samme, saa maa de ved dem

tilveie bragte Central-Kræfter i Cirkel-Bevægelse og nødvendig blive de samme. Saa derfor i denne Tilfælde Central-Kraften bliver saa stor som Tyngden.

§. 154.

Den Kraft, hvormed det hvirvlende Pendul under samme Høide trykker Henge-Punktet bestemmes.

Videre sees (Taf. VII. Fig. 9.) at den Kraft, hvormed i den koniske Bevægelse Traaden spendes, er som Cg, imidlertid at Central-Kraften er som fC, og derimod Tyngden, hvilken altid er bestandig, i hvad Cirkel end Pendulet i sin koniske Bevægelse beskriver, som Ch. Følgelig er $Cg : Ch = AC : AB$. og $Cg = \frac{Ch \cdot AC}{AB}$. Følgelig, om AB eller Høiderne af de i konisk Bevægelse beskrevne Keiler ere de samme, da siden Ch eller Tyngden og altid er den samme, da bliver $Cg = AC$. Det er.

Saa tidt som to lige tunge Penduler af ulige Længde i deres koniske Bevægelse beskrive lige høie Keiler, da ere de Kræfter, hvormed Traaderne spendes, som Traadernes Længder.

§. 155.

Svinger et simpelt Pendul igiennem en Halv-Cirkel, da spendes Traaden i Midten af Svinget, med tre gange Lodstillets Tyngde.

Ligeledes, dersom et simpelt Pendul gior sit største Sving, det er, dersom det svinger igiennem en halv Cirkel, da spender det i Midten af Svinget Traaden tre gange saa stærk, som den ellers skulde spendes af Tyngden, naar den i samme Punkt hvilede eller hengte stille.

Thi det er klart, at i denne sidste Tilfælde blev den alene spendt af Tyngden, i den første derimod spendes den i samme Direktion baade af Tyngden og af Centrifugal-Kraften: Da derfor i den samme Cirkel

Centri-

Centrifugal-Kræfterne ere som Quadraterne af Hastighederne, og disse sidste Quadrater ere som de Rum, ved at falde igiennem hvilke Hastighederne i Enden af Faldet blive til, men den ved Faldet igiennem den halve Diameters halve Deel vundne Hastighed giver en Centrifugal-Kraft saa stor som Tyngden, saa giver den Hastighed, der vindes ved at falde igiennem den halve Diameter selv, en Central-Kraft, saa stor som to gange Tyngden. Følgelig spendes Traaden i Midten af Svinget, med en Hastighed saa stor som tre gange Tyngden.

§. 156.

I den hule Deel af en parabolsk Keile blive alle Omløbs-Tiderne lige store.

Vi have seet §. 153, at dersom et Pendul i konisk Bevægelse beskriver smaa Cirkler, da hvad heller disse sidste ere større eller mindre, beskrives de alle i samme Tid. Søger man fremdeles, i hvad konisk Superfice en Ting skulde frit bevæge sig, for at alle dens Omløb maatte skee i samme Tid, hvad heller at i denne Bevægelse en af Keilens større eller en af dens mindste Cirklers Peripherier bleve igiennemløbne, alene at de laae parallele med Horizonten, da kan agtes.

At om T. IX. F. 10. DFA er den krumme Linie, ved hvis Omveltning om Axlen GA Keilen beskrives, da om FE og BC ere to denne Linies Ordinater, som ligge hverandre uendelig nær, $CB = y$, $FR = dy$, da er y den halve Diameter af Cirklerne i Almindelighed, i hvilke Tingen skal bevæge sig om saaledes, at i hvad for en af dem den er, skal, naar Centrifugal-Kraften og Tyngden antages at staae i Ligevægt med hverandre, alle Omløbene skee i samme Tid.

Kaldes da s den Høide, som svarer til Hastigheden udi B, da bliver, om den naturlige Tyngde kaldes g. $\frac{1}{2}y : g = s : \frac{2s}{y}g$, hvilket er

Centrifugal-Kraften i den Cirkel, hvis halve Diameter er BC = y. Men fordi Centrifugal-Kraften og Tyngden overalt skulle være udi Ligevægt med hverandre, da er det klart, at om BH foreſtiller Centrifugal-Kraften udi B og BI Tyngden, da maa i B den Kraft, som er saa stor som de begge, være perpendikulær paa den krumme Linie DBA, siden Tingen, der bevæges, ellers enten maatte glide op efter imod D, eller ned ad imod A. Hvoraf ingen af Delene kan skee, om den forenede Magt af alle begge Kræfter virker perpendikulær paa DBA.

Følgelig bliver, dette forudsat, KH : HB = $dy : dx$. Thi FR er parallel HB, følgelig ere Vexels-Vinklerne lige store, og det, som mangler den i 90°, eller Vinklerne FBR og HBK ligeledes lige store. Altsaa bliver $g : \frac{2s}{y}g = dy : dx$ og $s = \frac{ydx}{2dy}$, men da vi her ligesom langs hen ad i dette Stykke antage Bevægelsen i samme Cirkel ensdan, saa er Tiden, som det igiennemløbne Rum dividert ved Hastigheden, og da dette Rum er Cirkel-Peripherien, er den om $g = 1$, $= \frac{p.\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = \frac{ny.\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}}$, thi Peripherien kan altid ansees som mangefold imod den halve Diameter i den bestandige Forhold af $n : 1$.

Da nu Tiden i alle Peripheriernes Omløb skal være noget bestandigt, eller den samme, saa bliver $\frac{ny.\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = a$, følgelig $\frac{nnyydy}{ydx} = aa$ og $yy = \frac{2aa}{nn}x$, da nu $\frac{aa}{nn}$ er en bestandig Størrelse, saa er den søgte krumme Linie, ved hvis Omveltning den forlangte Keile skal beskrives, en Parabol, hvis Parameter er $\frac{2aa}{nn}$.

§. 157.

§. 157.

Tiden derfor af Omløbet i en af Cirklerne i den hule parabolske Konoide beløber $\frac{p\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}}$, om $g = 1$. Men Tiden af Svinget i et simpel Pendul er da og, om Længden kaldes l, $= \frac{p\sqrt{l}}{d}$, d: P er Diameterns Forhold til Peripherien og om Parametern i Parabolen $\frac{2nn}{aa} = p$ er Tiden af Omløbet i Konoiden $= \frac{p\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = \frac{p\sqrt{p}}{y\sqrt{2}}$, følgelig forholde disse Tider sig, om i Steden for d sættes $2y$, $= \frac{\sqrt{l}}{2y} : \frac{\sqrt{p}}{y\sqrt{2}}$, sættes $l = \frac{1}{2}p$, forholde de sig $= 1 : 2$. Følgelig skeer et heelt Omløb i den parabolske Konoide i den samme Tid, hvori et simpelt Pendul, hvis Længde er Parabolens halve Parameter, gier to Sving, nemlig frem og tilbage.

Tiden af Omløbet i den parabolske Konoide er den, i hvilken et simpelt Pendul saa langt som den halve Parameter svinger frem og tilbage.

Dersom man i den forrige Ligned $\frac{ny\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = a$ satte Tiden i anden Forhold, kunde man ligeledes opløse flere andre deslige Spørsmaal, men da det her allerede sagte er i denne Henseende det mærkværdigste, ville vi ei opholde os ved det mindre Betydelige.

Tiende Forelæsning.

Om Nytten af Central-Kræfterne i at kiende ved deres Hielp de store Bevægelser og de store virkende Kræfter i Naturen.

§. 194.

Vi have i det foregaaende betragtet Central-Kræfterne i den simpleste og letteste Tilfælde, i den, da ved dem en Linie bliver beskreven i ensdan Bevægelse under Omlobet, i hvilket de bestandig ere eens, uden at de i et Punkt af Linien ere saa, i et andet anderledes. I andre krumme Linier er Theorien for Central-Kræfterne langt anderledes, da de i et hvert Punkt af den krumme Linie forandres, skiont de hele Linien igiennem iagttage en og den samme bestandige Lov, udtrykt ved foranderlige Storrelser. Det er derom, at vi ville i det nærværende giore os en klarere Tanke, saavel som at vi og ville vise den ubeskrivelige Nytte, hvilken den Lærdom om Central-Kræfterne haver i at kiende Naturen, dens Love, dens Kræfter og dens Huusholdning i de store og uforanderlige Bevægelser.

§. 195.

Jorden kan ei falde ud af sit

For dertil forud at berede os, maa jeg giore en kort Afvigning fra vore geometriske Betragtninger til almindelige

physiske

physiske og moralske. En af de Ting, hele Verden haver anseet med den største Forundring, er, hvorledes det kunde skee, at Jorden kunde blive bestaaende paa sit Sted, uden at falde. Jeg vil ikke tale om, hvor urimelig dette Spørsmaal er, da som man seer af det foregaaende, Tyngden alene er i Delene af Jorden, og ikke i den hele Jord selv, samtlig Jordens enkelte Dele, hvad heller de ere store eller smaa, tynge imod dens Centrum, den hele Jord derimod haver ikke Tyngde (nemlig imod sit Centrum), den haver alene Inertie, saa alt hvad man i den Henseende af syr Uvidenhed haver opdigtet for at hindre Jorden i at falde, enten ved at antage, at den svømmede i Vande, eller som de gamle Folk og de i vore Tider Uoplyste enten have tænkt, eller endnu tænke, at Jorden blev baaren paa Stotter, eller af Aander, eller som en uoplyst Gudsfrygt haver vildet paastaae, at Jorden blev holdt paa sit Sted af den Almægtiges Haand selv ved et umiddelbar Mirakel, er for den, som forstaaer de første Grund-Lærdomme af Physik og Mekanik, ikke uden ligesaamange Beviis paa Uvidenhed. Den hele Jord haver ikke uden Inertie, og Inertiens Hoved-Sag er aldrig at forandre sig, men alene at blive paa sit Sted, om intet udvortes driver den ud af samme.

Sted ved sin egen Tyngde.

§. 196.

Derimod synes det langt vanskeligere at begribe, hvorledes de store himmelske Legemer, de, som vi kalde Planeter; de, hvilke i alt ere som vores Jord, kunne blive ved indtil i

Hvorfore Planeterne altid blive i de samme Baner, og hvor-

for de i dem idelig bevæge sig.

uendelige Tider, uforandret at beskrive de samme Baner udi Himmelen, uden i det mindste at vrie af fra den Linie og det Omløb, de en gang have gaaet i og fuldendt. Hvor meget denne Sag haver været en Anstøds-Steen for den gamle Verden, hvor meget den endnu er det for samtlig de uoplyste hedenske Folk, seer man af deres falske Guds-Dyrkelser, som alle grunde sig paa det falske Systeme, hvilket de have giort sig, for at besvare denne Vanskelighed. Da de ikke kunde begribe, hvorledes Bevægelsen i de himmelske Legemer kunde blive til, have de med Sverdet, saa at sige, overskaaret denne Gordiske Knude, ved at forestille sig Solen og samtlig de sig bevægende himmelske Legemer som virkelige Personer, saa virkelige som Menneskет, der bevægede sig selv med frie Bevægelse, og som i denne Bevægelse havde bundet sig selv til visse Love, Menneskет til Nytte. Derfor burde de tilbedes, derfor æres, derfor bygte man Altere og belagde Alterne med hellig Regelse. Men vi maa erindre, at vi her have at handle om Mekanik, og hvad vi derfor i denne Afvigning desangaaende saa løslig have sagt, er alene for at vise, af hvad uendelig Vigtighed for Menneskет, endog uden for Mekanik og Physik selv disse Sandheder ere. De, som troe, at Nytten af Geometrien indskrenkes i den selv, rose en Uvidenhed, som de burde være skamfulde ved.

§. 197.

For derfor at see, hvorledes et saadant Legeme, en Planet for Exempel, bestandig bliver ved at bevæges i Himlene,

lene, i den samme Linie eller Bane uforandret, haver man alene nødig at agte, hvad vi i det forrige til stor Deel have allerede sagt (T. X. F. 1.), at nemlig dertil intet andet udfordres, end at et Legeme, som A, først bevægedes med en vis bestemt Hastighed, som AD, efter en Direktion, som AD, og at det imidlertid af en anden bestandig virkende Kraft (en saadan, som Tyngden for Ex.) bestandig blev drevet imod et fast Punkt C. Thi da er det klart, at Bevægelsen hen efter Tangenten AD maatte føre den Ting A alt længere og længere fra Centret C, for Ex. om det Stykke BE, hvorved af AD blev tilveiebragt over AB en Centrifugal-Kraft, som BE. Antager man nu, at Centripetal-Kraften der tillige uden Ophold driver imod C, var i Ligevægt med den alle Øieblik tilveiebragte Centrifugal-Kraft, og følgelig ligeledes saa stor som BE, saa er det klart, at Tingen A efter et Øieblik's Bevægelse maatte befinde sig i det Punkt E af den krumme Linie. Af samme Aarsag maatte et saadant Legeme Øieblikket efter, om Centripetal-Kraften ei virkede, gaae fort efter Tangenten EF af denne Linie, formedelst sin Hastighed, og derved flye bort fra Centret C, men da det tillige idelig drives ned imod samme Center af Centripetal-Kraften over en ligesaa stor Linie FG, som den, der tilkiendegiver Centrifugal-Kraften, maa det, drevet af begge Kræfter, komme til G, og saaledes beskrive omkring Kræfternes Center en krum Linie. Da desuden i alle Omløb Hastighedens og Central-Kræfternes Henseender til hverandre maa blive de samme, om intet udvortes fra kommer imellem til Hindring, saa begriber man

let, at alle Omløb indtil i de uendeligste Tider maatte blive ved at skee paa en og den samme Maade, som det første.

§. 198.

Naar et Legeme bevæges i en krum Linie om Kræfternes Center, da ere Snittene af den krumme Linie fra dette Center tagne, Tiderne af Bevægelsen proportionerte.

Men hvad her særdeles kan spørges om, er; om der og virkelig, foruden Tyngden, findes deslige centrale Kræfter i Naturen, som nemlig altid drive imod et og det samme Punkt, og hvoraf man veed, at deslige Kræfter gives? For at bevise dette, maa forud agtes.

At saafremt (Taf. IX. Fig. 11.) et Legeme bevæges i en krum Linie EAN, hvilken med sin Hulhed vender imod det Punkt C, og det af en Central-Kraft drives under Bevægelsen bestandig imod Punktet C; da blive Tiderne af Bevægelsen som Central-Snittene af denne krumme Linie, eller Tiderne igiennem Buerne AB og ABE blive som ABC til ABEC.

For at bevise dette, ville vi betragte de to Buer AB og BE som uendelig smaa, eller som rette Linier; Siden da Hastigheden, hvormed Tingen bevæges igiennem AB, Øieblikket derpaa vilde drive Tingen efter BD, og i lige Tider saaledes, at AB = BD, saa er det klart, at Trianglerne DCB og BCA blive lige store, fordi de have fælles Høide CG, og lige store Grund-Linier. Men da imidlertid Centripetal-Kraften, efter vores antagne, skal drive Tingen bestandig ind imod C, altsaa i den Direction BC, saa om at denne Kraft forestilles ved BF, Tingen maa igiennemlobe Diagonalen eller Tver-Linien BE: Men i det fuldestgiorte Parallelogram EDBF er ED parallel BC, derfor staae Trianglerne CEB og CDB imellem de samme

Paralle-

Paralleler DE, BC, og over den samme Grund-Linie BC, folgelig ere de lige store, folgelig og Trianglet CEB = CBA.

Da nu Tiderne igiennem EB og BA vare lige store efter vores antagne, saa forholde de sig som disse Triangler, og da dette Bevis gielder, om alle Elementerne i den krumme Linie, saa sees: At saa tidt som en Central-Kraft driver en Ting, der bevæges i en krum Linie imod et Punkt C, imod hvilket Linien er hul, og det i alle denne Linies Punkter; da maa Tiderne af Bevægelsen forholde sig som Snittene, hvilke blive til af de rette Linier, der gaae fra dette Punkt og af de igiennemlobne Buer; eller som CAB : CABE.

§. 199.

Og ere Tiderne Central-Snittene af den krumme Linie proportionerte, da drives den Ting, som bevæges, bestandig af en Central-Kraft.

Lige saa let bevises den omvendte Sætning, at dersom Tiderne af Bevægelsen i en krum Linie forholde sig under sig som Snittene, der tages med Linier, trokne fra et vist Punkt C inden for den hule Linie og af dens Buer, det er, om Tiderne igiennem Buerne EB og EBA forholde sig som ECB og ECAB, da drives Tingen den hele krumme Linie igiennem, af en Central-Kraft imod dette Punkt C.

Thi man seer, som for, at Bevægelsen skulde i lige Tider skee fra AB til BD, saaledes at AB = BD. Men da, efter vores antagne, en Kraft trekker det Bevægede fra BD til BE saaledes, at DCB = BCA = ECB, saa maa ECB = CDB, folgelig, da Grund-Linien BC er den samme, maa ED blive parallel BC. Men da EFBD er Parallelogrammet af Kræfterne, som drive Tingen efter BE, saa maa den ene af Kræf-

terne BF nødvendig drive imod C, og følgelig i Henseende til dette Punkt være central.

Og da dette Beviis ligeledes gielder om alle andre Elementer i den krumme Linie, saa sees, at Tingen altid drives af en Central-Kraft imod et vist Punkt C, saa tidt som Tiderne ere Snittene ECB og ECAB proportionerte.

§. 200.

Samtlig Planeterne drives af Central-Kræfter.

Da nu de astronomiske Jagttagelser og de paa dem grundede Udregninger fuldkommen bevise, at (Taf. IX. Fig. 12.) samtlig Planeterne bevæge sig i Elliptiske Baner, som CDB saaledes, at Snittene fra Brænde-Punktet *f*, C*f*B og A*f*B ere Tiderne fra B af proportionerte, saa følger nødvendig §. 199, at disse Legemer drives bestandig af en Kraft i Naturen imod dette Punkt, og følgelig at Central-Kræfterne foraarsage de store Bevægelser i Verden.

§. 201.

Hvad vi i denne Theorie forstaaes ved Kræfternes Center, Bære-Linien og Banen.

Vi ville her ikke indlade os i at undersøge disse Kræfters physiske Beskaffenhed, da dette hører til et andet Sted, nemlig til de physiske Forelæsninger. Vi ville her alene agte visse Benævninger, som behøves at bekiendtgiøres, for at vi i den tilkommende Forelæsning kunne desto bedre forklare, efter hvad Love disse Central-Kræfter virke i Naturen, siden dette sidste er det store, som vi ved disse vore Bemoielser sigte til. Til den Ende ville vi agte.

1) At det Punkt C, imod hvilket under Bevægelsen i den krumme Linie CBN Central-Kræfterne uophørlig drive det bevægede, kaldes Kræfternes Center. 2)

2) Linien CB fra Kræfternes Center til den bevægede Ting kaldes Bære-Linien (Radius vector), fordi man kan anſee den, ſom om den Ting, der er i Bevægelſe, laae paa denne Linie, og blev baaren af den.

3) At den krumme Linie ſelv NBE, ſom ved Bevægelſen beſkrives, kaldes Løbe-Banen (Orbita) eller ſimpel hen Banen.

§. 202.

Fremdeles ville vi her atter igien tydelig erindre, at ihvorledes end den krumme Linie HAG er beſkaffen, man dog altid kan foreſtille ſig (Taf. IX. Fig. 13.) en Cirkel BAE, ſom over en meget liden Bue i A ſaaledes falder ind med den krumme Linies Bue, at begge kunne anſees for et og det ſamme. Cirklen BAE, veed man, kaldes Rore-Cirklen (Circulus oſculans) og dens Halv-Diameter AD den rørende Halv-Diameter.

§. 203.

Endelig ville vi agte til Beſlutning af denne Forelæsning, at i hvorledes end en Ting bevæges i en krum Linie, dreven af ſin Haſtighed og af en efter en beſtandig Lov hele Linien igiennem virkende Centripetal-Kraft, da er Taf. IX. Fig. 11. Haſtigheden i det Punkt B dog altid ſom Perpendiklen Ct, kaſtet ned fra Kræfternes Center C paa den krumme Linies Rore-Linie eller Tangent Et, naar ſamme tages forkeert.

I al Central-Bevægelſe er i ethvert Punkt af den krumme Linie Haſtigheden ſom Perpendiklen paa Tangenten forkeert tagen.

Thi Haſtigheden i Trianglet ECB er ſom Grund-Linien BE, om Tiden er beſtandig §. 14. F.: men i lige ſtore Triangler (thi de, her handles om, maa altid være lige ſtore i lige ſtore Tider, §. 198,) ere Grund-Linierne ſom Høiderne forkeert, følgelig og forkeert Viis, ſom Perpendiklerne paa Tangenterne.

Ellevte

Ellevte Forelæsning.

Central-Kræfterne i Naturen deres Hoved-Lov bevises at være, som Quadraten af Distancen forkeert.

§. 204.

Vi have i Henseende til Central-Kræfterne nu intet andet tilbage, efterat vi have beviist, at de virkelig ere til i Naturen, end fremdeles at undersøge, efter hvad Love de handle i de Linier, hvori Naturen betiener sig af dem; disse ere fornemmelig Ellipser, men da Beviset under et ligesaa let kan giores med en og den samme Umage for alle Keile-Snittene i Almindelighed, som Parabolen og Hyperbolen, saa ville vi med et almindeligt Bevis afhandle Sagen for dem alle under et paa følgende Maade.

§. 205.

I alle krumme Linier er Central-Kraften, som Bære-Linien, lige frem, men som Nøre-Cirklens Diameter og Per-

Alt gaaer da ud paa at bevise, hvad Loven for Central-Kræfterne er i Naturen, dette forudsat, at de ere af den Beskaffenhed, at de med en given Hastighed bevægede Legemer gaae omkring i en af Keile-Snittene alene, og ikke i nogen anden krum Linie, thi gik de bevægede Ting om i andre

Linier,

Linier, maatte de bevægende Central-Kræfter og være af en anden Beskaffenhed. Saa det i Almindelighed altid er mueligt af den givne krumme Linie, hvori Bevægelsen med Drift imod et vist Punkt ved Central-Kræfterne skeer, at finde Lovene for disse Kræfter, de nemlig, hvorefter de virke.

Perpendiklen paa Tangenten dens Kubus forkeert tagne.

Vi ville her i disse Forelæsninger alene see paa det første, som mest nyttige i denne Materie; allermest da denne Sag er intet mindre end vanskelig. Er nemlig (Taf. IX. Fig. 13.) HAG en af Keile-Snittene efter det forhen sagte; BE den Cirkel, som i A rører den krumme Linie, AD den rørende Halv-Diameter, da er §. 176 Central-Kraften, hvilken driver imod samme Cirkels Center, som Quadraten af Hastigheden i A, dividert med AD, men Hastigheden er i den krumme Linie $= \frac{1}{CF}$, §. 203. Følgelig er Hastigheden, som driver imod Rore-Cirklens Center D. Ligeledes $\frac{1}{CF}$.

Videre er Central-Kraften i Cirklen til Central-Kraften i den krumme Linie HAG, som *ed*: *df*. Thi Kræfterne ere, som deres Virkninger i samme Tid, men i Trianglerne *edf* og FC*f* er Vinklen *f* tilfælles, og fordi D*e* ansees som at være AD uendelig nær, ere ved *e* og ved F rette Vinkler. Følgelig Trianglerne *edf* og FC*f* ligedanne Triangler, følgelig *fd*: *de* = *f*C: CF, hvoraf man seer, at i alle krumme Linier forholder sig Central-Kraften i Cirklen til Central-Kraften, hvilken dertil svarer i den krumme Linie, som Perpendiklen paa Rore-Linien til Bære-Linien.

Altsaa da $de = \frac{1}{2AD.CF^2}$, §. 203, saa bliver fd eller Central-Kraften, som dertil svarer i enhver krum Linie $= \frac{dC}{2AD.FC^3}$, hvor man agter, at dC og fC ei ere af adskillig Størrelse, fordi fd antages at være uendelig liden.

Følgelig er Central-Kraften i alle krumme Linier i Almindelighed i sammensat Forhold af Bære-Linien tige frem tagen, af Rore-Cirklens Diameter forkeert, og Perpendiklen paa Rore-Linien dens Kubus ligeledes forkeert tagen.

§. 206.

I Keile-Snittene er Central-Kraften, som bestandig driver imod Brende-Punkter, saa stor som Quadraten af Distancen fra dette Punkt forkeert tagen.

Det nylig sagte gielder i alle krumme Linier i Almindelighed. For nu videre at anvende dette til Keile-Snittene, haver man alene nodig at iagttage, hvad man beviser i Algebre, at nemlig i dem er altid den rørende Halv-Diameter, (Taf. IX. Fig. 14.) om BE er en af Keile-Snittene, EA dens Rore-Linie, EF Perpendiklen paa Rore-Linien i Rore-Punktet, saa er, siger jeg, efter det i Algebre beviiste, den rørende Halv-Diameter $\frac{4EF^3}{p^2}$, (ved p forstaaes Parametern) og følgelig bliver Central-Kraften i enhver koniſk Section, eller i et hvert af Keile-Snittene $= \frac{p^2.dC}{8EF^3.FC^3}$.

Antager man videre, som beviist i Algebre, at Perpendiklen DC paa Rore-Linien fra Brende-Punktet D af, eller hvilket er det samme, fra Kræfternes Center $= \frac{DE.\frac{1}{2}p}{EF}$, da faaes,

naar

naar dette sættes i Steden for FC i §. 206, og den deraf folgende Sætning i denne §. $\frac{p.^2 dC}{8EF^3.FC^3}$, Central-Kraftens Storrelse $= \frac{p^2 dC.EF^3}{DE^3.\frac{1}{8}p^3.8EF^3} = \frac{dC}{DE^3.p}$, og da dC nu er $DE = \frac{1}{DE^2.p}$, Altsaa da p eller Parametern er en uforanderlig Storrelse, saa sees; at i et hvert af Keile-Snittene er Central-Kraften, som driver imod Kræfternes Center, eller imod Keile-Snittets Brende-Punkt, altid som Quadraten af Bære-Linien, eller som Quadraten af Distancen fra samme Center forkeert.

§. 207.

Central Kræfternes Virkning efter Quadraten af Distancen forkeert, er en af de store Hoved-Love i Naturen.

Deraf forstaaes, at da i Folge de astronomiske Jagttagelser, Bevægelserne af de store himmelske Legemer altid skee i en af Keile-Snittene, i sær i Ellipsen saaledes, at Tiderne ere som Snittene fra Brende-Punktet, saa ere og overalt i Naturen de store bevægende Aarsager som forkeert-Viis Quadraten af Distancen fra et vist Punkt, fra Brende-Punktet nemlig. §. 199. Dette er derfor den store Regle til Naturen; det er deraf, at vi kunne bestemme saavel Tiden som Stedet i alle de himmelske Legemers Bevægelser. Vi skulle paa andre Steder i vore Forelæsninger finde Leilighed til at tale meer om de Slutninger, som man af det her Beviiste kan giore. I det Nærværende ville vi alene see paa, hvad der her er vores Hoved-Sag, paa det nemlig, som der egentlig henhører til Mekanik.

§. 208.

Den naturlige Tyngde er en Kraft, som tager

Vi ville derfor alene herfra gaae tilbage, for at tale om Tyngdens sande Natur. Vi have paa adskillige Steder

af efter Quadraten af Distancen fra Jordens Center forkeert tagen.

i det foregaaende antaget som en pur Hypothese, at den tog af i de større Distancer fra Jordens Center efter Quadraten af Distancen forkeert. Men nu sees oiensynlig, at hvad vi i denne Henseende have sagt, ikke er en pur Hypothese, men en nødvendig Følge af de store Naturens Love, som bestemme Central-Kræfterne i Almindelighed, folgelig og Tyngden, til at virke efter den forkeerte Forhold af Distancerne fra Kræfternes Center forkeert.

§. 209.

I alle Planeterne er en Tyngde imod Solens Center, som den her hos os imod Jordens Center.

Saa vidt vi kunde følge Naturen ved Jagttagelser, finde vi derfor i alle Legemer en virkelig Tyngde. Solen er det store Legeme, som sidder i det fælles Brende-Punkt, hvilket alle Planeterne beskrive. Imod Solens Center tynge de alle, efter den Lov som Quadraten af Distancen forkeert, saa den samme Tyngde imod Solens Center findes i dem alle. Det er. De søge samtlig at falde ind imod Solen, ligesom de Ting, der hos os kastes i Høiden op over Jorden, falde igien ned imod dens Center, og, om intet hindrede, virkelig fortsatte Bevægelsen lige ned til dette Middelpunkt.

§. 210.

Den Central-Kraft, som driver Maanen, bevises, at være den samme, som Tyngden her hos os, men formindsket efter

Men denne almindelige Tyngde er den virkelig i absolut Størrelse den samme, som Tyngden her hos os, eller er den den alene proportionert? Man beviser, at den er den selvsamme, og det er upaatvivleligt, at den Central-Kraft, som driver Maanen om i sin Bane, er den selvsamme Tyngde, som

som den, der er hos os. Saa at Maanen falder ned imod Jordens Center, paa selvsamme Maade, som de andre tunge Ting, vi see omkring os her paa Jorden. Quadraten af Distancen forkeert.

Thi man veed af Astronomien, at den Linie, som Maanen beskriver omkring Jorden, nærmer sig til en Cirkel, og kan, i Henseende til den hele Omlobs-Tid, ansees for at være denne Linie. Maanen selv er Jorden snart nærmere, snart længere fra den, men Middel-Distancen, hvilken vi her vilde giore Regningen efter, er omtrent 60 af Jordens Halv-Diametrer. Vi see her ei paa de noieste Bestemmelser af Tallene, da det ikke kommer an paa en ganske noie Udregning. Desuden veed man af de astronomiske Jagttagelser, at Maanens periodiske eller Omlobs-Tid belober omtrent 27 Dage 7 Timer, som gior i Sekunder 2358000.

Dette forudsat. Siden da Maanen bevæger sig i en Cirkel, er det af det foregaaende overmaade let at bestemme den Middel-Hastighed, hvormed den i et Sekund bor gaae fort i sin Bane. Thi denne Hastighed er efter §. 183 den, som vindes ved Faldet igiennem $\frac{1}{120}$ Deel af Jordens Diameter, og saaledes 3134′ i et Sekund. Men Maanens Cirkels Halv-Diameter belober 1176948000 Fødder, naar Jordens Halv-Diameter antages 19615800′. Saaledes bliver Maanens Cirkels hele Peripherie 7391233440, hvilken, naar divideres med 3134, faaes for Maanens Omlobs-Tid 2358400″, som ikke er uden 400″ adskillig fra Maanens sande Omlobs-Tid, hvorpaa her ikke kan sees, da Forskiellen i Tiden ei bliver uden meget ringe, og Middel-Di-

stancen er virkelig ikke ganske noie 60 af Jordens Halv-Diametrer.

§. 211.

Paa Hastighedens Størrelse kommer det alene an, i hvad for en af Keile-Snittene at Bevægelsen af det udkastede Legeme skal skee.

Deraf flyder, at den Kraft, som bevæger Maanen i sin Bane, er den selvsamme Tyngde, som den, der virker hos os her paa Jorden, undtagen at den er blevet i sin absolute Størrelse forminsket i Henseende til Distancen, saa denne Størrelse ikke er i Maanens Himmel meer end $\frac{1}{3600}$ Deel af Tyngden hos os. Man kan fortsætte disse Betragtninger og bevise, at denne samme Tyngde driver de øvrige Planeter imod Solen, og Maanerne imod Hoved-Planeterne, men det er paa dette Sted for vidtløftigt, og hører ikke egentlig til disse Forelæsninger.

I den Sted vil jeg kortelig erindre, at man (*) kan bevise, i hvad Tilfælde det med en vis Hastighed udkastede Legeme beskriver enhver af Keile-Snittene.

Nemlig, 1) efter det forhen sagte beskrives en Cirkel, dersom Hastigheden Tingen kastes ud med, er net op den, som vindes ved at falde igiennem den halve Distance fra Kræfternes Center, eller igiennem $\frac{1}{2}$AC, (Taf. IX. Fig. 7.) naar Tingen kastes perpendikulær ud i A, og drives igiennem $\frac{1}{2}$AC af Central-Kraften udi A.

2) Er derimod den Høide, som svarer til den Hastighed, hvormed Tingen kastes ud, dobbelt saa stor som den, der

(*) See Tillæggene §. 166. 167.

der udfordres til Bevægelsen i Cirklen, eller til, net op at hæve Tyngden, da beskriver det udkastede Legeme omkring Kræfternes Center en Parabol, saafremt nemlig at Central-Kraften er som Quadraten af Distancen forkeert.

3) Er Hastighedens Høide endnu større end den, som behoves til Bevægelsen i Parabolen, da beskrives altid af det med denne Hastighed udkastede Legeme en Hyperbol.

4.) Men er Høiden, som svarer til Hastigheden, mindre end den, der behoves til Bevægelsen udi Parabolen, da beskrives altid en Ellipse, undtagen i det ene Tilfælde, da Cirklen beskrives. Saa meget kan desuden iagttages, at saa længe som Hastigheden vel er mindre end Parabolens, men større end Cirklens, er den ene Brende-Punkt Kræfternes Center, og derimod er det den anden og imodsatte Brende-Punkt, saa tidt som Hastigheden er mindre end den, der udfordres til Cirkel-Bevægelsen.

5) Saa man fremdeles seer, at saa tidt som Kræfternes Center er et Punkt uden Størrelse, der ikke er omringet af en heel Masse, da med hvad Hastighed at end og et Legeme kastes ud, falder det aldrig ned til Kræfternes Center, men bevæges bestandig rundt omkring det i en af Keile-Snittene, og aldrig i nogen anden Linie.

§. 212.

Endnu kan jeg ikke undlade at sige, for jeg slutter denne Lærdom, at man af sig selv allerede bør have kundet merke, at det er ikke ligegyldigt, imod hvad Punkt i den krumme Linie

Central-Kraften er adskillig, eftersom den i de krumme Linier

drive bestandig hen imod adskillige Punkter.

Linie at Central-Kræfterne drive. Tvertimod blev dette Punkt et andet, da bleve de selv og under sig adskillige, og den Lov, hvorefter de, for at giore Bevægelsen i samme krumme Linie, imod et andet Punkt maatte virke, en langt anden. Vi ville oplyse dette med Exempler i de allersimpleste Tilfælde, i Cirkel Linien nemlig.

Er (Taf. IX. Fig. 15.) ADB en Cirkel, da siden §. 205 Central-Kraften altid er som Bære-Linien lige frem tagen, som den rorende Cirkels Halv-Diameter forkeert tagen, og som Kubus af Perpendiklen paa Rore-Linien EAF forkeert tagen, saa sees, at om Central-Kraften driver imod Centret, bliver den $= \frac{AC}{AC.AC^3}$ eller $= \frac{1}{AC^3}$, det er, som Kubus af Bære-Linien forkeert tagen.

Saafremt derimod, at i samme Cirkel Central-Kraften driver imod et Punkt udi dens Peripherie D, da bliver, om DE er Perpendiklen paa Rore-Linien EAF, og DA Bære-Linien, AC den rorende Cirkels Halv-Diameter, som her er et med Halv-Diametern i Cirkeln; Central-Kraften $= \frac{DA}{AC.DE^3}$, men Trianglerne AED og ADB ere ligedanne Triangler, fordi ED og AB ere begge, efter vores antagne, perpendikulære paa EAF, og følgelig parallele, altsaa er $AB : DA = DA : ED$ og $ED = \frac{DA^2}{AB}$, følgelig bliver den Central-Kraft, som bestandig driver imod et Punkt D i Peripherien $= \frac{DA.AB^3}{AC.DA^6}$, og da ydermere Halv-Diametern, saavelsom

velsom Diametern, have en bestandig Forhold ei alene under sig, men og i deres adskillige Høider, de forhøies til; saa bliver den Central-Kraft, der driver imod et Punkt i Peripherien $= \frac{1}{DA^5}$ eller som den femte Høide af Bære-Linien forkeert tagen.

§. 213.

Central-Kraftens Beskaffenhed, naar den driver imod et Punkt inden i Cirklen.

Ligeledes sees (Taf. IX. Fig. 16.) at om Central-Kraften skulde drive imod et givet Punkt inden i Cirklen, f. E. imod B, da om GAD er igien Cirklens Rore-Linie, BA Bære-Linien, BD Perpendiklen paa Rore-Linien, saa bliver Central-Kraften, som bestandig driver imod det Punkt B $= \frac{AB}{FC.BD^3}$, §. 205. Men Trianglerne FAE og ABD ere ligedanne Triangler, fordi Vinklen DAE = AFE, og ved D og A ere rette Vinkler, saa derfor FE : AE = AB : DB, hvorfor og $DB = \frac{AB.AE}{FE}$; sættes denne Værdie af DB i Steden for den selv i Sætningen $\frac{AB}{FC.BD^3}$, da faaes $\frac{AB.FE^3}{FC.AB^3.AE^3}$, hvilket giver, da FE^3 og FC ere bestandige Storrelser, en Forhold for Central-Kraften $= \frac{1}{AB^2.AE^3}$, hvoraf sees.

At den Central-Kraft, som driver imod et Punkt inden i Cirklen, er i sammensat Forhold af Quadraten af Bære-Linien forkeert tagen og Kubus af Strengen eller den Chorda AE, der gaaer igiennem Kræfternes Center, B ligeledes forkeert tagen.

Man kan deraf strax udlede Sætningen §. 212, som en særdeles Sandhed, der i et enkelt Tilfælde henhører under denne anden almindeligere. Thi er Punktet B i E, eller i Peripherien,

da bliver AB = AE, og følgelig Central-Kraften = $\frac{1}{AE^3}$, eller som den femte Høide af Bære-Linien forkeert tagen.

Man udleder ligeledes den forhen givne Værdie af Central-Kræfterne for den enkelte Tilfælde, da de drive imod Centret; thi i denne Tilfælde bliver saavel AB som AE proportionert Cirklens Halv Diameter, hvilket, naar først er iagttaget, følger, at vores forhen i denne §. givne almindelige Værdie af Central-Kraften = $\frac{AB. FE^3}{FC\,AB^3.AE^3}$ bliver proportionert $\frac{1}{FC^3}$, eller som Kubus af Diametern forkeert.

Det er ikke mindre klart, at man kunde af denne sidste almindelige Værdie for Central-Kraften udlede alt det, som forhen er bleven sagt om Central-Kræfterne i Cirklen, og de af dem giorte Følger. Men da vi her sætte større Priis paa de letteste og simpleste Maader at udlede Sandheden paa, end paa de meer abstrakte, og følgelig vanskeligere, saa ville vi ei opholde os længere ved denne Sag, for at gaae fort til andre Hoved-Loves Betragtning i Naturen.

Derimod kunde vi ikke undlade til Beslutning kortelig at erindre. At da man i Almindelighed forstaaer ved det Ord Tyngde en Kraft i Naturen, som driver altid sin Inertie paa alle Steder og i alle adskillige Stilninger imod et vist Center, saa forstaaes nu fuldkommen, hvad vi have sagt i den anden Forelæsn. §. 34, at Tyngden er en Kraft, som virker ligesaavel i Planeterne og hele Verden igiennem, som her hos os, og i §. 46, at det er egentl. af Maaden, hvorpaa Tyngden virker i Planeterne, at vi vide, hvorledes den virker hos os. Thi af det, hvad vi have forhen sagt §. 200. og siden langs hen i denne Forelæsning, er der ingen Tvivl paa, at jo baade i hele Naturen regierer en Tyngde, og desuden en ligesaadan, som den her hos os.

Syvende

Syvende Tillæg.

Om Central-Kræfterne.

I.

Almindelig Theorie for Central-Kræfterne.

§. 158.

Er (Taf. X. Fig. 2.) ACD en krum Linie i Almindelighed. B Kræfternes Center, GDI en Tangent eller Rore-Linie til den krumme Linie, hvilken falder ind med et dens Element CD. BC og BD denne Linies Ordinater henregnede til Kræfternes Center B, DF og CE Cirkel-Buer, der ansees som Abscisser, hvilke svare til Ordinaterne efter den i Geometrien sædvanlige Maade, naar Ordinaterne løbe sammen udi et Punkt B. Da om man fremdeles kalder DB y, DF x, CL dy, DL dx, og Elementet af den krumme Linie CD, ds, da kan videre agtes. Central-Kræfternes almindelige Værdier bestemmes.

At om den hele Kraft i D forestilles ved BD, kan den altid opløses udi to andre Side-Kræfter, en Tangential DI, hvilken altid driver efter Rore-Linien GCDI af den krumme Linie, og en anden, der er lodret eller normal paa Linien KD, saa den hele Kraft efter BD saaledes opløses i to andre, hvoraf den ene ei er den anden til Hinder, §. 67. F. men som begge med forenede Kræfter alene forandre Direktionen, for saavidt DK virker, og Hastigheden for saa vidt DI virker. Alt bestaaer i at bestemme disse to adskillige Kræfter, og deres Virkninger paa den Ting, som bevæges.

Kaldes den hele Kraft, som virker efter DB, K, da maa først agtes, at siden Buen DL er uendelig liden, kan den ansees for en ret Linie perpendikulær paa Ordinaten CB, hvorved da CLD og DBI blive ligedanne Triangler, fordi ved L og I ere rette Vinkler, CB og DB ere hverandre efter vores antagne uendelig nær, Vinklen CBD er derfor = o, og CB, BD parallele eller ligeløbende Linier, saa derfor Vinklen LCD = BDI og DC : CL = DB : DI eller $ds : dy = K : K\frac{dy}{ds} = BI$, saa $K\frac{dy}{ds}$ er alletider Værdien af Kraften efter den krumme Linies Rette-Linie, i alle de Bevægelser, hvilke man paa nogen Maade kan henføre til centrale, hvilket kan skee i en Mængde flere Tilfælde, end i de, som vi her egentlig have for at afhandle.

Hvad Normal-Kraften BI angaaer, da bestemmes dens Værdie ligeledes. Thi DC : DL = DB : BK, eller $ds : dx = K : \frac{K dx}{ds} = BI$, hvilket er den almindelige Værdie for Normal-Kraften i alle Bevægelser, der kunne ansees som centrale.

For nu videre at komme til de fornødne Ligheder, hvilke forklare disse Kræfters Henseender til Hastigheden, Tiden og Løbe-Banen, behøves intet andet, end at sætte deres enkelte Værdier paa en behørig Maade i de almindelig forhen givne Ligheder, i hvilke Kræfterne ere anførte paa det allermest ubestemte. Da derfor §. 4. 7. $\frac{np}{m} dt = dv$, og $\frac{dy}{v} = dt$, saa sees, at om man, i Steden for $\frac{p}{m}$, sætter $K\frac{dy}{ds}$, faaes af disse almindelige den i dette enkelte Tilfælde tienlige Ligned for Kraften

Kraften efter Tangenten, og sætter man ligeledes, i Steden for $\frac{p}{m}$, $\frac{Kdx}{ds}$, faaer man Ligheden for Normal-Kraften, og saaledes

1) For Tangential-Kraften $-\frac{nKdy}{ds}dt = dv$. dy sættes negtende, fordi y tager af, som man seer af Figuren, alt som x tager til. Men fordi $dt = \frac{dy}{v} = \frac{ds}{v}$, bliver $-nkdy = vdv$, hvorved agtes, at v betyder Hastigheden udi D, og at K betyder ei Pressionen, men den hastiggiørende Kraft.

2) For Normal-Kraften faaes ligeledes først $\frac{Kdx}{ds}dt = \frac{dv}{n}$, men da denne Kraft er perpendikulær paa den krumme Linie, og følgelig altid driver efter Direktionen af Røre-Cirklens Halv-Diameter, som vi ville kalde r, saa er det klart, at den normale Kraft er 1) i Følge det foregaaende $= \frac{Kdx}{ds}$, 2) naar den ansees som en Kraft, der driver imod den rørende Cirkels Center $= \frac{v^2}{r}$, §. 176. F. saa at derfor $\frac{Kdx}{ds} = \frac{v^2}{r}$, og følgelig bliver $rKdx$ proportionert $v^2 ds$, og $rKdx = mv^2 ds$, hvor m betyder en bestandig Størrelse.

Forklares nu n saaledes, som før i Tillægget til den anden Forelæsning, saa man sætter, ligesom der, i Steden for Hastigheden den Høide igiennem hvilken ved Faldet Hastigheden erhverves, da faaes disse Forhold.

1) For den Kraft, som driver efter Røre-Linien eller Tangenten, $-dV = Kdy$.

2) For den, som er perpendikulær paa den krumme Linie eller normal saaes, $Krdx = 2Vds$, hvor V betyder igien den nylig omtalte Høide, som svarer til Hastigheden.

Videre; om Perpendiklen paa Røre-Linien DI, nemlig BI, kaldes p, da fordi $DB : BI = CD : DL$ eller $y : p = ds : dx$, bliver $ydx = pds$, og om under Differentiationen ds iblant de foranderlige Størrelser ansees som uforanderlig, bliver

$$dp = \frac{dydx + yddx}{ds}.$$

Men man veed af Algebre, at Røre-Cirklens Halv-Diameter er, om ds ansees som uforanderlig, $\frac{ydyds}{dydx + yddx}$, sættes dette behørig om i den nylig givne differentielle Størrelse $\frac{dydx + yddx}{ds} = dp$, da saaes $r = \frac{ydy}{dp}$, følgelig saaes for Normal-Kraften denne nye Værdie, eller rettere Ligheds $\frac{Kydydx}{dp} = 2Vds$, og da efter det forhen sagte $\frac{ds}{dx} = \frac{y}{p}$, saa er for Normal-Kraften $\frac{Kdy}{2V} = \frac{dp}{p}$.

2.

Af de fundne almindelige Kræfter at finde fremdeles den krumme Linie, hvori Bevægelsen skeer, eller Løbe-Banen, og Hoved-Reglerne for denne Bevægelse i Almindelighed.

§. 159.

Saavelsom Hastigheden.

For at finde Banen af Bevægelsen eller den krumme Linie, i hvilken at Bevægelsen ved Hastigheden og Central-Kræfterne skeer, behøves

høves nu intet andet, end først at finde Hastigheden i Almindelighed, hvortil igien alene udfordres at søge en dobbelt Værdie for K af de to givne Ligheder i §. 158. Den ene $\frac{Kdy}{2V} = \frac{dp}{p}$, hvoraf trekkes $K = \frac{2Vdp}{pdy}$, den anden $-dV = Kdy$, hvoraf faaes $K = \frac{-dV}{dy}$, og derfor $\frac{2Vdp}{pdy} = \frac{-dV}{dy}$, og da dy gaaer ud, $\frac{2Vdp}{p} = -dV$, i hvilken Lighed ingen anden Størrelse forekommer, end de alene, som henhøre til den krumme Linie, og til at tilkiendegive den Linie V, ved at falde igiennem hvilken Hastigheden vindes.

Denne Lighed $\frac{2Vdp}{p} = -dV$, viser, hvad Hastigheden er i et hvert Punkt af den krumme Linie, hvilken let findes, siden man faaer, ved at dividere ved V, $\frac{2dp}{p} = \frac{-dV}{V}$, hvilket altid kan i Almindelighed integreres, og bliver til $2Lp - b = L\frac{1}{V} + B$, B og b betyde bestandige logarithmiske Størrelser, som fyldestgiøre det ubestemte Integral, og findes ved at sætte i Steden for b, BA, om Tingen ansees som kastet perpendikulær ud paa Axlen AB i A, hvis ikke; da en Størrelse $= n$AB, i hvilken n er uforanderlig og bestemmes altid let af den givne Inklinations-Vinkel i A, FAB: saaledes faaes, da b og B og ere logarithmiske Størrelser, som vi derfor ville kalde $2Lb$ og LB denne Lighed.

$2Lp - 2Lb = L\frac{1}{V} + LB$, hvoraf igien trekkes denne anden $2Lp - 2Lb - LB = L\frac{1}{v}$, som beløber $L\frac{p^2}{Bb^2} = L\frac{1}{v}$ og naar Størrelserne selv tages $\frac{p^2}{Bb^2} = \frac{1}{V}$ eller $V = \frac{Bb^2}{p^2}$, i hvilken

Lighed

Ligheden b betyder, som før er sagt, Perpendiklen fra Kræfternes Center paa Røre-Linien i A, og B Høiden tA, hvilken vi ville sætte svarer til den Hastighed, hvormed den Ting, som bevæges, antages at være kastet ud udi samme Punkt A.

§. 160.

Da saaledes i Almindelighed $V = \frac{Bb^2}{p^2}$, saa er bestandig $V = \frac{1}{p^2}$, og da V er som Quadraten af Hastigheden, saa er i alle Punkter af den krumme Linie Hastigheden altid som Perpendiklen paa Røre-Linien forkeert tagen, fuldkommen som vi have før beviist det i Forelæsningerne §. 203.

§. 161.

Videre kan agtes i denne Henseende, at om ved at falde igiennem tA den Ting, som bevæges, dreven af den Kraft K imod Kræfternes Center B, den Hastighed kunde vindes, som Tingen haver i A, da maa den ved at blive ved at falde igiennem AE, fremdeles i E saae i den rette Linie tE den samme Hastighed, som i C, i F den samme som i D, eller altid den samme Hastighed i de samme Distancer fra Kræfternes Center. Thi da for Tangential-Kraften er $-dV = Kdy$, §. 158. saa bliver $V = \int -Kdy$, og da ligeledes for Faldet i den rette Linie bliver $dV = -Kdy$, og atter igien $V = \int -Kdy$, saa er det klart, at i begge Henseende ingen Forskiel er, hvorfor man altid kan til et hvert Punkt D i den krumme Linie ansee tF som den Høide, der svarer til Hastigheden i F, alene at tA en gang for alle er bleven bestemt i Ligheden $V = \frac{Bb^2}{p^2}$.

§. 162.

§. 162.

Hvad Tiden for Bevægelsen i Almindelighed angaaer, da bestemmes den ligeledes overmaade let. Thi Tiden i den ensdanne Bevægelse igiennem CD er $= \frac{CD}{\sqrt{V}} = \frac{ds.p}{b\sqrt{B}}$, og altsaa proportionert $p.ds$, fordi $b\sqrt{B}$ er en bestandig Størrelse. Hvoraf man seer, at Tiden igiennem et hvert Element er proportionert Snittet CBD fuldkommen, som vi før have beviist det i Forelæsningerne §. 199, følgelig og hele Linien AD igiennem, som ADBA, siden den hele Tid bliver $\int p.ds$. Og Tiden ligeledes.

§. 163.

Da Normal-Kraften er den, som forandrer Direktionen, og følgelig den, som bestemmer overalt den krumme Linie, saa maa man, for at finde den krumme Linie selv i Ligheden til Normal-Kraften $\frac{Kdy}{2V} = \frac{dp}{p}$, i Steden for V sætte dens Værdie $\frac{Bb^2}{p^2}$, hvorved man kommer til denne anden Ligned $Kdy = \frac{2Bb^2dp}{p^3}$, en Ligned, som atter igien haver det fortræffelige, at de ubekiendte Størrelser, saa tidt som K er en Function af y, ere skilte fra hverandre: Og da i denne Ligned, foruden de bestandige Størrelser, ingen andre forekomme, end de forhen omtalte Ordinater til den krumme Linie og Perpendiklerne paa de til dem svarende Rette-Linier, saa sees, at denne Ligned er til den krumme Linie selv umiddelbar, skiønt paa en usædvanlig Maade, da Perpendiklerne paa Tangenterne ere i Steden for Abscisser saa at sige; imidlertid er Ligheden dog altid simpel, for saa vidt, som den er given ved rette Linier. Med Løbe-Banen.

§. 164.

Vi see deraf videre, at hvad vi her have sluttet, treffer fuldkommen ind med det forhen sagte i Forelæsningerne. Da nemlig $Kdy = \frac{2Bb^2dp}{p^5}$, og $r = \frac{ydy}{dp}$, saa bliver $K = \frac{2Bb^2y}{p^5r}$, og følgelig K proportionert $\frac{y}{p^5r}$, saa Central-Kraften altid bliver i sammensat Forhold af Bære-Linien ligefrem tagen, af Røre-Cirklens Halv-Diameter forkeert, og Perpendiklen paa Tangenten dens Kubus ligeledes forkeert tagne.

§. 165.

Ligheden til Løbe Banen søges imellem retlinede perpendikulære Koordinater.

Da i vores forrige Ligned §. 164, som var $Kdy = \frac{2Bb^2dp}{p^5}$, Ligheden er imellem Bære-Linien, tagen som Ordinate fra Kræfternes Center og Perpendiklen paa Røre-Linien, og dette Slags Ligheder i Henseende til de, som sædvanlig bruges i Algebre, ere lidet bequemme til at slutte de paa den sædvanlige Maade fundne Egenskaber af de algebraiske Linier, saa er det første, som man bør see paa, at bringe denne Ligned til en anden imellem de retlinede Ordinater og Absciser, der staae perpendikulær paa hverandre, hvilket er i Almindelighed altid gierligt, saa tidt ikke K er andet end en Function af y, og til den Ende bør man allerførst see paa at faae en Ligned, i hvilken Perpendiklen paa Røre-Linien ei mere forefindes.

For at iverksætte dette, maa agtes, (Taf. X. Fig. 3.) at om ADF er den krumme Linie, C Kræfternes Center, $CD = y$, $CH = p$, $DM = dy$, $CI = x$, $IK = DL = dx$, $ID = z$, $EL = dz$, Hastigheden i A den, som svarer til Høiden BA og

denne

denne Høide = B, Perpendiklen paa Tangenten i A, hvor Bevægelsen antages at begynde, som før = b, da bliver $z^2 = y^2 - x^2$.

$dz = \frac{ydy - xdx}{\sqrt{y^2 - x^2}}$ og $DE^2 = dx^2 + dz^2$

$= \frac{y^2dy^2 - 2yxdydx + x^2dx^2 + y^2dx^2 - x^2dx^2}{y^2 - x^2}$

$= \frac{y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2}{y^2 - x^2}$, og $ME^2 = DE^2 - DM^2$

$= \frac{y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2}{y^2 - x^2} - dy^2 = \frac{(xdy - ydx)^2}{y^2 - x^2}$,

hvoraf man følgelig faaer

$DE = \frac{\sqrt{y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2}}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, og videre

$ME = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, men da $ds : ME = y : p$, saa faaes

$p = \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2)}}$. Søges nu ligeledes p af den Ligbed $\frac{-Kdy}{Bb^2} = \frac{-2dp}{p^3}$, §. 158 og 160, som integrert giver $\int\frac{-Kdy}{Bb^2}$

$= \frac{1}{p^2} + C$, saa faaes $\frac{1}{\int\frac{-Kdy}{Bb^2} - C} = p$, og følgelig $\frac{1}{\int\frac{-Kdy}{Bb^2} - C}$

$= \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2}}$ en Ligbed, hvori p ikke meer findes, da K antages ei at være andet, end en Function af y, og C er bestandig.

For at giøre denne Ligbed i Henseende til de bestandige Størrelser saa simpel, som muelig, kan man antage, at $\int -Kdy$ er i A = 0, siden det Punkt A kan tages efter Behag; altsaa bliver simpel hen Integralen fyldestgiort af den Størrelse $\frac{1}{p^2}$, hvortil i A efter §. 159

svarer $-\frac{1}{b^2}$, saa derfor $\frac{1}{Bb^2}\int -K dy = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{b^2}$, og $p = \frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{B - \int K dy}}$

$$= \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2}}.$$

§. 166.

Efter at p saaledes er bragt ud af Ligheden, er denne sidste given udi y og x alene. Integreres den da igien, og x og y udvikles, er det altid let, af x og y, som givne, at finde z, fordi $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

For derfor at bringe den forhen givne Ligheð, som var $\frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{B - \int K dy}} = \frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2}}$, dertil, maa man søge at giøre det sidste Stykke integrabel. Da strax sees, at man faaer $\frac{yxdy - y^2dx}{\sqrt{y^2dy^2 - 2yxdydx + y^2dx^2}} = \frac{(xdy - ydx)}{\sqrt{dy^2 - \frac{2xdydx}{y} + dx^2}}$, hvoraf man fremdeles kan vente, at denne Størrelse lader sig giøre simplere ved at sætte $x = ty$, hvorved man og faaer, naar alt er bleven behørig omsat, denne Ligheð $\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{b\sqrt{B}dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2\int K dy}}$, i hvilken Ligheð de ubekiendte ere fuldkommen skilte fra hverandre, og man af t og y givne altid kan finde x og z, fordi $x = ty$ og $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

Fordi $\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ er et Integral til Cirklen, bliver t derfor (om den til samme svarende Vinkel er f) $= \frac{e^{f\sqrt{-1}} - e^{-f\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, naar e for-

klares,

klares ved Ordinaten til Log. 1. i den hyperbolske Logarithmik. Eller om Vinklen ACD kaldes f, er $t = \frac{e^{f\sqrt{-1}} + e^{-f\sqrt{-1}}}{2}$.

§. 167.

Deraf sees, at om Ligheden $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{B}dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2\int K dy}}$ skal blive algebraisk, maa de af begge Ligheders Dele flydende Logar. Integraler være af den Beskaffenhed, at de transcendentale Størrelser kunde paa begge Sider hæve hverandre op udi Ligheden. Følgelig maa i denne Tilfælde $\frac{b\sqrt{B}\,dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2\int K dy}}$ være et Integral af selvsamme Art, som $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, følgelig maa, for den Tilfælde af algebraiske Ligheder, den forrige Ligh ed almindelig falde i denne anden $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{ndl}{\sqrt{a^2-l^2}}$.

§. 168.

Da nu det imaginære logarithmiske Integral af $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} L_t \sqrt{-1} + \sqrt{1-t^2}$, og ligeledes af $\frac{ndl}{\sqrt{a^2-l^2}}$, er samme Integral $= \frac{n}{\sqrt{-1}} L_l \sqrt{-1} + \sqrt{aa-ll}$, saa seer man, at $t\sqrt{-1} + \sqrt{1-t^2} = (l\sqrt{-1} + \sqrt{aa-l^2})^n$ en Ligh ed, hvor de transcendentale Størrelser hæve sig selv op, og som derfor følgelig haver alle de forlangte Egenskaber.

§. 169.

§. 169.

Sætter man indtil videre $(l\sqrt{-1}+\sqrt{aa-l^2})^n = q$, da bliver $t\sqrt{-1}+\sqrt{1-t^2} = q$ og $t = \frac{q^2-1}{2q\sqrt{-1}} = \frac{q}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{2q\sqrt{-1}}$, følgelig faaes

$$t = \frac{(l\sqrt{-1}+\sqrt{aa-ll})^n}{2\sqrt{-1}} - \left(\frac{1}{2\sqrt{-1}\,(l\sqrt{-1}+\sqrt{aa-ll})}\right)^n$$

eller, fordi $l\sqrt{-1}+\sqrt{aa-l^2}$, multiplicert med $l\sqrt{-1}-l\sqrt{aa-ll} = -aa$, faaes, om Størreiserne overalt ret omsættes, $t = \frac{(l\sqrt{-1}+\sqrt{aa-ll})^n}{2\sqrt{-1}} - \frac{(l\sqrt{-1}-\sqrt{aa-ll})^n}{2aa^n\sqrt{-1}}$, hvorved maa agtes, at Integralen endnu ikke er fyldestgiort med den bestandige Størrelse, som man maa undersege hvad bliver i de enkelte Tilfælde; i Almindelighed derimod secr man, at den bliver $-\frac{n}{\sqrt{-1}}L\beta\sqrt{-1}+\sqrt{aa-\beta\beta}$, saa man faaer:

$$t = \frac{(l\sqrt{-1}+\sqrt{aa-ll})^n.\,(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\beta\sqrt{-1})^n}{2aa^n\sqrt{-1}} - \frac{(\sqrt{aa-ll}-l\sqrt{-1}).\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta\sqrt{-1})^n}{2aa^n\sqrt{-1}}$$

§. 170.

Slutninger af det forrige i den Tilfælde, da Central-Kraften er som Quadraten og som Kubus af Distancen forkeert.

Dersom her, som tilforn (Taf. X. Fig. 3.), de samme Benævninger beholdes, og man antager, at den Ting, som bevæges,

kaste

kastes i A perpendikular ud paa AC, da bliver AC Perpendiklen paa Tangenten i A, og Bære-Linien tillige $= b$. Videre kalde vi den Linie AB, igiennem hvilken Hastigheden udi A vindes B. Da nu videre alle de foranderlige sættes at have samme Bemærkelse som før, er det allerførst nødvendigt, for at finde Banen af Bevægelsen, at bestemme $\int K dy$ i Ligheden §. 165. $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{B}\,dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2\int K dy}}$.

Da derfor den naturlige Tyngde kan ligesaavel, som den Central-Kraft, vi her handle om, ansees for at være som Quadraten af Distancen forkeert, siden af dette sidste følger, som man let kan forvisse sig om ved at giøre Udregningen, at den hastiggiørende Kraft af Tyngden i denne sidste Tilfælde bliver for smaa Distancer bestandig, hvilket var den Tilfælde, vi før antoge som Tyngden hos os egentlig, saa følger; at Tyngdens hastiggiørende Kraft hos os kan ansees for det Maal og den Unitet, hvortil alle andre deslige hastiggiørende Kræfter kunne henføres. Kaldes da Jordens Halv-Diameter r, bliver $\frac{1}{r^2} : g = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{gr^2}{y^2}$, hvilket er Central-Kraften, der svarer til den Distance fra Kræfternes Center y, om $g = 1 = \frac{r^2}{y^2}$, saa $K dy = \frac{r^2 dy}{y^2}$ og $\int K dy = \frac{-r^2}{y}$; hvilket Integral fyldestgiøres ved at legge til, hvad $\int K dy$ bliver i det bekiendte Punkt A, da det er $\frac{r^2}{b}$, saa $\int K dy = \frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y}$.

Følgelig bliver $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{B}dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2\left(\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y}\right)}}$,

hvoraf sees, at da Nævneren i dette sidste Stykke ei gaaer høiere end til anden Høide, kan dette Integral $\int \frac{b\,B\sqrt{dy}}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - y^2\left(\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y}\right)}}$

ei alene integreres ved de imaginære logarithmiske Størrelser, men endog føres til en ligesaadan almindelig Skikkelse, som den er $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, hvilket strax iverksættes ved at gjøre $\frac{1}{y} = \frac{r^2 - 2b^2Bp}{2b^2B}$, hvorved man faaer $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{dp}{\sqrt{\left(\frac{2bB-r^2}{2b^2B}\right)^2 - p^2}}$, efter hvilken Forandring udi Differential-Ligheden $p = l$ udi §. 169.

Sammenligner man denne Tilfælde med den almindeligere §. 169, da bliver denne sidste overmaade simpel af Aarsag at $n = 1$. Thi om man virkelig multiplicerer $\frac{(l\sqrt{-1} + \sqrt{aa-ll}).(\sqrt{a^2-\beta^2} - \beta\sqrt{-1})}{2a^2\sqrt{-1}}$, og ligeledes $\frac{-(\sqrt{aa-ll} - l\sqrt{-1}).(\sqrt{a^2-\beta^2} + \beta\sqrt{-1})}{2a^2\sqrt{-1}}$, da faaer man, efter at Størrelserne tilbørlig ere blevne ophævede imod hverandre, $t = \frac{-2\beta\sqrt{-1}\sqrt{a^2-l^2} + 2l\sqrt{-1}.\sqrt{a^2-\beta^2}}{2a^2\sqrt{-1}}$

$= \frac{l\sqrt{a^2-\beta^2} - \beta\sqrt{a^2-l^2}}{a^2}$, og da $l = p$, bliver saaledes

$t = \frac{p\sqrt{a^2-\beta^2} - \beta\sqrt{a^2-p^2}}{a^2}$, hvori den bestandige Størrelse β, efter det nærværende Tilfældes Beskaffenhed nøiere bør bestemmes.

I den Henseende maa agtes, at $t = \frac{x}{y}$ er Cosinus til Vinkelen DCA, og følgelig, naar i A denne Vinkel, $= 0$ er $t = 1$. Videre da $\frac{1}{y} = \frac{r^2 - 2b^2Bp}{2b^2B}$, hvilket udi A, hvor $y = b$, forandres

dres til $l = p = \frac{r^2 - 2bB}{2b^2B}$, saa seer man strax, at da $a = \frac{2bB - r^2}{2b^2B}$, §. 167 er $\sqrt{a^2 - l^2} = 0$, saa man faaer $t = \frac{p\sqrt{a^2 - \beta^2}}{a^2}$, og da i A, $t = 1$ er $a^4 = a^2p^2 - \beta^2p^2$, hvoraf, naar β søges, faaes $-\beta^2 = \frac{a^2.(a^2 - p^2)}{p^2}$, men da efter det allerede sagte $(a^2 - l^2)$ eller $a^2 - p^2 = 0$, saa bliver $\beta^2 = 0$, og følgelig $\beta = 0$.

Dette giort, er da $at = p$, eller $(r^2 - 2bB)\,t = -2b^2Bp$, i hvilken Ligheds, naar i Steden for t sættes $\frac{x}{y}$, og i Steden for p dens Værdie af den forrige Ligheds $\frac{1}{y} = \frac{r^2 - 2b^2Bp}{2b^2B}$, da faaes i x og y Ligheden for den krumme Linie eller den søgte Løbe-Bane, hvilken tilkiendegives ved $y^2 = ((r^2 - 2bB)^2x^2 - 4b^2Bx\,(r^2 - 2bB) + 4b^4B^2)) : r^4$, og da $y^2 = x^2 + z^2$, faaes endelig Ligheden imellem de koordinerte Linier CK og KE, som bliver

$$z^2 = \frac{(4b^2B^2 - 4bBr^2)x^2 - 4b^2B(r^2 - 2bB)x + 4b^4B^2}{r^4},$$

hvilken Ligheds, man strax seer, er til en af Keile-Snittene, fordi Høiderne af de foranderlige Koordinater ei gaae over Quadraten.

§. 171.

Løbe-Banens fuldstændige Bestemmelse i den naturlige Kræfternes Hypothese.

Da derfor Ellipsen er den af Keile-Snittene, af hvilken man allerletteſt bringer alle de øvrige ud, ville vi sammenligne den fundne Ligheds med Ellipsens Ligheds, naar i den Abscisserne regnes fra Brende-Punktet f, siden man da faaer en Ligheds, omtrent af samme Skikkelse, som den seranførte.

Er da (Taf. 9. Fig. 12.) ACDB en Ellipse, hvis store Axel $DB = A$, Parametern $= p$, $fa = x$, da er det bekiendt af Algebre, at $fH = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - pA}$, saa $fD = \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - pA}$, $Da = \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - pA}) - x$, $aB = \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - pA}) + x$, og fordi i Ellipsen er altid $Da \cdot Ba : ab^2$, som Ellipsens store Axel til Parametern, saa faaes

$$y^2 = \frac{-px^2}{A} - \frac{px}{A}\sqrt{A^2 - pA} + \frac{1}{4}p^2.$$

Dersom med denne Ligned til Brende-Punktet af Ellipsen den forrige i Slutningen af §. 170 sammenlignes, da findes strax

1) Parametern af Løbe-Banen, thi $\frac{1}{4}p^2 = \frac{4b^2B^2}{r^4}$, og derfor er Løbe-Banens Parameter $= \frac{4b^2B}{r^2}$.

2) Dens store Axel, thi man faaer $\frac{-p}{A} = \frac{4b^2B^2 - 4bBr^2}{r^4}$, hvori, naar for p sættes den nylig fundne Værdie $\frac{4b^2B}{r^2}$, saa faaes $A = \frac{-br^2}{bB - r^2} = \frac{br^2}{r^2 - bB}$, som er den elliptiske Løbe-Banes Axel.

3) Da i Ellipsen den lille Axel, eller Ordinaten i Centret, altid er den midtlere proportionelle imellem den store Axel og Parametern, saa følger, at den lille Axel ere

$$= \sqrt{\left(\frac{br^2}{r^2 - bB} \cdot \frac{4b^2B}{r^4}\right)} = \frac{2b\sqrt{bB}}{\sqrt{r^2 - bB}}.$$

4) Deraf sees, at saa tidt som r^2 er mindre end bB, bliver $\sqrt{r^2 - bB}$ en umuelig Størrelse, følgelig den lille Axel imaginær, og den store negativ, hvoraf sluttes

a) At Løbe-Banen bliver i denne Tilfælde en hyperbolsk Linie, og derfor ikke egentlig

2) En

b) En Ellipse, uden saa tidt som r^2 er større end $2bB$.

c) Er $r^2 = bB$, da bliver $r^2 - bB = 0$, og saavel den lille som den store Axel $= \frac{1}{0}$, det er, de blive af en uendelig Størrelse, og derfor er Løbe-Banen i denne Tilfælde en Parabol.

d) I den egentlige Tilfælde igien, da Løbe-Linien er en Ellipse, bliver denne sidste forandret til en Cirkel, saafremt at begge Axler ere lige store, følgelig om $\frac{2b\sqrt{bB}}{\sqrt{r^2 - bB}} = \frac{br^2}{r^2 - bB}$, hvilket giver $r^4 = 4bBr^2 - 4B^2b^2$, hvilke Størrelser blive paa begge Sider lige store, saafremt at $2bB = r^2$.

5) Dersom i Ligheden, §. 170. $z^2 = \frac{4b^2B^2}{r^4}$ o. s. v. sættes $B = 0$, bliver Ligheden $z^2 = 0$ til en ret Linie Df, over hvilken den bevægte Ting bestandig maa gaae frem og tilbage, fordi Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen udi $D = 0$.

6) Videre findes Excentriciteten eller Brende-Punktets Afstand fra Centret $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 - pA} = \frac{2b^2B - br^2}{2r^2 - 2bB}$, hvoraf sees

a. At saa længe denne Distance er positiv eller bekræftende, er Kræfternes Center i det forreste Brende-Punkt F, det er, saa tidt som r^2 er mindre end $2bB$.

b. Derimod falder det i Brende-Punktet paa den anden Side Centret, om denne Distance bliver negtende.

7) For at finde Hastigheden i et hvert Punkt af den krumme Linie, maa man betiene sig af Ligheden §. 160, $V = \frac{Bb^2}{p^2}$, og bestemme i den igien Værdien af p af Ligheden §. 165, $p = \frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{B - \int K dy}}$,

hvilket beløber, i Følge §. 170, $p = \frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{B - \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{y}}}$, eller $p = \frac{b\sqrt{Bby}}{\sqrt{bBy + r^2(b-y)}}$, og følgelig $V = \frac{Bb^2}{p^2} = \frac{bBy + r^2(b-y)}{by}$,

Men $y = fb$ og $fb + Gb = DB$, følgelig er $\frac{br^2}{r^2 - bB} - y = GB = \frac{(b-y)r^2 + bBy}{r^2 - bB}$, følgelig $V = \frac{Gb.(r^2 - bB)}{by}$, men $y = fb$, følgelig bliver $V = \frac{Gb}{fb} \cdot \frac{r^2 - bB}{b}$, og Hastigheden $= \frac{\sqrt{Gb}}{\sqrt{fb}} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - bB}{b}}$, følgelig, da $\frac{r^2 - bB}{b}$ er en uforanderlig Størrelse, saa bliver Hastigheden altid proportionert $\frac{\sqrt{Gb}}{\sqrt{fb}}$.

8) Tiden af Bevægelsen angaaende, da er den efter det forhen sagte altid proportionert de elliptiske Snit fra Brende-Punktet af beregnede, thi i Følge det forhen sagte §. 162 er Tiden af Bevægelsen $\int \frac{ds.p}{b\sqrt{B}}$, hvilket i Ellipsen, om den Elliptiske Sektor kaldes S, beløber $\frac{2S}{b\sqrt{B}}$, og for den hele periodiske Tid $\frac{2R}{b\sqrt{B}}$, om det hele elliptiske Rum kaldes R.

Men man veed af Algebre, at enhver Ellipse er i sit innere Rum saa stor som en Cirkel, hvis Diameter er den midlere proportionelle imellem begge Ellipsens Axler, den store nemlig og den lille. Kaldes da Ellipsens store Axel A, dens Parameter p, bliver den lille Axel $= \sqrt{Ap}$, og Cirklen, hvilken er ligesaa stor som Ellipsen, dens Diameter $= \sqrt{A.\sqrt{Ap}}$. Følgelig bliver $\frac{2R}{b\sqrt{B}} = \frac{22}{28} \cdot \frac{2A\sqrt{Ap}}{b\sqrt{B}}$

Men §. 171. 1. bliver $p = \frac{4b^2B}{r^2}$, og derfor $\frac{2R}{bVB} = \frac{22}{28} \cdot \frac{2AV\overline{A.\frac{4b^2B}{r^2}}}{bVB}$

$= \frac{\frac{22}{7}AVA}{r}$, som er Tiden af det hele Omløb i den elliptiske Bane.

Man kan ligeledes bevise, at Banen er en Ellipse i den Tilfælde, da (T. X. F. 2.) Røre-Linien udi A er skiev paa Axlen, og at Kræfternes Center da ligeledes er i Brende-Punktet: Men i denne Tilfælde seer man selv, at de bestandige Størrelser for det Punkt A blive adskillige fra de i forrige Opløsning brugte, siden Perpendiklen paa Røre-Linien er ikke nu meer den samme Linie, som Bære-Linien udi A.

§. 172.

Af det allerede beviiste forstaaes fuldkommen, hvad vi have sagt §. 211 i Forelæsningerne; Thi da vi her have beviist, at Cirkler ikke beskrives af et Legeme, der kastes ud i en given Afstand fra Kræfternes Center, uden i det Tilfælde alene, da $2bB = r^2$, saa skeer Cirkel-Bevægelsen altid med den Hastighed, til hvilken svarer den Høide $B = \frac{r^2}{2b}$.

Det §. 211 i Forelæsningerne sagte bliver beviist.

Da nu den naturlige Tyngde eller Tyngden her hos os er sat $= 1$, saa bliver $B : \frac{1}{2}b = \frac{r^2}{b^2} : 1$, thi denne Proportion er det samme, som den foresatte Lighed $B = \frac{r^2}{2b}$. Men, naar Tyngden hos os $= 1$, er den, som svarer til en Distance b fra Kræfternes Center i forkeert Forhold af Quadraten af Distancen $= \frac{r^2}{b^2}$. Følgelig

sees heraf atter igien, hvad vi forhen have sagt i §. 187 Forel. og i den til samme §. neden under giorte Anmerkning, at Bevægelsen da alene gik for sig i Cirkler, naar den til Hastigheden svarende Høide forholdt sig til den halve Afstand fra Kræfternes Center, som den i Udkastnings Punktet drivende Central-Kraft til Tyngden her hos os.

Da nu videre Bevægelsen maa skee i Parabolen saa tidt som $r^2 = bB$, §. 171. 4. c. saa bliver Høiden, som i Udkastnings-Punktet svarer til Hastigheden $= B = \frac{r^2}{b}$. Men denne Høide er i Cirklen $\frac{r^2}{2b}$ efter det nylig sagte, følgelig forholde sig disse to Høider $= 2 : 1$. Saa den parabolske Bevægelse udfordrer en Hastighed, hvis Høide, som svarer til den, er dobbelt saa stor som den, der ved Faldet af Tyngden hos os giver den Hastighed, hvormed den cirkulære Bevægelse kan skee.

Er $r^2 < bB$ og følgelig B større end $\frac{r^2}{b}$, det er, dersom den til Faldet svarende Høide er større end den, som behøves til den parabolske Bevægelse, da er Banen altid en Hyperbol. §. 171. 4. a.

Men er $r^2 > bB$, da er Banen altid en Ellipse, §. 171. 4. b. det er, dersom B er $< \frac{r^2}{b}$ eller mindre end den Høide, som svarer til Hastigheden i den parabolske Bevægelse. Fremdeles, at Kræfternes Center er snart det ene, snart det andet Brende-Punkt, eftersom at Høiden, der svarer til Hastigheden, er enten større eller mindre end den, som behøves til Cirkel-Bevægelsen, sees umiddelbar af §. 171. 6. a. b.

§. 173.

§. 173.

I Henseende til Tiderne, hvori flere Legemer bevæges omkring et og det samme Kræfternes Center, er endnu som noget Betydeligt at agte, at Omløbs-Tiderne af disse Legemer, saa tidt som de bevæges i Ellipser, ere under sig som Quadrat-Rødderne af Ellipsernes store Axler deres Kubis (in ratione axium majorum Sesquiplicata). Thi efter §. 171 er den hele Omløbs-Tid $= \frac{22}{7}A\sqrt{A}$, og derfor proportionert $A\sqrt{A} = \sqrt{A^3}$.

Omløbs-Tiderne ere som Quadrat-Rødderne af Distancernes Kubis.

§. 174.

Gaaer man fort paa samme Maade, som den her er bleven viist, da kan man ligeledes finde Løbe-Banen i den Tilfælde, da Central-Kraften er som Distancen, og i nogle faa andre Tilfælde. Gior man sig i den første den Møie, paa samme Maade som før at søge Ligheden, og at sammenligne samme med Ellipsens Lighed til dens Center, da vil man finde, at saa tidt som Central-Kraften var som Distancen fra Kræfternes Center lige frem tagen, blev Løbe-Banen en Ellipse ligesaavel som i den forrige Tilfælde, men til hvis Center Kræfterne drev den Ting, som bevægedes, i Steden for at drive den som før til Brende-Punktet.

Banen er en Ellipse, til hvis Center Central-Kraften driver, om denne sidste er som Distancen fra sit Center.

Men da denne Hypothese i øvrigt ingen Nytte har, fordi den ei er overeenstemmende med Naturen, vil jeg med de den angaaende Udregninger ei spilde Læseren Tiden, allermest, da jeg ikke kan unde lade at tale med et Par Ord om nogle af de Løbe-Baner, som i de letteste Tilfælde saaes i den Hypothese, da Central-Kraften er som Kubus af Distancen forkeert, siden man deraf seer, hvad Kræfter i Naturen

Dersom Central-Kraften var som Kubus af Distancen fra Solen, kunde de Ting, som af den bevægedes falde i en endelig Tid indtil Centret, uden igien at be-

væge sig ud fra det.

turen let kunde giøre, at Tingene engang maatte efter en vis Tid falde ind i det Punkt, eller det Center, omkring hvilket Kræfterne drive det i den anden Hypothese, da de ere som Quadraten af Distancen forkeert, uden at de kunde i denne sidste enten komme nærmere til det, eller gaae længere ud fra det.

Til den Ende kan agtes, at om alle Benævninger tages som før, alene at (Taf. X. Fig. 4.) naar Tingen kastes skiev ud paa AC udi A, Distancen AC kaldes d, og ved b forstaaes Perpendiklen paa Røre-Linien i dette Punkt, saa $\frac{b}{d}$ er Sinus af Røre-Liniens Vinkel udi A med AC, da bliver Central-Kraften $\frac{r^3}{y^3}$, fordi den skal være som Kubus af Distancen forkeert, og da Ligheden til den krumme Linie, tagen imellem Perpendiklen paa Røre-Linien og Bære-Linien, er $\int K dy = \int \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, §. 163. saa bliver $\frac{r^3 dy}{y^3} = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, og naar de bestandige Størrelser bestemmes, som før, af det Integralerne blive udi A, faaes $\frac{Bp^2 - Bb^2}{p^2} = \frac{(y^2 - d^2) r^3}{2d^2 y^2}$, hvilken Ligbed uden videre Forandring kan vedligeholdes. Om man sætter $B = \frac{r^2}{2d^2}$, da faaes denne Ligbed for den krumme Linie $p = \frac{by}{d}$, eller $y : p = b : d$, hvilket viser, at da $b : d = \frac{CG}{CA}$ eller Sinus CAF og $p : y$, er Sinus CBD, saa er denne krumme Linie overalt af den Egenskab, at den Vinkel Bære-Linien giør med Tangenten, eller med den krumme Linie, er bestandig, følgelig er denne sidste den saa kaldte logarithmiske Spiral, eller af det Slags Spiraler, som indbefattes under den almindelige Ligbed (Taf. X. Fig. 4.) $ACB = t \operatorname{Log.} \frac{y}{a}$, hvor t er, som man veed af Algebre, Tangenten til Vinklen CBD eller CAF.

Da nu §. 160 Hastigheden er $= \sqrt{\frac{Bb^2}{p^2}} = \frac{d\sqrt{B}}{y}$, fordi $p = \frac{by}{d}$ efter det nylig sagte; saa følger, at i denne enkelte Tilfælde bliver altid Hastigheden forkeert proportionert Distancen fra Kræfternes Center, eller det asymptote Punkt C i Spiralen.

Videre, da man veed af Algebre, at Rummene i denne Spiral, eller dens Centrale Snit ere altid proportionerte Quadraterne af BC, saa er den hele Tid af Bevægelsen propotionert Quadraten af CA, følgelig Tiden for Buen $AB = CB^2 - CA^2$, og derfor endelig, uagtet at den Ting, som bevæges, først kan giøre uendelig mange Omløb omkring C, før den falder omsider ind i dette Punkt.

Dersom man, som forhen, §. 167, udfører Ligheden i Henseende til de retlinede Ordinater t og y, da faaes i dette Tilfælde

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{B}\,dy}{\sqrt{By^4 - Bb^2y^2 - \frac{r^3y^4}{2d^2} + \frac{1}{2}r^3y^2}},$$

som i Almindelighed kan siges at henhøre til de logarithmiske Integraler, og som man veed til Cirklen, saa tidt som disse sidste ere umuelige, da i dette Tilfælde igien den søgte krumme Linie eller Bane bliver en algebraisk Linie, eller ikke. Da disse Tilfælde ei ere af nogen betydelig Nytte, ville vi alene opholde os ved den eneste iblant dem alle, da $\frac{b\sqrt{B}\,dy}{\sqrt{By^4 - Bby^2 - \frac{r^3y^4}{2d^2} + \frac{1}{2}r^3y^2}}$ er integrabel, i den enkelte Betingning nemlig, da $B = \frac{r^3}{2b^2}$, siden Ligheden derved bliver simpel

hen denne anden $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{b\sqrt{B}\,dy}{y^2\sqrt{\frac{1}{2}t^3\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{d^2}}}} = \frac{dbdy}{y^2\sqrt{d^2-b^2}}$,

og følgelig $\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-db}{y\sqrt{d^2-b^2}} + C.$

Men $\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ er en Cirkel-Bue, hvis Sinus er t, og hvis Halv-Diameter er $= 1$, følgelig er $-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ samme Bues Forskiel fra en Quadrant, saa derfor (Taf. X. Fig. 5.) om fra C, som Kræfternes Center, slaaes med Halv-Diametern CD en Cirkel DBD, da bliver, om CG kaldes t, Buen $DB = -\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, og da, naar i A, $t = 0$, $y = d$; bliver $C = -\frac{b}{\sqrt{d^2-b^2}}$. Videre, da $\frac{b}{d}$ er Sinus til Vinklen CAH udi A, og følgelig $\sqrt{d^2-b^2}$ samme Vinkels Cosinus; hvorimod Tangenten af den altid er Sinus dividert ved Cosinus $= \frac{b}{\sqrt{d^2-b^2}}$, saa faaes, om samme Tangent til Vinklen CAH kaldes T, $DB = \frac{Td}{y} - T$, følgelig er Løbe-Banen den saa kaldte hyperbolske Spiral, udi hvilken i Almindelighed DB. FC er altid den samme Størrelse.

Følgelig bliver og Tiden i denne Spiral, ligesom i den forrige, endelig, nemlig proportionert $d - y$, §. 162. Tingen falder, efter uendelig mange Løb omkring C, omsider ind i Kræfternes Center, og Bevægelsen hører op.

3. Af

2.

Af den givne krumme Linies eller Lobe-Banens Beskaffenhed at finde Central-Kræfterne.

§. 158.

Første Tilfælde.

Naar den krumme Linie er ubevægelig, uden at rulle med en Vinkel-Bevægelse om Kræfternes Center.

Af den givne Lobe-Bane at finde Central-Kræfterne.

Da §. 163. $K dy = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, og altsaa Central-Kraften $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}$, saa beroer den hele Sag paa at bestemme $\frac{dp}{p^3 dy}$ af den foresatte Linies Egenskaber, for deraf at finde K, da B og b tilkiendegive som før den Høide, der svarer til Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen, og den der paa Røre-Linien nedkastede Perpendikel.

Exempel 1. Er den givne krumme Linie en af Keile-Snittene i Almindelighed, imod hvis Brende-Punkt D Central-Kraften driver, (Taf. IX. Fig. 14.) da veed man af det, som beviises udi den koniske Geometrie om Keile-Snittene, at naar DE er Bære-Linien, EF Perpendiklen paa Tangenten, CD Perpendiklen fra Kræfternes Center paa Røre-Linien, FG Perpendiklen paa Bære-Linien kastet ned fra F, da er EG = den halve Parameter = $\frac{1}{2}\pi$, og ED:CD = EF:EG eller $y : p = EF : \frac{1}{2}\pi$, men uden at bekymre sig videre om Værdien af EF i endelig Størrelse, kommer man strax til Differential-Ligheden imellem y og p, ved at agte, at Halv-Diametern af Røre-Cirklen er §. 158. 2. $\frac{ydy}{dp}$, og som man veed af Algebre, altid i Keile-Snittene = $\frac{4EF^3}{\pi^2}$, saa man faaer $\frac{4EF^3}{\pi^2} = \frac{ydy}{dp}$,

og $EF = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 \cdot y dy}{4dp}}$, følgelig bliver $y : p = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 \cdot y dy}{4dp}} : \frac{1}{2}\pi$, og $y^3 : p^3 = \frac{\pi^2 \cdot y dy}{4dp} : \frac{1}{8}\pi^3$. Altsaa $\frac{y^3\pi}{2p^3} = \frac{dy}{dp}$. Sættes dette i Værdien af $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}$, da faaes $K = \frac{4Bb^2}{y^2\pi}$, og da $\frac{4Bb^2}{\pi}$ er en bestandig Størrelse, bliver altid $K = \frac{1}{y^2}$, eller Central-Kraften, som Quadraten af Distancen forkeert.

Andet Exempel. Er den krumme Linie en Spiral, en af de saa kaldne Logarithmiske f. Ex., da findes Central-Kraften overmaade let, fordi i disse Linier Vinklen af Ordinaten med Tangenten er bestandig, og følgelig Forholden imellem Bære-Linien y og Perpendiklen p altid bestandig $= 1 : a$, derfor $p = ay$, saa $dp = ady$, og derfor $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy} = \frac{2Bb^2 ady}{a^3 y^3 dy} = \frac{Bb^2}{a^2 y^3}$, følgelig er K altid i disse Spiraler proportionert $\frac{1}{y^3}$, eller som Kubus af Distancen forkeert.

Man finder ligeledes i alle andre Tilfælde K, alene at man vil giøre sig den Umage, først at bestemme p udi y, saa at ingen anden foranderlig Størrelse bestemmer dens Værdie.

§. 176.

Anden Tilfælde.

Ligeledes, naar Løbe-Banen er bevægelig omkring Kræfternes Center.

At finde Central-Kraften, naar Løbe-Banen er bevægelig, og dreier sig bestandig om Kræfternes Center.

Maaden at søge Central-Kraften paa, er her omtrent den samme, som i forrige Tilfælde, alene at man bestemmer $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}$, saaledes,

saaledes, som Spørsmaalets Natur det udkræver; i Henseende til hvilket sidste man maa agte, at da den Ting, som bevæges omkring Kræfternes Center, haver i Følge det antagne en dobbelt Bevægelse, først sin egen i Løbe-Banen, om nemlig denne hvilede; for det andet, Løbe-Banens Bevægelse, saa beskriver den derfor ved denne dobbelte Bevægelse en nye Linie, hvis Element man maa søge, og ved dets Hielp Perpendiklen til denne nye Linie, for deraf at bestemme den ubekiendte p i Ligheden $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy}$.

Er da (Taf. X. Fig. 6.) AaB den givne Bane, som bevæger sig om C, imidlertid at en Ting i samme bevæges: C Kræfternes Center, ca et Element af Banen, betragtet, som ubevægelig. Da er det klart, at om, imidlertid at Elementet ca igiennemløbes, Banen selv bevæger sig efter ab om C, da beskriver imidlertid den Ting, som bevæges, virkelig den Bue cb. Er da ae Røre-Linien paa AB udi $c = t$, dens Perpendikel fra C $Ce = p$. Ligeledes bcd Røre-Linien udi c, Perpendiklen paa samme fra C, Cd, Hastigheden i AB igiennem ac $\sqrt{b}$, i cb derimod $\sqrt{H}$, saa bliver $ac : cb = \sqrt{b} : \sqrt{H}$; men $ac = \frac{ydy}{ce} = \frac{ydy}{t}$, derfor og $\sqrt{b} : \sqrt{H} = \frac{ydy}{t} : \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{ydy}{t} = cb$. Dersom nu Vinkel-Bevægelsen i Banen AB sættes at forholde sig til Vinkel-Bevægelsen i den nye Linie, hvis Element er $cb = 1 : v$, saa er det klart, at Cirkel-Buerne $cg : cf = 1 : v$, følgelig $\frac{pdy}{t} : cf = 1 : v$, og at $\frac{vpdy}{t} = cf$. Deraf kan Perpendiklen Cd videre bestemmes, hvis Værdie bestemmer K, sat i Steden for p; thi $cb : cf = y : Cd$, eller $\frac{ydy}{t} \cdot \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{b}} : \frac{vpdy}{t}$

$= y : vp. \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{H}} = Cd$, en Værdie, som indbefatter samtlig det foresatte Spørsmaals adskillige Bestemmelser, og i hvis Brug i Henseende til Værdien af K nu intet videre fattes, end at i Cd ingen anden Størrelse findes, end de alene, som henhøre til den nye Linie, hvis Element er cb.

For at komme til dette sidste, maa agtes, at da vi have en dobbelt Værdie af $cb = \sqrt{cf^2 + bf^2} = \frac{ydy}{t} \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{b}}$, en Ligheds, hvori atter igien alle Spørsmaalets Betingninger ere indbefattede, hvilken forandres (om man agter at $bf = dy$, fordi Banens Bevægelse er en Vinkel-Bevægelse omkring C) til $\frac{v^2p^2dy^2}{t^2} + dy^2 = \frac{y^2dy^2H}{t^2b}$, eller $bv^2p^2 + bt^2 = y^2H$.

Dette forudsat, følger af §. 160, at den virkelige Hastighed igiennem cb eller $\sqrt{H} = \frac{b\sqrt{B}}{Cd}$, følgelig $H = \frac{b^2B.H}{v^2p^2b}$, og $b = \frac{b^2B}{v^2p^2}$, hvilken Værdie om sættes i den forhen givne Ligheds $bv^2p^2 + bt^2 = y^2H$, saa faaes $H = \frac{v^2p^2b^2B + b^2Bt^2}{v^2p^2y^2}$, hvilke Værdier af H og b, om sættes i $Cd = \frac{vp.\sqrt{b}}{\sqrt{H}}$, da faaes $Cd = \frac{vyp}{\sqrt{t^2 + v^2p^2}}$, og fordi $t^2 = y^2 - p^2$, er $Cd = v^2p^2 - v^2y^2 + y^2$. Kaldes nu Differentialet af Cd, dCd, da er $-\frac{2dCd}{Cd^3}$ Differentialet af $\frac{1}{Cd^2}$. Differentieres da $\frac{1}{v^2p^2 + v^2y^2 - y^2}$, saaledes, at v tages bestandig (thi i ingen anden Tilfælde bliver Hastigheden simpel hen som $\frac{1}{CD}$, hvilket den dog

dog bør være, men en Function af v og p) det er, saa Vinkel-Bevægelsen i Linien AB haver overalt til den i den nye Linie, hvis Element er cb en bestandig Forhold, saa findes, naar i $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy}$, i Steden for $\frac{dp}{p^3}$, $\frac{2dCd}{Cd^3}$ behørig omsættes

$$K = \frac{2b^2Bdp}{v^2p^3dy} + \frac{2b^2B(v^2-1)}{v^2y^3}.$$

§. 177.

Disse Kræfters Beskaffenhed forklares videre.

Man seer deraf, at Forskiellen imellem de Kræfter, som drive en Ting i den ubevægelige Bane, og i denne igien, naar den bevæges paa før sagte Maade om Kræfternes Center, beløber til $\frac{2b^2B(v^2-1)}{v^2y^3}$, og følgelig, at denne Forskiel i Kræfterne altid er $= \frac{1}{y^3}$, eller forkeertviis proportionert Kubus af Distancen; thi det er klart, at det første Stykke $\frac{2b^2Bdp}{v^2p^3dy}$ er den Kraft, der driver imod Centret i den ubevægelige Bane, fordi i den $K = \frac{2b^2Bdp}{p^3dy}$, og B forandres alene til $\frac{B}{v^2}$, fordi Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen maa og være Bevægelsen af AB omkring Kræfternes Center proportionert, saa om Hastigheden i AB betragtet som ubevægelig, kaldes c, bliver $1 : 1 = c : \sqrt{B}$, og følgelig $c^2v^2 = B$ og $c^2 = \frac{B}{v^2}$. Hvoraf sees

1) At om $v = 1$, det er, om Vinkel-Bevægelsen er alene den, som Tingen selv har, og Banen ingen sig egentlig, da bliver simpel hen $K = \frac{2b^2Bdp}{p^3dy}$, og altsaa Central-Kraftens Værdie den samme, som i den ubevægelige Bane, som den og bør være.

2). At

2) At om v er større end 1, formerer Central-Kraften i den bevægelige Bane den i den ubevægelige, saa denne derfor gaaer frem ad.

3) Er v mindre end 1, formindsker den sidste Deel af Central-Kraften den første, saa Banen gaaer tilbage.

4) Og følgelig kan den selvsamme Kraft, som driver en Ting i en ubevægelig Bane, drive den i denne samme Bane, naar den paa før sagte Maade bevæges om Kræfternes Center; alene at Central-Kraften formeres eller formindskes om en anden Central-Kraft, hvilken er som Kubus af Distancen forkeert.

Exempel.

Vil man af det forhen anførte finde, hvad Kraft der i Keile-Snittene, og om man vil, i Ellipsen i Særdeleshed, skal legges til den Central-Kraft, hvilken er som Quadraten af Distancen forkeert, paa det at disse kunne med en bestandig Vinkel-Bevægelse (Motu Absidum) rulle om Kræfternes Center, da haver man alene her at agte, som forhen, at i Keile-Snittene og, om man vil, i Ellipsen i Særdeleshed, er $\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{2}y^2\pi}{p^3}$; hvoraf faaes $K = \frac{4b^2B}{v^2y^2\pi} + \frac{2b^2B.(v^2-1)}{v^2y^2}$.

Ottende

Ottende Tillæg.

Om Kanalernes perpendikulære Trykning af de Legemer, som bevæge sig ned over dem.

§. 178.

Vi have i det foregaaende §. 32 seet, at saa tidt som tunge Ting bevæge sig ned over eller op efter krumme Linier, at de da i denne Bevægelse ei alene yttrede en Kraft efter den krumme Linies Rore-Linie, men og en anden perpendikulær paa dens Elementer, hvis Størrelse var $\frac{gdx}{ds}$. Vi handlede der ikke videre om denne Kraft, fordi vi havde endnu ikke talt om Centrifugal-Kraften, uden hvilken disse Betragtninger ei kunde udføres. Men da dens Beskaffenheder nu ere bekiendte, ville vi kortelig vise, hvorledes alle de herhid hørende Spørsmaal i Almindelighed kunde opløses.

I de tunge Tings Fald igiennem krumme Kanaler beroer disses Trykning tildeels paa Centrifugal-Kraften.

§. 179.

Saa tidt som en Tyngde falder eller stiger over en krum Linie med en vis Hastighed, og Liniens Modstand forhindrer den i at bevæge sig frit og uhindret, da maa nødvendig af Hastigheden alene en Trykning paa Liniens Elementer blive tilveiebragt. Thi da (Taf. X. Fig. 1.) den over AE stigende eller faldende Ting altid søger at bevæge sig ud efter Tangenten EF af den krumme Linie, men formedelst

dennes Modstand, som bestandig holder Legemet i den krumlinede Bevægelse, dette ikke kan skee, saa maa nødvendig i alle Liniens Elementer en Kraft, som FG, immer drive den Ting, der bevæges, ind ad imod den krumme Linie.

Denne Kraft maa net op være den samme, som den er, hvormed den Ting, der bevæges, søger at brekke Linien, for siden at bevæge sig frit fort efter Tangenten. Følgelig er den saa stor som dette Legemes centrifugale Kraft, betragtet i sin absolute Størrelse, det er; for saa vidt som det søger at bevæge sig ud fra Centret af den Cirkel, hvilken i det Punkt G af den krumme Linie rører denne sidste og falder ind over et af dens Elementer.

§. 180.

Den Trykning, Centrifugal-Kraften foraarsager, bestemmes.

Følgelig bestemmes let den Trykning paa den krumme Linies Elementer, som kommer af Hastigheden alene. Forudsat; at denne sidste er bekiendt. Thi denne Trykning er den selvsamme, som Centrifugal-Kraften i en Cirkel, hvis Halv-Diameter er Rore-Cirklens Halv-Diameter i det Punkt G, og i hvilken Hastigheden er den bekiendte Hastighed, hvormed Tingen bevæges udi G.

§. 181.

Kaldes Høiden, som svarer til denne Hastighed, h, Rore-Cirklens Halv-Diameter r, den naturlige Tyngde $= 1$, den søgte Centrifugal-Kraft $= x$, da er, efter § 187. F. og den til samme giorte Anmerkning, $h : \frac{1}{2}r = x : 1$, følgelig bliver denne Centrifugal-Kraft, følgelig og den Trykning paa Elementerne af den krumme Linie, som kommer af Hastigheden alene $= \frac{2h}{r}$, altid nemlig den samme, som i

Cirkel-

Cirkel-Bevægelsen, naar i denne sidste Rore-Cirklens Halv-Diameter antages som Halv-Diameter, $= r$, og Hastigheden i denne Bevægelse $= \sqrt{h}$, er derimod Tyngden $= g$, er Centrifugal-Kraften $= \frac{2gh}{r}$.

§. 182.

Ligedes Kanalens hele Trykning.

Følgelig bliver §. 178. 179. den hele Trykning T paa enhver krum Linies Elementer, over hvilke en Tyngde drives af Kræfter, der virke altid efter parallele og vertikale Direktioner, $T = \frac{2h}{r} \pm \frac{gdx}{ds}$, hvorafi enkelte Tilfælde altid bør bestemmes, hvad Styrke Siderne af den Kanal bør have, i hvilken et Legeme bevæges, som drives af visse Kræfter og med en vis Hastighed.

I Almindelighed derimod, om den perpendikulære Kraft, som Kræfterne foraarsage, kaldes P, bliver den hele Trykning $\frac{2h}{r} \pm P$.

§. 183.

I hvad Tilfælde Kanalen ei trykkes af de faldende Tyngder.

Vi sætte i §. 182. $T = \frac{2h}{r} \pm P$, af den Aarsag, at den Trykning $\frac{gdx}{ds}$, som kommer af de hastiggiorende Kræfters Virkning, kan, i Almindelighed betragtet, snart virke efter samme Direktion, som Centrifugal-Kraften, snart efter en imodsat. I det første Tilfælde søge begge med fælles Magt at brække Kanalen eller den krumme Linies Elementer. I det sidste trykkes den krumme Linie ikke uden af Forskiellen imellem begge.

Saafremt derfor, at disse Kræfter ere hverandre imodsatte og lige store, da trykkes Kanalens Dele eller Elementerne af den krumme Linie aldeles ikke, følgelig skeer da Bevægelsen frit og uhindret i den

samme Linie, hvori Legemet ellers skulde med en ufrie Bevægelse gaae fort.

§. 184.

Dette stemmer fuldkommen med hvad vi forhen have sagt §. 184 Forel., at nemlig den Deel af Centripetal-Kraften, som er perpendikulær paa den krumme Linie, altid maa være saa stor, som Centrifugal-Kraften, betragtet i Henseende til Rore-Cirklens Center. Denne Lighed imellem Central-Kræfterne er videre Aarsag i, at vi §. 158 og følg. ikke have bekymret os videre om Centrifugal-Kraften.

§. 185.

Hvad Trykningen bliver, naar Kræfterne, som foraarsage Faldet, virke efter parallele vertikale Direktioner.

Dersom ved g forstaaes en Kraft, der paa samme Maade, som Tyngden, altid virker efter vertikale Direktioner med en altid ensdan Tyngde, da er Trykningen af de faldende Ting $\frac{2b}{r} + \frac{gdx}{ds}$. §. 182. Vi ville oplyse med nogle faa Exempler, hvorledes heraf Trykningen paa Liniernes Elementer kan findes, og til den Ende først erindre, at naar (Taf. X. Fig. 7.) AC er den krumme Linie, hvis Spitse er i A, da er paa den horizontale Linie $Ad = x$, $df = y$.

§. 186.

Hvad Trykningen er over rette Linier.

Dette forudsat. Skal da Rore-Cirklens Halv-Diameter være uendelig stor i alle Punkter af AC. Det er. Om AC forandres til den rette Linie AL, da bliver, fordi $r = \infty$; $\frac{2b}{r} + \frac{gdx}{ds} = \frac{gdx}{ds}$. Er AK vertikal, KL horizontal, $AK = a$, $Kl = b$, $AH = y$,

da

da bliver $x = \frac{by}{a}$ og $ds = \frac{dx\sqrt{b^2+a^2}}{b} = \frac{dx.\,AL}{LK}$, følgelig $\frac{gdx}{ds}$ $= \frac{g.\,AK}{AL}$.

Saa Trykningen af Tyngden over alle skraaeliggende Planer er til Trykningen af Tyngden i Vertikalen, som Planets Længde til Planets Grund-Linie.

§. 187.

Er den Linie, hvorover en Tyngde falder, en Cirkel AEG, og den naturlige Tyngde $= g$, $AD = x$, $AF = r$, da er Pressionen $\frac{2hg}{r} + \frac{gdx}{ds}$. Men fordi udi E, $h = DE = \sqrt{2rx - xx}$, saa bliver $\frac{2hg}{r} = \frac{2g\sqrt{2rx-xx}}{r}$. Videre. Da $ds = \frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, saa bliver $\frac{gdx}{ds} = \frac{g}{r}\sqrt{2rx-xx}$. Følgelig bliver overalt i Cirklen den hele Pression $= \frac{3g}{r}\sqrt{2rx-xx}$. Og følgelig er den altid tre gange saa stor, som den Trykning, der kommer af den hastiggiørende Kraft alene. Ligeledes i Cirkler.

Deraf sees, at udi G, hvor AG er en Quadrant, bliver $\frac{3g}{r}\sqrt{2rx-xx} = 3g$, fordi $x = r$, saa Trykningen der er tre gange saa stor som Trykningen af Tyngden, fuldkommen saaledes, som vi forhen have beviist den at være §. 155.

§. 188.

Er Linien AC en Parabol, hvis Parameter $= p$ og $px = y^2$. Da bliver $ds = dx.\sqrt{\frac{4px+p^2}{4x}}$ og $\frac{gdx}{ds} = g\sqrt{\frac{4x}{4x+p}}$, som er den I Parabolen, naar Axlen ligger horizontal.

den Deel af Pressionen, der foraarsages af de hastiggiørende Kræfter.

Den anden Deel af den, som foraarsages af Centrifugal Kraften, eller $\frac{2hg}{r} = \frac{2g \cdot y}{r} = \frac{2g\sqrt{(px)}}{r}$. Men man veed, at til et hvert Punkt udi Parabolen er $r = \frac{\sqrt{(4x+p)^3}}{2\sqrt{p}}$, som i §. 206. F.

$= \frac{(p+4x)\sqrt{p^2+4px)}}{2p}$, følgelig faaes $\frac{2hg}{r} = \frac{4gp\sqrt{xp}}{(p+4x)\sqrt{p^2+4xp}}$,

saa den hele Trykning bliver $\frac{g\sqrt{4x}}{\sqrt{4x+p}} + \frac{4gp\sqrt{px}}{(p+4x)\sqrt{p^2+4xp}}$.

§. 189.

Ligeledes, naar Axlen ligger vertikal.

Dersom de krumme Linier, som AE, (Taf. X. Fig. 8.) i Steden for at ligge horizontal med deres Axel, have den tvertimod vertikal, som AK, og den hastiggiørende Kraft altid virker i den Direktion BF parallel AK, da om denne Kraft forestilles ved B*a*, og opløses i de to andre B*b* og *ba*, den sidste parallel Tangenten, den første derimod perpendikulær paa Axlen, saa er det klart, at denne perpendikulære Kraft da trekker fra Linien, og bliver den centrifugale imodsat. Man seer videre; at saa tidt som den forrige Værdie af den perpendikulære Kraft $\frac{gdx}{ds}$ vedligeholdes; Da falde Abscisserne AG over Axlen AL, derfor hvad i det forrige Tilfælde var Abscisse, faaer nu samme Benævning som Ordinate, og omvendt.

§. 190.

Vi ville oplyse dette ved et Exempel i Parabolen. Ligger denne Linies Axel vertikal, da bliver $x^2 = py$, $dy = \frac{2xdx}{p}$, og $ds = \frac{dx}{p}\sqrt{p^2+4x^2}$, saa at derfor $\frac{gdx}{ds} = \frac{gp}{\sqrt{p^2+4x^2}}$, som er den Deel af den perpendikulære Pression, der kommer af den hastiggiorende Kraft g, hvilken vi her antage saa stor som den naturlige Tyngde.

Den anden Deel af Trykningen, som foraarsages af Centrifugal-Kraften, er $\frac{2bg}{r}$, men $r = \frac{(p^2+4x^2)\sqrt{p^2+4x^2}}{2p^2}$. Og saaledes bliver $\frac{2bg}{r} = \frac{4gpx^2}{(p^2+4x^2)\sqrt{p^2+4x^2}}$. Thi $b = \frac{x^2}{p}$. Men disse tvende Kræfter virke efter imodsatte Drive-Linier. Den hele Trykning bliver derfor $= \frac{gp}{\sqrt{p^2+4x^2}} - \frac{4px^2g}{(p^2+4x^2)\sqrt{p^2+4x^2}}$.

Da x her betyder den halve Ordinate, saafremt da, at man vil, at den, som forhen, skal betyde Abscissen, maa i Steden for x^2 sættes px, da man faaer den hele Trykning $= \frac{gp}{\sqrt{p^2+4px}} - \frac{4p^2gx}{(p^2+4px).\sqrt{p^2+4px}} = \frac{p^2g}{(p+4x)\sqrt{p^2+4px}}$, i hvilken Værdie x betyder Abscissen AH.

§. 191.

Saafremt at de faldende Ting begynde deres Fald over Linier, som hindre det, med en vis bestemt Hastighed, der svarer til den Høide a, da forandres derved ikke den Virkning, som kommer af de hastiggi-

Maade at bestemme Trykningen, naar Begyndelsen af Faldet skeer med

en vis given Hastighed.

Hastiggiørende Kræfter, følgelig heller ikke den Deel af Trykningen $\frac{gdx}{ds}$. Men alene den, som kommer af Centrifugal-Kraften, §. 175. Forel., hvilken sidste altid voxer efter Hastighedens Quadrat.

Da derfor over de rette Linier Centrifugal-Kraften $= 0$, saa er det i Faldet over dem det samme, hvad heller at de tunge Ting begynde at falde med en vis given Hastighed hen efter Planets Direktion, eller ikke.

§. 192.

Exempel i Cirklen.

I de krumme Linier derimod haver en Centrifugal-Kraft altid Sted. Saaledes i vores forrige Exempel i Cirklen. §. 182. Om man der sætter, at Faldet blev begyndt udi A med en Hastighed, som svarede til den Høide a, da blev Hastigheden i E den, som svarede til $\sqrt{2rx - xx} + a$, og derfor Centrifugal-Kraftens Trykning $= \frac{2g\sqrt{2rx-xx}+2ga}{r}$. Følgelig bliver i dette Tilfælde den hele Trykning udi $E = \frac{g}{r}\sqrt{2rx-xx} + \frac{2g\cdot\sqrt{2rx-xx}+2ga}{r}$ $= \frac{3g}{r}\sqrt{2rx-xx} + \frac{2ag}{r}$.

§. 193.

Ligeledes i Parabolen.

Ligeledes i Parabolen. Hastigheden bliver den, som svarer til Høiden $a + \sqrt{px}$. Om nemlig, som i §. 188, Axlen ligger horizontal. Følgelig bliver Centrifugal-Kraftens Trykning, som var $= \frac{2bg}{r} = \frac{2ag+2g\sqrt{px}}{r} = \frac{(2ag+2g\sqrt{px})\cdot 2p}{(p+4x)\sqrt{p^2+4px}}$. Saaledes bliver den hele Trykning $= \frac{g\sqrt{4x}}{\sqrt{4x+p}} + \frac{(2ag+2g\sqrt{px})\cdot 2p}{(p+4x)\sqrt{p^2+4px}}$.

§. 194.

§. 194.

Almindelig Bestemmelse af Kanalens Trykning, naar Kræfterne drive bestandig imod et Punkt.

Man kan ligeledes bestemme Trykningen i andre Hypotheser af de virkende Kræfter. For Ex. Om disse sidste drive imod et vist Punkt, og ere i hvad Forhold af Distancen fra dette Punkt af, som man selv vil. Thi i dette Tilfælde er, i Følge §. 48, den perpendikulære Kraft paa den krumme Linies Elementer $= \frac{K\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds}$.

Fremdeles er Hastigheden $= \int -Kdy + B$, saa Centrifugal-Kraften heraf altid kan bestemmes. Følgelig og den hele Trykning. Men da de herhid hørende Opløsninger ikke føre betydelige Slutninger med sig, ville vi alene vise, hvorledes i den Hypothese af den naturlige Tyngde de foresatte Spørsmaal kunde opløses.

§. 195.

I den Hypothese af Tingenes sædvanlige Fald her hos os at bestemme den Linie, som i alle sine Punkter trykkes med en Kraft, saa stor som Tyngden.

For Exempel. Om man vil undersøge, hvad det er for en Linie, over hvilken et Legeme skal falde saaledes, at Linien i alle sine Punkter bliver trykt af den faldende Tyngde med en Kraft, saa stor som dens hele Vægt, da siden Trykningen er $\frac{2bg}{r} + \frac{gdx}{ds}$. Kaldes da den naturlige Tyngde g, bliver $\frac{2bg}{r} + \frac{gdx}{ds} = g$, som er Ligheden til den krumme Linie CEF. (Taf. XI. Fig. 1.)

For at bestemme b og r i den krumme Linies Abscisser og Ordinater, da om man antager, at AC er Høiden til den Hastighed, hvormed Faldet begynder, AB den krumme Linies Axel, cd og ef Ordinater $= y$, Ac Abscissen $= x$, og $ce = dx$, da bliver Hastigheden, som vindes ved Faldet igiennem AC og CE$d = \sqrt{gy}$. §. 48. F. Ansees ds som bestandig, bliver $r = \frac{dyds}{ddx}$, og saaledes den hele Tryk-

ning $= \frac{2gy.\,ddx}{dyds} + \frac{gdx}{ds} = g$, eller $2yddx + dydx = dyds$, som dividert med $2\sqrt{y}$, forandres til $\frac{\sqrt{y}.\,ddx}{ds} + \frac{dxdy}{2\sqrt{yds}} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$. Hvoraf Integralen er $\frac{\sqrt{y}.\,dx}{ds} = \sqrt{y} + B$, eller $dx\sqrt{y} = ds\sqrt{y} + B$, hvor den bestandige Størrelse B kan tages efter Behag, og derfor $= ds\sqrt{c}$, fordi saavel ds som c betyde her bestandige Størrelser og Overeenstemmelsen med de øvrige Dele i Ligheden udfordrer en Størrelse af den Beskaffenhed, som $ds\sqrt{c}$. Ved at antage $\sqrt{c}$ større eller mindre, forandres alene den Forhold af $dx : ds$, følgelig den Vinkel, som den første Tangent gior med Axlen af den krumme Linie.

Da derfor den fundne Ligned er $\sqrt{y}dx = \sqrt{y}ds - \sqrt{c}ds$. Tages i den $\sqrt{y} = z$, saa bliver $dy = 2zdz$, og $ds^2 = dx^2 + 4z^2dz^2$, hvilket, naar sættes om i den givne Ligned, forandres den til denne anden $dx = \frac{2z^2dz - 2\sqrt{c}zdz}{\sqrt{2cz - c}}$. Gieres atter igien $2z - \sqrt{c} = t$. Faaes $dz = \frac{dt}{2}$ og $z = \frac{t + \sqrt{c}}{2}$. Følgelig bliver $dx = \frac{(t^2 - c)\,dt}{4\sqrt{t}\sqrt{c}} = \frac{t^{\frac{3}{2}}dt - ct^{-\frac{1}{2}}dt}{4\sqrt{c}}$. Hvis Integral er $\frac{1}{4\sqrt{c}}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 2ct^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{10\sqrt{c}}\cdot\left(t^{\frac{5}{2}} - 5ct^{\frac{1}{2}}\right)$. Sættes i Steden for t dens Værdie $2z - c$, faaes $\frac{1}{10\sqrt{c}}(t^2 - 5c)\sqrt{t}$ $\frac{1}{10\sqrt{c}}\cdot(4z^2 - 4z\sqrt{c} - 4c)\sqrt{2z - c}$ $= \frac{2}{5\sqrt{c}}(z^2 - \sqrt{cz} - c)$ og $x = \frac{2}{5\sqrt{c}}(z^2 - \sqrt{cz} - c).(\sqrt{2\sqrt{cz} - c}) + B$.

Denne

Denne bestandige Størrelse B bestemmes deraf, at naar $x = 0$, bliver $\sqrt{y} = z = \sqrt{a}$, og derfor

$$B = -\frac{2}{5\sqrt{c}}(a - \sqrt{ac} - c)\sqrt{2\sqrt{ca} - c},$$

$$\text{og } x = \frac{2}{5\sqrt{c}}(z^2 - \sqrt{cz} - c)\sqrt{2\sqrt{cz} - c}$$

$$- \frac{2}{5\sqrt{c}}(a - \sqrt{ac} - c)\sqrt{2\sqrt{ca} - c}.$$

Og naar endelig i Steden for z sættes $\sqrt{y}$, og alt behørig quadreres, faaes en algebraisk Linie af femte Høide, som er den, vi have sagt.

Man kan paa selvsamme Maade opløse en Deel andre Spørsmaal af samme Beskaffenhed. Men Nytten af deres Opløsning er ikke betydelig.

Tolvte
og
Trettende Forelæsning.

Om
de tunge Tings Bevægelse, som skydes eller kastes ud.

§. 214.

De udkastede Ting burde egentlig beskrive Ellipser, om Jordens Bredde ikke overskar deres Bane, og derved hindrede Bevægelsen.

Til den Lærdom om Central-Kræfterne henhører endnu som et særdeles Stykke, den om de Tings Bevægelse, hvilke skydes eller kastes, eller paa nogen anden Maade drives afsted efter en retlined Bevægelse, i hvilken de gaae fort med en altid ensdan Hastighed, imidlertid at de af Tyngden drives ned efter. Da Tyngden driver bestandig imod et og det samme Punkt, nemlig imod Jordens Center, saa sees deraf, at den almindelige Theorie om Central-Kræfterne haver her ligesaavel Sted, som for; thi overskar Jordens Bredde ikke det udkastede Legemes Bane, maatte det §. 211. beskrive en Ellipse omkring Jordens Center, hvis ene Brende-Punkt dette sidste blev. Imidlertid, da vi her see paa den letteste Maade at komme til Kundskab om Sandhederne paa, ville vi legge en anden Plan for at forstaae denne Bevægelse, en Plan, som er overmaade simpel,

simpel, og efter hvilken man ved Hielp af de allerletteste og mest bekiendte Egenskaber af Keile-Snittene kan lære at forstaae, hvad deraf er nyttigst og nødvendigst at vide til Brug i andre af Mathematikens Dele.

§. 215.

Beskaffenheden af de udkastede Tings Bevægelse forklares.

Er da (Taf. XI. Fig. 2.) AH den Linie, efter hvis Direktion en Ting i A antages at være kastet ud med en vis given Hastighed proportionert AC, da er det uimodsigeligt, at om denne Hastighed alene virkede, skulde den udkastede Ting blive ved at bevæge sig bestandig hen efter AH saaledes, at de i lige Tider igiennemløbne Rum i denne Linie, nemlig AC, CF, FP, FN, o. s. v. skulde blive lige store, hvad heller Linien AH er horizontal, eller den staaer skiev paa Horizonten.

Men da i Tingenes Bevægelse, som drives af Tyngden, denne Kraft virker ei alene, men Tyngden desuden alle Øieblik driver den Ting, der bevæges, ned imod Jordens Center, saa maa agtes, at siden Jordens Halv-Diameter kan ansees som at være uendelig stor, naar den sammenlignes med den ringe horizontale Bane AO, hvilken den udkastede Ting beskriver, saa kunne alle de Linier, hvori den tunge Ting over en saa liden Distance falde ned imod Jordens Center, CB nemlig, FK, NM, PQ, o. s. v. ansees som ligelobende eller parallele.

§. 216.

Fremdeles maa agtes, hvad vi i det forrige fuldstændig have beviist, at Tyngden er en Kraft, som hos os kan ansees for bestandig i lige Tider at giore lige Virkninger, om end de vertikale Høider ere noget længere eller kortere fra Jordens Center. §. 122. Dette forudsat sees, at naar AC er proportionert den Kraft, hvormed Tingen kastes eller skydes ud, og CB proportionert den, hvormed Tingen drives bestandig ned efter imod Jordens Center, AQQ den Linie, over hvilken Kastet eller Skuddet efter AH ansees som at være forhøiet under den Forhøinings- eller Elevations-Vinkel HAO, da er CADB Kræfternes Parallelogram, i hvilket Tver-Linien AB tilkiendegiver ligesaavel den igiennemlobne Bue (der kan ansees, om Tiden er overmaade liden for en ret Linie) som den hele Kraft og Hastighed, der i samme Tid er bleven tilveiebragt i Tingen af Kræfterne AC og CB. §. 60.

Holdt nu Tyngden med et op, maatte Tingen blive ved at bevæge sig bestandig i den rette Linie ABE, siden ingen Inertie af sig selv kan forandre sin Direktion. Den bliver derfor ved, om intet forhindrede, at lobe med en Hastighed proportionert AB fort efter Tangenten AE. Sættes Tiden for Bevægelsen den samme og ligesaa liden som for, saa er det klart, at i lige store Tider (begge nemlig overmaade smaa) bliver BA = EB, imidlertid at Tyngden, ved at drive efter Vertikalen EK, tilveiebringer med EB en nye Hastighed, som BG.

§. 217.

§. 217.

Da derfor Trianglerne ABC og AEF ere ligedanne Triangler, saa følger, at fordi AB = BE, §. 216. bliver og AC = CF, og ligeledes, fordi ACI og AFK ere ligedanne Triangler, bliver AI = IK, fordi AC = CF.

I denne Bevægelse blive de lige Tider igiennemløbne horizontale Rum lige store.

§. 218.

Fortsætter man denne Betragtning videre i flere Elementer af den krumme Linie, som Gv, da blive i Henseende til dem alle de forrige Slutninger de samme, thi da den Hastighed BG, hvormed Elementet af Linien blev igiennemløbet, i en ligesaadan Tid skulde føre Tingen igiennem GV = BG hen efter Tangenten, saa maa CF og FN være skaarne i samme Forhold, som BG og Gv, følgelig da BG = vG er og CF = FN, og derfor atter igien AI = IK = KM o. s. v. hele Linien igiennem.

Deraf kan sluttes, at om AO er horizontal, da uagtet at Tyngden idelig formerer eller formindsker Hastigheden efter Vertikalen, blive dog altid de horizontale Rum, som Tingen beskriver, AI, AK og AM, Tiderne af Bevægelsen i AQO proportionerte, følgelig og de til disse Linier i Direktions-Linien AH svarende Stykker, AC, CF, o. s. v. lige store.

§. 219.

Hvad sig ellers angaaer, at de horizontale Rum AI, IK, o. s. v. blive lige store i lige store Tider og andre som AI, AL Tiderne, i hvad Forhold de ere endog under sig altid proportio-

Dette sidste bevises endnu klarere af Central-Kræfternes Beskaffenhed.

portionerte, da sees dette endnu meer egentlig deraf, at Tyngden eller den Central-Kraft, som her virker, gior, at de igiennemlobne Rum altid maa blive Tiderne proportionerte: Saa om *c* er Centret, hvortil drives af Central-Kraften, ere de hele Rum AB*c* og BG*c*, hvilke vi antage som beskrevne i lige store Tider altid lige store, og i ulige Tider Tiderne proportionerte. Da nu ABI og BGKI ere som intet at ansee imod AI*c* og IK*c*, saa er AI*c* = IK*c*, men da i disse Triangler Høiden er for begge den samme, maa Grund-Linierne AI og IK ligeledes være de samme, folgelig ere de horizontale Rum bestandig Tiderne proportionerte, i hvilke de til dem svarende Buer AB og AG igiennemlobes.

§. 220.

De udkastede Legemer bevæge sig i Paraboler.

Dette forudsat, er der aldeles ingen Vanskelighed meer i at see, hvad det er for en Linie, hvilken de Ting beskrive, som bevæges, drevne deels af en Hastighed, hvormed de kastes ud, deels af Tyngden. Thi ere begges Direktioner i samme Linie, er det klart, at Bevægelsen skeer i ret Linie: Giore deres Direktioner en Vinkel med hverandre, da er nylig beviist, at Linierne AC, AF forestille Tiderne, imidlertid at CB og FG forestille de igiennemlobne vertikale Rum. Trekkes da AT parallel med CB, det er, om den tages vertikal, og DB, GS trekkes parallele med AH. Videre, om AT ansees som den Linie, hvorpaa Absciſſerne tages, saa AD eller AS = *x*, DB eller SG = y, er *x* = yy, og naar Storrelserne bringes til samme Slags *px* = yy, hvoraf sees.

At

At Linien AQO er en Parabol, at AT er dens Diameter eller Axel, fordi $y = \pm px$ giver saavel den nægtende, som den bekræftende Semiordinate lige store. AT er Axlen af Parabolen, om Koordinaternes Vinkel er en ret Vinkel, det er, om $HAD = 90°$, eller Tingen kastes horizontal ud. Saa i dette Tilfælde Tingen altid begynder at bevæges i Spitsen af Parabolen, eller over dens horizontale Tangent. I alle andre derimod er AT altid en Diameter af Parabolen, og følgelig parallel med Axlen.

§. 221.

Kaldes da Sinus til Vinklen OAH, s, Cosinus c, AO a, og ved AO forstaaes det hele horizontale Løb, saa at en Ting skudt ud paa Horizonten i A løber igiennem Buen AQO, og støder igien an paa Horizonten udi O: Da kan af AO af s og c Parametern p til Diametern findes, thi $AO : AH = c : 1$, om Sinus totus kaldes 1; altsaa $AH = \frac{a}{c}$, $AO : HO = c : s$, og er $HO = \frac{sa}{c}$, men $AH^2 = p.HO$. følgelig $\frac{p.sa}{c} = \frac{a^2}{c^2}$, og derfor $p = \frac{a}{sc}$, saa Ligheden til Parabolen bliver $\frac{1}{sc}ax = y^2$.

Parabolens Diameters Parameter bestemmes under alle Inklinations-Vinkler paa Horizonten, naar Skuddets horizontale Længde er given.

§. 222.

Deraf findes let den største Høide ab, hvortil den udkastede Ting kan stige over Horizonten (Taf. XI. Fig. 3.).

Ligeledes den største Høide, hvortil Tingen

kan stige over Horizonten.

Thi da Axlen nbR af Parabolen som vertikal, maa staae perpendikulær paa AO, og dele den i to lige Dele, saa er $Ab = \frac{1}{2}a$ og $c : s = \frac{1}{2}a : \frac{\frac{1}{2}as}{c} = db$. Men A$d$ er en Tangent og dR Axlen, folgelig veed man af den koniske Geometrie, at $dn = nb$, folgelig at $nb = \frac{\frac{1}{4}as}{c}$, som er den storste Høide, hvortil Skuddet eller Kastet kan stige. Men $\frac{s}{c}$ er Tangenten af Elevations-Vinklen EAO, altsaa er den storste Høide, hvortil Skuddet kan stige, Fierde-Delen af det horizontale Løb AB, multiplicert med Tangenten af ElevationsVinklen.

§. 223.

Tilligemed Parametern af Parabolens Axel.

Saasnart som nb er given, kan man finde Parametern til Axlen udi n, eller til nbR. Thi om man kalder denne Parameter P, da veed man atter igien af den koniske Geometrie, at $p = P + 4nb = P + \frac{as}{c}$. Men $p = \frac{a}{cs}$, §. 221. saa Parametern til Axlen $= \frac{a}{cs} - \frac{as^2}{cs} = \frac{ac}{s}$, eller, den er den fierde proportionelle til Sinus og Cosinus af Elevations- eller Forhøinings-Vinkeln og til det horizontale Løb.

§. 224.

Den halve Parameter forholder sig til det hele horizontale Løb, som den hele Sinus til den dobbelte Vinkel, naar Sinus til den enkelte $= s$, og Cosinus $= c$, saa sees §. 221, at da $p = \frac{a}{sc}$, bliver $1 : sc = p : a$, og

a, og $2 : 2sc = p : a$, eller $1 : 2sc = \frac{1}{2}p : a$. Følgelig forholder sig den halve Parameter til det hele horizontale Løb, som Sinus totus til den dobbelte Elevations- eller Forhøinings-Vinkel. Deraf forstaaes, nus til den dobbelte Forhøinings-Vinkels Sinus.

1) At saa længe Parametern er den samme, forholde sig de hele horizontale Løb som Sinus af den dobbelte Forhøinings-Vinkel, eller $a = 2sc$, thi Forholden af $1 : p$ antages bestandig at blive den samme. Saa længe Parametern er den samme, forholde sig de horizontale Løb som Sinus af den dobbelte Forhøinings-Vinkel.

2) Men man seer let, at Parametern bliver bestandig den samme, saa længe som Hastigheden, hvormed Tingen i Begyndelsen af Bevægelsen kastes ud, bliver den samme. Thi (Taf. XI. Fig. 2.) er denne Hastighed under adskillige Forhøinings-Vinkler ens, bliver AC ligeledes uforanderlig, saavelsom CB, følgelig bliver og $\frac{AC^2}{CB} = p$ en uforanderlig Størrelse. Saa længe Tingene skydes ud med den samme Hastighed, er Parametern den samme, i hvorledes end at Forhøinings-Vinklen forandres.

3) Følgelig maa, saa længe i Kast eller Skud under adskillige Forhøinings-Vinkler Hastigheden bliver uforandret, de i den hele Tid, Kastet varer, giorte horizontale Løb forholde dem til hverandre under sig, som Sinus af de dobbelte Forhøinings-Vinkler. Saa længe Hastigheden, Tingene kastes ud med, er den samme, forholde de hele horizontale Løb sig som Sinus af de dobbelte Forhøinings-Vinkler.

Dette sidste kan man og uden videre Omsvøb strax udlede af Ligheden §. 221. $p = \frac{a}{sc}$. Thi antages p bestandig, bliver a som cs, følgelig og $= 2cs$.

4) I dette Tilfælde, saasnart Vinklen, under hvilken Kastet skeer, forandres, forandres Parabolen eller Løbebanen, thi §. 223 Til enhver nye Forhøinings-Vinkel svarer en

nye Parabol i dette Tilfælde.

$P = \frac{ac}{s}$, i hvilken Værdie baade a, c og s ere bestandig forandelige, saa snart som Forhøinings-Vinklen forandres

I disse Paraboler forholde sig Parametrerne til Axlerne som Quadraterne af Forhøinings-Vinklernes Cosinus.

5) Da i det a altid er proportionert cs §. 224. I. saa er $P = c^2$, og følgelig under adskillige Forhøinings-Vinkler forholde sig Parametrerne til Axlerne af de adskillige Paraboler, i hvilke Løbet over Horizonten skeer, som Quadraterne af Cosinus af disse Forhøinings-Vinkler. Hvilke Paraboler alle med hverandre overskiære hinanden i det fælles Punkt, i hvilket Tingen under adskillige Forhøinings-Vinkler kastes eller skydes ud, og have alle parallele Axler.

Og de største Høider som Quadraterne af samme Vinklers Sinus.

6) Alle disse Parabolers største Høide over Horizonten er i Almindelighed §. 222 $= \frac{1}{4}\frac{as}{c}$, altsaa proportionerte ss, fordi $a = cs$, følgelig ere de proportionerte Quadraterne af Sinus af deres adskillige Forhøinings-Vinkler.

Følgelig ere og de største Høider, hvortil de med samme Hastighed udkastede Ting kunde stige over Horizonten, som Quadraterne af Sinus af de til dem svarende Forhøinings-Vinkler.

Disse sidste forholde sig og som de forkeerte Sinus af Forhøinings-Vinklerne.

7) Da man veed af Geometrien, at naar Sinus til den enkelte Vinkel $= s$ er Sinus versus, eller den forkeerte Sinus til den dobbelte Vinkel $= 2s^2$, om Sinus totus $= 1$, saa følger,

At saavel de forømtalte adskillige Parabolers største Høider, som og Skuddene deres største Stigninger over Horizonten forholde sig til hverandre under adskillige Forhøinings-Vinkler, som de forkeerte Sinus af disse Vinkler.

8) Da

8) Da derfor P er = cc, og (Taf. XI. Fig. 3.) $nb = ss$, saa bliver Tangenten til Forhøinings-Vinklen EAO altid $\frac{\sqrt{nb}}{\sqrt{P}}$.

§. 225.

Videre sees overmaade let:

1) At det længste Skud eller Kast, som med en vis given Hastighed udi A kan gjøres over Horizonten, er det som skeer under en Forhøinings-Vinkel af 45°. Det længste horizontale Kast skeer under 45° Forhøinings-Vinkel over Horizonten.

Thi da Kastets horizontale Længde, eller det horizontale Løb, er som Sinus af den dobbelte Forhøinings-Vinkel, §. 224. 3. og Sinus totus, eller Sinus til to gange 45° er den største Sinus, saa maa under 45° det største Kast skee.

2) Ligeledes sees, at under Forhøinings-Vinkler, som paa begge Sider gaae lige meget fra 45°, under nemlig og over 45°, ere de horizontale Løb altid lige store, f. Ex. til 30° og til 60° maa man, i at skyde eller kaste, naae lige langt, fordi de dobbelte Vinkler sammenlagte belobe 120°, og Sinus derfor af begge, af den stumpe nemlig og den skieve, ere lige store.

§. 226.

Fremdeles sluttes, naar Hastigheden i A er idelig den samme,

1) At dersom Skuddets eller Kastets Længde under 45° er bekiendt, eller og Kastets Længde eller det horizontale Løb under 15°, som altid er det halve af det horizontale Løb under 45°, fordi Sinus 30° = $\frac{1}{2}$ Sin. 90°. Saa kunne At et givet Prøve-Skud at bestemme alle øvrige horizontale Længder under andre For-

heinings-Vinkler.

deraf alle de ovrige horizontale Løb under alle andre Forhoinings-Vinkler let findes, alene ved at tage den fierde i Proportion til Sinus totus, til Kastets storste Længde og til Sinus af den Vinkel, under hvis halve Deel Kastet skal skee. Man kan ligeledes af et hvert andet Prove-Skud under en Vinkel bestemme alle ovrige Skuds horizontale Længder under andre Vinkler.

2) Følgelig kunne deraf Tafler for samtlig Forhoinings-Vinklerne forferdiges af det bekiendte storste horizontale Løb og af de ovrige givne horizontale Løb, antagne efter Behag, hvilket, siden det er af nogen Vigtighed, vi ville oplyse med et Par Exempler.

Forste Exempel.

Saaledes, om man gior med en vis Ladning et Prove-Skud af et Stykke under 15°, eller under 45°, og finder, at den storste horizontale Længde belober 1200′, men den Distance, som man haver at skyde paa, ei er længer end 800′, og man vil vide, under hvad Forhoinings-Vinkel over Horizonten Stykkets Axel skal sættes, for net op med samme Ladning at treffe paa denne Længde. Da bliver

1200 : Sin. tot. = 800 : Den dobbelte Vinkels Sinus

Log. 800 = 2. 9030900

Log. Sin. 90° = 10.

12. 9030900

— Log. 1200 = 3. 0791812

9. 8239088. hvortil svarer 41°49″.

Følgelig

Folgelig kan man stille Stykkets Axel, for at skyde net op paa en Distance af 800′, hvad heller man vil under 20° 54½′ eller under 69° 5½′.

Andet Exempel.

Ligeledes, om det foromtalte Prove-Skud giver for det største horizontale Løb, under en vis Ladning af samme Krud, 2000′, og man vil vide, under hvad Vinkel Stykkets Axel skal staae paa Horizonten, for at treffe net op paa en Distance af 1260′. Da bliver

2000′ : Sin. 90° = 1260 : Den søgte Vinkel Sinus

Log. 1260 = 3. 1003705

Log. Sin. 90° = 10.

13. 1003705

— Log. 1260 = 3. 3010300

9. 7993405

hvortil svarer i Tavlerne 39° 3′, saa den ene Vinkel, hvorunder Stykkets Axel kan stilles, er til 19° 31½′, folgelig bliver den anden = 70° 28½′.

§. 227.

Man finder saaledes paa denne Maade overmaade let ved Hielp af et eller andet Prove-Skud, hvorledes alle de Punkter kunne treffes, (Taf. XI. Fig. 3.) hvilke, som det Punkt O, ligge udi Horizonten, og hvis Distance ikke overgaaer det horizontale Løbs Længde under 45°. Saafremt derimod, at en Ting FG haver en Høide over Horizonten og skal treffes udi

udi G, AFO antaget som horizontal, da seer man, at Spørsmaalet er strax af en anden Beskaffenhed, til hvilket at opløse vi ville iagttage følgende.

Parametern af Parabolen er to gange Skudets horizontale Længde under 45°.

Da §. 224 Sin. tot. forholder sig til Sinus af den dobbelte Forhøinings-Vinkel, som den halve Parameter til det horizontale Skuds hele Længde, saa følger, at fordi den dobbelte Vinkel af 45° er 90°, maa dens Sinus blive saa stor, som Sinus totus, og følgelig bliver altid det største horizontale Løb Længde saa stor, som den halve Parameter af Parabolen.

§. 228.

Hastigheden, hvormed Tingene kastes ud, findes altid ved Faldet igiennem Fierde-Delen af Parametern.

Deraf kan man altid tydelig bestemme, hvad Hastigheden er, hvormed en Ting er skudt eller kastet ud efter AE, saasnart som man veed det største horizontale Løb, thi denne Hastighed er altid den, som vindes ved at falde igiennem fierde Delen af Parametern, eller igiennem den halve Deel af det største horizontale Løb.

Thi kaldes Høiden til den Hastighed, hvormed en Ting i A kastes eller skydes ud, h, da, fordi §. 49. ved at falde igiennem et Rum af 15′, vindes en ensdan Hastighed som 30′ i Enden af Faldet, om Hastigheden kaldes i A, v, bliver $15 : 30^2 = h : v^2$ §. 48. og $v = \sqrt{60h}$, men er at hvad en Tyngde falder i et Sekund $= 15'$, da, fordi Aa i et Sekund $= \sqrt{60h}$, bliver $p. Ac = ct^2$, eller $60h = 15p$, følgelig $4h = p$, og $h = \frac{p}{4}$.

Men

Men da p (om det største horizontale Løb kaldes A) $= 2A$, saa bliver $h = \frac{A}{2}$, eller Høiden, som svarer til Hastigheden, hvormed Tingen kastes ud, bliver saa stor som Halvdelen af det største horizontale Løb.

§. 229.

Deraf forstaaes, at man ligeledes kan bestemme Hastigheden, hvormed en Ting kastes ud i A, ved ethvert andet givet Horizontal-Løb, naar Forhøinings-Vinklen, under hvilken det er giort, tillige er given. Thi da $p = \frac{a}{sc}$, §. 224, saa er altid Høiden, der svarer til Hastigheden udi $A = \frac{a}{4sc}$, §. 228; eller den forholder sig til det under en vis Vinkel giorte halve horizontale Løb, som Sinus totus til Sinus af den dobbelte Forhøinings-Vinkel.

Og Høiden, der svarer til denne Hastighed, er derfor den fierde i Proportion til den dobbelte Sinus af Forhøinings-Vinkeln, til den hele Sinus og til det halve horizontale Løb.

§. 230.

Følgelig kan ved denne Hastighed alt det forrige bestemmes, alene at man i alt, hvad der er sagt, sætter i Steden for $\frac{p}{4}$, den Høide C. Hvilket da ingen videre Anmerkning behøver, ville vi derved ei opholde os.

§. 231.

Dersom Hastigheden efter $AE = V\overline{2bb}$, §. 228. (Taf. XI. Fig. 6.) inddeles i en horizontal Kn, og en vertikal KA,

Tiden bestemmes.

da bliver, om Sinus $90° = 1$, $1 : An = c : Kn$, følgelig bliver den horizontale Hastighed $= c.\sqrt{60b}$.

Da nu efter Horizonten Bevægelsen er ensdan §. 217, saa er Tiden af Bevægelsen $= \frac{a}{c.\sqrt{60b}}$. Men a er som cs, følgelig bliver Tiden som $\frac{cs}{c}$; følgelig som s: Eller Tiderne af Bevægelsen over Horizonten, blive under adskillige Forhøinings-Vinkler som Sinus af disse Vinkler, om Hastigheden er den samme.

§. 232.

Maade at giere Udregningerne, for at treffe de Ting, der ere forhøiede over Horizonten.

Alt dette sat forud, ville vi vise, hvorledes af den givne Hastighed udi A, (Taf. XI. Fig. 3.) Forhøinings-Vinklen kan findes, for at treffe en Ting udi G, som i den givne Distance fra A, AF haver den givne Høide GF over Horizonten. Og først, hvorledes man kan ved Udregning bestemme denne Sag.

Siden da Hastigheden er given, er Parametern given §. 228. Derfor kan af den det længste horizontale Skud findes, §. 227, og af det igien ubestemtviis det horizontale Løb Ao, som skeer under den ubekiendte Vinkel EAo, hvilken gives ved sin Sinus og Cosinus. §. 226. 1. Følgelig er Ab bestemt §. 224. 6. og da $Ab : AF = \sqrt{dn} : \sqrt{HG}$, fordi de horizontale Dele af Linien Ao igiennemløbes med en ensdan Bevægelse, og Aa, Ad ere som Tiderne, findes HG; da $HG + GF = \frac{s}{c}AF$, hvoraf Ligheden for Tangenten til EAo faaes.

Eller endnu lettere. Kaldes Distancen AF, d, GF, a, Tangenten til Vinklen EAo, x, da er $AF : FH = 1 : x$,

om

om Sinus totus = 1, følgelig HF = dx. Videre er HG = $dx - a$ = AS, og $SG^2 = AH^2 = AF^2 + FH^2 = d^2 + d^2x^2$, saa da p. AS = SG^2, bliver $d^2 + d^2x^2 = pdx - ap$, hvoraf faaes, naar den quadratiske Ligned oploses,

$$x = \frac{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - pa - dd}}{d}$$, deraf sees.

1) At man finder altid Tangenten til to adskillige og ligegyldige Vinkler, under hvilke Skuddet eller Kastet kan skee, med mindre $pp = 4pa + 4dd$, da $x = \frac{1}{2}p : d$.
2) At det altid er mueligt at treffe den Ting, man skyder eller kaster til, saa længe som $\frac{1}{4}pp$ er større end $pa + dd$.
3) Saafremt derimod, at $\frac{1}{4}pp$ bliver mindre end $pa + dd$, bliver Størrelsen under Quadrat-Rodens Tegn negtende, og følgelig umuelig.
4) Dersom GF = 0, da faaes Ligheden for den forskomtalte Tilfælde, da Punktet o var udi Horizonten, som bliver

$$x = \frac{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - dd}}{d}.$$

§. 233.

Ved geometrisk Construktion at bestemme alt det, som angaaer de tunge Tings Fald.

* Den anden Maade, hvorpaa dette uden Hensigt til Parabolen kan vises, kan jeg ikke undlade at tale om, da den fører til en geometrisk Beskrivnings-Maade, eller Construktion, som er ikke mindre almindelig end artig.

Er da (Taf. XI. Fig. 4.) AF den givne Distance, BF den Ting, som skal treffes, dens Høide over Horizonten, og

den Ting, som kastes eller skydes ud, skal igiennemløbe den krumme Linie ABG, for at gaae fra A til Horizonten i G, og underveis at stode an paa BF i det Punkt B: Da, uden videre at bekymre sig om, hvad den Linie ABG er for en, haver man alene nødig

1) At søge Hastigheden, hvormed Tingen skydes ud i A, som enten kan findes af §. 228, eller paa hvad anden Maade man vil. For Ex. ved at dividere det hele horizontale Løb AG med Tiden, da derved den horizontale Hastighed er bekiendt, som forholder sig til den hele Hastighed udi A igien, som Cosinus af Forhøinings-Vinklen til Sinus af 90°. §. 231.

2) Er Hastigheden funden, bestemmes den Høide ved at falde igiennem hvilken denne Hastighed kan vindes, hvilken Høide findes som for §. 228, eller af §. 57, og naar den sættes af efter en forkortet Maale-Stok, ville vi antage den saa stor som Linien AE.

3) Videre sættes af i samme forkortede Maal Distancen AF, i hvilken den Høide, som skal treffes BF, er borte fra Skyde-Punktet A. Høiden af den Ting, der skal treffes, sættes i F efter samme Maal af paa Papiret, og man trekker den Linie AB.

4) Videre sættes den fundne Høide, der svarer til Hastigheden udi A, lodret eller perpendikulær paa AG, og en anden Perpendikel AD ligeledes paa AB.

5) Fremdeles trekkes ED horizontal eller parallel AG, (thi denne sidste Linie antages at forestille Horizonten) hvorpaa

AD

AD deles i to lige Dele udi *c*. Fra *c* som Center med Halv-Diametern CD slaaes en Halv-Cirkel DEA, som nødvendig maa gaae igiennem det Punkt E, fordi DEA er, i Følge vores antagne, en ret Vinkel.

6) Derpaa deles AB i 4 lige store Dele, hvoraf AK er en, og fra K reises op den rette Linie KIH parallel AE, hvilken, saa tidt Kastet er mueligt, overskier Cirklen DEA, som man veed, i to Punkter I og H, med mindre begge disse Sekanter falde ind sammen i hverandre, og blive to lige store Tangenter paa Cirklen, som OR.

7) Trekkes da igiennem de to Punkter I og H, i hvilke KIH overskier Cirklen, to Linier AI og AH, da ere Vinklerne IAG og HAG, som kunne maales ved Transportoren, de Vinkler, hvorunder Axlen af et Stykke eller af Kastet bør gaae, for at den efter AI udkastede Ting kan net op stode an udi B.

Hvilket saaledes beviises.

Da AE er den Høide, igiennem hvilken ved at falde Hastigheden i A kan vindes, saa er samme Hastighed = 2AE. Videre; da med denne selvsamme Hastighed AM burde igiennemløbes, i den Tid at Tingen bevæger sig igiennem AB, eller i hvilken den kan ansees som at være falden igiennem MB, saa er Tiden igiennem MB = AM, thi Tiderne ere, naar Hastighederne ere i ensdan Bevægelse de samme, proportionerte de igiennemløbne Rum. §. 13. Følgelig, om Tiden igiennem AE kaldes T, den igiennem MB, *t*, er $T : t = 2AE : AM$; men Tiderne ere og som Quadrat-Rødderne af de igiennemløb-

nemlobne Num. §. 48. Folgelig $4AE^2 : AM^2 = EA : MB$, og $AE^2 : \frac{AM^2}{4} = EA : MB\ (= 4IK)$.

Denne Proportion flyder af Faldets Natur, men den flyder ligeledes af den forhen givne geometriske Beskrivnings-Maade, i Følge hvilken Trianglerne EIA og IKA ere ligedanne Triangler, (fordi Vinklen af Strengen IA og Tangenten AK er saa stor som Vinklen i Peripherien IEA, der staae paa samme Bue IA, og desuden Vexels-Vinklerne, som giores ved A og I paa Parallelerne EA og KI, ere lige store). Følgelig bliver $EA : AI = AI : IK$ og $EA : IK = EA^2 : AI^2$, derfor og $EA : 4IK = (MB)\ EA^2 : 4AI^2 = \frac{AM^2}{4}$.

Da derfor den physiske Kastets Beskaffenhed stemmer saaledes fuldkommen overens med den geometriske, saa seer man; at Direktionen for Kastet efter AI er rigtig bestemt, og man kan paa samme Maade bevise det i Henseende til *AH*.

§. 234.

* Deraf sees, at saa tidt som Kastet skeer, for at treffe udi Horizonten udi G, falder AB over AG og AD over AE, saa det udi denne Tilfælde er AG, som skal deles udi fire lige store Dele, paa AG sættes AE perpendikulær, og fra dens Midte med en Halv-Diameter $= \frac{1}{2}AE$ slaaes Halv-Cirklen EIA. Er saa over AG, $AK = \frac{1}{4}AG$, da om fra K Perpendiklen KI reises op, og samme kan skiere Cirklen i to Punkter I og H, (eller rore den) ere Linierne AI og AH, ligesom for, Direktions-Linierne for Skuddet eller Kastet.

§. 235.

§. 235.

* Dersom RO er opreist paa den forhen sagte Maade, saa $AR = \frac{1}{4}AB$, og RO rører Cirklen udi O uden at skiære den, da sees let, at Vinklen OAK bliver 45°, thi COK bliver da 90°, følgelig Vinklen, som Chorda (her Diametern) QCO gior med Rør-Linien $= \frac{1}{2}QAO = AO = 90°$, følgelig bliver Vinklen AOK = 45°.

§. 236.

* Da man seer af det forrige (Taf. XI. Fig. 4.), at Punktet I, hvori Cirklen DIA overskier siden AIP af Forhøinings-Vinklen MAG, er det Punkt, hvorfra $IK = \frac{1}{4}MB$ og $AK = \frac{1}{4}AB$, hvilket, om AB falder ind i et med AG, giver $IK = \frac{1}{4}MF$ og $AK = \frac{1}{4}AG$, saa sees let, at man i dette Tilfælde ved samme geometriske Beskrivnings-Maade kan, naar Forhøinings-Vinklen IAF er given, tilligemed den Høide EA, der svarer til Hastigheden udi A, deraf finde det hele horizontale Løb AG, og Kastets største Høide over Horizonten, tilligemed Parametern, og følgelig beskrive Parabolen, som igiennemløbes ABG.

Nemlig. (Taf. XI. Fig. 5.) Over en ubestemt Linie AG, som man antager at forestille Horizontalen, opreises i det Punkt A, fra hvilket Kastet skal skee, en Linie AB perpendikulær, og saa stor som den Høide, der svarer til Hastigheden udi A. Over AB, som Diameter, beskrives en halv Cirkel BDA, og Forhøinings-Vinklen HAG bestemmes og trekkes.

Dette

Dette giort, kastes fra D, hvor Cirklen overskier Siden AH af Forhøinings-Vinklen, en Perpendikel DL ned, og videre tages, 1) $4AL = AG$, saa er AG det hele Horizontale Løb.

2) Kastes fra D Perpendiklen DI ned, og fra D, naar ID trekkes ud, tages $DI = DE$, fra E kastes Perpendiklen EF ned, saa er EF Kastets største Høide over Horizonten; fordi, som før er sagt, samme svarer til det Punkt F, hvilket falder midt udi AG. og $EF = \frac{1}{4}HG$.

3) Videre da E saaledes giver den horizontale Nore-Linie af Parabolen, er E samme Linies Spitse, EF dens Axel, følgelig kan fra E af Parabolen beskrives, alene at Parametern er bekiendt.

4) Men da Parametern til Axeln EF er saa stor som Parametern p udi A, mindre end 4EF, og $BA = \frac{1}{4}p$. §. 228. saa er Parameter til Axeln $= 4(BI + IA) - 4IA = 4BI$. Følgelig kan Parabolen beskrives.

§. 237.

I hvad Tilfælde denne Theorie stemmer best overens med Erfaring.

Alt dette var fuldkommen rigtigt, om Luften ingen Modstand giorde, hvorved de udkastede Tings Bevægelse bleV hemmet tildeels, og merkelig svekket, i sær i de Tilfælde, da Hastigheden er stor. Vi ville derfor afhandle efter dette det letteste og mærkværdigste i Henseende til denne Modstand. Imidlertid vise de i Mængde giorte Prøver og tagne Erfaringer, saavel som de derover giorte Udregninger, at naar Kuglen, som skydes ud, er tung og Hastigheden maadelig, hvilket er just

just den Tilfælde, som i Brugen af Bomberne forekommer, at Luften da langt fra ikke saa meget svækker Bevægelsen, saa disse Regler jo desuagtet paa det nærmeste blive rigtige og uden betydelige Feil, hvorfor de og kunne altid følges og ansees for Hoved-Regler, hvorefter man haver at bestemme Direktionen af de Ting, som skydes eller kastes ud. Dog seer man deraf, at jo mindre Hastigheden er, jo tungere Kuglen er, og jo kortere Skuddet skal gaae; desto noiere maa man treffe, naar man følger den her lagte Theorie.

Niende Tillæg.

Fortsættelse om de udkastede Tings Bevægelse.

§. 196.

Det forrige bevises af Central-Kræfternes Beskaffenhed.

Da denne hele Theorie virkelig henhører til Central-Kræfterne, saa vil jeg i dette Tillæg vise, hvorledes man af dem ved Udregninger, tagne alene af disse Kræfters Natur, er i Stand til at bestemme alt, hvad der angaaer denne Bevægelse. Da man allerførst maa agte, (Taf. XI. Fig. 6.) at om A er, som før, det Punkt, fra hvilket Tingen skydes eller kastes ud efter den Direktion AE, der følgelig bliver Rette-Linien til Løbe-Banen ABC udi det Punkt A. Om fremdeles DAE er den Vinkel, som Direktionen af Skuddet gior med Vertikalen DA, og sammes Sinus kaldes s, Cosinus c. Om

videre DA er Høiden, som svarer til Hastigheden udi A $= b$, og AG antages som Abscisser, Gg som Semiordinater. Da bliver Hastigheden, som svarer til et hvert Punkt som I over AL $= \sqrt{b-x}$, til et hvert Punkt som $g = \sqrt{b+x}$, om Abscisserne kaldes x. Og da det Punkt, hvortil Central-Kraften driver, antages at være uendelig langt borte, blive alle Linier, som ga i lige store Tider lige store, af samme Aarsag, som før §. 219. F. Saa om Gg kaldes y, bliver derfor dy en bestandig Størrelse og $ddy = 0$, om nemlig Elementet af Tiden dt er bestandig, eller $ddt = 0$.

§. 197.

Nemlig. Linien, hvori Bevægelsen af de udkastede Ting skeer, bestemmes.

Dette forudsat, da siden dy og dt blive uforanderlige Størrelser, om f er ligeledes en uforanderlig Størrelse, kommer man derved til den simple Differential-Ligned, $dy = fdt$, men da, om $gg = dS$, for det Punkt g $dt = \frac{dS}{\sqrt{x+b}}$, bliver $dy = \frac{fdS}{\sqrt{x+b}}$.

I denne Ligned maa f bestemmes, og siden denne Størrelse er i alle Punkter af den krumme Linie ensdan eller uforanderlig, kan den bestemmes af det, som den bliver i det Punkt A, i hvilket $x = 0$. Da derfor i A $dy = \frac{fdS}{\sqrt{b}}$, og i A er desuden $dS : dy = 1 : s$, om Sinus $90° = 1$, og Elementet af den krumme Linie $= dS$, saa bliver i A, $dy = sdS$, følgelig $\frac{fdS}{\sqrt{b}} = sdS$, og derfor $f = s\sqrt{b}$.

Efter at denne Størrelse saaledes er bestemt, bliver $dy = \frac{fdS}{\sqrt{x+b}}$ forandret til $\frac{s\sqrt{b}\,dS}{\sqrt{x+b}} = dy$, og derfor $\frac{bs^2dS^2}{x+b} = dy^2$, men $dS^2 = dx^2 + dy$, følgelig bliver

$xdy^2 + hdy^2 = hs^2dx^2 + hs^2dy^2$, og saaledes er

$dy^2 = \frac{hs^2dx^2}{x+h.(1-s^2)}$, men $1-s^2 = c^2$,

følgelig bliver $dy = \frac{s\sqrt{h}\,dx}{\sqrt{x+c^2h}}$, og derfor $y = 2s\sqrt{h}.\sqrt{x+c^2h}$ $+ B$.

Denne uforanderlige Størrelse bestemmes af det Ligheden bliver udi A, naar $x = 0$, i hvilken Tilfælde $y = 2sch$, og da over AL y bestandig tager af, er $B = +2sch$: Følgelig i Alminde-ligheden $y = 2s\sqrt{h}.\sqrt{x+c^2h} + 2sch$, eller $y^2 - 4schy = 4s^2hx$.

§. 198.

Man seer let, at denne Ligheden er til Parabolen, men saa at Abscisse og Semiordinate ei passe sammen i Axeln. For derfor at forandre den til den sædvanlige Ligheden for Axeln af Parabolen, maa allerførst agtes, at, naar $x = 0$, bliver $y = 4sch = 2AL$. Følgelig bliver $AL = 2sch$, og gM Semiordinaten til Axeln $= y - 2sch$. Den er en Parabol.

For nu videre at bestemme BL. Da, om Parametern kaldes p, er det klart, at, siden $LM = x$ er $pBL + px = Mg^2 = y^2 - 4schy + 4s^2c^2h^2$, og da $y^2 - 4schy = 4s^2hx$ §. 197, bliver $p.BL + px = 4s^2hx + 4s^2c^2h^2$, hvoraf trekkes 1) $px = 4s^2hx$. Naar Leddene sammenlignes i Ligheden,

og følgelig, at Parametern til Axlen i Parabolen $p = 4s^2h$.

2) $p.BL = 4s^2c^2h^2 = p.c^2h$, hvoraf sees,

at den største Høide, hvortil Kastet kan komme over Horizonten, eller $BL = c^2h$.

3) At Ligheden til Parabolen bliver, om de foranderlige Størrelser begge begynde i dens Spitse eller horizontale Tangent B. $pz = vv$, om $z = x + c^2 h$ og $v = y - 2sch$; ellers, naar x og y begynde som før, bliver $4s^2 hx = y^2 - 4schy$. Nemlig x begynder om den Distance $c^2 h$ fra Spitsen af Parabolen.

§. 199.

Parametrene ere som Quadraterne af Cosinus af Forhøinings-Vinklerne, om Hastigheden er den samme.

Deraf sluttes videre, at fordi $p = 4s^2 h$. Da om h bliver bestandig, forandres Parametern for Axlen af Parabolen altid efter Quadraten af Cosinus af Forhøinings-Vinklen.

§. 200.

Ligeledes bestemmes Skuddenes største Høide saavel under den samme, som under adskillige Hastigheder.

Og da $BL = c^2 h$. Da om Hastigheden er som før under adskillige Forhøinings-Vinkler den samme, bliver Skuddenes adskillige største Høider over Horizonten propotionerte Quadraten af Sinus af Forhøinings-Vinklerne. Og om Hastigheden er adskillig, men Forhøinings-Vinklerne de samme, da forholde de sig som Quadraterne af Hastighederne.

§. 201.

Tiderne af Bevægelsen bestemmes ligeledes.

Tiden angaaende, saa, siden $dy = s\sqrt{h}\,dt$, er $y = ts\sqrt{h}$. Og da, naar $t = 0$, y bliver lige saa stor, som naar den hele Tid er til Ende, og den bestandige Størrelse i den alierede findes, saa bliver for det hele Fald $t = \frac{4sch}{s\sqrt{h}} = 4c\sqrt{h}$ §. 198. Hvoraf sees, at Tiderne, i hvilke Bevægelsen skeer over Horizonten, naar Hastigheden er den samme, men Forhøinings-Vinklerne forandres, ere altid proportionerte Sinus af Forhøinings-Vinklerne.

§. 202.

§. 202.

Og da dt er som dy, saa sees §. 197, at lige store horizontale Rum altid igiennemlobes i lige store Tider, saa at Bevægelsen hen efter Horizonten er altid en ensdan Bevægelse.

§. 203.

Da $2AL = 4sch$, saa følger

1) At om Hastighederne blive de samme, saa forholde sig de horizontale Løb under adskillige Forhøinings-Vinkler som Sinus af de dobbelte Forhøinings-Vinkler $= 2sc$.

Saa og de horizontale Løbs indbyrdes Forhold i alle Tilfælde.

2) Ere Forhøinings-Vinklerne de samme, da forholde sig de horizontale Løb, der svare til adskillige Hastigheder, som Quadraterne af disse Hastigheder.

3) Og ere baade Forhøinings Vinklerne og Hastighederne adskillige, da forholde de horizontale Løb sig i sammensat Forhold af de dobbelte Forhøinings-Vinkler og af Hastighedernes Quadrater.

§. 204.

Dersom i o er Parabolens Brende-Punkt, da veed man af den koniske Geometrie, at $oB = \frac{1}{4}p = s^2h$. Man veed fremdeles, at enhver Linie, som op er $= Bq + Bo = s^2h + c^2h - x = h - x = DK$. Hvoraf sees.

Den Høide, der svarer til Hastigheden, er i et hvert Punkt af Parabolen den rette Linie, som gaaer fra sammes Brende-Punkt til Punkterne i den krumme Linie.

At enhver Linie, som trekkes fra Parabolens Brende-Punkt til et Punkt i Parabolen, er den Høide, ved at falde igiennem hvilken Hastigheden udi samme Punkt kunde vindes.

§. 205.

Deraf sees, hvorledes man altid kan, da Parametern til Parabolen er given, beskrive Parabolen, og fremdeles giøre en Mængde andre Slutninger; Men da det allerede sagte er i disse Henseende nok, ville vi ei længere derved opholde os.

Fiortende Forelæsning.

Om Bevægelsens Hindring i flydende Materier, saa tidt som Legemerne i at bevæges af dem lide en Modstand.

§. 238.

Aarsagerne til de flydende Materiers Modstand, som her betragtes, ere Inertien og Tenaciteten.

Endskiont vi her ikke ville med Flid handle om Reglerne for de flydende Tings Modstand, fordi disse Betragtninger henhøre egentlig til Hydraulik, er det os dog paa en vis Maade nødvendigt, i Anledning af det foregaaende, tildeels at betragte de Hindringer, hvorved de flydende Materier, igiennem hvilke Tingene bevæges, svække Bevægelsen, siden at al Bevægelse hos os skeer sædvanlig igiennem deslige Materier, og det derfor i disse Henseende er af Betydenhed at vide, for hvor vidt det vi i det foregaaende have bevisst at være, naar ingen Modstand var, sikker kan anvendes udi Brugen eller ikke. Til den Ende iagttage vi allerforst, at i de flydende Ting, efter deres adskillige Natur og Beskaffenheder adskillige Aarsager kunde forefalde, som hver for sig kunde paa sin Maade foraarsage en Modstand imod Bevægelsen. Af dem alle betragte vi her ikke meer end to. Den ene er de flydende Væseners Inertie. Den anden den

ringe

ringe Kraft, hvormed Delene af de flydende Væsener henge sammen, og som man sædvanlig pleier at kalde de flydende Deles Tenacité. Virkelig ere heller ikke andre deslige Aarsager synderlig bekiendte.

§. 239.

Modstanden, hvilken foraarsages af de flydende Tings Inertie alene, er proportionert Hastighedernes Quadrat.

Hvad Inertien angaaer, da om den virkede alene, er det temmelig let at indsee, at Modstanden, i Folge den, maatte altid blive Quadraten af den Tings Hastighed proportionert, som bevægede sig imod Delene af den flydende Materie. Thi da det kommer paa et ud, hvad heller at et Legeme bevæger sig imod den flydende Materie, eller om den flydende Materie bevæger sig imod Legemet, saa folger, at om i den flydende Materie, som stoder an paa et Legeme, der hviler, Hastigheden blev dobbelt, maatte tillige de anstodende Partiklers Antal blive dobbelt udi samme Tid. Folgelig da Anstodets Kræfter, som yttrer sig i en uendelig liden Tid, eller den hele Pression er som Massen i Hastigheden. §. 26. Og Massen er her Hastigheden proportionert, saa bliver den hele Modstand eller den hele Pression proportionert Hastighedens Quadrat, om Modstanden af Inertien alene tages i Betragtning.

§. 240.

Modstanden af Tenaciteten er derimod Hastigheden proportionert.

Saafremt derimod, at man ikke betragter uden den Modstand, som kommer af Tenaciteten eller af de flydende Deles sammenhengende Kraft; da, saa længe Hastigheden

er

er den samme, bliver den immerfort bestandig eller Tiden proportionert. Er Hastigheden adskillig, bliver den Hastigheden proportionert, fordi i samme Tid med dobbelt Hastighed et dobbelt Antal Partikler skilles af det samme Legeme fra hverandre, ved en tredobbelt Hastighed et tredobbelt Antal o. s. v.

§. 241.

I hvad Tilfælde af Bevægelsen disse adskillige Modstandens Love have Sted.

Saasnart som Bevægelsen er stor og Hastigheden anseelig, synes de flydende Tings Modstand efter de desangaaende giorte Erfaringer temmelig at nærme sig den Modstands Lov, der er som Hastighedens Quadrat. Thi da de flydende Deles sammenhengende Kraft ikke er uden meget liden, bliver den som intet at regne imod den Modstand, hvilken Inertien forvolder, naar Hastigheden er anseelig stor. I de meget langsomme Bevægelser derimod synes den Modstand, hvilken er som Hastigheden, at have Sted frem for den, som er proportionert Hastighedens Quadrat. Denne sidste synes endog da at være i høi Grad ubetydelig, og neppe engang værd at betragte.

§. 242.

Ingen af dem treffer fuldkommen ind med Erfaring.

Alt dette uagtet, er det endnu meget vanskeligt at sige, hvorudi den sande Modstandens Hypothese udi Luften og i Almindelighed i Naturen bestaaer. Det er unegteligt, at de tvende foromtalte nærme sig den anseelig, men da de af dem giorte Slutninger ikke treffe saa aldeles noie ind med Erfaring, som man skulde og maatte onske, saa bliver Modstandens

dens naturlige Love endnu iblant de Ting, som fremdeles noiere bør undersøges. I sær, saa tidt som den flydende Materie i alle sine Dele ei er af samme Tykkelse, men denne sidste er i adskillige Lag adskillig, saaledes som i Luften. I dette Tilfælde kommer det ei alene an paa, at vide i hvad Forhold at Modstanden staaer med Hastigheden; men desuden, hvorledes Modstanden voxer eller tager af i Henseende til Inertiens større eller mindre Mængde i disse adskillige Lag. Men, endskiønt at disse Love langt fra ikke ere ret bekiendte, saa viser dog Erfaring, at den Hypothese af Modstand, der sætter samme proportionert Hastighedens Quadrat, nærmer sig temmelig til den sande Luftens Modstand paa maadelig store Distancer, naar Hastigheden er nogenlunde anseelig.

§. 243.

I det Tilfælde af retlined Bevægelse, da et Legeme uden at drives af andre Kræfter bevæger sig imod den flydende Materie med en vis given Hastighed.

Antager man den flydende Materie, der staaer imod, som at være overalt lige tyk; følgelig og, som den, der yttrer overalt samme Modstand, naar Hastigheden er den samme i det Legeme, som bevæger sig imod den. Da kunne i Henseende til Bevægelsen adskillige Tilfælde skilles fra hverandre, hvoraf den simpleste er den, at et Legeme betragtes som at bevæge sig imod den flydende Materie med en det engang meddeelt Hastighed, uden at drives af andre Kræfter, end af sin Hastighed alene. Det forstaaer sig selv, at Modstanden da altid svækker Bevægelsen; var den overalt bestandig og saa stor som Tyngden, er der ingen Tvivl paa, at jo i dette Tilfælde Hastigheden paa samme Maade maatte ved det

Flydendes Modstand tabe sig, som naar et Legeme stiger op efter med en vis given Hastighed, men bliver imidlertid idelig drevet ned efter af Tyngden; i hvilket Tilfælde det ei kunde igiennemlobe et større Rum, end det er, ved at falde igiennem hvilket, den Hastighed, som det begyndte at bevæges med, ved Faldet kunde erhoervdes.

§. 244.

Tabes den hele Hastighed ikke uden i en uendelig Tid og igiennem et uendeligt Rum, med mindre at Modstanden er en mindre Høide af Hastigheden, end Quadrat-Roden.

Men det, som her maa synes besynderligt, er, at Udregningerne vise (*), at saa tidt som Modstanden er som Quadraten af Hastigheden forkeert, kan i dette Tilfælde i flydende Materier som staae imod, Bevægelsen ikke tabes uden i en uendelig Tid og igiennem et uendeligt Rum. Man bevi-ser i Almindelighed, at det selvsamme altid maa have Sted, saa tidt som Modstanden retter sig efter en Høide af Hastigheden større end Quadraten, og ikke det alene; men er Modstanden som Hastigheden, tabes endda ikke Hastigheden, uden paa selvsamme Maade. Tiden, hvori hele Hastigheden taber sig, bliver virkelig ikke endelig, med mindre at Modstanden retter sig efter en Høide af Hastigheden, som er mindre end dens Quadrat-Rod. (**)

§. 245.

Dette stemmer vel ikke ganske med Erfaring, imidlertid kan deraf dog ikke sluttes, at de foromtalte Hypotheser vige

(*) See Tillægget §. 208. 209.

(*) Alt beviſes i Tillægget fra §. 209 - 220.

vige saa overmaade af fra den rette naturlige, saa de ei skulde kunde bruges. Thi Aarsagen, hvorfor Hastigheden ikke taber sig i de foromtalte Tilfælde, naar den bliver meget liden, er, fordi at Modstanden da, saa at sige, forsvinder. Desuden er det i Luften vanskeligt at bestemme ved Erfaring, om et Legeme af samme Tyngde, som Luften selv, kan ved en given Hastighed bevæge sig i dette Element uendelig langt bort eller ikke, naar det ei under Bevægelsen blev drevet af andre Kræfter end af sin Hastighed alene. I Vandene derimod eller i de tykke flydende Materier er det altid vist, at Bevægelsen af de i dem udkastede Ting, hvilke ere af samme specifike Tyngde som de flydende Ting selv, ei gaae fort i det uendelige, men at den endog taber sig paa maadelige Rum. Dette sidste stemmer vel ikke med Theorien §. 244. saa noie, som det skulde; men desuagtet bliver det dog altid vist, at de samme Udregninger, som vise, at Bevægelsen bør være uendelig, saa længe som den Forhold, der er imellem det Flydendes Tykkelse og det igiennemlobne Rum er endelig; de samme vise (*), at i overmaade tykke Materier Hastigheden ei alene maa tabe sig over endelige, men endog over meget smaa Rum.

§. 246.

Maade at bestemme Modstandens Større i Henseende til Tyngden.

For at forstaae dette saa meget desto bedre, ville vi ydermere agte, at det i disse Udregninger, som i alle andre, er det tydeligste og beste, at bestemme Kræfterne af Modstan-

(*) See Tillægget §. 210.

den i Henseende til en vis given Unitet. Da derfor den Kraft, vi best kiender, er Tyngden, bestemmes Modstanden og best i Henseende til den. Kalder man derfor den Hastighed $\sqrt{c}$, med hvilken, naar en Ting bevæger sig imod en overalt ensdan flydende Materie, Modstanden da bliver saa stor som Tyngden. Kaldes enhver anden Hastighed ubestemt-viis $\sqrt{z}$, og den i bende Materies Modstand sættes at være som Quadraten af Hastigheden. Da bliver den virkelige Modstand, som svarer til enhver anden Hastighed, $\frac{gz}{c}$, fordi $c : g = z$ til den ubestemte Modstand.

§. 247.

I hvad Tilfælde Modstanden bør ansees som ubetydelig, saa tidt som den retter sig efter Hastighedens Quadrat.

Deraf sees, at i alle Hypotheser af Modstand, jo tykkere af Materie at det Flydende er af, desto mindre bliver c; af jo tyndere derimod at det Flydende er, en desto større Størrelse bliver c. Folgelig, om et flydende Væsen var uendelig tyndt, maatte $\frac{gz}{c}$ eller Modstanden blive inter, fordi c da blev som noget uendeligt stort at regne imod g og z. Hvoraf sees, at da i Luften c nodvendig maa være en anseelig stor Størrelse; saa længe da som Bevægelsen er meget langsom, eller z meget liden, bliver fast $\frac{gz}{c} = 0$, hvorfor og Modstanden, der foraarsages af Luften, kan i dette Tilfælde ansees for intet. Derimod er vel noget langt andet, naar z er en stor Størrelse, siden $z : c$, da bliver en endelig Forhold.

§. 248.

§. 248.

I hvad Tilfælde derimod at Bevægelsen formedelst Modstanden strax maa høre op.

Paa den anden Side derimod, saa tidt som det Flydende er overmaade [illegible] derfor $\frac{gz}{c} = \frac{1}{0}$ $= \infty$. Modstanden bliver [illegible] Kraft, hvorfor og Bevægelsen da unegtelig over et meget uden [illegible] og i en ganske kort Tid maatte ophøre, med mindre at den Hastighed var uendelig stor, hvormed Tingene begyndte at bevæge sig imod det flydende. Saafremt derfor, at den retlinede Bevægelse skulde skee i deslige overmaade tykke Materier med endelige Hastigheder, maatte Bevægelsen paa Øieblikket høre op.

I Almindelighed forstaaes af det allerede sagte, at jo tyndere det flydende er, desto mindre, jo tykkere det er, desto meer forsinkes Bevægelsen, alt for Resten lige.

§. 249.

Dersom Tingene falde i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden, da bliver den største Hastighed den, imod hvilken Modstanden er saa stor som Tyngden.

Foruden dette Tilfælde, da Modstanden alene hindrer Bevægelsen, er i den, endog naar den skeer simpel hen i ret Linie, endnu to andre Hoved-Forandringer at agte. Den ene, naar Tingene falde ned efter, og under Faldet Tyngden befordrer, men det Flydendes Modstand [illegible] svækker Bevægelsen. I dette Tilfælde, naar, som for, Tyngden, som driver ned efter, kaldes g, bliver den hele hastiggiørende Kraft, der befordrer Bevægelsen ned efter, $g - \frac{gz}{c}$. Men da z i Begyndelsen idelig voxer, saa bliver $\frac{gz}{c}$ alt større og

større; følgelig bliver $g - \frac{gz}{c}$, eller den hele ned efter drivende Kraft, altid mindre og mindre. Hvoraf sees, at Hastigheden her langt fra ikke kan ved Faldet voxe til den Grad, som i den frie og uhindrede Bevægelse; men at omsider, naar $z = c$, hvilket er den største Grad, hvortil Hastigheden kan voxe, den hele hastiggiorende Kraft ned efter ganske maa tabe sig, og Bevægelsen maa siden skee simpel hen, som om hverken Tyngde eller Modstand virkede; fordi disse to Kræfter fra det Øieblik af, da $z = c$, giøre hinanden bestandig til intet.

§. 250.

Men denne Hastighed vindes dog ikke uden i en uendelig stor Tid og igiennem et uendeligt Rum.

Saaledes kan ved Faldet i flydende Materier, som staae imod, aldrig uden en vis Hastighed vindes, om end at Faldet selv varer i en uendelig Tid, og gaaer fort over et uendeligt Rum. Men det, hvad Udregningerne her vise (*), er ikke mindre besynderligt, end det, hvad vi forhen have anmerket i §. 243. Skiønt den største Hastighed, som vindes ved Faldet, ikke er uden endelig, kan den dog ved Faldet i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden, ikke blive til, for et uendeligt Rum i en uendelig lang Tid er blevet igiennemlobet; følgelig er det heller ikke for efter en uendelig lang Tid, at denne Bevægelse bliver ensdan, og at Modstanden bliver saa stor som Tyngden. Aarsagen er, at Bevægelsens Formering bliver ukiendelig liden over et anse-

(*) See Tillægget fra §. 221 - 230.

anseeligt Rum, saasnart som Modstanden er omtrent blevet af samme Storrelse som Tyngden.

§. 251.

I hvad Tilfælde at Tingene ved Faldet langt fra ikke vinde en nye Hastighed, men meget meer tabe af den de have.

Deraf sees ydermere, at om Tingene i Begyndelsen af Bevægelsen have en vis Hastighed, hvormed at de falde ned efter, da kan den være saa stor, at Tingen, langt fra at blive drevet idelig med større Hastighed ned efter af Tyngden, tvertimod taber strax af sin Bevægelse. Thi dette maa altid have Sted, saa tidt som den Hastighed, hvormed at Tingen begynder sit Fald, er større end den største Hastighed, hvilken kan vindes ved Faldet, eller, (hvilket kommer paa et ud) naar den til denne Hastighed svarende Modstand er større end Tyngden eller den bestandige Kraft, som driver Legemet ned efter.

§. 252.

I hvad Tilfælde at de forhen givne Regler for den frie Bevægelse endnu kunde bruges i flydende Materier, som staae imod.

Beskaffenhederne af Faldet ere derfor langt anderledes, naar Bevægelsen skeer i en flydende Materie, som staaer imod, end naar den skeer uden al Hindring, saaledes som vi i det foregaaende have betragtet den. Hastigheden retter sig langt fra ikke her, som i den frie Bevægelse, efter Quadrat-Roden af den igiennemlobne Høide, en eneste Tilfælde undtagen (*), naar nemlig baade den flydende Materies Tykkelse er overmaade liden, og den Høide, igiennem hvilken Faldet uden Hastighed i Begyndelsen skeer, er meget ubetydelig imod den, som svarer til den Hastighed, imod hvilken Modstanden i Luften er saa stor som Tyng-

(*) See Tillægget §. 227.

Tyngden. Dette er Aarsagen, hvorfor vi, uagtet Luftens Modstand, i Machin-Væsenet altid kunde uden kiendelig Forskiel giøre Brug af alle de Sætninger, som vi forhen have bevist for den frie Bevægelse. Fordi vi da altid ere fast i det Tilfælde af denne sidste Hypothese. I store Fald og Bevægelser derimod er Beskaffenheden en langt anden. De for den frie Bevægelse givne Regler finde da ikke meer Sted.

§. 253.

Beskaffenheden af Bevægelsen, naar Legemerne stige i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden.

Det tredie Tilfælde, som i den retlinede hindrede Bevægelse fortiener at eftertænkes, er; naar Legemerne stige med visse givne Hastigheder op efter, og formindskes derfor udi deres Bevægelse ikke alene af det Flydendes Modstand, men endog af Tyngden, der driver ned efter i en Direktion, som er Bevægelsen imodsat, saa tidt denne skeer i Vertikalen, som vi her antage det. Thi da bliver den hele hindrende Kraft $= g + \frac{gz}{c}$. Hvoraf sees

At i flydende Materier, som staae imod, skeer Bevægelsen, i Henseende til Faldets og Stigningens indbyrdes Henseender, heller ikke som i den frie Bevægelse. Thi i den hindrede Bevægelse maa nødvendig Tiden af Stigningen, saavel som Høiden selv, hvortil Legemet stiger, blive mindre end Tiden af Faldet og det ved dette sidste igiennemløbne Rum, naar nemlig Hastigheden i Enden af Faldet og i Begyndelsen af Stigningen er den samme.

§. 254.

§. 254.

Imidlertid bliver i Bevægelsen op og ned efter Ulighe- I de tyndere flydende Ting hindres Bevægelsen mindre, end i de tykkere.
den altid mindre i de i sig tyndere, end i de i sig tykkere flydende Materier, som let sees; fordi $\frac{gz}{c}$ bliver i de første en ulige mindre Størrelse end i de sidste.

§. 255.

Ligeledes bliver Virkningen af Modstanden altid mindre (alt for Resten lige) paa Ting af større Tyngde under samme ydere Omfoob, end paa de lettere; fordi de førstes hele Bevægelse, eller det i dem, som faaes ved at multiplicere Hastigheden med Massen §. 27, bliver større end i de sidste. Er Tyngden den samme under samme ydere Omsvob, men Legemerne derimod, som bevæges, af ulige Størrelse, da tabe i den samme flydende Materie de mindre Ting snarere deres Bevægelse end de store, fordi at Modstanden er Overfladen eller Diameterns Quadrat i ligedanne Ting; deres hele Kræfter derimod, for saa vidt, som at de beroe paa Massen, ere Kubik-Indholden proportionerte. Saa og i flydende Materier af samme Tykkelse er Tabet, som de tykkere Legemer gior, mindre, end det, som i den gjores af de tyndere.

§. 256.

Faldet over de krumme Linier er ligeledes udi flydende Materier, som staae imod, af en langt anden Beskaffenhed, end i den uhindrede Bevægelse. I sær er det betydeligt, at i det første Tilfælde i §. 249, (T. XII. F. 1.) naar Faldet skeer over den krumme Linie AB, hvis horizontale Tangent er i B, da voxer ikke Hastigheden hele Linien AB igiennem I Faldet over de krumme Linier bliver Hastigheden ikke størst i det nederste Punkt.

indtil i B, men alene til et vist Punkt L, i hvilket Modstanden forholder sig til Tyngden, som Cosinus af den Vinkel, hvilken i samme Punkt Tangenten gior med Vertikalen, til den hele Sinus (*).

§. 257.

I flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Distancen, taber sig Cykloidens isokrone Egenskaber, med mindre at Bevægelsen er høist langsom.

Man seer deraf fremdeles, og af det, som allerede forhen er blevet sagt om Faldet ned efter de rette Linier §. 247 og følg. at Faldet over de skraaeliggende Linier er i flydende Ting, som staae imod, langt fra heller ikke af den Beskaffenhed, som i den uhindrede Bevægelse, med mindre, at baade den flydende Materie er overmaade tynd, og Længden af Faldet ubetydelig imod den Høide, som svarer til den Hastighed, imod hvilken Modstanden er saa stor som Tyngden (**). Men det Betydeligste i alle disse Henseende er Faldet udi Cykloiden. Denne Linie taber i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden, ganske og aldeles sin isokrone Egenskab (***). Tiden igiennem dens Buer beroer altid paa Buernes Længde, saa Faldet ikke skeer over adskillige cykloidale Buer udi lige Tider, uden i det Tilfælde alene, da de ere overmaade smaa. Desuagtet maa man ikke tænke, at af de Forsøg udi Cykloiden, hvilke vi forhen have anført som tilforladelige experimentale Beviis paa de store Tyngdens og Naturens Love, intet sikkert kan sluttes. Thi i alle disse Forsøg er Hastig-

(*) See Tillægget §. 801.

(**) See Tillægget §. 289 - 299.

(***) See Tillægget §. 305 - 308.

Hastigheden af Bevægelsen overmaade liden, saa den Modstand af Inertien, hvilken er som Quadraten af Hastigheden, i disse Forsog aldeles ikke hindrer. §. 247. Saafremt man vil meene, at derimod den Modstand, som kommer af Tenaciteten, skulde kunde giore disse Forsog utilforladelige, da er det beviist (*), at endskiont Cykloiden taber sin isokrone Egenskab i den Hypothese, da Modstanden er som Quadraten af Hastigheden, beholder den dog denne Egenskab lige fuldt, naar Modstanden ei er uden Hastigheden proportionert, og udi alle de Tilfælde, da Modstanden kunde ansees som at være bestandig.

§. 258.

Den krumlinede Bevægelse er ligeledes af langt anden Beskaffenhed i flydende Materier, som staae imod, end i den frie og uhindrede Bevægelse. Drives for Ex. de tunge Ting ned efter af Kræfter, som paa Tyngdens Maade virke efter parallele og vertikale Direktioner, da bliver den krumme Linie, som de udkastede Ting beskrive, langt fra ikke en Parabol, men en langt anden Linie (**). I Luften, betragtet som en tynd flydende Materie, hvis Modstand er som Hastighedens Quadrat, bliver den Linie, som nærmer sig til de udkastede Tings sande Bane, en Linie af tredie Orden, og om man vil nærme sig den endnu meer, da en Linie af fierde. I alle andre Ordener kunde algebraiske Linier findes, som nær-

De udkastede Ting beskrive i flydende Materier, som staae imod efter Quadraten af Hastigheden, ikke Paraboler, men deres sande Bane nærmer sig til andre algebraiske Linier af de høiere Ordener.

(*) *Neutons Princip. Philosoph. Lib. 2. Sect. VI. Prop. 26.*

(**) See Tillægget §. 260 - 275.

me sig til den sande Bane, og disse Linier blive idelig af en hoiere Orden, eftersom det Flydendes Modstand antages at blive større til. Imidlertid kan her ikke negtes, at jo den forhen givne Theorie af Parabolen ikke treffer ind med den sande Bevægelse, med mindre at de udkastede Ting ere anseelig tunge og deres Hastighed maadelig. I dette Tilfælde nærmer den paraboliske Theorie, som forhen sagt, sig temmelig noie til den sande, men man maa altid tilstaae, at den er ikke saa noie, som den, der af de forhen omtalte Linier af tredie og fierde Orden kunde bestemmes.

§. 159.

Almindelige Anmerkninger om Bevægelsen ved Central-Kræfterne i flydende Materier, som staae imod.

Angaaende de andre centrale Kræfter og den af dem foraarsagede krumlinede Bevægelse, da var i Henseende til dem overmaade meget at erindre, i Anledning af det, hvad vore Tiders Geometrer allerede have sagt og bevist, men endnu meget mere, naar man seer paa, hvad desangaaende kunde siges, som endnu af alle er bleven urørt. Det er unegteligt, at endskiont man i disse Materier ikke kan giøre andet, end gaae fort ved Hypotheser, ere de dog desuagtet overmaade vigtige i Physik og i de Undersøgninger, som udfordres til at kiende de sande Naturens Love. Saaledes er det unegteligt, i Følge det, som vi forhen have sagt; at om Planeterne bevæges i ledige Rum, de da maa drives af Kræfter, som ere centrale og af den Beskaffenhed, som vi der have tillagt dem, saa der paa denne Maade unegtelig bliver en almindelig Tyngde til i Naturen, i det mindste i vores Sole-

Systeme.

Systeme. Men deraf kan langt fra ikke sluttes, at de Baner, som i Himlene beskrives af Planeterne, ikke kunde beskrives af dem i flydende Materier, som stode imod, saa snart som andre Kræfter regierede i Naturen (*). Saa de flydende Tings Modstand er af en uendelig Vigtighed i Naturens Betragtning, og kan give Anledning til utallige Undersøgninger, som ikke ere mindre vanskelige, end nyttige i den sande Kundskab.

Tiende Tillæg.

Om de flydende Tings Modstand, igiennem hvilke Legemerne bevæge sig.

Første Inddeelning.

Om den retlinede Bevægelse.

§. 206.

Adskillige Tilfælde i den retlinede Bevægelse, som bør betragtes, naar en flydende Materie staaer imod.

I Følge af det, som vi allerede have sagt udi Forelæsningen, forefalde i den retlinede Bevægelse 3 Hoved-Tilfælde at betragte.

a) Naar et Legeme bevæges imod den flydende Materie, uden at drives af andre Kræfter end af Hastigheden i den samme rette Linie alene.

(*) See Tillægget §. 283 - 285.

b) Naar det falder, drevet af visse Kræfter, og Begyndelsen af Faldet skeer enten uden, eller med en vis given Hastighed.

c) Naar Legemerne stige med en vis given Hastighed op efter, imidlertid at de idelig drives ned efter af hastiggiørende Kræfter.

Vi ville kortelig vise det betydeligste, som fortiener at eftertænkes i disse tre Tilfælde, saavel, naar den flydende Materie er overalt af samme Tykkelse og Modstand, som naar dens Modstand og Tykkelse er foranderlig paa adskillige Distancer.

§. 207.

Første Tilfælde.

Naar et Legeme bevæger sig imod en overalt ensdan flydende Materie, som staaer imod, drevet af dets Hastighed alene.

1) Naar denne Materie er overalt lige tyk, dens Modstand, som Quadraten af Hastigheden, og de udkastede Ting bevæge sig alene ved deres Hastighed, uden at drives af andre Kræfter.

Er den Hastighed, hvormed Bevægelsen begynder $= A$, den Linie, hen efter hvilken Bevægelsen skeer, AB (Taf. XI. Fig. 7.). Antages Begyndelsen af Bevægelsen at skee udi A, saa at $Ab = x$ og $ab = dx$, da beroer Udregningen her, ligesom forhen, simpel hen paa de først givne almindelige Regler for Bevægelsen. Saaledes om Modstanden antages at være som Quadraten af Distancen, (da dette er den eneste Hypothese, som stemmer med Naturen) og $\frac{np}{m}dt = dv$ §. 5, men efter det §. 246 For. sagte, er her $\frac{np}{m} = \frac{gz}{c}$, og saaledes, fordi Hastigheden idelig formindskes, alt som Tiden voxer, $-\frac{gz}{c}dt = dv$. Men $v^2 = z$, fordi z er den Heide, som svarer

til

til Hastigheden udi b, følgelig $v = \sqrt{z}$, og $dv = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$. Altsaa faaes $\frac{2g}{c}dt = -dz.z^{-\frac{3}{2}}$ og $\frac{g}{c}t = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + B$. B bestemmes af, hvad Integralen bliver, naar $t = 0$, da $\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, saa den fuldstændige Ligned derfor bliver; $\frac{g}{c}t\sqrt{z}\sqrt{A} = \sqrt{A} - \sqrt{z}$, eller $t = \frac{c(\sqrt{A} - \sqrt{z})}{g\sqrt{z}\sqrt{A}}$.

§. 208.

Deraf kan, naar Hastigheden er given, Tiden altid bestemmes, udi hvilken den Hastighed $\sqrt{A}$ forandres til den søgte $\sqrt{z}$. Men det, som her bør synes besynderligt, er, at om Hastigheden ganske skal tabe sig, da kan det ikke skee, med mindre at Tiden først er blevet uendelig stor. Thi er $\sqrt{z} = 0$, bliver $t = \frac{1}{0}$, og derfor ∞.

I denne Hypotheſe tabes Hastigheden ikke uden i en uendelig Tid.

§. 209.

Det samme findes, om man søger Ligheden imellem Hastigheden og Rummet, da man faaer §. 7. $-\frac{gz}{c}dx = dz$, og $-\frac{g}{c}dx = \frac{dz}{z}$. Hvoraf Integralen er $\text{Log.}\, z = -\frac{g}{c}x + B$. Men B bestemmes derved. At naar $x = 0$ er $z = A$. Saa det fuldstændige Integral bliver $\text{Log.}\, z - \text{Log.}\, A = -\frac{g}{c}x$, eller $\text{Log.}\, \frac{A}{z} = \frac{gx}{c}$. Forstaaes ved e det Tal i den hyperbolske Logarithmique,

Ei heller uden igiennem et uendeligt Rum.

que, hvis Logar. = 1. Da bliver $z = \frac{A}{e^{\frac{x}{c}}}$, om $g = 1$.

Følgelig bliver Hastigheden eller $\sqrt{z} = \frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{2c}}}$.

§. 210.

Den Hypothese af Modstanden som Quadraten af Hastigheden stemmer ei ganske med Erfaring.

Deraf sees, at om Hastigheden skal ganske tabes, saa $\sqrt{z} = 0$, bliver $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{2c}}} = 0$, hvilket, saa tidt som A og c ere endelige Størrelser, aldrig kan skee, med mindre at $x = \infty$. Saa den hele Hastighed, hvormed Tingene skydes eller kastes ud, ikke kan tabe sig, førend at i en uendelig lang Tid et uendelig langt Rum er blevet igiennemløbet.

Er derimod c en uendelig liden Størrelse; hvilket sidste haver Sted, saa tidt som den flydende Materie er overmaade tyk, da bliver dog $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{2c}}} = 0$, om end x ikke er uden en meget liden endelig Størrelse imod c. Følgelig kan i dette Tilfælde Hastigheden tabes ei alene over et endeligt, men endog over et anseelig lidet Rum.

§. 211.

Tiden bestemmes i samme Henseende til Rummet.

Tiden af Bevægelsen bestemmes ligeledes i Henseende til Rummet. Thi da $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{A.e^{\frac{-x}{c}}}}$. Saa er, fordi Log.$e = 1$,

$$1 = \frac{2c.e^{\frac{-x}{2c}} - 2c}{A^{\frac{1}{2}}}.$$

§. 212.

§. 212.

Skiønt at i den Hypothese af en Modstand, som Quadraten af Hastigheden forkeert, de med en vis Hastighed udkastede Legemer ikke kunde tabe deres hele Bevægelse uden i en uendelig Tid og over et uendeligt Rum. Saa kan det dog skee under andre Betingninger, hvorfor vi og i Almindelighed ville undersøge, hvad der bør skee i disse Henseende, saa tidt som de flydende Tings Modstand er som den ubestemte Høide $2m$ af Hastigheden. I dette Tilfælde bliver $c^m : g = z^m :$ $\frac{z^m}{c^m} g$, eller om $g = 1$, som $\frac{z^m}{c^m}$. Hvilket tilkiendegiver den virkelige Modstand.

Hastigheden bestemmes i Almindelighed, naar Modstanden er en given Høide af samme.

Sætter man derfor i den Ligned $-\frac{np}{m} dx = v dv$; $\frac{np}{m} = \frac{z^m}{c^m}$, og $v dv = dz$, som før §. 207. Da bliver $-\frac{z^m}{c^m} dx = dz$, og $-\frac{dx}{c^m} = z^{-m} dz$. Hvoraf Integralen er $-\frac{x}{c^m} = \frac{1}{1-m} z^{-m+1}$ $= \frac{z^{1-m}}{1-m} + B$, saa man faaer $-\frac{x}{c^m} = \frac{z^{1-m} - A^{1-m}}{1-m}$ og $z^{1-m} = \frac{c^m A^{1-m} - x(1-m)}{c^m}$,

felgelig $z = \frac{\sqrt[1-m]{c^m A^{1-m} - (1-m)x}}{\sqrt[1-m]{c^m}}$.

§. 213.

Hastigheden tabes ikke uden igiennem et uendeligt Rum, saa tidt som Modstanden er en Høide af Hastigheden større end Quadraten.

Deraf sees, at saa tidt som $m > 1$, bliver i forrige Lighed $z = \frac{\sqrt[m-1]{c^m}}{\sqrt[m-1]{c^m A^{1-m} + (m-1)x}}$, eller om man dividerer under Tegnene oven og neden med A^{1-m}. Faaes i forrige Lighed

$$z = \frac{\sqrt[1-m]{c^m + (m-1)x : A^{1-m}}}{\sqrt[1-m]{c^m : A^{1-m}}}, \text{ eller } \frac{A \cdot \sqrt[m-1]{c^m - 1}}{\sqrt[m-1]{c^m + (m-1)x \cdot A^{m-1}}} = z,$$

hvilken Værdie af z er lettere at bruge, og strax viser.

At saa tidt som Modstanden skeer, enten efter Quadraten af Hastigheden, eller efter en anden Høide af denne sidste, som er større end Hastighedens Quadrat. Da bliver aldrig den hele Hastighed tilintetgiort, før et uendeligt Rum først er blevet igiennemløbet. Thi er $z = 0$, maa $\frac{A \cdot \sqrt[m-1]{c^m - 1}}{\sqrt[m-1]{c^m + (m-1)x \cdot A^{m-1}}} = 0$, og følgelig $x = \infty$.

§. 214.

Yttrer sig derimod Modstanden efter en Høide af Hastigheden, som er mindre end 1, da tabes Hastigheden altid over et endeligt Rum.

Modstandens Lov maa derfor være en noget mindre Høide af Hastigheden, end den, der er som sammes Quadrat. For at see dette sidste desto tydeligere, ville vi antage $m < 1$, og §. 212. $z = \frac{\sqrt[1-m]{c^m A^{1-m} - (1-m)x}}{\sqrt[1-m]{c^m}}$, i hvilken Lighed $1 - m$ er en be-

kræf-

kræftende Størrelse. Sættes $z = 0$, bliver $c^m A^{1-m} = (1-m)x$ og $x = \frac{c^m A^{1-m}}{1-m}$. Hvilket bestemmer den største Længde, som det udkastede Legeme kan igiennemløbe, hvilken altid bliver en endelig og bestemt Størrelse.

§. 215.

Sætter man i dette Tilfælde $m = \frac{1}{2}$, eller Modstanden, som Hastigheden simpel hen tagen. Hvilken Lov synes at finde Sted i Naturen, saa længe som Hastigheden ikke er uden meget liden, da bliver som i §. 213. $\sqrt{z} = \frac{2\sqrt{cA} - x}{2\sqrt{c}}$, og den hele Hastighed tabes over et Rum $x = 2\sqrt{cA}$. Saa det Rum, hvorover Hastigheden tabes, kan, om den flydende Materie er tyk, og derfor c en meget liden Størrelse, endog blive meget liden, i sær om den Hastighed $\sqrt{A}$, hvormed Tingen er udkastet, ikke er uden liden. Men det, som her atter igien er besynderligt, er, at Tabet af den hele Hastighed desuagtet altid udfordrer en uendelig lang Tid.

Ligeledes naar Modstanden er som Hastigheden.

§. 216.

For at see dette desto tydeligere, ville vi foretage os Udregningen af Tiden henført til Rummet i den §. 211 anførte almindelige Tilfælde. Da man faaer $dt = \frac{dx \sqrt{\frac{1-m}{c^m}}}{\sqrt{c^m A^{1-m} - (1-m)x}^{1-m}} = dx$

Tidens almindelige Bestemmelse, i hvad Høide af Hastigheden at Modstanden end retter sig efter.

$$= \frac{dx\sqrt[2m-2]{c^m A^{1-m} - (1-m)x}}{\sqrt[2m-2]{c^m}} = \frac{dx.(c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{1}{2m-2}}}{\sqrt[2m-2]{c^m}}.$$

Hvilket er den Deel $\frac{1}{m-1}$ af det ubekiendte Leeds Differential, saa man derfor faaer

$$t = \frac{\frac{1}{m-1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot (c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{\sqrt[m]{c^{2m-2}}} + B, \text{ eller og}$$

$$t = \frac{2(c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)\sqrt[m]{c^{2m-2}}} + B. \text{ Denne bestandige}$$

Størrelse bestemmes deraf, at naar $x = 0$, bliver Integralen

$\frac{2.(c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)\sqrt[m]{c^{2m-2}}}$, saa den fuldstændige Ligned for Tiden bliver

$$t = \frac{2}{2m-1} \cdot \frac{(c^m A^{1-m} + (m-1)x^{\frac{2m-1}{2m-2}} - (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}})}{\sqrt[m]{c^{2m-2}}}.$$

§. 217.

Er Modstanden større end den Høide 1 af Hastigheden, tabes denne sidste aldrig uden i en uendelig Tid.

Deraf følger. At saa tidt som $m > 1$, maa, alt som Tiden tager til, x eller det igiennemløbne Rum ligeledes altid tage til, og naar $x = \infty$, maa $t = \infty$. Følgelig bliver altid den Tid uendelig stor, i hvilken den hele Hastighed skulde tabe sig, siden $x = \infty$.

§. 213.

§. 213. I den Hypothese nemlig, da Modstanden enten er som Quadraten eller en anden Høide af Hastigheden større end Quadraten.

§. 218.

Er $m < 1$, da bliver x ei altid ∞, §. 214. men i Almindelighed $x = \frac{c^m . A^{1-m}}{1-m}$. Imidlertid da $2m - 1$ endnu, saa længe $m > \frac{1}{2}$ bliver en bekræftende Størrelse, maa Tiden desuagtet blive uendelig. Thi sættes i Steden for x, $\frac{c^m A^{1-m}}{1-m}$, saa faaes

Er den mindre end samme Høide, bliver Tiden da altid endelig, saa længe Høiden ei er mindre end Quadrat-Roden af Hastigheden.

$$t = \frac{\frac{2}{2m-1}\left(c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m}\left(\frac{c^m A^{1-m}}{1-m}\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}} - (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}\right)}{\frac{m}{c^{2m-2}}},$$

hvilket, fordi $2m - 2$ er en negtende Størrelse, forandres til

$$t = \frac{\frac{2}{2m-1}\left(\frac{-m}{c^{2m-2}}\right)}{(c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m}(c^m A^{1-m}))^{\frac{2m-1}{2m}} - \frac{\frac{2}{2m-1}(c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{\frac{m}{c^{2m-2}}}},$$ hvoraf det første Stykke viser, at Tiden

bliver uendelig. Thi da den Høide $\frac{2m-1}{2-2m}$ er bekræftende, om $m > \frac{1}{2}$, og $c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m} c^m A^{1-m} = 0$, saa bliver $t = \frac{1}{0} = \infty$.

§. 219.

Er Modstanden som Hastigheden, er Tiden endnu, men i mindste Grad, uendelig.

Er derimod $m = \frac{1}{2}$, da bliver $t = \frac{0}{0}$, fordi $2m - 1 = 0$, saavel som $c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m}(c^m A^{1-m})$. Men $\frac{0}{0}$ tilkiendegiver, som man veed, ubestemt viis enhver Forhold, saa den derfor, hvilken her haver Sted, maa søges ved Hielp af Differential-Ligheden, der i dette Tilfælde bliver $dt = \frac{2dx\sqrt{c}}{2\sqrt{cA} - x}$, §. 215. og derfor $t = 2\sqrt{c}\,\text{Log.}\left(\frac{1}{2\sqrt{cA} - x}\right) + B$. Men $B = -2\sqrt{c}\,\text{Log.}\frac{1}{2\sqrt{cA}}$. Saa det fuldstændige Integral derfor bliver $t = 2\sqrt{c}\,\text{Log.}\left(\frac{2\sqrt{cA}}{2\sqrt{cA} - x}\right)$.

Er $x = 2\sqrt{cA}$. Da er det hele Rum udløbet, og følgelig Tiden af Bevægelsen omme. §. 215. Følgelig faaes for den hele Tid af Bevægelsen $t = \text{Log.}\frac{1}{0} = \text{Log.}\,\infty$. Hvoraf man seer, at Tiden, udi hvilken Bevægelsen skeer over det Rum $2\sqrt{cA}$ er uendelig stor. Skient derved kan agtes, at Log. ∞ er det mindste, saa at sige, af alle uendelige store Størrelser.

§. 220.

Er Modstanden derimod mindre end Quadrat-Roden af Hastigheden, er Tiden, i hvilken den hele Hastighed tabes, altid endelig.

Er derimod $m < \frac{1}{2}$. Da er den Tid, udi hvilken Bevægelsen gaaer for sig, altid endelig. Thi da efter det forhen fundne §. 218

$$t = \frac{\frac{2}{2m-1}\left(c^m A^{1-m} + \frac{}{m-1}\left(\frac{c^m A^{1-m}}{1-m}\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}}\right)}{c^{\frac{m}{2m-2}}}$$

$$-\frac{\frac{2}{2m-1}(c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{\frac{m}{2m-2}}}$$, og det første Leed er = 0, saa bliver Tiden af Bevægelsen altid = $$\frac{\frac{2}{1-2m}(c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{m:(2m-2}}$$

$$= \frac{2}{1-2m} A^{1-m}.(A-1_c)^{\frac{2m^2-2m}{2m-2}} = \frac{2A^{1-2m}c^m}{1-2m}$$, hvilket altid tilkiendegiver en endelig Størrelse.

Andet Tilfælde.

Naar Tingene drives ned efter af givne Kræfter, og tillige lide en immervarende Modstand, i Særdeleshed om de tunge Tings naturlige Fald, naar Modstanden er, som Quadraten af Hastigheden.

§. 221.

Vi skille her to Tilfælde fra hverandre, den ene, naar Tingene begynde deres Fald simpel hen uden al Hastighed. Den anden, naar de falde ned efter udkastede i Vertikalen, eller i den drivende Krafts Direktion med en vis Hastighed. Vi ville først foretage den første Tilfælde, da man strax seer. At om den henefter den rette Linie BA drivende Kraft kaldes K. Den Kraft, som svækker Bevægelsen ved at staae imod, M. Da bliver den hele hastiggiorende Kraft ikke udenK—M. Antages Faldet at begynde udi B, saaB$a = x$, $ab = dx$. Og den Høide, som svarer til Hastigheden udi $a = z$. Da bliver i

2) Naar i en overalt lige tyk flydende Materie de tunge Ting falde ned efter uden anden Hastighed end den, de vinde ved Faldet.

Almin-

Almindelighed §. 249 For. $(K - M)\,dx = dz$. Hvilken Lighed ikke i alle Tilfælde, men ikkun i nogle kan integreres.

§. 222.

Da almindelig at bestemme Hastigheden og Tiden.

Vi ville af disse i Særdeleshed betragte en. Den, da de hen efter BA drivende Kræfter ere uden Forandring de samme, da K bliver en bestandig Størrelse $= G$, og M desuden antages at være en simpel Funktion af Hastighedernes Høider. Er denne Høide $2m$, da bliver, som før §. 212, $M = \frac{z^m}{c^m} g$, naar ved g forstaaes den naturlige Tyngde her hos os, eller M bliver simpel hen $= \frac{z^m}{c^m}$, om $g = 1$. Den almindelige Lighed $(K - M)\,dx = dz$ forandres derfor i dette Tilfælde til denne anden $\left(G - \frac{z^m}{c^m}\right) dx = dz$, eller $(Gc^m - z^m)\,dx = c^m dz$, saa $dx = \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$, og derfor $x = \int \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$. Videre faaes $dt = \frac{c^m dz}{(Gc^m - z^m)\sqrt{z}}$, og $t = \frac{c^m dz}{(Gc^m - z^m)\sqrt{z}}$, men da disse Ligheder ikke ere almindelig integrable, ville vi særdeles opholde os ved den Tilfælde, som synes at være den naturlige, den nemlig, i hvilken Modstanden er som Quadraten af Distancen.

§. 223.

Dersom i dette Tilfælde Modstanden er som

Vi ville foretage det vigtigste Tilfælde, da Modstanden antages at være som Quadraten af Hastigheden; Udi hvilken Ligheden

$dt =$

$dx = \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$, §. 222. derved forandres til denne anden $dx = \frac{c dz}{Gc - z}$, og $x = c \text{ Log.} \left(\frac{1}{cG - z}\right) + B$. Men $B = c$ Log. cG. Følgelig bliver

Quadraten af Hastigheden i Henseende til Rummet.

$x = c \text{ Log.} \frac{cG}{cG - z}$. Og naar man vil finde Hastigheden selv, bliver $\frac{x}{e^c} = \frac{cG}{cG - z}$, eller $cGe^{\frac{x}{c}} - ze^{\frac{x}{c}} = cG$, saa

$$z = \frac{cGe^{\frac{x}{c}} - cG}{e^{\frac{x}{c}}} = cG\left(\frac{x}{e^c} - 1\right).e^{\frac{-x}{c}} = cG.\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)$$

fordi $e^0 = 1$.

§. 224.

Da jo større x bliver, desto mindre bliver $- e^{\frac{-x}{c}}$, eller $- \frac{1}{e^{\frac{x}{c}}}$. Saa sees, at den største Hastighed, hvilken paa denne Maade kan vindes, aldrig tilvege bringes udi de tunge Tings Fald, førend at et uendeligt stort Rum er blevet igiennemløbet. Er derimod $x = \infty$, da kan siden ingen Formeering udi Hastigheden meer skee; thi da bliver $cG(1 - e^{\frac{-x}{c}}) = cG$, og Hastigheden selv $= \sqrt{G}$, hvilket er derfor den største Hastighed, som kan vindes ved Faldet af de tunge Ting, naar en flydende Atmosphære staaer dem ved sin Inertie immer imod, og er desuden, som vi her antage det, overalt af samme Beskaffenhed.

Vindes i dette Tilfælde den største Hastighed ved Faldet ikke, før et uendeligt stort Rum er igiennemløbet.

§. 225.

Desuagtet er den største Hastighed, som ved Faldet vindes, altid endelig i denne Hypothese.

Saaledes bliver den største Hastighed, som ved Faldet kan vindes, den, med hvilken om et Legeme blev kastet ud i en flydende Materie af ensdan Tykkelse, dets Modstand da blev net op saa stor som Tyngdens Drift ned efter. Hvilket og uden Hielp af disse Udregninger let sees.

Ere de drivende Kræfter de samme, da blive de største Hastigheder, som ved Faldet kunde vindes, altid proportionerte $\sqrt{c}$, og derfor bestandig større i de tyndere, mindre i de tykkere flydende Materier. Fordi derfor i et aldeles opfyldt Rum, udi hvilket Tykkelsen var paa sit allerstørste, $\sqrt{c}$ ei er uden en overmaade liden Størrelse, eller og $= 0$, saa bliver saavel Hastigheden, som det igiennemløbne Rum $= 0$. Saa at i et saadant aldeles opfyldt Rum ikke uden en overmaade liden eller rettere, slet ingen Bevægelse kan have Sted, saa tidt som Tingene bevæge sig ned efter, uden at have en vis Hastighed i Begyndelsen af Faldet.

§. 226.

Dettes Sammenligning med de Hastigheder, som vindes i Tingenes frie og uhindrede Fald.

Er den flydende Materie af aldeles ingen Tykkelse, da bliver $\sqrt{c}$ en uendelig stor Størrelse. Og for videre at see, hvorledes Hastigheden da forholder sig ei alene naar den er størst, men ellers overalt, kan videre agtes, at, naar $c = \infty$, opløses $e^{\frac{-x}{c}}$ ved de uendelige Følger til den Verdie $1 - \frac{x}{c}$, uden at beholde flere Leed af Følgen, fordi Resten divideres ved de høiere Potentser eller Høider af c. Man faaer derfor

$$z = cG(1 + \overset{x}{\overline{c}} - 1) = cG\overset{x}{\overline{c}} = xG, \text{ er } G = g = 1,$$

bliver

bliver $x = z$ eller Høiden af Faldet den Høide, som svarer til den vundne Hastighed, saaledes som den og bør være det.

§. 227.

Er c ikke just ∞, men dog meget liden, da kan man beholde flere Leed af den uendelige Følge, hvori $e^{\frac{-x}{c}}$ opløses, hvilken Følge er $1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{24c^4} + +$ o. s. v. saa

$$z = G.(x - \frac{x^2}{2c} + \frac{x^3}{6c^2} + +$$ o. s. v.

Maade at bestemme Hastigheden, naar de flydende Materier, som staae imod, ere overmaade tynde, og Modstanden som forhen.

Da Luften kan ansees som en flydende Materie af meget liden Tykkelse, saa kan ved Hielp af denne Ligned de tunge Tings Fald i den paa det nærmeste udregnes, i sær, om de ere af en meget ansee-lig Tyngde.

I samme Tilfælde kan man fremdeles agte, at naar c er en meget stor Størrelse, og x en meget liden, bliver $z = Gx$, lige-som i den frie Bevægelse.

§. 228.

Man kan af den oven anførte Ligned §. 223 ligeledes bestem-me Bevægelsens Beskaffenheder i de Tilfælde, da de tunge Tings Fald begynder ned efter med en vis given Hastighed. Thi dertil be-høves intet andet, end at man i Ligheden $x = -c\,\mathrm{Log.}(cG - z) + B$ bestemmer B saaledes, som dette Tilfælde det udkræver. Er nemlig Høiden, som svarer til Hastigheden, i Begyndelsen af Faldet $= A$, da bliver $z = A$, naar $x = 0$, og man faaer

Beskaffenheden af Bevægelsen udi samme Til-fælde forklares, naar nemlig Tingene begyn-de at falde med en vis given Hastighed.

$B = c \operatorname{Log.} \frac{cG-A}{cG-z}$, og $x = c \operatorname{Log.} \frac{cG-A}{cG-z}$,

saa $z = e^{\frac{-x}{c}}(A-Gc)+Gc$. Hvoraf sees

1) At om $A = Gc$, da bliver og $z = Gc$, eller en bestandig Størrelse: Følgelig kan i dette Tilfælde Hastigheden aldrig tage til eller formeres, men Legemet bevæger sig bestandig ned efter med en ensdan Bevægelse. Man seer let hvorfor. Da $z = Gc$, saa er Modstanden just-saa stor, som den hastiggierende Kraft af Tyngden §. 228. 229. Følgelig kan Hastigheden ved Faldet ikke voxe.

2) Er $A > Gc$, da er $\frac{(A-Gc)}{e^{\frac{x}{c}}}$ altid en bekræftende Størrelse, hvilken formindskes, alt som x voxer. Bevægelsen tager derfor i dette Tilfælde immer af, indtil at omsider, efter at et uendeligt Rum er igiennemløbet, $\frac{A-Gc}{e^{\frac{x}{c}}} = 0$, og $z = Gc$, som er den mindste Hastighed, det faldende Legeme kan bevæge sig med.

3) Er derimod $A < Gc$, da bliver $\frac{A-Gc}{e^{\frac{x}{c}}}$ en negtende Størrelse, hvilken altid bliver mindre og mindre, alt som x bliver større og større. Følgelig bliver $e^{\frac{-x}{c}}(A-Gc)+Gc$ altid større og større, i det x tager til. Hastigheden voxer derfor og idelig, men kommer dog aldrig til sit største, før et uendeligt Rum er igiennemløbet, fordi $\frac{A-Gc}{e^{\frac{x}{c}}}$ ei før $= 0$.

4) Føl-

4) Følgelig bliver i alle Tilfælde $\sqrt{Gc}$ den største Hastighed, hvilken naar er naaet, Bevægelsen altid siden gaaer fort ensdan, uden enten at formindskes eller at formeres.

§. 229.

Tiden bestemmes i de tunge Tings Fald, naar de begynde Faldet uden Hastighed, og Modstanden er som Quadraten af Hastigheden.

Man bestemmer i begge disse Tilfælde Tiden paa samme Maade som før. Nemlig i den første er $dt = \frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{dx}{\sqrt{cG(1-e^{\frac{-x}{c}})}}$. Sættes $e^{\frac{-x}{c}} = v$, bliver $-dx = \frac{cdv}{v}$, og $dt = \frac{-cdv}{v\sqrt{cG(1-v)}}$ $= -\frac{c}{\sqrt{cG}} \cdot \frac{dv}{v\sqrt{1-v}}$, hvilket, som man strax seer, kan gjøres rationel, ved at sætte $\sqrt{1-v} = y$. Thi da er $1-y^2 = v$. $dv = -2ydy$, og $\frac{dv}{v\sqrt{1-v}} = \frac{-2ydy}{(1-y^2)y} = \frac{-2dy}{1-y^2}$. Men Divisores af $1-y^2$ ere $1+y$ og $1-y$. Følgelig er $\frac{-2dy}{1-y^2} = \frac{2dy}{y^2-1} = \frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y+1}$. Hvoraf Integralen er $\text{Log.}\frac{y-1}{y+1} + B$, og $\int \frac{-c}{\sqrt{cG}} \cdot \frac{dv}{v\sqrt{1-v}} = \frac{-c}{\sqrt{cG}} \text{Log.}\frac{y-1}{y+1} + B$.

Sættes igien i Steden for y dens Værdie $\sqrt{1-v}$, er $\frac{-t}{\sqrt{cG}} \text{Log.}\frac{y-1}{y+1}$. $B = \frac{t}{\sqrt{cG}} \text{Log.}\frac{\sqrt{1-v}+1}{\sqrt{1-v}-1} + B$. Og naar ydermere i Steden for y fremdeles sættes dens Værdie $e^{\frac{-x}{c}}$, faaes omsider

$$t = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}}\left(\text{Log.}\frac{\sqrt{1-e^{\frac{-x}{c}}}+1}{\sqrt{1-e^{\frac{-x}{c}}}-1} - \text{Log.}\frac{+1}{-1}\right)$$, fordi B bestemmes af det, hvad Integralen bliver, naar $x = 0$.

Man kan gjøre denne Ligned simplere, ved at agte, at $\text{Log.}\, e^{\frac{x}{c}} = \frac{x}{c}$. Thi multiplicerer man med $\sqrt{1-e^{\frac{-x}{c}}}+1$ oven og neden, da faaes $t = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}}(2\text{L.}\frac{\sqrt{1-e^{\frac{-x}{c}}}+1}{e^{\frac{-x}{2c}}} - \text{L.} - 1)$

$$= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}}(2\text{L.}\left(\sqrt{1-e^{\frac{-x}{c}}}+1\right) + \text{Log.}\, e^{\frac{x}{c}})$$, fordi $\text{Log.} - e^{\frac{x}{c}} = \text{Log.}\, e^{\frac{x}{c}} + \text{Log.} - 1$. Saaledes bliver $t = \left(\frac{x}{c} + 2\,\text{Log.}\left(\sqrt{1-e^{\frac{-x}{c}}}+1\right)\right)\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}}$. Eller og, om man multiplicerer den nest forhen fundne Ligned oven og neden med $e^{\frac{x}{2c}}$. Faaes

$$t = 2\sqrt{\frac{c}{G}}.\ \text{Log.}\left(\sqrt{e^{\frac{x}{c}}-1}+\sqrt{e^{\frac{x}{c}}}\right).$$

§. 230.

Den største Hastighed naaes da ikke uden i en uendelig Tid.

Da derfor §. 224 $x = S$ før den største Hastighed kan naaes, saa naaes den heller ikke uden i en uendelig Tid.

§. 231.

§. 231.

Tiden bestemmes ligeledes i de tunge Tings Fald, naar det begynder med en vis given Hastighed.

Begynde de faldende Ting deres Fald med en vis given Hastighed $\sqrt{A}$, da er Oplosningen endnu den samme. Thi man faaer i dette Tilfælde $dt = \frac{dx}{\sqrt{e^{\frac{-x}{c}}(A-Gc)+Gc}}$, §. 228. hvilket ved at sætte $e^{\frac{-x}{c}} = v$, som før, og $(A-Gc) = f$; faaes $dt = \frac{-cdv}{2\sqrt{vf+Gc}}$. Sættes igien $\sqrt{vf+Gc} = y$, bliver $dt = \frac{-2cdy}{y^2-Gc}$. Men af $y^2 - Gc$ ere Divisorerne $y+\sqrt{Gc}$, og $y-\sqrt{Gc}$. Saa $dt = \frac{\sqrt{\frac{c}{G}}dy}{y+\sqrt{Gc}} - \frac{\sqrt{\frac{c}{G}}dy}{y-\sqrt{Gc}}$, og $t = \sqrt{\frac{c}{G}}(\text{Log. } y+\sqrt{Gc} - \text{Log. } y-\sqrt{Gc}) + B$. Sættes i Steden for y dens Værdie $\sqrt{vf+Gc}$, faaes $t = \sqrt{\frac{c}{G}}\text{Log.}\frac{\sqrt{vf+Gc}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{vf-Gc}+\sqrt{Gc}} + B$. Endelig om i Steden for v sættes $e^{\frac{-x}{c}}$, bliver $t = \sqrt{\frac{c}{G}}\text{L.}\frac{\sqrt{fe^{\frac{-x}{c}}+Gc}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{fe^{\frac{-x}{c}}+Gc}-\sqrt{Gc}} + B$.

Og $B = -\sqrt{\frac{c}{G}}\text{Log.}\frac{\sqrt{f+Gc}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{f+Gc}-\sqrt{Gc}}$

$= -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}}\text{Log.}\frac{\sqrt{A}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{A}-\sqrt{Gc}}$. Hvoraf endelig faaes

$t =$

$$t = \frac{V c}{V G}\left(\text{Log.}\frac{\sqrt{f.e^{\frac{-x}{c}} + Gc} + \sqrt{Gc}}{\sqrt{f.e^{\frac{-x}{c}} + Gc} - \sqrt{Gc}}\right.$$

$$\left. - \text{Log.}\frac{\sqrt{A} + \sqrt{Gc}}{\sqrt{A} - \sqrt{Gc}}\right). \quad \text{Eller og}$$

$$t = 2\sqrt{\frac{c}{G}}\,\text{Log.}\frac{\sqrt{e^{\frac{x}{c}}Gc + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}Gc + A - Gc}}}{\sqrt{A} + \sqrt{Gc}}.$$

Tredie Tilfælde.

Naar Tingene stige op efter med en vis given Hastighed, men drives tillige ned efter af andre Kræfter; i Særdeleshed, naar de finde en Modstand, som Quadraten af Hastigheden, i det de stige.

§. 232.

3) Almindelig Bestemmelse af Hastighed, Rum og Tid, naar Tingene stige op efter, og drives imidlertid ned efter af visse Kræfter.

Saa tidt som Tingene bevæge sig op efter fra A til B med en vis given Hastighed, og visse givne Kræfter drive dem igien ned efter den Direktion BA. Da forene disse sidste sig med Modstanden af den flydende Materie, udi hvilken at de bevæge sig. Vedligeholdes derfor de samme Benævninger, som for §. 216, undtagen at her $Ab = x$, og $bn = dx$ bliver $(K + M)\,dx = -dz$. Hvilket, naar sammenlignes med Ligheden §. 216 $(K - M)\,dx = dz$, strax viser, at Bevægelsen op og ned efter ikke bliver her i Henseende til Hastigheden og Tiden, udi lige høie Punkter og over ligedanne Linier

den

den samme, som vi før have beviist, at den maatte være det udi den frie Bevægelse, da intet stod imod.

§. 233.

Den almindelige Ligheð $(K + M)\,dx = -dz$ er ligesaa lidet integrabel, som den §. 221. Vi ville derfor foretage den af de enkelte Tilfælde, som i Anvendelsen og Brugen er af størst Vigtighed, den da K er en bestandig Kraft $= G$. Sætter man i dette Tilfælde, som før, M eller Modstanden som en ubestemt Høide af Hastigheden $= \frac{z^m}{c^m}g = \frac{z^m}{c^m}$, om $g = 1$. Da forandres den almindelige Ligheð $(K + M)\,dx = -dz$ til denne anden $(G + \frac{z^m}{c^m})dx = -dz$, saa $dx = \frac{-c^m dz}{Gc^m + z^m}$.

$x = \int \frac{-c^m dz}{Gc^m + z^m}$, og $t = \int \frac{-c^m dz}{(Gc^m + z^m)\sqrt{z}}$.

§. 234.

Da disse Ligheder heller ikke ere almindelig integrable, er i Særdeleshed, efter det forhen sagte, det Tilfælde betydeligt, naar Modstanden er som Quadraten af Hastigheden, da den forrige Ligheð $dx = \frac{-c^m dz}{Gc^m + z^m}$ forandres til denne anden $dx = \frac{-c\,dz}{Gc + z}$, hvoraf Integralen er $x = c\,\mathrm{Log}.\frac{1}{cG+z} + B$. Men $B = -c\,\mathrm{Log}.\frac{1}{cG+A}$. Om den Høide, der svarer til Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen

Hastigheden bestemmes i Hensende til Rummet, naar Modstanden er som Quadraten af Hastigheden.

gelsen op efter $= A$, saa at derfor $x = c \operatorname{Log}. \frac{cG+A}{cG+z}$, og

$$z = (A+cG).e^{\frac{-x}{c}}) - cG.$$

§. 235.

Den taber sig altid igiennem et endeligt Rum

Skal den hele Hastighed tabe sig, bliver $z = 0$, og $x = c \operatorname{Log}. \frac{cG+A}{cG}$, som derfor er den Heide, under hvilken at Hastigheden aldeles opherer.

§. 236.

Maade at bestemme Hastigheden i meget tynde flydende Materier.

Dersom den flydende Materies Modstand er meget liden, saa c betyder et stort Tal, og x imod c ligeledes en meget liden Størrelse. Da kan i den uendelige Følge, udi hvilken $e^{\frac{-x}{c}}$ bør opløses, alene nogle faa af de første Leed beholdes, hvorved Hastigheden paa det nærmeste findes. Saaledes, da $e^{\frac{-x}{c}} = 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + -$ o. s. v. saa bliver i dette Tilfælde

$$z = -cG + (A + cG).\sqrt{1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2}}.$$ I alle andre Tilfælde maa af den uendelige Følge den ubekiendte x søges, efter de bekiendte Methoder.

§. 237.

Tiden af Bevægelsen bestemmes.

Tiden af Bevægelsen er i dette Tilfælde $\frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{dx}{\sqrt{(A+cG)e^{\frac{-x}{c}} - cG}}$, hvilken Lighed kan paa samme Maade

gieres

gjøres integrabel, som før §. 231, saafremt nemlig, at man sætter $e^{\frac{-x}{c}} = v$ og $-dx = \frac{cdv}{v}$. Bliver $\frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{-cdv}{v\sqrt{av-cG}}$, naar $A + cG = a$. Tages videre som i §. 231 $\sqrt{av-cG} = y$. Bliver fremdeles $\frac{dx}{\sqrt{z}} = -\frac{2cdy}{y^2+cG}$, hvilket paa samme Maade, som før, kan opløses i to logarithmiske Integraler, saa man faaer $-\frac{dt}{c}$ $= \frac{-dy.\sqrt{-cG}}{y+\sqrt{-cG}} + \frac{dy.\sqrt{-cG}}{y-\sqrt{-cG}}$. Og $-\frac{t}{c} = \text{Log.}\frac{y-\sqrt{-cG}}{y+\sqrt{-cG}}$ en Størrelse, som altid er imaginær, fordi c og G ere bekræftende Størrelser.

§. 238.

Da derfor dette Slags Integraler, saa tidt som de ere imaginære, i Henseende til den logarithmiske Linie, have en virkelig Værdie i Henseende til Cirkel-Linien, ville vi integrere ved Hielp af denne sidste. Er da (Taf. XI. Fig. 8.) BA en Cirkel-Bue, hvis Element er $ab = dt$. cd Elementet af Tangenten $= dx$, og saaledes $Ad = x$. Da er, om Halv-Diametern $cA = r$. $ab = ds$ $= \frac{r^2dx}{r^2+x^2}$ og $\int\frac{r^2dx}{r^2+x^2} =$ Buen Ab. Om $r = 1$, er $ds = \frac{dx}{1+x^2}$. For nu at bringe $\frac{dy}{y^2+cG}$ til samme Form kan agtes. At $\frac{dy}{y^2+cG}$ $= \frac{1}{cG}.\frac{dy}{\frac{y^2}{cG}+1}$. Saa $x^2 = \frac{y^2}{cG}$, og $x = \frac{y}{\sqrt{cG}}$. Men da bliver Elementet af Buen, hvis Halv-Diameter $= 1 = \frac{dy\sqrt{cG}}{y^2+cG}$, og

$\int \frac{dy\sqrt{cG}}{y^2+cG}$ er Buen A*b*, hvis Tangent eller Rore-Linie er A*d*. Følgelig bliver $\frac{1}{\sqrt{cG}}\int \frac{dy\sqrt{cG}}{y^2+cG} = \frac{1}{\sqrt{cG}}$ B. T. A*d*. (ved B. T. A*d*. forstaaes Buen, hvis Tangent er A*d*.) Derfor bliver $\frac{-2c}{\sqrt{cG}}$B. T. A*d* $+ B = \int \frac{-2c\,dy}{y^2+cG} = t$.

Sættes i Steden for y dens Værdie $\sqrt{av-cG}$. I Steden for *v* dens Værdie $e^{\frac{-x}{c}}$, og saaledes i Steden for y, $\sqrt{ae^{\frac{-x}{c}}-cG}$. Da bliver, Tang. $\frac{y}{\sqrt{cG}}$ = Tang. $\frac{\sqrt{ae^{\frac{-x}{c}}-cG}}{\sqrt{cG}}$, og

$t = -\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}}$B. Tang. $\frac{\sqrt{ae^{\frac{-x}{c}}-cG}}{\sqrt{cG}} + B$. Men

$B = B.T.\frac{\sqrt{a-cG}}{\sqrt{cG}}.\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}} = B.\text{Tang}.\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{cG}}.\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}}$, fordi $a = A + cG$, §. 237, saa den hele Tid, hvori at Tingen stiger til den ubestemte Høide *x*, bliver $2\sqrt{\frac{c}{G}}$. B. T $\sqrt{\frac{A}{cG}}$

$$- 2\sqrt{\frac{c}{G}}\,B.T.\frac{\sqrt{ae^{\frac{-x}{c}}-cG}}{\sqrt{cG}}.$$

§. 239.

Den største Høide, hvortil et Legeme i dette Tilfælde kan stige,

er

er c Log. $\frac{A+cG}{cG}$, §. 235. saa at i det $\frac{-x}{ae^{\frac{c}{}}} = -\text{Log.}\frac{A+cG}{cG}$.

Men $\text{Log.}_e -\text{Log.}\frac{A+cG}{cG} = -\text{Log.}\frac{A+cG}{cG} = \text{Log.}\frac{cG}{A+cG}$.

Derfor bliver og $_e -\text{Log.}\frac{A+cG}{cG} = \frac{cG}{A+cG}$. Hvoraf faaes videre den hele Tid af Stigningen, indtil Hastigheden ganske er tabt,

$= 2\sqrt{\frac{c}{G}}\text{B.T.}\sqrt{\frac{A}{cG}} - 2\sqrt{\frac{c}{G}}\text{B.T.}\sqrt{\left(\frac{acG}{A+cG} - cG\right)}.\sqrt{cG}$.

Men da $a = A + cG$ er $\frac{acG}{A+cG} - cG = 0$. Følgelig bliver den hele Tid, hvori Legemet stiger $= 2\sqrt{\frac{c}{G}}.\text{B.T.}\sqrt{\frac{A}{cG}}$.

§. 240.

Følgelig bliver Tiden af Stigningen altid endelig, endog i det Tilfælde, da Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen var uendelig stor. Thi $2\sqrt{\frac{c}{G}}\text{B.T.}\sqrt{\infty} = 2\sqrt{\frac{c}{G}}\text{B.T.}90°$.

Den er altid endelig.

§. 241.

Man kan derfor altid bestemme Tiden, hvori saavel de med en vis given Hastighed udkastede Legemer stige, som falde, naar Hastigheden, hvormed de kastes ud, er bekiendt. Ligesom man og i samme Hypothese, i Følge de forrige Ligheder, baade kan bestemme det igiennemløbne Rum, og af dette igien Hastigheden. Imidlertid er det altid ulige lettere nøie at finde Tiden af den hele Bevægelse, den nemlig, hvori de udkastede Ting baade stige og falde, end Hastigheden selv, hvormed de kastes ud. Saa det derfor er en Sag af

Af den givne hele Tid, udi hvilken et Legeme saavel stiger som falder, at bestemme det Rum, det igiennemløber, af det igien Hastighed i Begyndelsen af Bevægelsen, og endelig de enkelte Tider af

Stigningen og Faldet.

nogen Betydenhed at vise, hvorledes af den hele Bevægelses-Tid, naar samme antages som given, saavel de enkelte Tider af Stigningen og Faldet, som Hastigheden, Tingen kastes ud med, og Høiden, hvortil den stiger, kunde findes.

Kaldes da den hele Tid af Bevægelsen T. Den søgte Høide AB, x. Da bliver efter hvad i det foregaaende allerede er bleven beviist, Tiden af den hele Stigning $= 2\sqrt{\frac{c}{G}}\,\text{B.T.}\sqrt{\frac{A}{cG}}$. Og Tiden af Faldet $= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \cdot 2\,\text{Log.}\left(\sqrt{\frac{x}{e^{c}} - 1} + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}}\right)$ §. 239 og 229. Derfor bliver $T = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}}\left(\text{B.T.}\sqrt{\frac{A}{cG}} + \text{Log.}\left(\sqrt{\frac{x}{e^{c}} - 1} + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}}\right)\right)$. Men da $x = e\,\text{L.}\frac{A+cG}{cG}$. §. 235. Og følgelig $\frac{x}{e^{c}} = \underset{e}{\text{Log.}}\frac{A+cG}{cG} = \frac{A+cG}{cG}$. Saa bliver $\frac{x}{e^{c}} - 1 = \frac{A}{cG}$, og $\text{Tang.}\sqrt{\frac{A}{cG}} = \text{Tang.}\left(e^{\frac{x}{c}} - 1\right)$, og derfor atter igien

$$T = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}}\left(\text{B.T.}\left(e^{\frac{x}{c}} - 1\right) + \text{Log}\left(\sqrt{e^{\frac{x}{c}} - 1}\right) + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}}\right).$$

i hvilken Ligheds, da c og G ere bekiendte Størrelser, og saavel Buen, som de exponentielle og logarithmiske Størrelser, kunde opløses i uendelige Følger. Saa kan man altid bestemme x, hvad heller man vil paa denne eller paa andre Maader, hvorved man nærmer sig til den ubekiendtes Værdie. Men er x given, da er Hastigheden tillige given, og ved dens Hielp igien de enkelte Tider; saavel den, hvorudi Tingen stiger, som den, hvorudi samme falder ned igien.

§. 242.

§. 242.

Disse Udregninger forkortes anseelig, naar man kan antage c som en meget stor Størrelse imod x, hvilken Hypothese nogenlunde gaaer an udi Luften. Thi man behøver alene at undersøge, hvad saavel Tiden af Stigningen, som Tiden af Faldet da blive, for at sammenligne dem med den givne og bekiendte Størrelse T.

Samme bestemmes paa en meget ler Maade, naar Faldet skeer i meget tynde flydende Materier.

Tiden af Faldet ned efter bestemmes saaledes. Den er §. 229

$$= \sqrt{\frac{c}{G}}\left(\frac{x}{c} + 2\,\mathrm{Log.}\sqrt{1-e^{-\frac{x}{c}}} + 1\right) \text{ og da } \mathrm{Log.}\,1+x$$

$$= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + - \text{ o. s. v. saa er } \mathrm{L.}\left(\sqrt{1-e^{-\frac{x}{c}}} + 1\right)$$

$$= \sqrt{1-e^{-\frac{x}{c}}} - \frac{\left(1-e^{-\frac{x}{c}}\right)}{2} + \frac{\left(1-e^{-\frac{x}{c}}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - + \text{ o. s. v.}$$

Fremdeles da $e^{-\frac{x}{c}} = 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + -$ o. s. v. saa bliver $1 - e^{-\frac{x}{c}} = \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3}$, og $\sqrt{1-e^{-\frac{x}{c}}}$

$$= \sqrt{\frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3}}$$, hvilken Quadrat-Rod om trekkes ud efter de sædvanlige Regler saaes $\sqrt{1-e^{-\frac{x}{c}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x\sqrt{x}}{4c\sqrt{c}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{12c^2\sqrt{c}}$

$$- \frac{x^2\sqrt{x}}{c^2\sqrt{c}} + - \text{ o. s. v.} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x\sqrt{x}}{4c\sqrt{c}} + \frac{5}{96}\frac{x^2\sqrt{x}}{c^2\sqrt{c}} - + \text{ o. s. v.}$$

Omsættes dette i de første Leed af $\mathrm{Log.}\left(\sqrt{1-e^{-\frac{x}{c}}} + 1\right)$

=

$= \sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{c}})} - \frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{-x}{c}}}{2} - +$ o. s. v. og af dem samtlig alle de samles, som ei overgaae en vis given Høide, som for Ex. den Høide $\frac{1}{2}$. Da faaes Log. $(\sqrt{1 - e^{\frac{-x}{c}}} + 1) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x}{2c}$ $+ \frac{x\sqrt{x}}{12c\sqrt{c}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{480c^2\sqrt{c}}$. Følgelig bliver Tiden af Faldet ned efter $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}}$.

Man kan heraf strax finde Tiden, hvori en udkastet Ting stiger, naar c ansees som overmaade stor imod x, saaledes som vi i det foregaaende have antaget den at være i de meget tunge Tings Bevægelse udi Luften. Thi Tiden er den samme, hvad heller at et Legeme bevæger sig op eller ned efter, naar i begge Tilfælde Kræfterne ellers virke paa samme Maade efter en Direktion. Fordi intet er klarere, end at i den Tid, da et Legeme, som stiger til en vis Høide op efter, mister sin Hastighed ved Tyngdens og det Flydendes forenede Modstand, samme Legeme drevet ned efter af begge disse Kræfter forenede, jo i samme Tid og igiennem samme Høide maa igien vinde denne selvsamme Hastighed, saa at begge Betragtninger derfor løbe ud paa et. Antages da saavel Tyngden som det Flydendes Modstand begge at virke, i det Legemet falder ned efter, da bør alene c forandres til en negtende Størrelse. Thi drive begge ned efter, bliver Ligheden, som forklarer Bevægelsen, $(G + \frac{z^m}{c^m})dx = dz$. Men den §. 222. $(G - \frac{z^m}{c^m})dx = dz$, forandres til den første, ved at sætte c negtende eller $= -c$.

Følge-

Følgelig kan man og, alene ved at sætte $c = -c$, betiene sig af den forrige Værdie af Tiden $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}}$, siden Tiden, hvori over den Høide x Hastigheden tabes, er den samme som den, hvori den paa den nylig forklarte Maade vindes, imidlertid at den tabte og vundne Hastighed i begge Tilfælde altid bliver den, som tabes ved at stige igiennem x. Derfor bliver Tiden, hvori Legemet stiger, $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} - \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}} - +$ o. s. v. og begge Tiderne sammenlagte, saavel nemlig den, hvori Legemet stiger, som den, hvori det falder, eller $T = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}} + +$ o. s. v.

§. 243.

Denne Oplosnings-Maade er i disse ellers vidtloftige og vanskelige Udregninger den allerletteste. Men man maa vel agte, at den Høide, hvortil den udkastede Ting stiger, eller x, maa være saa meget mindre, som ferre af de første Leed i Ligheden $T = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{G}}$ o. s. beholdes. For Resten seer man, at naar x er funden, er Hastigheden, som tabes over x, følgelig den, hvormed Tingen blev i Begyndelsen udkastet, ligeledes funden. Hvoraf da videre de enkelte Tider findes §. 239. 230.

Fierde Tilfælde.

Om den retlinede Bevægelse igiennem flydende Materier, som ei ere overalt lige tykke.

§. 244.

Vi have i det foregaaende betragtet de flydende Materier, igiennem hvilke Bevægelsen skeede, som de der vare overalt af eysdan Tykkelse. Bevægelsens almindelige Bestemmelse i flyKkk

dende Materier, som ei ere overalt lige tykke.

kelse. Imidlertid gielder denne Hypothese ikke fuldkommen udi Luften, siden dette flydende Væsen af utallige Aarsager kan blive i alle sine horizontale Lav snart tykkere, snart tyndere, saa det ikke er den mindste Vanskelighed, i disse Henseende at bestemme, efter hvad Lov Tykkelsen i Luften tager af: Endskiønt at det endnu altid blev uvist, hvorvidt Udregningen blev muelig, naar disse Naturens Love vare os virkelig bekiendte. Det vi derfor her have at afhandle, er alene, i Almindelighed at vise, hvorledes i deslige Tilfælde Udregningerne kunde gieres. Saaledes, om man antager, at Tykkelsen og dens Modstand tager af eller til efter Distancerne fra et vist frit Punkt A, og at Modstanden desuden er proportionert den Høide $2m$ af Hastigheden. Vil man da, som før, bestemme den absolute Modstand af den Hastighed, med hvilken, naar Tingen bevæger sig, Modstandens virkelige Kræfter i et flydende Væsen af en vis given Tykkelse bliver saa stor som Tyngden, og man kalder, som før, (Fig. 7.) Høiden, der svarer til Hastigheden c, Ab, x, den ubestemte Hastighed udi b, z, da blev, om den naturlige Tyngde $= 1$, og Tykkelsen i det flydende overalt var den samme, Modstanden $= \frac{z^m}{c^m}$. Men siden den nu er foranderlig, og som vi her ville antage det efter Distancen fra A, maa c^m være til x^m i en vis given Forhold, hvilken vi ville sætte at være den af $1 : a$, saa $c^m = ax^m$, og den hele Modstand bliver $= \frac{z^m}{ax^m}$.

Dette forudsat, bestemmes de almindelige Ligheder for Bevægelsen ligesom udi de forrige Tilfælde. Thi man faaer

1) For

1) For det Tilfælde, da Tingene falde ned efter, $(G-\frac{z^m}{ax^m})dx = -dz$, fordi x idelig tager af.

2) For det Tilfælde, da de stige, $(G+\frac{z^m}{ax^m})dx = -dz$.

§. 245.

Sættes $m = 1$ eller Modstanden Quadraten af Hastighederne proportionert; da, om Tingene falde ned efter, bliver $(G-\frac{z}{ax})dx = -dz$. Sættes G at være en bestandig og alletider ensdan virkende Kraft, kunne de ubekiendte saavel i denne Ligned, som i den almindelige $(G-\frac{z^m}{ax^m})dx = -dz$ skilles fra hinanden ved at sætte $z = xy$. Da man derved forandrer den Ligned $(G-\frac{z}{ax})dx = -dz$ til denne anden $-(aG-y)dx = axdy + aydx$ eller $\frac{dx}{x} = \frac{-adx}{aG+(a-1)y}$, hvoraf Integralen er $\text{Log.}\, x = \frac{a}{1-a}\text{Log.}\,\overline{(1-a)y-aG} + B$. B bestemmes deraf, at i Begyndelsen af Faldet, naar $x = C$, er $z = o$, følgelig og $y = o$, hvoraf faaes $B = \text{Log.}\, C - \frac{a}{1-a}\text{Log.}\,-aG$. Sættes i Ligheden $\text{Log.}\, x = \frac{a}{1-a}\text{L.}\,\overline{(1-a)y-aG} + B$ derfor $\frac{z}{x} = y$.

Da faaes $\text{Log.}\, x = \frac{a}{1-a}\text{Log.}\,(1-a)\frac{z}{x}-aG) + \text{Log.}\, C - \frac{a}{1-a}\text{Log.}\,-aG$ eller $\text{Log.}\,\frac{x}{C} = \frac{a}{1-a}\text{Log.}\,\frac{(a-1)z+aGx)}{aGx}$.

Dens særdeles Bestemmelse, naar Modstanden er som Quadraten af Hastigheden.

Og følgelig bliver $\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{1-a}{a}} = \frac{(a-1)z+aGx}{aGx}$, eller

$$z = \frac{aGx}{a-1}\left(\frac{x}{C}^{\frac{1-a}{a}} - 1\right) = \frac{aG}{a-1} \cdot \frac{\left(\frac{a-1}{C^{a}} - x^{\frac{a-1}{a}}\right)}{x^{\frac{-1}{a}}}$$

$$= \frac{aG}{a-1}\left(\frac{a-1}{C^{a}}\, x^{\frac{1}{a}} - x\right).$$

§. 246.

Hastigheden funden, findes Tiden, eller $\int \frac{dx}{\sqrt{aG\left(\frac{a-1}{C^{a}} \cdot x^{\frac{1}{a}} - x\right)}}$

og i Henseende til Hastigheden selv kan ydermere agtes, at naar $x = 0$, er den og $= 0$. Saa den ei alene er i B, men endog i A $= 0$, thi Modstanden bliver virkelig uendelig, saa tidt som $x = 0$, fordi den er efter det forhen sagte $\frac{z^m}{ax^m} = \frac{1}{0} = \infty$.

Deraf sees ligeledes, at i Almindelighed, saa tidt som Tingene bevæge sig op efter fra A imod B, maa Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen altid være uendelig stor. I øvrigt sees let, at den Tilfælde, da Tingene stige, bringes paa den forrige, ved at forandre a til $-a$, thi derved bliver den sidste Ligbed §. 244. forvandlet til den første.

§. 247.

Det Punkt bestemmes, udi hvilket at Hastigheden er størst, hvis Kiende-Tegn er, at Hastigheden z, der hverken voxer eller

eller tager af, eller $dz = 0$. Da derfor $(G - \frac{z}{ax}\Big(dx = -dz$ stigheden er
størst.
bliver $Gax = z$, og derfor $Gax = \frac{aG}{a-1}\left(C^{\frac{a-1}{a}} \cdot \frac{1}{x^a} - x\right)$ eller

$ax = C^{\frac{a-1}{a}} x^{\frac{1}{a}}$, eller $a^a x^{a-1} = C^{a-1}$, og følgelig $x = \frac{C}{\sqrt[a]{a^{a-1}}}$.

§. 248.

Vi kunde saavel i dette Tilfælde, som i flere Hypotheser af samme Slags, anføre en heel Deel andre Udregninger og Anmerkninger, men da de samtlig ere af ingen betydelig Nytte, fordi de Love i Naturen endnu ikke ere bekiendte, hvilke tilkiendegive den sande Modstand i deslige flydende Materier, saa ville vi derved ikke opholde os. Et eneste kan man endnu kortelig i Henseende til det foregaaende agte, at det ene Tilfælde, da $a = 1$ ikke indbefattes i de integrerte Ligheder, siden man da kommer paa en Værdie, som intet videre viser, end at man af Differential-Ligheden maa søge Værdien. Da man faaer i den forrige Ligh. §. 245. $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{G}$, eller $G \operatorname{Log}. \frac{1}{x} = y + B$. Men $B = G \operatorname{Log}. C$, følgelig er $y = G \operatorname{Log}. \frac{C}{x}$ og $z = Gx \operatorname{Log}. \frac{c}{x}$, fordi $y = \frac{z}{x}$.

Søges i dette Tilfælde den Distance fra B, som svarer til den største Hastighed, da fordi $a = 1$, bliver §. 245. $Gx = z$, naar $dz = 0$. Og saaledes $Gx = Gx \operatorname{Log}. \frac{c}{x}$, eller $1 = \operatorname{Log}. \frac{c}{x}$ eller $e = \frac{c}{x}$, følgelig $x = \frac{c}{e}$.

Femte Tilfælde.

Om den retlinede Bevægelse i flydende Materier, i sær i den, som staae overalt ensdan imod, saa tidt som Tingene tillige drives af Kræfter, der søge imod et vist Punkt.

§. 249.

Bevægelsens almindelige Bestemmelse, naar Kræfterne ere centrale.

Dersom man i dette Tilfælde, ligesom i nest forrige, antager Tykkelsen af den flydende Materie, for at være adskillig i de adskillige horizontale Lag, og følgelig at tage af eller til i en vis Forhold af Distancen fra et vist givet Punkt A, og $Ab = x$. Da kan den Hastighed, imod hvilken det Flydendes Modstand er saa stor som Tyngden, ei være i alle Lag af en saadan flydende Materie den samme, men den maa nødvendig beroe paa Distancen, og være en Funktion af x, og bestandige Størrelser, efter hvad Hypothese, som man selv vil formere. Tilkiendegives den derfor i Almindelighed ved $\sqrt{F.x}$, og Modstanden antages desuden overalt at skee efter den Høide $2m$ af Hastigheden, da bliver Modstanden i $b = \frac{z^m}{(Fx)^m}$, naar, som før, den til Hastigheden udi b svarende Høide $= z$.

Kaldes da Central-Kraften imod A i Almindelighed K, da faaes

1) Om Tingen falder ned efter imod A, $dz = (P - \frac{z^m}{(Fx)^m}) - dx$.

2) Om Tingen stiger fra A op imod B, $dz = (-P - \frac{z^m}{(Fx)^m})dx$;

af hvilke Ligheder den sidste strax udledes af den første, ved at sætte $-(Fx)^m$ i Steden for Fx^m.

§. 250.

§. 250.

Er i disse Ligheder $m = 1$, da bliver $(-P + \frac{z}{(Fx)})dx = dz$, eller om $Fx = F$. er $(\frac{z}{F} - P)dx = dz$. Og saaledes $Pdx = -dz + z\frac{dx}{F}$. For at skille de ubekiendte fra hverandre, behøves at $-dz + z\frac{dx}{F}$ saaledes maa multipliceres med en antagen Størrelse S, at $SPdx$ desuagtet ikke bliver uden en Funktion af x, og $\int(-dz + z\frac{dx}{F})S$ en integrabel Størrelse, som er en Funktion af x og z i v. Men skal $-dz + z\frac{dx}{F}$ gjøres integrabel, maa $-dz$ multiplicères med en Størrelse S, hvis Differential er $\frac{dx}{F}S$, siden Ligheden $SPdx = -Sdz + Sz\frac{dx}{F}$ ellers ikke kan vedligeholdes, og en saadan Størrelse er $\int_e^{-\frac{dx}{F}}$, naar ved e forstaaes det Tal, hvis hyperbolske Logarithmus $= 1$, saa bliver $-SPdx = Sdz - Sz\frac{dz}{F}$ forandret til $-e^{\int -\frac{dx}{F}}.Pdx = e^{\int -\frac{dx}{F}}dz - \frac{e^{\int -\frac{dx}{F}}zdx}{F}$, hvis Integral er

$$\int -Pdx.e^{\int -\frac{dx}{F}} = e^{\int -\frac{dx}{F}}z, \text{ og } z = \frac{\int -Pdx.e^{\int -\frac{dx}{F}} + B}{e^{\int -\frac{dx}{F}}},$$

hvilken Ligheds de ubekiendte ere adskilte, og det sidste Leed er alene en Funktion af x og dx. B bestemmes af det, hvad Ligheden bliver, naar

Dens særdeles Bestemmelse, naar Modstanden er som Quadraten af Hastigheden.

naar $z = 0$ og $x = C$, som før §. 245, og man kan her giøre ligedanne Anmerkninger, som de forhen giorte i neſt forrige Tilfælde.

§. 251.

Og Central-Kraften er proportionert en given Høide af Diſtancen fra Kræfternes Center.

Skiønt de særligere og meer beſtemte Ligheder ikke ere i Brugen og Anvendelſen af umiſtelig Vigtighed, ville vi dog endnu viſe Maaden at giøre dette Slags Underſegninger paa i det Tilfælde, da Central Kraften er nøiere beſtemt, nemlig, ſom en vis given Høide af Diſtancen fra Kræfternes Centers og den flydende Materies Modſtand antages, ſom §. 250, at være i beſtandig Forhold af Quadraten af Diſtancen, imidlertid at den flydende Materie ſelv ligeledes anſees ſom at være i alle ſine Lag lige tyk. Kaldes den naturlige Tyngde 1, den Diſtance, hvori at Central-Kraften er ſaa ſtor ſom ſamme, r, og Høiden af Diſtancen x, da bliver, om $Ab = x$, $r^n : 1 = x^n : \frac{x^n}{r^n}$, hvilket er den centrale Krafts virkelige Størrelſe udi b. Og de forhen §. 249 givne Ligheder forandres ſaaledes:

1) Naar Faldet ſkeer ned imod Centret A, bliver $dz = \left(\frac{x^n}{r^n} - \frac{z}{c}\right) - dx$, hvor c betyder, ſom før, Høiden til den Haſtighed, imod hvilken det Flydendes Modſtand er ſaa ſtor ſom Tyngden.

2) Gaaer Bevægelſen derimod op efter, bliver $\left(\frac{x^n}{r^n} + \frac{z}{c}\right)dx = -dz$, fordi Haſtigheden idelig tager af. Hvilke Ligheder kunde, ligeſom før, den ene udledes af den anden, alene derved, at $+c$ forandres til $-c$.

§. 252.

§. 252.

Da derfor i den almindelige Ligbed §. 250 blev $e^{\int -\frac{dx}{F}} z$ $= \int -P dx\, e^{\int -\frac{dx}{F}} + B$, saa bliver i dette særlige Tilfælde for Faldet ned efter $z = \int -\frac{x^n}{g^n} dx . e^{\frac{-x}{c}} = e^{\frac{x}{c}} \left(\int -\frac{x^n}{g^n} e^{\frac{-x}{c}} dx + B. \right)$

I dette Tilfælde bestemmes Hastigheden saavel i Bevægelsen op ad som ned efter.

$e^{\frac{-x}{c}}$

Ligeledes bliver for Bevægelsen op efter z

$$z = e^{\frac{-x}{c}} \left(\int -\frac{x^n}{g^n} e^{\frac{x}{c}} dx + B. \right)$$

Da $\int x^n e^{gx} dx$ integrert ved tillagte Stykker $= e^{gx}$.

$\left(\frac{x^n}{g} - \frac{nx^{n-1}}{gg} + \frac{n.(n-1)x^{n-2}}{g^3} - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}x^{n-3}}{g^4} \right.$

$\left. + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}x^{n-4}}{g^5} - + \text{o. s. v.} + B. \right)$ saa sees, at denne uendelige Følge, hvis Fortgangs-Lov let sees, altid brekker af, saa tidt som n er et heelt og bekræftende Tal, da den kommer alene til at bestaae af et Leed meer end der er Uniteter udi n. Folgelig kan z eller $e^{\frac{-x}{c}} \int -\frac{x^n}{g^n} e^{\frac{x}{c}} dx$ i alle disse Tilfælde ligeledes integreres, man faaer nemlig $z = e^{\frac{-x}{c}} \left(\int -\frac{x^n}{g^n} e^{\frac{x}{c}} dx + B \right)$

$= \left(-\frac{1}{g^n} \left(x^n c - nx^{n-1} c^2 + n.n-1\, x^{n-2} c^3 - n.\overline{n-1}. \right. \right.$

$\overline{n-2}$

$\overline{n-2}.x^n - 3c^4 + - \&c.) + B) e^{\frac{-x}{c}}$, naar nemlig i Steden for g sættes $\frac{1}{c}$, som dette Exempel det udkræver.

§. 253.

Ere Kræfterne Distancen fra Centret proportionerte, bliver dog derfor ikke i Bevægelsen igiennem flydende Materier Tiderne af Faldet til Centret isokrone.

Man kan derfor heraf udlede en Mængde Tilfælde, som alle blive integrable. Vi ville iblant dem samtlig her ikke opholde os uden ved et eneste, det nemlig, da $n = 1$ og $z = -\frac{1}{r}(xc - c^2)$ $+ Be^{\frac{-x}{c}}$. Hvoraf flyder, at $dt = \frac{dx}{\sqrt{Be^{\frac{-x}{c}} - \frac{1}{r}(xc - c^2)}}$

Og følgelig; at Tiden af Faldet altid kommer til at beroe paa Distancen fra Centret, saa den artige Egenskab her taber sig, som vi forhen have beviist, at havde Sted i den frie Bevægelse, §. 22. at nemlig Tiden af Faldet i denne Kræfternes Hypothese altid var den samme, hvad heller at Begyndelsen af det skede i større eller i mindre Distancer fra Kræfternes Center.

§. 254.

Den Central-Kraft, som derimod dertil udfordres, bestemmes.

Men endskiønt at denne Egenskab ei tilkommer den Hypothese af Kræfterne, naar de nemlig sættes at være som Distancen fra Centret; maa der dog desuagtet være en anden, i hvilken at samme haver Sted, endskiønt at den flydende Materie yttrer en Modstand, der altid er Quadraten af Hastigheden proportionert. Vi ville kortelig undersøge, hvad Kræfternes Lov i dette Tilfælde bør være. Til den Ende ville

vi

vi igien foretage den almindelige Ligbed §. 250.

$z = \int \frac{-P dx . e^{\int -\frac{dx}{F}} + B}{e^{\int -\frac{dx}{F}}}$. Fremdeles ville vi, for at have lettere Benævninger, sætte $\int P dx . e^{\int -\frac{dx}{F}} = x$, da man derved faaer $z = \frac{B-x}{e^{\int -\frac{dx}{F}}}$, eller $z = e^{\int \frac{dx}{F}} (B-x.)$

§. 255.

Søges deraf Tiden, da fordi $dt = \frac{dx}{\sqrt{z}}$, bliver

$dt = \frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}} (B-x)}} = a$, ved a forstaaes en bestandig Størrelse; thi i Følge Spørsmaalets Natur bør Tiden af Faldet være altid den samme. Følgelig beroer alt paa, at indrette $\frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}} (B-x)}}$ saaledes, at Integralet, i hvormeget end at B og x eller x forandres, desuagtet bliver for den hele Tid en bestandig Størrelse. Men dette saaes ved at sætte $\frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}}}} = \frac{bdx}{\sqrt{x}}$. Saa man faaer

$\frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}} (B-x)}} = \frac{bdx}{\sqrt{Bx-xx}}$ og $t = \int \frac{bdx}{\sqrt{Bx-xx}}$, men

$\int \frac{\frac{1}{2}B dx}{\sqrt{Bx - xx}}$ er en Cirkel-Bue, hvis Abscisse er x, eller

$\int - P dx . e^{\int -\frac{dx}{F}}$ og Diametern B; og som derfor for den hele Bevægelse, naar $B = x$ forandres til Cirklens halve Peripherie, hvis Diameter er den bestandige Størrelse B, saa den hele Tid af Faldet beløber sig til $\frac{b}{2B} \int \frac{\frac{1}{2}B dx}{\sqrt{Bx - xx}} = \frac{bp}{2}$, naar Forholden af Diametern til Peripherien er den af $1 : p$.

Da saaledes Betingningerne af Spørsmaalet ere blevne fyldestgiorte, er der ingen Vanskelighed meer i at bestemme Central-Kraften selv. Thi da $\frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}}}} = \frac{b dx}{\sqrt{x}}$, saa bliver $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}}}} = 2b\sqrt{x}$

$= 2b\sqrt{\int P dx . e^{\int -\frac{dx}{F}}}$, og derfor $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{\int \frac{dx}{F}}}}\Big)^2$

$= 4b^2 . \left(\int P dx . (e^{-\int \frac{dx}{F}})\right)$. Tager man deraf igien Differentialerne, faaes $\frac{2dx}{e^{\int \frac{dx}{2F}}} \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2F}}} = 4b^2 . P dx . e^{-\int \frac{dx}{F}}$, hvoraf endelig findes

$$P = \frac{e^{\int \frac{dx}{2F}}}{2b^2} \int \frac{dx}{e^{\int \frac{dx}{2F}}}.$$

§. 256.

§. 256.

Sættes i denne Ligbed F at være en bestandig Størrelse $= c$, hvilket haver Sted, saa tidt som Tykkelsen af den flydende Materie er overalt den samme. Da bliver $\int \frac{dx}{2F}$ integrabel $= \frac{x}{2F}$ og

Men den er i Naturen ikke settelig muelig.

$$P = \frac{e^{\frac{x}{2F}}}{2b^2} \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2F}}} = \frac{e^{\frac{x}{2F}}}{2b^2} \cdot - 2F \cdot e^{\frac{-x}{2F}}, \text{ eller}$$

$$P = \frac{e^{\frac{x}{2F}}}{2b^2} \left(2F - Fe^{\frac{-x}{2F}}\right), \text{ eller } P = \frac{F}{b^2}\left(e^{\frac{x}{2F}} - 1\right)$$

$$= \frac{c}{b^2}\left(e^{\frac{x}{2c}} - 1\right).$$

Hvoraf sees, at naar for det hele Fald $x = 0$ bliver $P = 0$, saa i Kræfternes Center selv Kraften plat skulde forsvinde, hvilken Hypothese ikke stemmer med Naturen.

Anden Afdeelning.

Om den krumlinede Bevægelse igiennem flydende Materier, som staae imod og ere overalt ensdanne.

I.

Naar Kræfternes Direktioner ere parallele.

§. 257.

Den krumlinede Bevægelse, saaledes som den er blevet afhandlet i den almindelige Theorie for Central-Kræfterne §. 158. o. f. beroer

Almindelige Regler for den krumlinede Be-

vægelse i flydende Materier, som staae imod.

roer paa de selvsamme almindelige Betragtninger, som de vi her have at gjøre. Saa tidt nemlig, som den krumlinede Bevægelse skal have Sted, udfordres altid en Hastighed efter Tangenten og desuden en anden Kraft, hvis Direktion er ikke i Tangenten. Vi ville her alene betragte denne sidste Kraft, for saavidt som at den er central, fordi andre Hypotheser ikke ere naturlige. Og iblant de centrale Kræfter igien i Særdeleshed det Slags, som altid er bestandig i sin Virkning, saaledes som Tyngden hos os. Thi man kommer i de andre Hypotheser ikke stort videre end til differentielle Ligheder, hvilke ikke kunde integreres, men alene opløses enten ved de uendelige Følger eller ved krumme Liniers Beskrivning, saa Nytten ikke er betydelig.

§. 258.

Følger man da her den §. 158 o. f. forhen lagte Plan, saa sees strax, at den hele Central-Kraft K bør betragtes som opløst udi to andre, en som driver hen efter Tangenten, og en anden, som er perpendikulær paa den krumme Linie, eller paa Tangenten udi Røre-Punktet. Vedligeholdes fremdeles de samme Benævninger, som §. 158. o. f. da bliver

1) Tangential-Kraften $= \frac{K dy}{ds}$.

2) Normal-Kraften $= \frac{K dx}{ds}$.

§. 259.

Af disse Kræfter er det alene den første, som den flydende Materies Modstand forandrer, siden Legemet bevæger sig altid efter Tangenten med sin hele Hastighed. Kaldes derfor den flydende Materies

Mod-

Modstand R, da bliver Tangential-Kraften i dette Tilfælde $= \frac{K dy}{ds} - R$. Hvoraf følger paa samme Maade som før §. 158.

1) At Ligheden for Tangential-Kraften bliver i Almindelighed $(K\frac{dy}{ds} - R)ds = vdv = dz$, naar ved z forstaaes den Heide, som overalt svarer til den ubestemte Hastighed v.

2) Derimod bliver Ligheden for Normal-Kraften fuldkommen, som §. 158, $Krdx = 2zds$, eller $K\frac{dx}{ds} = \frac{2z}{r}$.

Af hvilke tvende Ligheder Differential-Ligheden til den krumme Linie bør bestemmes fast paa samme Maade som før §. 159 og 162.

§. 260.

Bevægelsens almindelige Bestemmelse, naar Central-Kræfterne ere bestandige.

Vi ville oplyse dette nærmere i den nyttigste Tilfælde, i den, da Central-Kraften er af bestandig Virkning; den flydende Materie overalt af samme Tykkelse; dens Modstand som Quadraten af Distancen forkeert, og Kræfternes Center uendelig langt borte. Med faa Ord. Vi ville særdeles betragte det Tilfælde, da Ting skydes eller kastes ud i flydende Materier, som paa før sagte Maade staaer imod, og drives ned efter af en bestandig Kraft, en saadan, som den naturlige Tyngde.

Er i dette Tilfælde ALB (Taf. XI. Fig. 9.) den krumme Linie, som det udkastede Legeme igiennemløber under Bevægelsen, da forestille de rette Linier cD og EF, x, de paa dem perpendikulære cG og EH, y. Ydermere er $K = G$, og den flydende Materies Modstand $= \frac{z}{c}$, naar ved z forstaaes, som før, den Heide, der

svarer

svarer til Hastigheden udi E og c, Høiden, som svarer til den Hastighed, med hvilken, naar et Legeme bevæger sig, det Flydendes Modstand bliver saa stor som den naturlige Tyngde.

Dette forudsat, forandres de to §. 259 givne Ligheder til disse andre.

1) For Tangential-Kraften $-Gdy-\frac{z}{c}ds=dz$.

2) For Normal-Kraften $G\frac{dx}{ds}=\frac{2v}{r}$. Sættes dx bestandig, da er $r=\frac{ds^3}{dxddy}$, og derfor $\frac{Grdx}{ds}=2z=-\frac{Gds^2}{ddy}$, og $G=-\frac{2zddy}{ds^2}$.

§. 261.

Nemlig, saavel i Henseende til Hastigheden.

For at bestemme Hastigheden, behøves derfor intet andet, end at udvikle G ligeledes af Ligheden for Tangential-Kraften, da man faaer $G=-\frac{dz+\frac{z}{c}ds}{dy}=\frac{-2zddy}{ds^2}$, og deraf igien

$$cdz=\frac{2czddydy-zds^3}{ds^2}, \text{ eller } \frac{cdz}{z}=\frac{2cddydy-ds^3}{ds^2}.$$

Da nu dx er bleven taget som bestandig og $dy^2+dx^2=ds^2$, saa bliver $dsdds=dyddy$, og $\frac{dz}{z}=\frac{2dds-\frac{ds^2}{c}}{ds}$. Følgelig $\text{Log. } z=\int\frac{2dds}{ds}-\frac{s}{c}$, eller $\text{Log. } z=2\text{ Log. } ds-\frac{s}{c}$. Men Log. z er en endelig Forhold, da for at bringe det øvrige og dertil, faaes $\text{Log. } z=2\text{ Log. } ds-2\text{ Log. }\frac{dx}{n}-\frac{s}{c}$, eller

Log.

$\text{Log.}\, z\frac{dx^2}{nds^2} = -\frac{s}{c}$, følgelig $\frac{z}{n}\frac{dx^2}{ds^2} = e^{-\frac{s^2}{c}}$ og

$$\frac{z}{n} = \frac{ds^2}{dx^2} e^{-\frac{s}{c}}.$$

§. 262.

Er Hastigheden funden, findes Tiden paa den sædvanlige Maade, man faar nemlig $dt = \int \frac{ds}{\sqrt{z}} = \int \frac{dx.e^{\frac{s}{2c}}}{\sqrt{n}}$. Som Tiden.

§. 263.

Den krumme Linie selv bestemmes ligeledes. Thi $z = -\frac{nds^2}{dx^2.e^{\frac{s}{c}}}$, §. 261. og fordi at $G = -\frac{2zddy}{ds^2}$, saa faaes $z = -\frac{Gds^2}{2ddy}$, følgelig og $\frac{n}{dx^2.e^{\frac{s}{c}}} = -\frac{G}{2ddy}$, og deraf igien $2nddy = -G.e^{\frac{s}{c}} dx^2$, som er den søgte Ligned til den krumme Linie: Thi da G sættes at være bestandig (eller, om man vil, en Funktion af y), saa indeholder denne Ligned intet andet end Linierne af den krumme Linie selv. Differential-Ligheden bestemmes for den krumme Linie, som de udkastede Ting beskrive i flydende Materier, der staae imod.

§. 264.

Opløser man denne Ligned ved Hielp af de uendelige Følger, da seer man strax, hvad Skikkelse den uendelige Følge bør have deraf, at Den samme oplöses videre, i

sær, naar Modstanden er liden.

naar $c = \infty$, bør Ligheden være $y = ax - \beta x^2$, følgelig maa man sætte $y = ax - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 - -$ o. s. v. saa bliver $dy = a dx - 2\beta x dx - 3\gamma x^2 dx - 4\delta x^3 dx - -$ o. s. v. Og fordi dx ansees som bestandig, bliver $ddy = -2\beta dx^2 - 6\gamma x dx^2 - 12\delta x^2 dx^2 - -$ o. s. v.

Fremdeles. Da $ds^2 = dx^2 + dy^2$, bliver $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dx^2 + a^2 dx^2 - 4a\beta x dx^2 + 4\beta^2 x^2 dx^2 - + \text{o. s. v.})}$. Hvoraf, om Quadrat-Roden udtrekkes, faaes $ds = dx \sqrt{1 + a^2} - \frac{2a\beta x dx}{\sqrt{1+a^2}}$ $+ -$ o. s. v. saa at $e^{\frac{s}{c}} = e^{\frac{x\sqrt{1+a^2}}{c} - \frac{a\beta x^2}{c\sqrt{1+a^2}}}$ o. s. v. fordi $s = x\sqrt{1+a^2} - \frac{a\beta x^2}{\sqrt{1+a^2}} + -$ o. s. v.

Da nu $e^{-\frac{s}{c}} = 1 - \frac{s}{c} + \frac{s^2}{2c^2} - +$ o. s. v., opløser man da den nylig fundne Værdie af $e^{\frac{s}{c}}$ i sin uendelige Følge, faaes $e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{x\sqrt{1+a^2}}{c} - \frac{a\beta x^2}{c\sqrt{1+a^2}} + \frac{x^2(1+a^2)}{2c^2} - +$ o. s. v.

Betiener man sig heraf i den foresatte Ligheds $2n ddy = -G e^{\frac{s}{c}} dx^2$, under den Betingning, at x er en meget liden Størrelse imod c, og kaster derfor alle de Leed bort af Ligheden, i hvilke Heiden af x overgaaer Quadraten, da faaes $2n(2\beta + 6\gamma x + 12\delta x^2) = G.(1 + \frac{x\sqrt{1+a^2}}{c} - \frac{a\beta x^2}{c\sqrt{1+a^2}} + \frac{x^2(1+a^2)}{2c^2})$, som er en algebraisk Ligheds, udi hvilken de ubekiendte Coefficienter eller medhielpende Tal, a, β, γ, δ, maa bestemmes.

§. 265.

§. 265.

For at gjøre dette saa meget desto lettere, kan man udelade alle de Leed, som divideres ved c^2; fordi, naar x er meget liden, kunne de samtlig ansees som ubetydelige Størrelser, i det Tilfælde, da c er meget stor. Hvilken Hypothese nogenlunde kan antages i Henseende til Luften. Dette forudsat, faaes $G = 2n.(2\beta + 6\gamma x + 12\delta x^2).(c\sqrt{1+a^2} - x(1+a^2) + a\beta x^2) : c\sqrt{1+a^2}$. Eller fordi G er, i Følge Hypothesen, en bestandig Størrelse, bliver

$$0 = 4n\beta + 12n\gamma - \frac{-12n\gamma(1+a^2)x^2 + 4an\beta^2x^3}{c\sqrt{1+a^2}} - G - \frac{4n\beta\sqrt{1+a^2}}{c}x + \frac{24ndx^2 \cdot c\sqrt{1+a^2}}{c\sqrt{1+a^2}}.$$

Hvoraf videre findes:

1) $4n\beta - G = 0$ og $\beta = \frac{G}{4n}$.

2) $12n\gamma - \frac{G}{c}\sqrt{1+a^2} = 0$ og $\gamma = \frac{G\sqrt{1+a^2}}{12nc}$.

3) $6\delta c\sqrt{1+a^2} - \frac{3G\sqrt{1+a^2}}{12nc}(1+a^2) + \frac{aG^2}{16c^2}$, og

$$\delta = \frac{G(1+a^2)}{24nc^2} - \frac{aG^2}{96n^2c\sqrt{1+a^2}}.$$

§. 266.

I disse saaledes fundne Værdier af β, γ, δ, er a endnu ubekiendt. Men den bestemmes deraf, at siden Ligheden til den krumme Linie er, i Følge Hypothesen, $y = ax - \beta x^2 - -$ o. s. v. og derfor $dy = adx - \beta x dx - -$ o. s. v. Da bliver, naar $x = 0$,

$dy = \alpha dx$, og $\frac{dy}{dx} = \alpha$. Men $\frac{dy}{dx}$ er Tangenten til den Vinkel Abg, som det udkastede Legeme gier i Udkastnings-Punktet A med Horizonten, og kan derfor altid ansees som bekiendt.

Ligeledes bestemmes den bestandige Størrelse n af den Hastighed, hvormed Legemet er blevet skudt eller kastet ud udi A. Thi $z = \frac{nds^2}{dx^2} \cdot \frac{e^{-s}}{c^s}$, og, naar $s = 0$ er $z = \frac{nds^2}{dx^2} = \frac{n.(\alpha^2+1)dx^2}{dx^2}$ $= n.(\alpha^2+1)$, saa i A er $z = C = n.(\alpha^2+1)$ og $n = \frac{C}{\alpha^2+1}$.

§. 267.

De algebraiske krumme Liniers almindelige Bestemmelse, som nærme sig til den virkelige Linie, hvilken de udkastede Ting beskrive i flydende Materier, som staae imod.

Deraf sees, at eftersom man enten antager c større eller mindre til imod x, og følgelig beholder i Ligheden enten et større eller mindre Antal af Leed i begge de uendelige Følger, saaes algebraiske Ligheder af adskillige Ordener, ligesom denne her fundne er en Linie af fierde Orden; fordi, i Følge den §. 264 og 265 giorte Hypothese, alle Leed udi Ligheden $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 - - -$ o. s. v. forsvinde indtil det, som haver den Coefficient δ. Men da δ (naar Værdien af n sættes i dens Sted) $= \frac{G(1+\alpha^2)^2}{24c^2C} - \frac{\alpha G^2(\alpha^2+1)^2}{96cC^2\sqrt{\alpha^2+1}}$ saa bliver δ en meget liden Størrelse, saa tidt som den Hastighed, hvormed Tingen i A er kastet ud, er meget stor, fordi c^2C og cC^2 blive da meget anseelige Størrelser imod de øvrige. Dette gier Ligheden endnu meget simplere, saa man faaer for dette Tilfælde denne Linie af den tredie Orden $y = \alpha x - \frac{G(1+\alpha^2)}{4C}x^2 - \frac{G(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12cC}x^3$.

§. 268.

§. 268.

Sættes endelig $c = \infty$, da bliver $y = ax - \frac{G(1+a^2)}{4C}x^2$, hvilket er Ligheden til Parabolen, som det og bør være i Bevægelsen igiennem et Rum uden Modstand, efter hvad vi desangaaende udførlig have afhandlet i det foregaaende. Er Bevægelsen frie, bliver den beskrevne Linie en Parabol.

§. 269.

Men hvad heller man betiener sig af den ene eller af den anden af de Linier, som alle med hinanden kunde tiene til at bestemme Bevægelsen i de flydende Materier, som staae imod; findes dog i dem alle, naar Inklinations-Vinklen af Skuddet er given, den største Længde, hvorhen Skuddet kan naae, eller AB, ved at sætte $y = 0$, i den fundne algebraiske Ligned $y = ax - \beta x^2 - \gamma x^3 - -$ o. s. v. Er Linien af tredie Høide, bliver $a = \beta x + \gamma x^2$, og derfor $x = \pm\frac{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}-\beta}{2\gamma}$, som er en Størrelse, der ikke beroer uden paa Tangenten af Inklinations-Vinklen og Hastigheden udi A, efter hvad vi have beviist §. 266. 267. Kastets eller Skuddets horizontale Længde bestemmes.

§. 270.

Sættes a at være en foranderlig Størrelse, men Hastigheden i A den samme, da findes dog §. 269 altid x, saa man paa denne Maade kan bestemme Kastets Længde under alle Inklinations-Vinkler til samme Hastighed.

§. 271.

Vil man søge det største Kast, som med samme Hastighed udi A kan gjøres; da udfordres dertil, at dx eller at Differentialen af Saa og det største Kast, som kan gjøres, naar i

alle Kastene Hastigheden i Begyndelsen af Bevægelsen er den samme.

dens Vardie $\frac{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}{2\gamma}-\frac{\beta}{2\gamma}=0$. Til den Ende maa, i Steden for γ og β deres forhen fundne Vardier sættes i deres Sted. Saa

$$x=\frac{1}{2(1+a^2)}\sqrt{9c^2G(1+a^2+48aCc\sqrt{1+a^2}}:\sqrt{G}-\tfrac{3}{2}c\sqrt{1+a^2},$$

og naar $1+a^2=q$; bliver $0=dx=18c^2ada:q-96Cca^2dx:Gq\sqrt{q}+9c^2ada:q+24c^2da:G\sqrt{q}+24Cca^2da:G\sqrt{q^3}+3cada.\sqrt{9c^2Gq+48aCc\sqrt{q}}:Gq^{\frac{3}{2}}$.

Hvoraf videre faaes

$$3c^2a\sqrt{q}+\frac{24Ca^2}{G}-\frac{8Cq}{G}=\frac{a\sqrt{9c^2Gq+48aCc\sqrt{q}}}{G},$$

eller $4C(1-2a^2)^2=3aGc(1-a^2)\sqrt{1+a^2}$; af hvilken Ligbed Tangenten til den høieste Forheinings-Vinkel, og følgelig Vinklen selv altid kunne bestemmes.

§. 272.

Vinklen, under hvilken der største Kast skeer, bliver lidt mindre end 45°.

Dersom c var uendelig stor imod C, hvilket haver Sted i den frie Bevægelse, som er uden al Modstand; da blev $1-a^2=0$ og $a=1$. Følgelig maatte det længste Kast da skee under 45°, saaledes, som vi i det forrige have fundet det. Saa tidt derimod som C er paa nogen Maade betydelig imod c, bliver først $3aGc(1-a^2)\sqrt{1+a^2}-4C(1-2a^2)^2=0$, hvilket viser, at i det første Leed $3aGc(1-a^2)\sqrt{1+a^2}$, a er mindre end 1, saa at i en flydende Materie, der staaer imod, bliver Vinklen, under hvilken det høieste Kast skeer, altid noget mindre end 45°, men nærmer sig altid saa meget meer til 45°, som C:c er af en mindre Forhold.

§. 273.

§. 273.

Det Punkt L, hvori Skuddet stiger til sit Høieste, findes ved at sætte $dy = 0$, fordi Tangenten maa i L være horizontal. Derfor bliver i dette Tilfælde $\frac{\alpha}{3\gamma} = x^2 + \frac{2\beta}{3\gamma}x$, eller og

$$x = \sqrt{\frac{\alpha^2}{3\gamma} + \frac{\beta^2}{9\gamma^2}} - \frac{\beta}{3\gamma}.$$

Det høieste Punkt bestemmes, hvortil den udkastede Ting kan stige.

§. 274.

Da i Almindelighed $x = \frac{\sqrt{4\alpha\gamma + \beta^2} - \beta}{2\gamma}$ §. 269.

$$= \frac{1}{1+\alpha^2}\left(\sqrt{\frac{9c^2G(1+\alpha^2) + 48\alpha Cc\sqrt{1+\alpha^2}}{G}}\right) - \frac{\frac{3}{2}c}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

saa sees, at saa tidt som Længden af et eneste Skud er givet, tillige med Inklinations-Vinklen og Hastigheden udi A, saa kan deraf Størrelsen c bestemmes, følgelig og den Hastighed, med hvilken, naar et Legeme bevæges, da bliver Modstanden saa stor som Tyngden.

Paa hvad Maade den Hastighed kan findes, imod hvilken at Modstanden er saa stor som Tyngden.

§. 275.

Er den krumme Linie given, udi hvilken Bevægelsen skeer, da kan e umiddelbar deraf findes, i hvorledes og at det Flydendes Modstand er beskaffen. Thi man faaer §. 260 $G = -\frac{2zddy}{ds^2}$, følgelig $z = \frac{-Gds^2}{2ddy}$ og $dz = \frac{-2Gdyddy^2 + Gds^2d^3y}{2ddy^2}$. Men dz er og §. 259 $= -Gdy - Rds$. Følgelig bliver $-Gdy - Rds = \frac{-2Gdyddy^2 + Gds^2d^3y}{2ddy^2}$ og $R = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2}$, som er den almindelige Lighed, der, naar Modstanden er given, tiener til at bestemme Størrelsen c.

Udføres videre.

Er

Er for Exempel $R = \frac{z}{c}$, saaledes som Modstanden paa det nærmeste findes at være udi Luften. Da, fordi $z = \frac{-Gds^2}{2ddy}$, bliver $R = \frac{-Gds^2}{2cddy} = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2}$ og $c = \frac{dsddy}{d^3y}$. I hvilken Værdie ikke andre Størrelser komme for end de alene, som kunde bestemmes af den krumme Linies givne Ligned.

§. 276.

Af den givne krumme Linie, udi hvilken Bevægelsen skeer, at bestemme Modstanden.

Deraf sees fremdeles, hvorledes man altid, naar den krumme Linie, udi hvilken Bevægelsen skeer, er given, kan bestemme den Modstand, som udfordres til at Bevægelsen kan skee udi denne Linie, om ellers den hastiggiørende Kraft immerfort sættes at være bestandig, siden man faaer $R = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2}$. Vi ville her ikke opholde os ved de adskillige Undersøgninger, som i denne Henseende ere blevne giorte (*), da Nytten af dem ikke er den, som man havde ønsket, men alene giøre denne Anmerkning, at i de flydende Materier, som staae imod, kan en Parabol aldrig blive beskreven af de udkastede Legemer, fordi i denne Linie d^3y, følgelig og $R = 0$: Hvoraf derimod paa den anden Side sees, at Parabolen er den Linie, hvori Legemerne bevæge sig, naar ingen Modstand hindrer, og de hastiggiørende Kræfter ere bestandige.

§. 277.

Dersom den hastiggiørende Kraft ei ansees som bestandig, men som foranderlig, efter hvad Lov man selv vil, alene at denne sidste er given

(*) See Eulers Mekanik T. I. C. 6. og Neutons *Princ. Philos. Lib.* 2. Sect. 6.

given, og at Direktionen bliver uforandret parallel eller vertikal, da bestemmes endnu R i dette almindelige Tilfælde lige saa let, som i den forrige Hypothese. Thi man behøver alene i Ligheden §. 275. $z = -\frac{Gds^2}{2ddy}$, at behandle G, som en foranderlig Størrelse under Differentiationen, og i øvrigt at gjøre alt som i §. 275, da man faaer $R = \frac{dGdsddy - Gds^2d^3y}{2ddy^2}$. Saa den Modstand altid kan bestemmes, hvilken udfordres i samtlig disse Hypotheser af de hastiggiørende Kræfter dertil, at Bevægelsen kan skee i hvad given krum Linie som man vil.

§. 278.

Er derimod Modstanden og den krumme Linie, udi hvilken Bevægelsen skeer, begge givne, findes ligeledes de Kræfter, som i at virke altid efter vertikale Direktioner, alene ere i Stand til at forvolde, at Bevægelsen kan skee i denne krumme Linie. Thi da §. 261 $G = -\frac{2zddy}{ds^2}$ og $\frac{z}{n} = \frac{ds^2}{dx^2}e^{\frac{-s}{c}}$, saa bliver i dette Tilfælde

$$G = -\frac{2ddy}{dx^2}ne^{\frac{-s}{c}}.$$

Ligeledes af Modstanden og af den krumme Linie, naar de antages som givne, at bestemme de hastiggiørende Kræfter.

2.

Om den krumlinede Bevægelse, naar Kræfternes Direktioner ei ere parallele, og en overalt ensdan flydende Materie bestandig staaer imod.

§. 279.

Søge Kræfterne bestandig imod et vist Center, da er den letteste Maade at behandle de herhid hørende Udregninger paa den, som vi have

Den krumlinede Bevægelses almindelige Be-

stemmelse, naar de hastiggivende Kræfter ere foranderlige.

have betient os af i det foregaaende §. 158, da nemlig Ligheden for Normal-Kraften gives ved Perpendiklen paa Tangenten. Derved faaes for Tangential-Bevægelsen den samme Ligheds, som før, $dz = -Kdy - Rds$, §. 259. For Normal-Kraften derimod faaes denne Ligheds $\frac{Kdy}{2z} = \frac{dp}{p}$. §. 158.

§. 280.

Saavel i Henseende til Hastigheden.

Søges en dobbelt Værdie af K ved Hielp af disse to Ligheder, da bestemmes Hastigheden, og man faaer $K = \frac{2zdp}{pdy} = \frac{dz + Rds}{-dy}$, og deraf igien $\frac{-pdz - 2zdp}{Rp} = ds$, som er den Ligheds, hvoraf Hastigheden bør bestemmes.

Saaledes om $R = \frac{z}{c}$, saaledes som vi i det forrige ofte have sagt, at Modstanden findes at være udi Luften. Da bliver $-\frac{cdz}{z} - \frac{2cdp}{p} = ds$, følgelig $-c \operatorname{Log.} z - c \operatorname{Log.} p^2 = s$, eller $-\operatorname{Log.} \frac{1}{zp^2} = \frac{s}{c} + B$. Denne bestandige Størrelse bestemmes deraf, at naar $s = o$, bliver $z = C$ og $p = h$, saa man faaer $\operatorname{Log.} \frac{zp^2}{Ch^2} = -\frac{s}{c}$, og $\frac{zp^2}{Ch^2} = e^{\frac{-s}{c}}$, følgelig $z = \frac{e^{\frac{-s}{c}} \cdot Ch^2}{p^2}$.

For at sammenligne dette med Hastighedens Beskaffenhed i det Tilfælde, da Bevægelsen er frie, kan ydermere agtes, at ligesom i den frie og uhindrede Bevægelse Hastigheden er som Perpendiklen paa Tangenten forkeert tagen, saa bliver den i dette Tilfælde af den ufrie

Bevægelse

Bevægelse og forkeert proportionert den Deel af samme Perpendikel, som tilkiendegives ved $e^{\frac{s}{2c}}$, saa den beroer tillige paa den igiennemløbne Veis Længde.

§. 281.

Af Hastigheden findes Tiden. Thi Hastigheden, som faaes ved Integrationen af den Ligbed $-\frac{pdz+2zdp}{Rp} = ds$, eller $-p^2dz - 2zdp = Rp^2ds$, hvis Integral er $p^2z = \int -Rp^2ds$, bliver $\sqrt{z} = \sqrt{\frac{\int -Rp^2ds}{p^2}}$, i hvilket vi ville sætte $= z$, og følgelig bliver $t = \int \frac{ds}{\sqrt{z}}$. Som Tiden.

Er $R = \frac{z}{c}$, da bliver $t = \int \frac{ds.e^{\frac{s}{2c}}p}{b\sqrt{C}} + B$.

§. 282.

Man bestemmer ligeledes den krumme Linie selv. Thi er z fundet og K er en Funktion af y, da behøves intet andet end at sætte dens Værdie i Ligheden for Normal-Kraften $\frac{Kdy}{2z} = \frac{dp}{p}$, da man derved faaer en nye Ligbed, som ikke indeholder andet end Størrelser af den søgte krumme Linie. Og den krumme Linie, udi hvilken at Bevægelsen skeer.

Saaledes om Modstanden er Quadraten af Hastighederne proportionert, bliver $\frac{Kdy.e^{\frac{s}{c}}}{2Cb^2} = \frac{dp}{p^3}$. Sættes $K = y^n$, da bliver

$\frac{y^n dy . e^{\frac{s}{c}}}{2Cb^2} = \frac{dp}{p^3}$, som er den almindelige Lighed for de Central-Kræfter, der ere som en vis given Høide af Distancen fra Kræfternes Center. I denne Lighed kan s altid udryddes ved at agte, at $ds = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - p^2}}$, saa man faaer i Almindelighed i denne Kræfternes Hypothese denne Lighed for den krumme Linie

$$\frac{y^n dy . e^{\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - p^2}}}}{2Cb^2} = \frac{dp}{p^3}.$$

§. 283.

Hvad Kræfternes almindelige Forhold maa være, naar i en flydende Materie den samme Linie skal beskrives, som i den uhindrede Bevægelse.

Sammenligner man den §. 282 givne Lighed $Kdy . e^{\frac{s}{c}} = \frac{2Cb^2 dp}{p^3}$ med den forhen givne §. 163. $Kdy = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$, i hvilken sidste B tilkiendegiver det samme, som C i den første, og b ligeledes det samme som h, da seer man let, at den Kraft $K . e^{-\frac{s}{c}}$ maa i en flydende Materie, som staaer imod, giøre; at i den ufrie Bevægelse den samme Linie igiennemløbes, som i den frie og uhindrede skulde beskrives af det udkastede Legeme, naar det blev drevet af den hastiggiørende Kraft K, thi man kommer udi begge Tilfælde til den samme Lighed for den krumme Linie $Kdy = \frac{2Bb^2 dp}{p^3}$.

§. 284.

§. 284.

Kræfternes almindelige Bestemmelse af Modstanden og af den krumme Linie antagne som givne.

Vil man, saa tidt som den krumme Linie og Loven for Modstanden ere givne, bestemme, hvad Kræfter der udfordres til at foraarsage Bevægelsen i den givne krumme Linie igiennem en flydende Materie, som staaer imod. Da lader sig samme nu let udvikle ved Hielp af de foregaaende og før fundne Ligheder. Thi i Følge §. 280 er Central-Kraften $K = \frac{2zdp}{pdy}$, §. 280 og 281 er $z = \int \frac{-Rp^2 ds}{p^2}$ og derfor i Almindelighed $K = \frac{2f - Rp^2 ds.\, dp}{p^3 dy}$.

§. 285.

Ligeledes Modstandens Bestemmelse af de givne Kræfter og af de givne krumme Linier.

Man kan ligeledes almindelig bestemme, hvad Slags Modstand dertil udfordres, at et Legeme, som drives af en vis given Central-Kraft, kan i en flydende Materie, som staaer imod, beskrive en vis given Linie. Man behøver alene at betiene sig af den samme Methode her, som vi nylig forhen have betient os af §. 276. 277. Thi i Følge §. 279 er $\frac{Kpdy}{2dp} = z$. Følgelig, saa tidt som K er given i y, eller i de Størrelser, som henhøre til den krumme Linie, blive saavel Værdierne af z, som af dz, heller intet andet end Funktioner af de Størrelser, som henhøre til den givne krumme Linie. Sættes derfor disse Værdier af z og dz i deres Sted udi Ligheden §. 280. $-\frac{pdz + 2zdp}{Rp} = ds$. Da bliver $R = \frac{-pdz - 2zdp}{pds}$, i hvilken Værdie, efter det nylig sagte, z og dz ikke ere uden Funktioner af de Størrelser, som henhøre til den givne krumme Linie.

§. 286.

Man kan i enkelte Tilfælde udlede af disse almindelige Ligheder en Mængde Slutninger (*), men da de Undersøgninger, som saaledes kunde gieres, fast alle have den Hensigt, at bestemme Theorien af Physik og Astronomie, og man i de fleste Tilfælde ikke kan komme videre end til differentielle Ligheder, ville vi derved ikke opholde os: Allermest, da det ikke er vanskeligt, af de her givne almindelige Methoder, naar Methoderne af Algebre ellers ere bekiendte, uden Hinder at bestemme det, som angaaer Bevægelsens, Modstandens og Kræfternes Natur udi de enkelte Tilfælde.

Tredie Afdeelning.

Om Faldet ned efter krumme og rette Linier, saavelsom om Bevægelsen op efter disse Linier, naar de hastiggiorende Kræfter ere bestandige, og virke efter parallele Direktioner.

§. 287.

Da denne Afhandling er den selvsamme, som den, vi forhen have betragtet i Tillægget til den tredie Forelæsning, alene med den Forskiel, at vi der ikke saae uden paa den Modstand alene, som kom af den Linie, over hvilken Bevægelsen skede, da vi derimod her desuden maa betragte den, som kommer af Legemets Hastighed eller Fart imod den flydende Materie. Saa kan man agte, at de §. 32. 33. givne

(*) See Eulers Mekanik sidst anførte Sted.

givne Værdier af Kræfterne her ligeledes have Sted. Dette alene iagttaget, at den forhen saa kaldte Normal-Kraft, den, som virker perpendikulær paa den krumme Linie, forandres ikke af det Flydendes Modstand, fordi den altid er en simpel Pression, og virker ikke med en given og bestemt endelig Hastighed, men da dette sidste haver Sted i Henseende til Tangential-Kraften, saa er det den, som af det Flydendes Modstand alene forandres. Endskiønt at denne Forandring tilsidst og strekker sig til den normale Kraft, fordi at Hastigheden efter Tangenten svekkes af Modstanden, følgelig og den Deel af den normale Kraft, som er centrifugal, i Følge af det, hvad vi desangaaende have sagt i Tillægget §. 178 og følg.

§. 288.

Bevægelsens almindelige Bestemmelse i flydende Materier, som staae imod, naar de tunge Ting bevæges op eller ned efter over disse Linier.

Er (Taf. XII. Fig. 1) AB den krumme Linie, ned efter hvilken at Faldet skeer, bestemmes alt her, som i §. 32. 33. alene, at hvad vi der have kaldet y, her kaldes x og omvendt, siden denne Benævnings-Maade her er den bequemmeste. Derfor bliver, naar $AD = x$, $DE = y$, og den hele Kraft kaldes G, den Deel af samme, som bevæger efter Tangenten $= \frac{gdx}{ds}$, om Bevægelsen skeer fra A til B ned efter, og $= -\frac{gdx}{ds}$, om Bevægelsen skeer fra B imod A op efter. Men denne Kraft formindskes eller formeres af Modstanden R, eftersom Bevægelsen skeer enten ned ad eller op efter, saa den hele bevægende Kraft efter Tangenten bliver saaledes $\pm \frac{gdx}{ds} - R$.

Kaldes

Kaldes desuden Hastigheden i et hvert Punkt af den krumme Linie som E, $\sqrt{z}$ og den dertil svarende Høide z, da bliver i Almindelighed $(\pm\frac{gdx}{ds} - R)\,ds = dz$.

§. 289.

I sær, naar Modstanden er som Quadraten af Hastigheden.

Da det er fast unyttigt, (uden i meget faa Tilfælde) i denne Art af Bevægelse at betragte nogen anden Slags Modstand end den, der er som Quadraten af Hastigheden. Sættes da som før $R = \frac{z}{c}$, da faaes for Faldet ned efter $gdx - \frac{z}{c}ds = dz$.

§. 290.

Og Faldet skeer over rette Linier.

Det simpleste Tilfælde af alle er det, da Faldet skeer over skraaeliggende rette Linier, som AB, (Taf. XI. Fig. 2.) om Cosinus til Vinklen $BAC = \frac{1}{a}$ og den hele Sinus $= 1$, bliver i den rette Linie $adx = ds$, saa $dz = gdx - \frac{az}{c}dx$, og $\frac{cdz}{gc - az} = dx$, hvoraf Integralen er $x = -\frac{c}{a}\text{Log.}\,\overline{gc - az} + B$.

I Henseende til den bestandige Størrelse B ere to Tilfælde at agte. 1) Den ene, naar Faldet ned efter begynder udi A uden al Hastighed. I dette Tilfælde bør altid, naar $x = 0$, ligeledes $z = 0$, saa B derfor bliver $= \frac{c}{a}\text{Log.}\,gc$, og $x = \frac{c}{a}\text{Log.}\,gc - \frac{c}{a}\text{Log.}\,\overline{gc - az}$, eller $x = \frac{c}{a}\text{Log.}\,\frac{gc}{gc - az}$.

2) Den anden er den, da Faldet i A begynder med en vis given Hastighed, for Exempel den, til hvilken den Høide c svarer. I dette

I dette Tilfælde, naar $x = 0$, bliver $z = C$ og $B = \frac{c}{a} L. \frac{gc}{gc - aC}$.
Derfor bliver $x = \frac{c}{a} Log. \left(\frac{gc - aC}{gc - az}\right)$.

§. 291.

Man udvikler af disse Ligheder let Hastighederne ved at tage Tallene. Thi i det første Tilfælde bliver $e^{\frac{ax}{c}} = \frac{gc}{gc - az}$ og $z = \frac{gc}{a} - \frac{gc}{ae^{\frac{ax}{c}}} = \frac{gc}{a}\left(1 - e^{-\frac{ax}{c}}\right)$.

I det andet derimod faaes $e^{\frac{ax}{c}} = \frac{gc - aC}{gc - az}$, og derfor

$$z = \frac{gc.e^{\frac{ax}{c}} - gc - aC}{ae^{\frac{ax}{c}}} = \frac{gc}{a}\left(1 - (ge + aC)e^{-\frac{ax}{c}}\right).$$

§. 292.

Man seer deraf videre, at i det første Tilfælde, naar Faldet begynder i A uden Hastighed, da 1) om $x = \infty$, maa $L. \frac{gc}{gc - az}$ blive ∞. Følgelig $gc - az = 0$ og $z = \frac{gc}{a}$. Følgelig bliver $\sqrt{\frac{gc}{a}}$ den største Hastighed, som ved Faldet kan vindes, endog igiennem et uendeligt Rum. Hvilket og sees deraf, at naar et uendeligt Rum er igiennemløbet, bliver $e^{-\frac{ax}{c}} = 0$, og derfor $z = \frac{gc}{a}$.

Hastigheden voxer her ikke uden i en vis Størrelse, skiønt den først bliver størst, naar et uendeligt Rum er blevet igiennemløbet, og de foranførte Hastighedens Beskaffenheder i den frie Bevægelse tabe sig her til største

2) Og ligeledes fordi, at naar $gc = az$, $x = \text{Log.}\ \mathfrak{S}$, saa følger, at den største Hastighed vindes ikke over skraaeliggende Planer, førend et uendeligt Rum er igiennemlebet.

3) Under adskillige Inklinations-Vinkler (g og c tagne som bestandige under dem alle) bliver derfor den største Hastighed $z = \frac{1}{a}$, følgelig, alt som a bliver større til, bliver z mindre. Men siden §. 291. a er forkeert som Cosinus af Vinklen BAC, og derfor z Cosinus af samme Vinkel proportionert. Saa følger, at den største muelige Hastighed, som kan blive til ved Faldet, er den, som vindes ved Faldet igiennem Vertikalen. Jo meer skraaeliggende derimod at Planet er, desto mindre bliver denne Hastighed.

§. 293.

Sætter man ligeledes i Ligheden $\frac{gc}{a}\left(1 - (gc + ac)\, e^{-\frac{ax}{c}}\right) = z$, $x = \mathfrak{S}$ bliver $z = \frac{gc}{a}$; saa Beskaffenheden af den største Hastighed bliver i dette Tilfælde den samme, som i den forrige, og den Hastighed, hvormed Legemet begyndte at bevæge sig udi A, gior intet til Sagen.

§. 294.

Stiger et Legeme op efter BE med en vis given Hastighed, og $BG = x$, da bliver §. 288 $\left(\frac{gdx}{ds} + R\right) ds = -dz$, og naar Sekanten til Planets Inklinations-Vinkel med Horizontalen kaldes a, som før §. 290, bliver $ds = a dx$. Er $R = \frac{z}{c}$, som før,

fer, da bliver $gdx + z\frac{adx}{c} = -dz$. Men vores forhen fundne Ligned for Faldet ned efter §. 289, nemlig $gdx - z\frac{adx}{c} = dz$, forvandles i denne sidste ved at sætte $g = -g$. Følgelig kan man og under Betingning af denne Forandring strax betiene sig af den §. 290 fundne Integral, nemlig, saa tidt som Tingene stige over skraaeliggende Planer op efter, bliver $x = \frac{c}{a}\text{Log.}\left(\frac{gc+aC}{gc+az}\right)$.

§. 295.

Sættes $z = 0$, da findes den største Høide, til hvilken at Legemet kan stige; nemlig $ED = \frac{c}{a}\text{Log.}\left(\frac{gc+aC}{gc}\right)$.

I Stigningen op efter bestemmes den største Høide en Ting kan stige til, og den største Længde paa Planet, som den kan igiennemløbe.

Ligeledes findes den største Længde, som det kan beskrive over det inklinerte Plan $CB = c\text{Log.}\left(\frac{gc+aC}{gc}\right)$, fordi $s = ax$.

§. 296.

Dersom ved Faldet ned efter AB den Hastighed b vindes, og den faldne Ting siden igien stiger med samme Hastighed b op efter BE, og man vil i begge Tilfælde sammenligne de vertikale Høider, da bliver, naar i Ligheden §. 190. 1. i Steden for z sættes b, $x = AC = \frac{c}{a}\text{Log.}\left(\frac{gc}{gc-ab}\right)$, og da Stigningen skal skee med den samme Hastighed b, bliver i Ligheden §. 295, $ED = \frac{c}{a}\text{Log.}\left(\frac{gc+aC}{gc}\right)$ Men $C = b$, saa at $AC : CD = L.\left(\frac{gc}{gc-ab}\right) : \text{Log.}\left(\frac{gc+ab}{gc}\right)$, om nemlig begge Planerne BA og EB have den samme Inklination

I flydende Materier, som staae imod, er den vertikale Høide af Stigningen altid mindre end den af Faldet.

imod Horizonten. Men disse Høider kunne ei være lige store, (hvilket man og desuden let seer) thi ellers skulde $-a^2b^2=0$.

Følgelig om disse to Høider skulle være de samme, maa Inklinations-Vinklerne være adskillige. Kaldes Sekanten til ABC, som før a, den derimod til EBD, A. Da bliver AC = ED, naar

$$\overset{a}{\sqrt{\frac{gc}{gc-ab}}}=\overset{A}{\sqrt{\frac{gc+Ab}{gc}}}.$$

§. 297.

Vil man, at Længderne, som igiennemløbes over de under adskillige Vinkler inklinerte Planer AB og BE skulle være lige store; da om Sekanterne kaldes som før a, og A: Forholde sig $EB : BA = \text{Log.}\frac{gc+Ab}{gc} : \text{Log.}\frac{gc}{gc-ab}$, og naar EB = BA, bliver $\frac{gc+Ab}{gc}=\frac{gc}{gc-ab}$, hvoraf videre faaes $a=\frac{Agc}{gc+Ab}$, saa at derfor Stigningen maa skee under en mindre Vinkel end Faldet.

§. 298.

Tiden af den retlinede Bevægelse bestemmes.

Tiden af Faldet er i Almindelighed, om Hastigheden $=\sqrt{z}$, $\frac{adx}{\sqrt{z}}$ og $dx=\frac{cdz}{gc-az}$, §. 290. Følgelig om Tiden = T, bliver $dT=\frac{acdz}{(gc-az)\sqrt{z}}$. Sættes $\sqrt{z}=t$, bliver $dT=\frac{2acdt}{gc-at^2}$

$$=\frac{2cdt}{\frac{gc}{a}-t^2}=\frac{\sqrt{\frac{ac}{g}}dt}{t+\sqrt{\frac{gc}{a}}}-\frac{\sqrt{\frac{ac}{g}}dt}{t-\sqrt{\frac{gc}{a}}}$$

og

og $T = \sqrt{\frac{ac}{g}}\left(\text{Log.}\, t + \sqrt{\frac{gc}{a}} - \text{Log.}\, t - \sqrt{\frac{gc}{a}}\right)$

$= \sqrt{\frac{ac}{g}}\,\text{Log.}\,\frac{t+\sqrt{\frac{gc}{a}}}{t-\sqrt{\frac{gc}{a}}}$, og naar i Steden for t sættes dens Værdie $\sqrt{z}$, faaes $T = \sqrt{\frac{ac}{g}}\,\text{Log.}\left(\frac{\sqrt{az}+\sqrt{gc}}{\sqrt{az}-\sqrt{gc}}\right)$, som er Tiden for Faldet ned efter AB, naar Hastigheden udi $A = 0$. Gieres Integralet fuldstændigt, ved at legge den bestandige Størrelse til, faaes $T = \sqrt{\frac{ac}{g}}\,\text{Log.}\left(\sqrt{\frac{az+\sqrt{gc}}{-\sqrt{az}+\sqrt{gc}}}\right)$.

§. 299.

Tiden for Stigningen op efter BA bestemmes derimod saaledes. $dT = -\frac{acdz}{(gc+az)\sqrt{z}} = -\frac{2acdt}{gc+at^2} = \frac{-2cdt}{\frac{gc}{a}+t^2}$, som ligesom for $\sqrt{z} = t$. Integrerer man derfor dT paa samme Maade, som forhen §. 233, da faaer man $T = \frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{g}}$. B. T. $\sqrt{\frac{az}{gc}}$.

Vil man derfor sammenligne Tiden af Faldet med Tiden af Stigningen over Planer af samme Inklination, og Hastigheden, som vindes ved Faldet ned efter $AB = b$, da om Stigningen skeer med samme Hastighed igien op over BE, da forholde Tiderne af Bevægelsen sig som $\text{Log.}\left(\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{gc}}{-\sqrt{ab}+\sqrt{gc}}\right) : 2\text{B. T.}\sqrt{\frac{ab}{gc}}$.

§. 300.

Bevægelsens almindelige Bestemmelse i samme Hypothese, naar Faldet skeer over andre krumme Linier.

Den Hypothese, da Modstanden sættes at være som Quadraten af Distancen, fører den Fordeel med sig frem for de andre, at Bevægelsen i de krumme Linier lader sig i Almindelighed bestemme, fordi de ubekiendte kunde skilles ad i den Ligheds, som fastsætter Hastigheden. Thi vil man i Linien AB (Taf. XII. Fig. 1.) undersøge Hastigheden af Bevægelsen ned efter, alle Benævninger giorte, som i §. 288, da bliver $dz = gdx - Rds$. Og fordi $R = \frac{z}{c}$, bliver $dz = gdx - \frac{z}{c}ds$. Behandles denne Ligned paa samme Maade som den forhen integrerte, skiønt almindeligere, §. 250, da bliver her $e^{\int -\frac{dx}{F}} = e^{\frac{\int ds}{c}} = e^{\frac{s}{c}}$, og man faaer $z = \frac{\int P dx . e^{\frac{s}{c}} + B}{e^{\frac{s}{c}}}$, og fordi vi her antage P som en bestandig Størrelse $= g$, bliver $e^{\frac{s}{c}} z = \int g dx\, e^{\frac{s}{c}} + B$.

I Henseende til B er en dobbelt Anmerkning at giøre. 1) Er Hastigheden i Begyndelsen af Faldet udi $A = 0$, da maa $\int g dx . e^{\frac{s}{c}}$ blive $= 0$, naar $s = 0$. 2) Er Hastigheden i A derimod given, og dens Høide $= C$, maa B være det, hvad Integralen bliver, naar $s = 0$ og $z = C$, saaledes, som vi bestandig have iagttaget det overalt i det foregaaende.

§. 301.

§. 301.

Den største Hastighed findes ved at differentiere z. Da derfor §. 299 $dz = gdx - \frac{z}{c}ds$, saa bliver $gdx = \frac{z}{c}ds$ og $z = \frac{cgdx}{ds}$, eller $ds : dx = g : \frac{z}{c}$, saa den største Hastighed falder ikke her, som i Bevægelsen uden Modstand i det Punkt, hvor Tangenten til den krumme Linie er horizontal; men i et hvert andet, hvor Sinus tot. forholder sig til Cosinus af den Vinkel, hvilken Tangenten i det Punkt gier med Vertikalen, som Tyngden til Modstanden udi samme Punkt.

I flydende Materier, som staae imod, saaes ikke ved Faldet den største Hastighed i det Punkt af Linien, hvor Tangenten er horizontal, om end samme er det laveste.

§. 302.

Tiden af Faldet igiennem AB, naar AE $= x$ bliver

$$= \int \frac{ds.e^{-\frac{s}{2c}}}{\sqrt{\int gdx.e^{\frac{s}{c}} + B}}.$$

§. 303.

Skeer Bevægelsen fra B op efter imod A, og BH kaldes x, BG, s; da blive saavel g som R negtende Størrelser, og man faaer §. 288. $gdx + \frac{z}{c}ds = -dz$. Følgelig, naar i Steden for g sættes $-g$, forandres de forhen fundne Integraler til de, som passe sig paa dette Tilfælde. Man faaer nemlig

1) $e^{\frac{s}{c}}z = \int -gdx.e^{\frac{s}{c}} + B$, hvoraf Hastigheden bestemmes.

2) Naar

2) Naar Tiden $= t$, bliver $t = \int \frac{e^{\frac{s}{2c}} ds}{\sqrt{\int -gdx . e^{\frac{s}{c}} + B}}$

3) Sættes $z = 0$, findes det Punkt i Linien BA, hvor Bevægelsen hører op.

§. 304.

Dersom i Bevægelsen ned efter fra A til B, BH kaldes x og BG s. Da bliver $\left(\frac{gdx}{ds} - \frac{z}{c}\right) - ds = dv$, fordi baade x og s tage af, alt som Hastigheden tager til. Saa man faaer $-gdx + \frac{z}{c} ds = dv$, hvilket og lader sig strax bestemme af Ligheden §. 299, ved at sætte i den x og s negative eller negtende Størrelser. Men denne Ligheds lader sig ligeledes strax udlede af den sidst givne §. 302, ved at sætte $c = -c$. Følgelig faaer man og ved samme Forandring udi dette Tilfælde

1) $e^{\frac{-s}{c}} z = \int -gdx . e^{-\frac{s}{c}} + B.$

2) $t = \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2c}} \left(\sqrt{\int -gdx . e^{-\frac{s}{c}}} + B\right)}$

§. 305.

Bevægelsen i Cykloiden undersøges.

Saaledes. Om den krumme Linie AB er en omvendt Cykloide, og man vil bestemme Hastigheden af Faldet til et hvert givet Punkt E i denne Linie, naar BH $= x$, BG $= s$, og Diametern

til

tilden Cirkel, som beskriver Cykloiden, $= \frac{1}{2}a$. Da fordi at i denne Linie $s = 2\sqrt{\frac{1}{2}ax} = \sqrt{2ax}$, bliver $dx = \frac{sds}{a}$ og §. 303, Hastigheden $z = \frac{\int -gdx.e^{-\frac{s}{c}} + B}{e^{-\frac{s}{c}}} = \frac{\int -\frac{gs}{a}.e^{\frac{-s}{c}} ds + B}{e^{-\frac{s}{c}}}$.

Men i Følge det, som vi have sagt §. 252, er $\int s.e^{-\frac{s}{c}} ds$ $= (-cs - c^2)e^{-\frac{s}{c}}$; og naar man legger det til, hvad Integralet bliver, naar $s = 0$, faaes $\int s.e^{-\frac{s}{c}} ds = (-cs - c^2).e^{-\frac{s}{c}} + c^2$. Følgelig bliver Hastigheden

$$z = \frac{\left(\frac{csg + c^2g}{a}\right).e^{\frac{-s}{c}} - \frac{c^2g}{a} + B}{e^{-\frac{s}{c}}}$$

$$= \frac{csg + c^2g - c^2g.e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}{a}.$$ I hvilken Ligned B forestiller det, som z bliver, naar $s = 0$, og følgelig den Hastighed, der er vundet udi B ved at falde igiennem den hele Bue AB.

§. 306.

Deraf bestemmes videre det Punkt L, udi hvilket at Hastigheden er størst. Thi §. 300 bliver Høiden, som svarer til Hastigheden

heden udi dette Punkt $= \frac{cgdx}{ds}$, og derfor $\frac{cgdx}{ds} = \frac{egs}{a}$

$= \frac{csg + c^2g - c^2g.e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}{a}$. Følgelig bliver

$c^2g + (aB - c^2g)e^{\frac{s}{c}} = 0$ og $e^{\frac{s}{c}} = \frac{c^2g}{c^2g - aB}$, følgelig

$s = c\,\mathrm{Log.}\frac{c^2g}{c^2g - aB} = \mathrm{BL}.$

§. 307.

I flydende Materier, som staae imod, er Bevægelsen over Cykloiden ikke isokron, med mindre at de igiennemløbne Buer ere overmaade smaa.

Undersøger man videre Tiden af Faldet i Cykloiden i denne Modstandens Hypothese, da seer man strax, at den forhen beviiste prægtige Egenskab, som denne Linie havde i den frie og uhindrede Bevægelse, at nemlig Tiden af Faldet, igiennem alle dens Buer, hvad heller de vare store eller smaa, blev den samme, taber sig her gánske.

Thi da §. 305. $z = \frac{csg + c^2g - c^2g.e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}{a}$, saa bliver

$dt = \frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{ads}}{\sqrt{csg + c^2g - c^2ge^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}}$. Men

$e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{2c^2} + \frac{s^3}{3c^3} + +$ o. s. v. Sættes denne

Værdie i Steden for $e^{\frac{s}{c}}$ i Værdien af dt, da følger, at Integralen altid bliver en Størrelse, som beroer paa s eller paa den igiennemløbne Bue,

Bue, og at derfor langt fra ikke Faldet igiennem store og smaa Buer skeer udi den samme Tid.

Ere derimod Buerne overmaade smaa, igiennem hvilke Faldet skeer, saa det kan være nok, at beholde de tre første Leed af den uendelige Følge, i hvilken $e^{\frac{s}{c}}$ opløses. Da faaes $dt = \frac{\sqrt{ads}}{\sqrt{aB + \frac{aBs}{c} + \frac{aBs^2}{2c^2} - \frac{gs^2}{2}}}$. Hvorved kan agtes, at siden, saa tidt som s bliver en overmaade liden Størrelse, B er ligeledes overmaade liden, fordi den forestiller den Hastighed, som er vundet ved Faldet igiennem s. Saa forsvinde $\frac{aBs}{c} + \frac{aBs^2}{2c^2}$ imod aB og gs^2, i sær om c er en anseelig stor Størrelse, saaledes, som den bør at være det udi Faldet i Luften. Derfor bliver i denne Hypothese $dt = \frac{\sqrt{ads}}{\sqrt{aB - \frac{gs^2}{2}}}$, som er, naar ds sættes $= -ds$ (hvilket man her altid kan giøre, fordi s formindskes idelig) det selvsamme Differential, hvilket vi forhen have fundet i den frie Bevægelse udi Cykloiden §. 38, fordi B er her, hvad vi der have kaldet gb„ thi b kan i denne Hypothese ansees som den Heide, ved at falde igiennem hvilken Hastigheden B vindes. Deraf følger, at saa tidt som Buerne ere overmaade smaa, ere Tiderne af Faldet i den af Modstanden hindrede Bevægelse de samme. Saa snart derimod, som Buerne blive af anseelig Størrelse, taber sig denne smukke Egenskab i den af en Modstand, som Quadraten af Hastigheden hindrede Bevægelse.

§. 308.

Jeg sagde, at b burde ansees som den Høide, der svarer til B, saa længe som Bevægelsen er meget langsom. Dette forstaaer sig selv, ei alene udi det Tilfælde, da Modstanden er som Quadraten af Hastigheden, men endog i alle de, udi hvilke den er endnu som en større Høide af samme. Thi er Modstanden i Almindelighed $\frac{z^n}{c^n}$, og z meget liden, da bliver $\frac{z^n}{c^n}$ endnu meget mindre, og jo større n er, desto mindre; i sær om Bevægelsen skeer udi Luften, hvor c er en anseelig stor Størrelse. Er derimod n en Brøk, da formindskes z^n i ulige mindre Forhold imod c^n end før. Saa man i dette sidste Tilfælde ikke saa tilforladelig kan ansee Modstanden for intet, som i de første, ogsaa meget mindre, som n selv er mindre til. Man kan ligeledes bestemme Bevægelsen udi andre Tilfælde, men da det allerede sagte er blevet vidtløftigt, ville vi ei derved ophold os.

Fem=

Femtende Forelæsning.

Om de levende Kræfter.

§. 260.

Iblant de vigtige mekaniske Afhandlinger er den om de saa kaldte levende Kræfter en med af de vigtigste, hvad heller at man seer paa Nytten i Theorien, eller paa Nytten i Brugen. Kræfternes sande Maal er unegtelig altid af stor Betydenhed. Men for vi indlade os i denne tildeels vanskelige Materie, er det maaskee ikke utienligt, at vi igien gaae kortelig tilbage til de allerforste Grunde af Mekanik, for med et eneste Diekast, saa at sige, at overse Adskilligheden af alt det, som i Mekanik kaldes Kræfter. Vi have da allerede §. 16. 2. benævnet alle Kræfterne under et med det Navn af bevægende Kræfter, ikke fordi de alle altid virkelig bevæge, men fordi de altid i og af deres Natur soge at bevæge, og vi ikke kunne giore os noget Begreb om det, hvad de ere, uden ved Bevægelsen. Disse bevægende Kræfter ere atter igien §. 16. enten Pressioner og døde eller levende Kræfter. Pressionerne kunde betragtes i to Tilfælde; enten, naar de for et Dieblik virke paa en Inertie, betragtet i og for sig, for at sætte den i Bevægelse, som de elementære Pressioner af Tyngden i alle de Ting, hvilke forst begynde at falde, uden

Kræfternes almindelige Forskiel forklares.

Sammenhæng med andre Ting; eller og, naar de virke paa Inertier, der have en ufrie Bevægelse, fordi de finde Modstand, saaledes, som vi have betragtet Pressionerne udi Vægtstangen.

I den første Art Bevægelse er Pressionen den hastiggiorende Kraft multiplicert med Inertien, med et Ord den hastiggiorende Krafts elementære Virkning. Den hastiggiorende Kraft er igien den, som virker ensdan paa alle de enkelte og mindste Dele af Materien, betragtede som aldeles ensdanne under sig. Pressionen saaledes betragtet er egentlig, hvad man kalder den absolute Kraft eller Pression. I den ufrie Bevægelse over Vægtstænger derimod dommes Pressionernes eller de dode Kræfters Storrelse, ei alene af den hastiggiorende Kraft multiplicert med Inertien, saaledes, som i den frie Bevægelse; men af Inertiens eller Materiens Mængde i Hastigheden, fordi en Materie, som virker imod, gior unegtelig en Virkning, saavel proportionert dens Storrelse, som dens Hastighed; efter hvad udforligere er blevet beviist §. 23 og 24. Disse Pressioner kaldes derfor relative, fordi man i dem ei kan see paa den virkelige Drift, hvilken de hastiggiorende Kræfter sætte Materien i, men alene paa den, som i et sammenhængende System, Delenes og Modstandens Beskaffenheder tillade at kunde iverksættes.

§. 261.

De levende Kræfter bør anses som noget andet.

Imidlertid kaldes alle Pressionerne dode Kræfter, fordi man i dem ei seer paa andet, end den elementære Virkning,

ning, hvilken foraarsages i en uendelig liden Tid af de hastiggiorende Kræfter; af hvilken Virkning aldrig kan følge uden en uendelig liden og ukiendelig Bevægelse, hvilken naar derfor ansees som slet intet, kaldes Virkningen ukiendelig eller død. Saaledes gior en eneste elementær Pressíon af Tyngden ingen kiendelig Bevægelse, men den giver Materierne eller Inertierne alene deres bestemte Vægt. Men noget langt andet er det, om de elementære Pressioner af Tyngden blive uophørlig ved at virke paa en og den samme Materie. I enhver given endelig Tid bliver deres igientagne Mængde da virkelig uendelig. Denne uendelige Mængde af Pressioner tilveiebringer i en endelig Tid en endelig Hastighed. For saa vidt som en Ting besidder denne sidste, besidder den virkelig det, som først bør kunde tabe sig ved ligesaa mange imodsatte Kræfter, som de for vare, hvorved at Hastigheden blev tilveiebragt. Følgelig kan en saadan Ting ved sin Hastighed tilintetgiøre en uendelig Mængde Pressioner af Tyngden. Den maa derfor have en Kraft, som er noget uendelig stort imod de elementære Pressioner af Tyngden at regne. Følgelig bliver denne Kraft af en ganske anden Art end Pressionerne, og da den Kraft, som de Ting besidde, der bevæges med en endelig Hastighed, kaldes den levende Kraft, saa er nødvendig den levende Kraft af en langt anden Beskaffenhed end Pressionerne eller de døde Kræfter, hvorfor man og strax burde have formodet, at den havde et andet Maal end disse sidste.

uendelig stort imod de Pressioner, som tilveiebringe dem.

§. 262.

§. 262.

Aarsagen til Kræfternes ulige Vurdering.

Saa klart, som dette synes at være, naar man fra denne ene Side af betragter Forskiellen imellem de døde og levende Kræfter, saa mange Vanskeligheder haver man dog derimod forefundet, naar man fra andre Sider af betragtede disse adskillige Kræfters Maal; saa det ikke er at undre, om de største Mestere i Videnskaben have været uenige under sig i at bestemme disse Kræfter. Tvistigheden desangaaende er og virkelig blevet ført med en Slags Heftighed imellem de Engelske Geometrer, som fuldte den store Neuton paa den ene, og de fleste andre europæiske, som fuldte den berømmelige Leibnitz paa den anden Side. Denne sidste var den første, som paastod, at de levende Kræfter vare som Massen eller Materiens Mængde i Hastighedens Quadrat, imod at Neutonianerne bleve ved at maale døde og levende Kræfter paa en og den selvsamme Maade, hvilket i Begyndelsen kom i sær deraf, at man fandt stor Vanskelighed i at troe, at en Tings Kræfter kunde beroe paa noget andet end paa Hastigheden simpel hen betragtet og paa Materiens Mængde.

§. 263.

Men dette var virkelig at betragte denne Sag alt for løslig og oven hen. Fordi, saa længe Pressionen er elementær, er det alene tydelig sandt, at den hele Kraft er som Massen i Hastigheden, thi da er dette sidste nødvendig den virkende Krafts hele Virkning. §. 23. 26. Men saasnart som Hastigheden blev endelig, var det ikke længere lige saa klart, at Hastigheden

stigheden var de Kræfters hele Virkning, ved hvilke at de var bleven tilveiebragt. Da nu Kræfterne ikke kunde dommes uden af deres hele Virkninger, saa havde man altid Ret til at fordre Beviis for, om og Hastigheden burde ansees som de Kræfters hele Virkning, der havde tilveiebragt den, med hvilke de billig syntes at maatte være lige store, som i Legemet skulde tilintetgiore denne Hastighed, følgelig og de, som Legemet med sin levende Kraft kunde staae imod.

§. 264.

For at undersøge dette sidste, havde man i sær to Veie at gaae. Den ene; noiere at overlegge Maaden, hvorledes Hastighederne ved Pressionerne bleve til. Den anden; at undersøge, hvad Erfaring beviiste, angaaende de Virkninger, i hvilke at iverksætte de levende Kræfter ganske tabte sig og forgik; siden man ei kunde tvivle paa, at de jo maatte være disse sidste proportionerte. Hvad det sidste angaaer, Erfaringerne nemlig, da bleve de giorte paa mange adskillige Maader, og beviiste idelig, at de hele Virkninger af de levende Kræfter vare som Massen multiplicert med Hastighedens Quadrat. Vi kunde her ikke opholde os ved at forklare alle disse Erfaringer (*), hvilke egentlig henhøre til den experimentale Physik. Vi ville alene for et Øieblik opholde os ved at tale

Hvad man maa see paa, naar man vil bestemme Maalet for de levende Kræfter.

(*) Desangaaende kan udførlig og frem for andre sees S. Gravesande Physik *Tom. I. Lib. II. Cap.* 3.

tale om de iblant dem, som uden stor Forberedelse og Moie strax kunne forstaaes. Disse bestaae deri, at man haver ladet Tyngder af bestemt Figur saaledes falde ned i fuldkommen blode Materier, som blødt Leer for Ex. at de, i det de rørte Overfladen af disse blode Materier bevægedes med visse bekiendte Hastigheder, som altid kunde bestemmes efter §. 57. Man haver siden med stor Flid udmaalt de Hulheders Størrelser, som disse saaledes nedfaldne Ting havde udhulet i disse Materier; Da man altid og uimodsigelig haver erfaret, at de hele Virkninger af Stødet i blode Materier, hvis Dele fuldkommen let og uden Moie kunde vige ud, bestandig vare i sammensat Forhold af de faldende Tings Masser multiplicerte med deres Hastigheders Quadrater.

Disse Erfaringer giorde, at man blev snart enig i at antage Virkningerne af de Legemer, der bevægede sig med en virkelig Hastighed, som proportionerte med Massen i Hastighedens Quadrat. Tvistigheden blev dog ligefuldt ved om Maaden at vurdere Kræfterne. Alt ret overlagt bliver denne sidste ikke uden en Strid udi Ord, fordi man ved det Navn af Kræfter ikke haver forstaaet et og det samme (*).

§. 265.

(*) At den hele Strid bestaaer i det ovensagte kan iblant andet sees deraf. Neutonianerne paastode, at Kræfterne (*Vires Impressæ*) burde sluttes af Massen, multiplicert med Hastigheden, om Tiden var den samme. Var derimod denne sidste adskillig, burde de sluttes af Massen multiplicert med Hastig-

§. 265.

For derfor fuldkommen at kunne indsee, hvad heller at de saa kaldte levende Kræfter af Theorien, uden at man holder

Dette Maal findes paa ingen anden Maade

Hastigheden, og dividert med Tiden. See iblant andre Desaguliers Physik *Tome* 2. 6te Forelæsning. At dette er i Almindelighed rigtigt om alle Kræfters elementære Pressioner, sees strax af §. 4. Da $\frac{pdt}{m} = dv$ og $p = \frac{mdv}{dt}$. Men det er ikke mindre sandt, naar Hastigheden er endelig, om Pressionen p er en bestandig Størrelse; Thi da bliver $pt = mv$. Følgelig om t er bestandig, bliver $p = mv$. Er t foranderlig, bliver $p = \frac{mv}{t}$ fuldkommen, som man efter det nylig sagte bestemte Kræfterne. Saa at Neutonianernes Paastand er unegtelig rigtig, men de tale ikke uden om Pressioner, thi p betyder i de foregaaende Formuler en Pression, efter hvad vi udførlig have viist i Tillæggene §. 1-4.

Leibnitzianerne tale om noget langt andet. Deres Sag er at bestemme Summen af alle Pressionerne, som anvendes fra Begyndelsen til Enden af Kræfternes Virkning, saa længe til at Hastigheden er bleven meddeelt. Betiener man sig i denne Henseende af den samme Formul som før $\frac{pdt}{m} = dv$ eller $pdt = mdv$, da fordi at $dt = \frac{dx}{v}$, bliver $\frac{pdx}{v} = mdv$ og $pdx = mvdv$. Fremdeles bliver $\int pdx = \frac{1}{2}mv^2$. Men $\int pdx$ er, hvad Leibnitzianerne kalde

bedre, end ved at undersøge, hvorledes Hastighederne ved Pressionerne blive til.

der sig til Erfaring, bor siges at være som Massen i Hastigheden, eller om de ikke meget meer bor siges at være som Massen i Hastighedens Quadrat, kan man intet bedre Partie vælge end det, at undersøge, hvorledes saavel Hastighederne som de levende Kræfter blive tilveiebragte af Pressionerne. Thi enhver seer let, at det ikke er uden paa en uegentlig Maade at Kræfternes Størrelse vurderes af Hastighederne. Den rette Kræfternes Unitet er unegtelig en anden Kraft, enten den Pression, hvormed de levende Kræfter kunde blive til, paa en ret Maade anvendt; eller og den Sum af Pressioner, hvorved deslige Kræfter kunde forgaae. At Hastighederne siden ansees som Maalet kommer alene deraf, at deres Forhold er den samme under sig, som Kræfternes.

§. 266.

Vanskeligheder, som herved møde.

Men i at gaae frem paa denne Maade, tager man Sagen paa den allersimpleste og letteste forstaaelige Fod, naar man i disse Henseende ikke betragter andre Pressioner end de af Tyngden, da ved dem alle muelige endelige Hastighe-

der

levende Kræfter, følgelig er det og i den Mening, som de tage Kræfterne, unegteligt, at $\int pdx$ eller de levende Kræfter ere proportionerte mv^2, eller Massen i Hastighedens Quadrat: Det derimod, hvorom Neutonianerne tale, og som de kalde Kræfter, er $\int pdt$. Følgelig tales af begge Partier om ganske adskillige Ting. Det eneste, som bliver derpaa

betyde-

der (*), folgelig og alle muelige levende Kræfter kunde blive tilveiebragte. Men naar man endog gior dette, synes strax i første Øiekast anseelige Vanskeligheder at møde, hvilke kunne giøre det betænkeligt, hvad heller at man skal domme Kræfterne af Massen i Hastigheden, eller af Massen i Hastighedens Quadrat, og det af følgende Aarsag.

De hele Virkninger af Kræfterne kunne betragtes paa en dobbelt Maade, enten i Henseende til den Hastighed, som de tilveiebringe i Tingene, eller i Henseende til det Rum, hvilket, saa længe som Kræfternes Virkning staaer paa og varer ved, igiennemløbes af den Modstand, der bevæges. For at giøre Sagen desto forstaaeligere, ville vi efter det nylig sagte forestille os det Tilfælde, da Tingene drives af Tyngden, saa følger af de uimodsigelig forhen beviiste Tyngdens Love; at naar en Ting falder (Taf. XII. Fig. 3.) igiennem et Rum AB, saa i A ingen Hastighed er, men alene en elementær Pression af Tyngden, da virker Tyngden i Henseende til Tiden saaledes, at Hastighedens Tilvext er i lige Tider lige stor §. 45. saafremt derfor at Tingen i at bevæge sig fra A til B ingen andre Kræfter faaer under Bevægelsen, end de alene, der foraarsage Hastigheden, er det uimodsigelig sandt, at

betydeligt i denne Tvistighed, er; hvad heller at de Kræfter, hvilke de Ting ytre, der bevæges med en virkelig Hastighed, hvad heller at de bør vurderes af *fpdt* eller af *fpdx*, og derom skal siden blive handlet i en Anmerkning, som denne.

(*) See §. 26. i Tillæggene.

alle Tingens Kræfter, som ere vundne ved at falde fra A til B, bør alene vurderes af den elementære Tyngdens Pressions i Tiden af Faldet, eller af Bevægelsens Størrelse efter §. 22, nemlig af Materiens Mængde multiplicert med Hastigheden. Dette er tildeels det store Fundament, hvorpaa de kunde støtte sig, som paastaae, at uden Forskiel alle Kræfter, alle med hinanden, enten de ere døde eller levende, Pressioner simpel hen, eller de en Ting besidder, der er i virkelig Bevægelse; at, siger jeg, alle disse Kræfter, de ene, som de andre, bør dømmes af Hastigheden multipliceret med Materiens Mængde, eller den saa kaldte Tingenes Masse.

§. 267.

Forklares videre.

Betragter man derimod de af Pressionerne tilveiebragte Kræfter fra en anden Side, synes følgende Betragtninger at være uimodsigelige. Saa tidt som, kan man sige, en Ting falder fra A til B, dreven af Tyngden igiennem AB, da siden det er unegteligt, at i alle Distancer fra Jordens Center, i hvilke Tingene hos os sædvanlig falde, Tyngdens Kraft er den samme, saa maa en Ting nødvendig, hvilke falder fra A til B, drives i alle Punkter af AB lige stærk af Tyngden. Men da de Kræfter, som den virkende Tyngdens Kraft taber, imidlertid dette Fald skeer, ere just de, hvilke den faldende Ting bør vinde hele Faldet igiennem, saa er det klart, at den hele Kraft, der vindes ved Faldet igiennem AB, er, om Materiens Mængde kaldes M, proportionert M. AB. Men man veed §. 47. at AB er som Quadraten af Hastigheden i B.

Følge-

Følgelig bliver Summen af alle Kræfterne vundne ved Faldet igiennem AB, som Materiens Mængde multiplicert med Quadraten af Hastigheden.

§. 268.

Saaledes faaer man to høist adskillige Maal paa en og den selvsamme Ting, og det, som er det besynderligste, Maal, der ere sluttede, eftersom det synes, paa begge Sider af plat uimodsigelige Grunde: Begge anlagte paa de første Tyngdens Love, imidlertid, som det synes, begge stridige, og saa stridige, at det sidste synes at kuldkaste alt, hvad vi for have sagt om Tyngden. Imidlertid kan man endnu forestille sig det §. 267 brugte Bevis noget tydeligere saaledes. Naar Pressionen (Taf. XII. Fig. 4.) i A er AC, og siden bestandig hele Linien AB ned efter den samme, da er den og i alle Punkter *a* af denne Linie, som *ac* eller AC, og følgelig Summen af alle Pressionerne i B, som Parallelogrammet ABDC, i E som Parallelogrammet AEFC. Men da i disse Parallelogrammer Grund-Linierne ere de samme, ere de i E og B ved Faldet vundne Kræfter som AE og AB, imidlertid at de ved samme vundne Hastigheder ere som $\sqrt{AB} : \sqrt{AE}$.

§. 269.

Hvorpaa Hoved-Vanskeligheden i denne Sag beroer.

Følgelig kommer Hoved-Vanskeligheden an paa, om Kræfternes Virkning i Tingenes Fald bør dømmes deraf, at Tyngden virker i alle Punkter af AB ligestærk, eller om samme deraf bør sluttes, at Tyngdens Virkning er i alle lige store

Tider

Tider lige stor. Sættes det sidste, da bestaae oiensynlig alle de forhen omtalte Regler for Tingenes Fald, at nemlig Tiderne ere som Hastighederne, og de igiennemlobne Rum som Quadraterne af Hastighederne. Sættes derimod det første, at nemlig den hastiggiorende Kraft retter sig efter alle Punkterne i Linien AB, og at den i enhver af disse Punkter virker lige stærk, da synes ingen af de forrige Love at kunde bestaae. Folgelig, da disse vare uimodsigelig beviiste, fandt man for godt at erklære dette sidste Maal for Tingene falskt og som stridigt med de første de tunge Tings Bevægelses Love.

§. 270.

Samme oplöses.

Jeg mener, at det er nu fuldkommen vel bleven viist, hvori at Vanskeligheden bestaaer, jeg vil stræbe at vise, hvori den Stridighed ligger, som lader til at være i disse Slutninger, uden at den dog virkelig er. To Slutninger, som ere giorte af saa rene og af saa uimodsigelig sande Grunde, som disse, naar de synes at være stridige under sig, maa det være, fordi man ei haver noie nok overlagt Beskaffenheden af begge, saa Sandhederne synes alene at være hverandre imod, uden dog virkelig at være det. Til den Ende maa agtes, at saa tidt som en Kraft foraarsager en Bevægelse, maa man forestille sig, som om den blev tilintetgiort af den Tings Inertie, som bevæges, og gik imidlertid, naar Bevægelsen og Virkningen begge vare fuldkommen frie, heel og hulden over i den Ting, som blev bevæget. Vi ville her alene betragte det Tilfælde, da Inertien af Materiens Mængde staaer imod, og noiere

noiere overlegge, hvad i det Øieblik skeer, da Bevægelsen meddeeles den lidende Materie af den bevægende Kraft.

Inertien, i det den staaer imod, er da virkelig ikke andet, saa at sige, end et Middel, hvorved Kraften gior sig los fra det Bevægende, for at gaae over i det Lidende: Man kan i dette sidste, efter at Omverlingen er skeet, betragte Kraften som at være endnu det samme i denne sidste Ting, hvad den for var i den bevægende, og som at have alene skiftet Sted og Sæde, uden at have forandret sig selv.

§. 271.

Dette er uimodsigelig sandt i al frie Bevægelse, i den forstaae, hvor intet hindrer hverken den bevægende Ting i at yttre sin Kraft, ei heller den lidende i at tage imod den. En anden Anmerkning, som i det nærværende er ikke mindre rigtig og man her ikke mindre behover, er den, at i al frie Bevægelse intet af den virkende Kraft tabes, men alt gaaer over fra den virkende Ting i det lidende (*).

§. 272.

(*) At der alene lader at være, men at dog virkelig i sig ingen sand Stridighed er imellem Slutningerne af §. 266 til 271 seer man, som jeg mener, overmaade tydelig, og tillige kortest paa denne Maade. I de tunge Tings Fald maa unegtelig Tyngdens Pression siges at være den samme i alle Punkter af den Linie AB (Taf. XII. Fig. 4.) igiennem hvilken en Inertie, dreven af denne Kraft, fra A til B falder. Dette

§. 272.

Dette er alt, hvad man behover til at hæve den Stridighed, der forhen syntes at være imellem Sætningerne §. 269, hvilken, eftersom de forstaaes til, og enten virkelig er eller ikke. Det er unegteligt, at i alle Punkter af Linien AB under

---

forudsat, bliver uimodsigelig Tyngdens hele Virkning i alle enkelte Punkter af $AB = \frac{P dx}{m}$, naar ved P forstaaes Pressionen af Tyngden, ved dx et Element aa af AB §. 24; og de hele Virkninger af P i et hvert Punkt af AB antages at være lige store. Thi da er ingen Tvivl, at jo den hele Virkning er som den hastiggiørende Kraft betragtet 1) i sig. 2) I Henseende til det igiennemløbne elementære Rum: Thi i samme Forhold som en af disse voxer, voxer og Virkningen. Og da saaledes Elementet af Rummet fuldkommen bestemmer den hele Virkning af P over dx, behøves ingenlunde Betragtningen af Tiden.

Den hele Sum af Pressionerne over AB er derfor $= \int P dx = Px$, naar P er en bestandig Pression, som den af Tyngden; saa det er unegteligt, at den hele Sum af Pressionerne er proportionert x, eller AB: Og da i Tingenes Fald x er som v^2, saa er der heller ikke Tvivl paa, at jo det Tab, som Kræfterne i Naturen giøre, for at bringe ved Faldet af Tyngden Hastighederne til Veie, bliver som disse Hastigheders Quadrat.

Imidler-

under Faldet Tyngdens Pression er paa den faldende Ting den samme, men man maa vel agte, at den hele Pression ei anvendes paa at formere Hastigheden, en Deel af den anvendes paa at folge Tingen, saasnart den nemlig allerede haver

---

Imidlertid er det tillige uimodsigelig sandt, at alle Tyngdens Love hermed bestaaer, alene at man vel iagttager; at endskiønt den virkelige Pression af Tyngden er i alle Punkter af AB lige stor, saa er dog den Deel af Pressionen, hvilken foraarsager Hastigheden, derfor ikke i alle disse Punkter lige stor, og det er egentlig i denne Forskiel imellem Pressionerne og de hastiggiørende Kræfter, som man ikke nok tog sig vare for, at de foromtalte Stridigheder fandt deres sande Oprindelse. Thi at Summen af de hele Kræfter, hvilke Driften af Tyngden anvender over AB, jo er $\int P dx$ uden videre Hensigt til Tiden er unegteligt, fordi Pressionen antages at være i alle Punkter af AB den samme. Saafremt derimod, som man vil vide, hvad Hastigheden bliver, der foraarsages af Pressionerne over AB, da kommer det ei alene an paa at vide, hvad den absolute Pression er i et hvert Element *aa*, men tillige hvad Deel af den at der i det Element *aa* foraarsager Hastigheden. Denne sidste, seer man let, kommer an paa, hvor længe eller hvor kort åt en Ting i at falde igiennem *aa*, holder sig oppe i dette Element, saa man i denne Undersøgning nødvendig maa tage Tiden i Betragtning. Men den Tid en Ting opholder sig i et hvert af disse Elemen-

haver en Hastighed; eller saa at sige, for at give den hastiggiorende Kraft først det, der behoves til at passere ind i den Ting, som bevæges, for siden, naar den er kommen ind i samme, da at drive den endnu længer fort.

§. 273.

ter, seer man let, er i forkeert Forhold af Hastigheden, hvormed den løber ind i dette Element: Thi naar Elementerne dx ansees som lige store, bliver Tiden igiennem et hvert af dem, som $\frac{1}{v}$, om Hastigheden kaldes v. Men da Virkningen af den elementære Pression Pdx maa, i Henseende til Hastigheden, som den kan frembringe meer i et Element end i et andet, være den Tid proportionert, udi hvilken den i dette Element kan virke paa den Inertie, som igiennemløber den, saa bliver af den hele Pression Pdx den hastiggiorende Kraft ikke uden den Deel $\frac{1}{v}$, og den er derfor $= \frac{Pdx}{mv}$: Denne igien er proportionert sin fulde Virkning eller Elementet af Hastigheden, som i det Element af Rummet tilveiebringes, derfor bliver $\frac{Pdx}{mv} = dv$; men $\frac{dx}{v} = dt$. Følgelig bliver $\frac{P}{m}dt = dv$. Hvoraf alle Tyngdens Love flyde, efter hvad der i det andet Tillæg er blevet bevist, alene at P er en bestandig Pression. Følgelig, ere disse Naturens Love saa langt fra ikke stridige med hverandre, at meget meer, som man seer, den ene af dem flyder ganske og aldeles af den anden.

Dette viser, at den foromtalte Stridighed i de første Grunde ikke er virkelig. Men deraf synes endnu ikke ganske tydelig

§. 273.

Altsaa maa den hele hastiggiorende Kraft af Tingen betragtes som inddeelt i to Dele; i en, hvorved denne Kraft, saa at sige, faaer en Beqvemhed til at passere ind i Tingen, En Hoved-Anmerkning i Henseende til at forstaae Maaden, hvorpaa af

tydelig at følge, at Summen af de levende Kræfter er som Hastighedens Quadrat, eller som $\int p dx$. Man kunde maaskee meget meer falde paa at slutte saaledes; at siden, naar det første Øieblik i A er forbie, da den hastiggiørende Kraft $\frac{P dx}{mv} = \frac{P dx}{m dv} = \frac{P dx}{m dx}$ (see første Tillæg) $= \frac{P}{m}$, ikke uden en Deel af Tyngdens Pression driver Inertien videre fort, heller ikke uden en ligesaadan Deel af Tyngden gik over i Inertien, for at udgiøre den Sum af Pressioner, udaf hvilke de levende Kræfter bestaae, og at derfor ei $\int P dx$, men $\int P dt$ maatte være Maalet af disse Kræfter: Thi de hastiggiørende Kræfter ere altid som $\int P dt$. Men at ei alene den Deel af Pressionen, der foraarsager Hastigheden, men endog i alle Punkter af AB den hele Pression meddeler sig Inertien, sees uimodsigelig deraf, at de hastiggiørende Pressioner i alle Punkter af AB ere døde Kræfter, og maa ikke alene vurderes af dem selv simpel hen, men af deres Moment. Følgelig og af Hastigheden af Bevægelsen i det Punkt, som de bevæge. Derfor da den hastiggiørende Kraft i ethvert Element *aa*, er $\frac{P dx}{mv}$, bliver dog desuagtet den hele Pression paa Inertien, i det Hastigheden meddeles, eller det hele Moment $= \frac{P dx}{mv} v$

$= P dx$

Pressionerne de hastiggiorende Kræfter blive til.

for heel og hulden at blive den iboende, om jeg saa skal sige, eller for at bringe det dertil, at Pressionen kan skee. Den anden Deel er den, hvorved den driver Tingen videre fort. Denne sidste udgior alene og forvolder Hastighedens Tilvext, men begge med hinanden, ere og blive i Tingen, fordi i den frie Bevægelse aldrig noget af Kraften tabes; saa de begge tillige udgiore Tingenes samtlige og levende Kræfter.

§. 274.

Af Maaden, hvorpaa de levende Kræfter

Folgelig vore de levende Kræfter hvert Øieblik, ei alene efter Forhold af Hastighedens eller Tidens Tilvext, men desuden

---

$= P dx$, og $\int P dx$ saaledes den hele Sum af de Pressioner, hvilke imidlertid, at Hastigheden meddeles, gaae over i Inertien.

Saaledes er det saa langt fra, at de Princips, der angaae Pressionerne eller de døde Kræfter, stride med de for de levende Kræfter, naar disse sidste ansees at være Quadraten af Hastigheden proportionert, at meget meer de levende Kræfter og dette deres Maal er en simpel Felge af Lovene for Pressionerne. Derfor nemlig, fordi de døde Kræfter ere som Massen multiplicert med Hastigheden, derfor ere de Levende, efter hvad man seer af det nylig beviiste, som Massen i Hastighedens Quadrat. Thi den hele Pression paa Inertien maa ei alene dømmes af den Hindring, som Pressionen umiddelbar forefinder i Hastighedens Meddeelning, men af den hele Hindring, som Pressionen forefinder i at meddele Hastigheden, formedelst en foregaaende Hastighed.

uden efter Forhold af den hele Hastighed, som Øieblikket forud var i Tingen. Og følgelig, da Hastigheden multiplicert med de uendelig smaa Tider er Rummet, saa formeres de levende Kræfter, efter Høiden AB, hvorigiennem Tingen falder, imidlertid at ikkuns en vis Deel af de Kræfter, som passere over i Tingen, forvolde Hastighedens Tilvext, der er simpel hen som Quadrat-Roden af det igienemlobne Rum.

blive til ved Pressionerne, bevises, at de ere som Massen multiplicert med Hastighedens Quadrat.

§. 275.

Man seer deraf, at Pressionen altid er Hastigheden proportionert eller Tiden fra Begyndelsen af Faldet, og hvorfor, fordi den i alle Punkter af det Rum, hvorigiennem falldes, er lige stor. Man seer videre, at der aldeles ingen Stridighed er imellem de store Grund-Sandheder, at Tyngden virker lige stærk i alle Punkter af Linien AB, og at dog Hastighedernes Formerelse ikke retter sig efter disse Punkter, men alene efter de lige store Tider. Følgelig er det klart, at det forhen givne Beviis §. 267. altid gielder; saa de Kræfter, hvilke ere i de Ting, der gaae fort med en virkelig Bevægelse, nødvendig bør dømmes af Materiens Mængde multiplicert med Hastighedens Quadrat; og at derfor

Slutninger af det foregaaende.

1) Dersom Ting i Bevægelse gaae fort med ulige Materies Mængder, men med lige store Hastigheder, ere Virkningerne som Mængderne af Materien.
2) Dersom Materierne eller Masserne ere de samme, ere deres Kræfter under sig som Quadraterne af Hastighederne.

3) At

3) At disse levende Kræfter ere altid under sig, som de hele Virkninger, ved hvilke de blive til; og deraf sees atter igien, at de Kræfter, som udfordres til at forskaffe en Ting adskillige Hastigheder, ere altid som Quadraterne af disse Hastigheder.

Saaledes behoves til at give en Ting en Hastighed som 1, ikke uden en Kraft, som 1; til at meddele en Hastighed som 2, en Kraft som 4; til at meddele en Hastighed som 3, en Kraft som 9.

4) Og derfor kan unegtelig paa en vis Maade, nemlig paa den her forklarte, siges: At Tingene altid ulige vanskeligere drives fort med en større Hastighed end med en mindre; saa en hver nye Grad af Tilvext i Hastighed udfordrer altid i Forhold større Kræfter end den nest forrige, for at blive til.

§. 276.

Deraf forstaaes nu overmaade let, hvorfor de Ting, som ere i en virkelig Bevægelse, kunne skyde hindrende Materier fort af Størrelser under sig som Quadraterne af de Hastigheder, hvormed de bevæges. Fordi nemlig, naar hindrende Ting mode, som tilintetgiøre deres hele Hastighed, ei alene de af deres Kræfter virke, som have foraarsaget Hastigheden, hvormed de bevæges, men og de andre, hvilke samtlig de, saa at sige, Tingene iboende Kræfter have anvendt for at følge den i dennem forud værende Bevægelse; forud nemlig for det Øieblik, da de, saa at sige, passerede ind i Tingene.

§. 277.

§. 277.

Vi ville endnu i denne Forelæsning til Slutning vise, hvori Hoved-Forskiellen bestaaer imellem de saa kaldte dode og levende Kræfter. Nemlig

Forskiellen imellem de levende Kræfter og Pressionerne vises omstændeligere.

1) Pressionerne doe i det Øieblik ud, da de fødes og virke; de doe ud, saa at sige, paa det Sted de ere. De levende Kræfter blive bestandig ved i en virkelig Bevægelse saa længe de ere til, og doe ei altid ud med et, men kunne tabes Stykkeviis, eftersom de treffe større eller mindre Hindringer til.

Saaledes om et Lod ligger og trykker paa et ubevægeligt Bret, da doe alle Øieblik Pressionerne eller Trykningerne ud; deres Virkning er altid bestemt af en vis Størrelse og til et vist Sted, bevæge de ei i første Øieblik, bevæge de aldrig.

En Ting derimod, som er sat i Bevægelse, en Kugle for Ex., dens Virkning er ei bunden til et vist Sted, men bestaaer i en Streben fra Sted til Sted. Eftersom den støder an paa en større eller mindre Ting til, virker den og meer eller mindre, saa dens Virkning tabes ei i en uendelig liden Tid saa plat som Pressionens, men kan tabes meer eller mindre, eftersom Hindringen er til, saa den altid er ubestemt. Et Slag, som ei første Gang bevæger, bevæger, naar det ofte igientages, saa Forskiellen imellem Pressionerne og de levende Kræfter er i alle Henseende overmaade stor.

§. 278.

Videre voxe Pressionerne alle Øieblik med samme Kraft til igien, og fornye sig saa at sige i at forgaae. De levende

Kræfter derimod ere de engang tabte, da ere de for bestandig tabte. Vi skulle i det følgende faae en anden endnu betydeligere Forskiel imellem disse to Slags Kræfter at see, men som vi endnu ikke kunde bevise af de hidtil lagte Grunde, hvorfor vi og ville udelade saavel denne som andre herhid hørende Betragtninger, saa længe til de naturlig viis flyde af vore forudgaaende Beviser.

§. 279.

Maade at opløse de levende Kræfter udi andre.

Men et kunde vi ikke undlade at melde om. At nemlig de levende Kræfter altid kunde oploses ved Kræfternes Parallelogram i to andre, som staae til rette Vinkler paa hinanden, og at ligeledes af to retvinklede Side-Kræfter faaes en sammensat Kraft efter Diagonalen saa stor som Diagonalen. Saaledes, om (Taf. XII. Fig. 7.) ved BE og BD foreskilles to levende Kræfter i Storrelse og Direktion som BE og BD, hvilke begge tillige antages at være i et og det samme Legeme, da er efter den sædvanlige og foranforte Theorie af Kræfternes Parallelogram BC den sammensatte Krafts Direktion, og i Følge Theorien af de levende Kræfter er BC den af BD og BE tilveiebragte Diagonal-Kraft. Thi $BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + BE^2$, hvilket og bor være, fordi to deslige Kræfter, som BE og BD, hverken hielpe eller hindre hverandre, saa at derfor den af BC tilveiebragte Kraft maa være saa stor som de den tilveiebringende.

Ligeledes sees, at en levende Kraft, som BC, altid kan ansees for en Diagonal-Kraft, og oploses i to andre Side-

Side-Kræfter BE og BD, som staae paa hverandre til en ret Vinkel. Da den levende Kraft efter BE bliver som BE^2, og den efter BD som BD^2 (*).

Ser-

(*) Dette Tilfælde af de levende Kræfters Opløsning er af det i §. 275 For. allerede sagte overmaade klart. Det eneste, som en eftertænksom Læser kunde falde paa at spørge, bliver: Hvorfor man ikke kan slutte ligeledes i Kræfternes Parallelogram, at nemlig (Taf. 12. Fig. 7.) Kraften i Diagonalen BC, naar der handles om døde Kræfter eller Pressioner, maa være saa stor som Side-Kræfterne BD og BE, hvilket den dog ikke er? Thi den hele sammensatte Kraft er som BC, Side-Kræfterne som BE og BD, men BC er mindre end BD og BE, fordi to Sider i Trianglet ere altid større end den tredie. Saa at i Kræfternes Parallelogram to Kræfter, uagtet at de ei hindre hverandre, saaledes synes at giøre en Virkning, mindre end den de selv ere. Hvilket ikke uden Aarsag synes at være en anseelig Paradoxie i den Lærdom om Kræfterne; en Paradoxie, som synes at være uadskillelig fra Kræfternes Parallelogram.

Hr. Bilfinger haver meget vel besvart denne Vanskelighed i *Actis Petropolitanis Tom. I. de Viribus Corpori moto insitis.* Og da man aldrig kan giøre sig Umage nok, saa længe noget paatvivleligt eller stridigt synes at hefte ved de første Grunde, for aldeles at udrydde det, saa kan jeg ikke forbigaae at anføre ganske kortelig hans skarpsindige Anmerkninger.

Sextende Forelæsning.

Om Tingenes Sammenstød, som besidde levende Kræfter, saavel som om deres adskillige Beskaffenheder under sig.

§. 280.

Hvad de faste Ting ere og deres almindelige Inddeelning.

For vi gaae til Forklaringen af Reglerne, hvorefter Tingene retter sig i deres Sammenstød, saa tidt som de enten begge, eller en af dem alene haver en virkelig Bevægelse, bliver det nødvendigt, med faa Ord at tale om disse Ting, for saa vidt, som de ere adskillige under sig. I denne Henseende maa allerforst agtes, at vi i det nærværende ikke handle om

1) Naar man siger, at de Kræfter, hvilke staae paa hverandre under en ret Vinkel, ikke hindre hverandre, da maa man ei see paa Bevægelsen, for saa vidt som den skeer udi ret Linie; thi da kan ingen Tvivl være paa, at jo Bevægelsen efter DB hindrer den efter BE, og den efter BE den efter DB, saa at den ikke skeer i nogen af disse Linier; Men man maa see paa Bevægelsen, for saa vidt at den skeer over et Plan, da det i Henseende til Situationen af det Bevægede paa Planet, altid

om andre end de faste Ting, det er at sige om de, hvis Dele ingen Bequemhed have til at bevæge sig efter alle Direktioner og uden Hindring, de ene imellem de andre, og hvis Dele desuden henge sammen med en kiendelig Kraft. De flyden-

altid kommer paa et ud, hvad heller den Ting B drives af en eneste Kraft, som BC, eller af to andre, hvilke virke hver for sig som BE og BD. Er EBD en ret Vinkel, hindre disse Bevægelser ikke hverandre i Henseende til det Punkts C Situation og Legemets B Bevægelse paa Planet.

n. 2) Bevægelsen over Linien BE kan derfor ansees som en Bevægelse af en Dimension; Den sammensatte over Planet efter BC derimod, som en Bevægelse af to Dimensioner. Thi det er eensynligt, at Bevægelsen i Linien BE skeer immer lige frem efter dens Elementer, saa i den intet andet end den rette Linie selv behøver at tages udi Betragtning, hvorimod Bevægelsen paa Planet henføres til denne anden, da Legemet B bevæger sig immerfort, som før, efter Linien BE, imidlertid at denne sidste idelig med en Hastighed som DB synker ned efter Direktion af DB, saa at det saaledes igiennemløbne Rum paa Planet er et Parallelogram, eller af to Dimensioner.

n. 3) Derfor kan man paa en vis Maade sige, at endog udi Pressionerne selv Kraften efter BC er saa stor som den efter BE og BD, skient Diagonalen BC, ved hvilken den forestilles, ei er saa stor som Siderne BE og BD. Thi da

Pressio-

de Ting ere deres imodsatte, fordi disses Dele vige for den mindste Pression, og bevæges uden Hinder frit under hverandre efter alle Direktioner. De flydende Tings Stod eller rettere Pression skal blive undersøgt i Hydraulik. Vi iagttage

Pressionen efter BC bør dømmes af, hvad den selv er og af dens Hastighed, eller af det Rum, som den i en vis given Tid i ensdan Bevægelse igiennemløber, men baade Pressionen selv og den Vei, den igiennemløber, begge forestilles ved BC, saa bliver Pressionens Moment efter BC som BC^2, imidlertid at de efter DB og BE ere som BD^2 og BE^2, fordi Tiderne igiennem BD, BE og BC ere de samme. Og derfor $BC^2 = BD^2 + DC^2$, ligesaavel i Kræfternes Parallelogram, som udi Opløsningen af de levende Kræfter, naar EBD er en ret Vinkel.

n. 4) Man kan ydermere agte, at i Følge §. 59 er det ei alene en Pression efter Diagonalen BC, som kan opløses i de to med den ligegyldige Side-Pressioner BE og BD, men at endog enhver Hastighed, som BC, kan og bør ansees som ligegyldig med BE og BD. Dette forstaaes ligeledes let af Anmerkningerne udi No. 2. Deraf nemlig, at Hastigheden efter BE er alene af en Dimension, naar den betragtes simpel hen, som at skee efter den rette Linie; af to Dimensioner derimod, naar den betragtes som at skee hen over Planet. Saa man derfor i dette Tilfælde forklarer sig fast bedre, naar man siger, at Bevægelsen efter BC er ligegyldig med de

tage her alene i Henseende til de faste Ting, at de inddeles i de haarde og blode. De fuldkommen haarde ere de, hvis Dele ei vige ind efter i Legemet, saa det derfor brekkes, naar de bevæges. Blode kaldes derimod alle de Ting, hvis Dele ved Kræfternes Trykning eller Slag kunde bevæge sig ind ad i de

---

de to andre over BD og BE, end naar dette siges om Hastigheden. Thi i den ensdanne Bevægelse bør Rummet altid dømmes af Hastigheden i Tiden, saa at BC er i denne Henseende af to Dimensioner, saavel som BE og BD, men da Tiden er i alle to Bevægelser den samme, kommer det paa et ud, hvad heller at man taler om Bevægelsen selv, eller om dens Hastighed alene. Men er Bevægelsen efter BC af to Dimensioner, da bør ikke sees paa, om BC er saa stor som BE og BD. Men om Stilningen af det Punkt C imod B paa Planet er den samme ved Bevægelsen efter BC alene, som ved de to Bevægelser efter BE og BD. Hvilket saa altid at være, let sees.

n. 5) Kræfternes Parallelogram forer i Almindelighed med sig, saa tidt som Side-Kræfterne virke under en spits Vinkel, at Quadraten af Diagonalen *ab* (Taf. XII. Fig. 8.) er saa stor som Quadraten af Summen *ec* + *cb* af de Linier, som tilkiendegiver de efter samme Direktion bevægende Kræfter og af Quadraten af Linien *ae*, hvilken tilkiendegiver den Kraft, som ei hindrer de forrige, men alene forandrer Direktionen; hvilket strax sees, naar den ene Side-Kraft *ac* opløses i de to andre perpen-

i de Legemer, som Kræfterne virke paa. De kaldes i egentlig Mening blode, om Delene ei kunde give sig ud igien, ei heller efter at Kræfternes Virkning er forbie, enten ganske eller tildeels igientage deres forrige Sted. Derimod kaldes de blode Ting Elastiske, naar deres Dele, efter at have viget ud

---

perpendikulær paa hinanden; i *ec*, der virker efter samme Direktion som *ad*, og i *ae*, som alene forandrer Direktionen.

Da nu de levende Kræfter ere hver for sig tagne som Quadraterne ad^2, ac^2, ab^2, saa er under alle skieve Direktioner den levende Kraft efter *ab* større end de to levende Kræfter efter *ac* og *ad* om det Parallelogram $2ec.cb$. Thi $ab^2 = ae^2 + eb^2 = ae^2 + ec^2 (= ac^2) + cb^2 + 2ec.cb$.

Ikke destomindre maae dog altid den levende Kraft over *ab* kunde opløses i de to andre Side-Kræfter *ac* og *ad*. Og ligeledes maa to levende Kræfter efter *ac* og *ad* altid kunde tilveiebringe en tredie levende Kraft, saa stor som Diagonalen. Thi den levende Kraft efter *ac* er som ac^2. Følgelig, Hastigheden som *ac*, men Hastigheden *ac* kan opløses i de to *ae* og *ec*; og det dog saaledes, at ved denne nye Opløsning de levende Kræfter endnu blive de samme; Thi efter §. 279 er i de levende Kræfter altid $ac^2 = ae^2 + ec^2$. Følgelig bliver den hele Hastighed efter *ad*, som $ec + cb$. Den dertil svarende levende Kraft er derfor $ec^2 + 2.ec.cb + cb^2$, og den levende Kraft efter *ae* er ae^2: Da nu de Kræfter efter *ae* og *ab* ikke forhindre hverandre, saa er den af *ad*

og

ud for Kræfternes Virkning, igientage enten ganske eller tildeels deres forrige Sted og Orden, saa snart som at Kræfternes Virkning er forbie. I øvrigt indlade vi os her ikke i at undersøge, hvad Kræfter i Naturen der forvolde Delenes Sammenhæng i de faste Ting, dette henhører til Physik, og ikke til Mekanik.

§. 281.

---

og *ac* under den spitse Vinkel *dac* tilveiebragte levende Kraft saa stor som ab^2, fordi $ab^2 = ae^2 + eb^2$. Saa man seer, at saa tidt som levende Kræfter efter adskillige Direktioner antages tillige at være udi en og den samme Ting, da om deres Direktioner støde sammen under en spids Vinkel, tilveiebringe de en levende Kraft, større end de selv ere. Men disse Kræfter kunde dog altid opløses efter Kræfternes Parallelogram, ikke i lige store, men i ligegyldige.

n. 6) Denne Paradoxie er paa sit største, naar Vinklen *dac* er mindst eller $= 0$. Thi da bliver $ab^2 = (ad + ac)^2$. Saa at, om to Kræfter der ere i en og den samme Ting, og som virke efter den samme Direktion, foraarsage hver for sig en Hastighed som 1. Da er den levende Kraft, de tilveiebringe, $= 4$. Ere de af dem tilveiebragte Hastigheder som 2 og 1. Da bliver den levende Kraft $= 9$. o. s. v.

n. 7) Ligeledes, saa tidt som Kræfterne støde sammen under en stump Vinkel *dac* (Taf. XII. Fig. 15.), er i Følge Parallelogrammets geometriske Egenskaber, Quadraten af Diagonalen alene saa stor som Quadraten af den Linie, der tilkiende-

§. 281.

Fuldkommuen haarde Ting kaldes derfor de, som i deres Dele ere aldeles ubøielige. Da nu intet Stød kan forstaaes at skee, saa at Bevægelsen ved det skulde af en Deel kunde meddeles den anden, med mindre at begge Tingene skulle

---

giver Forskiellen af de imodsatte Kræfter, og som Quadraten af den Kraft, der alene forandrer Direktionen, eller $ab^2 = eb^2 + ae^2 = (ad - af)^2 + ae^2 = ad^2 + af^2 + ae^2 - 2ad.af.$

Følgelig, om dette atter igien anvendes til ac, ab og ad, betragtede som levende Kræfter, da siden den efter ac er ac^2, og dens Hastighed ac, men baade den levende Kraft og Hastigheden kunde opløses i de to af og fc, saa alt er endnu ligegyldigt, saa bliver den virkelige Hastighed under denne de levende Kræfters Direktion af stump Vinkel ikke uden $ad = fa$, den hele levende Kraft efter ad bliver derfor ikke uden $(ad - af)^2$, og da den efter ae er ae^2, men disse to Kræfter ere lige store med den levende Kraft efter ab. Saa tilveiebringe de levende Kræfter i dette Tilfælde en mindre levende Kraft, end hvad de selv ere, men den levende Kraft efter Diagonalen bliver dog altid ligegyldig med de levende Kræfter efter Parallelogrammets Sider.

I alt dette maa vel agtes, at her ikke handles om de Kræfters Stød, som virke uden fra paa Legemet, men alene om adskillige levende Kræfter, hvilke tillige ere Tingene indvendige.

skulle kunne lide Forandring af hverandre, og dette kan ikke skee i de fuldkommen haarde Ting, fordi deres Dele ei give efter, saa ere samtlig de saa kaldte fuldkommen haarde Ting uskikkede til al den Slags Bevægelse, som kommer af Tingenes

---

n. 8) En Tvivl kan desuagtet her falde eftertænksomme Læsere ind, som ganske vist er af Betydenhed. Denne nemlig: At endskiønt det forrige Beviis No. 5 og 7 synes at være uimodsigelig klart, saa synes det dog ikke mindre rigtigt og upaatvivleligt, at, endskiønt i Følge Reglerne for Parallelogrammet, hvoraf vi have udført vore Slutninger i No. 5 og 7, unegtelig følger, at den hele Hastighed efter *ad* bliver *eb* (Taf. XII. Fig. 8.), og den hele levende Kraft efter *ad* derfor som eb^2, saa bliver dog desuagtet den levende Kraft efter *ad* ved den Krafts *ac* Opløsning ikke uden $ec^2 + ad^2$, siden $ac^2 = ae^2 + ec^2$, og det synes at maatte være en Sandhed, at Kræfterne ikke kunne meddele meer efter en Direktion, end hvad de selv efter samme Direktion ere.

Men man maa agte, at endskiønt ved Opløsningen af *ac* efter *ad* unegtelig ikke faaes meer end en levende Kraft ec^2, naar samme henføres til et Legeme, som ikke haver en allerede forudgaaende Bevægelse efter den Direktion *ad*, saa er dog Sagen her en langt anden. Kraften efter *ec* skal giøre, at Legemet bevæger sig fort med en Hastighed som *ec*, efter den Direktion *ad*, da det allerede forud haver en Hastighed efter *ad* som *cb*. Følgelig er det klart, at den nye Kraft efter *ac*,

nes Sammenstød. De findes og, saa vidt al Erfaring lærer, heller ikke i Verden. De synes heller ikke at kunne være til stor Nytte, om de fandtes. Derimod findes en Mængde Ting, som antage ikke uden en meget liden Forandring

---

som kommer til ved Opløsningen af *ac* udi Side-Kræfterne, maa betragtes ei alene for saa vidt, den virkelig bevæger Inertien *a* over et Rum som *ec*, men tillige for saa vidt den, for at kunde giere dette, bevæger sig selv over *cb*, og den Kraft, der allerede er i *a* efter *ad* ligeledes over *ec*. Men da den nye Kraft, som faaes ved Opløsningen af *ac* efter *ad*, for saa vidt den bevæger Inertien *a* igiennem *ec*, er *a. ec*; saa bliver den

1) For saavidt den bevæger denne Inertie og med den sig selv igiennem *ec* = *a. ec. ec* = *a. ec*^{2}. Thi den bør her ansees som sin egen Modstand, og derfor at være i denne Henseende saa stor som hvad den selv er, multipliceret med Rummet, den igiennemløber.

2) For saa vidt den, for at giøre denne Virkning, maa og bevæge sig selv igiennem det Rum *cb*, i samme Tid, som den bevæger sig selv og hele Inertien *a* igiennem *ec*, bliver den af denne anden Aarsag = *a. ec. cb.* §. 23.

3) For saa vidt, som den maa bevæge den Kraft efter *ad*, hvormed *a* allerede drives igiennem *ce*, bliver den atter igien *a. cb. ce.* Thi Kraften i *a* driver i samme Tid Inertien igiennem *cb*, og er derfor som *a. cb*; Men da den betragtet

dring af Stødet, fordi deres Dele i det Øieblik, det staaer paa, ikke uden overmaade lidet bevæges. Foraarsager da denne ringe Bevægelse, at de springe eller revne; med et Ord, at Delene fuldkommen gaae ud af hverandre, uden at henge sammen, da kaldes de sædvanlig haarde Ting, skiønt al Erfaring viser, at de henhøre til de elastiske. Thi derfor give alle disse Ting, i det de springe, en Lyd fra sig, som beviser, at deres Dele zittre under Slaget og bevæges. En Marmor-Kugle, som falder paa et Marmor-Bord, belagt med tyndt Vox, efterlader ikke efter Slaget i Voxet et ukiendelig Punkt, men en kiendelig Plet.

tragtet som Modstand bevæges igiennem ec, saa bliver den bevægende Kraft, som dertil maa anvendes, $a.ec.cb.$ §. 23.

4) Saaledes bliver den hele Virkning af den nye Kraft efter ec, som faaes ved Opløsningen af $ce = 2a.cb.ce + a.ec^2$. Og da Kræfterne ere deres hele Virkning proportionerte, saa bliver saaledes den hele levende Kraft efter ac, som faaes ved Opløsningen af ac udi ae og $ec = a.ec^2 + 2a.cb.ce$. §. 23. 17.

5) Men desuden bliver den levende Kraft, som var udi a for Opløsningen $= a.ad^2$. Altsaa ere de virkelige levende Kræfter efter ac og ad, naar deres fulde Virkning betragtes, $= a.ec^2 + 2a.cb.ce + a.ad^2 = a.ab^2$. Hvoraf sees, at Beviser, tagne af de physiske Aarsager, treffe fuldkommen ind med de forhen givne i No. 5 og 7.

§. 282.

Forskiellen imellem de fuldkommen bløde og fuldkommen haarde Ting.

Bløde kaldes i egentlig Mening alle de Ting, hvis Dele vige efter Slagets Direktion, uden igien at gaae tilbage, eller sætte den slagne Ting i sin forrige Figur igien, efter at Slaget er forbie, §. 280. Bløde Ting forandres saaledes under Slaget aldeles udi Figuren, deres Dele vige og indtage en anden Orden i Henseende til hverandre indbyrdes, og det er heri alene, at de ere, i Henseende til Stødet, de fuldkommen haarde Ting imodsatte, hvis Dele ei vige, og hvis Figur hverken i Slaget eller efter Slaget af det, som af sin Aarsag, have antaget nogen Forandring. Derimod ere begge disse Slags af Ting fuldkommen de samme i den Henseende, som her fortiener særdeles at overlegges, deri nemlig, at i ingen af dem Delene igien efter Slaget gaae tilbage, for at igientage deres forrige Figur, hvilken de under Slaget havde tabt. Det er i denne Henseende, at vi i det nærværende ville henføre dem begge til en Klasse, og at vi anseе dem som de samme, uagtet at de i den forstomtalte Henseende vare hverandre fuldkommen imodsatte.

§. 283.

De elastiske Tings Forskiel fra begge de to forrige Slags af Ting.

Elastiske Ting derimod ere i denne Henseende de forrige begge fuldkommen imodsatte, thi ved dem forstaae vi alle de faste Ting, hvis Dele under Slaget antage en Forandring, og efter Slaget sætter sig igien i deres forrige Tilstand, §. 280. det er, de antage igien deres forrige Figur. Vi undersøge her atter igien ikke, hvorved dette skeer, eller hvad det er for

Kræfter,

Kræfter i Naturen, som foraarsage Elasticiteten. Saavel dette, som de ovrige de elastiske Tings merkelige Egenskaber, overlade vi til de physiske Betragtninger, iblant hvilke de egentlig henhore.

Men da vi ikke en gang i vores Mekanik, hvor vi dog dertil paa en vis Maade kunde være berettigede, ville lade det komme an paa blotte Hypotheser, men som vi allerede i det forrige have giort, bestandig ville stadfæste de vigtige Hoved-Poster ved en sikker Erfaring, saa ville vi og her, skiont ikkuns ved et Exempel, vise, hvorledes det gaaer til i de Elastiske Tings Forandring af Stodet; overlabende ligeledes Mængden af disse Beviser til de physiske Afhandlinger.

§. 284.

Hvorledes de faste Ting forandre sig ved deres Elasticite, vises ved Erfaring.

Er da (T. XII. F. 5.) ABCG en Ring af Jern eller af en anden Metal, ophengt i en Traad udi A. Inden for Cirklen eller Ringen i 3 til 4 Liniers Afstand fra A, sættes udi L en liden Træe-Kugle, saasnart da som man slaaer med Magt paa Ringen i C, springer Kuglen udi L med en stærk Bevægelse hen imod C, hvoraf man seer, at i det Øieblik, da Slaget skeer, bevæger sig det Punkt A henimod E. En elastisk Ring eller Cirkel maa derfor i Slaget antage Figuren af en Oval, og blive plattere, fordi den bevæges hen efter Direktionen AC, siden Kuglen i L ellers ikke kunde bevæges henimod C. Folgelig er det ikke alene de Dele, som af Slaget umiddelbar rores, hvilke i de elastiske Tings Sammenstød forandres, men det er det hele Legeme.

Thi

Thi forestiller man sig videre det hele Rum ABCG som opfyldt med lutter deslige koncentriske Ringe, da maa samtlig deres Bevægelse endnu være den samme. Saa man deraf seer, at de elastiske Ting, i det Stødet meddeles, forandres i Henseende til deres hele Indhold og antage, saa længe Slaget staaer paa, en anden Figur.

§. 285.

I hvad Henseende at de elastiske Ting kunde siges at være de haarde og blode imodsatte, men disse sidste derimod at være af et Slags.

Erfaring viser, at naar Slaget er forbi, tage en Mængde Ting uden Forandring deres forrige Figur igien, disse er det, som man kalder fuldkommen elastiske. De, som ikke igientage efter Slaget deres, uden tildeels, ere ei heller, uden efter visse Grader, elastiske. Det er de første, som vi her ville tage under Betragtning, for af deres Bevægelse efter Slaget at slutte os til de Materiers Bevægelse, som ei ere elastiske, men enten haarde eller blode; hvilket saa meget lettere kan skee, som disse sidste efter det allerede sagte udgiore et eneste Slags, hvis Bevægelse bor være i visse Henseende, som vi nærmere skulle forklare, fuldkommen det imodsatte af de elastiske Tings Bevægelse.

§. 286.

Hoved-Reglen for Tingenes Sammenstød forklares.

Til den Ende maa ydermere agtes, at saa tidt som en Ting støder an paa en anden, da staae begge hinanden imod, indtil de have faaet en lige stor og fælles Bevægelse: Saafremt da efter Slaget Tingene ei giore en nye Bevægelse, for at igientage deres forrige Figur, det er, om de ei ere elasti-

ske,

ske, er den hele Virkning af Slaget dermed til Ende, og Tingene bevæge sig efter det altid med en fælles Hastighed, i hvorledes end at deres Bevægelse for Slaget haver været beskaffen. Saafremt derimod at de i og ved Slaget sammentrykte Ting bemoie sig, efterat den fælles Hastighed er bleven meddeelt, at igientage deres forrige Figur, da er det klart, at derved begynder igien et nyt Sammenstød, hvorved nødvendig de to for sammenføiede Ting søge at skille sig fra hverandre efter stridige eller imodsatte Direktioner; da de ellers, saa tidt dette ikke skeer, forenes, henge sammen og bevæges efter Slaget saavel i samme Direktion, som med samme Hastighed.

§. 287.

I hvad Tilfælde at Kræfter ved Sammenstødet tabes, og i hvad Tilfælde at ingen tabes.

Derved maa endnu videre agtes, at saa tidt som Tingene lade sig sammentrykke eller i Slaget forandre, uden at igientage deres forrige Figur, lige saa tidt tabes al den Kraft, som det Bevægende under Slaget maa anvende paa at forandre Figuren; Følgelig bliver i de blode Tings Bevægelse altid nogen Kraft tabt. I de elastiske derimod, om de fuldkommen sætte sig efter Slaget til den Figur, de havde for Slaget, tabes intet: Fordi den samme Kraft behoves til fuldkommen at igienbringe Figuren, som der forhen udfordredes til at forandre den.

§. 288.

Forskiellen imellem det lige og skieve Sammenstød forklares.

Dette forudsat, ere alle de Grunde forklaret, som behoves til at giore en almindelig Udregning for de faste Tings

Bevægelse, for saa vidt som disse sidste ansees at være enten fuldkommen elastiske, eller fuldkommen haarde og blode. Imidlertid maa dog endnu agtes, at Stodet er to Slags; enten det, som skeer lige, og vi ville kalde det lige Stod; eller det, som skeer skievt, hvilket vi ville kalde det skieve.

Ved det lige Stod forstaaes, at Direktionen af Bevægelsen i Sammenstodet gaaer igiennem begge de Ting, som stode sammen, deres Tyngdes Center, og at denne Linie desuden er perpendikulær paa den Deel af begge Tings Superfice, ved hvilken de stode paa hverandre.

I alle andre Tilfælde kaldes Stodet skievt. Vi tage her for det første ikke i Betragtning uden alene det lige Stod.

§. 289.

Oplosningen af det lige Sammenstod foretages.

For at forekomme med et alt, hvad der kunde foraarsage nogen Vanskelighed i Henseende til Oplosningen, ville vi forestille os de Ting, der bevæges, for at stode hverandre, som to Kugler; da det er klart, at saa tidt som Ting af denne Figur bevæges imod hverandre over den rette Linie, i hvilken deres Centrer ligge, bliver Slaget altid lige, §. 288. Ere da (Taf. XII. Fig. 6.) A og B to deslige Kugler, saa ville vi ansee al den Bevægelse, hvilken gaaer fra A til D, som positiv; den, som gaaer i den imodsatte Direktion fra D til A, som nægtende eller negativ, og antage; at den Ting A bevæger sig fra A henimod B efter Direktion AD; Den Ting B ligeledes efter samme Direktion fra c imod E, da man desuden forud kortelig kan agte.

§. 290.

§. 290.

Beskaffenheden af den relative Bevægelse i Tingenes Sammenstød.

At saa tidt som to deslige Ting bevæge sig hen over en og den samme Linie, da maa deres Bevægelse til eller fra hverandre, som man kalder den relative Bevægelse altid vel skilles fra disse Ting deres virkelige Bevægelse. Thi det er klart, at den relative Bevægelse bliver aldrig andet, end enten Summen af eller Forskiellen imellem deres virkelige Bevægelser; saa at, om af deres virkelige Hastigheder, den i A kaldes H og den i B, h, da bliver, om begge Tingene gaae fra hverandre i samme Linie efter imodsatte Direktioner, denne deres relative Hastighed $= H + h$; saafremt derimod, at de bevæges efter hverandre, bliver deres relative Hastighed $= H - h$, dette er saa klart og simpelt, saa det behover ingen videre Oplysning.

§. 291.

Den letteste Maade forklares, hvorpaa man kan betiene sig af den relative Bevægelse i de elastiske Tings Sammenstød.

Men man kan endnu ansee deres Hastighed i Bevægelsen som relativ paa en anden Maade, hvilken gior Oplosningen af det foresatte Spørsmaal uendelig let. Man kan betragte begge Tingene A og B, som om de laae paa et horizontal Bret uden Tyngde, som om dette Bret bevægede sig fort med en vis Hastighed, hvilken derfor blev tilfælles for begge disse Ting A og B, imidlertid at de selv med ingen anden Hastighed gik efter imodsatte Direktioner imod hverandre, end med de alene, som i begge Tingene vare deres Materies Mængder eller Storrelser forkeert Viis proportionerte. At dette altid er mueligt, at kunne oplose enhver given Bevægelse i de to

Ting A og B, saa Hastighederne dog blive uforandrede og i begge Tilfælde de samme, skulle vi ved Udregningerne selv paa Øieblikket gotgiore (*).

§. 292.

Den fælles Hastighed bestemmes, hvormed de Legemer, som støde sammen, bevæge sig.

Bevæges da, efter hvad forhen er bleven sagt §. 289 baade A og B henefter den positive Direktion CD, da om Materiens Mængde udi A kaldes M, i B, *m*. Hastigheden udi A, H; i B, *h*, og den fælles Hastighed *f*, den derimod, som

(*) Hvad vi her have sagt, kan i første Øiekast give Anledning til at finde i den Lærdom om de levende Kræfter en Art Paradoxie, siden de her unegtelig synes at føre det Besynderlige med sig, at ulige store levende Kræfter gisre dog lige store Virkninger. For Ex. Om to Masser ere som 4 og 1, deres Hastigheder som 1 og 4, da ere Masserne Hastighederne proportionerte saaledes, som vi i §. 291. F. have antaget det, følgelig og de døde Kræfter eller Pressionerne lige store; de Virkninger nemlig, som yttre sig for et Øieblik: Men de levende Kræfter selv ere eiensynlig ulige; I den Masse som 4, ere de som 4, i den Masse som 1, ere de som 16, og følgelig anseelig ulige.

En eftertænksom Læser kan derfor med Ret spørge, hvorledes Ligevægten kan skee med ulige Kræfter. Man kunde simpel hen svare, at dette er i Kræfternes Theorie intet usædvanligt, siden det samme idelig kommer for i Kræfternes Parallelo-

som er i forkeert Forhold af Materien udi $A = y$, saa bliver den, der er Materien forkeert Viis proportionert udi $B = \frac{My}{m}$, og da B antages at gaae med samme Hastighed imod A, bliver den derfor $= -\frac{My}{m}$: Folgelig faaes

rallelogram. Men man behøver ingen Udflugt, man seer den direkte Aarsag lige frem, alene ved at iagttage, hvorledes Stødet meddeles i dette Tilfælde, da Hastighederne ere som Materiernes Mængder forkeert. I det Øieblik, da Stødet skeer, virke alle Materiernes Dele imod hverandre saaledes, at de i det ene Legeme søge at standse Bevægelsen i det andet, om mueligt, aldeles. I B virker enhver Deel imod Delene i A med en Hastighed som 4. Virkningen begynder som en Pression; følgelig maa i Stødets første Begyndelse en Pression af Massa som 1, og Hastighed som 4 i det ene Legeme holde Ligevægt i det andet med en Massa som 4, og med en Hastighed som 1, siden alle Pressioner ere lige store, naar Massen i Hastigheden er lige stor. Betragter man nu det hele Stød, som at forrettes ved lutter deslige Pressioner, der i begge Legemerne udi lige store Tider følge paa hverandre, saa er det, som jeg mener, meer end klart nok, at da enhver af disse Pressioner i det ene Legeme for et hvert enkelt Øieblik tilintetgier de dertil svarende Pressioner i det andet Legeme, saa maa og i alle de Øieblik, Stødet staaer paa, de paa hinanden følgende Pressioner tilintetgiøre hverandre,

1) $f + y = H$. 2) $f - \frac{My}{m} = h$, hvoraf faaes, naar Storrelsen f i begge Lighederne søges, $H - y = h + \frac{My}{m}$,

og følgelig er $y = \frac{m.(H-h)}{M+m}$,

som er Værdien af den Hastighed udi A, der er Materiens Storrelse forkeert Viis proportionert.

Sættes

dre, og at saaledes under det hele Stød maa blive en fuldkommen Ligevegt imellem Delenes Virkninger og Igienvirkninger udi begge Legemerne. Saa i denne Anvendelse af de levende Kræfter aldeles ikke noget findes, som er stridigt dermed, at de bestandig ere som Quadraterne af Hastighederne, og den formeente Paradoxie falder bort af sig selv.

Vi have antaget, at i Tingenes Stød Pressionerne fuldte en efter den anden, saa at Slaget ei gik til Ende in Instanti, eller i en uendelig liden Tid; At dette er overensstemmende med Naturen, kan man let overbevise sig om, deels af Tingenes Klang under Stødet, deels deraf, at ingen Forandring skeer i Naturen med et Spring, men al Tilvext og Aftagelse skeer efter de mindste Differencer, som i et Tilfælde hastigere, i et andet langsommere følge paa hverandre.

Ved den Anledning kan jeg ikke undlade at anføre en Anmerkning, som her er af nogen Betydenhed. At nemlig den Lærdom om de døde Kræfter staaer paa alle Sider og i alle Henseender i saa nøie Forening med den om de levende Kræfter, at den ene af dem langt fra at være den anden imod, bestandig

Sættes Værdien af y i Ligheden $f = H - y$, da findes derved $f = \frac{HM + mb}{M + m}$, hvilket er Værdien af den Hastighed, vi forhen have antaget, som tilfælles for begge Tingene udi Bevægelse A og B, eller for Hastigheden af Brettet, som

---

standig flyder af den anden, og sætter den saa at sige forud. Saaledes have vi i nestforegaaende Anmerkning til §. 271. beviist, at just fordi Loven for de døde Kræfter var den, den var, blev den for de Levende, den den er; og man beviser ligesaa let, at af Loven for de levende Kræfter flyder den for Pressionerne eller, de døde. Thi det er eiensynligt af hvad vi have sagt §. 261 F., at Pressionerne ere intet andet end levende Kræfter udi deres Mindste. Saafremt da, at man antager i to Masser M og m Hastighederne at være v og V, men $M : m = V : v$, saa $V = \frac{Mv}{m}$. Da bliver og $dV = \frac{M}{m} dv$, følgelig dV proportionert dv. Er nu i Følge de levende Kræfters Love $Mvv = mVV$, og man deraf søger Lovene for Pressionerne, og $\frac{M}{m} = a$, saa bliver $2Mvdv = 2mVdV$ og $2Mvdv = 2amVdv$, følgelig $Mv = amV$, eller Mv proportionert mV. Hvilket er det samme, som at Pressionerne forholde sig under sig som Massen i Hastigheden. Og da man i hvad for nogle de to Hastigheder end ere, altid kan sætte $dV = adv$, saa sees at dette maa gielde for alle Pressioner i Følge Lovene for de levende Kræfter.

der skiød sig fort med begge disse Ting, imidlertid at de paa det selv ingen anden Bevægelse havde, end den, der var deres Materies Mængder forkeert Viis proportionert.

§. 293.

Den almindelige Formul forklares ved Exempler.

Endskiønt der da ingen Tvivl kan være paa, at naar Udregningen giver for de søgte Størrelser lutter opløselige og altid opløselige Tilfælde, vores antagne da jo bør ansees for at være altid mueligt, at Hastighederne af Bevægelsen nemlig i alle Tilfælde kunne saaledes opløses, som sagt er udi andre; saa er det maaskee dog tienligt at vise i Exempler, hvorledes de ene af disse Hastigheder treffe fuldkommen rigtig ind med de andre. Er Hastigheden i $A = H = 6$, Materien $M = 8$, Hastigheden i $B = 4$, Materien i $B = 10$. Da er den fælles Hastighed $f = \frac{HM + mb}{M + m} = \frac{48 + 40}{18} = 4\frac{8}{9}$, og $y = \frac{m.(H - b)}{M + m} = \frac{20}{18} = 1\frac{1}{9}$; følgelig bliver $f + y = 4\frac{8}{9} + 1\frac{1}{9} = 6$, hvilket just er den Hastighed, som vi tillagde A. Saa man seer, at det kommer fuldkommen ud paa et, hvad heller man antager, at A bevæger sig med en fælles Hastighed som $4\frac{8}{9}$, og med en anden, der er i forkeert Forhold af dens Materie $= 1\frac{1}{9}$; eller, om man siger, at den bevæger sig fort med en eneste Hastighed hen efter $AD = 6$. Hvad B angaaer, da siden den haver samme fælles Hastighed $f = 4\frac{8}{9}$ og en negativ Hastighed desuden imod A, som er til den i A i forkeert Forhold af Materiernes Mængde, da bliver denne sidste $= -\frac{8}{9}$, saa den hele Hastighed i $B = 4\frac{8}{9} - \frac{8}{9}$

$= 4$,

$= 4$. Hvilket er just den Hastighed hen efter BD, som vi have antaget for B.

Dersom A og B antages at bevæge sig imod hverandre, alt for Resten som for, da bliver $b = -h$, og den fælles Hastighed $f = \frac{HM - mb}{M + m} = \frac{48 - 40}{18} = \frac{4}{9}$. Derimod bliver den i A, som er Materien forkeert Viis proportionert, eller $y = \frac{m.(H+b)}{M+m} = \frac{100}{18} = 5\frac{5}{9}$, hvoraf sees; at den hele Hastighed i A eller $y + f = \frac{4}{9} + 5\frac{5}{9} = 6 = H$, fuldkommen som vi have antaget denne Hastighed at være. Hvad nu B angaaer, da haver den ligeledes først den fælles Hastighed $f = \frac{4}{9}$, og desuden en anden, som er Materien forkeert Viis proportionert $= -\frac{50}{9} \cdot \frac{8}{10} = -4\frac{4}{9}$, saa at saaledes bliver den hele Hastighed udi $B = -4\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = -4$, fuldkommen, som vi i Begyndelsen sagde, at den skulde være; thi man agter, at her faaes -4, fordi Bevægelsen skeer efter DC, og vi have antaget den positive Bevægelse hen efter CD.

§. 294.

Hastighederne efter Slaget bestemmes i begge de sammenstødende Ting, saavelsom Direktionen.

Efter at dette er blevet beviist og forklart, kan der nu ingen Vanskelighed meer være i at forstaae Reglerne for Bevægelsen i de elastiske Tings Sammenstød. Thi da de, for saa vidt de gaae med den fælles Hastighed, ei forandre hverandre, hverken nemlig virke paa eller lide af hinanden; saa skeer hele Forandringen i Sammenstødet af de Hastigheder, der ere i forkeert Forhold af Materien.

Men i Henseende til disse sidste gaaer det saaledes til i Sammenstødet, at de anvendes ganske og aldeles paa at sammentrykke Delene af Materien, og at de derfor bør ansees paa samme Fod som simple Pressioner. Folgelig meddele Tingene hinanden disse Kræfter igien, saa snart som Slaget er forbie, derved; at de igien sætte sig i forrige Figur, saa at alt bliver som for, alene at Direktionen i Hastighederne forandres. Dette iagttaget, bliver Hastigheden i A efter Slaget 1) den fælles Hastighed f, 2) den, hvormed A gik imod B, med forandret Direktion, og folgelig

1) Efter Slaget den hele Hastighed i

$$A = \frac{HM + mb}{M + m} - \frac{m.(H - b)}{M + m},$$

$$\text{folgelig} = \frac{H.(M - m) + 2mb}{M + m}.$$

2) Efter Slaget den hele Hastighed udi

$$B = \frac{HM + mb}{M + m} + \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{H - b}{M + m}\right) m,$$

$$\text{folgelig} = \frac{2MH + (m - M)b}{M + m}.$$

Hvoraf alle Reglerne for det lige Sammenstød kunde udledes, som vi nærmere skulle vise i den folgende Forelæsning.

Ellevte

Ellevte Tillæg.

Om den relative Bevægelse.

§. 309.

Da vi i den forrige Forelæsning have havt nødig at tale om den relative Bevægelse, og man ikke uden Føie anseer samme, som at henhøre iblant de første Grunde af Bevægelsen. Saa haver jeg ikke vildet undlade i Henseende til den at anføre følgende.

Hvorledes den relative Bevægelse over den samme rette Linie kan betragtes.

Man kan da agte, at saa tidt som to Ting (Taf. XII. Fig. 6.) A og B, begge bevæge sig efter en og den samme Direktion fra *c* til D, hvilken vi paa samme Maade, som før, ville kalde den positive Bevægelse; er det klart, at naar man alene seer paa, om hvor meget den ene i en given Tid nærmer sig den anden, eller gaaer længere bort fra den, da haver man alene nødig at anse den ene af dem som hvilende, f. Ex. B, og at i den Tilfælde, da de nærme sig hverandre, som om A alene bevægede sig imod B antaget som ubevægelig, med Hastighedernes Forskiel udi begge, i A nemlig og B. Saafremt derimod, at de gaae fra hverandre, den ene hen efter *c*E, den anden hen efter *c*D, da var det i Grunden det samme i Henseende til Længden af Bevægelsen, som om B atter igien hvilede, og A bevægede sig hen imod E med Summen af begges Hastigheder. Paa samme Maade kan man i al relativ Bevægelse altid betragte den ene Ting, som om den virkelig hvilede.

§. 310.

I dette Tilfælde at bestemme Rummet og Tiden, saavelsom og naar og hvor Sammenstødet skeer.

Dette forudsat; er intet lettere i den retlinede relative Bevægelse, end at bestemme, hvad Rum Tingene igiennemløber i en vis given Tid, saavelsom af Rummet Tiden, naar det er bleven bestemt, tillige med det Sted, hvor Tingene støde sammen, og efter hvad Tids-Forløb at Sammenstødet skeer.

Thi kaldes Hastigheden i A, a, den i B, b; og Bevægelsen antages at skee, som før er sagt, i begge Tingene, saavel i A som i B efter den positive Direktion AD, da bliver den relative Hastighed $= a - b$. §. 309. Folgelig, om den Distance AB, om hvilken A og B i Begyndelsen af Bevægelsen ere borte fra hverandre, kaldes d, da fordi det igiennemløbne Rum altid bør dømmes af Hastigheden, multiplicert med Tiden, (Bevægelsen antages i alt dette bestandig at være ensdan) saa bliver, om Tiden kaldes t,

$$(a-b)\,t = d, \text{ og } t = \frac{d}{a-b}, \text{ hvoraf sees:}$$

1) At om $d = 0$, eller, om Distancen imellem Tingene i Begyndelsen af Bevægelsen er ingen; det er, om de røre hverandre, da bliver $t = 0$, og til at igiennemløbe d, behøves ingen Tid.

2) Dersom $a = b$ bliver $t = \frac{1}{0}$, og altsaa uendelig stor; saa at Tingene da aldrig kunde støde sammen.

3) Er $b = 0$, bliver Tiden til B treffes af A $= \frac{d}{a}$.

4) Er $a = 0$, det er, om A hviler; bliver Tiden $\frac{d}{-b}$ negativ, og altsaa er Sammenkomsten meer end umuelig, saa at sige.

§. 311.

§. 311.

Men da vi hidtil have antaget B som hvilende; vil man da vide det Punkt D, hvori A og B virkelig stode sammen, dets Distance fra A, saa bliver, om AD kaldes x, $x = AD = \frac{ad}{a-b}$. Thi da Hastigheden i A betragtes nu som virkelig, og ei som relativ, maa det igiennemlebne Rum være saa stor som den virkelige Hastighed i A, multiplicert med Tiden, og vi have seet §. 310, at Tiden, som Forleb til Sammenstødet skede, var $\frac{d}{a-b}$. Søger man x i Henseende til B, saaes ligeledes $x = \frac{bd}{a-b}$.

§. 312.

Saafremt derimod, at B bevæger sig henimod A; da forandres b til $-b$, fordi vi have antaget Bevægelsen hen efter cE negativ, og man faaer, efter at denne Forandring alene er giort i de forrige Ligheder,

1) $t = \frac{d}{a+b}$, 2) $x = \frac{ad}{a+b}$.

§. 313.

Løbe Tingene med imodsatte Direktioner fra hverandre, A hen efter CD, og B hen efter cD, da bliver $a = -a$, og man faaer i Ligheden §. 310. $t = \frac{-d}{a+b}$, saa Tiden af Sammenstødet bliver umuelig.

§. 314.

Vil man vide, i hvad Tid de to Ting A og B, om de med uhindret Hastighed kunde gaae hverandre forbie, (som om de bevægede Den relative Bevægelse bestemmes ligele-

des i det Tilfælde, da to Ting bevæge sig imod eller fra hverandre over parallele Linier.

sig en over den anden efter to parallele Linier) skulde være borte fra hverandre om det Rum R; da er det klart, at i de almindelige Tilfælde af §. 310 løber A ind paa B efter den Tid $\frac{d}{a-b}$. For at A endnu videre skal kunde komme bort fra B om den givne Distance R, da behøves dertil den Tid $\frac{R}{a-b}$. Saa den hele Tid, som udfordres til at A og B kunde komme fra hinanden om den Distance R i relativ Bevægelse, beløber $\frac{R+d}{a-b}$.

Men vil man fremdeles vide, i hvad Distance fra det Punkt, hvor A var i Begyndelsen af Bevægelsen, A efter sin virkelige Bevægelse virkelig er borte i det Øieblik, da A er gaaet forbie B om den Distance R; saa haver man alene nødig, for at bestemme denne Distance fra det Punkt, hvor Bevægelsen begyndte, at multiplicere Hastigheden med Tiden, og derfor, da Hastigheden udi $A = a$, bliver det hele søgte Rum, som vi ville kalde x,

1) om A og B begge gaae efter en Direktion $x = \frac{(R+d)a}{a-b}$.

2) Om A og B gaae imod hverandre $x = \frac{(R+d)a}{a+b}$.

§. 315.

Ligeledes, naar Bevægelsen skeer udi koncentriske Cirkler.

Dersom (Taf. XII. Fig. 9.) to Ting A og B bevæges udi Cirkler BDG og AFH med en ensdan Bevægelse; da kan man paa samme Maade og efter de forhen givne Ligheder ligeledes giøre Udregningen for dem. Thi det er altid let, om de end bevæges i adskillige Cirkler, siden man seer her alene paa Vinkel-Bevægelsen, eller paa de i samme Tid igiennemløbne Grader i Cirklerne, for deraf at dømme

deres

deres Hastigheder. Ansees derfor Buen given i Grader, som det igiennemløbne Rum; da fordi Hastigheden er i al ensdan Bevægelse som det igiennemløbne Rum dividert ved Tiden, om Buen kaldes B, Tiden T, bliver Hastigheden af Vinkel-Bevægelsen $= \frac{B}{T}$.

Og deraf sees 1) at om B bliver bestandig, bliver Hastigheden i al Vinkel-Bevægelse som $\frac{1}{T}$, det er; de Hastigheder, hvormed to Ting igiennemløbe Buer af lige Grader, ere altid som Tiderne, hvori disse Buer igiennemløbes, forkeert tagne.

Og da de hele Peripherier forholde sig som ligedanne Buer, saa blive altid Hastighederne i al Vinkel-Bevægelse forkeert som de Tider, i hvilke de hele Cirkler igiennemløbes. Det er, forkeert som Tiderne af det hele Omløb, eller som man pleier at tale i forkeert Forhold af de periodiske Tider.

2) Sees let, at Hastighederne i Vinkel-Bevægelsen bliver altid de virkelige Hastigheder proportionerte; saa at i samme Forhold som de ene voxe, voxe og de andre, alt for Resten lige: Men da de med samme Hastighed igiennemløbne Buer maa i samme Forhold voxe i Grader, som Halv-Diametern tager af, da om den virkelige Hastighed kaldes H, og Halv-Diametern R, bliver altid Vinkel-Hastigheden $= \frac{H}{R}$.

§. 316.

Da derfor Bevægelsen kommer alene an paa, hvad Grader der i samme Tid igiennemløbes, kan man altid antage, om to Ting A og B i Begyndelsen af Bevægelsen vare i adskillige Cirkler, som

AFH

AFH og BDG, ligesom de bevægedes i den samme Cirkel AFH, og i Begyndelsen af Bevægelsen vare borte fra hverandre om den Bue $AF = d$. Kaldes da, som før §. 310, Hastigheden af Vinkel-Bevægelsen udi A, a, den samme udi $B = b$. Da bliver, som før,

(A) om begge gaae efter en Direktion.

1) $t = \frac{d}{a-b}$. 2) $x = \frac{ad}{a-b}$, af hvilken Ligned bestemmes Punkterne D og E af begge Tingenes Sammenkomst i den samme Halv Diameter.

3) Tiden, da de i første Omløb skulle være fra hverandre om den Distance R, beløber $\frac{R+d}{a-b}$; og Distancen fra Punktet A bliver $= x = \frac{(R+d)a}{a-b}$.

(B) Om begge gaae imod hverandre, sættes i de forrige Formuler alene i Steden for $-b$, $+b$.

(C) Løbe begge fra hverandre, da er denne Tilfælde adskillig fra den forrige i ret Linie, og henhører til den sidstomtalte Tilfælde, fordi Tingene da løbe imod hverandre, for at samles efter den Kant H.

§. 317.

Saa og, naar Bevægelsen skeer udi sammenløbende Linier, og begge Tingene paa en Tid gaae ud fra et og det samme Punkt.

Dersom de to Ting A og B (Taf. XII. Fig. 10.) bevæges i sammenløbende Linier, og gaae begge paa en Tid ud fra A, B efter AB, og A efter AC; men man vil vide den relative Bevægelse i Henseende til B, betragtet som ubevægelig. Da, om den virkelige Hastighed i B henefter $AB = b$, den i A henefter $AC = a$, og $AB : AC = b : a$, saa bliver BC den relative Distance; men om B antages at hvile udi A, bliver samme AD; om AD er parallel

og

og = BC. Man maa agte, at efter AE bliver den relative Bevægelse altid ensdan, fordi AB : BC, og AC : BC ere altid i den samme bestandige Forhold, saa deraf følger: At siden Bevægelsen efter AB og AC altid er efter vores antagne en ensdan Bevægelse, maa den relative efter AE ligeledes blive det.

§. 318.

Man haver derfor alene nødig for at finde den relative Distance efter AE, at søge Forholden imellem den relative Hastighed og Hastigheden i den Ting A. Er Vinklen o given, da er Vinklen ABC og bekiendt, som vi ville kalde p, og Sinus p : Sin. o = a : $\frac{a.\text{Sin. o}}{\text{Sin. p}}$, hvilket er Størrelsen af den relative Hastighed, som derfor altid er given. Men multipliceres denne Hastighed med Tiden, da faaes derved det i samme Tid igiennemløbne relative Rum, hvilket, om Tiden kaldes t, bliver = $\frac{ta.\text{Sin. o}}{\text{Sin. p}}$ = AE.

Vil man af det fundne relative Rum finde de Ting A og B deres virkelige Steder; haver man alene nødig, om a er det Rum, der igiennemløbes i den Tid = 1, at tage Ae = at, da Ee = Af deraf bestemmes. Eller og af den Forhold Sin. o : Sin. p, og den givne relative Distance AE at søge Ae, og fra e at trække ef parallel AE.

§. 319.

Bevæge sig A og B ei begge paa en Tid ud fra det Punkt F, (Taf. XII. Fig. 11.) men saa Begyndelsen af Bevægelsen skeer fra de Punkter A og B, der ligge fra hverandre om den Distance AB, da

Ligeledes, naar begge Tingene ei paa en Tid bevæge sig ud fra det samme Punkt.

da bliver endnu alt som før; thi man seer, at om B kommer til G, imidlertid at A kommer til D, da bliver GD den relative Distance, hvilken, fordi B antages at hvile, forandres til BC, om BC er parallel og saa stor som GD. Følgelig synes A i relativ Bevægelse at have igiennemløbet AC, og man maa agte, som før, at i ACH bliver den relative Bevægelse altid ensdan, om de virkelige Bevægelser efter AE og BQ ere ensdanne Bevægelser. Thi da $o = o$ og Forholden af AD til DC er bestandig, maa og den af AD:AC blive bestandig.

Kaldes fremdeles den Vinkel ACD som før p; da bliver atter igien Sin. p : Sin. $o = a : \frac{a. \text{Sin. } o}{\text{Sin. } p} = AC$ eller den relative Bevægelse efter AH; af hvilken man altid kan finde den Distance, som i en given Tid A og B i relativ Bevægelse ere komne bort fra hverandre, alene ved at multiplicerere, som før, den givne relative Hastighed med Tiden.

Ligeledes seer man let, hvorledes af den givne relative Distance de virkelige Steder kunde findes, om af den paa samme Maade, som før, bestemmes AE, og af den igien EQ. Man seer og hvorledes, om Distancerne ere givne i den virkelige eller relative Bevægelse, Tiden af samme kan findes ved at dividere den givne Distance med Hastigheden.

§. 320.

Oplosning af de foregaaende Tilfælde i den relative Bevægelse.

Man kan og, uden at antage den ene af de Ting, der bevægedes, som hvilende, umiddelbar opløse alt hvad der henhører til den relative Bevægelse, paa denne Maade (Taf. 12. Fig. 12.).

Ere

gelse, uden at antage det ene af de to Ting, der bevæges som hvilende.

Ere AC og BC de to sammenløbende Linier, over hvilke de to Ting A og B i A og B begynde at bevæges med Hastigheder som a og b, for at komme hen til det Punkt C. Tages AC til CD som $a:b$, trekkes fra B BE hen til den Linie AD efter Behag hen paa AD, fra E EF parallel BC, og fremdeles FG parallel EB; da blive AF og BG de i samme Tid igiennemløbne Rum; F og G de Punkter af Linierne AC og BC, i hvilke Tingene A og B paa samme Tid findes: Eller, om man antager dem at være Kugler, blive F og G de Punkter, hvori Centra af A og B henge; Ligeledes bliver og FG den relative Distance.

Thi da efter vores forudsatte $AC:CD = a:b$, men de ere og $= AF:FE$, saa er det let at see, at AF og FE ere igiennemløbne i samme Tid, hvoraf videre alt det øvrige let forstaaes.

§. 321.

Man seer deraf, at om den relative Distance FG er given, findes let de virkelige Steder; thi man har alene nødig fra B af at tage BE saa stor som denne Distance, og at trekke FG parallel EB, saa ere de virkelige Steder i F og G: Men da, om Perpendiklen BH kastes ned, paa begge Sider af samme kan tages $BE = BI$, saa faaes endnu de to Punkter K og T, hvilke, efter at det Punkt C er passert, enten af et eller af begge de to Ting A og B, opløse det foresatte Spørsmaal.

Man kan ligeledes af den givne virkelige Distance AF finde den relative, ved at trekke fra F en Linie FE parallel CB, og siden EB, da denne sidste bliver den forlangte relative Distance.

§. 322.

Man seer af det allerede sagte, hvorledes de Punkter kunne findes, udi hvilke at Centra af A og B betragtede som Kugler ere i den korte Distance fra hverandre; man haver alene nødig at kaste fra B Perpendiklen BH ned paa AD, og siden paa før sagte Maade at trekke LH parallel BD og LS parallel HB, da LS bliver den søgte korteste Distance derfor, fordi den er = HB, og man veed af Geometrien, at af alle Linier, som fra B af kastes ned paa AD, bliver Perpendiklen BH den korteste.

Følgelig, om BH forlænges til M, da er Vinklen LMH = MAH + BHD, altsaa BMC en stump Vinkel, hvoraf sees; at Perpendiklen fra B paa den Linie AC, i hvilken den Ting er, som bevæger sig hastigst, falder bedre ind ad imod A, end det Punkt L, i hvilket Centra af A og B ere i den korteste Distance fra hverandre.

§. 323.

Man seer ydermere, at siden de to Linier BE og BI falde begge ensdan paa begge Sider af Perpendiklen BH, saa blive de to Punkter F og K begge paa hver sin Side lige langt borte fra det Punkt L. Det er; de Punkter, hvori A og B ere i samme Distancer fra hverandre, ligge begge hver paa sin Side lige langt fra det Punkt L, i hvilket de staae i den korteste Distance fra hverandre.

§. 324.

Endelig sees, at A og B ei tillige kunde paa en Tid passere det Punkt C, med mindre at Hastighederne i A og B ere Distancerne AC og CB proportionerte.

§. 325.

§. 325.

Vil man ei alene finde alt det foresagte ved en geometrisk Beskrivning, men sege Liniernes virkelige Størrelser; da siden AC, BC og Vinklen ACD ere bekiendte, findes overmaade let det øvrige. Thi af AC findes CD, fordi Forholden af Hastighederne er given. Følgelig og BD. Af AC, CD og Vinklen ved C findes AD og Vinklen ADC. Følgelig og Vinklen HDB. Af den igien, af BD og den rette Vinkel ved H findes den korteste Distance BH og HD, følgelig AH, og da AD : Dc = AH : HL findes HL. Videre af AH, HL og Vinklen ved A, AL.

Antages BE efter Behag, da findes ligeledes, fordi BH er given, EH; videre AE eller AD — EH — HD; siden EF og AF paa den nylig sagte Maade.

§. 326.

Dette er det fornemmeste, som man behøver at vide om den relative Bevægelse, da en eftertænksom Læsere i forekommende Tilfælde siden let slutter sig deraf videre frem, hvorfor vi heller ikke vidtløftigere vilde opholde os ved denne her giorte Afvigning fra vores egentlige Materie, men erindre, at vi have at tale om Reglerne for Bevægelsen efter Sammenstødet.

Syttende Forelæsning.

Slutninger af de for fundne Regler for Tingenes lige Sammenstød.

§. 295.

Af de sidste givne Regler trekkes to andre Hoved-Formularer.

Vi sluttede vores sidste Forelæsning med to Formuler eller Sætninger for Bevægelsen, som vi her maa igientage. Den ene var, at Hastigheden i A efter Slaget var $= \frac{H.(M-m)+2mb}{M+m}$. Den anden, at Hastigheden i B blev efter Slaget $= \frac{2MH+(m-M)b}{M+m}$, og vi saae, at disse Regler bestemte Bevægelsen, saa tidt som de elastiske Ting A og B for Slaget gik efter den samme positive Direktion AD.

Man seer deraf let, hvorledes Hastighederne kunde bestemmes i det Tilfælde, da B bevæger sig imod A. T. XII. F. 6. Man haver i det alene at agte, at Hastigheden i B bliver negativ $= -b$, saa at om i de forrige Hastighedernes Værdier sættes i Steden for $+b$ $-b$, faaes de Storrelser af Hastigheder, som passe til denne Tilfælde, nemlig

1) Hastigheden i A bliver efter Slaget $\frac{H.(M-m)-2mb}{M+m}$.

2) Hastigheden i B bliver efter Slaget $\frac{2MH-(m-M)b}{M+m}$.

§. 296.

§. 296.

Disse to Tilfælde ere alene de, som man haver nødig noiere at overlegge; Thi bevæges saavel A som B efter den negative Direktion BAE før Slaget, da blive baade H og *h* negtende Størrelser; de negative Hastigheder efter Slaget derfor fuldkommen de samme, som de positive i den første Tilfælde af §. 295, saa at i Henseende til Bevægelsen efter Slaget disse to Tilfælde ere i intet adskillige, uden deri, at alt skeer nu paa den negative Side fuldkommen saaledes som før paa den positive.

Gaae derimod før Slaget A hen efter AE, og B efter BD, kan intet Sammenstød skee.

§. 297.

Dette forudsat, ville vi foretage de fornemmeste enkelte Tilfælde af Sammenstødet, og undersøge, hvad Hastighederne blive, naar det ene Legeme f. Ex. B hviler. I denne Tilfælde faaes, fordi $h = 0$,

De fornemmeste enkelte Tilfælde af Sammenstødet forklares.

1) Hastigheden i B efter Slaget $= \frac{2MH}{M+m}$.

2) Hastigheden i A efter Slaget $= \frac{H.(M-m)}{M+m}$, hvoraf videre sees,

3) At saafremt begge de sammenstødende Ting ere af ligestor Materies Mængde, da bliver Hastigheden i B efter Slaget $= H$, fordi $M = m$, og $M + m = 2M$. I A derimod bliver Hastigheden $= 0$, fordi $M - m = 0$, følgelig; saa tidt som et elastisk Legeme i lige Sam-

Sammenstød treffer an paa et andet ligeledes elastisk og lige stort med sig selv, da hviler efter Slaget det som bevægedes for Slaget, og det, som hvilede for, bevæger sig siden med samme Hastighed, som den, det andet for Slaget havde.

4) Man kan deraf videre slutte, at om en Mængde lige store Kugler, saa mange som man vil, laae i Række efter hverandre og rørede hinanden, imidlertid at en anden, saa stor som en af dem, med en vis Hastighed stødte an paa den yderste i Radden, da kom alle Kuglerne til at hvile, den ene undtagen, som laae yderst i Radden, og længst fra Slaget; hvilken sidste derimod bevægede sig, efter at Slaget var forbie, fort med den Hastighed, hvormed den for Slaget bevægede stødte paa de andre.

§. 298.

Efter at have betragtet det Tilfælde, i hvilket Hastigheden i den ene af de bevægede Ting var $= 0$, ville vi foretage den, i hvilken at Hastigheden for Slaget baade udi A og B er lige stor, eller $H = h$. I den kunde to Tilfælde skilles fra hinanden; den ene, naar A og B for Slaget gaae efter en Direktion; den anden, naar de gaae imod hverandre.

1) I den første holde vi os til de første Værdier af Hastighederne i §. 295, da man faaer, fordi $H = h$, Hastigheden i $A = \frac{H.(M+m)}{M+m} = H$, saa Hastigheden for og efter

Slaget

Slaget bliver den samme. I Henseende til B faaes ligeledes $\frac{MH+mH}{M+m} = H$, saa man seer, at Hastigheden i B bliver i denne Tilfælde efter Slaget uforandret i begge Tingene. Hvilket man, uden at betiene sig af disse Regler, og strax kunde have seet, som vi og alene anfore det her, for at vise Reglernes Rigtighed i alle de Tilfælde, i hvilke strax kan vides, hvad Hastighederne blive.

2) Dette Tilfælde var saaledes hoist simpel; Gaaer man derimod til det andet, da A og B for Slaget lobe imod hverandre, og man til den Ende betiener sig af de sidste Værdier af Hastighederne, som findes i §. 295, hvilke blive 1) for A, $\frac{H(M-m)-2mH}{M+m}$. 2) For B $= \frac{2MH-(m-M)H}{M+m}$, som ere de for dette Tilfælde almindelige Værdier efter Slaget.

Sættes nu fremdeles $M = m$, da faaes videre,

1) For A, $\frac{-2mH}{2m} = -H$. 2) For B, $\frac{2MH}{2M} = H$.

Hvoraf sees.

At saa tidt som to elastiske Ting, der ere lige store, lobe imod hverandre med lige store Hastigheder, da gaae de efter Slaget fra hverandre med de selvsamme Hastigheder i forandret Direktion, hvormed de for Slaget gik imod hverandre.

§. 299.

Dersom to elastiske Ting derimod, i hvilke Materiens Mængde er den samme, men Hastighederne ulige, for Slaget bevæge sig imod hverandre. Da bliver, i Folge det an-

tagne, $M = m$, og i Følge de sidste Værdier af Hastighederne udi §. 295, 1) Hastigheden i A efter Slaget $= -h$, 2) Hastigheden i B efter Slaget $= H$, følgelig

bytte de elastiske Legemer i dette Tilfælde Hastigheder med hverandre, og gaae fra hinanden efter imodsatte Direktioner af de, de for gik til hverandre med.

§. 300.

Saafremt derimod, at de for Slaget gaae begge efter en og den samme Direktion, og Materiernes Mængde antages som for i begge den samme. Da faaer man, i Følge de første Værdier for Hastighederne i §. 295,

1) For A efter Slaget Hastigheden $= h$. 2) For B efter Slaget Hastigheden $= H$, saa man seer; at de i dette Tilfælde ligeledes bytte Hastigheder om med hverandre, men gaae efter Slaget fremdeles fort efter de samme Direktioner, efter hvilke de gik for Slaget.

§. 301.

De forhen givne Regler anvendes til at udfinde Beskaffenhederne af de haarde og blode Tings Sammenstød.

Disse ere de letteste og simpleste Tilfælde, som forekomme i de elastiske Tings Sammenstød. Vil man ligeledes finde Reglerne for de haarde og blode Tings Bevægelse efter Slaget, da maa i Henseende til dem agtes (om ellers de haarde Ting kunde tage imod den Forandring af Stødet, man her forudsætter) at de efter Slaget ikke beholde anden Hastighed at bevæges med, end den, som var fælles baade for A og B for Slaget. Thi de Hastigheder, hvilke ere Materiernes

Mæng-

der forkeert proportionerte, tabe sig under Slaget i Delenes Sammentrykning saavel i de haarde som blode Ting, siden de ei igientage deres forrige Figur. Folgelig bliver saavel for de haarde som blode Ting efter Slaget alene en fælles Hastighed, hvilken, i Folge §. 289, $= f = \frac{HM + mh}{M + m}$.

Hvoraf sees, at i hvorledes end de haarde og blode Ting bevæge sig med eller imod hverandre for Slaget, gaae de dog altid efter Slaget med en og den samme Hastighed, og efter en Direktion eller Drive-Linie.

§. 302.

Deraf kunne alle Reglerne for de haarde og blode Ting deres Bevægelse udledes, hvilket vi her ville vise i de fornemmeste Tilfælde.

1) Dersom de for Slaget gaae efter en Direktion, da bliver Hastigheden efter Slaget saa stor som Summen af Bevægelsernes Storrelser for Slaget, dividert med Materiens Mængde i begge de Ting, som stode sammen.

2) Gaae de for Slaget imod hverandre, da bliver h forandret til $-h$, og man faaer $f = \frac{HM - mh}{M + m}$, saa at Hastigheden efter Slaget faaes ved at dividere Forskiellen imellem Bevægelsernes Storrelser for Slaget, med disse samme Materiers Mængder.

3) Og deraf sees endnu videre, at Bevægelsens Storrelse efter Slaget bliver

a) Om de for Slaget gaae efter samme Direktion begge, $(HM + mh)\frac{M+m}{M+m} = HM + mh$. Men for Slaget vare Bevægelsernes Størrelser og $= HM + mh$, altsaa sees deraf, at saa tidt som to haarde eller blode Ting for Slaget bevæges efter en Direktion, da bliver Bevægelsens Størrelse i begge for og efter Slaget den samme.

b) Og ligeledes sees, at om de for Slaget bevæge sig imod hverandre, da bliver Forskiellen af Bevægelsens Størrelse i begge for og efter Slaget den samme.

c) Dersom $M = m$ og $H = h$, da bliver Hastigheden i de haarde og blode Ting efter Slaget $= \frac{HM - HM}{M+m} = 0$, folgelig naar to deslige lige store Ting lobe imod hverandre for Slaget, da hvile de begge efter Slaget.

d) Hviler den ene af disse Ting for Slaget, da bliver $h = 0$, og man faaer $f = \frac{HM}{M+m}$, da nu Hastigheden udi A, for Slaget gik an, var $= H$, saa sees, at Hastigheden efter Slaget i dette Tilfælde altid er til Hastigheden for Slaget, som Materien i A til Summen af Materiens Mængde i de Ting, der stode sammen.

e) Er i dette Tilfælde, da nemlig den ene hviler; Materiens Mængde desuden udi begge Tingene den samme, saa bliver $f = \frac{HM}{2M} = \frac{1}{2}H$, hvoraf man seer, at de da hver faaer Halvdelen af den Hastighed, hvilken den Ting, som stoder an paa den anden havde for Slaget.

f) Er

f) Er simpel hen Materiernes Mængde lige stor eller $M = m$, Hastighederne ulige. Da

1. I den Tilfælde, naar begge Tingene gaae efter en Direktion, bliver $f = \frac{HM + mb}{M + m} = \frac{M(H + b)}{2M} = \frac{H + b}{2}$. Altsaa bevæges saavel A som B efter Slaget med den halve Sum af det, hvad Hastighederne vare for Slaget.

2. Gaae de under samme Betingning imod hverandre, da bliver $f = \frac{HM - mb}{M + m} = \frac{M.(H - b)}{2M} = \frac{1}{2}(H - b)$ det er; A og B bevæge sig begge efter Slaget med den halve Forskiel af hvad Hastighederne vare for Slaget.

Og da Værdierne af begge disse Hastigheder ere positive, saa seer man, at i denne saavel som i alle de forrige Tilfælde af de haarde og blode Tings Sammenstød, bliver Direktionen efter Slaget altid Direktionen af den Ting A, som haver den største Hastighed, og med den løber ind paa den anden.

8) Dersom Hastigheden er den samme, men Materiernes Mængde i begge adskillige, da er det klart; at om de for Slaget gaae efter den samme Direktion, kunne de ei stode sammen, men løbe de imod hverandre, da bliver $f = \frac{H.(M - m)}{M + m}$, det er, Hastigheden efter Slaget bliver den tredie i Proportion til Summen af Materiernes Mængder i begge, til Forskiellen imellem samme, og til Hastigheden for Slaget.

9) Og endelig, saafremt at de lobe imod hverandre med Hastigheder, hvilke ere deres Materiers Mængder forkeert Viis proportionerte, da bliver i $f = \frac{HM - mb}{M + m}$, $HM = mb$, altsaa $f = 0$, folgelig hvile de i dette Tilfælde begge efter Slaget.

§. 303.

Bevægelsens Størrelse bliver før og efter Sammenstødet ikke den samme i de haarde og blode Tings Sammenstød, med mindre at de bevæges før Slaget efter samme Direktion.

Den Mængde Regler, som vi her allerede have viist for Bevægelsen af Sammenstødet, flyde alle med hinanden saa let af de givne almindelige Værdier over Hastighederne, saa man seer, at det fast ikke er uden et Øiebliks Sag, at udlede alle disse enkelte Tilfælde af de for givne almindelige. Vi ville gaae videre fort til andre Betragtninger Bevægelsen angaaende, da man nu tydelig nok seer, hvorledes Reglerne af Bevægelsen efter Stødet i alle muelige enkelte Tilfælde kan findes.

Det, vi her særdeles ville være opmerksomme over, er, hvad der i Bevægelsen bliver bestandigt for og efter Slaget, og til den Ende slutte vi strax af §. 302 at Bevægelsens Størrelse ei bliver den samme for og efter Slaget i de haarde Tings Sammenstød, uden alene i den Tilfælde, da begge de i Bevægelse værende Ting gaae for Slaget efter den samme Drive-Linie. Lobe de imod hverandre, er alene Forskiellen for og siden af Bevægelsens Størrelse den samme.

§. 304.

I de elastiske Tings Sammenstød dør in-

Men da i de haarde og blode Tings Sammenstød en Deel af Kræfterne tabes, den nemlig, som anvendes paa at sammen-

sammentrykke en Figur, der ei igien sætter sig i sin forrige Stand, saa burde man vente sig, at Kræfterne for og efter Slaget ei kunde eller burde være og blive de samme. Saafremt derimod, at Tingenes virkelige Kræfter bor dommes af Hastigheden i Materiens Mængde, da siden i de fuldkommen elastiske Tings Sammenstød aldeles ingen Kræfter tabes, burde nodvendig, om disse Kræfter ellers vare de rette og sande, Bevægelsens Storrelse baade for og efter Slaget være den samme. For derfor at see, om Tingenes sande Kræfter heraf kunde dommes, ville vi overlegge, hvad Bevægelsens Storrelse bliver for og efter de elastiske Tings Sammenstød i alle Hoved-Tilfælde.

gen Kræfter tabes, folgelig da her heller ikke Bevægelsens Storrelse for og efter Slaget bliver altid den samme, saa kan af den de levende Kræfter ikke dommes. Thi Bevægelsens Storrelse bliver i det elastiske Stød alene den samme, naar Tingene baade for og efter Slaget bevæge sig efter de samme Direktioner.

Forste Tilfælde. Dersom A og B bevæge sig begge for Slaget efter den samme Direktion, da blive Storrelserne af Bevægelserne for samme $MH + mh$.

Derimod blive disse samme Storrelser efter Slaget, naar man betiener sig af de forste Værdier for Hastighederne i §. 295.

$$\frac{\left(\begin{matrix}HMM - HMm + 2mMb \\ + hmm + 2MmH - mMb\end{matrix}\right)}{M + m}$$

$$= \frac{HM.(M+m) + hm(m+M)}{M+m} = HM + hm.$$

Hvorved atter igien er at agte, at heri indbefattes to Hoved-Tilfælde.

a) Saafremt nemlig, at baade for og efter Slaget de to Ting A og B gaae efter den samme Drive-Linie, da seer man, at $HM + hm$ bliver saavel for som efter Slaget positive eller bekræftende Storrelser, folgelig og, at saa tidt som

de

de to Ting baade for og efter Slaget bevæge sig efter den samme Direktion, da bliver Bevægelsens Storrelse, saavel for som efter Slaget den samme, og følgelig i denne Tilfælde aldeles uforandret.

b) Saafremt derimod, at A og B for Slaget gaae efter en Direktion, men efter Slaget fra hverandre efter imodsatte Direktioner, da tilkiendegiver $HM + hm$ Summen af Bevægelsernes Storrelse for Slaget, men fordi efter Slaget Hastigheden i A er negativ, eller negtende, tilkiendegiver $HM + hm$ Forskiellen imellem Bevægelsens Storrelser i A og B efter Slaget, hvoraf man seer, at saa tidt som to Ting gaae for Slaget efter en Drive-Linie, men efter Slaget udi imodsatte, da bliver Forskiellen af Bevægelsernes Storrelser efter Slaget lige saa stor som hele Summen af dem for.

§. 305.

Det andet Tilfælde indeholder de Inddeelninger, som kunne gjores af den Art Sammenstod, naar A og B bevæge sig for Slaget imod hverandre; da man faaer i at betiene sig af de sidste Værdier i §. 295, at Bevægelsernes Storrelser efter Slaget blive

$$\frac{HM^2 - HMm - 2mMb - m^2b + 2mMH + 2mMb}{M+m} = \frac{HM^2 - m^2b + mMH - mMb}{M+m}$$

$$= \frac{HM.(M+m) - bm(M+m)}{M+m} = HM - hm.$$

Hvorved atter igien to adskillige Tilfælde maa noie skilles fra hverandre.

a) Den

a) Den ene, naar de to Ting A og B gaae efter Slaget begge efter en Direktion, da HM — *hm* tilkiendegiver Summen af Bevægelsens Størrelse i begge efter Slaget. Saa man seer; at saa tidt som de to Ting bevæge sig for Slaget imod hverandre, men efter det med hinanden, da bliver Summen af Bevægelsernes Størrelser efter Slaget lige saa stor som Forskiellen af samme Bevægelsers Størrelser for Slaget.

b) Den anden er, naar de to Ting A og B bevæge sig efter Slaget i imodsatte Direktioner fra hverandre; da, fordi Hastigheden i A bliver negtende, er det klart, at den fundne Størrelse HM — *hm* bliver Forskiellen imellem Bevægelsernes Størrelser efter Slaget. Hvoraf videre sees.

At saa tidt som to Ting for Slaget bevæge sig imod hverandre i imodsatte Direktioner, og efter Slaget i ligedanne Direktioner fra hverandre, da bliver Forskiellen af Bevægelsernes Størrelser for og efter Slaget den samme.

§. 306.

Deraf maa videre sluttes.

1) At Bevægelsens Størrelse formeres i de elastiske Tings Sammenstød, saa tidt som de for Slaget gaae efter hverandre i samme Direktioner, og efter Slaget gaae fra hverandre i imodsatte.

2) At derimod Bevægelsens Størrelse formindskes ved Slaget, saa tidt som de elastiske Legemer før Slaget gaae imod hverandre, men følge hinanden efter samme Drive-Linie efter Slaget.

3) At i den Tilfælde alene tilforladelig kan siges, at Bevægelsens Størrelse for og efter Slaget uforandret bliver den samme, naar de sammenstødende elastiske Ting baade for og efter Slaget følge hverandre efter samme Drive-Linie.

4) Saa at deraf uimodsigelig bevises; da disse Regler aldeles ingen Tvivl er underkastede, men man i Henseende til dem, af hvad adskillige Grunde de end udledes, altid finder et og det samme, og er derfor dem angaaende fuldkommen enig: At, siger jeg, de Kræfter, som dommes af Bevægelsens Størrelse, umuelig ikke kunne være de rette, siden de forandres og blive ei de samme i de fuldkomne elastiske Tings Sammenstød, og vi derimod have seet, at i det Kræfterne bør fuldkommen uforandret blive de samme. §. 294.

§. 307.

Det eneste, som man endnu kunde tvivle om, bliver, om og de almindelige foranførte Hoved-Tilfælde alle ere muelige i de elastiske Tings Sammenstød; men denne Tvivl taber sig let, saasnart som man iagttager, at i alle Værdierne af Hastighederne forefalde baade negtende og bekræftende Størrelser, saavelsom at baade Materiernes og Hastighedernes Størrelser kunde lempes efter hverandre efter Behag.

§. 308.

I de elastiske Tings Sammenstød blive de levende Kræfter

Saafremt derimod, at man vil giøre denne samme Undersøgning i Henseende til de levende Kræfter, eller de, hvilke dommes af Hastighedens Quadrat; da om man foretager først

først de to første Værdier af Hastighederne i §. 295, som ere for A, $\frac{H.(M-m)+2mh}{M+m}$, og for B, $\frac{2MH+(m-M)h}{M+m}$, hvor- af Quadraterne multiplicerede med Materiernes Størrelser ere, om man sætter $M-m=a$, for og efter Slaget altid de samme.

$$\frac{M.(a^2H^2+4mahH+4m^2h^2)+(4M^2H^2-4aMHh+a^2h^2)m}{(M+m)^2}$$

$$=\frac{(M-m)^2MH^2+(M-m)^2mh^2+4m^2h^2M+4M^2H^2m}{(M+m)^2},$$ og da de negative Stykker i Quadraterne $-2mM^2H^2$ og $-2Mm^2h^2$ falde bort i de positive, saa faaes

$$\frac{M^3H^2+m^2MH^2+M^2mh^2+m^3h^2+2m^2Mh^2+2M^2mH^2}{(M+m)^2}$$

$$=\frac{MH^2.(M^2+2mM+m^2)+mh^2(M^2+2mM+m^2)}{(M+m)^2}=MH^2+mh^2.$$

Hvoraf sees; at efter Slaget de levende Kræfter blive endnu de samme saavel før som efter Slaget, hvad heller at A og B gaae baade før og siden efter samme Drive-Linie, eller om de før Slaget gaae efter et Slags Direktioner og efter Slaget derimod med imodsatte; thi om Hastigheden her bliver negativ, forandres dog derved ikke Størrelsen af Hastighedens Quadrat.

§. 309.

Dersom man ligeledes foretager sig de to sidste Værdier af Hastighederne i §. 295, de nemlig, som vi have fundet for den Tilfælde, naar de to Ting A og B før Slaget gik imod hverandre, da faaer man, at de levende Kræfter efter Slaget blive, alt giort som før:

$$\frac{(H^2a^2 - 4mbHa + 4m^2b^2)M + (4M^2H^2 + a^2b^2 + 4MbHa)m}{(M+m)^2},$$

som giver net op det i forrige Tilfælde fundne

$$\frac{Ma^2H^2 + 4m^2Mb^2 + 4mM^2H^2 + a^2mb^2}{(M+m)^2} = MH^2 + mb^2.$$

Hvoraf forstaaes, naar man fremdeles slutter sig frem, ligesom i §. 308, at de levende Kræfter efter Slaget altid i al de elastiske Tings Sammenstød blive det selvsamme, hvad de vare for Slaget; saa de, naar ingen Kraft tabes i Figurens Forandring, uforandret blive, det de vare.

§. 310.

Vi giore deraf to vigtige Anmerkninger.

De levende Kræfter tilintetgiore ikke hverandre, men de tilintetgiores af Pressionerne.

1) At de levende Kræfter, saa tidt som de virke imod hverandre indbyrdes, tvertimod Pressionernes Natur aldrig tilintetgiore den ene den anden; men forandre hverandre simpel hen uden Tab i det Substantielle.

2) At Pressionerne derimod kunne tilintetgiore de levende Kræfter, ligesom de af dem kunne blive til. Men det, som her maa videre agtes, er; at de levende Kræfter selv, naar de virke imod de saa kaldte døde eller simple Pressioner, tabe de sig paa samme Maade som simple Pressioner: Og at derfor den Deel af dem, hvilken anvendes til at sammentrykke Figuren, ei kan ansees paa anden Fod, end den af en simpel Pression.

Atten-

Attende Forelæsning.

Slutningen af Reglerne for Bevægelsen i Tingenes Sammenstød.

§. 311.

Vi ere, Høistærede! ved Slutningen af det, som vi have at sige om de Hoved-Regler, hvilke Naturen altid iagttager udi Tingenes Sammenstød. Vi have seet to Poster, som altid blive uforanderlige; Den ene, de levende Kræfter selv; den anden, den fælles Hastighed, hvormed begge Tingene bevægedes for Slaget. Af dette sidste følger,

Tyngdens fælles Centers Bevægelse forandres ikke ved Tingenes Sammenstød.

1) At om man kalder det Punkt F, (T. XII. F. 6.) fra hvilket af at regne Materiens Mængde i A er til den i B, som Fc : FC, Tyngdens eller rettere Inertiens Center; da skal den ensdanne Bevægelse af dette Center saavel for som efter Stodet være den samme.

Thi dersom man eftertænker det forhen sagte §. 293, er det klart; at for saa vidt som de to Ting udi Bevægelse have en fælles Hastighed, forandres derved ikke Bevægelsen af Inertiens Center F. For saavidt at de gaae imod hverandre med de Hastigheder, der ere Materiens Mængde i begge forkeert Viis proportionerte, da siden Hastighederne efter Slaget af de

fuldkommen elastiske Ting atter igien blive de samme, skiont med forandrede Direktioner; saa sees strax, at de i denne Henseende maa paa selvsamme Maade gaae fra hverandre efter Slaget, som de, for det skede, gik imod hverandre. Men da al Bevægelsen i de to Ting, som stode sammen A og B, hertil henhorer, saa folger, at da ved ingen af Delene Tyngdens Centers Bevægelse i Sammenstodet forandres, saa forandres den aldeles ikke. Man kan forestille sig dette lettere saaledes.

Tænker man de to Ting, der stode sammen, som om de laae paa et og det samme Bret, og at dette Bret bevægedes med den Hastighed, der er begge tilfælles; da er det klart, at Tyngdens Center gik fort med den samme Hastighed som Brettet, folgelig, da ved Sammenstodet Brettets Bevægelse ei forandres, saa folger,

a) At dette Center hviler paa Brettet, for saa vidt som Tingene gaae efter Slaget igien fra hverandre med Hastigheder, hvilke ere som Materiernes Mængde i begge forkeert tagne.

b) Og folgelig, at den ensdanne Bevægelse af dette Center er den samme som Brettets Bevægelse baade for og efter Slaget, saa den er saavel i Henseende til Direktion som Storrelse aldeles uforandret, hvoraf igien flyder.

c) At Bevægelsens Storrelse i Henseende til dette Center er baade for og efter Slaget den samme, det er, Materiernes Storrelser i A og B multiplicerte med deres Tyngdes Centers Bevægelse ere altid baade for og efter Slaget i alle Henseende de samme.

§. 312.

§. 312.

2) Maa man agte, at den relative Hastighed ved Slaget heller ikke forandres. Man slutter dette let ved at sammenligne dette Slags Hastigheder for og efter Slaget med de forhen givne Værdier for Hastighederne §. 294. Den relative Hastighed heller ikke.

Men for at forestille sig Sagen paa den allerletteste Maade, haver man alene nødig at forestille sig Bevægelsen paa den nylig omtalte Fod, da strax sees, at efter Slaget beroer den relative Bevægelse ikke paa Brettets, eller om man vil heller det, paa Tyngdens Centers Bevægelse, siden begge Tingene udi denne Henseende bør ansees, som om de hvilede: Deres Bevægelse fra hverandre beroer alene paa de Hastigheder, med hvilke de bevæge sig paa Brettet; det er paa de, hvilke ere forkeert Viis proportionerte Materiernes Mængder. Og da disse efter Slaget blive de samme som for i de elastiske Tings Sammenstød, saa følger

a) At disse Ting bevæge sig fra hverandre efter Slaget fuldkommen saaledes, som de bevægede sig imod hverandre for Slaget, saa at de derfor i lige Tider for og efter Slaget befinde sig i lige store Distancer fra hverandre.

b) Følgelig bliver og deres relative Bevægelse for og efter Slaget aldeles den samme uden Forandring.

c) Videre sees; at Stødets Størrelse altid beroer paa Materiens Størrelse i den Ting, som støder an, multiplicert med den respektive Hastighed.

d) Følgelig kan deraf sluttes, hvor stærk de elastiske sammenstødende Ting under sig sammentrykkes og spendes.

§. 313.

§. 313.

Beskaffenheden af Hastighedernes Forandring ved Sammenstødet.

Med Hastighederne selv er det derimod noget langt andet. Thi dersom man bliver alt ved at betragte Bevægelsen paa den nylig omtalte Maade, og kalder den fælles Bevægelse i begge Ting f, den som er Materiens Mængde forkeert Viis proportionert udi A, a, i B, b, da maa

1) Om $f = 0$, det er, om de to Ting A og B bevæge sig imod hinanden, alene med de Hastigheder a og b, hvilke ere deres Materiers Mængder forkeert Viis proportionerte, siden i Sammenstødet, ved det at Figuren igientages, disse Hastigheder paa nye meddeles; saa at i dette Tilfælde, som og for er bleven sagt, gaae de sammenstødende Ting efter Slaget fra hverandre med de samme Hastigheder, hvormed de for Slaget gik imod hverandre.

2) Men saafremt som de baade for og efter Slaget bevæge sig efter den samme Kant, saa Direktionen af Bevægelsen ved Slaget ikke forandres; da seer man, at for Slaget bliver Hastigheden i $A = a + f$, i $B = f - b$, saa Forskiellen imellem begge er $a + b$. Efter Slaget derimod er Hastigheden i $A = f - a$ positiv, udi B er den $f + b$. Folgelig Forskiellen imellem begge atter igien $a + b$, hvoraf man seer, at i dette Tilfælde ei Hastighederne selv, men Forskiellen imellem Hastighederne for og efter Slaget bliver den samme.

3) Saafremt at de to sammenstødende Ting A og B bevæge sig for Slaget efter samme Direktion, men efter Slaget efter imodsatte, da bliver, som for, Forskiellen af Hastighederne for Slaget $= a + b$. Men da de efter Slaget gaaer

med

med imodsatte Direktioner, bliver Hastigheden efter Slaget i A negativ $= -f + a$, og den i B som for $f + b$, hvilke om sammenlegges, faaes $a + b$, hvoraf sees.

At i dette Tilfælde bliver Forskiellen af Hastighederne for Slaget den samme, som Summen af Hastighederne efter Slaget.

4) Dersom de to Ting i Bevægelse A og B gaae for Slaget imod hverandre, men efter Slaget i en Direktion, da bliver, som for, Forskiellen af Hastighederne efter Slaget $a + b$, men da Bevægelsen i B nu bør ansees som negativ, bliver Hastigheden i A for Slaget, som for, $f + a$, men den i B $-f + b$, som tilsammenlagte giøre $a + b$, hvoraf sees.

At i dette Tilfælde er Summen af Hastighederne for Slaget saa stor som Forskiellen af Hastighederne efter Slaget.

5) Og ligeledes bevises, at saa tidt som to elastiske Ting bevæge sig saavel for som efter Slaget udi imodsatte Direktioner imod hverandre, da bliver Summen af Hastighederne for og efter Sammenstødet det samme.

§. 314.

* Vil man sammenligne Hastighederne efter Slaget med Hastighederne for det i Almindelighed; da bliver, naar A og B gaae for Sammenstødet efter de samme Direktioner, Hastigheden i A §. 259 $= \frac{H.(M-m)+2mb}{M+m}$, som forer til denne Proportion.

$M+m : 2m = H-b : \frac{2m.(H-b)}{M+m}$, hvilket om trekkes fra H, da faaes $H - \frac{2m.(H-b)}{M+m} = \frac{H.(M-m)+2mb}{M+m}$, hvoraf sees, at om man søger den fierde proportionelle til Summen af Materiernes Mængde i A og B, til den dobbelte Materies Mængde udi B, og til den relative Hastighed for Slaget, og trekker det udkommende fra den anstødende Tings A Hastighed for Slaget, da faaer man sammes Hastighed efter Slaget.

Ligeledes da i Følge §. 295 Hastigheden i B bliver efter Slaget $= \frac{2MH+(m-M)b}{M+m}$, hvilket forer til denne Analogie.

$M+m : 2M = H-b : \frac{2M.(H-b)}{M+m}$; Om dette legges til Hastigheden af B for Slaget, saa faaer man

$b + \frac{2M.(H-b)}{M+m} = \frac{2MH+(m-M)b}{M+m}$, hvoraf sees, at som sig forholder Summen af begge Materiers Mængder i A og B til Materiens dobbelte Mængde i den anstødende Ting A, saa forholder sig Forskiellen af Hastighederne for Slaget til en Hastighed, hvilken om legges til Hastigheden i B for Slaget, da faaes denne samme Tings Hastighed efter Slaget.

§. 315.

* Man kan giøre Beregningen ligeledes for det Tilfælde, da A og B for Slaget bevæge sig imod hverandre.

Siden Hastigheden nu er §. 295. efter Slaget i $A = \frac{H.(M-m)-2mb}{M+m}$, hvilken opløses i denne Analogie

M+

$M+m:2m=H+h:\frac{2m(H+h)}{M+m}$, hvilket trokken fra H giver $H-\frac{2m.(H+h)}{M+m}=\frac{H.(M-m)-2mh}{M+m}$, saa sees; at alt er i dette Tilfælde i Henseende til A, som i forrige, alene at man i Steden for Forskiellen af Hastighederne, betiener sig af deres Sum, og da denne atter igien er den relative Hastighed, saa folger, at alt er i Almindelighed i begge Tilfælde ens.

Ligeledes, da Hastigheden udi B efter Slaget er §. 295 nu $=\frac{2MH-(m-M)h}{M+m}$, som oploser sig i folgende $M+m:2M=H+h:\frac{2M(H+h)}{M+m}$, saa folger, at denne fierde proportionelle findes ved Hielp af den relative Hastighed fuldkommen som for; men fra den trekkes Hastigheden i B for Slaget, saa man faaer $\frac{2M(H+h)}{M+m}-h,=\frac{(M-m)h+2mH}{M+m}$, fordi den er negativ. Det er i sig derfor virkelig den samme Maade at arbeide paa, som for, og man faaer i Almindelighed for alle Tilfælde disse to Regler:

1) For den Ting A; som $M+m:2m$, saa den relative Hastighed for Slaget til en fierde proportionelle, som bor trekkes fra den positive Hastighed, A gik med for Slaget, for at faae Hastigheden i samme A efter Slaget.

2) For den Ting B; som $M+m:2m$, saa den relative Hastighed for Slaget til en fierde proportionelle, hvil-

ken maa legges til Hastigheden i B for Slaget (vel iagttaget, om den er positiv eller negativ) for at faae Hastigheden af samme B efter Slaget.

§. 316.

* Man kan videre let af det forhen sagte beregne, hvad der er tabt i Sammenstødet.

Første Tilfælde. Thi er det haarde eller bløde Ting; da siden de alene bevæges efter Slaget med den fælles Hastighed, saa kan af Forskiellen imellem samme og Hastighederne i begge de i Bevægelse værende Ting A og B for Slaget let beregnes saavel hvad der er i Hastighed, som i den hele Bevægelse tabt ved Sammenstødet.

Anden Tilfælde. Ere de derimod Elastiske, da kunne utallige under sig høist adskillige, og undertiden overmaade artige Tilfælde findes, eftersom man enten imellem Hastighederne eller Materiernes Mængder, eller imellem begge tillige sætter en eller anden efter Behag antagen Forhold. Vi ville her, for at vise Maaden, ikke opholde os uden ved et Par Exempler.

Første Exempel. Dersom Hastigheden antages at være i samme Forhold til en vis given Hastighed antagen for Unitet, som Materiernes Mængder i A og B ligeledes til Uniteten, og man tillige antager $b = 0$. Da faaer man Hastighederne

1) i A for Slaget $= M + m$.

2) i A efter Slaget $= \frac{MH - mH}{M+m} = (M - m)\frac{M+m}{M+m} = M - m$.

3) i

3) i B efter Slaget $= 2M.\left(\frac{M+m}{M+m}\right) = 2M.$

Hvoraf sees; at den Ting, som hvilede, meddeles en Hastighed større, end den A selv havde, saa stor nemlig som 2M eller Materiens Mængde i A dobbelt tagen. A selv derimod beværger sig endnu efter Slaget med en positiv Hastighed $M - m$, saa stor som Forskiellen af Størrelsen i Materierne udi begge.

Hvoraf sees; at om m eller den hvilende Ting er meget liden, bliver Summen af Hastighederne efter Slaget tre Gange saa stor som Hastigheden for Slaget. Thi vi have her antaget, at det større løb ind paa det mindre.

Andet Exempel. Løber derimod det mindre ind paa det større, og man arbeider paa samme Maade som for, da findes; at om Hastigheden ligeledes antages at være som i forrige Tilfælde i den Forhold af $M + m : 1$, meddeles en Hastighed til det hvilende af det mindre, der støder an paa det, hvilken er som to gange det større selv; men det taber en Hastighed saa stor som 2 gange dets Masse, det løb ind paa.

Hvoraf sluttes; at da dette sidste ikke er mueligt, med mindre at A selv faaer en negativ Hastighed, saa er det klart, at altid, saa tidt som en mindre Ting A løber ind paa en større B, som hviler, maa A nødvendig springe tilbage efter at Sammenstødet er forbie. Men A faaer altid mindre Hastighed end B havde, og i Hastighedens Sum tabes intet og vindes heller ikke ved Sammenstødet.

§. 317.

Hastigheden kan utroelig forstørres ved det middelbare flere Legemers Sammenstød.

Vi saae i det forste af de forrige Exempler, at Hastigheden anseelig kunde formeres, men det er endnu intet imod den Hastighed, som kan blive til i Naturen ved flere Tings Sammenstød; den er saa anseelig, at man med al Foie kan henfore den iblant de besynderlige Paradoxier, som i dette Stykke af Mekanik falde for; imidlertid kan den af ingen negtes, og vi ville desangaaende alene anfore folgende.

Dersom en Ting A lober ind paa en storre B, og ved dens Hielp stoder an paa en Ting C storre igien end B, alle tre antagne som elastiske, og B og C som de der hvile: Da bliver Hastigheden i C ved det middelbare Stod i B storre end Hastigheden ellers skulde blive ved det umiddelbare Slag af A selv paa C.

Thi da B antages at hvile, bliver i samme Hastigheden efter Slaget (om Materiens Mængde i A, som for, kaldes M, i B, nM) $= \frac{2H}{1+n}$. §. 297. Stoder B igien an paa C, og Materiens Mængde i C sættes $= rM$, da faaes Hastigheden i C $= \frac{4nH}{(1+n)r+n}$.

Men om A stodte umiddelbar an paa C, da blev Hastigheden i denne sidste $= \frac{2H}{1+r}$. Folgelig forholde sig Hastighederne i disse to Tilfælde som $\frac{2H}{1+r} : \frac{4nH}{(1+n)r+n)} = r+n+rn+n^2 : 2n+2rn$. Sættes $r = p+n$, da faaes i Steden for den Forhold af $n^2+r : rn+n$, denne anden af $p : pn$.

$p : pn$. Hvoraf sees, at da i Følge vores antagne pn er større end p, fordi Mn er større end M, og altsaa n større end 1, maa altid den middelbar meddeelte Hastighed være større end den umiddelbar meddeelte.

2) Man kan i at følge denne Undersøgnings-Maade ligeledes bevise, at om B bevægedes langsommere end A, alt i øvrigt som før; da blev den middelbar meddeelte Hastighed ligeledes altid større, end den umiddelbar meddeelte. Men vi ville ei opholde os ved Beviset, som enhver selv kan foretage sig efter det allerede giorte, fordi vi haste til det følgende.

3) Men eftertænker man, hvad vi sagde i det første Exempel §. 316. i den anden Tilfælde; at den umiddelbar meddeelte Hastighed blev anseelig større i B, end den før Slaget var i A, naar A var større end B, hvilket man og desuden let seer deraf, at naar B hviler og er mindre end A, bliver Hastigheden i B efter Slaget $\frac{2MH}{M+m}$, i hvilken Størrelse 2M efter vores antagne altid er større end $M+m$, følgelig og Hastigheden i B efter Slaget altid større end den var i A før Slaget. Eftertænker man, siger jeg, dette lidet noiere, da seer man let; at om man indbilder sig en Mængde Kugler, en mindre end den anden, og alle hvilende, som idelig at blive sat i Bevægelse med en middelbar ved Stødet i de foregaaende meddeelt Hastighed af den største Kugle i Rækken, som løber ind paa de andre, at da fra Kugle til Kugle Hastigheden anseelig maa formeres, og ved denne idelige Tilvext blive tilsidst ulige større i den mindste og sidstbevægede Kugle af dem alle, end i den første bevægende. Da

Da man af de foregaaende Regler kan, saaledes ideelig i det lige Stød bestemme Hastigheden fra Kugle til Kugle, saa forstaaes Maaden, hvorpaa disse Udregninger kan giores. Man haver udregnet Hastigheden for hundrede Kugler i Rad, som efter den Forhold af 1 : 2 fra den mindste til den største immer tage til i Storrelse, og fremdeles antaget, at den første og største stødte ind paa den anden med en Hastighed af 1, og at saa siden Stødet gik fra Kugle til Kugle: Udregningen giort, haver man fundet, at den sidste og mindste Kugle fik ved det igiennem alle de hvilende Kugler saaledes meddeelte Stød en Hastighed, som forholdt sig til Hastigheden i den første anstødende Kugle, der satte de andre i Bevægelse, = 233850000000 : 1 paa det nærmeste.

§. 318.

Disse ere de fornemmeste Poster, som fortiene Eftertanke i Tingenes Sammenstød: Da vi allerede derved længe have opholdt os, ville vi ei undersøge andre, efterdi enhver af det allerede sagte altid er i Stand til at slutte Resten: I sær da vi endnu have en Deel andet at sige, som henhorer til og staaer i Forening med det vi nu have afhandlet. Vi have nemlig endnu at betragte det saa kaldte Stødets Center; De anstødende elastiske Tings Tilbagespring, eller Lovene for Reflexionen; det eccentriske Stød, naar nemlig Slaget ei gaaer igiennem Tyngdens Center, saavelsom Reglerne for det skiove Stød, hvilke Poster vi igien skulle foretage i nestkommende Forelæsning.

Tolvte

Tolvte Tillæg.

Om de experimentale Beviis over Kræfterne af Stødet, og om det middelbare Stød.

§. 327.

I det foregaaende er blevet talt om de Forsøg, som ere blevne giorte over Stødet, ved at lade Kugler og andre Legemer falde ned i blode Materier, hvis Dele uden Hinder kunde vige for Slaget og af det blive sammentrykte. I disse Forsøg er ingen betydelig Vanskelighed, thi man kan af Hullernes Størrelse lige frem slutte til Kræfternes, som altid findes at være under sig som Massen multiplicert med Hastighedens Quadrat. De ældste Forsøg derimod, som til de levende Kræfters Undersøgning ere blevne anstillede, have været giort ved en Vegt af lige Arme. Paa den ene af dens Skaaler lagde man Tyngder, og forsøgte, fra hvad Heide at en vis given Tyngde maatte falde ned paa den anden Vegtskaal, før den første kunde løftes ganske lidet ved Slaget. Men da Inertiens Bevægelse i den hele Vegt her bør tages under Betragtning, for at udregne Stødets Virkning, saa kan man af de løftede Tyngders Størrelse ei slutte sig umiddelbar til den hele Virkning af de anstødende Kræfter. De smaa Vanskeligheder, som heri forekommie, ville vi i det følgende kortelig opløse.

Udregning af Stødets Virkninger, naar faldende Kugler støde an paa en Vegtskaal, belagt med blød Materie.

§. 328.

Instrumentet er forbedret, beskrevet og meget vel udregnet af S. Gravesande i hans *Phys. Elem. Math. Tom. I.* Beskrivningen er denne: (Taf. XIV. Fig. 1.) AB er Vegt-Bielken; Skaalen L er af Jern, den i M af Træe, rund og udhulet til en Tommes Dybde. I denne Hulning legges, naar Forsøgene gjøres, blødt Leer, hvis Overflade skrabes af med en Kniv, saa at den bliver ganske horizontal. Distancen BM er meer end tre Fod. Foden, Vegt-Bielken ligger paa, sættes, som Figuren viser, paa et Bord. I Pladen D er en Krog, udi hvilken Kuglen G henges. Saa snart dette er giort, sættes et Lod Q paa Skaalen L, saa at begge Skaaler staae i Ligevegt sammen. Siden legges endnu paa L den Tyngde P, som skal løftes ved Stødet af Kuglen G, naar Traaden klippes over. Men at L ikke skal synke synderlig ved den paalagte Tyngde P, holdes Armen, saasnart som Synkningen begynder af Jern-Armen *if*. Hvorfor og Ligevegten og begge Armenes horizontale Stilning, før Loddet *z* blev lagt paa, maa undersøges over en anden Fod, end den her tegnede.

Til Armen i *f* er loddet en tynd elastisk Plade *fg*, hvilken, naar den er løs, ligger, som Figuren viser, i *fg*. Ellers holdes den i *i* af en anden liden Plade, som henger fast ved Armen A, den kan derfor ikke forlade den Stilning *fi*, med mindre at Armen A løftes lidt i Veiret, da den ved sin Elasticite tager strax den Stilning *fg*. Hvoraf man under Forsøget kan vide, hvad heller at Armen A er blevet løftet eller ikke, saa og om den ikke er blevet løftet formeget, hvilket man erfarer derved, at naar Slaget om ganske lidet formindskes, Elastret *fg* da ikke springer ud fra *i*.

Alt giort, som sagt er, bestaae S. Gravesandes Forsøg udi følgende:

1) En

1) En Tyngde P af 4 Unzer blev løftet, som den burde, af Kuglen G, naar sammes Distance fra Leeret var $6\frac{7}{8}$ Tomme. Blev Høiden formindsket om $\frac{1}{4}$ Tomme, sprang Elastret aldrig les.

2) Var P 8 Unzer, blev ligeledes den Høide, som G faldt igiennem, for at løfte L, $14\frac{1}{8}$ Tomme.

3) Blev P tredobbelt, var Høiden $23\frac{1}{2}$ Tomme.

Hvortil, naar legges Dybderne af Hullerne i Leeret, bleve de hele Høider paa det allernærmeste. $7.\ 14\frac{5}{16}.\ 23\frac{3}{4}$.

§. 329.

For at giøre Udregningerne, maa agtes; at den hele Inertie af Vegten, saavelsom af det der ligger paa Skaalerne, skal bevæges ved Stødet af Kuglen G, foruden den Modstand af Tyngden, der egentlig skal løftes. Følgelig er Beskaffenheden her den selvsamme, som naar (Taf. XIV. Fig. 3.) et hvilende Pendul BAc, som kunde svinge omkring A, blev stødt af en Kugle d med et direkt Stød. Thi man seer strax, at Bc forestiller Vegt-Bielken; B og c Skaalernes Inertier; A Hvile-Punktet; d Kuglen, som støder an. B Tyngden, som skal løftes.

§. 330.

Resten er intet mindre end vanskeligt. Thi anseer man Stangen Bc først som uden Tyngde, behøves intet andet, end at flytte Inertien B om til C, efter §. 155. F. Kaldes cA, c. AB, d. Inertien i C, c; i B, D. Da bliver den omflyttede Inertie udi $C = G + \frac{Dd^2}{c^2} = \frac{Cc^2 + Dd^2}{c^2}$. Imellem denne saaledes omflyttede Inertie

og Kuglen d, hvis Masse vi ville kalde L, men Hastigheden h, skeer nu Slaget, som om Sammenstødet var simpelt. Følgelig, da efter Hypothesen cAB hviler før Slaget, bliver §. 301 F. fordi $H = 0$, og her handles om blede Legemer; den fælles Hastighed efter Slaget $= \frac{Bb.c^2}{Cc^2 + Dd^2 + dc^2}$.

§. 331.

Man seer let, at paa samme Maade Reglerne for det direkte Stød imellem to Pendler kunde bestemmes, som slaae an paa hverandre med et direkt Stød, i hvad for et Punkt at end dette skeer, og i hvor mange Tyngder at ethvert af dem end er sammensat af; siden, som nylig er blevet viist, intet andet behøves, for at bringe disse Tilfælde paa de forhen for Stødet givne Regler, end simpel hen at flytte samtlig Inertierne om til det Punkt, hvori Stødet skeer, og siden der at betragte det som et direkt og simpelt Stød imellem disse to saaledes fundne Inertier.

For Ex. Om aEF er et andet Pendul, bevægeligt om det Punkt a. Ere paa samme de to Inertier F og E begge i Bevægelse, eller om paa det er en alene, thi Opløsningen er lige let: kaldes Inertien i F, f; i E, e; er $Fa = f$, $Ea = e$, og Stødet i den horizontale Stilning direkt. Da bliver Inertien udi F, naar E er blevet omflyttet, $= F + \frac{Ee^2}{f^2} = \frac{Ff^2 + Ee^2}{f^2}$. Saa det direkte Stød saaledes skeer imellem de to Inertier $\frac{Cc^2 + Dd^2}{c^2}$ og $\frac{Ff^2 + Ee^2}{f^2}$. Kaldes nu, som før, Hastighederne H og h, og i Formularerne §. 301. sættes paa vedborlig Maade, $M = \frac{Cc^2 + Dd^2}{c^2}$, men

$m =$

$m = \frac{Ff^2 + Ee^2}{f^2}$; Eller, som naar Legemerne ere enten haarde eller blode, da disse samme Værdier af M og m i den fælles Hastighed $\frac{HM + mb}{M + m}$. Saa sees, at alle Tilfælde kunde paa denne Maade opløses. Men da af det allerede sagte, det som i ethvert enkelt Tilfælde bør gjøres, strax falder udi Øinene, saa ville vi ei forklare dette vidtløftigere, for at komme til Udregningen af den Gravesandske Machine.

§. 332.

Da i den Inertien i Axlen er betydelig, kan samme ei udelades af Regningen, hvilken her bliver den samme, som om Axlen af Pendulen i de nylig omtalte Tilfælde endnu ydermere blev anseet som tung. Imidlertid kommer det i Grunden dog ud paa et og det samme, thi Omflytningen af alle Punkterne i Axlen maa nødvendig skee paa samme Maade, som før. Gravesande anseer Igiennemsnittet af Axlen i sin Machine, som at bestaae (T. XIV. F. 2.) af et Parallelogram ABcD og af et Triangel AGD. Da i Parallelogrammet ABcD, FE ikke er uden af ubetydelig Størrelse, kunne Distancerne fra FE ansees som Distancerne fra E. Kaldes AB, a. Enhver Distance fra E som EH, x. ih, dx; og $BE = Ec = b$. Bliver Elementet $kghi = adx$, og $\int \frac{ax^2 dx}{b^2} = \frac{ax^3}{3b^2}$ bliver Momentet i alle Inertierne af AFEB omflyttede til c. Følgelig bliver samme af Parallelogrammet $ABCD = \frac{2ax^3}{3b^2}$, hvilken Sum er fuldstændig, naar $x = b$. Saa at derfor hele Momentet af Inertien ABCD udi c er $\frac{2}{3}ab$.

Angaaende Trianglet AFD, da gjøres Regningen ligeledes. Thi er $FG = c$, bliver $Ag = b - x$, $gm = \frac{cb - cx}{b}$, og Ele-

mentet $lmgk = \frac{cb-cx}{b}dx$. Hvoraf Momentet er, naar Omflytning skeer til c, $cb - cx.\left(\frac{x^2}{b^3}dx\right)$, hvis Sum bliver $= \frac{\frac{1}{3}cbx^3 - \frac{1}{4}cx^4}{b^3}$, og for det hele Triangel AGF, bliver Momentet $\frac{1}{12}cb$, fordi da $x = b$. Følgelig er samme for hele Inertien ADG omflyttet til $C = \frac{1}{6}cb$.

I Steden for Inertien af Vegtskaalerne og det de henge i, er det nok at tage deres Vegt, siden Tyngdens Centrer af dem alle kunne ansees, som at ligge udi B og A. Fig. 1. Kaldes da Tyngden eller Inertien af Vegtskaalen udi M og dens Tilbehør M; Af G, G; Af P, P; Af Q, Q; Af Vegtskaalen L og dens Tilbehør L, da bliver den hele udi B omflyttede Inertie, $\frac{2}{3}ab + \frac{1}{6}cb + L + P + Q + M$; eller om $L + P + Q + M = l$, og $\frac{2}{3}ab + \frac{1}{6}cb = f$, bliver den omflyttede Inertie $= l + f$. Er den Høide, igiennem hvilken G falder, h, og derfor Hastigheden af G i Slaget $\sqrt{h}$; da bliver den fælles Hastighed efter Slaget $\frac{G\sqrt{h}}{l+f+G}$ §. 301. F. hvilken derfor er og Hastigheden udi A, saaledes, som den er anført af Gravesande, og af ham er blevet bevist paa en anden Maade.

§. 333.

Saasnart som denne Hastighed er fundet, kan Høiden, igiennem hvilken C falder, sammenlignes med den bekiendte Høide op igiennem hvilken A stiger, før Elastret kan løsnes. Denne sidste Høide ville vi kalde H, og for at sammenligne begge de omtalte Høider, ville vi bestemme Bevægelsen af Svingets Center i Henseende til dem begge.

Fordi

Fordi Skaalen M holder Ligevegt med L og Q, saa tidt da som Vegten ansees som et svingende Pendul, bliver Pressionen i Tyngdens Center alene P, og Tyngdens Centers Moment P. Ac. Derfor bliver §. 156. 157. F. Svingets Centers Distance fra $c = \frac{(l+f+G).Bc^2}{P.BC} = \frac{(l+f+G).BC}{P}$. Men Hastighederne ere udi alle Punkter udi Bc proportionerte Distancerne fra c, følgelig bliver

$$Bc : \frac{(l+f+G).Bc}{P} = \frac{G\sqrt{b}}{l+f+G} : \frac{G\sqrt{b}.Bc}{P.Bc} = \frac{G\sqrt{b}}{P},$$

som er Hastigheden af Svingets Center, og da Høiderne, hvortil de adskillige Punkter udi Bc eller Ac stige, ere ligeledes Hastighederne proportionerte eller Distancerne fra c, saa bliver $\frac{G\sqrt{b}}{l+f+G} : \frac{G\sqrt{b}}{P} = H : \frac{H.(l+f+G)}{P}$, hvilket er den Heide, til hvilken Svingets Center stiger, imidlertid at A stiger til den Høide H.

Men da Svingets Centers Bevægelse er den frie Bevægelse af Tyngden, saa bliver den Høide, hvortil det kan stige, og altid proportionert Quadraten af Hastigheden. Saa man faaer $\frac{G^2 b}{P^2} = \frac{H.(l+f+G)}{P}$, og derfor $b = \frac{H.P.(l+f+g)}{G^2}$.

I den Gravesandske Machine er $H = \frac{21}{100}$ Tomme, FE : FG = 3 : 4. Den hele Vegt af Bielken 19 Unzer 2 Drachma 1 Skrupel, eller 463 Skrupler. Følgelig $f = 123\frac{1}{2}$ Skrupl. Tyngderne af Vegtskaalerne, naar Q og G legges til, nemlig $l+G-P$ beløbe 1320 Skrupl. G veier 67 Skrupl. Sættes disse Værdier i Ligheden $b = \frac{H.P.(l+f+G)}{G^2} = \frac{1443\frac{1}{2}+21P^2}{448900}$, og

siden

siden for P, først 4, siden 8, og endelig 12 Unzer. Da finder man for Høiden af Faldet i Kuglen G. 1) 6, 91. 2) 14, 68. 3) 23, 32. Hvilke Tall saa neie treffe ind med de foranførte Høider 7. $14\frac{5}{16}$. $23\frac{1}{4}$, saa den ringe Forskiel imellem begge er i dette Slags Udregninger at ansee som intet.

§. 334.

Fortsættelse om det middelbare Stød.

I det ovensagte §. 317. F. ere endnu to Poster værd at lægge Merke til. Den ene, hvorfor man, for at meddele ved det middelbare Stød en stor Bevægelse, vælger Materiens Størrelse i en idelig fortgaaende geometrisk Forhold, heller end i en anden. Den anden, hvorledes man lettest kan komme til Udregningen af de i denne §. omtalte Tal. Vi ville først foretage det første af disse to Stykker, og undersøge, hvad Forhold tre Ting, hvilke stode an paa hverandre, skulde have i Materie, paa det at A kunde meddele C den største Bevægelse ved Anstødet af B.

Kaldes da, som før, Materiernes Mængde i de to Ting A og B, M og m; deres Hastigheder H og h; Materiens Mængde i C derimod c, da faaes, om Hastighederne søges som før, i Følge §. 295, om B hviler, og paa B A støder an; Hastigheden i $B = \frac{2MH}{M+m}$, og naar C stødes af B med denne Hastighed, faaes for Hastigheden i denne sidste $\frac{4MmH}{M(m+c)+m(m+c)}$, hvoraf, som man veed efter de Methoder, hvorefter det største søges simpel hen, at Differentialen $= 0$. Og fordi da m her alene ansees som foranderlig, faaes $Mc = mm$, eller $M:m = m:c$, hvoraf følger, at saa tidt som man ved et middelbar Stød vil meddele en given hvilende

Ting

Ting C den største Hastighed, som paa denne Maade kan vedbringes den af A, da maa den Ting B, som A først skal støde an paa, for at denne igien kan bevæge C, være den mitlere geometrisk proportionelle imellem A og C.

§. 335.

Dette forudsat; saafremt da at man forestiller sig en heel Rekke af Kugler, hundrede i Tallet, som alle sættes ved middelbare Stød i Bevægelse af en eneste Kugle A, ved hvilken skeer Begyndelsen til Bevægelsen. Da om man sætter, at Materiernes Mængder i samtlig disse Kugler i Følge ved at begynde fra den mindste, ere $m.nm.n^2m.n^3m.+++n^lm$, l tilkiendegivende det hele Antal, og at det er m, som støder an: da finder man, efter de forrige Regler, om Hastigheden i $m = 1$, Hastigheden nu i de følgende at være,

i den anden, det er i den første a støder an paa $\frac{2}{n+1}$,

i den tredie $= = \frac{4}{(n+1)\,n+1)} = \frac{4}{(n+1)^2}$,

i den fierde $= = \frac{8}{(n+1)n+1)n+1)} = \frac{8}{(n+1)^3}$,

saa samtlig Hastighederne holde under sig denne Fortgang,

$$1.\ \frac{2}{(n+1)^0}\ \ \frac{4}{(n+1)^2}\ \ \frac{8}{(n+1)^3}\ \ \frac{16}{(n+1)^4}\ \text{o. s. v.}$$

Følgelig, naar Kuglerne ere hundrede, er $l = 99$; hvorfor man let finder, efter at Fortgangs-Loven saaledes er bekiendt, Hastigheden i denne sidste at være $\frac{2^{99}}{(n+1)^{99}}$. Man seer ligeledes, hvorledes Hastigheden i enhver af de mellemliggende kan findes, saa og at det er paa samme Maade, man bør giøre Udregningen for det Tilfælde, da Stødet begynder fra den største Kugle. Men da i alt dette er ingen Vanskelighed, og det er desuden nok at have viist Maaden at arbeide paa med den største Fordeel, ville vi derved ei opholde os.

Nittende Forelæsning.

Om Stødets Center. Om de anstødende Tings Tilbagespring. Om Stødets Virkning, naar det ei gaaer igiennem Tyngdens Center, og om det skieve Stød.

§. 319.

Beskaffenheden af Stødets Center forklares, og det beviises, at Svingets og Stødets Center er et og det samme Punkt.

Vi have i det forrige bestandig antaget, at Stødet gik igiennem Materiens eller Tyngdens Center. I denne Tilfælde, saa tidt Bevægelsen er frie, slaaer i det lige Stød Tingen an med alle sine Kræfter. Saafremt derimod at Bevægelsen er ufrie, som naar den Ting, der slaaer an, paa Pendulernes Maade svinger om et Punkt, da er Beskaffenheden en langt anden.

Er, for Exempel, AD en saadan Linie, (thi de andre Tilfælde kunne ved Materiernes Omflytning bringes til denne) paa hvilken (Taf. XII. Fig. 13.) i B, C, D hænge Tyngder af samme Navn, hvilke, ved at falde igiennem Buen Da vinde levende Kræfter; da er det klart, at om den i at komme til Vertikal-Linien, hvor den haver alle de ved Faldet vundne Kræfter samlede, støder an paa en Ting F, denne da faaer et større eller mindre Stød til, eftersom at Linien

med

med det hele Systeme af Tyngder slaaer an paa den til; enten i et Punkt der ligger høiere, eller i et der ligger lavere, fra Henge-Punktet A at regne. Thi i alle Anslag, et eneste undtagen, maa det skee, at Virkningen af Kræfterne ei gaaer heel og hulden ud paa at støde den Bevægelsen hindrende Ting F, men at en Deel af Kræfterne tillige anvendes paa at støde imod den Stift, der holder Pendulet i A; følgelig, da Kræfterne i Anstødet deels anvendes paa at skyde F fort, deels paa at støde A snart meer, snart mindre afsted, saa maa der nødvendig blive et Punkt E, i Henseende til hvilket disse imodsatte Virkninger blive saaledes beskafne, at om samme Punkt E slaaer an paa F, faaer denne Ting det hele Stød af samtlig de levende Kræfter i Pendulet, saa at Modstanden imod A er ingen. Dette Punkt i Pendulet er det vi kalde Stødets Center, fordi udi det hele Kraften af Stødet er samlet.

For at bestemme dette Punkt, som vi have til videre antaget at være udi E, maa man agte, at siden det skal giøre den samme Virkning, som om det hele System kunde slaae an frit og uhindret, maa Hastigheden i det være selvsamme, som den, der kunde vindes ved det frie Fald, det er Bevægelsen af E maa kunde skee uhindret af samtlig Inertierne og Tyngderne i D, C og B svingende om A. Thi bevæges E aldeles frit, slaaer det og aldeles frit an paa F, men dette Punkt E saaledes forstaaet bestemmes let ved en dobbelt Værdie af de levende Kræfter, af hvilke den ene er en Funktion af AE, som vi vilde kalde x. Til at finde denne dobbelte Værdie udfordres intet andet, end at antage, at Summen af de le-

vende Kræfter er den samme, hvad heller B, C og D bevæge sig i et sammenhængende System, eller om de bevæge sig hver for sig. §. 154.

Antager man det sidste, og Materiernes Mængder i D, C, B, kaldes D, C, B. Linierne DA, CA, BA, derimod d, c, b, da ere §. 79. 1. i det frie Fald igiennem Dd, Cc, Bb, Hastighederne i $D = \sqrt{d}$, i $C = \sqrt{c}$, i $B = \sqrt{b}$, og i dette Tilfælde Summen af de levende Kræfter $= Dd + Cc + Bb$, som er deres første Værdie.

Deres anden Værdie derimod tages af den tvungne Bevægelse, naar nemlig Inertierne svinge sammen i Systeme, og i den er det, at den søgte Storrelse x maa indvikles. Thi da nu ei Hastigheden er meer i D, $\sqrt{d}$; i C ei meer $\sqrt{c}$ o. s. v. men Hastighederne ere proportionerte d, c, b. Saa, for at finde de virkelige Hastigheder, hvormed de i dette Tilfælde bevæges, bør man ansee den frie naturlige og uhindrede Hastighed i $E = \sqrt{x}$, som den Unitet, hvoraf de andres virkelige Storrelse kan bestemmes. Thi da Hastigheden i E er til den i D som $x : d$, saa bliver $x : d = \sqrt{x} : \frac{d}{\sqrt{x}}$ den virkelige Hastighed i D, naar D svinger i Sammenhæng eller i ufrie Bevægelse. Ligeledes den virkelige Hastighed i $c = \frac{c}{\sqrt{x}}$ og den i $B = \frac{b}{\sqrt{x}}$, og Summen af de levende Kræfter i dette Tilfælde $\frac{Ccc + Bbb + Ddd}{x}$, derfor igien

$$\frac{Ccc + Bbb + Ddd}{x} = Dd + Cc + Bb$$

$$\frac{Ccc + Bbb + Ddd}{Dd + Cc + Bb} = x$$

Følgelig er Stødets Center et med Svingets Center, og det samme Beviis gielder for dem begge, siden i begge Bevægelsen, uagtet Hindringen af begge Delenes Sammenhæng, maa skee frie og uhindret.

§. 320.

Bevægelsens Beskaffenhed forklares, naar Ting støde an paa andre, som ei kunde vige.

Vi have i det foregaaende seet, at de elastiske Ting springe tilbage efter Stødet i adskillige Tilfælde, men vi have hidtil ikke betragtet andre, end de, i hvilke begge Tingene kunde vige for hverandre og vare bevægelige. Vi betragte derimod i det nærværende, hvad der maa skee, naar en Ting i Bevægelse støder an paa en anden, som ei lader sig bevæge. I dette Tilfælde seer man strax,

1) At naar en haard Ting støder perpendikulær an paa en anden ligedan, men ubevægelig, hører efter Slaget al Bevægelse op. Thi Hastigheden i den Ting, som støder an, bliver da efter Slaget §. 295. $f = \frac{HM - bm}{M + m}$, og fordi $b = 0$ $= \frac{HM}{M + m}$, men da m ei kan bevæges, er den at ansee som uendelig stor imod M, altsaa er $f = \frac{1}{\Omega} = 0$, det er; den Ting, som støder an, hviler efter Slaget. Det samme gielder om de blode Ting. Støder den derimod an paa en elastisk, da stødes den af denne Modstand i samme Perpendikel og med den

samme Fart tilbage; fordi de elastiske Ting tage deres Figur med den Kraft igien, hvormed de bleve sammentrykte.

2) Støder derimod en elastisk Ting perpendikulær an paa en anden elastisk, saa ingen Kræfter tabes i at sammentrykke Delene, som ei igien give sig ud, da springe de elastiske i samme Perperpendikel og med samme Kraft og Hastighed tilbage. Tabes derimod af Kræfterne paa før sagte Maade, springe de alene tilbage med en Hastighed, der er som Quadrat-Roden af Forskiellen imellem de Kræfter, hvormed de stødte an, og de, som bleve tabte i Sammenstødet.

§. 321.

De uelastiske Tings skieve Anstød forklares.

Saafremt derimod at en uelastisk Ting støder skiev an paa en anden ligeledes uelastisk, da om dens Hastighed efter CB opløses i to andre (Taf. XII. Fig. 14.) AC og CD saaledes, at CD = AB er perpendikulær paa det Plan FG, hvorpaa den Ting C støder an, og CA derimod er parallel med Planet; da om Planet er glat, glider den efter den Direktion bF parallel AC hen ad Planet med en Hastighed som BD, efter at Slaget er forbie, og den perpendikulære Kraft efter AB tabes ganske i Slaget. Er derimod Planet ujevnt, da ruller Tingen hen efter det, fordi den i alle Punkter af Planet finder da en Modstand, som driver den paa Siden.

For at forstaae dette fuldkommen, haver man alene nødig at agte, at de levende Kræfter kunne fuldkommen, som før er bleven sagt om Pressionerne, opløses i to andre Side-Kræfter, som ere perpendikulære paa hverandre; §. 279.

thi

thi $BC^2 = AB^2 + AC^2$, og saa snart som man er forvisset paa, at denne Oplosning i Henseende til dem kan gjores, flyder alt det ovrige af sig selv.

§. 322.

Hvad man forstager ved Anstods- og ved Reflexions-Vinkel.

Dersom (Taf. XIII. Fig. 1.) en Ting C støder an paa en anden ubevægelig i B, over den Linie FG, og springer, naar Slaget er forbie, tilbage efter den Linie BE, da, om AB er perpendikulær paa FG udi B, kaldes CBA, Anstods-Vinklen (Angulus Incidentiæ), og ABE, Reflexions-Vinklen.

§. 323.

Hvad Deel af den hele Kraft, som i det skieve Anstød yttrer sig.

Da den hele Kraft AB af den Ting, som støder an kan oplœses i de to Side-Kræfter AC og GD, §. 279. og Stødet skeer alene med den Kraft som AB, naar C støder skievt an i B paa FG, men derimod med den hele Kraft som CB, naar den støder lige eller perpendikulær an: Saa er det klart, at det lige eller perpendikulære Stød maa i Kraft forholde sig til det skieve som CB : AB, som den hele Sinus til Cosinus af Anstods-Vinklen.

§. 324.

De fuldkommen elastiske Ting springe under den samme Vinkel tilbage, under hvilken de støde

Dersom en fuldkommen elastisk Ting C støder an paa en anden fuldkommen elastisk og ubevægelig, efter den Linie FBG, da springer den efter Slaget saaledes tilbage, at Anstods-Vinklen CBA er lige saa stor som Reflexions-Vinklen ABE.

Thi

an paa en ubevægelig Modstand.

Thi om den hele Hastighed, hvormed C støder an paa B i B, er CB; da kan den inddeles efter §. 279 i AC og CG, men da AC bliver uforandret ved Sammenstødet, glider C med den, efter at Sammenstødet er forbie, hen efter Planet, og faaer derved en Hastighed BF i den Direktion BF = BG eller AC. Den Hastighed som BA derimod, der egentlig blev tabt for et Øieblik i Sammenstødet, meddeles igien derved, at de elastiske Ting igientager deres Figur, og i at igientage den, støde tilbage med en lige saa stor Kraft, som den, de bleve sammentrykte med.

Følgelig bevæges C efter Slaget igien efter de Direktioner AB og FB med Hastigheder, som AB og FB = AC, følgelig saa BE = CB og Vinklen EBA = CBA. Hvoraf følger, at om en Ting falder perpendikulær ind paa en anden elastisk og ubevægelig, springer den tilbage i sig selv.

§. 325.

Under hvad Vinkel en Ting bør støde an, for i Tilbagespringet at treffe en anden given Ting, som kan treffes.

Man bestemmer derfor overmaade let det Punkt B, i hvilket en Ting E bør støde an paa et elastisk Plan FG, for at det i at springe tilbage skal kunde treffe den Ting i H. Thi da E og H ere givne i Hensende til Linien FG, ere og EF = D og HI = d givne, saavelsom FI = l, da nu efter §. 324 EBF og HBI ere ligedanne Triangler, saa bliver, om BI = x, FB = $l - x$, og

$$D : l - x = d : x, \text{ følgelig } x = \frac{dl}{D+d}.$$

§. 326.

Hvoraf den ufuldkomne Elasticitet kan maales.

Saafremt at af den Kraft AB noget tabes, hvilket altid skeer, om de elastiske Ting ei fuldkommen igientage deres Figur,

gur, da er det klart, at Trianglet BKL ei bliver som Trianglet ABC, naar for Ex. den Deel BK alene igien meddeles af den Kraft BA; følgelig bliver da heller ikke Reflexions-Vinklen saa stor som Anstøds-Vinklen. Disse Love bestemme Bevægelsen for Reflexionen, og man kan deraf maale den ufuldkomne Elasticitet. Men al Reflexion kommer ikke af Tingenes Stød, skiønt det her ei er Stedet at tale om dets andre Aarsager.

§. 327.

Vi have fremdeles at tale om det skieve Stød, det nemlig, hvori Slaget vel gaaer igiennem Centra af Kuglerne, men det hele Slag ikke gaaer i Direktion af den Linie, der forener Centra, hvilken, efter hvad man veed af Geometrien, staaer perpendikulær paa Kuglernes fælles Rore-Punkt. Man kan her, ligesom i det lige Sammenstød, betragte en Mængde Tilfælde, hvoraf vi ville igiennemlobe de fornemmeste. Men forud maa agtes, at det skieve Stød, naar dets Direktion gaaer igiennem et Center alene i Kuglerne, altid meget let ved Kræfternes Oplosning i to andre retvinklede Kræfter bringes paa Reglerne af det lige Sammenstød, saa man ikke behover uden de forhen givne Regler, og den nylig omtalte Kræfternes Oplosning, for at udvikle alle Tilfælde af to Kuglers skieve Sammenstød, hvilket vi ville nærmere oplyse ved følgende Exempler.

Beskaffenheden af det skieve Stød, naar to Kugler slaaer an paa hverandre, som begge ere bevægelige.

§. 328.

Første Tilfælde, naar de begge ere elastiske, og den ene hviler for Slaget.

Dersom (Taf. XIII. Fig. 2.) F er en elastisk Kugle, som hviler; A en anden elastisk, som støder an paa den efter en Direktion AB, med Hastighed som AB. Da kan §. 279 den Kraft, eller om man vil, den Hastighed efter AB oplöses udi to andre med den ligegyldige AD og DB, hvoraf DB staaer perpendikulær paa Kuglernes Rore-Punkt, eller naar A kommer i B, gaaer igiennem deres Centrer B og F. Den gior da et lige Sammenstød, saa man kan beregne dette Tilfælde efter de forrige Regler; bestemme af den givne Vinkel ABD og af AB, Hastigheden DB og af den igien Hastigheden, hvormed Kuglen F skal bevægelsig efter Slaget i den Linie FG.

Hvad Hastigheden AD henefter BI angaaer, da seer man, at den ved Sammenstødet ei forandres, saa A bevæger sig efter Slaget i B med en Hastighed BI = DA hen efter BI. Farten af Kuglen F bliver i dette Tilfælde altid efter FG.

§. 329.

I samme skilles tre andre Tilfælde fra hinanden.

Hvad sig derimod angaaer Bevægelsen af Kuglen A efter Slaget, da kunne tre Tilfælde skilles fra hverandre.

1) Om B og F ere lige store, da bliver hele Hastigheden efter DB meddelt den Kugle F, §. 297. 3. saa at i A denne Hastighed ved Slaget plat tabes. Den bevæger sig derfor efter Sammenstødet alene med den Hastighed BI, saa Kuglerne B og F i dette Tilfælde altid bevæge sig fra hverandre i Direktioner BG og BI, der giore en ret Vinkel med hinanden.

2) Ere

2) Ere derimod Materiernes Storrelser i de to sammenstødende Kugler A og F ulige, da enten springer den anstødende igien tilbage, eller gaaer fort efter samme Drive-Linie som F. Er i den første Tilfælde, da Kuglen springer tilbage, Hastigheden, som altid kan bestemmes efter §. 297, = LB, da bliver i A Hastigheden og Bevægelsen efter Slaget af Storrelse og Direktion som BK, og Kuglerne A og F løbe efter Slaget fra hinanden under den stumpe Vinkel GBK.

3) Saafremt derimod, at A efter Slaget gaaer i samme Drive-Linie, som F, og dens Hastighed antages at være som BG, da bliver Direktionen af A efter Slaget BH, saa Kuglerne A og F gaae efter at det er forbie under en spids Vinkel fra hverandre.

§. 330.

Andet Tilfælde, naar to haarde Ting støde sammen og bevæges imod hverandre.

Dersom begge Kuglerne A og F bevæges imod hverandre, og ere haarde eller uelastiske, da er det klart, (F. 3. No. 1 og 2) at om A bevæger sig til Sammenstødet med den Hastighed AB, F derimod med den Hastighed F*c*, da om AB inddeles i de to Side-Bevægelser AC og AD, FC ligeledes i de to FI og F*h*, (til FI svarer No. 2. F*g*) skeer Sammenstødet alene af de Kræfter, der ere som CB og *hc*, og det saaledes, at begge Tingene efter Slaget gaae, i Henseende til den i begge overblevne Hastighed, efter en Direktion i denne Perpendikel efter B*e* for Exempel. Side-Bevægelserne derimod DB og *h*F gaae uforandrede fort efter B*f* og *ck*. Er da den fælles Hastighed efter Slaget B*i* = *ee*. Side-Hastighederne, som ei

lide af Slaget, B*f* og *c*K, da om Parallelogrammerne gjøres over disse Hastigheder fuldstændige, bliver B*l* i Henseende til Direktion, Hastighed og Kræfter, den Bevægelse, som A faaer efter Slaget, og *cd* ligeledes den Direktion F faaer efter Slaget, hvorved kan i Almindelighed agtes

1) At om CB = B*h*, gaae A og C fort efter Slaget efter parallele Direktioner B*f* og *ck*.

2) Bevæge de sig imod hverandre før Slaget, gaae de fra hverandre, som i Fig. 3. No. 1, og den relative Hastighed, som i dette Tilfælde foraarsager Slaget, er C*e*.

3) Bevæge de sig for Slaget med hverandre, bliver Bevægelsen efter Stødet, som i Fig. 3. No. 2, og den relative Bevægelse, som haver foraarsaget Slaget, er C*h*.

4) Dersom man deler denne relative Hastighed i forkeert Forhold af Materiernes Mængder udi A og F, hvilket vi ville sætte var giort (Taf. XIII. Fig. 3. No. 2.) udi S; da bliver BS den fælles Hastighed efter Slaget; thi kaldes CB, H; *ch*, *h*, Materiens Mængde udi A, M, udi F, *m*, og CS, *x*; da faaes i den Tilfælde, naar Tingene før Slaget bevæges efter en Direktion, $m : M = x : H - h - x$, og altsaa $CS = x = \frac{mH - mh}{M + m}$, og $SB = H - \frac{mH + mh}{M + m} = \frac{HM + mh}{M + m}$, hvilket just er i Følge §. 293 den fælles Hastighed efter Slaget. Man kan paa selvsamme Maade udføre Beviset for den Tilfælde, da de bevæges imod hverandre.

5) Følge-

5) Følgelig, naar denne Hastighed er given, og ved Kræfternes Parallelogram, hvori Vinklen ABD altid bør være bekiendt, BD er ligeledes given, saa kunne Direktionerne efter Slaget, saavelsom Størrelserne af Hastighederne *cd* og B*l* altid fuldkommen bestemmes.

§. 331.

Det samme undersøges i de elastiske Tings Bevægelse og Sammenstød.

Hvad de elastiske Tings skieve Sammenstød angaaer, da kan det bestemmes fuldkommen paa selvsamme Maade, alene at man agter, at de efter Sammenstødet og kunne i Henseende til den perpendikulære Hastighed i den Linie, der gaaer igiennem deres Centra, og følgelig igiennem Sammenstøds-Punktet, springe fra hverandre.

Man kan forestille sig to almindelige Tilfælde: Den ene som (Taf. XIII. Fig. 4. No. 1.) naar de efter Slaget springe med en Hastighed efter Perpendiklen DE*l* fra hverandre; den anden, naar de i Henseende til den samme Hastighed efter Slaget bevæges begge med hinanden (Taf. XIII. Fig. 4. No. 2.). Man seer let, at i begge, om A og F bevæge sig imod hverandre med Hastigheder, som AB og FI, saa de kunne paa en Tid komme til I; da om AB inddeles i AC og AD, FI ligeledes i FG og FH, da skeer Stødet alene med de Kræfter, som DB og IH. Ere Hastighederne efter Slaget BE og I*l*, fordi da Hastighederne BC og GI intet lide ved Slaget; om B*g* tages = CB, GI = I*h*, og Parallelogrammerne E*fg*B og I*h*K*l* gjøres fuldstændige, da bliver B*f* Hastigheden og Drive-Linien af A efter Slaget, IK Hastigheden og Drive-Linien af F efter Slaget.

§. 332.

§. 332.

Vil man giøre den virkelige Bestemmelse af disse Hastigheder, da kunne Hastighederne Be og I/ findes efter §. 295. Men man kan og paa samme Maade som for iagttage, at dersom den relative Hastighed efter Perpendiklen D/, som er DH, deles som for §. 330. 4. i S i forkeert Forhold af Materiernes Mængder i A og F, at da SB er den fælles Hastighed efter Perpendiklen D/ i begge Tingene A og F, og følgelig om DB = H og HI = h = $\frac{MH \pm mh}{M+m}$, hvor man og videre saae at DS var = $\frac{mH \mp mh}{M+m}$. Saa kan og altid Hastigheden i Perpendiklen D/ efter Stødet udi I bestemmes ved at tage SB — DS = BE og Hastigheden i F efter Stødet, ved at tage SH + SB = I/.

Thi giør man Udregningen efter disse Bestemmelser, da kommer man til de §. 295 forhen givne Værdier for Hastigheden. Vi ville her alene vise det for den Tilfælde, (Taf. XIII. Fig. 4. No. 2.) da A og F for Slaget kunne ansees i Henseende til Bevægelsen efter Perpendiklen D/ at gaae efter en Direktion. Saa tidt som dette er, da bliver SB — DS = $\frac{MH + mh}{M+m} - \frac{mH - mh}{M+m} = \frac{2mh + (M-m)H}{M+m}$, som efter §. 295 er Hastigheden efter Perpendiklen D/ efter Slaget udi A.

Ligeledes bliver Hastigheden efter Perpendiklen D/ udi F, naar Slaget er forbie, SH + SB = H — h — $\frac{mH - mh}{M+m}$ + $\frac{MH + mh}{M+m} = \frac{2MH + (m-M)h}{M+m}$, som efter §. 295 er Hastigheden udi F efter Slaget.

Man

Man seer let, hvorledes dette ligeledes kan vises for det Tilfælde, da A og F gaae imod hverandre for Slaget i Henseende til Bevægelsen efter Perpendiklen D*l*.

§. 333.

Tyngdens Centers retlinede Bevægelse forandres heller ikke ved disse Slags Sammenstød.

Videre forstaaes let, at ligesom i det lige Stød Inertiens Center gik bestandig fort, Stødet uagtet, saavel for som efter det, i en lige Linie med en ensdan Bevægelse, saa maa det og gaae ligeledes fort i alle Henseende i det skiede Stød. Thi gaae de to Ting A og F (Taf. XIII. Fig. 5.) med en parallel og ensdan Bevægelse fort efter A*b* og FG, saaledes at i samme Tid Hastigheden udi A er A*a*, og i F, F*f*, da maa og, om G antages at være Inertiens Center af A og F*b* saaledes, at F : A = AG : GF, dette Center i Henseende til denne Bevægelse bestandig gaae fort med en ensdan Bevægelse som C*c*, i lige Tider; thi trekkes AF, *af* og *bg* ud til E, da bliver bestandig i lige Tider A*a*: *ab* og C*c*: *cd* og F*f*: *fg* i den samme bestandige Forhold.

For saavidt derfor, (hvad heller det er i de haarde eller i de elastiske Tings Bevægelse,) de bevægede Ting gaae med en Side-Hastighed, som A*a*, F*f*, der ei forandres i Stødet, (Taf. XIII. Fig. 4.) for saavidt er det klart, at Tyngdens Centers Bevægelse ei forandres. Men vi have forhen seet, at denne Bevægelse heller ei forandres, for saavidt som de efter Perpendiklen D*l* i lige Sammenstød slaae an paa hverandre. Følgelig forandres Tyngdens Centers Bevægelse ved ingen af Delene, men drives virkelig (Taf. XIII. Fig. 5.)

af

af to Kræfter en efter *Gc*, som foraarsages af den forstomtalte Bevægelse paa Siden, efter hvilken Tingene bevæge sig frit uden Sammenstød; en anden efter *hc* eller GI, som haver den foromtalte Direktion efter Perpendiklen, i hvilken det lige Stød skeer, og denne Bevægelse *Gc* er den i det lige Stød foromtalte fælles Bevægelse. Af disse begge Kræfter drives Tyngdens Center G efter Direktion af en ret Linie *Gh*, i hvilken det bestandig gaaer fort med en ensdan Bevægelse.

§. 334.

I hvor mange Legemer at der end under sig støde sammen.

Og man seer fremdeles, at i hvor mange Ting der i et heelt Systeme af sammenstodende Legemer end komme sammen, maa dog Bevægelserne alle med hinanden altid kunde bringes til de foromtalte, saa at derfor i Almindelighed, i hvor mange Ting der end stode sammen, Tyngdens eller Inertiens Centers ensdanne Bevægelse i ret Linie deraf dog aldrig forstyrres eller forandres.

§. 335.

Beskaffenheden af det eccentriske Stød.

Vi have endnu kortelig at betragte Virkningen af det eccentriske Stod, eller af den Tilfælde i Tingenes Sammenkomst imod hverandre og det deraf folgende Slag, naar Stodet i et heelt System af sammenhængende Legemer ei gaaer igiennem Tyngdens Center, men igiennem hvad for helst et andet Punkt man vil, og efter hvad Direktion det skal være uden for dette Center. Da vi have seet §. 155, at alle Inertier kunne efter den der givne Regel flyttes om fra alle Punkter,

ter, i hvilke de betragtes at henge rundt omkring, til hvad andre man selv lyster og behager, saa at under de givne Betingninger Virkningen af Kræfterne paa det hele dog bliver for og siden den samme. Kan man derfor allerforst antage, at i hvad for et Legeme man end foretog sig, for i Henseende til det at anstille de foregaaende Betragtninger, da kunne (en saadan Omflytning af Inertierne forst giort) alle de smaa Dele det hele Legeme over ansees som sammentrykte i et eneste Plan, der gik igiennem alle Inertiernes fælles Tyngders Center. Saa man da i Steden for det hele Legeme kan tage et eneste saadant Plan i Betragtning, i hvilket nemlig den samlede Inerties Modstand er den samme, som forhen i det hele foresatte Legeme.

§. 336.

Inertiernes forste Bevægelses Beskaffenhed.

Er da (Taf. XIII. Fig. 6.) ABDECK et saadant Plan, hvilket vi igien (om Flytningerne af Inertien betragtede at være giort som for, eller og at være, som for er bleven sagt, simpel hen muelige, for at kunde giores) ville betragte som umaterielt, undtagen i de Punkter A, B, D, E, C, K, hvis Tyngdes Center vi antage at være udi M, imidlertid at vi ansee dem selv som at henge fast ved de umaterielle Linier AM, DM, EM, KM, o.s.v. Forestiller HQ Direktionen af Kraften, som skal drive dette Plan, da siden dens Virkning (hvad heller den er Trykning eller Stød) ei gaaer igiennem M, er det klart, at samtlig Inertierne faae i forste Øieblik, i Henseende til deres ulige Afstand fra Q,

ulige Anstød eller en ulige Drift til Bevægelse, saa at de staae ulige imod, og søge først at bevæge sig fra hverandre efter rette Linier; men da Systemets Sammenhæng deri er hinderlig, begynde de at bevæge sig i Cirkulær-Bevægelse, A for Ex. efter A*m*, D efter D*f*, E efter E*g*, K efter K*n*, o. s. v. Centret til disse Vinkel-Bevægelser kan tages som i L. Følgelig da disse Centrifugal-Kræfter i alle Punkterne (om BMC er en Diameter af Tyngden) drive BMC omkring paa begge Sider, saa er det klart, at det eccentriske Stød maa foraarsage strax fra første Øieblik af, at det hele System begynder at rulle om i Cirkel-Bevægelse, og Omrulningen maa skee om Tyngdens Center, siden i Henseende til det samtlig Momenter af alle Centrifugal-Kræfterne rundt om maa staae i Ligevægt med hverandre. (*)

§. 337.

(*) For at forstaae Omveltnings-Bevægelsen saa meget desto tydeligere, behøves ikke at betragte samtlig Inertierne som omflyttede til et Punkt, man kan betragte ethvert Element af Inertien for sig som i Bevægelse, for at see, hvad Forandring det foraarsager i Henseende til Omveltnings-Axlen; i Henseende til hvilken man i sær maa agte, at den ikke under den hele Inerties Omveltning altid bliver uforanderlig, men at den kan forandres og ligge snart saa, snart anderledes i det omrullende Legeme, hvoraf og alle de Vanskeligheder reise sig, som i dette Slags Spørsmaal kunde forekomme. Men for at legge her de første Grunde til denne Theorie, ville vi alene

§. 337.

Følgelig bliver ved deslige Stød uden for Centret altid en Omveltning til om Tyngdens Center og om en ubevægelig Axel, Ved det excentriske Stød foraarsages en Om-

alene forklare, hvorpaa det i Almindelighed kommer an, at Bevægelsen skal kunde skee om en altid ubevægelig Axel. Da vi i denne Henseende agte.

1) At saa tidt som centrifugale Kræfter opvækkes af hvad Aarsag det end og er, være sig af Stødet eller andre virkende Kræfter, i et Legeme, hvoraf det Punkt A (T. XIII. F. 7.) kan ansees som et Element; da begynder altid en Bevægelse omkring en vis Linie, som AI, hvilken vi derfor kalde Axlen af Omveltningen. Thi betragtes AI som at staae perpendikulær paa et Plan, for Ex. paa Planet af den Tafle, Figuren er trokken paa, og i det Punkt C, at skiere det igiennem. Om videre fra hvad for et Punkt af Inertien, som man vil, betragtes, som at være kastet en Linie ned perpendikulær paa AI, hvilken vi ville kalde p, og Hastigheden i det antagne Punkt kaldes v, da er Hastigheden i Vinkel-Bevægelsen $= \frac{v}{p}$, men den Centrifugal-Kraft, som foraarsages af Hastigheden $v = \frac{v^2}{p} A$, om Elementet af Inertien $= A$. Kaldes et andet Element af Inertien ligeledes a. Distancen i dette nye Punkt fra Omveltnings-Axlen AI, x; da findes let Hastigheden til a, siden i Følge Hypothesen det omveltende Legeme er et fast Legeme, og alle Delenes Hastigheder ere derfor proportionerte Distancerne fra Axlen. Saa alene at man veed,

veltning i Legemet omkring Tyngdens Center. Og dette Center faaer

Axel, saa længe som at Centrifugal-Kræfterne bestandig staae i Ligevegt med hverandre. Men man seer desuden let, at Tyngdens Center maa faae en fortgaaende Bevægelse af Slaget

hvad Hastigheden er i et Punkt som A, veed man den derved og udi alle de øvrige, naar deres Distancer fra Axlen ere givne.

Saaledes bliver $p : x = v : \frac{xv}{p}$, hvilket er Hastigheden udi a, hvoraf følger §. 173 Forel. at Central-Kraften bliver $\frac{xv^2}{p^2}a$. Men denne Kraft trykker Linien AI efter en perpendikulær Direktion, og alle de øvrige Centrifugal-Kræfter trykke den ligeledes, saa at man deraf seer, at den Linie, omkring hvilken at Omveltningen skeer, altid maa bevæges enten efter den ene eller den anden Side af Planet HD, eller i sammensat Bevægelse imod flere af dens Sider tillige, om samtlig Momenter af disse Central-Kræfter regnede i Henseende til et Punkt som C, ikke paa alle dets Sider ere lige store. Ere alle disse Momenter derimod lige store i alle Henseende, da faaer Axlen hverken en Progressiv Bevægelse, ei heller nogen Omveltnings-Bevægelse.

2) Begge Dele sees endnu tydeligere, dersom man opløser Centrifugal-Kraften af et, hvor man vil, for Ex. udi a frivillig antaget Punkt i to andre Kræfter, og til den Ende forestiller sig paa det Plan, paa hvilket at Axlen AI staaer perpendikulær, to andre Linier HD og FG saaledes, at de ere perpendikulære under sig, og at Omveltnings-Axlen AI staaer perpendikulær

get efter en ret Linie. Thi betragtes atter igien samtlig Inertierne udi D, E, K og A, paa den foromtalte Maade at være blevne samlede udi det Punkt Q, hvorpaa HQ virker,

desuden en fortgaaende Bevægelse i ret Linie.

dikulær paa dem begge udi C, saavel som paa det hele Plan, over hvilket at de ere trokne. Kastes fra *a* en Perpendikel *a*B ned paa det Plan, Axlen er perpendikulær paa. Videre, om fra B trekkes BD perpendikulær ned paa CD, da forestiller BD den Deel af ethvert Element i Inertien dets Central-Kraft, som trykker Axlen immerfort hen efter Direktionen FG; og ligeledes CD den Deel af Centrifugal-Kraften, som trykker Axlen hen efter Direktion af HD. Saa at om disse Centrifugal-Kræfter i sig betragtede ikke hæve hver for sig hverandre op, da saaer Omveltnings-Axlen AI nødvendig en Progressiv-Bevægelse, enten hen efter HD, eller efter FG.

3) Dersom $CD = z$, $BD = y$, da er $CB = \sqrt{zz + yy} = x$, saa at den hele Centrifugal-Kraft i det Punkt *a* bliver derfor $\frac{v^2 \cdot \sqrt{zz + yy}}{p^2} a$, som kan forestilles ved BC, hvorfor Kraften hen efter BD bliver $\frac{yv^2}{p^2} a$, og den hen efter CD $= \frac{zv^2}{p^2} a$. Saafremt derfor at ingen Progressiv-Bevægelse af Axlen hen efter ECG skal have Sted, maa nødvendig alle Centrifugal-Kræfterne, som $\frac{yv^2}{p^2} a$ hæve hverandre op eller $\int \frac{yv^2}{pp} a = 0$, det er $\int ya = 0$, fordi $\frac{v^2}{pp}$ er her at ansee som en bestandig Størrelse.

Lige-

saa sees let, at Stødet da maa gaae igiennem Tyngdens, eller hvilket her idelig er os det samme, Inertiens Center, og at man da kan betragte Forandringen af Anstødet paa samme

Fod

Ligeledes sees, at om ingen Progressiv- eller fortgaaende Bevægelse i Axlen skal have Sted hen efter HCD, da maa $\int zA = 0$.

4) Men disse to Conditioner eller Betingninger finde sig ind af sig selv, naar det Punkt C er Tyngdens Center; thi de indeholde da ikke andet paa alle Sider end Momenterne af Inertierne, i Henseende til det beregnede, hvilke man veed af §. 128 F. at ere omkring dette Punkt lige store i ethvert Systeme, hvor Tyngden er Inertien proportionert. Saa deraf sees.

At saa tidt som et Legeme ruller om en Axel, i Henseende paa hvilken Centrifugal-Kræfterne ingen fortgaaende Bevægelse foraarsage, da gaaer denne Axel altid igiennem Systemets eller Legemets Tyngdes Center.

5) Men uagtet at Central-Kræfterne betragtede saaledes, som at ophæve hverandre, ikke kunne give en Axel, der gaaer igiennem Tyngdens Center, en Progressiv-Bevægelse, følger deraf dog endnu ikke, at de jo kunne beie den ned imod Siderne af det Plan, hvorpaa vi betragtede den allerførst som at staae perpendikulær. Thi til det første udfordres alene, at Kræfterne selv ere i Ligevegt, fordi at alle Punkterne have i Henseende til den fortgaaende Bevægelse en og den samme Hastighed. I Henseende til det sidste derimod, at Axlen ei

skal

Fod som før, som om nemlig i et lige Stød Anslag skede paa en Kugle, saa at Stødet gik igiennem dens Center. Følgelig blev efter Stødet nødvendig en Hastighed til, hvormed Tyngdens Center gik fort i ret Linie, hvorimod Resten af den i Stødet meddeelte Hastighed bliver anvendt til, at alle Delene rulle om Tyngdens Center med Hastigheder, som ere i lige Forhold med deres Distancer fra samme Center.

§. 338.

---

skal bøies, behøves desuden, at Kræfterne hæve hverandre op i Henseende til deres Momenter. For tydelig at see, at det sidste ikke følger af det første, behøves intet andet end at opløse det hele Moment af Centrifugal-Kraften i to andre, som før; da Momentet af denne Kraft regnet fra Tyngdens Center af de nylig anførte Aarsager beløber sig til $\frac{v^2\sqrt{zz+y^2}}{pp}ax$, fordi BC $= x$ i Følge Konstruktionen. Derfor bliver atter igien, som før, Momentet heneftet CD $= \frac{v^2}{p^2}azx$ i enhver elementær Masse, og Momentet heneftet BD $= \frac{v^2}{p^2}ayx$. Hvoraf man seer uden Meie, at om Axlen af Central-Kræfternes ulige Drift ikke skal bøie sig ned imod Planet, da maa $\int\frac{v^2}{p^2}ayx$ være $= 0$, og ligeledes $\int\frac{v^2}{p^2}azx = 0$, eller fordi $\frac{v^2}{p^2}$ er her en bestandig Størrelse, maa være $\int ayz = 0$, og $\int azx = 0$, men det forstaaer sig af sig selv, at fordi $\int ay = 0$, og $\int az = 0$, ere ikke $\int ayx = 0$ og $\int azx = 0$.

6) Dersom begge disse Betingninger have Sted, og ingen Forandring udvortes fra videre forurolliger Bevægelsen, bliver Omveltnin-

§. 338.

Disse to Bevægelser hindre hverandre ikke.

Man seer i øvrigt, at disse to Hastigheder, den ene hvormed Tyngdens Center gaaer bestandig fort i ensdan Bevægelse, den anden, hvormed Delene rulle om Tyngdens Center ligedan i ensdan Bevægelse, man seer, siger jeg, at disse to Hastigheder altid kunde bestaae sammen i en og den samme Ting, uden at den ene forvirres, det er, hindres eller hielpes af den anden. Man har, for at forestille sig dette endnu klarere og uden alle foregaaende mekaniske Grunde, alene nødig at betragte den Ting, der har en omrullende Bevægelse om en Axel, der gaaer igiennem Tyngdens Center, som lagt paa et Bret, der gik fort med Tyngdens Centers Bevægelse i ret Linie, fremdeles at den paa samme Bret stod vertikal, og rullede om sin Axel uden al Hinder.

Tret-

veltningen altid ved omkring den samme i alle Henseende ubevægelige Axel. Saafremt derimod at ved Stedet en Forandring skeer, kan Bevægelsen fastsættes paa den Maade, som vi nærmere skulle forklare i nestfølgende Tillæg. Saafremt derimod at hastiggierende og idelig virkende Kræfter komme til og bevæge Inertien, kan en Mængde Forandringer i Axlens Bevægelse finde Sted, om man ei kan anse Middel-Direktionen af samtlig disse Kræfter som at falde over Tyngdens eller Inertiens Center, for alene at drive den fort med en fortgaaende Bevægelse. Disse sidste Tilfælde angaaende bør efterslaaes *Hist. de l'Acad. de Berlin. An.* 1740. *p.* 185. *decouverte d'un Nouv. Princ. de Mecan. par Mr. Euler.*

Trettende Tillæg.

Om Tingenes Sammenstød, betragtet for saavidt, som Naturen i disse Handlinger altid iagttager Reglerne for det mindste Tab af sine Kræfter.

§. 336.

Iblant de adskillige Regler, som i Mekanik kunne hielpe til de vigtige og vanskelige Spørsmaals Oplosning, haver man i adskillige Tilfælde søgt at betiene sig af en, som ikke egentlig stammer ned fra mekaniske, men fra metaphysiske Betragtninger, og som bestaaer deri; at Naturen i al Bevægelse og i alle sine Virkninger, saa meget som mueligt, gior det mindste Tab af Kræfter og Virkning og alt for Resten lige, den mindste Forandring, for at komme til sin Hensigt. Da alle metaphysiske Grunde i Mekanik bør ansees som fremmede, saa er det heller ikke uden med stor Forsigtighed, at man deraf bør betiene sig. Imidlertid kan denne Tanke, ret brugt, i en Mængde Tilfælde hielpe til let at udvikle ellers heist vanskelige Udregninger, og vi ville vise, hvorledes Naturen retter sig efter denne Regel i alt, hvad der angaaer Sammenstødet.

At Naturen i sine Handlinger iagttager det mindste Tab af sine Kræfter er et indirekt Princip i Mekanik, men som dog i mange Tilfælde kan bruges.

§. 337.

Vi have for seet §. 287. F. og Anm. p. 527 at Stødet forrettes saaledes af Naturen, saa de Kræfter, der staae Fare for under denne Forretning

Det iagttages virkelig i Tingenes Sammenstød.

ning at forgaae, virkelig ere de mindste. Jeg siger, som staae Fare for at forgaae, fordi de ved Figurens Sammentrykning virkelig tabe sig i de haarde og blede Ting bestandig, men ikke uden for et Øieblik i de elastiske Tings Sammenstød. Dette mindste seer Naturen egentlig paa i Stødet, nemlig paa det mindste Tab af sine levende Kræfter, og deraf flyder, som vi før have seet, at disse Kræfter virke i Sammenstedet som Pressioner, eller at de levende Kræfter, saasnart der handles om deres Ligevegt i adskillige Ting, bør vurderes efter samme Maal som de døde.

§. 338.

Ligeledes paa en vis Maade i det eccentriske Stød.

Denne samme Naturens Huusholdning altid at arbeide saa at sige med mindst Bekostning giver Anledning til at afhandle Virkningerne af det eccentriske Sted, og at bestemme dets Love paa en mangfoldig let Maade, nemlig: Vi have i Forelæsningen i Almindelighed viist, at det eccentriske Støds Opløsning kommer an paa samtlig Inertiernes Omflytning, men til denne Sags Iverksættelse finder man ved at slutte paa ovensagte Maade et overmaade let Hielpe-Middel: Alene at man forud iagttager, at vi her betragte alene det Tilfælde af eccentrisk Stød, da Inertierne antages som at være elastiske, uden Tyngde, og i hvilket, at Stedets Direktion desuden gaaer igiennem det Plan, udi hvilket er Inertiens Center, imidlertid at det tillige selv er perpendikulær paa Omveltnings Axlen; paa det at dennes Stilning ved Stødet ikke skal forandres, om de anstødende Legemer enten begge eller et af dem alene velter sig om en Axel, før Stødet skeer. Thi i dette Tilfælde seer man let af vores forhen sagte i Anmerkningen til §. 336. No. 6. at Centrifugal-Kræfterne da intet Moment saae i

Henseende

Henseende til Tyngdens Center. Med et Ord, vi betragte alene det Tilfælde, da Omveltnings-Axlen ved Stødet ei forandres.

Nemlig (*), saasnart som Stødet efter HQ, (T. XIII. F. 6.) hvilket vi i første Øieblik ville ansee som en simpel Pression, og sætte perpendikulær paa den Linie BMC, der gaaer igiennem Tyngdens Center; saasnart som dette Stød begynder at virke paa det hele Systeme, da begynde samtlig Inertierne at staae imod med Kræfter, som i et hvert Punkt af Inertien ere proportionerte med de smaae Buer Df, Eg, Kn, Am, o. s. v. som i lige Tid beskrives, nemlig i det første uendelig lidet Ansteds-Øieblik. Men disse Buer ere proportionerte deres Halv-Diametrer, hvorpaa de ere perpendikulære, og disse Halv-Diametrer maa regnes fra det Punkt L, om hvilket samtlig Inertierne i første Øieblik søge at bevæge sig, saa de blive som de Linier EL, KL, DL, AL, o. s. v. Følgelig kommer alt an paa at bestemme det Punkt L, som i første Øieblik Inertien søger at rulle om, eller i Henseende til hvilket dens Drift efter QH ophæver Pressionens Drift efter HQ saaledes, at det Punkt L i det første Øieblik af Stødet med Ret kan ansees som et Punkt, der hviler. Thi før dette Punkt er bekiendtgiort, ere Inertiens Kræfter i at staae imod ubekiendte, og før de blive bekiendte, kan Materien ei flyttes om.

§. 339.

For derfor at bestemme dette Punkt, haver man antaget, at det maatte være det, fra hvilket om den hele til det Punkt V eller Q omflyt- Hvorledes det Punkt kan bestemmes, om-

(*) See *Commentar. Petropolit.* Tom. IX. pag. 189. *Daniel Bernoulli de Percuss. Exc.*

kring hvilket i det excentriske Stød Inertierne først begynde at rulle.

flyttede Inerties Kræfter bleve beregnede, Modstanden af Inertien imod Kraften i Q skulde være den mindste imod den, som kunde komme af alle andre deslige Punkter, omkring hvilke Inertien kunde søge at bevæge sig, af Aarsag, at det Punkt, som ved sin Inertie ikke staaer imod, bevæges heller ikke, §. 11. F. Hvoraf det naturlig maatte falde ved, at uden Tvivl blev dette saaledes søgte Punkt L Svingets Center, fordi vi saavel i Henseende til Stødet, som Svinget, have seet, at dette Punkt var det, som bevægede sig altid med en fuldkommen Friehed. Man seer desuden let, at uagtet Følgen, efter vores forhen sagte i Anmerkningerne til §. 329 maatte blive, at efter Stødet det hele Legeme maatte faae deels en fortgaaende Bevægelse, hvis Hastighed var Hastigheden af Tyngdens Center; deels, at alle de øvrige Dele af Inertien maatte rulle om dette Center med en Vinkel-Bevægelse, saa maatte ikke destomindre for det Øieblik, Stødet stod paa, et Punkt kunde findes i eller uden for Legemet, omkring hvilket som hvilende, saavel Tyngdens Center, som alle de øvrige Punkter af Inertien, kunde ansees som at rulle om. Thi da Bevægelsen paa den ene Side af Tyngdens Center skeer efter en imodsat Direktion af Bevægelsen paa den anden Side; saa maa nødvendig i det første Øieblik af Stødet et Punkt gaae saa stærk med imodsat Bevægelse, saa det i denne Henseende kunde ansees som at hvile. Hvoraf tillige forstaaes, at det kommer paa et ud, hvad heller at man betragter for et Øieblik alle Punkterne af Inertien, tillige med Tyngdens Center selv at rulle om dette Punkt, eller om man i samme Tid betragter Tyngdens Center som at gaae fort med en retlined Bevægelse, imidlertid at alle de øvrige Punkter af Inertien velte sig omkring det.

Men

Men at det søgte Punkt var Svingets Center beviiste sig derimod fuldkommen, saasnart som man foretog sig Udregningen af det Punkt L, thi skulle alle Inertierne, som søge at bevæge sig imod Central-Bevægelse omkring det, efter den Modstand de i Henseende til L giøre, omflyttes til V, da bliver §. 155. F. $\frac{D.DL^2+E.EL^2+K.KL^2+A.AL^2+++}{VL^2}$ den hele omflyttede Inertie udi V, som der gior samme Modstand, hvilken den hele Ting før giorde. Denne Størrelse bør efter vores forhen sagte være et mindste.

§. 340.

Men Linierne DL, EL, o. s. v. ere foranderlige Størrelser; for da at bringe dette til den simpleste Udregning, maa forud agtes, at om Tyngdens Center antages udi M og fra alle Inertierne, kastes ned (som her udi D) den Perpendikel DN, og DM trekkes, da bliver $DL^2.D=D.(DN^2+NL^2)=D.(DM^2-NM^2+LM^2+NM^2+2LM.NM)=D.(DM^2+LM^2+2LM.NM)=D.(DM^2+LM^2)$. Thi alle Momenter af Inertiernerne, som D. NM, hæve hverandre op paa begge Sider af Tyngdens Center M, og LM er en bestandig Størrelse. Dette iagttaget, bliver i V den hele omflyttede Inertie, om dens hele Mængde kaldes I, og VM, a; DM, b; EM, c; KM, d; AM, e; og LM, x; Da, siger jeg, bliver den hele Inertie omflyttet til V. $=\frac{I.x^2+D.b^2+E.c^2+K.d^2+A.e^2 \text{ o. s. v.}}{(a+x)^2}$, en Størrelse, som er at agte for bestandig, og hvis Differential derfor $=0$. Saa man faaer $\frac{2Ixdx(a+x)^2-2(a+x)dx.(Ix^2+Db^2+Ee^2+Kd^2+Ae^2+)}{(a+x)^4}=0$,

eller og $Iax + Ixx - Ixx - Db^2 - Ec^2 - Kd^2 - AE^2 = 0$, og følgelig

$$Iax = Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2 \text{ eller } x = \frac{Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2}{Ia},$$

hvortil naar legges $BM = a$, da er $a + \frac{Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2}{Ia}$ Svingets Center § 115. hvoraf sees; at det Punkt L, omkring hvilket hele Inertien i første Øieblik af Stedet søger at velte sig, er Svingets Center, om ellers Figuren betragtes som at være bleven hengt vertikal op til at svinge udi V.

§. 342.

Regel for Inertiernes Omflytning.

Denne prægtige og nyttige Egenskab af Svingets Center kan og let udledes af de direkte mekaniske Grunde, ved hvilke man kan bevise aldeles ligeledes, hvad vi her have sagt. Saa der ingen Tvivl er paa den foromtalte Regels Rigtighed i alle disse Tilfælde (*). Vi ville derved ikke opholde os, men alene kortelig forklare, hvorledes man kan omvende denne Egenskab af Svingets Center, til at bestemme Virkningerne af det excentriske Stød. I denne Henseende kan agtes, at man af det forhen sagte §. 341 trekker en overmaade let Regel, for at omflytte den hele Inertie i D, E, K, A, o. s. v. til B, thi forstaaer man ved $\mathfrak{z}$ enhver af de smaa Inertier, som skal flyttes om, ved x ubestemt Viis enhver af de Linier, de søge at rulle om paa, som DL eller KL for Ex., da bliver den hele omflyttede Inertie udi V, $\int \mathfrak{z} \frac{x^2}{VL^2}$, men $VL = \frac{\int x^2 \mathfrak{z}}{I.LM}$, §. 56. F. Følgelig er $I.VL.LM =$

(*) See *Opera Johannis Bernoulli.* Tom. IV. No. 177. §. 14.

$= \int x^2 z$, og altsaa den hele omflyttede Inertie udi $V = \frac{I.LM}{VL}$. Ansees da Ansteds-Punktet som det, hvori den hele Ting blev hengt op, for at svinge, da siden Henge-Punktet og Svingets Center uden Forandring i Henseende til Svinget kunde byttes om med hverandre, §. 120. saa haver man alene nødig, for at finde den Inerties Mængde, som skal flyttes om til Q, at tage den fierde proportionelle til Svingets Centers Længde i den givne Ting, ophengt til at svinge udi Q, til samme Centers Distance fra Tyngdens Center og til det givne Legemes hele Inertie; det udkommende er den Inertie, som i Q gier i Henseende til den anstødende eller trykkende Kraft den samme Modstand, som alle de smaa Inertier hver for sig, strødde det hele Legeme over.

§. 343.

Det excentriske Stods fuldkomne Bestemmelse.

Dette forudsat, er den største Deel af de Vanskeligheder overvundne, som falde for ved at bestemme Virkningerne af det excentriske Stød i det foranførte Tilfælde. Thi saa tidt som (Taf. XIV. F. 4.) to Ting, af hvad Figur man vil, ED og CB støde an paa hverandre efter deres fælles Rore-Linie i det Punkt B, da gaaer Direktionen af Stødet HBG enten uden for begges Tyngdes Center, eller alene uden for en af de sammenstødende Tings Center.

Er CB den Ting, som stødes af EAD i det Punkt B; saafremt da at Tyngdens Center i det anstødende EAD ligger i Ansteds-Perpendiklen HBG, behøves i dette Legeme ingen Omflytning af Inertien, siden i Henseende til det, Stødet er lige, og foraarsager derfor udi EAD selv ingen Omveltning omkring et Punkt, som L, imedens

imedens Stødet varer, saa det derfor heller ikke faaer nogen saadan Omveltning, efter at Stødet er forbie.

I CB derimod kan man betragte Stødet at skee uden for Tyngdens Center M, i hvad Punkt af Perpendiklen HBG, som man vil; følgelig udi det Punkt G saaledes, at HB Direktionen af Stødet er lodret paa den Linie CG, som gaaer igiennem Tyngdens Center M.

Finder man derfor det føromtalte Punkt L efter §. 342, det nemlig, omkring hvilket, som i første Øieblik ubevægeligt, Inertien søger at rulle, og ved Hielp af samme flytter den hele Inertie om til B eller G, da er det klart, at Stødet nu er derved bleven et lige Sammenstød, saa at Hastighederne saavel i B, som i det anstødende Legeme kunde bestemmes efter de forhen givne Regler i Forelæsningerne.

§. 343.

Saafremt at Direktionen af Stødet tillige er eccentrisk i den anstødende Ting EAD, da sees ligeledes, at den hele Inertie af dette Legeme paa samme Maade maa flyttes om til B eller R i den Linie, der gaaer igiennem Tyngdens Center, hvilket her kan ansees for et og det samme; hvorved man atter igien finder, at Sammenstødet imellem begge Legemer kan ansees som et lige Sammenstød, og at derfor Hastighederne i begge efter Slaget kunne findes ved de forhen givne Regler for det lige Sammenstød. Da man siden let kan vise, hvad saavel den fortgaaende, som den omrullende Bevægelse bliver udi begge de sammenstødende Ting efter Slaget.

§. 344.

Skeer Stødet efter en skiev Direktion IG; da kan det, som man veed, opløses i de to Side-Direktioner IH og HG, hvoraf Stødet alene skeer efter HG, uden at man haver nødig at bekymre sig om IH, efter det i Forelæsningerne om det skieve Stød forhen forklarte.

§. 345.

For at oplyse det allerede sagte med Exempler, tagne af de simpleste Tilfælde, som i denne Sag kunde forekomme, ville vi antage, at de to Ting (Taf. XIV. Fig. 4.) AED og FCB, som støde sammen, ere to cylindriske Stokke, Fig. 5. At Direktionen af Stødet gaaer igiennem Tyngdens Center af den anstødende Ting AD: At C hviler før Sammenstødet og treffes af EAD udi B. Kaldes da den hele Materies Mængde udi EAD, M; Hastigheden før Slaget H; den i CBF, som før, I, og GL er Længden af det simple Pendul, der svinger udi lige Tid med Stangen eller Cylindren C ophengt udi G. M Tyngdens Center udi Stangen CB*f*. Da bliver den hele til B omflyttede Inertie udi $cf = \frac{I.LM}{LG}$. §. 342. Denne Inertie kommer til lige Sammenstød med ABD udi B, og giør udi Slaget samme Virkning som den hele uomflyttede Inertie i C*f*. Følgelig bliver Hastigheden i det Punkt B efter Slaget i C*f* §. 294 F. $= \frac{2MH}{M+\frac{I.LM}{LG}} = \frac{2MH.LG}{M.LG+I.LM.}$

og Hastigheden efter Slaget udi EAD, der beholder sin retlinede Bevægelse siden, som før, $= \frac{H.(M-I.\frac{LM}{LG})}{M+I\frac{LM}{LG}} = \frac{H.(M.LG-I.LM)}{M.LG+I.LM.}$

§. 346.

Efterat saaledes Hastigheden er funden for det Punkt B, er det overmaade let at finde samme for et hvert andet Punkt i Stangen, hvor som helst man vil. Thi da L er Omveltnings-Punktet, og Tiden af Omveltningen overalt i Stangen den samme; saa blive Hastighederne i disse Punkter som Distancerne fra L, der ere Omveltnings-Bevægelsens Halv-Diametrer. Deraf findes let Hastigheden, hvormed Tyngdens Center søger at velte sig omkring L, thi

$LG:LM = \frac{2M.H.LG}{M.LG+I.LM} : \frac{2M.H.LM}{M.LG+I.LM}$, hvilket er Hastigheden af Tyngdens Center efter ret Linie, hvormed følgelig det hele Legeme gaaer fort. Og hvad Omveltnings-Bevægelsen angaaer, da naar den i et Punkt er bekiendt, er den bekiendt udi alle: Men Omveltnings-Hastigheden udi G er i Henseende til Tyngdens Center

$\frac{2MH.LG}{MG.(M.LG+I.LM)}$. §. 315. 2.

§. 347.

Man kan saaledes betragte i en og den samme Ting to Vinkel-Bevægelser, en omkring Tyngdens Center M, naar dette første antages at gaae fort i relinet Bevægelse, den anden om Omveltnings-Punktet L, begge ensdanne. Man seer let ved at eftertænke den første, hvad Linie L bevæges over, nemlig over den sædvanlige Cykloide, siden denne Linie kan ansees som at blive beskreven af en Cirkel, hvis Center gaaer fort med en ensdan Bevægelse, imidlertid at Cirklen selv med en ligesaadan ensdan Bevægelse ruller om sit fortgaaende Center. Saa Halv-Diametern i denne Cykloiden beskrivende Cirkel er ML, dens Centers fortgaaende Bevægelse skeer efter en Linie parallel Mm, parallel

rallel BH. Og da man tillige veed, at naar det Punkt L i Cirklens Peripherie beskriver en sædvanlig Cykloide, andre uden og inden for samme tagne, da beskrive forkortede og forlængede saa kaldte Cykloider, saa seer man, hvorledes samtlig disse Punkter i deres sammensatte Bevægelse bevæge sig; hvorved deres hele Fortgang er fuldkommen bekiendt.

§. 348.

Af det allerede sagte forstaaes fuldkommen, hvad man har at gjøre i andre Tilfælde, da Inertiens Omflytning saa let kan gjøres. For Ex. Om de to Stænger CAD og *c*B*f* (Taf. XIV. Fig. 6.) bevæge sig enten med eller imod hverandre, deels med en omveltende, deels med en i lige Linie fortgaaende Bevægelse, hvilken sidste da bliver Bevægelsen af deres Tyngdes Center. Kaldes Hastigheden af denne sidste i begge H og *h*, de omveltende Bevægelsers Hastigheder ligeledes B og *b*; nemlig saa til AD, der støder an, svare H og B; til *f*B*c* derimod *h* og *b*; da maa først de føromtalte Omveltnings-Punkter L og *l*, hvis Hastigheder, som vi før have seet, forandres i Slaget, søges, og da bliver Inertierne udi AD og *cf* benævnede som før, og forflyttede til de Punkter, i hvilke Slaget skeer, D og B. Inertien bliver $\frac{M.\,lm}{lD}$ udi AD og $= \frac{I.\,LM}{BL}$ udi *c*B*f*. Paa disse Inertier skeer et lige Sammensted med Hastigheden udi D, = H + B, og udi B = *h* + *b*, saafremt Slaget antages at skee udi et Øieblik, saa under Slaget den omveltende Bevægelses Hastighed virker fuldkommen efter samme Linie, som den Hastighed, hvormed Tingene gaae fort.

Hastigheden efter Stødet kunne derfor bestemmes efter de forhen §. 294 givne Regler, og af de i D og B givne Hastigheder. De for Tyngdens Center M og m findes, som før; hvorved den fortgaaende Bevægelse er bekiendt, hvis Forskiel fra den hele Hastighed er Omvelnings-Hastigheden i de sammenstødende Puukter D og B.

§. 349.

Hvorledes Naturen i Tingenes Tilbagespring iagttager Reglerne af dette mindste Virkning.

Man kunde giøre en Mængde andre Anmerkninger, saavel i Henseende til det allerede sagte, som i Henseende til de almindelige Bestemmelser af flere Tings Sammenstød, men da det allerede sagte i disse Henseende er det vigtigste, saa ville vi igien foretage det vi begyndte af, udførligere nemlig, at udvikle de Tilfælde, som man haver opløst af det Princip, at Naturen i alle sine Handlinger iagttager et mindste. Saaledes haver man i Reflexionen eller de elastiske Tings Tilbagespring efter Stødet ligeledes vildet iagttage, at Naturen i denne Handling virkede med største Fordeel, nemlig efter Reglerne for det mindste, for nemlig i den korteste Linie at komme fra Punkt til andet, for Ex. fra H til E (Taf. XIII. Fig. 1.). Dette forudsat, om da Perpendiklen fra H eller HI $= p$, EF $=$ P, FB $= x$, BI $=$ y, saa bliver $HB + EB = \sqrt{y^2 + p^2} + \sqrt{x^2 + P^2}$, hvis Differential er $= 0$, følgelig bliver

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \frac{-x\,dx}{\sqrt{x^2 + P^2}}.$$

Om FI, som en bestandig given Linie, kaldes a, bliver $a = x + y$, følgelig $dx + dy = 0$, og $dx = -dy$, hvorved faaes $\frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + P^2}}$, det er; Cosinus af EBF $=$ Cosinus HBI, saa

derfor

derfor disse Vinkler ere lige store, eller Anstøds-Vinklen saa stor som den, hvorunder de elastiske Ting springe tilbage.

§. 350.

I Ligevegten iagttager Naturen altid Reglerne for det mindste.

Man haver endnu paa adskillige andre Maader og i en Deel andre Tilfælde, skiønt altid ikke med den Overbeviisning, som man maatte ønske, søgt at forklare andre Naturens Virkninger af dette Princip. Oplosningerne have ikke været uden for enkelte Tilfælde. Man haver snart sat det mindste, som Naturen saae paa, i et; snart igien i et andet. Det man søgte, var et almindeligt Princip. Et saadant haver man unegtelig for alle de Tilfælde, da Kræfterne staae udi Ligevegt med hverandre, det som man haver givet det Navn af Principet af den mindste Virkning (*). Det bestaaer deri. At saa tidt som centrale Kræfter drive alle Delene af et Legeme imod deres Center; saasremt da at Distancen fra Centret er x, Kraften fx^n, et Element af Inertien I. Da maa, om Ligevegt skal have Sted, $\int fx^{n+1}\mathrm{I}$ være et mindste.

Dette Principe er en nødvendig Følge af de forhen forklarte mekaniske Grunde, §. 24. F. hvor vi have sagt, at saa tidt som Pressionerne ere lige store, maa deres Modstand være de Rum, igiennem hvilke de i samme Tid bevæges, forkeert Viis proportionerte. I Ligevegten ere Pressionerne, som staae hverandre imod, og vi ville kalde P og p, lige store. Ansees da den ene som Modstand imod de

(*) Dette ellers meget omtvistede Princip er af Mr. Maupertuis. *See Memoires de l'Academ. des Sciences.* 1740. *Loix du Repos des Corps par Mr. Maupertuis*, og *la Cosmologie de Mr. Maupertuis.*

andre, og de uendelig smaa Rum, igiennem hvilke de skulde gaae, om Bevægelsen skede, kaldes dy og dy, da bliver Modstanden af alle Kræfter som P, $= Pdy$. Af alle Kræfter som $p = -pdy$, fordi Direktionen er imodsat. Saa at derfor $Pdy + pdy = 0$. Tilkiendegives i Almindelighed det elementære Rum ved dx, Kræfterne i Almindelighed ved K, Pressionen ved IK, da bliver $IKdx = 0$. Er $K = x^n$, da bliver $Ix^n dx$ integrabel, og $\int Ix^n dx = \frac{1}{n+1} Ix^{n+1}$ bliver et mindste; saaledes, som vi forhen have sagt, at det skulde være.

§. 351.

Hvorfor og i Ligevegten Tyngdens Center er altid i høieste eller laveste Stilning om Kræfterne ere bestandige.

Man seer af Beviset, at dette Princip strekker sig til alle Kræfter, endog om de ere af anden Forhold end Høiderne af Distancen fra Centret. At den hele Statik deraf kan bevises, kan sees af den ene Anmerkning, som forhen er blevet giort til §. 59. F. (*). Vi ville derved saa meget mindre opholde os, som de nyttigste Sandheder, hvilke af dette Princip kunde bevises, forhen ere blevne udførte af direkte Grunde. Men et bør her ikke forbigaaes, at man nemlig heraf let udleder et Princip, som man meget haver betient sig af i Mekanik, og ofte med stor Fordeel kan bruges. At nemlig, saa tidt som Tyngden virker som her hos os, og de tunge Tings Dele staae udi Ligevegt med hverandre eller hvile; da maa Tyngdens Center enten ligge, som sædvanligst skeer i den laveste Stilning, eller, hvilket undertiden skeer i den høieste.

Thi

(*) Men dette sees paa det fuldkommeste i *Memoires de l'Acad. de Berlin.* Année 1748. pag. 149. *Recherches sur les plus petits dans les actions des forces par Mr. Euler*, og An. 1752. pag. 169. *Harmonie entre les Principes generaux de Repos & de Mouvement par Mr. Euler.*

Thi da i Følge det forhen anførte Principe om den mindste Virkning, Summen af samtlig Inertierne multiplicer:et med Distancen fra Kræfternes Center, (hvilket her er en ret Linie) skal være et mindste, og Summen af Inertierne antages som bestandig, Distancen fra Kræfternes Center alene som foranderlig: Saa følger af sig selv, at naar Summen af Inertierne multiplicert med Distancen skal være et mindste, maa Distancen selv, hvori Tyngdens Center hviler, være den mindste iblant alle de, som det i alle sine adskillige Stilninger (alt for Resten lige) kunde have.

Ydermere, da hvad der i en Henseende er et mindste, kan i en anden være, naar det tages negativ, et større, saa kan i Ligevegten Tyngdens Center ei alene have den laveste, men endog den høieste Stilning. Saaledes falder en Kugle bestandig ned efter et hvert inklinert Plan, imidlertid at den hviler saavel i det øverste af Planet udi Vertikalen, som i dets nederste i Horizontalen. En Keile ligeledes, hviler saavel naar den staaer paa sin Spitse, og Tyngdens Center er i sin høieste Stilning, som naar den staaer paa sin Grund-Linie, og Tyngdens Center er paa det laveste. Men Forskiellen imellem disse to adskillige Slags af Ligevegt bestaaer altid deri: At i det sidste tage Tingene deres Ligevegt igien paa selvsamme Maade, som før, naar de ere blevne satte ud af deres Hvile. I den første derimod igientage de ikke deres forrige Tilstand, naar de satte sig til Hvile. Saaledes; Naar en Keile, som hviler paa sin Grund-Linie, helder lidt over paa Siden, falder den af sig selv tilbage i sin forrige Stilning: Staaer den derimod paa Spitsen, og Ligevegten forstyrres, sætter den sig ikke meer i sin forrige Tilstand.

§. 352.

§. 352.

Et ligesaadant almindeligt Princips for Bevægelsen forklares.

Antager man Principet af Ligevegten, som en Sag, hvilken Naturen altid iagttager endog uden for Ligevegten, hvilket dog endnu ikke synes at være fuldstændig nok blevet beviist. Da flyder deraf et andet almindeligt Princip for hvad det mindste er, som Naturen altid skulde følge i al Bevægelse, og som bestaaer deri. (*) At Naturen i al Bevægelse iagttager den mindste Virkning. Men Virkningen bør vurderes af Massen multiplicert med Hastigheden, multiplicert med det igiennemløbne Rum.

Thi da i al Bevægelse er $\frac{p}{m}dt = dv$, §. 4. derfor $Pdx = Ivdv$ og $Px = Ivv$. Nemlig, om $p = fx^n$. Thi da bliver $fx^n dx = \frac{1}{1+n} fx^{n+1} = \frac{1}{1+n} px = Mvv$, eller simpel hen, naar man alene seer paa Forholden $Px = Mvv$. Saa følger, at Størrelsen af hele Virkningen, naar samme dømmes af det igiennemløbne Rum, bliver saa stor som Summen af de levende Kræfter. Antages det da som almindelig sandt, at Px for et hvert Øieblik dt bliver et mindste, maa og den hele Virkning i alle Øieblik af Tiden samlede, blive et mindste. Følgelig maa i al Bevægelse $\int Pxdt$, eller $\int Mvvdt$, blive et mindste. Men $vdt = ds$. §. Følgelig bliver og $\int Ivds$ et mindste, hvilket er det selvsamme, som det forømtalte Princip.

Vi

(*) See *Memoires de l'Acad. de Berlin.* Tom. I. p. 267. sq. eller og *Cosmologie de Mr. Mauperruis*, saavelsom *Memoires de la Societé Rojale des Sciences.* Année 1744.

Vi ville her ikke opholde os ved at vise, hvorledes dette Princip kan anvendes i at opløse paa en indirekt Maade, hvad vi forhen have beviist om Central-Kræfterne, for ikke at være unødig vidtløftig. At det haver Sted i de udkastede Tings frie Bevægelse, og at man ved det kan finde de selvsamme krumme Linier, som for §. 158. o. f. er saa vel blevet udført, saa at derpaa er ikke meer Tvivl (*). Af dette Princip følge ligeledes Reglerne for Tingenes Sammenstød (**). Disse enkelte Exempler give unegtelig stor Formodning for, at dette Principe endnu er almindeligere. Men de almindeligste Grunde, naar de ei ere i sig selv klare nok, behøve de skarpeste Beviis. Imidlertid er det i høi Grad rimeligt, at Inertien i enhver enkelt elementær Tid, ved at staae imod, yttrer den mindste Modstand, saa at derfor Virkningen, som svarer til Inertiens Modstand, bliver et mindste; og da i ethvert udeleligt Øieblik, udi hvilket at Kræfterne bevæges, man med en Slags Føie kan sige, at Bevægelsen er en Art af Ligevegt imellem den bevægende Kraft og Inertien, fordi de altid virke imod hverandre med imodsatte Direktioner, saa er det ikke urimeligt, at giøre Brug af et Princip, der herer til Ligevegten i den frie Bevægelse; naar man nemlig deri ikke seer paa andet, end paa Forandringen af denne sidste i de elementære Tider.

Tyven-

(*) See *Leonh. Euleri Method. Inveniendi Curvas. Additam. secund. de Motu Projector. in medio non resistente.* See og *Memoires de l'Acad. de Berlin.* Année 1742. pag. 169. sq.

(**) Man kan her efterslaae *la Cosmologie de Mr. Maupertuis* og *Memoires de l'Acad. de Berlin.* Année 1746.

Tyvende Forelæsning.

Om de elastiske Tings smaa Bevægelser, eller om den zittrende Bevægelse.

§. 339.

Vi have i det foregaaende afhandlet de elastiske Legemers store Bevægelser, de nemlig, som de i Følge denne deres Egenskab, fuldkommen igien at antage den i Sammenstødet forandrede Figur efter Stødet, bestandig maa iagttage. Det er endnu høist nyttig, kortelig at betragte deres mindste Forandringer, da man meget behøver denne Kundskab i Physik, saa at uden den en af denne Videnskabs vigtigste Stykker ei kan forstaaes.

§. 340.

I elastiske Strenge, som spendes af meget smaa Kræfter, mærkes fast ingen elastisk Bestræbelse.

Det som her i sær behøves at vides er, af hvad Beskaffenhed de elastiske Strenge eller Snorer ere, og hvorledes de forrette deres Bevægelser. I hvilken Henseende allerførst maa agtes, at saafremt (Taf. XIV. Fig. 7.) en elastisk Streng bC enten ligger ganske los, eller spendes ikke uden med en overmaade liden Kraft P, da lærer Erfaring, at den i ingen af begge disse Tilfælde yttrer nogen Virkning. I den sidste

er

er det i sær merkeligt, at den ikke stræber at igientage sin forrige Figur, da dog dette er just det, hvori Elasticiteten bestaaer, og det saaledes; at saa tidt som Tingene ere fuldkommen elastiske, søge de just med de selvsamme Kræfter at tage deres Figur igien, som de vare, hvormed de bleve sammentrykte eller spendte.

§. 341.

Af Erfaring bevises det samme, saa tidt som de spendes af meget store Kræfter, derimod yttre de en stærk elastisk Bestræbelse, naar de Kræfter, af hvilke de spendes, ere maadelige.

Ligesom man i den Tilfælde, da Kræfterne, som i P og *p* spende de elastiske Strenge, ere overmaade smaa, ei merker til nogen Virkning af deres Elasticitet, saa taber den sig og plat og aldeles, om disse Kræfter blive alt for store; saa det ikke er, uden saa tidt som Kræfterne, der spende dette Slags Strenge eller Snorer, ere af maadelig Størrelse, at de kunne virke ved Elasticitet, eller ved at igientage deres Figur. Hvoraf man fuldkommen seer, at Elasticiteten beroer alene paa Maaden, Delene i Tingene staae imod hverandre paa. Men da dette, for saa vidt Aarsagerne angaaer, henhører til Natur-Lærdommen, ville vi ei dermed befatte os i Mekanik, hvor vi alene have at see paa Bevægelsens Love.

§. 342.

Virkningen paa elastiske Strenge af maadelige, men tillige smaa Kræfter forklares.

Er da *bc* en saadan Streng, spendt af tilbørlige Kræfter udi P og *p*, hvilken vi her, for at betragte Sagen paa sit letteste, ville antage lige store; da om i *f* en Kraft boier Strengen, saa den i Steden for at ligge udi *bdc*, nu ligger som

bfc, og imellem Tyngderne, der spende Strengen udi P, *p*, og den Kraft i *f* er Ligevegt; da er, om med Halv-Diametern *bd* slaaes den Cirkel-Bue *dl*, Forskiellen imellem *bd* og *bf*, proportionert de Kræfter, der spende Snoren udi P, saa længe som de Kræfter, der boie Strengen, ere baade maadelige og smaa tillige. Al Erfaring stemmer deri overens, følgelig kan man, saa længe den Kraft, der i *f* boier Strengen, ei er uden liden, ansee *db* som lige stor med *fb*, og som proportionert Tyngden udi P. Thi vi handle her ikke uden om overmaade smaae Udlob over *cb* fra det Punkt *d* til *f*, thi andre bør ei have Sted i den zittrende Bevægelse.

§. 343.

Da saaledes Fig. 8. *ac* kan forestille den hele Kraft, som spender Strengen, saafremt at den oploses i de to Side-Kræfter *ad* og *ab*, da sees; at den Strengen boiende Tyngde udi *a* maa holde imod med en Kraft som *ad*, siden det er med denne Deel af sig selv, at *p* søger at drive det Punkt *a* ned igien imod det Punkt *d*, kaldes *ad*, *a*; *ac*, *b*; Tyngden i P eller *p*, P, da er $b : a = P : ad = \frac{aP}{b}$, hvilket er Værdien af den Kraft, hvormed Tyngden i *p* søger at drive det Punkt *a* ned imod *d*, og da den anden Tyngde udi P med en ligesaadan Kraft driver det Punkt *a* imod *d*, saa bliver den hele Kraft i *a*, som trykker imod det Punkt $a = \frac{2aP}{b}$, hvoraf sluttes, at siden $b : 2a = P : \frac{2aP}{b}$.

Saa

Saa forholder sig den Kraft, der søger at drive ned imod *d* udi *a* til den Kraft, der spender Strengen udi *p*, som 2*ad* : C*d*.

§. 344.

Følgelig; om alt bliver ens, alene at *a* forandres, da seer man, at Kraften i *a* bliver altid = *a*, thi Forandringerne i *b* blive altid overmaade smaa imod Forandringerne i *a*, saa længe som Udlobene fra *d* ere meget smaa, hvoraf følger. De ere Distancerne proportionerte.

At alt for Resten lige ere Udlobene fra *d* efter *ad* under større og mindre Boininger i *a*, det er *ad* i Forhold af den i *a* boiende Kraft.

§. 345.

Deraf følger, at dersom den Kraft, som holder imod udi *a*, med et slipper, saa den elastiske Streng frit og uhindret kan sætte sig udi sin forrige Tilstand, og fra at ligge udi B*a*C, naar den igien faaer trokken sig sammen, kommer til at ligge som B*d*C, da virker Elasticiteten udi *a*, imidlertid at dette skeer i alle Punkter igiennem *ad* i Forhold af Distancen fra *d*. §. 344. Følgelig er det det samme, som om en uophørlig hastiggiorende Kraft drev det Punkt *a*, og den hele Streng fra *a* til *d*, indtil denne Kraft i *d* var = 0. Strengen B*a*C maa derfor ved sin Bevægelse fra *a* til *d* have vundet en Hastighed til at gaae ligesaa langt paa den anden Side af B*d*C fra *d* til *g*, fordi de Bevægelsen sinkende Kræfter ere der de selvsamme, som de der foraarsagede dem paa den anden Side. I *g* er Beskaffenhe- Zittringerne skee derfor udi samme Tid.

den igien den samme, som den for var udi *a*, Fig. 8, eller *f*, Fig. 7. Saa at Strengen *bdc* Fig. 7. maa derfor, dreven af sin Elasticitet, blive ved at svinge en Mængde gange frem og tilbage paa begge Sider af *bdc*, og disse Sving, (som hvad heller de ere større eller mindre i Udløb fra *d*, maa desuagtet skee i samme Tid,) kunde aldrig høre op, om Strengen i sin Bevægelse ingen Modstand fandt uden omkring sig.

§. 346.

Denne Bevægelse er derfor af samme Art som Pendulernes.

Deraf sees, at saa tidt som en saadan Streng engang er bleven sat ud af sin Hvile udi *bdc*, F. 7. kan den siden ansees som et Pendul, hvis Længde er som *dc*, og hvilket bevæger sig frem og tilbage i en Mængde Sving fra *f* til *g*, og fra *g* til *f*. Følgelig er det og altid mueligt, baade at kunde bestemme et Pendul af den Længde, saa det svinger i samme Tid, som en saadan Streng, og at udregne det Antal af Sving, hvilken en saadan Streng bør giøre i en vis given Tid.

§. 347.

Den beroer paa Strengens Tykkelse og Inertie, paa dens Længde og paa Udløbenes Størrelse.

Da den hele Pression i *a* eller *f* var, efter hvad vi allerede have sagt §. 343 $= \frac{2aP}{b}$; kaldes da den Inertie, som i Snoren af samme skal bevæges, M, bliver den hastiggiørende Kraft $= \frac{2aP}{bM}$, hvoraf sees: At hvad heller den Kraft, som spender Strengen, eller Strengens Tykkelse, eller dens Længde eller Udløbene fra *d* forandres; forandres altid tillige den hastiggiørende og imod *d* drivende Kraft, saa man i enhver

nye

nye Tilfælde maa anſee diſſe Penduler, ſom om de bleve drevne af adſkillige Kræfter.

§. 348.

Folgelig kan man forklare, hvad vi her have for, af det vi allerede have iagttaget i den ottende Forelæsning §. 149. 150. at nemlig Tiderne, hvori lige lange Penduler ſvinge, ſom drives af adſkillige haſtiggiorende Kræfter, forholde ſig ſom Quadrat-Rodderne af diſſe Kræfter forkeert tagne. Folgelig, om Tiden af Svinget kaldes T, bliver $T = \sqrt{\frac{bM}{2aP}}$, eller $\frac{bM}{2aP} = T^2$. Men Quadraterne af Tiderne ere og, naar den haſtiggiorende Kraft er den ſamme, ſom Længderne af Pendulerne §. 134. Forel. Folgelig er

$$T^2 = \frac{bM}{2aP}, b = \frac{Mb^2}{2aP}.$$

§. 349.

Hvorledes Tiderne af diſſe Bevægelſer forholde ſig.

Deraf folger, at ſiden $2a$ intet gior til Forandring i Tiden af Svingene, fordi Bevægelſen (naar den haſtiggiorende Kraft er den ſamme) ſkeer over ſtorre og mindre Udlob fra d altid i ſamme Tid; ſaa bliver beſtandig, (i hvor meget end at Strengene kunne være adſkillige udi Tykkelſe eller i Længde, og med hvad ulige Kræfter de end kunne være ſpendte,) dog $T^2 = \frac{Mb^2}{P}$. Kaldes Diametern af Strengens Tykkelſe D, da er $M = D^2$, folgelig $T = \frac{D^2 b^2}{P}$, og $T = \frac{Db}{\sqrt{P}}$, hvoraf ſees.

At

At Tiderne af Svingene forholde sig i sammensat Forhold af Strengenes Tykkelser og Længder ligefrem tagne, saavelsom af Quadrat-Rodderne af de Kræfter, der spende Strengene, forkeert-Viis tagne.

§. 350.

Adskillige Hoved-Slutninger.

Man kan, om man vil, deraf giore folgende Slutninger.

1) Ere Strengene lige tykke og lige stærk spendte, da forholde sig Tiderne af Svingene som Længderne.
2) Ere Strengene lige lange og lige tykke, forholde sig Tiderne, hvori de svinge, som Quadrat-Rodderne af de Kræfter, der spende dem, forkeert tagne.
3) Ere Strengene lige lange og lige stærk spendte, forholde sig Tiderne af Svingene som deres Diametrer.

§. 351.

Derved maa dog agtes, at enhver saaledes svingende Streng, i det den svinger frem og tilbage, ei alene kan giore denne Bevægelse saaledes, at den ligger alene heel og hulden enten paa den ene eller paa den anden Side af *bdc*, som i Fig. 7, men i det den svinger heel og er i Bevægelse overalt, kan den tillige svinge Bolge-Viis, som i Fig. 12. Man kan bevise dette af Udregningerne, man kan bevise det af Erfaring. Det er af denne de svingende Strenges Egenskab, at man bor forklare, hvorfor man i at stryge en Tone an paa en Streng, horer i den samme tillige flere andre; ligesom og at hvad vi her have sagt, er det sande Fundament til den hele

Theorie

Theorie af Tonerne og den hele Musik. Men da det her ikke er det egentlige Sted at vise, hvorledes samtlig disse Sandheder i de for sagte Henseender videre bør anvendes, ville vi indskrenke os selv ved det allerede sagte.

§. 352.

Dersom man i Steden for de foromtalte elastiske Strenge betragter tynde elastiske Plader, som fæstede ved den ene Ende, sættes i Bevægelse udi den anden derved, at de først bøies og siden overlades til sig selv at svinge; da blive ligeledes, som for, saa længe Bøiningerne ere smaa, samtlig Svingene, hvad heller de ere større eller mindre tilendebragte i samme Tid; fordi man kan ansee de adskillige hastiggiørende Kræfter i de adskillige Dele af deslige Plader, paa samme Fod, som i de sammensatte Penduler, hvor Delene af Materien ere hverandre til Hinder, saa nogle bevæges med større, og andre med mindre Modstand, uagtet at samtlig Svingene i det Hele ikke destomindre skee i samme Tid.

Fiortende Tillæg.

Om de elastiske Strenge deres smaa Bevægelser.

§. 353.

Hvorledes den zittrende Bevægelse kan bestemmes i en immateriel Streng, som svinger med en eneste Inertie.

Vi sætte her forud alt hvad i Forelæsningerne er bleven sagt. (Taf. XIV. Fig. 8.) Forestiller man sig da en elastisk Streng BC, som umateriel, og bøiet fra B*d*C, til at ligge som B*a*C, og i samme fremdeles en eneste Inertie udi *a*, kaldes de Tyngder, som spende Strengen P og *p*, da virker den Kraft, hvormed Tyngden spendes eller trekkes af P i den Direktion B*g*. Forestilles denne Kraft ved B*a*, og opløses i Side-Kræfterne *ea* og *ad*, hvoraf *ad* her er alene nyttig, nemlig til at drive Inertien udi *a* ned imod det Punkt *d*, saa bliver den udi *a* imod *d* drivende Kraft, som haver sin Oprindelse fra $P = \frac{ad.P}{aB}$. Kaldes da, som før, *ad*, *a*. *a*B, *b*. Inertiens Mængde i *a*, M. Da bliver den udi *a* hastiggiørende Kraft, som kommer fra P, $= \frac{aP}{bM}$.

Ligeledes sees, at om $aC = c$, da bliver den hastiggiørende Kraft udi *a* imod *d*, som kommer fra *p*, $= \frac{ap}{cM}$.

Følgelig bliver den hele hastiggiørende Kraft udi *a* imod *d*,

$$= \frac{aP}{bM} + \frac{ap}{cM}.$$

§. 354.

Da nu Kræfterne imod d ere som Distancerne, §. 344. 345. (hvilket og kan umiddelbar sees af §. 353, fordi naar P, p, b, c, og M ere bestandige, bliver $d = a$) saa skee Svingene udi samme Tid, og Længden af det simple Pendul, der med dem svinger udi samme Tid, findes efter §. 92. Thi sættes den naturlige Tyngde, der driver efter Cykloidens vertikale Tangent, $= 1$, da er $\frac{aP}{bM} + \frac{ap}{cM} : 1 = a$ til den halve Cykloides hele Længde, eller hvilket er det samme, til Længden af det simple Pendul, som svinger udi samme Tid med Strengen, saa at, naar Længden af dette Pendul kaldes L, er $L = \frac{bcM}{Pc + pb}$.

§. 355.

Er $P = p$; hvilket her altid bør sættes, i Henseende til den indbyrdes Ligevegt, som man holder imellem P og p; sættes ligeledes $c = b$, da faaes $L = \frac{bM}{2P}$. Vil man deraf videre søge Antallet af Svingene Strengen slaaer, imidlertid at et simpelt Pendul af en given Længde D engang svinger, da behøves alene, at man erindrer, hvad vi have sagt §. 138. F.; at Længderne af Pendulerne forholde sig forkeert Viis som Quadraterne af de Antal Sving, hvilke de giere i samme Tid. Følgelig bliver, om det søgte Antal af Sving kaldes f,

$$\frac{bM}{2P} : D = 1 : x^2 \text{ og } x = \sqrt{\frac{2P.D}{bM}}.$$

Eller, om man vil, i Steden for b sætte $BC = 2b$, bliver

$$x = 2\sqrt{\frac{PD}{M.BC}}.$$

§. 356.

Ligeledes, naar en saadan Streng svinger med to Inertier.

Dersom man (Taf. XIV. Fig. 9.) ligeledes anseer Strengen B*d*C som umateriel og elastisk, men besvært med to Inertier udi *a* og *h*, da er Maaden, hvorpaa Mængden af Svingene, som en saadan Streng skal giøre i en vis given Tid, kan findes, endnu fuldkommen den samme, som før. Nemlig sættes P = *p*, som §. 355. Da, om B*d*C beies til at ligge som B*ah*C, forestilles den hele Kraft af P, som spender Strengen ved B*a*. Naar samme opløses i de Side-Kræfter *ae* og *ad*, da er den Kraft *ad*, som i *a* kommer fra P, og driver samme Punkt imod *d*, altid i Forhold med Distancen fra *d*. Kaldes da B*d*, *b*; *ad*, *a*; og Mængden af Inertien udi *a*, M, alt nemlig som før. Da bliver den imod *d* drivende hastiggiørende Kraft udi $a = \frac{aP}{bM}$, som før; den nemlig, som foraarsages af P.

Men den Tyngde udi *p* foraarsager ligeledes en hastiggiørende Kraft udi *a*. Thi forestilles den ved *ah*, og opløses i de Side-Kræfter *fa* og *fh*, da er *fa* den fra *p* kommende Pression udi *a*, som driver fra *d*, hvilken er = *hk* — *ad*. Kaldes da *hk*, A; *dk* = *ha*, *c*; da bliver Pressionen af *p* udi $a = \frac{(A-a)P}{c}$, og saaledes den hele hastiggiørende Kraft udi *a*, hvormed dette Punkt drives ned imod Kræfternes Center $d = \frac{aP}{bM} - \frac{(A-a)P}{cM}$.

Ligeledes findes den hastiggiørende Kraft, som driver Inertien udi *h* imod det Punkt *k*, thi da Pressionen fra P paa *h* kan forestilles ved *ht*, saa er den, som før, $= \frac{(A-a)P}{c}$. Derimod bliver Pressionen fra *p* af udi *h* som *hk* (naar den hele Kraft, der spender Strik-

ken,

ken, forestilles ved hc, og opløses i de Side-Kræfter hl og hk). Kaldes da $hC = kC$, d; da er, som før, i de ligedanne Tilfælde $d : A = P : \frac{AP}{d}$, hvilket er Pressionen fra p af udi h. Følgelig bliver den hele hastiggiørende Kraft udi h ned imod Kræfternes Center $k = \frac{(A-a)P}{cM'} + \frac{AP}{dM'}$ (M' er Inertiens Mængde udi h).

§. 357.

Da nu disse hastiggiørende Kræfter udi a og h hver for sig ere som den Afstand eller Distance, hvilken de have fra deres Kræfters Centrer d og k, saa bliver

$$\frac{aP}{bM} - \frac{(A-a)P}{cM} : a = \frac{(A-a)P}{cM'} + \frac{AP}{dM'} : A.$$

Følgelig, om $M = M'$; og $b = c = d$; det er, om Inertierne ere lige langt fra hverandre og lige store, da bliver og $a = A$, fordi man faaer af den forrige Proportion i denne Tilfælde $\frac{2AaP - A^2P}{bM} = \frac{2AaP - a^2P}{bM}$, eller $A^2 = a^2$: Følgelig $\pm a = A$, hvoraf sees; at den hele hastiggiørende Kraft udi a eller h bliver, (fordi $A - a = o$, og $b = \frac{1}{3}BC$) $= \frac{aP}{\frac{1}{3}BC \cdot M}$. Saa begge Inertier komme til d og k udi samme Tid.

§. 358.

Deraf findes, ligesom før, for dette Tilfælde Længden af det simple Pendul, der gier sine Sving i samme Tid som Strengen, thi

$\frac{aP}{\frac{1}{3}BC.M} : 1 = a : \frac{M\,BC}{3P}$, hvilket er Længden af den halve Cykloide eller af det søgte simple Pendul. I hvilken Værdie, om i Steden for M sættes $\frac{1}{2}M$, saa den hele Inertie, der belæsser Strengen $= M$, bliver det søgte simple Penduls Længde $= \frac{M.BC}{6P}$.

Deraf igien findes let, hvor mange Sving frem og tilbage paa begge Sider af BC en saadan Streng er i Stand til at giøre i en vis given Tid, i den nemlig, da et Pendul af en given Længde D engang svinger, fordi $\frac{M.BC}{6P} : D = 1 : xx$, saa følgelig $x = \sqrt{(6PD) : M.BC}$.

§. 359.

Saa og, naar den svinger med tre Inertier.

Imidlertid da man seer, at $A = \pm a$, og kan følgelig have to lige store Værdier, en bekræftende og en negtende, saa kan ei alene Strengen svinge heel og hulden, men endog Bølge-Viis, som i Fig. 10, saa den omkring n kan faae to lige Sving i a og b, en paa den bekræftende Side, en anden paa den negtende. Det samme maa skee i den almindelige foranførte Tilfælde af Ligheden §. 357, siden man i den ligeledes faaer en bekræftende og en negtende Værdie af A, begge i Almindelighed ulige, hvorfore og i alle deslige Tilfælde hver Inertie svinger for sig i ulige Tider, fordi de drivende Kræfter ere i lige Distancer fra Kræfternes Center da adskillige, følgelig og Tiderne af Svingene i hver Inertie for sig.

§. 360.

§. 360.

Betragter man fremdeles videre (Taf. XIV. Fig. 11.) tre Inertier, som vi ville her sætte lige store, at ligge over BC i d, k, n, og at de tillige med Strengen BC forflyttes til at ligge som BahoC, da om den Kraft, hvormed Traaden spendes af Tyngden i P, som før forestilles ved Ba; den fra P imod d ved Be, o. s. v. og alle disse Kræfter oploses, i Følge Kræfternes Parallelogram, som Figuren videre viser; fremdeles om man kalder samtlig Distancerne Bd, a, dk, b, kn, c, nC, d, og de til dem svarende Udleb fra BC udi d, k, n, nemlig ad, A; kh, B; no, c. Da findes, som før, om enhver af Inertierne i a, h eller q = M.

Saa og, naar den svinger med tre Inertier.

1) Den hastiggiørende Kraft udi a, som kommer fra $P = \frac{A}{M_a} P$.

Den samme, for saa vidt den kommer fra $p = -\frac{(B-A)}{b} \frac{P}{M}$.

Følgelig den hele hastiggiørende Kraft udi $a = \left(\frac{A}{a} - \frac{(B-A)}{b}\right) \frac{P}{M}$

2) Samme Kraft udi h, foraarsaget af $P = \left(\frac{B-A}{b}\right) \frac{P}{M}$.

Den, som i h tilveiebringes af $p = \frac{B-C}{c} \cdot \frac{P}{M}$.

Følgelig bliver den hele hastiggiørende Kraft udi h

$$= \left(\frac{B-A}{b} + \frac{B-C}{c}\right) \frac{P}{M},$$

3) Ligeledes findes den hele hastiggiørende Kraft udi o

$$= \left(\frac{C}{d} - \frac{(B-C)}{c}\right) \frac{P}{M},$$

hvilke Kræfter antages at være deres Distancer fra d, k, p proportionerte, hvoraf faaes

1)

1) $\left(\frac{A}{a}-\frac{(B-A)}{b}\right)^{\frac{P}{M}}:A=\left(\frac{B-A}{b}+\frac{B-C}{c}\right)^{\frac{P}{M}}:B.$

2) $\left(\frac{A}{a}-\frac{(B-A)}{b}\right)^{\frac{P}{M}}:A=\left(\frac{C}{d}-\left(\frac{B-C}{c}\right)^{\frac{P}{M}}:C.\right.$

§. 361.

Sættes i disse Proportioner og i de af dem kommende Ligheder $a=b=c$, da faaes 1) $BB=AA+AC$. 2) $A=C$, følgelig og $BB=2AA$, og altsaa $B=A\sqrt{2}$.

Underseges deraf Kræfterne i a og b, hvad nemlig deres Størrelser bliver i lige Distancer fra deres der til dem svarende Centrer, da bliver

1) den Kraft i $a=\left(\frac{A}{a}+\frac{A-A\sqrt{2}}{a}\right)^{\frac{P}{M}}=\left(\frac{2A-A\sqrt{2}}{a}\right)^{\frac{P}{M}}$.

2) den Kraft i b imod $k=\left(\frac{2A\sqrt{2}-2A}{a}\right)^{\frac{P}{M}}$. Men da den haver denne Størrelse paa den Distance fra Kræfternes Center $A\sqrt{2}$, saa bliver dens Størrelse fra Kræfternes Center i den Afstand $A=\frac{2A-A\sqrt{2}}{a}$, hvoraf sees; at i lige Distancer fra Kræfternes Centrer d, k, n, ere de imod dem drivende Kræfter lige store, følgelig forrette disse tre Inertier udi samme Tid deres Sving med hinanden, og komme udi samme Tid til BC.

§. 362.

Man finder derfor i dette Tilfælde, ligesom før, Længden af det simple Pendul, der svinger udi samme Tid med den hele Streng og dens Inertier $=\frac{aM}{(2-\sqrt{2})P}$. Deraf

Deraf igien findes den Mængde Sving, som en saadan Streng kan giøre i den Tid, da et Pendul af den Længde D svinger engang, $= \sqrt{\frac{P.D.(2-\sqrt{2})}{\sqrt{aM}}}$, og om den hele Inertie i a, b, $c = M$, saa den i $a = \frac{1}{3}M$, og $a = \frac{1}{4}BC$, bliver Svingenes Antal i samme Tid $= 2\sqrt{\frac{DP.(6-3\sqrt{2})}{\sqrt{M.BC}}}$.

§. 363.

Man finder ligeledes, om fire, fem og flere lige store Inertier antages at ligge over en saadan Snoer eller Streng lige langt fra hverandre, at de dem imod BC drivende hastiggiørende Kræfter ere i lige store Distancer fra de til dem svarende Punkter i BC, (der kunne ansees som lige saa mange Kræfternes Centrer,) altid lige store. Hvoraf man seer 1) at paa samme Maade, som for, saavel det simple Penduls Længde, som Antallet af Svingene, i en vis given Tid kunde findes for saa mange Inertier, som man selv vil. 2) At da man i en heel musikalsk elastisk Snor kan ansee samtlig Inertierne som at være lige store, og at staae lige langt fra hverandre, saa kunne dens Sving i en given Tid ligeledes paa selvsamme Maade beregnes.

§. 364.

Nemlig, forestiller man sig, Fig. 13. at AGF er en saadan Streng, som fra at hvile udi AEF, er bøiet til at ligge i den krumme Linie AGF,

Denne Bevægelse bestemmes i en heel musikalsk Streng.

AGF, da om man anseer den, som belagt overalt med smaa Iuertier, hvis Distance er BK = KD = dx, AB = x, Ba = y, da er $cb = dy = fd$, $fe = -ddy$, og $de = dy + ddy$, dersom videre AF = $2l$, Tyngden af den hele Snor = $2p$, og man søger den hastiggiørende Kraft udi c.

Da bliver, som før, den Kraft udi c, som haver sin Oprindelse fra A, og som driver imod $K = \frac{cb}{ac} P = \frac{dy}{dx} P$; den derimod, som i c ligeledes kommer fra en ligesaadan Tyngde udi $F = -\frac{ed}{ef} P = -\frac{(dy+ddy)}{dx} P$, saa den hele Pression udi $c = -\frac{ddy}{dx} P$, hvilket maa divideres med Inertiens Mængde udi c, at den hastiggiørende Kraft kan faaes.

Da nu $2l : 2p = dx : \frac{p}{l} dx$, saa bliver den hastiggiørende Kraft udi c, der driver imod $C = -\frac{lddy}{dx^2} \cdot \frac{P}{p}$, som er proportionert y, og følgelig bliver $\frac{-lddy}{dx^2} \cdot \frac{P}{p} = \frac{y}{n}$, n er en bestandig Størrelse, som efter det forhen sagte tilkiendegiver Længden af det simple Pendul, der svinger i samme Tid med den hele Snor, og derfor bør bestemmes.

§. 365.

Hvad Krumningen i Strengene bliver for en Linie.

Til den Ende kan agtes, at siden $\frac{y}{n} = -\frac{lddy}{dx^2} \cdot \frac{P}{p}$, saa bliver og $-ddy = \frac{p}{P} \cdot \frac{y}{ln} \cdot dx^2$. Ansees dx som bestandig, og begge

Leddene

Leddene gjøres integrable ved at multiplicere med dy, saa man faaer $-dy\,ddy = \frac{pdx^2}{P/n}y\,dy$, og $-dy^2 = yy.\frac{pdx^2}{P/n} + B$. For at bestemme den bestandige Størrelse B, kan agtes, at Tangenten udi Midten G af den krumme Linie bliver horizontal, og derfor udi G, $dy = o$. Sættes da til dette Punkt $y = EG = a$, bliver

$$B = \frac{-paa}{P/n}dx^2, \text{ og derfor}$$

$$dy^2 = \frac{paa}{P/n}dx^2 - \frac{pyy}{P/n}dx^2. \text{ Følgelig og}$$

$$dx = \sqrt{\frac{P}{p}}.ln.\frac{\frac{1}{a}dy}{\sqrt{1 - \frac{yy}{aa}}}, \text{ hvilket er, som man strax}$$

seer, et Integral til Cirklen. Hvoraf igien flyder, at den søgte krumme Linie er den saa kaldte cykloidalske Sælskabs-Linie, eller Socia Cycloidis, hvilket endnu lettere forstaaes paa denne Maade.

Sættes $\sqrt{\frac{P}{p}}ln = \beta$, da bliver $dx = \beta\frac{dy}{\sqrt{aa - yy}}$. Sættes igien $AE = \delta$, og $AB = \delta - v$, saa at de foranderlige henføres til GE, og den ubestemte $al = BE = v$. Videre, om aB sættes $= GE - Gl = a - t$, om den ubestemte $Gl = t$. Saa forandres derved den givne Ligbed $dx = \beta.\frac{dy}{\sqrt{aa - yy}}$, til denne anden $dv = \frac{\beta dt}{\sqrt{2ta - tt}}$, og $av = \beta$. B. Sin. t. (ved B. Sin. t forstaaes Buen, hvis Sinus er t) Følgelig, om med Halv-Diametern EG,

Quart-Cirklen GnR trekkes, bliver v : B. Sin. $t = \beta : \alpha$, eller al til Gn i en bestandig Forhold, hvilket just er det Væsentlige i Sælskabs-Linien af en Cykloide, som man let seer, bliver i de Tilfælde af smaa Sving paa begge Sider af Axlen, meget langagtig.

Vedligeholder man den første Ligned, da bliver, naar den bestandige Størrelse ei udelades; $x = \sqrt{\frac{Pln}{p}} \cdot (B. \text{Sin.} \frac{y}{a}) + B.$

Da B bestemmes deraf, at naar $x = 0$, bliver $\frac{y}{a} = 0$. Men de Buer, som svare til Sinus 0, ere; om ved N forstaaes et heelt Tal, og ved C den halve Peripherie; alle de, som kunde forklares ved NC, naar i Steden for N sættes 0. 1. 2. 3. 4. 5. o. s. v. og alle andre hele Tal. Det fuldstændige Integral bliver derfor $x = \sqrt{\frac{Pln}{p}} \cdot (B. \text{Sin.} \frac{y}{a} + NC)$.

§. 366.

For nu fremdeles at bestemme Længden af det simple Pendul, n, hvilket nemlig svinger udi samme Tid med den hele Streng, maa videre agtes; at naar $x = 2l = AF$, (Taf. XIV. Fig. 13.) Da bliver $y = 0$, og derfor $2l = \sqrt{\frac{Pln}{p}} NC$, og $n = \frac{4lp}{PNNCC}$.

§. 367.

§. 367.

Deraf bestemmes nu let det Antal Sving, som Strengen AF kan giøre, imidlertid et given Pendul af den Længde D svinger engang. Thi $\frac{4lp}{PNNCC} : D = 1 : xx$ (om ved x forstaaes det søgte Antal Sving) saa man faaer $x = \frac{NC}{2}\sqrt{\frac{DP}{lp}}$. Sættes i denne Værdie af x, i Steden for $2l$, AF og $2p = L$, da bliver det søgte Antal af Sving $= \frac{NC\sqrt{PD}}{\sqrt{L.AF}}$, og om $N = 1$, (hvilket haver Sted, naar den hele Streng AF svinger omkring A og F) bliver Svingenes Antal $= \frac{C\sqrt{PD}}{\sqrt{L.AF}}$. Men $\frac{C}{1}$ er den Forhold af Peripherien til Diametern. Sættes den da at være 22 : 7. og ved D forstaaes Længden af et Pendul til Sekunder, som derfor holder i tolvte Dele af Linier $5286'''$. §. 132. F. Saa bliver det søgte Antal af Sving $= \frac{22\sqrt{5286'''.P}}{7\sqrt{L.AF}}$.

§. 368.

Da $y = 0$, saa tidt som $x = 0$, eller $x = 2l$, og §. 365 $x = \sqrt{\frac{Pln}{p}}NC$, naar ved x forstaaes den hele Længde; at derfor i Almindelighed alle de Tilfælde kunde blive til, som indeholdes udi NC, maa den hele Streng AF ei alene kunde svinge som AGF, Fig. 13. men desuden Bølgeviis, som

ABCDEF, Fig. 12. Thi da bliver $y = o$ udi A, C, E og F. Hvoraf sees, at den kan, i at svinge, knytte sig paa utallige Steder omkring sin Axel. Men hver Bølge er altid en af de foromtalte cykloidiske Selskabs-Linier, saafremt at alle Punkterne i enhver Bølge kommer paa en og den samme Tid ned til Axlerne AC, CE, EF, o. s. v.

§. 369.

Vi ville her ikke opholde os ved at vise, i hvad Sammenhæng dette staaer med Tonerne, da deres Theorie henhører til Physik. Vi ville alene til Slutning erindre, at da Svingenes Antal er $\frac{22}{7} \cdot \sqrt{\frac{5286 . P}{L . AF}}$, saa kan alt det deraf udledes, som vi forhen have sagt §. 341 og følgende i Forelæsningen.

Tavle

Tavle
over Materiernes og Verkets Indhold.

Forste Forelæsning.

Indeholder Mekanikens almindelige Grunde.

§. 2. 3. hvorom i Mekanik handles. §. 4. 5. der Materielles Beskaffenhed. §. 6. hvad Hastighed, Tid og Direktion er. §. 7—11. hvori Inertien bestaaer og dens Egenskaber. §. 12—16. forklares Beskaffenheden af den ensdanne Bevægelse, og §. 16. Kræfterne, saavelsom Kræfternes Forskiel. De ere enten Pressioner eller levende Kræfter. Den hastiggiørende Kraft er Pressionen dividert ved Massen. §. 17—26. vises Hoved-Reglerne for Pressionerne. §. 27. 28. Beskaffenheden af Bevægelsens Størrelse. §. 29—32. de imodsatte Pressioners Virkning.

Det forste Tillæg

viser Maaden at bestemme de hastiggiørende Kræfters Forhold under sig.

§. 1. 2. saavel i Henseende til Hastigheden, som Nummer i ensdan Bevægelse, saavel i Henseende til Kræfterne selv, som i Henseende til den Modstand, de forefinde.

Anden Forelæsning

handler om Tyngden, i sær om Tyngden her hos os, og de fra den nedstammende Hoved-Love i Naturen.

§. 33. hvad Tyngden er og Tingenes Vægt. §. 35. 36. at den virker som en Tingene indvendig Kraft paa alle Materiens mindste Dele ligedan. §. 37—39. der frie Fald skeer altid imod Centret. Hvad horizontale og vertikale Linier ere. §. 40. De tunge Ting falde altid i Vertikalen ned imod Jordens Center. §. 41. 42. vises Maaden at bestemme den synlige Vand-Linies Afvigning

vigning fra den sande. §. 43. 44. Tyngdens Beskaffenhed paa store Distancer er som Quadraten af Distancen forkeert. §. 45. den frie Bevægelse af Tyngden er en endsdan formeert Bevægelse. §. 46 — 48. i den ere Tiderne som Hastighederne, og de igiennemløbne Rum som Tidernes eller Hastighedernes Quadrater, naar Faldet begynder fra Tingenes Hvile af. §. 49. i samme Tilfælde kan med Hastigheden i Enden af Faldet i samme Tid det igiennemløbne Rum to gange igiennemgaaes. §. 50. De i enkelte Tider igiennemløbne Rum forholde sig som de ulige Tal. §. 51 — 57. vises, hvorledes Størrelserne af Hastighederne og af de igiennemløbne Rum i Tingenes Fald kunde findes, det ene af det andet.

Det andet Tillæg

indeholder en almindelig Theorie for Bevægelsen, og sammes Anvendelse til den retlinede i de fornemmeste enkelte Tilfælde.

§. 3 — 5. Almindelig Lighed imellem den hastiggiørende Kraft, Hastigheden og Tiden. §. 6. 7. Ligeledes imellem Kraften, Rummet og Hastigheden. §. 8. Hvad Kræfternes Center er. §. 9 — 14. Anvendelse af de forrige Ligheder til at finde Hastigheden i Sekunder og Rummet i Fødder, naar den hastiggiørende Kraft er bestandig. §. 15 — 18. alt det forrige udføres ligeledes i Henseende til Tiden, saavelsom Maaden at betiene sig af Høiden, der svarer til Hastigheden i Steden for Hastigheden selv, i sær naar man ikke seer uden paa Proportionen. §. 19. bestemmes Bevægelsen ved de bestandige hastiggiørende Kræfter, naar Faldet begynder med en vis given Hastighed. §. 20 vises Bevægelsens Beskaffenhed, naar Kraften er som Quadraten af Distancen fra Kræfternes Center. §. 21. Naar Kraften er som den Høide n af Distancen forkeert tagen. §. 22. særdeles for det Tilfælde, da Kraften er som Distancen fra Centret, udi hvilken Bevægelsen altid bliver isokron, om Kraften er den samme; og Tiderne af Faldet under sig som Quadrat-Rødderne af Centrernes absolute Kræfter forkeert tagne, naar disse Kræfter ere adskillige. §. 23. hvorimod Tiderne ere som Quadrat-Rødderne af Distancernes Kubis, om Tyngden er som Quadraten af Distancen forkeert. §. 24 — 27 vises Bevægelsens almindelige Bestemmelse endnu i almindeligere Hypotheser. §. 28 — 39 vises, hvorledes af Bevægelsens bestemte Beskaffenhed de Kræfter kunde findes, som foraarsage den.

Tredie

Tredie Forelæsning.

Den handler om Kræfternes Ligevægt under sig, og om Faldet over de skraaeliggende Linier eller Planer.

§. 58 — 69 afhandles Kræfternes Parallelogram, følgelig Maaden at opløse dem i andre ligegyldige, og i Steden for mange at gjøre Brug igien af en eneste. §. 70 vises, hvad det inklinerte Plan er. §. 71. hvad Deel af Tyngden paa det virker, og i hvad Direktion. §. 72 — 82 beviises, at saavel Hastighederne, som de igiennemløbne Rum forholde sig i dette Fald, som i Faldet efter Vertikalen, alene at den hastigtgjørende Kraft ansees som adskillig. Videre vises, at Bevægelsen over Cirklens Korder er isokron. At Hastigheden i Enden af Faldet altid er den, som vindes ved Faldet, saavel igiennem et Plans, som en krum Linies Høide. Tilligemed Tidernes Beskaffenhed af Faldet, o. s. v.

Tredie Tillæg

handler om Faldet over krumme Linier.

§. 30 vises af den almindelige Theorie for Bevægelsen det inklinerte Plans Egenskaber i Tingenes Fald. §. 31 — 33 bestemmes Kræfterne af Tyngden i Almindelighed over alle krumme Linier. §. 33 beviises, at i Faldet over krumme Linier over Krummingen i Hastigheden intet tabes. §. 35 bestemmes i samme Hypothese i Almindelighed Hastigheden. §. 36. Tiden. §. 37 — 40 anvendes det hidtil sagte til det enkelte Tilfælde af Tyngdernes isokrone Bevægelse udi Cykloiden. §. 41. 42 beviises det samme, i Henseende til smaa Cirkel-Buer, udi hvilke Bevægelsen er ligeledes isokron. §. 42 forklares den samme isokrone Bevægelse, i Henseende til alle andre dertil skikkede krumme Linier, og §. 44. under hvad Hypothese af Kræfter saa mange rette Linier, som man vil, kunde igiennemløbes i den samme Tid. §. 45 — 47 vises Maaden at finde en Mængde synkrone Linier. §. 48 — 50 gives ligedanne almindelige Regler for alle Kræfter i Almindelighed, som de fra §. 31 — 36. §. 51 og følg. vises, hvorledes man af Faldets givne Egenskaber, i Henseende til Rummet, Hastigheden eller Tiden, kan finde den krumme Linie, udi hvilken at Bevægelsen skeer. Paa denne Maade findes Lighederne til den saa kaldte Linea Isochrona, til den saa kaldte Paracentrica. Og endelig §. 53

oplöses det Probleme om Linien af det hastigste Fald ved Hielp af de isoperimetriske Methoder.

Fierde Forelæsning. Der forklares

§. 83—86. Experimentale Beviis ved Cykloiden over Tyngdens Love. Og §. 87 ligeledes Beskaffenheden af det hastigste Fald. §. 88—91 anføres Reglerne for den ensdan forsinkede Bevægelse. §. 92—97 Pendulernes Bevægelse saavel henført til Cykloiden, som naar den skeer i smaa Cirkel-Buer, der ei overgaae 15°. Tiden af Pendulernes isokrone Sving, eller Oscillation, bliver til Tiden af Faldet igiennem Pendulets halve Længde, som Peripherien til Diametern. Pendulerne svinge bedre i smaa Cirkel-Buer, end imellem Cykloidal-Lameller. Tiden af en Tyngdes Fald igiennem Buen, er til en ligesaadan Bevægelse op og ned efter Buens Korder, som 11 : 14.

Femte Forelæsning.

Om Tyngdens Center.

§. 98. Hvad Tyngdens Center er. I Anmerkningen vises, at et saadant Punkt findes ikke i Legemerne, naar Tyngden er en bestandig Kraft, med mindre at dens Direktioner tillige ere virkelig parallele. §. 99. følgelig da denne Hypothese her hos os kan antages, vises, hvorledes dette Punkt paa en mekanisk Maade kan findes udi alle Legemer. §. 100—102 vises paa adskillige Maader, hvorledes Tingene altid hvile, naar Tyngdens Center ei kan bevæge sig. §. 103. At paa horizontale Planer de tunge Ting ei kunde falde om, naar Direktions-Linien af Tyngden efter Vertikalen falder over den tunge Tings Basis. De falde i dette Tilfælde heller ikke om over inklinerte Planer, men glide ned efter dem drevne af en Deel af Tyngden. §. 104 vises, hvad Ting der letteſt kunde falde om, og efter hvad Vinkel-Bevægelse. §. 105 bestemmes Tyngdens Center i Triangler. §. 106. i Cirkel-Stykkerne. §. 107. i Cirkel-Snittene. §. 108 handles om Størrelsens Center. Om Tyngdens Center i prismatiske, pyramidale og koniske Legemer, i Særdeleshed handles om de af dem, som ere rette. §. 109 og i den neden under stiede Anmerkning forklares den Bevægelse, som visse cylindriske Legemer kunde stige ned og op efter Planerne, og bevæge sig af sig selv over de horizontale.

§. 110.

§. 110 vises, hvad der er Aarsag i at Tingene vælte sig ned over de inklinerte Planer, og at dette ikke beroer alene derpaa, at Vertikalen fra Tyngdens Center falder uden for Basis, men tillige paa Planets Modstand imod Basin. §. 111 forklares Bevægelsen af den dobbelte Keile, som ligeledes ruller op efter Planet og efter som det synes ikke ned efter det.

Den siette Forelæsning

handler om Kræfterne af Tyngden deres Ligevægt under sig.

§. 112—118 forklares de umaterielle ubøielige Vægtstængers Beskaffenhed, og at over dem de Inertier hvile, der i Størrelse forholde sig som Hastighederne forkeert, hvormed de i ensdan Bevægelse skulde bevæges. §. 120. 121. Hvorledes de Ting kunde bringes til at hvile, i hvilke Tyngdens Center falde uden for det Materielle i det Ledige. §. 123. 124. Hvorledes for flere Tyngder det fælles Tyngdens Center kan findes. §. 125 — 130 forklares Pressionernes Moment eller relative Kræfter. I al Hvile ere Momenterne af Tyngderne paa begge Sider af Tyngdens Center lige store. I øvrigt vises, hvorledes, naar disse Momenter paa begge Sider ei ere lige store, Overvægten kan bestemmes.

Fierde Tillæg viser fra

§. 54—56. Den stigende Tyngdernes Bevægelses Beskaffenhed i Følge den almindelige Theorie for Bevægelsen. §. 57 bevises den almindelige Regel, hvoreſter Tyngdens Center kan findes. §. 58 — 60. i rette Linier. §. 61 — 63. i de Figurer, der have en Axel, som Parallelogrammet og Parabolen, udi hvilken Tyngdens Center falder, og paa hvilken alle Tyngdens Dele virkelig tynge. Hvilket §. 64 og anvendes til de Tilfælde, da Tyngdens Dele henføres til en anden Axel perpendikulær paa den foromtalte. §. 65 vises endnu almindeligere, hvorledes, naar af Delenes enkelte Centrer og det fælles Tyngdens Center to ere givne, det tredie da altid kan bestemmes. §. 66. hvorledes Tyngdens Center kan bestemmes endnu almindeligere i Figurerne ved to efter Behag antagne Axler. Videre §. 65. Tyngdens Centers Bestemmelse i Figurer af ulige Arme; saa og § 69 i afbrudte Figurer. §. 70 bestemmes Tyngdens Center i Cirkel-Buer. §. 71. i Buerne i Almindelighed. §. 72—74 vises den alleralmindeligste Maade at bestemme Tyng-

dens Center paa i Legemerne, ved at henføre dem til 3 Planer. §. 75 vises, i hvad adskillige Meninger Størrelsens Center kan tages, og hvad for en af dem man helst bør bruge. §. 76 — 78 vises Maaden at bestemme Tyngdens Center paa i de Legemer, udi hvilke man forud veed, i hvad Linie at Tyngdens Center ligger, som i Keilene og Pyramiderne. §. 79 vises det samme efter den almindeligere Methode. §. 80 bestemmes Tyngdens Center i lutter lette Tilfælde, de Læsere til Tieneste, som ei selv vilde bebyrde sig i forekommende Tilfælde med Udregningen. Det bestemmes nemlig i Trapezerne og i de af dem tilblevne prismatiske Legemer, i de regulære Figurer, i deres Perimetrer, ligeledes i de irregulære, og i de ved dem tilveiebragte prismatiske Legemer. §. 81 bestemmes Tyngdens Center i Kugel-Snittene. §. 82. i Ellipsoiderne. §. 83 bevises, at de enkelte Tyngder multiplicerte hver for sig med deres Distance fra et horizontal Plan, give det samme Moment, som deres fælles Tyngdes Center, multiplicert alene med sin Distance fra dette Plan.

Syvende Forelæsning

indeholder Fortsættelsen om de svingende Tyngder eller Pendulerne.

§. 132 bevises ved Hielp af Pendulerne, at en Tyngde falder fra sin Hvile af i det første Sekond af Tid $15\frac{1}{12}$ Pariser Fod. §. 133 det samme ved Forsøg. §. 134. at Pendulernes Længder forholde sig som Quadraterne af Tiderne, udi hvilke de svinge. §. 135 vises, hvorledes af Tiderne, udi hvilke to Penduler svinge, og den enes Længde, den andens Længde kan findes. §. 136 det samme i Henseende til Tiderne af Svinget. §. 137 — 139 forklares Maaden af Svingenes givne Mængde i en given Tid at finde Længden af et Pendul til Sekonder, hvis Længde er $\frac{881}{2}$ Linie. §. 140 — 145 vises Brugen af Pendulerne i et og andet praktisk Tilfælde, men i sær i Uhrene; og i det at man ved dem kunde finde et almindeligt og for Eftertiden uforglemmeligt Maal, ved at bestemme et Sekund Penduls noie Længde til en vis Grad af Bredden, thi under adskillige Grader af samme er den forandertig.

Ottende

Ottende Forelæsning

handler om den nylig omtalte den naturlige Tyngdes Foranderlighed.

§. 146 — 147 vises, at Tyngden ei er den samme overalt i Verden, og hvorledes at dette er fundet ved Hielp af Pendulerne. Hvilke desuden vise §. 148 at Vægten i Tyngderne er Materiens Mængde proportionert. §. 149 — 151 vises, hvorledes af Pendulernes større eller mindre Længde Tyngdens Adskillighed kan sluttes. §. 152 — 155 vises Beskaffenheden af Svingets Center i de sammensatte Penduler. §. 155 vises Maaden, at flytte samtlig Inertierne i et System om til et eneste Punkt. §. 156. 157 og i dens Anmerkning bevises Reglen for Svingets Centers almindelige Bestemmelse. Det anvendes §. 158 til et Exempel. §. 119. 160 bestemmes Svingets Center, saavel naar Figurerne drives paa Siden, som hen efter Grund-Linien i Figurerne, saa og i Legemerne i de fornemmeste og nyttigste Tilfælde.

Femte Tillæg

handler udførligere om Pendulerne og det i den ottende Forelæsning anførte. Fra

§. 84 — 91 anføres Beviserne, hvoraf sikkert kan sluttes at Materiens Mængde er Vægten proportionert, og af Pendulernes adskillige Længder Tyngdens Foranderlighed paa adskillige Steder i Verden. §. 92 vises Brugen af Cykloiden til at bestemme i Almindelighed Tiden af de isokrone Bevægelser. §. 93 bevises Reglen for Svingets Center paa en endnu direktere Maade. §. 95 — 101 anvendes Reglerne for Svingets Center til en Mængde tilfældes Opløsning i de rette Linier. §. 103 — 114 udregnes Svingets Center i Svinget hen efter Basin, i Parallelogramerne, Trianglerne og Cirkel-Stykkerne, i hvorledes de end blive ophengte o. s. v. §. 115 bevises, at det simple isokrone Penduls Længde altid bliver det samme, saa længe som i det samme System af Legemer Henge-Punktets og Tyngdens Centers Distance bliver uforandret. §. 117. at Svingets Center falder altid under Tyngdens Center, og at Forskiellene imellem Svingets og Tyngdens Center ere altid Distanceerne imellem Tyngdens Center og Henge-Punktet forkeert Vils proportionerte. §. 118 — 119 vises Nytten af disse Propositioner i de nyttigste Exempler,

og §. 120. at Henge-Punktet og Svingets Center indbyrdes kunde forbyttes, uden at det simple isokrone Penduls Længde derved forandres. §. 121 bevises Reglen for Figurernes Sving paa Siden. Deraf bestemmes videre Svingets Center i alle Tilfælde. §. 122. 123. i Parallelogrammerne. §. 124—126. i Trianglerne. §. 127. i de skieve Figurer, v-d Hielp af de rette. §. 128. i Parabolen. §. 129. i Cirkel-Stykkerne og Cirkel-Snittene. §. 131 bevises Reglen for Svingets Centers Bestemmelse i Legemerne i Almindelighed; men i Særdeleshed §. 132. 133. i Kuglerne. §. 134. i Keilerne. §. 135. i Cylindrerne. §. 136. i parabolske Konoider.

Den niende Forelæsning

afhandler Central Kræfterne i den cirkulære Bevægelse.

§. 162 — 166 forklares Central-Kræfterne udførlig, saavelsom, hvorledes Hastigheden kan hæve Tyngden. §. 167 — 169 anføres de letteste Forsøg, hvorved dette kan bekræftes. §. 170. 171 vises Forskiellen imellem Centripetal- og Centrifugal-Kraften. §. 172. begge ere Pressioner. §. 173—177 vises, at Central-Kræfterne ere som Quadraterne af Hastighederne dividerte med Halv-Diametrerne o. s. v. §. 177. 178 vises, naar Central-Kræfterne ere som Diametrerne, og naar de ere som Diametrerne forkeert. §. 179. 180. at naar Hastigheden i cirkulær Bevægelse er den, som vindes ved Faldet igiennem Fierde-Delen af Diametren, da bliver Centrifugal-Kraften saa stor som Tyngden, og §. 181. at en Kugle derfor kan skydes ud med en saadan Hastighed, at, om ingen Modstand var, den siden idelig skulde blive ved at bevæge sig omkring Jorden. §. 182. 183 vises, med hvad Hastighed Maanen skulde kastes ud i denne Drabants Distance fra Jorden, paa det at den kunde ved Tyngden omkring samme bevæge sig paa samme Maade, som nu virkelig skeer. §. 184 forklares, hvad der i Almindelighed udfordres til at en saadan Bevægelse kan blive til i Naturen, som Planeternes. §. 185—187 agtes, at Bevægelsen i dette Tilfælde er i Cirklen altid ensdan; og i Anmerkningen, at saa tidt som Bevægelsen skeer i en Cirkel, forholder Central-Kraften sig til den naturlige Tyngde, som Holden igiennem hvilken Hastigheden af Bevægelsen ved den naturlige Tyngde kunde vindes til Cirklens halve Halv-Diameter. §. 189. 190 vises den almindelige Aarsag til den ucirkulære Bevægelse i andre krumme Linier, og §. 191. 192. i hvad Hypotheser

af

af Hastighed Kræfterne blive som Quadraterne af Diametrerne forkeert, og som disses Kubi. §. 193 forklares, for hvorvidt Central-Kræfterne beroe paa Materien.

Det siette Tillæg

afhandler dette udførligere.

§. 137. 138 vises, hvorledes i Almindelighed i Cirkulær-Bevægelse af de givne Kræfter Hastigheden kan findes, og §. 139 Tiden. §. 140. 141. hvorledes af Omløbs-Tiderne Central-Kræfterne kunde findes. §. 142—145 forklares Pendulernes koniske eller hvirvlende Bevægelse. §. 145 — 147 bestemmes i den Hastighederne og deres fornemmeste Egenskaber. §. 148. 149 ligeledes Tiden. §. 150 — 153 forklares det Isokrone i deres Bevægelse. §. 153 — 157. i hvad Tilfælde Centrifugal-Kraften er saa stor som Tyngden. Disse Sving sammenlignes videre med Pendulernes o. s. v.

Den tiende Forelæsning

viser Nytten af Central-Kræfterne i at kiende ved deres Hielp de store Bevægelser og de store virkende Kræfter i Naturen.

§. 194 — 197 vises, at i den hele Jord er ikke en saadan Tyngde, som i dens Dele, saa den paa denne Maade ei kan falde. §. 197 forklares Aarsagen til de himmelske Legemers uophørlige Bevægelse udførligere. §. 198. 199 forklares de Regler, hvorefter kan sluttes, om Kræfterne ere centrale, og disses nødvendige Beskaffenheder. Hvilket endnu udføres videre med det didhen hørende fra §. 199 — 203.

Den ellevte Forelæsning

beviser, at Central-Kræfterne i Naturen ere som Quadraten af Distancen forkeert.

§. 204 — 207 bevises dette af Keile-Snittenes Natur. §. 207. 208. at af denne almindelige Lov i Naturen Tyngden her hos os er en Følge. §. 209. at Jorden og alle Planeterne tynge imod Solens Center, ligesom de tunge Ting her hos os imod Jordens. §. 210. at den Central-Kraft, som driver Maanen, er den samme Tyngde imod Jordens Center, som den er, med hvilken Tingene her hos os falde. §. 211 forklares, hvorledes det beroer paa Hastighedens

stighedens Størrelse, som Tingene kastes ud med, hvad heller de skulle beskrive den ene eller den anden af Keile-Snittene, og i hvad Tilfælde enhver af dem maa beskrives. §. 212. 213 vises, at Central-Kraften bliver i sig adskillig, efterfom den driver imod adskillige Punkter af eller i Legemets Løbe-Bane.

Det syvende Tillæg

indeholder 1) Central-Kræfternes almindelige Theorie.

§. 158 inddeles de i Normal- og Tangential-Kraften, hvis almindelige Værdier bestemmes. §. 159—161 vises, hvorledes i Central-Bevægelsen udi krumme Linier Hastigheden kan bestemmes. §. 162. Det samme i Henseende til Tiden. §. 163 gives almindelige Regler for Løbe-Banens Bestemmelse. §. 165—169 vises Maaden at forandre Løbe-Banens forhen fundne og ofte mindre bequemme Ligheder til andre imellem retlinede Koordinater. Siden gjøres Anvendelsen af det forrige i den Tilfælde, da Central-Kraften er som Quadraten af Distancen, eller som dens Kubus, begge forkeert tagne. §. 170—172 beviser, at Bevægelsen maa altid skee i en af Keile-Snittene, naar Central-Kraften er som Quadraten af Distancen forkeert, og man viser i hvad enkelte Tilfælde at Bevægelsen kan have Sted i enhver af dem for sig. §. 173 bevises, at i denne Hypothese blive Omløbs-Tiderne som Quadrat-Rødderne af Ellipsernes store Axler deres Kubis. §. 174 forklares at Buen bliver en Ellipse, til hvis Center Central-Kræfterne drev, om disse sidste vare proportionerte Distancen fra Centret. Var derimod Central-Kraften som Kubus af Distancen forkeert, kunde Bevægelsen paa mange Maader skee i Spiraler, og Planeterne kunde i en endelig Tid falde ind i Solen.

2) vises, hvorledes af den givne krumme Linies, eller af Løbe-Banens Beskaffenhed Central-Kræfterne kunde findes, og det i et dobbelt Tilfælde.

a) §. 175. Naar den krumme Linie er ubevægelig og ruller ei om Kræfternes Center. b) §. 176. Naar Løbe-Banen er bevægelig og dreier sig omkring Kræfternes Center.

Det

Det ottende Tillæg

handler om Kanalernes perpendikulære Trykning af de Legemer, som bevæge sig ned over dem.

§. 178 — 193 afhandles dette saavel for de faldende, som stigende Tyngder. §. 194 endnu i andre Hypotheser. §. 195 bestemmes den Linie, som overalt af en faldende Tyngde bliver trykt med en Kraft, saa stor som dens Vægt.

Den tolvte og trettende Forelæsning

afhandler de tunge Tings Bevægelse, som skydes eller kastes ud.

§. 214 — 220 vises, at i de udkastede Legemer Bevægelsen hen efter Horizonten er en ensdan Bevægelse, og hvorfor samtlig disse Legemer bør ansees som at beskrive Paraboler, saa tidt som under Bevægelsen ingen Modstand møder. §. 221 bestemmes Parabolens Diameters Parameter af den givne Inklinations-Vinkel, og af Skuddets horizontale Længde. §. 222 ligeledes Skuddets største Høide. §. 223. Parametern af Parabolens Axel. §. 224 bevises, at saa længe Hastigheden i Begyndelsen af Skuddet er den samme, forholde sig de under adskillige Vinkler giorte horizontale Løb som Sinus af de dobbelte Forhøinings-Vinkler, skiønt under enhver nye Forhøinings-Vinkel Parabolen bliver en anden. I disse Paraboler forholde sig Parametrerne til Axlerne, som Quadraterne af Forhøinings-Vinklernes Cosinus, men de største Høider, som Quadraterne af samme Vinklers Sinus, o.s.v. §. 225 vises, at det længste Kast hen over Horizonten skeer under 45° Forhøining. §. 226 vises i Exempler, hvorledes af et givet Prøve-Skud de under andre Vinkler giorte Skuds horizontale Last kunde findes. §. 227. at Parametern af Parabolen er to gange Skuddets horizontale Længde under 45°. Og §. 228 — 230. at Hastigheden, hvormed Tingene i Begyndelsen skydes eller kastes ud, findes altid ved Faldet igiennem Fierde-Delen af Parametern o.s.v. §. 231 bestemmes i denne Bevægelse Tiden. §. 232 vises, hvorledes Udregningerne kunde gieres for de Ting, der ei ligge i, men som ere forhøiede over Horizonten, paa det at de kunde treffes. §. 233 — 236 bestemmes alt det forrige uden Udregning ved geometrisk Construktion. §. 237 viser, i hvad Tilfælde denne Theorie stemmer med Erfaring.

Det Niende Tillæg

viser alt det forrige af Bevægelsens almindelige Theorie, og indeholder desuden andre nye Anmerkninger fra §. 196 — 205.

Den Fiortende Forelæsning

handler om Bevægelsens Hindring, naar den skeer i flydende Materier, som staae imod.

§. 238. 239 viser, at Inertiens Modstand i en flydende Materie er som Quadraten af Hastigheden. §. 240. at Modstanden af Delenes Tenacitet er derimod Hastigheden proportionert. §. 241. 242. den første Hypothese træffer best ind med Erfaring, naar Hastigheden er stor; den sidste, naar denne er liden. Ingen af begge stemmer fuldkommen med Naturen. §. 243 — 253 anføres i den første Hypothese de fornemmeste Bevægelsens Beskaffenheder i flydende Materier, 1) naar Legemerne bevæges med en simpel Hastighed, uden at drives tillige af Tyngden. 2) Naar Legemerne stige op efter, drevne tillige ned efter af Tyngden. 3) Naar de falde ned efter. §. 254 — 255 handles om Modstandens adskillige Virkninger i tykkere og tyndere flydende Materier, saavelsom paa Ting af større og af mindre Masse. Overalt vises, at Bevægelsen er her overmaade adskillig fra den frie Bevægelse. Og §. 256 — 259 vises det samme i Faldet over krumme Linier, saa og at Cykloidens isokrone Egenskab her taber sig. Med videre.

Tiende Tillæg

forklarer udførligere Beskaffenheden af Bevægelsen udi flydende Materier.

§. 207 — 220 udvikles det Tilfælde af retlinet Bevægelse, da Legemerne bevæge sig med en vis given Hastighed imod en overalt lige tyk flydende Materie, uden tillige at drives af andre Kræfter. §. 208 vises, at Hastigheden da ikke taber sig uden i en uendelig Tid. Og ei heller §. 209. uden igiennem et uendeligt Rum. §. 212 undersøges Hastigheden, naar Modstanden er som andre Høider af Hastigheden end Quadraten, hvilke §. 213. om ere større end Hastigheden, da tabes endnu ikke denne uden igiennem et uendeligt Rum, men §. 214. 215. om Modstanden er som Hastigheden, eller retter sig efter

en

en endnu mindre Høide af samme, da tabes denne altid over et endeligt Rum. §. 216 bestemmes Tiden i Almindelighed i alle disse Hypotheser. Saa tidt som §. 217—220. Modstanden er af en større Høide, end Hastigheden simpel hen tagen, tabes denne sidste aldrig, uden i en uendelig Tid. Er den Høide, efter hvilken den retter sig, som Hastigheden, bliver Tiden vel uendelig, men i mindste Grad. Er den Høide, hvorefter Modstanden retter sig, mindre end Hastigheden simpel hen taget, bliver Tiden af Bevægelsen derimod endelig. §. 221—231 undersøges Egenskaberne af Faldet ned efter i lige tykke flydende Materier, hvis Modstand §. 22 er som Hastighedens Quadrat, da Hastighed og Tid i Almindelighed bestemmes. §. 223. 224 vises, at den største Hastighed, som vindes ved Faldet, naaes i denne Modstandens Hypothese vel ikke, før et uendeligt Rum er blevet igiennemløbet, men §. 225. Tingene kunde dog ikke vinde ved Faldet, uden en endelig Hastighed. §. 226 227 udledes heraf den før fundne Hastighedernes Henseende til Rummet i det frie Fald, og siden i meget tynde Materier, som staae imod. §. 228 udvikles det Tilfælde, da Tingene begynde Faldet med en vis given Hastighed. §. 229—131 bestemmes Tiderne af Faldet, saavel naar det begynder uden, som med Hastighed. Er Modstanden som Hastighedens Quadrat, naaes den største Hastighed ikke før i en uendelig Tid, om Faldet begynder fra de tunge Tings Hvile. Derimod, naar de begynde at falde med en given Hastighed, kan denne være saa stor, at den af Modstanden strax svækkes, og naar Modstanden imod Hastigheden bliver saa stor som den drivende Kraft af Tyngden ned efter, bevæges Legemet siden med enedan Bevægelse. §. 232—244 undersøges denne samme Bevægelse, naar Tingene med en vis given Hastighed bevæge sig op efter; og §. 232 i Almindelighed: siden i den Hypothese, at Modstanden er som Hastighedens Quadrat. §. 234 bestemmer da Hastigheden, som §. 235 altid taber sig igiennem et endeligt Rum. §. 236 bestemmes Hastigheden i meget tynde flydende Materier. §. 237—239. i Almindelighed Tiden. Hvilken §. 240 altid bliver endelig. §. 241 bestemmes af Tiden, udi hvilket Stigningen og Faldet begge skee, saavel Rummet, som Hastigheden, og af dem igien de enkelte Tider. §. 242 udføres dette videre for den Tilfælde, da de flydende Materier ere meget tynde. §. 244—248 handles om den retlinede Bevægelse igiennem Materier, som ei ere overalt lige tykke. §. 249—256 vises den retlinede

Bevægelses Beskaffenhed i flydende Materier, i sær i de, som overalt staae endsdan imod, saa tidt som Tingene tillige drives af Central-Kræfter.

Derpaa handles om den krumlinede Bevægelse i flydende Materier, og 1) naar Kræfternes Direktioner ere parallele.

§. 257. 258 anføres de almindelige Regler. 259—275 giøres Udregningerne i Almindelighed i den Hypothese, da Kraften er bestandig og Modstanden som Quadraten af Hastigheden. Men i Særdeleshed vises i tynde flydende Materier, som Luften, hvad for algebraiske Linier der mest nærme sig til den sande de udkastede Tings Løbe-Bane, hvilken nu ikke længer er en Parabol. §. 276 vises, hvorledes i den Hypothese af bestandige Kræfter, naar Løbe-Banen er given, Modstandens Lov i Almindelighed kan bestemmes. Det samme §. 277 endnu almindeligere. Og §. 278 af Kræfterne og Løbe-Banen at bestemme den hastiggiørende Kraft.

2) Naar Kræfternes Direktioner ei ere parallele.

Da bestemmes fra

§. 279—286 saavel Hastigheden i Almindelighed, som Tiden og Løbe-Banen. §. 283 vises, hvad Kræfter der behøves til at i en flydende Materie den samme Løbe-Bane kan beskrives, som ellers ved andre i den frie Bevægelse. §. 284 forklares, hvorledes af den givne Modstand og Løbe-Banen Kræfterne kunde bestemmes, og §. 285 af de givne Kræfter og af den givne krumme Linie at finde Modstandens Lov.

I den tredie Afdeelning handles om Faldet ned efter krumme og rette Linier, naar de hastiggiørende Kræfter ere bestandige og virke efter parallele Direktioner. Til

§. 289 afhandles dette i Hensende til Modstanden ubestemt Vilkaar given, siden i den Hypothese af Hastighedens Quadrat. §. 290—300 bestemmes Bevægelsen saavel op som ned efter inklinerte Plaaer, og der vises, hvorledes de for der uhindrede Fald i Forelæsningen givne Regler her ikke meer have Sted. §. 300 bestemmes Bevægelsens almindelige Beskaffenhed over krumme Linier. §. 361 bevises, at i Faldet den største Hastighed ei saaes i det Punkt af Linien, hvor Tangenten er horizontal, men i et andet, hvor Sinus totus forholder sig til Cosinus af den Vinkel, hvilken Tangenten i det Punkt gior

med

med Vertikalen, som Tyngden til Modstanden udi samme Punkt. §. 302 bestemmes Tiden. §. 303. 304. Bevægelsens Beskaffenheder op efter. §. 305 — 308 bevises, at Bevægelsen i Cykloiden bliver i flydende Materier ikke isokron, med mindre at Hastigheden selv er overmaade liden.

Den femtende Forelæsning

handler om de levende Kræfter.

§. 260 — 278 saavel i Forelæsningerne, som i Anmerkningerne, vises fuldkommen, hvorpaa Vanskeligheden i Henseende til Kræfternes Maal beroer, og at de levende Kræfter ere som Massen i Hastighedens Quadrat. Ligeledes vises den sande Forskiel imellem Pressionerne og disse Kræfter. §. 279 og i den neden under stiede Anmerkning vises, hvorledes de levende Kræfter ved Kræfternes Parallelogram kunde opløses udi andre.

Den sextende Forelæsning

handler om Bevægelsens almindelige Beskaffenhed i Tingenes Sammenstød.

§. 280 — 285 forklares de haarde, blode og elastiske Tings Adskillighed og Overensstemmelse i disse Henseender. §. 286 — 294 forklares og bevises de almindelige Regler, af hvilke i alle enkelte Tilfælde af det direkte Stød alt kan opløses. I Anmerkningen til §. 291 forklares en Paradoxie, som i denne Lærdom kunde synes at være.

Det ellevte Tillæg

handler om den relative Bevægelse.

§. 309. dens Hoved-Idee. §. 310 — 313 bestemmes i den retlinede Rummet og Tiden. §. 314. ligeledes, naar Tingene bevæges i parallele Linier. §. 315. 316. naar Bevægelsen skeer i koncentriske Cirkler. §. 317. 318. naar Bevægelsen skeer i sammenløbende Linier, og begge Tingene gaae paa en Tid ud fra et og det samme Punkt. §. 319. naar de ei paa en Tid bevæge sig ud fra det samme Punkt. §. 320 — 326 afhandles det, som angaaer denne Bevægelse, uden at antage den ene af Tingene som hvilende.

Den syttende Forelæsning

i den gjøres Slutninger i enkelte Tilfælde af de før fundne Regler for Tingenes Sammenstød.

§. 295. I Almindelighed, naar elastiske Ting gaae med hverandre, eller imod hinanden. §. 297. naar en af disse Ting hviler. §. 298. naar Hastigheden før Slaget var i begge lige stor. §. 299. 300. i andre almindeligere Tilfælde. §. 301 — 303 anføres Reglerne for de haarde og bløde Ting. §. 303 — 306 vises, at Bevægelsens Størrelse i Tingenes Sammenstød ei altid bliver den samme, og at den derfor ikke kan være det rette Kræfternes Maal. §. 308. 309 bevises derimod, at de levende Kræfters Sum ei forandres ved Stødet. §. 310. at de levende Kræfter ikke tilintetgjøre hverandre i de elastiske Tings Sammenstød.

Den attende Forelæsning viser

§. 311. at Tyngdens Centers Bevægelse i Sammenstødet aldrig forandres. §. 312. den relative Hastighed heller ikke. §. 313 — 316 undersøges i adskillige Tilfælde Hastighedernes Forandringer i begge Legemer ved Slaget. §. 317 vises, at Hastigheden utvivlig kan formeres ved det middelbare flere Legemers Sammenstød.

Det tolvte Tillæg viser

§. 327 — 334. at de experimentale Beviis over Stødets Kræfter treffe i Udregningerne nøie ind med Theorien. §. 213 — 214 afhandles udførligere det forhen sagte om det middelbare Stød.

Den nittende Forelæsning handler

1) om Stødets Center, og viser

§. 319. at Stødets og Svingets Center ere begge et og det samme Punkt. §. 320 forklares 2) Bevægelsens Beskaffenhed, naar Ting støde an paa andre, som ei kunne vige. §. 321 — 324 vises 3) Beskaffenheden af Tingenes Reflexion, at nemlig Anstøds Vinklen er saa stor som den, under hvilken de springe tilbage, naar de treffe en fast Modstand. §. 325 vises under hvad Vinkel de bør støde an paa et Plan, paa det at en efter en vis Stilning given Ting kan treffes. §. 326. hvoraf den ufuldkomne Elasticitet kan maales.

§. 327

§. 327—332 vises 4) det skieve Støds Beskaffenhed, og de ved det i Almindelighed foraarsagede Bevægelsers Bestemmelse, naar begge Kuglerne kunde bevæge sig frit. §. 333. at Tyngdens Centers retlinede Bevægelse forandres heller ikke ved disse Slags Sammenstød. § 334. i hvor mange Legemer at der end støde sammen. Endelig afhandles 5) §. 336—338 Egenskaberne af det ekcentriske Stød. Man viser, at det forvolder en omrullende Bevægelse, hvis almindelige Egenskaber videre forklares i Anmerkningen. Og man viser §. 338, at den omrullende Bevægelse ei hindrer den fortgaaende.

Det trettende Tillæg

forklarer de mekaniske Methoder, som grunde sig paa det Princip, at Naturen i sine Handlinger søger altid et Mindste.

§. 336 anmerkes, at det Princip om det Mindste i Naturens Handlinger er i sig indirekt. Desagtet §. 337 iagttages det i Henseende til Kræfternes Tab i de haarde og bløde Tings Sammenstød. §. 338. ligeledes i det ekcentriske. §. 339 — 41 forklares deraf en bequem Maade at omflytte Inertien paa, og af den igien. §. 342—348. det ekcentriske Støds Beskaffenheders fulde Bestemmelse. §. 349 vises, hvorledes af et saadant Mindste i Virkningen Tingenes Reflexion eller Tilbage-Spring kan forklares. Og endelig §. 350, at i Kræfternes Ligevægt et saadant Mindste altid findes. Hvoraf flyder §. 351. at i Tingenes Hvile Tyngdens Center altid ligger enten i sin høieste eller laveste Stilning. §. 352 forklares dette samme Princip, for saa vidt som man mener, at det i al frie Bevægelse kan finde Sted.

Tyvende Forelæsning handler

Om de elastiske Tings smaa Bevægelser, eller om den zittrende Bevægelse.

§. 340. i elastiske Strenge, som spendes af meget smaa Kræfter, mærkes fast ingen elastisk Bestrabelse. §. 341. ei heller naar de spendes af meget stærke; men derfor alene, naar de spendes af maadelige. §. 342—251 forklares disse Virkningers Beskaffenhed, og den af dem foraarsagede isokrone

Bevægelse.

Bevægelse. §. 352 vises, at denne Theorie ydermere kan passe sig til Bevægelsen af tynde elastiske svingende Plader.

Fiortende Tillæg
forklarer dette Slags Bevægelser udførligere.

§. 353 — 355. Naar en immateriel Streng svinger med en eneste Inertie. §. 356 — 358. med to. §. 359 — 362. naar den svinger med tre. Fra §. 363 til Slutningen vises deraf videre de almindelige Regler for saa mange Inertier, som man vil. Endelig og for en heel Materiel-Streng af meget liden Tykkelse. Den krumme Linie bestemmes, hvilken denne sidste under Bevægelsen antager, og man beviser, at den er den saa kaldte Socia Cycloidis.

Tryk-Feil.

Side.

5. §. 4. lin. 16. i Steden for: Brende-Punkter, læs: Brende-Linien.
13. - 16. - 8. i St. f. §. 16. l. §. 16. 1.
15. - 19. - 16. f. de naturlige. l. de vedvarende naturlige.
17. §. 23. - 1. f. Modstanden dobbelt, Rummet det samme l. Modstanden den samme, Rummet dobbelt

51. - 17. - 7. f. du l. dx

54. - 59. - 5. f. $\sqrt{4g}$ l. $\frac{1}{\sqrt{4g}}$

59. - 22 - 20. f. = pr. l. Pr.
62. sidste Linie f. Ad l. AD
71. i Anmerkningen næst sidste Linie f. dz l. df

72. i Anmerkn. lin. 16. f. dz l. $\frac{df}{ab}$

73. i Anmerkn. lin. 14. f. Den tredie l. Den anden
74. sidste Linie for Tom. II. læs: Tom. I. p. 126.
76. §. 65. lin. 2. f. AB l. AE
85. - 82. - 6. f. EC l. EG
- 7 og 9. f. $\sqrt{GB}$ l. $\sqrt{GE}$
90. - - - f. GE l. CE
97. §. 39. lin. 8. f. §. 23. l. §. 22. 1.
101. §. 43. lin. 2. f. §. 38. l. §. 42.
107. - 48. - 20. f. DL l. CL

119. - 14. for: thi $\frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}}$ læs $\frac{-xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{\sqrt{ax-xx}}$

123. - 86. - 18. f. $\sqrt{EE}$ l. $\sqrt{FE}$
130. - 95. sidste f. faldet l. bevæget
152. - næst sidste Linie f. Perpendiklen l. Vertikalen
170. lin. 5. naar — slettes ud
177. §. 57. - 11. f. P''P, A l. P''P'A
178 - 9. f. §. 129. l §. 128
185. sidste Linie f. §. 65. l. §. 66.
186. første - f. §. 53. l. §. 63.
- lin. 6. f. $\int \frac{\sqrt{a}}{2} y dy$ læs $\int \frac{\sqrt{a}}{2} y^{\frac{1}{2}} dy$

188. lin. 10. f. $-a\int \frac{adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}} - \int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$ l. $-a\left(\int \frac{adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}} - \int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}\right)$

- lin. 11. f. a. Buen $fb.a\sqrt{2ax-x^2}$ l. a, Buen $fB - a.\sqrt{2ax-x^2}$
194. - 8. for DA læs EA
198. - 79. - 7. f. lb l. ld
221. - 9. f. første, som i det sidste l. sidste, som i det første
232. c, 2. - 3. f. $\frac{8ac+5a^2}{16c+8a}$ læs $\frac{8ac+5a^2}{16c+8a} + c$

Side.

233. d 2. lin. 2. f. $r + \frac{2rr}{5.(1+r)}$ læs $a + \frac{2aa}{5.(1+a)}$

f. » 3. f. No. 5. l. No. e.

256. » 12. f. det søgte l. det sidste

262. lin. 1. f. $\frac{1}{2}a + \frac{a^2}{16c+8a} = \frac{8ac+5a^2}{16c+8a}$ læs $\frac{1}{2}a + c + \frac{a^2}{16c+8a} = \frac{8ac+5a^2}{16c+8a} + c$

§. 121. lin. 4. f. §. 97. F. l. 98. Tillæg

293. i Anmerkn. lin. 12. f. Cirklens Halv-Diameter l. Cirklens halve Halv-Diameter

332. lin. 8. f. BI læs DI

339. » 12. f. $= p$ o. s. v. læs: $= p^2$, og følgelig $\left(\int \frac{-Kdy}{Bb^2} - C\right)^{-\frac{1}{2}}$

343. sidste Linie for $\frac{bB\sqrt{dy}}{r^2}$ læs $\frac{b\sqrt{Bdy}}{r^3}$

352. lin. 16. f. $= \frac{}{2d^2}$ læs $\frac{}{2d^2}$

» 17. f. $y:p = b:d$ læs: $y:p = d:b$

374. §. 216. lin. 8. f. AQO læs: AO

377. » 222. » 1. f. *ab* læs *nb*

391. » 235. » 6. f. AoK l. oAK

» 236. » 2. f. AIP læs: AIM

394. sidste Linie f. dy l. dy^2

414. §. 207. lin. 5. f. A læs $\sqrt{A}$

416. sidste Linie f. $2c.e^{-\frac{x}{2c}}$ læs $2c:e^{-\frac{x}{2c}}$

420. i Marginalen lin. 3. f. Høide 1. l. Høide 2.

421. i Marginalen lin. 4. f. da altid endelig l. dog altid uendelig

i Slutningen, f af Hastigheden. l. af Høiden, som svarer til Hastigheden.

422. i Margin. lin. 4 og 5. f. af Hastigheden. l. af Høiden, som svarer til Hastigheden.

423. lin. 3. f. $\frac{2}{1-2m}A^{1-m}$ o. s. v. l. $\frac{2}{1-2m}A^{\frac{1-m}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}C)^{\frac{2m^2-2m}{2m-2}} = 2A^{\frac{1-2m}{2}}C^m$

424. §. 222. f. $t = o$ s v. læs: $t = \int c^m dz : (Gc^m - z^m)\sqrt{z}$

429. nest sidste Linie f. for y h for v

432. § 232. lin. 5 og 7. f. §. 216. l. §. 221.

435. » 238. » 5. f. *ds* l. *ds*

441. » 9. f. $x^2\sqrt{x}$ l. $2x^2\sqrt{x}$

444. » 246. » 1. f. $\sqrt{aG}$. o. s. v. l. $\sqrt{\frac{aG}{a-1}}$ o. s. v.

445. » 248. » 14. f. §. 245. f. §. 247.

447. » 250. » 6. f. i v l. i F

449. » 252. » 2. f. $z =$ l. $=$

» 4. f. op efter z l. op efter

Side.

Side.

449. = sidste Linie f. $= (-\frac{1}{y^n}$ læs $= -\frac{1}{y^n}$

452. §. 256. = 5. f. $-Fe^{-\frac{x}{2F}}$ læs $-2Fe^{-\frac{x}{2F}}$

456. = 8. f. er r l. er $-r$

457 = første f. $e^{-\frac{s^2}{c}}$ læs $e^{-\frac{s}{c}}$

459. = 265. lin. 5. f. $12dx^2$). l. $12dx^2$):

= 13. f. $aG^2 : 16c^2$ l. $aG^2 : 16n^2$

463. = 274. = 2. f. $1:(1+a^2)$ l. $1:2(1+a^2)$

467. = 281. = 3. f. $-2zdp$ l. $-2zpdp$

= 4. for: sætte $= z$ læs: sætte $e^{-\frac{s}{c}}\ cb^2 : p^2 = z$

472. §. 290. f. Taf. XI. l. Taf. XII.

473. = 473. sidste, og Side 474. §. 293. lin. 1. f. $\frac{gc}{a}(1$ — o. s. v.

læs: $\frac{gc}{a} - \left(\frac{gc - aC}{a}\right)e^{\frac{ax}{c}}$

479. = 302. lin. 1. f. AE l. AD

480. = 304. for dv og §. 299. sættes dz og §. 300

512. sidste Linie f. ab. l. db.

514. i Anmerkn. lin. 10. f. $ad = fa$ l. $ad - fa$

533. §. 313. f. CD l. CE

565. lin. 16. f. det større l. det mindre

= 22 og 23. for A sættes B, og for B sættes A.

570. = 328. = 15. f. z l. P

571. = 330. = 3. f. til C l. til c

4. f. i C c l. i c, C

572. 5. f. $= (dh.c^2) : Cc^2 + Dd^2 + dc^2$ l. $= (Lb.c^2) : \overline{Cc^2 + Dd^2 + Lc^2}$

583. = 323. = 2. f. GD l. AB

591. = 333. = 6. f. FG l. Fg

605. = 3. f. sig imod l. sig i

606. = 342. = 9. f. til B. l. til V.

627. = 354. = 3. f. $d = a$ l. $ad = a$.

I Kobber-Tavlerne.

Taf. XII. Fig. 13. i Steden for ABB læs: ABD.

Tillæg til Mekaniken.

1.

Den 180 §. kan kortere og uden at udledes af §. 179. lettere beviſes saaledes: Er g Central-Kraften, eller den beſtandige Tyngde, der driver imod Cirklens Centner, hvis Diameter er d, hvad heller at denne Tyngde er saa ſtor ſom den Naturlige, eller ikke. Kaldes den Diſtance x, igiennem hvilken ved at falde ved Driften af Tyngden g, det faldende Legeme vinder i Enden af Faldet den Haſtighed, hvormed det gaaer i Cirklen; da bliver denne Haſtighed $= \sqrt{4gx}$, §. 12. Tillæg, og den Centrifugal-Kraft, ſom derved bliver til, er $= \frac{4gx}{d}$. Men fordi Bevægelſen er, i Følge Hypotheſen, circulair, og derfor Centrifugal-Kraften saa ſtor ſom Tyngden, saa bliver $(4gx) : d = g$ og $x = \frac{1}{4}d$.

2.

Den 179 §. kan paa ſamme Maade beviſes. Thi derſom Tiden igiennem Buen $= t$, og Haſtigheden $= h$, men Buen ſelv $= A$, da bliver i den ensdanne Bevægelſe i Cirklen $A = th$. Kaldes det Rum y, hvilket ved Centrifugal-Kraften imidlertid igiennemløbes med en ensdan voxende Bevægelſe, da bliver §. 16. $\sqrt{2y} = t\sqrt{g}$, og $y = \frac{t^2 g}{2} = \frac{t^2 h^2}{2d} = \frac{A \cdot th}{2d}$. Derfor bliver det

):(hele

hele Rum, hvilket kan igiennemløbes med den af Central-Kraften, i den Tid t tilveiebragte Hastighed i ensdan Bevægelse, $= (Ath) : d$ §. 49. Derfor ere disse to Rum, hvilke i samme Tid igiennemløbes, under sig, som $Ath : dth$ eller $= A : d$.

3.

Ligeledes kan §. 182. allerkorteste bevises saaledes: Fordi Tyngden i Maanens Himmel er $\frac{1}{3600} g$, naar Tyngden her hos os kaldes g; saa bliver den Hastighed, hvilken ved denne Tyngde bliver til ved Faldet igiennem $30r$, eller Maane-Banens Qvart-Diameter $= \sqrt{4 \cdot 3600 \cdot 30} +$ §. 12. Tillæg, $= \sqrt{\frac{r}{2}}$. Derfor bliver Høiden, som svarer til denne Hastighed $= \frac{r}{2.60}$ §. 57.

Fig. 1

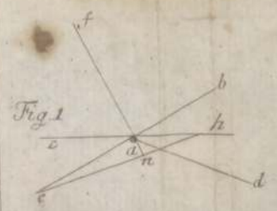


Fig. 2.

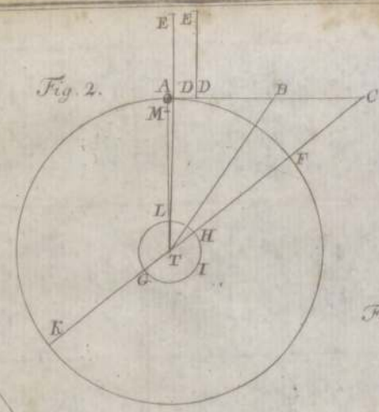


Fig. 3.

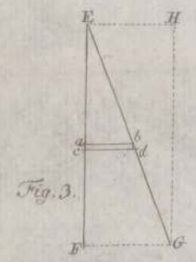


Fig. 4.

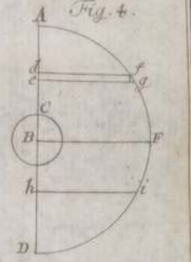


Fig. 5

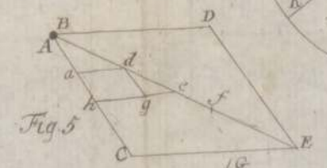


Fig. 6.

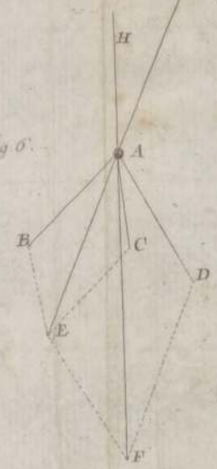


Fig. 7.

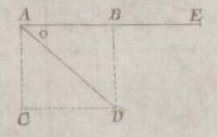


Fig. 8.



Fig. 9.

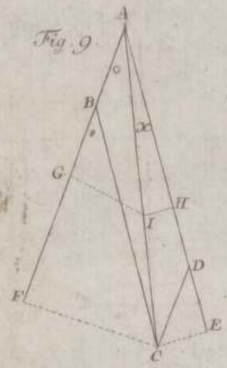


Fig. 10.

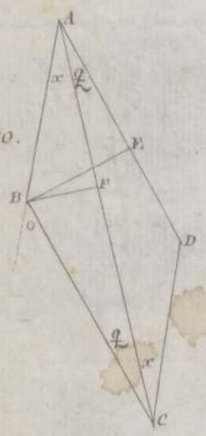


Fig. 11.

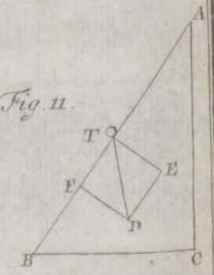


Fig. 13.

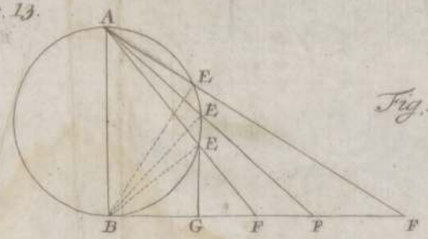


Fig. 14.

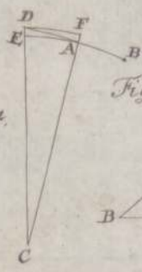


Fig. 12.

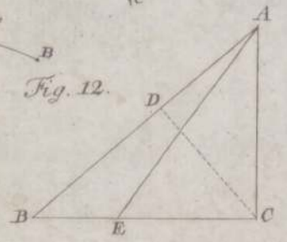
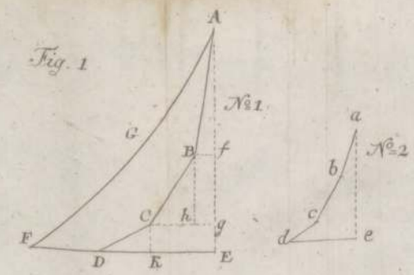




Fig. 1



№1.

№2.

Fig. 2.

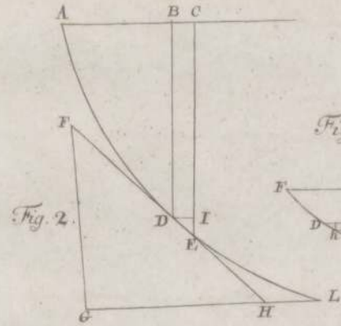


Fig. 4.

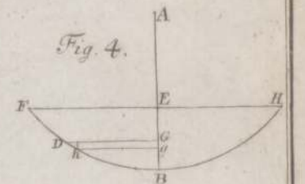
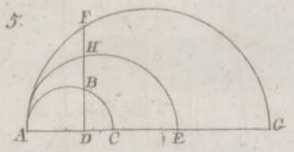


Fig. 5.



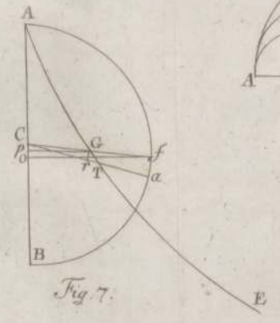


Fig. 7.

Fig. 9.

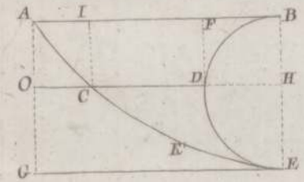


Fig. 10.

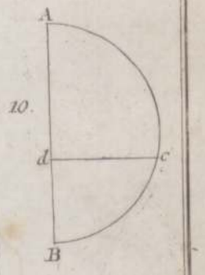


Fig. 6.

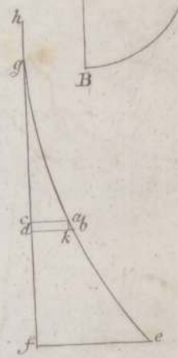


Fig. 3.

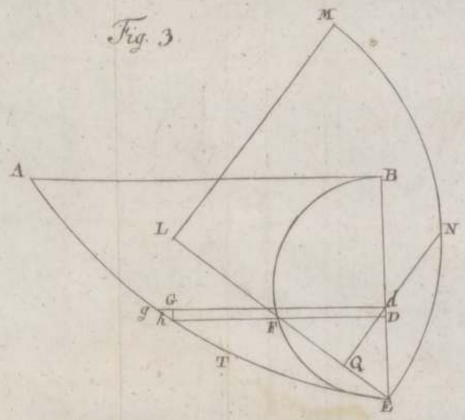


Fig. 8.

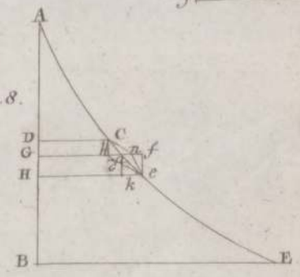


Fig. 1.

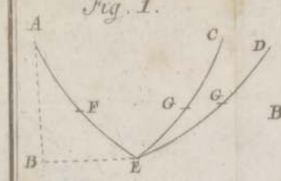


Fig. 3.

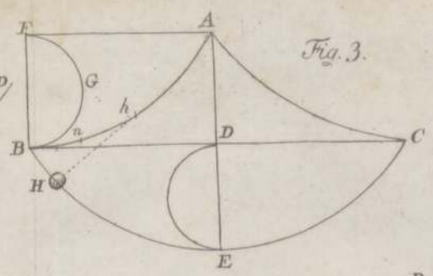


Fig. 2.

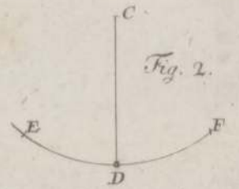
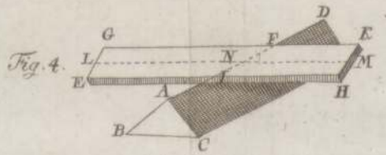


Fig. 4.



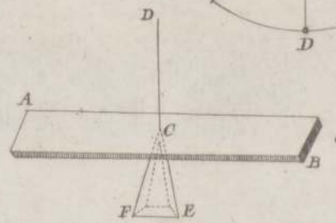


Fig. 5.

Fig. 6.

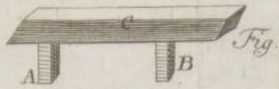


Fig. 7.

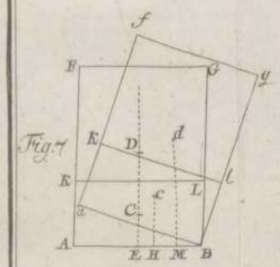
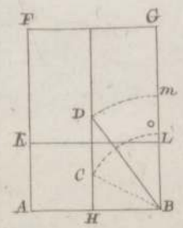


Fig. 8.



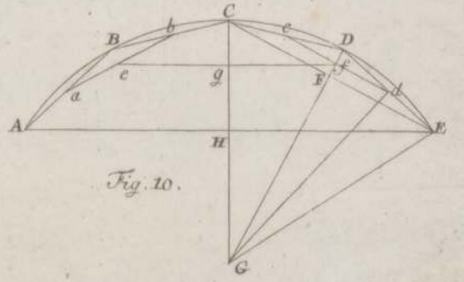
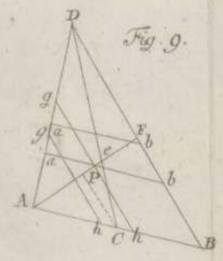


Fig. 10.

Fig. 9.



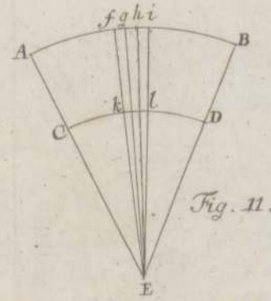


Fig. 11.

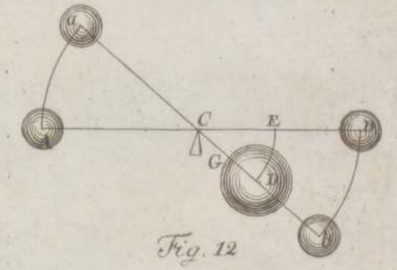


Fig. 12

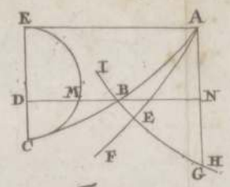


Fig. 1

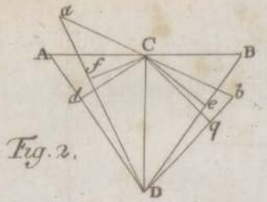


Fig. 2.

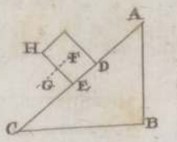


Fig. 3.



Fig. 4.

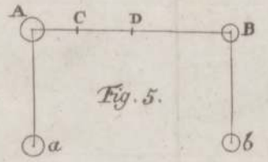


Fig. 5.

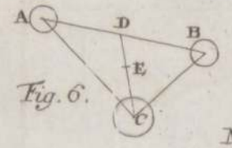
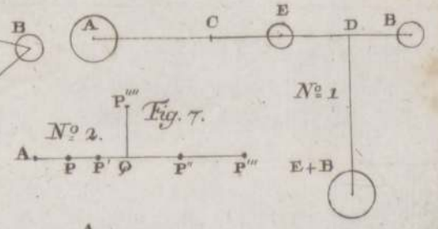


Fig. 6.



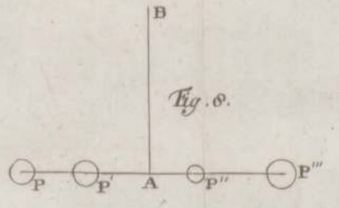


Fig. 8.

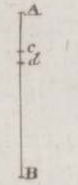


Fig. 9.

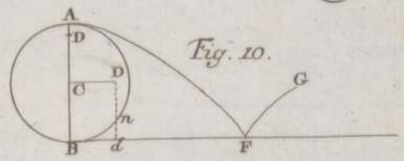


Fig. 10.

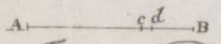


Fig. 11.

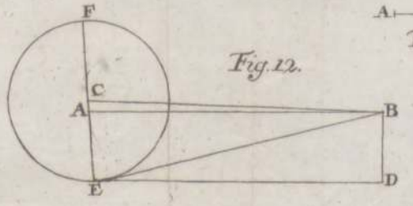


Fig. 12.

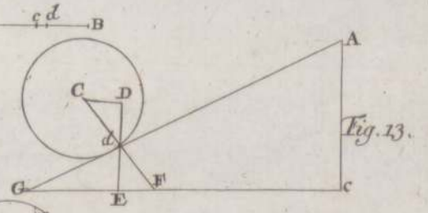


Fig. 13.

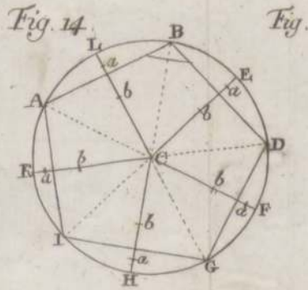


Fig. 14.

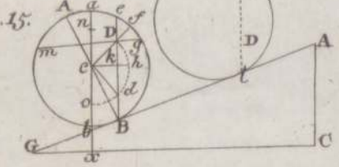


Fig. 15.

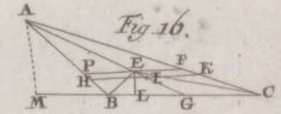


Fig. 16.

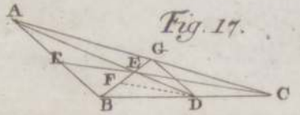


Fig. 17.

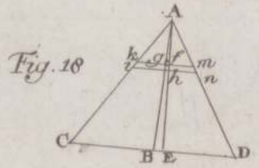


Fig. 18

Fig. 1.

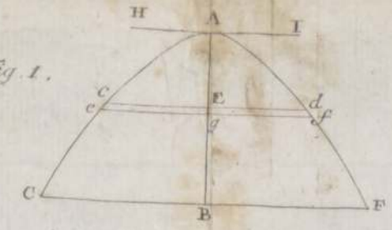


Fig. 2.

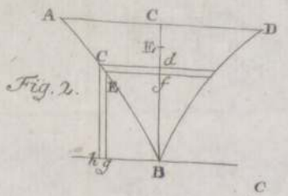


Fig. 3.

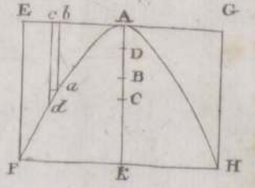


Fig. 5.

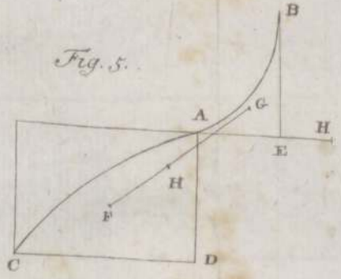


Fig. 4.

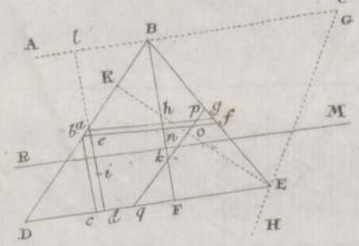


Fig. 6.

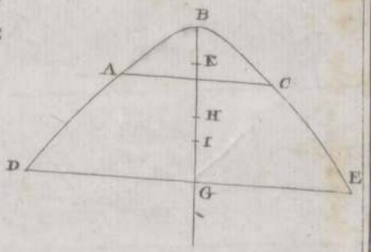


Fig. 9.

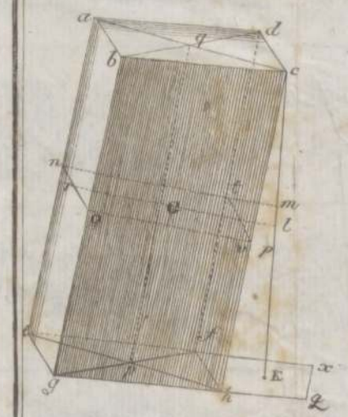


Fig. 10

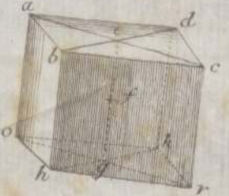


Fig. 7.

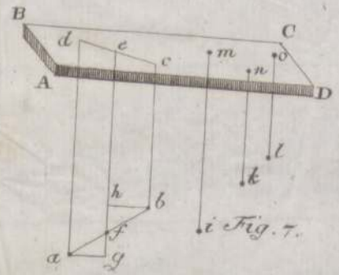


Fig. 8.

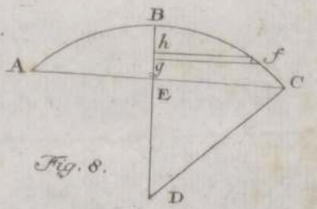


Fig. 11.

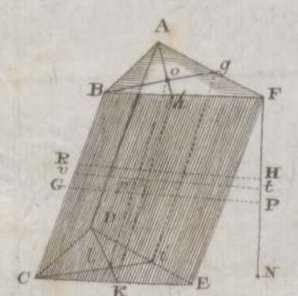
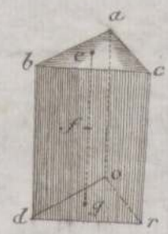


Fig. 12.



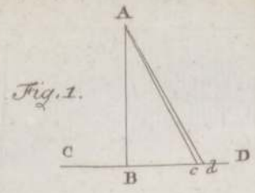


Fig. 1.

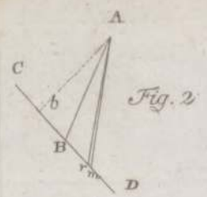


Fig. 2.

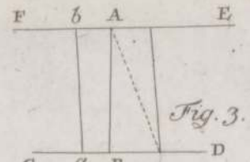


Fig. 3.

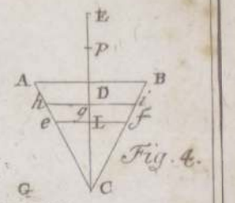


Fig. 4.

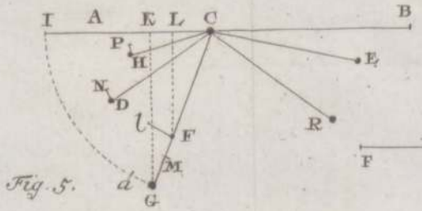


Fig. 5.

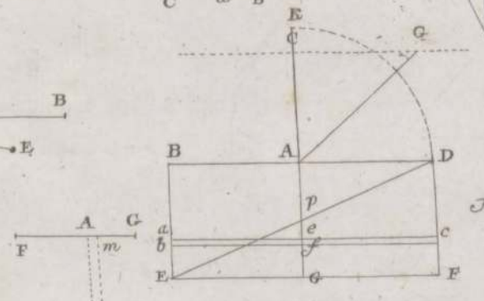


Fig. 6.

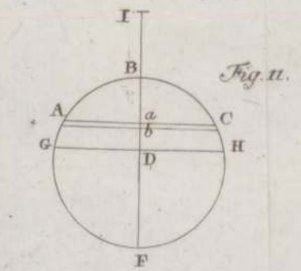


Fig. 11.

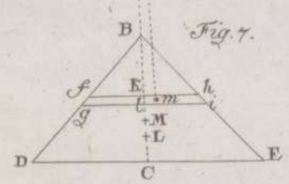


Fig. 7.

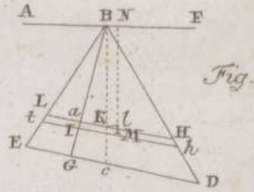


Fig. 8.

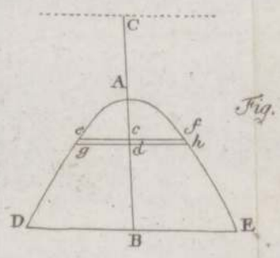


Fig. 10.

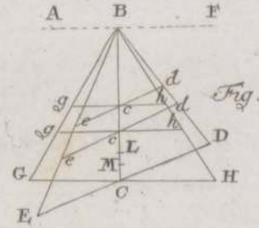


Fig. 9.

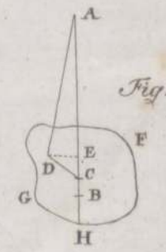


Fig. 12.

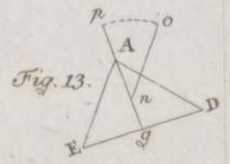


Fig. 13.

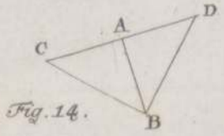


Fig. 14.

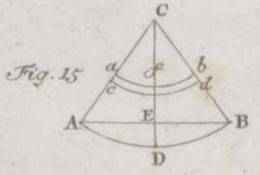


Fig. 15

Fig. 1.

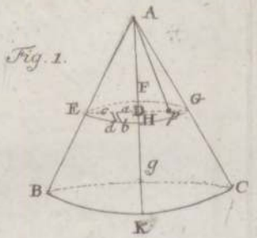


Fig. 2.

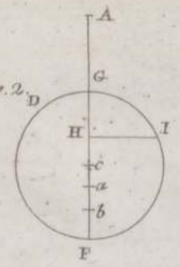
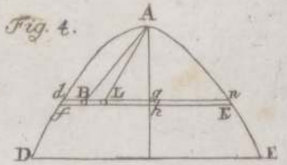


Fig. 3.



Fig. 4.



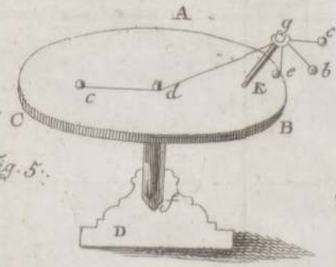
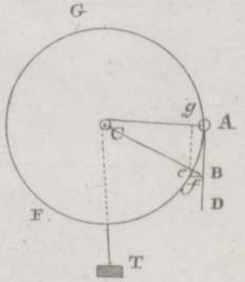


Fig. 5.

Fig. 6.



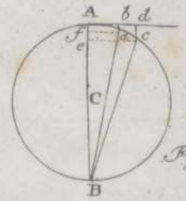


Fig. 7.

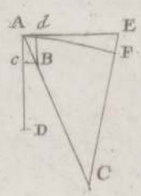
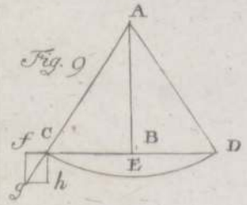


Fig. 8.

Fig. 9



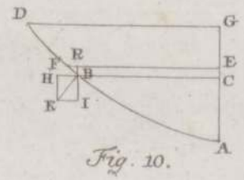


Fig. 10.

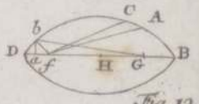


Fig. 12

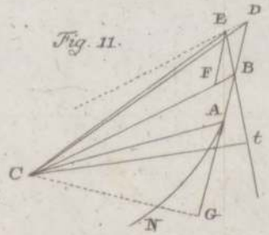


Fig. 11.

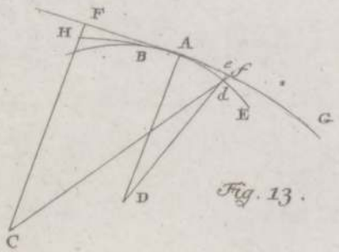


Fig. 13.

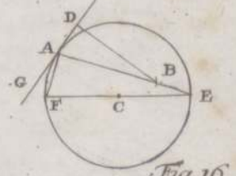


Fig. 16.

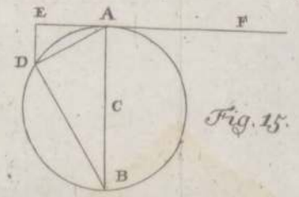


Fig. 15.

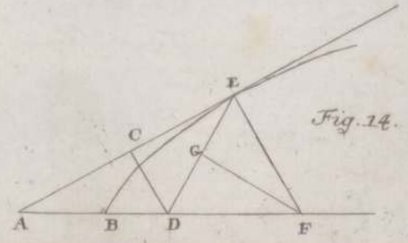


Fig. 14.

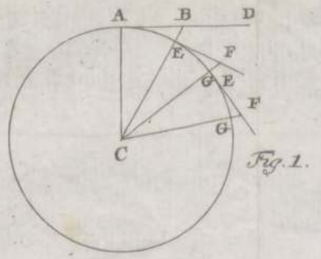


Fig. 1.

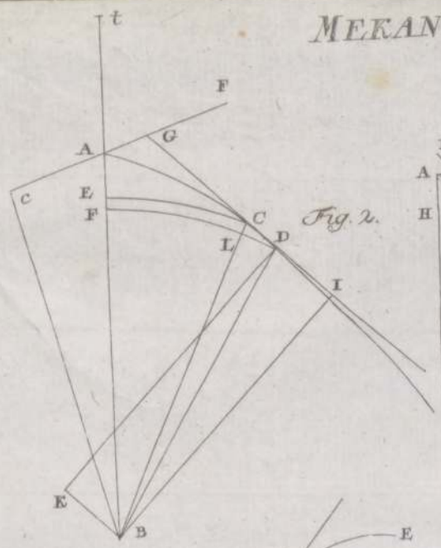


Fig. 2.

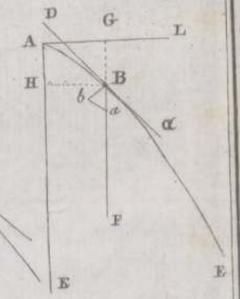


Fig. 8

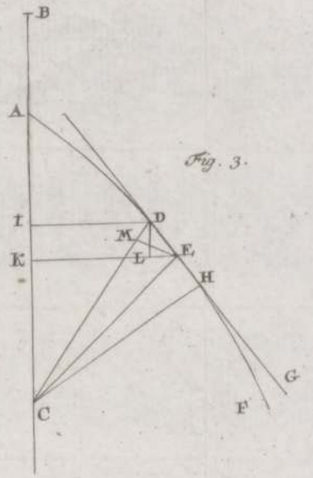


Fig. 3.

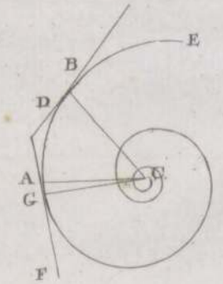


Fig. 4

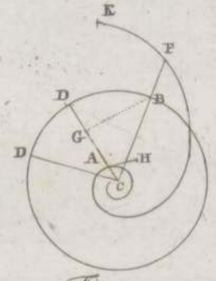


Fig. 5.

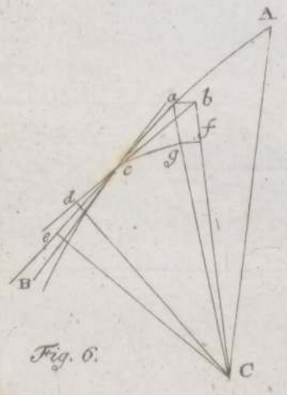


Fig. 6.

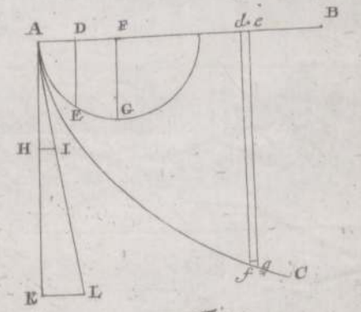


Fig. 7.



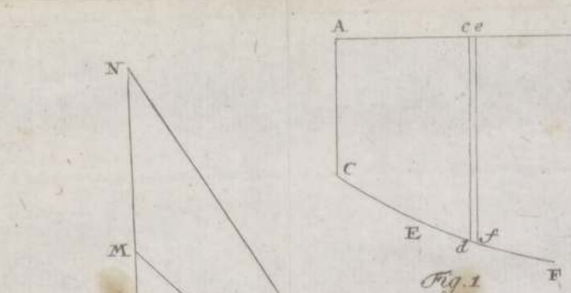


Fig. 1.

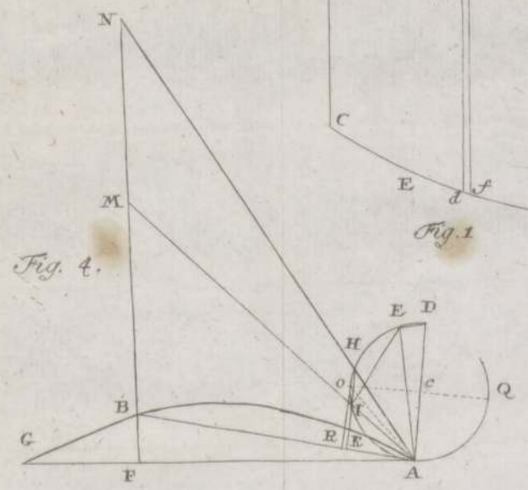


Fig. 4.

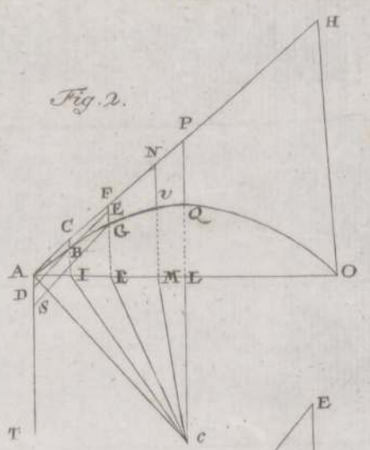


Fig. 2.

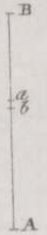


Fig. 7.

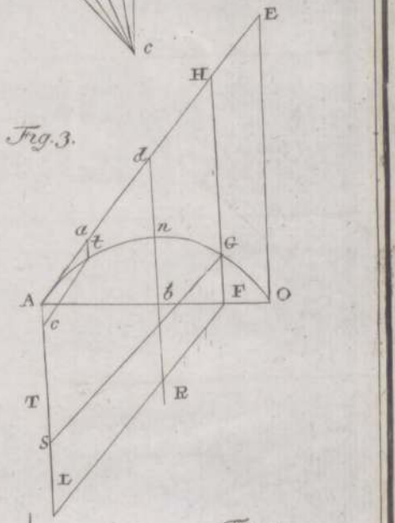


Fig. 3.

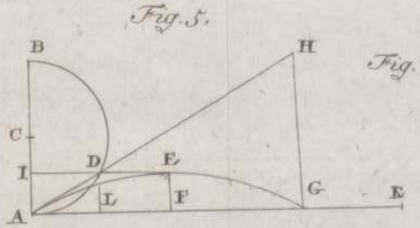


Fig. 5.

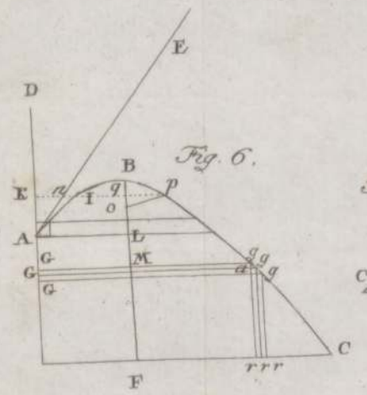


Fig. 6.

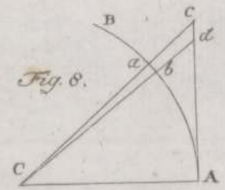


Fig. 8.

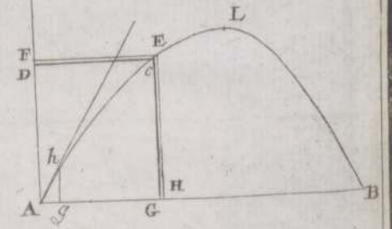


Fig. 9.



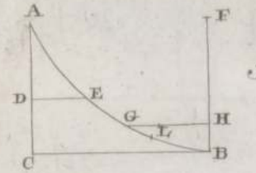


Fig. 1.

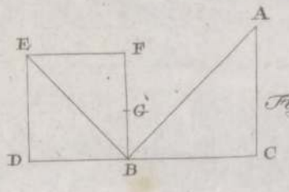


Fig. 2.

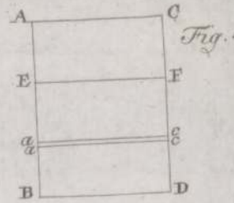


Fig. 4.

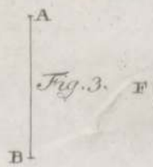


Fig. 3.

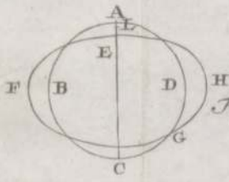


Fig. 5.

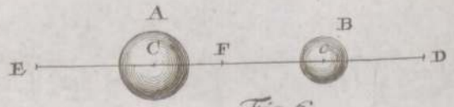


Fig. 6.

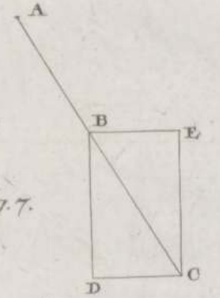


Fig. 7.

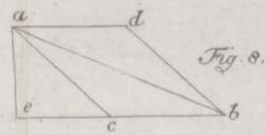


Fig. 8.

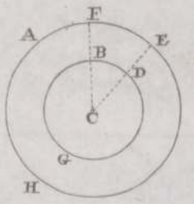


Fig. 9.

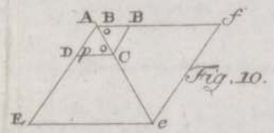


Fig. 10.

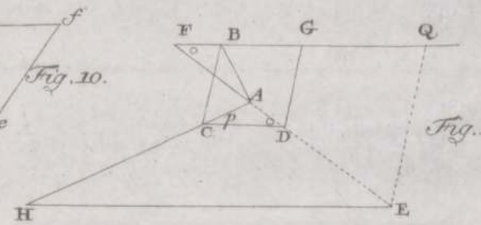


Fig. 11.

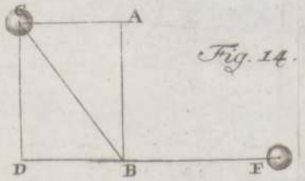


Fig. 14.

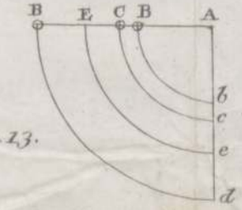


Fig. 13.

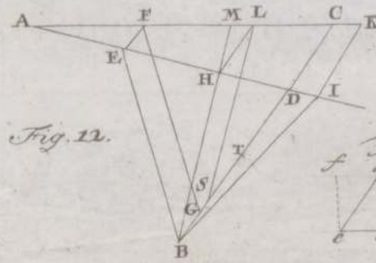


Fig. 12.

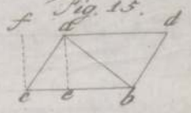


Fig. 15.

Fig. 1

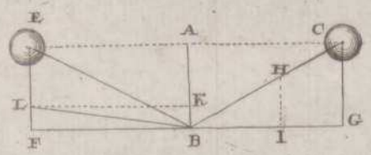


Fig. 2.

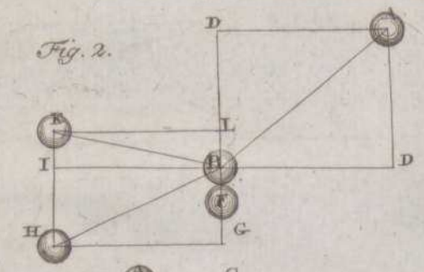


Fig. 3. № 1.

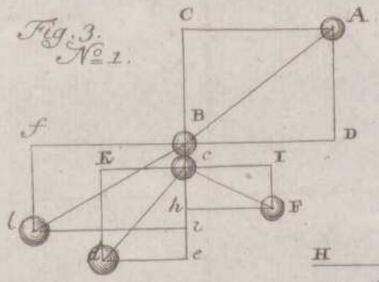
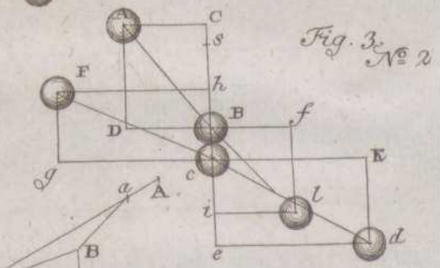


Fig. 3. № 2



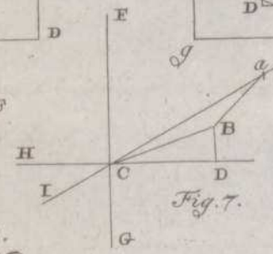


Fig. 7.

Fig. 4. № 1.

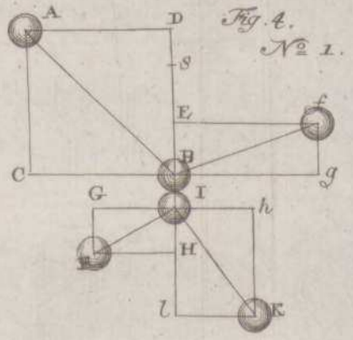
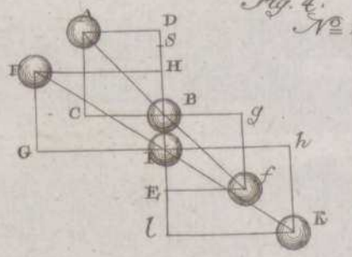


Fig. 4. № 2.



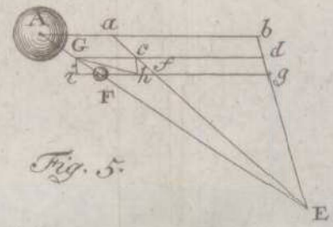


Fig. 5.

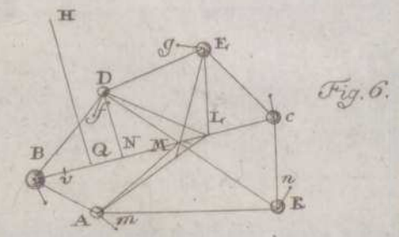


Fig. 6.

Fig. 1



Fig. 2.

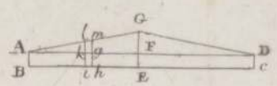
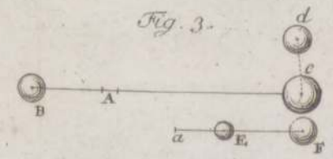


Fig. 3.



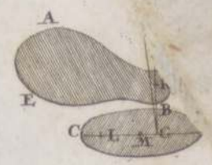


Fig. 5.

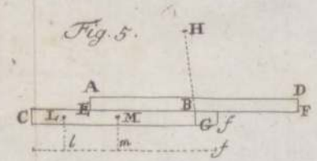


Fig. 6.

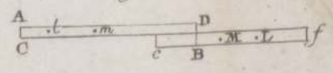


Fig. 7.

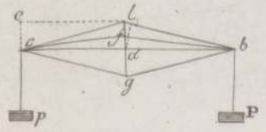
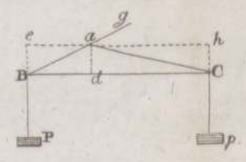


Fig. 8.



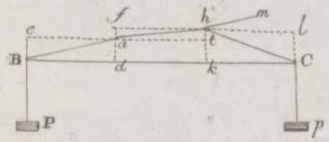


Fig. 9.

Fig. 10.

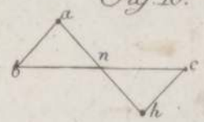


Fig. 12.

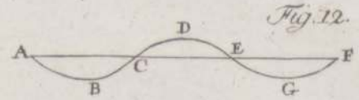
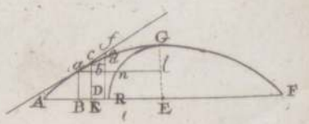


Fig. 11



Fig. 13.







TEK
531 For
Står i pengeskab
321874
1763
300198631
DTV

