

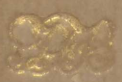
Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*



MATEMATIK

FOR

TEKNISKE SKOLER

AF

N. F. JENSEN

LÆRER

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

O. A. SMITH

ADJUNKT

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

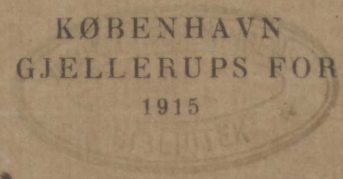
I ARITMETIK



KØBENHAVN
JUL. GJELLERUPS FORLAG

1915

51(022)



13

150

51 (022)



51 (022)

P

MATEMATIK

FOR

TEKNISKE SKOLER

AF

N. F. JENSEN

LÆRER

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE

SKOLE

O. A. SMITH

ADJUNKT

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE

SKOLE

I ARITMETIK



KØBENHAVN

JUL. GJELLERUPS FORLAG

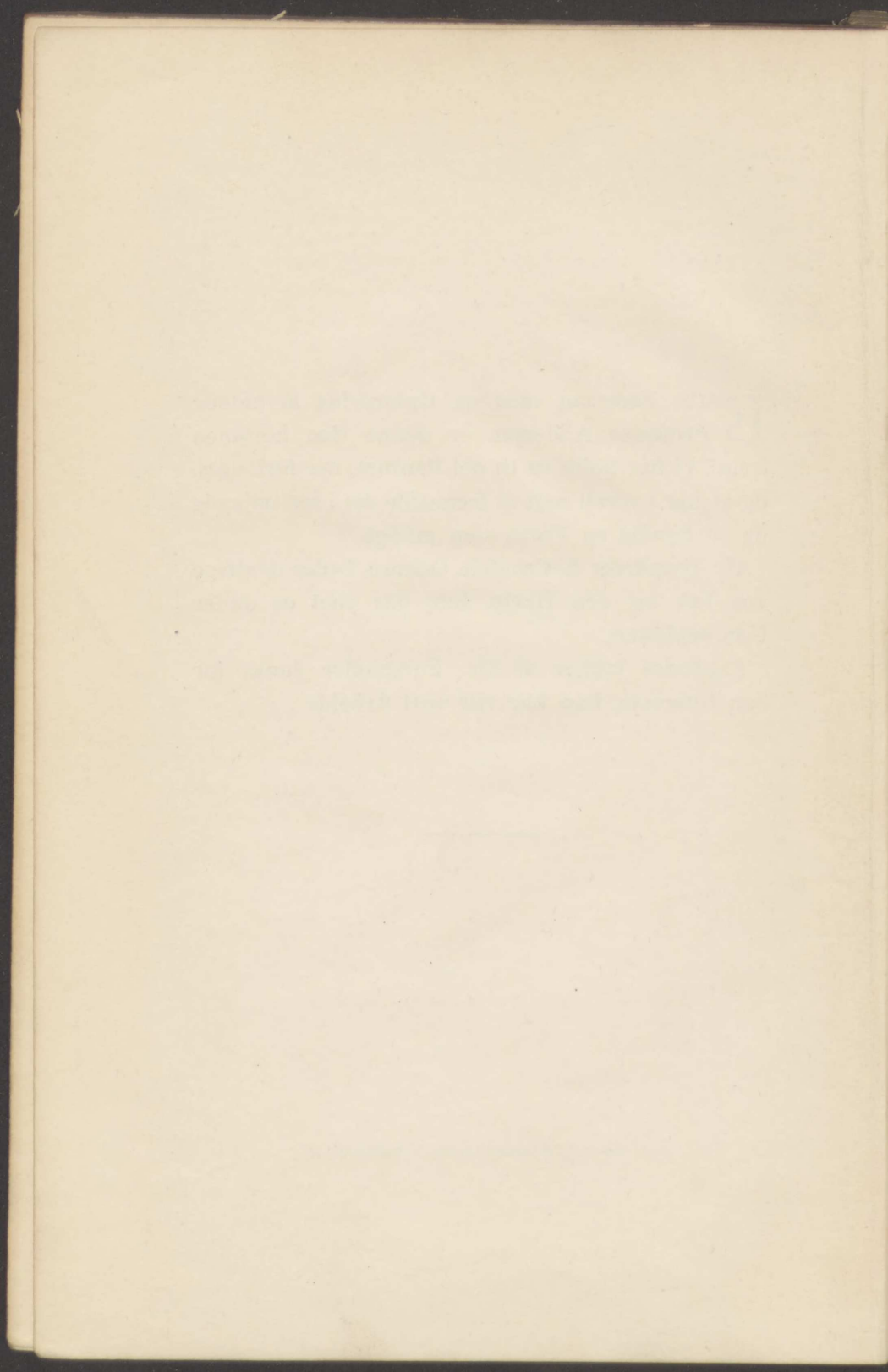
1915

DE FORENEDE BOGTRYKKERIER - AARHUS

EFTER Samraad med og Opfordring af afdøde Professor Andersen er denne Bog kommen frem. Vi har holdt os til det Pensum, der forlanges, og vi har overalt søgt at fremstille det i saa nøjagtig og let læselig en Form som muligt.

Hr. Overlærer S. Cronfelt, Odense, bedes modtage vor Tak for den Hjælp, han har ydet os under Udarbejdelsen.

Ligeledes takker vi Hr. Forstander Jonas for den Interesse, han har vist vort Arbejde.



INDLEDNING.

1. Naar en Samling Genstande af samme Slags skal betegnes nøjagtigt, er det ikke tilstrækkeligt at skrive Genstandenes fælles Navn; thi Navnet bliver uforandret ved, at man tager en Genstand bort fra Samlingen eller føjer en Genstand til Samlingen.

Man kan betegne Samlingen ved, at man foran Navnet sætter et bestemt Mærke; den Samling, man faar ved at føje en Genstand til, maa da betegnes ved et nyt Mærke foran Navnet.

En enkelt Genstand betegnes ved, at man foran Navnet sætter 1; føjer man en Genstand til den, der allerede findes, betegnes Samlingen ved, at man sætter 2 foran Navnet; føjer man endnu en Genstand til, betegnes Samlingen ved, at man sætter 3 foran Navnet. Da man kan blive ved med at tilføje Genstande, faar man Brug for et ubegrænset Antal Tegn. De Tegn, man benytter, kaldes *Tal*.

2. Rækken

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

kaldes den naturlige Talrække, den er ubegrænset til højre. Naar Tallet 1 undtages, betegner hvert Tal i Rækken een mere end det foregaaende, men een mindre end det efterfølgende. Man siger derfor, at *ethvert Tal*, der følger efter 1 i Talrækken, *er een større end det foregaaende, men een mindre end det efterfølgende.*

Tallene i den naturlige Talrække kaldes *hele Tal*. Ethvert Tal i den naturlige Talrække angiver, hvor mange Tal der er i den Række, som begynder med 1 og slutter med Tallet.

Man kan finde, hvor mange Genstande der er i en Bunke, ved at *tælle* dem; det udføres ved, at man nævner Navnet paa 1 ved een af Genstandene, Navnet paa 2 ved den næste, Navnet paa 3 ved den næste o. s. v. Det sidste Tal, man nævner, angiver da, hvor mange Tal man har brugt. og derfor angiver det ogsaa, hvor mange Genstande der er i Bunken; eller det betegner Antallet af Genstande i Bunken.

De enkelte Genstande kaldes *Enheder*. Ethvert Tal betegner altsaa et bestemt Antal Enheder. Et Tal siges at indeholde saa mange *Enere* eller Enheder, som det betegner.

3. Ligesom et Tal kan betegne et bestemt Antal Genstande, kan det ogsaa betegne en bestemt Længde, et bestemt Rumfang eller en bestemt Vægtmængde; idet hver Ener i Tallet betegner en Maaleenhed.

Naar hver Ener betegner 1 kg, vil ethvert Tal angive en aldeles bestemt Mængde af et givet Stof; men derimod gælder det ikke, at enhver Mængde af et Stof kan angives nøjagtigt ved et helt Tal.

Et Tal kaldes *ubenævnt*, naar Enhedens Navn ikke er føjet til det. Ethvert ubenævnt Tal angiver et bestemt Antal Enheder; men det angiver ikke, hvilken Slags Enheder det er, Enheden er vilkaarlig. Et *benævnt Tal* angiver baade, hvor mange Enheder der er, og hvilken Slags Enheder det er.

Eks. 9 Kugler, 7 Heste, 15 Liter.

4. Udtrykket $8 + 5$ læses 8 *plus* 5 og betyder, at man skal finde Antallet af Enheder i den Samling, man

faar ved til en Samling paa 8 Enheder at føje en Samling paa 5 Enheder, eller man skal finde det Tal, der indeholder saa mange Enheder som baade 8 og 5; man finder, at

$$8 + 5 = 13.$$

8 og 5 kaldes *Addender*, 13 kaldes *Summen* af 8 og 5; Tegnet foran 13 kaldes et *Lighedstegn* og læses: er lig med. At finde Summen af to Tal kaldes at *addere* det andet til det første.

Summen af to Tal kan findes ved, at man fra det første tæller saa mange Pladser frem (til højre) i Talrækken, som det andet angiver.

Udtrykket $8 - 5$ læses 8 minus 5 og betyder, at man skal finde Antallet af Enheder i den Samling, man faar tilbage, naar man fra en Samling paa 8 Enheder borttager 5 Enheder, eller man skal finde et Tal, der indeholder saa mange Enheder, som 8 indeholder flere end 5; man finder, at

$$8 - 5 = 3.$$

8 kaldes *Minuenden*, 5 kaldes *Subtrahenden*, og 3 kaldes *Differensen* mellem 8 og 5. At finde Differensen mellem to Tal kaldes at *subtrahere* det andet fra det første. Tegnene + og - kaldes *Fortegn*.

Differensen mellem to Tal findes ved, at man fra det første tæller saa mange Pladser tilbage i Talrækken, som det andet angiver. Naar man fra Differensen tæller saa mange Pladser frem, som Subtrahenden angiver, kommer man tilbage til Minuenden. Derfor er

$$\text{Differens} + \text{Subtrahend} = \text{Minuend}.$$

Naar Minuend og Subtrahend er lige store, bliver der ingen Enheder tilbage; som Betegnelse for »ingen« bruger man *Tallet 0*, der faar sin Plads i Talrækken foran 1. Er Minuenden mindre end Subtrahenden, kan vi ikke udføre Subtraktionen (foreløbig).

5. Et Udtryk, der bestaar af en Række Tal, som er forbundne ved + og —, kaldes *en flerleddet Størrelse*; de enkelte Tal kaldes *Led*; de Led, der har Fortegnet +, kaldes Addender, og de Led, der har Fortegnet —, kaldes Subtrahender.

Udtrykket $18 + 9 - 10$ er en flerleddet Størrelse og betyder, at man til 18 skal addere 9 og fra Summen subtrahere 10; man vil imidlertid faa samme Resultat ved at udføre Regningerne i en anden Orden, naar man ikke derved kommer til en Subtraktion, som ikke kan udføres. Saaledes er

$$18 + 9 - 10 = 18 - 10 + 9.$$

To saadanne Udtryk, der er ubetinget lige store og er forbundne ved et Lighedstegn, danner en *Identitet*.

En *Parentes* i et Udtryk betyder, at det, som staar i Parentesen, skal regnes ud for sig, eller ogsaa, at det allerede forudsættes at være regnet ud.

Eks. 1. $8 + (6 + 3 - 5) = 8 + 4 = 12.$

Eks. 2. $26 - (9 - 2 + 12) = 26 - 19 = 7.$

Udregn følgende Udtryk:

1. $18 + 16 - 9; 18 + (16 - 9).$

2. $45 - 17 - 8; 45 - (17 - 8); 45 - 17 + 8.$

3. $19 + 48 - (57 - 15 + 9).$

$$19 + 48 - 57 - 15 + 9.$$

$$19 + 48 - 57 + 15 - 9.$$

6. Identiteten $5 + 6 = 6 + 5$ udtrykker, at Summen af 5 og 6 bliver uforandret ved, at Addenderne ombyttes.

En Identitet skrevet med bestemte Tal kan kun udtrykke, at en Regel gælder for disse Tal. Hvis man ved en enkelt Identitet vil kunne udtrykke, at en Regel er almen gyldig, det vil sige er gældende for alle Tilfælde,

maa man have Tegn, der kan betyde hvilke som helst Tal; man bruger da *Bogstaverne* i denne Betydning.

Man har

$$2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \text{ o. s. v.}$$

Paa lignende Maade har man

$$a = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (} a \text{ Addender).}$$

Tallet a indeholder a Enheder; det Tal, der er 1 større end a , indeholder $(a + 1)$ Enheder og skrives $(a + 1)$; det Tal, der er 1 mindre end a , indeholder $(a - 1)$ Enheder og skrives $(a - 1)$. $(a - 1)$, a og $(a + 1)$ betegner altsaa altid tre paa hinanden følgende Tal i Talrækken; men a kan betegne hvilket Tal, man ønsker: a er *et vilkaarligt Tal*. Hvis f. Eks. $a = 9$, er $(a - 1) = 8$, og $(a + 1) = 10$. Naar et Bogstav i det følgende bruges som Tal, betegner det altid et ubenævnt Tal.

Naar a og b betegner vilkaarlige Tal, udtrykker Identiteten

$$a + b = b + a$$

at følgende Regel er almengyldig:

Summen af to Addender bliver uforandret, naar Addenderne ombyttes.

En saadan almengyldig Regneregul kaldes en *arimetisk Sætning*, og en Identitet, som udtrykker en arimetisk Sætning, kaldes en *Formel*.

Eks. 1. Sætningen: *Differens + Subtrahend = Minuend* kan udtrykkes ved Formlen

$$(a - b) + b = a.$$

Eks. 2. Sætningen: Naar man fra Summen af to Addender subtraherer den ene, faar man den anden, kan udtrykkes ved Formlen

$$(a + b) - b = a.$$

Formlerne $a + b - c = a - c + b = b - c + a$ udtrykker Sætningen:

a. *I en flerleddet Størrelse er Leddenes Orden ligegyldig.*

Vi vil gaa ud fra, at denne Sætning er rigtig.

b. *I en flerleddet Størrelse kan man hæve en Parentes med Fortegnet Plus.*

Eller $a + (b - c) = a + b - c.$

Man har nemlig $a + (b - c) = (b - c) + a$ ifølge Sætning a

og $(b - c) + a = b - c + a$ ifølge Udtrykkes Betydning,

men $b - c + a = a + b - c$ ifølge Sætning a.

Dermed har vi vist, at Formlen er rigtig, og vi har altsaa ført Bevis for Sætningens Rigtighed.

c. *I en flerleddet Størrelse kan man hæve en Parentes med Fortegnet Minus, naar man forandrer Fortegnene for de Led, som staar i Parentesen, saaledes at Plus forandres til Minus og Minus til Plus.*

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d.$$

Bevis: a er Minuend, Udtrykket i Parentesen er Subtrahend og højre Side af Formlen er Differens. Vi vil bevise, at

$$\text{Differens} + \text{Subtrahend} = \text{Minuend}.$$

Man har $a - b + c - d + (b - c + d).$

$$= a - b + c - d + b - c + d \text{ iflg. Sætn. b.}$$

$$= a - b + b + c - c - d + d \text{ iflg. Sætn. a.}$$

$$= a.$$

7. Udtrykket $m \cdot a$ læses: m Gange a og betyder, at man skal finde Summen af m Addender, der hver er lig med a . Summen kaldes Produktet af m og a ; at finde dette Produkt kaldes at multiplicere a med m ; m kaldes Multiplikator, a kaldes Multiplikand, og de kaldes begge Faktorer. Tegnet mellem Faktorerne kaldes et Multiplikationstegn. Vi vil her gaa ud fra, at

$$m \cdot a = a \cdot m.$$

Eks. 1. $5 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40.$

$$8 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40.$$

Eks. 2. $7 \cdot a = a + a + a + a + a + a + a.$

$$= (a + a + a + a) + (a + a + a).$$

$$= 4a + 3a.$$

Naar den første Faktor er et Ciffertal og den anden et Bogstavtal, kan Multiplikationstegnet udelades, Ciffer-tallet kaldes *Koefficient*; Tegnet kan ogsaa udelades mellem Bogstavfaktorer, og det kan udelades, naar den ene Faktor er et Udtryk, som staar i en Parentes.

Udtrykket $a \cdot b \cdot c$ betyder, at man skal multiplicere b med a , og derefter skal man multiplicere c med Produktet.

Hvad bliver $a \cdot b \cdot c$

1. naar $a = 5$, $b = 6$ og $c = 7$

2. naar $a = 50$, $b = 60$ og $c = 70$.

$ab + cd - ac$ er en flerleddet Størrelse, hvis enkelte Led er Produkter. I en saadan flerleddet Størrelse skal man *beregne hvert Led for sig* og derefter addere og subtrahere Leddene. Er f. Eks. $a = 5$, $b = 20$, $c = 18$ og $d = 25$, faar man

$$\begin{aligned} ab + cd - ac &= 5 \cdot 20 + 18 \cdot 25 - 5 \cdot 18 \\ &= 100 + 450 - 90 = 460. \end{aligned}$$

Beregn følgende Udtryk, naar $a = 15$, $b = 18$, $c = 7$ og $d = 12$.

3. $ab - ac + cd$; $ab - (ac + cd).$

4. $ab - c(a + d)$; $(ab - c)(a + d).$

Alle de Produkter, man faar ved at multiplicere a med Talrækkens Tal, kaldes *Fold af a* . De mindste Fold af a er

$$a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a.$$

At a er Maal for et Tal vil sige, at Tallet er et Fold af a , altsaa at det er Produktet af a og et helt Tal.

5. Find de 6 mindste Fold af 9.
6. Find alle Maalene for 40.
7. Find alle Maalene for 120, og find Produktet af det mindste og det største af dem.

Flere Produktled, der bestaar af de samme Bogstavfaktorer, men har forskellige Koefficienter, kan adderes og subtraheres ved, at man adderer eller subtraherer Koefficienterne og beholder de andre Faktorer.

Eks. 3. $8ab + 5ab - 9ab = 4ab.$ Eks. 2.

Reducer følgende Udtryk (udregn det saa meget som muligt):

8. $5a + 9a + 17a - (50a - 36a).$
9. $3a + 5b - 7a - (3b - 8a).$
10. $5[8a - 17a - (10a - 4a) + 20a].$

8. Udtrykket $a : b$ læses a divideret med b og betyder, at man skal finde det Tal, som man skal multiplicere med b for at faa a . a kaldes *Dividend*, b kaldes *Divisor*, Tegnet mellem a og b kaldes *Divisionstegn*, og det Tal, man finder, kaldes *Kvotienten* mellem a og b ; at finde denne Kvotient kaldes at *dividere a med b* eller at dividere b i a .

$$20 : 4 = 5, \text{ da } 4 \cdot 5 = 20.$$

$$18 : 6 = 3, \text{ da } 6 \cdot 3 = 18.$$

$$a : b = q, \text{ naar } b \cdot q = a; \text{ man har da ogsaa } q \cdot b = a.$$

Naar man skal udføre Divisionen $a : b$, kan man danne alle Fold af b , indtil man kommer til et, der er lig a eller større end a ; hvis der ikke findes noget Fold af b , som er lig a , findes der ikke nogen Kvotient mellem Talrækkens Tal, man maa da nøjes med en ufuldstændig Kvotient. Ved den ufuldstændige Kvotient forstaar man det største Tal, man kan multiplicere Divisor med, uden at Produktet bliver større end Dividenden.

Den Differens, man faar, naar man trækker Produktet af Divisor og den ufuldstændige Kvotient fra Dividenden, kaldes *Divisionsresten*. Er den ufuldstændige Kvotient mellem a og b lig k og Resten r , har man altsaa

$$a - b \cdot k = r$$

eller

$$a = b \cdot k + r.$$

Eks. 1. $a = 90$, $b = 17$, find k og r .

Eks. 2. Hvilke Værdier kan r have, naar $b = 12$ og $k = 8$? Find for hver Værdi af r den tilsvarende Værdi af a .

Beregn følgende Udtryk, naar $a = 50$, $b = 18$, $c = 15$ og $d = 36$.

1. $(9a + 5d - 6c) : b$.
2. $4(5a - 12b) + c(8a - 10d)$.
3. $[(ab) : c - (ab) : d] \cdot 12$.

Find Værdien af x , naar

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. $x + 6 = 18$. | 2. $x - 6 = 18$. |
| 3. $6x = 18$. | 4. $x : 6 = 18$. |

9. To Udtryk, der er forbundne ved et Lighedstegn, danner en Ligning; de to Udtryk kaldes *Ligningens Sider*. Hvis de to Udtryk er ubetinget lige store, kaldes Ligningen ifølge 5 en *Identitet*. Hvis Ligningens to Sider kun er lige store, naar man giver et (eller flere) af Bogstavtallene bestemte Værdier, kaldes Ligningen en *Bestemmelsesligning*. I Stedet for Bestemmelsesligning siger man dog ofte Ligning, naar det ikke kan misforstaaes. De Værdier, man maa give Bogstavet, for at Bestemmelsesligningens to Sider kan blive lige store, kaldes *Ligningens Rødder*. Bogstavet kaldes *den ubekendte*. At finde Ligningens Rødder kaldes *at løse Ligningen*. De Ligninger, vi begynder med, har kun een Rod. Naar man har løst en Ligning, kan man gøre *Prøve*

ved overalt i Ligningen at sætte Roden i Stedet for den ubekendte. Ligningen skal da blive en Identitet.

Man kan ofte løse en Ligning ved at prøve sig frem; men man kan ogsaa benytte følgende: Naar to Tal eller to Udtryk er lige store, faar man igen lige store Tal eller Udtryk:

1. naar man adderer samme Tal til begge.
2. naar man subtraherer samme Tal fra begge.
3. naar man multiplicerer begge med samme Tal.
4. naar man dividerer begge med samme Tal.

Af Sætningerne 1 og 2 følger, at man kan flytte et Led fra den ene Side af Ligningen til den anden, naar man forandrer Ledets Fortegn.

Eks. 1. $8x + 5 = 21.$

Subtraheres 5 fra begge Sider, faar man

$$8x = 21 - 5.$$

Deraf ved at dividere begge Sider med 8

$$x = \underline{2}.$$

Eks. 2. $7x - 3 = 32.$

Adderes 3 til begge Sider, faar man

$$7x = 32 + 3.$$

Deraf

$$x = \underline{5}.$$

Løs følgende Ligninger:

1. $5(x - 7) - 2 = 13.$
2. $x = 36 - 5x.$
3. $8x - 19 = 2 \cdot 13 - x.$
4. $(x : 10 + 48) : 5 = 10.$
5. $(7x + 12) : 8 + 13 = 18.$
6. $[(84 - 6x) \cdot 5 - 54] : 6 = 1.$
7. $x + 3x + 5x + 7x + 9x = 300.$
8. $5x - (3x - 8) + 2 = 7x - (9x - 22).$

10. Tegnene 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 kaldes *Cifre*. Et hvert af de ti første Tal i Talrækken (0 medregnet) skrives med et enkelt Ciffer og kaldes *encifrede Tal*. Det Tal, som følger efter 9, er $9 + 1$ og skrives 10, det kan opfattes som en ny Enhed, der kaldes *en Tier* (1 Tiøre).

$10 + 1$ skrives 11, det er 1 Tier og 1 Ener.

$10 + 2$ skrives 12, det er 1 Tier og 2 Enere

o. s. v.

$10 + 10$ skrives 20, det er 2 Tiere.

$20 + 1$ skrives 21, det er 2 Tiere og 1 Ener.

Det sidste *tocifrede Tal*

$90 + 9$ skrives 99, det er 9 Tiere og 9 Enere.

$99 + 1$ er $10 \cdot 10$ eller 10 Tiere og skrives 100; det kan opfattes som en ny Enhed, der kaldes *et Hundrede* (1 Kr.).

$100 + 1$ skrives 101, det er 1 Hundrede 0 Tiere og 1 Ener.

$100 + 36$ — 136, - - 1 — 3 — - 6 —

$100 + 100$ — 200, - - 2 — 0 — - 0 —

$500 + 67$ — 567, - - 5 — 6 — - 7 —

Det sidste *trecifrede Tal* er 999.

$999 + 1$ er $10 \cdot 100$ og skrives 1000; det kan opfattes som en ny Enhed, der kaldes *et Tusinde* (1 Tikrone). *Hver ny Enhed er stadig 10 Gange saa stor som den foregaaende.*

$10 \cdot 1000$ skrives 10000; 1 Titusinde.

$10 \cdot 10000$ — 100000; 1 Hundredtusinde.

$10 \cdot 100000$ — 1000000; 1 Million.

Derefter bruges Navnene Timillion, Hundredmillion, Tusindmillion eller *Milliard*, Titusindmillion, Hundredtusindmillion og *Billion*. 1 Billion er 1 Million Gange 1 Million eller $1000000 \cdot 1000000$; 1000000 Billioner kaldes 1 *Trillion*.

Ethvert flercifret Tal er altsaa en flerleddet Størrelse, hvori hvert Led er Produktet af et encifret Tal og et Tal, der opfattes som en ny Enhed.

Eks. $9537 = 9 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1$,
 skriver man Cifrene i en anden Orden, f. Eks. 3975, er Enheden for flere af Cifrene bleven en anden. 5 betegner nu Enere, medens det før betegnede Hundreder o. s. v.

Eksempler paa Tallæsning:

1. 395860 læses 395 Tusinde 860.
2. 30587 654912 læses 30587 Millioner 654912 eller 30 Milliarder 587 Millioner 654912.
3. 2 979438 254810 634726 læses 2 Trillioner 979438 Billioner 254810 Millioner 634726.
1. Hvor mange tocifrede Tal findes der?
2. Skriv det største tocifrede Tal og det største trecifrede Tal; find derpaa Antallet af trecifrede Tal.
3. Find Antallet af firecifrede Tal og Antallet af femcifrede Tal.
4. I hvor mange tocifrede Tal findes Cifret 4?
5. I hvor mange tocifrede Tal findes Cifret 0, og i hvor mange tocifrede Tal findes 0 ikke?
6. Skriv fire paa hinanden følgende Tal, hvoraf det første er *b*.
7. Find Summen af fem paa hinanden følgende Tal, naar det midterste er *c*.

11. To Tal kan i Almindelighed ikke adderes, med mindre de betegner samme Slags Enheder. Man kan ikke addere 5 *m* til 7 *kg*.

Der er imidlertid visse Enheder, som har den Egenskab, at de taget sammen to og to ophæver hinanden,

f. Eks.: 1 Kr. Formue og 1 Kr. Gæld.

1 *m* mod Syd og 1 *m* mod Nord.

1 Trin op og 1 Trin ned ad samme Trappe.

To saadanne Enheder, der ved at forbindes med hinanden ophæver hinanden, kaldes *modsatte Enheder*; naar to Tal betegner modsatte Enheder, kaldes de *Tal af modsat Art*.

Eks. 5 cm op og 8 cm ned.
10 Kr. Formue og 6 Kr. Gæld.

Naar to Tal af modsat Art betegner lige mange Enheder, kaldes de *modsatte Tal*.

Eks. 10 Kr. Formue og 10 Kr. Gæld.
8 km mod Øst og 8 km mod Vest.

Man kan addere to Tal af modsat Art ved at udslette en Ener i hver af dem saa mange Gange, at der ingen er tilbage i det ene af dem. Det Antal Enere, der bliver tilbage i det andet Tal, er da Summen.

Eks. 10 Kr. Formue + 6 Kr. Gæld = 4 Kr. Formue.
5 cm op + 8 cm ned = 3 cm. ned.

Naar man skal regne med Tal af modsat Art, maa man enten tilføje Benævnelsen, eller ogsaa maa man mærke de Tal, der betegner Enheder af den ene Slags, saa de kan kendes fra dem, der betegner Enheder af modsat Slags. Vi vil sætte et Minus foran de Tal, der betegner den ene Slags Enheder; men vi sætter da en Parentes om Tallet og Minuset for at betegne, at Minuset er et *Kendetegn*, der hører med til Tallet, og ikke et Regnetegn.

Man har da $7 + (-4) = 3$.
 $12 + (-19) = (-7)$.

Ved Differensen mellem a og b forstaar vi i det følgende det Tal, hvortil man skal addere b , for at Summen kan blive lig a . Dette er i Overensstemmelse med § 4.

Man har da

$7 - (-4) = 11$, fordi $11 + (-4) = 7$
og $12 - (-19) = 31$, fordi $31 + (-19) = 12$.

Naar a , b og c betegner Tal i den naturlige Talrække, er ifølge § 6

$$a + (b - c) = a + b - c$$

og

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Ifølge ovenstaaende Eksempler har man

$$7 + (-4) = 7 - 4$$

$$7 - (-4) = 7 + 4.$$

Man ser heraf, at Parenteser om Tal med Kendetegnet Minus kan hæves og sættes efter samme Regler som Parenteser om nogle af Leddene i en flerleddet Størrelse. Vi vil derfor kalde Kendetegnet Minus for *Tallets Fortegn*. Dette er ogsaa i Overensstemmelse med, at de Tal, der har Kendetegnet Minus, kan opfattes som Differenser, hvis Minuend er 0.

$$0 - 1 = (-1), \text{ da } (-1) + 1 = 0.$$

$$0 - 2 = (-2)$$

$$0 - 3 = (-3) \text{ o. s. v.}$$

Tallene i den naturlige Talrække kan opfattes som en Sum, hvis første Addend er 0; saaledes er

$$0 + 1 = 1$$

$$0 + 2 = 2$$

$$0 + 3 = 3 \text{ o. s. v.,}$$

derfor kalder man dem Tal med Fortegnet Plus; men Plusset skrives i Reglen ikke.

12. Tal med Fortegnet Plus kaldes *positive Tal*, og Tal med Fortegnet Minus kaldes *negative Tal*. Ved et Tals *numeriske Værdi* forstaar man det Tal, man faar ved at slette Fortegnet. 7 og (-7) har begge den numeriske Værdi 7. Da hver af dem betegner 7 Enheder, siger vi, at de hver indeholder 7 Enheder.

Vi vil nu udvide Talrækken med de negative Tal,

saaledes at vi foran Nul sætter -1 og foran -1 sætter -2 , vi faar da følgende Række, der kan fortsættes saa langt, det skal være, til begge Sider:

. . . . $-5 -4 -3 -2 -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

Denne Talrække vil vi kalde *den aritmetiske Talrække* eller blot Talrækken. Den indeholder de positive og negative hele Tal.

Den aritmetiske Talrække har følgende Egenskaber fælles med den naturlige Talrække: Naar man adderer $(+1)$ til et Tal, bliver Summen altid det næste Tal i Rækken, og naar man subtraherer $(+1)$ fra et Tal, bliver Differensen det foregaaende Tal.

Eksempler $1 + (-5) = -4.$ $1 - 1 = 0.$

$1 + (-4) = -3.$ $0 - 1 = -1.$

$1 + (-3) = -2.$ $(-1) - 1 = -2.$

I det følgende betyder k, m, n, p og q altid positive Tal, medens de første Bogstaver i Alfabetet i Reglen betyder vilkaarlige Tal.

Man har $m - (m + n) = -n,$
da $(-n) + (m + n) = m.$

Man kan subtrahere et større positivt Tal fra et mindre ved at subtrahere det mindste fra det største og give det udkomne Fortegnet Minus.

Ved vor Udvidelse af Talbegrebet har vi altsaa opnaaet, at vi i alle Tilfælde kan finde Differensen mellem to positive Tal.

Løs Ligningerne

1. $x + 17 = 2.$

3. $3x + 8 = 2x - 5.$

2. $24 + x = 30.$

4. $(7 - x) : 5 = 3.$

5. Summen af 6 paa hinanden følgende Tal er lig 3, find Tallene.

En *Definition* er en Forklaring af, hvad et Ord eller et Udtryk betyder.

En *Grundsætning* eller et Aksiom er en Paastand, som man gaar ud fra er rigtig. Flere af de aritmetiske Grundsætninger er *Erfaringsætninger*; det vil sige, Erfaringen har vist os, at de gælder i en Mængde Tilfælde, og vi har aldrig fundet noget Tilfælde, hvor de ikke gælder.

En Læresætning eller en *Sætning* er en Paastand, som man beviser.

Aritmetik er Læren om Tal; det er Aritmetikkens Opgave:

At forklare, hvad de forskellige Tal og Talforbindelser betyder.

At udlede de Regler, hvorefter man kan regne med Tallene, og fremsætte Reglerne som aritmetiske Sætninger, hvis Rigtighed bevises.



Lad det ikke blive for sent!

En Dag sad jeg i en Læges Venteværelse. Blandt Patienterne lagde jeg særlig Mærke til en ung Kvinde, som var indsvøbt i et tyndt Tørklæde; hun havde røde Pletter paa Kinderne og hostede stærkt. Sygdommen havde hærget hendes Ansigt, og Fattigdom og Slid havde gjort, at hun saa meget ældre ud, end hun var.

Lægen aabnede nu Døren med Ordene: »Den næste,« og den unge Kvinde gik ind. Konsultationen varede længe, og da hun atter kom ud, spurgte jeg deltagende: »Naa, hvad sagde saa Doktoren?« »Han gav mig intet Haab,« lød Svaret, »det var for sent.«

Disse Ord slog mig med en forfærdelig Magt. For sent! Hvilken haabløs Sorg! Da jeg kom hjem, lød de stadig i mine Øren, og endnu lyder de for mig med deres tunge, haabløse Klang.

Jeg har senere hørt de samme Ord udtalt.

Det var en gammel Mands Dom over hans eget Liv. Jeg sad ved hans Dødsleje. Han laa i Angst og stirrede op paa mig, for at jeg skulde give ham et godt Ord for hans sidste Rejse, og han sagde: »Jeg er en stor Synder, sikkert større end de fleste andre. Jeg har levet mit Liv saaledes, at jeg paa Gravens Rand skammer mig derved; men nu er det for sent at begynde paa ny.«

Jeg viste denne Stakkel hen til Jesus, pegede for ham paa alle Guds dyrebare Løfter; men Manden kunde ikke gribe om dem og vedblev at gentage:

»For sent! For sent!« Og uden Fred gik han ind bag Forhænget.

Til dig, som læser dette, siger jeg derfor: Det kan blive for sent, tag derfor i Dag mod Indbydelsen. Gud sender sine Tjenere ud for at kalde Mennesker til Sin Søns Bryllup, og ogsaa dette lille Blad er som en Budbringer for Ham og vil sige: Alt er rede fra Guds Side! Det kostede Ham Hans enbaarne Søns Blod! Undskyld dig ikke! Gud længes efter at se Bryllupshuset fuldt! Han venter efter dig! O, skuf Ham ikke! Hos Jesus er alt, hvad du trænger til og dybest længes efter!



I.

De fire Regningsarter.

A. Hele Tal.

Addition og Subtraktion.

13. Hvis a og b er Tal af samme Art, betyder $a + b$ det Tal, der indeholder saa mange Enheder som a og b tilsammen, og Enhederne skal være af samme Art som Enhederne i a og b .

Hvis a og b er Tal af modsat Art, skal man borttage 1 Ener i a og 1 Ener i b saa mange Gange, som det kan lade sig gøre; det Tal, der har den mindste numeriske Værdi, vil da blive Nul, og den tilovers blevne Del af det andet er Summen af a og b . Man faar altsaa:

a. *Man adderer to Tal af samme Art ved at addere deres numeriske Værdier og beholde det fælles Fortegn.*

$$m + n = (m + n)$$

$$(-m) + (-n) = -(m + n).$$

b. *Man adderer to Tal af modsat Art ved at subtrahere den mindste numeriske Værdi fra den største og give Differensen samme Fortegn som den Addend, der har størst numerisk Værdi.*

$$16 + (-9) = 7$$

$$5 + (-18) = -13$$

$$(m + n) + (-n) = m$$

$$[-(m + n)] + n = -m.$$

c. $a + b = b + a.$

14 a. Summen $a + b$ kan findes ved, at man fra a tæller b Pladser til højre i Talrækken, hvis b er positiv, men til venstre, hvis b er negativ.

Denne Sætning skal her kun vises ved Eksempler.

Eks. 1. $9 + 6 = 15.$

Eks. 2. $(-9) + (-6) = -15.$

Det Tal, der staar 6 Pladser til højre for 9, er netop 15, og det Tal, der staar 6 Pladser til venstre for (-9) , er netop (-15) .

Eks. 3. $12 + (-7) = 5.$

Eks. 4. $(-12) + 7 = -5.$

Det Tal, der staar 7 Pladser til venstre for 12, er 5, og det Tal, der staar 7 Pladser til højre for (-12) , er (-5) .

b. Naar man til et Tal adderer et andet, og man til Summen adderer et tredje modsat det andet, faar man det første.

$$a + m + (-m) = a.$$

$$a + (-m) + m = a.$$

Thi naar man først tæller m Pladser til den ene Side og derfra m Pladser til den anden Side i Talrækken, kommer man tilbage til det Tal, hvorfra man begyndte.

15. Ved *Differensen* $a - b$ forstaar man ifølge § 11 det Tal, hvortil man skal addere b , for at Summen kan blive a .

Man kan subtrahere et Tal ved at addere det modsatte Tal.

$$a - (-k) = a + k, \text{ fordi } a + k + (-k) = a.$$

$$a - k = a + (-k), \text{ fordi } a + (-k) + k = a.$$

$$0 - (-k) = k, \text{ eller } -(-k) = k.$$

$$a > b \text{ læses: } a \text{ er større end } b.$$

At $a > b$ vil sige, at $(a - b)$ er positiv.

$a < b$ læses: a er mindre end b .

At $a < b$ er ensbetydende med, at $(a - b)$ er negativ, eller at $b > a$.

Tegnene $>$ og $<$ kaldes *Ulighedstegn*. To Udtryk, der er forbundne ved et Ulighedstegn, danner en *Ulighed*.

Eks. 1. Nul er større end ethvert negativt Tal, thi

$$0 - (-n) = 0 + n = n.$$

Eks. 2. Ethvert Tal i Talrækken er 1 større end det foregaaende, men 1 mindre end det efterfølgende.

Eks. 3. Jo større numerisk Værdi et positivt Tal har, desto større er det, og jo større numerisk Værdi et negativt Tal har, desto mindre er det.

16. En Række Tal, der er forbundne ved Tegnene Plus og Minus, danner en *flerleddet Størrelse* eller et *Polynomium*. De enkelte Tal kaldes *Led*.

Eks. $a + b - c + d - e.$

Hvis alle Leddene er Addender, kaldes Polynomiet en Sum.

a. *I en flerleddet Størrelse er Leddenes Orden ligegyldig.* Denne Sætning vil vi gaa ud fra.

Eks. En Kassebeholdning er k Kr. I Kassen indbetales der følgende Summer: l Kr., m Kr., n Kr., og der udbetales følgende Summer: p Kr., q Kr.

Erfaringen lærer os, at den Kassebeholdning, vi slutter med, er uafhængig af den Orden, hvori Ind- og Udbetalingerne er foregaaet.

Man har altsaa:

$$\begin{aligned} & k + l + m + n - p - q \\ &= k + l - p - q + n + m \\ &= k - q - p + n + m + l \text{ o. s. v.} \end{aligned}$$

b. *I en flerleddet Størrelse kan man hæve eller sætte en Parentes med Fortegnet Plus.*

$$a + (b - c + d) = a + b - c + d.$$

Bevis:
$$\begin{aligned} a + (b - c + d) &= (b - c + d) + a \quad \text{iflg. Sætn. a} \\ &= b - c + d + a \\ &= a + b - c + d. \end{aligned}$$

c. *I en flerleddet Størrelse kan en Parentes med Fortegnet Minus kun hæves eller sættes, naar Fortegnene for Leddene i Parentesen forandres.*

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d.$$

Bevis: a er Minuend, $(b - c + d)$ er Subtrahend, og højre Side af Formlen er Differens. Vi vil vise, at Differens + Subtrahend = Minuend.

$$\begin{aligned} &a - b + c - d + (b - c + d) \\ &= a - b + c - d + b - c + d \quad \text{iflg. Sætn. b.} \\ &= a - b + b + c - c - d + d \\ &= a. \end{aligned}$$

Naar $a = 0$, faar man

$$-(b - c + d) = -b + c - d$$

eller

$$-(b - c + d) = +(-b + c - d).$$

Værdien af et Polynomium skifter Fortegn, naar alle dets Led skifter Fortegn.

d. *Naar $a > b$, er $a + c > b + c$.*

Bevis: Da $a > b$, er $a - b > 0$ ifølge 15.

Det er tilstrækkeligt at bevise, at

$$(a + c) - (b + c) > 0.$$

Man har $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c$

$= a - b$, der er større end Nul.

Opgaver.

1. Find Værdien af $a + b - c$, naar $a = 5$, $b = -12$ og $c = -9$.
2. Find Summen af 5 paa hinanden følgende Tal, hvoraf det midterste er a . Træk derefter Summen af de to mindste fra Summen af de to største.
3. Hvor meget er -2 større end -16 ?
4. Hvor meget er -8 mindre end 5 ?
5. Find Differensen mellem -3 og -10 og Differensen mellem -10 og -2 .
6. $a - (a - b) + (5 - b)$.
7. $5a + (2a - b + 4) - (a - 3b + 4)$.
8. $2b - [a + (b - 3c) - (a - 2b + c) - b]$.
9. Træk $3a - 4b + 5c$ fra $8a + 7b - 6c$.
10. Summen af 7 paa hinanden følgende Tal er -7 ; find Tallene.
11. Summen af 9 paa hinanden følgende Tal er 9; find Tallene.
12. Find Værdien af $x - y + z$, naar $x = 9a - b + 3c$, $y = 8a - 7b + 5c$ og $z = 5a - 5b + 2c$.

Multiplikation.

17. Udtrykket $a \cdot b$ betegner en Sum af saa mange Addender, som a 's numeriske Værdi angiver, og hver Addend skal være b , naar a er positiv, men $(-b)$, naar a er negativ.

$$6 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30.$$

$$6 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -30.$$

$$(-3) \cdot 7 = (-7) + (-7) + (-7) = -21.$$

$$(-3) \cdot (-7) = [-(-7)] + [--(-7)] + [--(-7)] = 7 + 7 + 7 = 21.$$

Da en Sum af positive Tal er positiv, og en Sum af negative Tal er negativ, faar man:

a. Man multiplicerer to Tal med hinanden ved at multiplicere deres numeriske Værdier og give det udkomne Tal Fortegnet Plus, hvis Faktorerne har samme Fortegn, men Minus, hvis de har forskellige Fortegn.

Man kan multiplicere med $(-m)$ ved at multiplicere med m og forandre Fortegn for det udkomne Produkt.

1. $(-m) \cdot p = -(mp).$
2. $(-m)(-p) = mp$, og $-[m \cdot (-p)] = -(-mp) = mp$,
altsaa $(-m) \cdot (-p) = -[m(-p)].$

b. Man multiplicerer en flerleddet Størrelse med et Tal ved at multiplicere hvert af dens Led med Tallet.

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad.$$

Bevis: a positiv, for Eks. $a = 4$; man har

$$\begin{aligned} & 4(b + c - d) \\ &= (b + c - d) + (b + c - d) + (b + c - d) + (b + c - d) \\ &= b + c - d + b + c - d + b + c - d + b + c - d \\ &= b + b + b + b + c + c + c + c - d - d - d - d. \\ &= (b + b + b + b) + (c + c + c + c) - (d + d + d + d) \\ &= 4b + 4c - 4d. \end{aligned}$$

Paa lignende Maade vises Sætningen, naar $a = m$.

a negativ; for $a = -m$, har man

$$\begin{aligned} & (-m)(b + c - d) = -[m(b + c - d)] \\ &= -[mb + mc - md] = -mb - mc + md \\ &= (-m)b + (-m)c - (-m)d. \end{aligned}$$

c. Multiplikator og Multiplikand kan ombyttes.

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Bevis: a og b positive:

$$\begin{aligned} m \cdot n &= m(1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (} n \text{ Addender)}). \\ &= m + m + m + \dots + m \text{ (} n \text{ Addender)}. \\ &= n \cdot m. \end{aligned}$$

a positiv og b negativ.

$$m \cdot (-n) = -(m \cdot n) = -(n \cdot m)$$

og

$$(-n) \cdot m = -(n \cdot m),$$

altsaa

$$m \cdot (-n) = (-n) \cdot m.$$

a og b negative.

$$(-m) \cdot (-n) = m \cdot n = n \cdot m = (-n) \cdot (-m).$$

$$m \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$$(-m) \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$0 \cdot a$ betyder 0, ogsaa naar $a = 0$.

Vi opnaar da, at Sætning c ogsaa gælder, naar een af Faktorerne eller begge Faktorerne er Nul.

Naar enhver af Faktorerne er forskellig fra Nul, kan Produktet ikke blive Nul. Altsaa:

d. Et Produkt er Nul, naar een af Faktorerne er Nul; men hvis ingen af Faktorerne er Nul, er Produktet heller ikke Nul.

18. $a \cdot b \cdot c \cdot d$ eller $a b c d$ betyder, at man først skal multiplicere b med a , derefter c med det udkomne og endelig d med det udkomne. Man siger, at man multiplicerer a , b , c og d med hinanden.

$$\begin{aligned} \text{Eks. } (-2) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-3) &= (-6) \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-3) \\ &= 6 \cdot (-4) \cdot (-3) = (-24) \cdot (-3) = 72. \end{aligned}$$

Hver Gang man multiplicerer med en negativ Faktor, skifter Produktet Fortegn; at skifte Fortegn et lige Antal Gange er det samme som ikke at skifte Fortegn, og at skifte Fortegn et ulige Antal Gange er det samme som at skifte det een Gang. Man faar altsaa:

a. Man kan multiplicere flere Tal med hinanden ved at multiplicere deres numeriske Værdier med hinanden og give det udkomne Produkt Fortegnet Minus, hvis der er et ulige Antal negative Faktorer, og ellers Plus.

b. Man kan multiplicere med et Produkt ved først at multiplicere med den ene Faktor og derefter multiplicere det udkomne med den anden.

$$(a b) \cdot c = a \cdot (b c).$$

Bevis: a positiv, f. Eks. $a = 4$.

$$\begin{aligned} (4 b) c &= c (4 b) = c (b + b + b + b) \\ &= c b + c b + c b + c b = 4 (c b) = 4 \cdot (b c). \end{aligned}$$

a negativ, f. Eks. $a = -4$.

$$\begin{aligned} [(-4) b] \cdot c &= c [(-4) \cdot b] = c [(-b) + (-b) + (-b) + (-b)] \\ &= -b c - b c - b c - b c = (-4) \cdot (b c). \end{aligned}$$

Læses Formlen omvendt, altsaa

$$a (b c) = (a b) c, \quad \text{faar man:}$$

c. Man kan multiplicere et Produkt med et Tal ved at multiplicere den ene Faktor med Tallet.

Man kan ombytte to paa hinanden følgende Faktorer i et Produkt, selv om der staar en Faktor foran dem.

$ab c$ betyder $(ab) \cdot c$.

$$(ab) c = a (bc) \quad \text{ifølge Sætning b.}$$

$$a (bc) = a (cb) \quad \text{ifølge 17 c.}$$

$$a (cb) = ac \cdot b \quad \text{ifølge c.}$$

Altsaa

$$a b c = a c b.$$

Man kan bringe enhver Faktor hen paa hvilken Plads, det skal være, i Produktet ved stadig at ombytte den med dens Nabofaktor. Altsaa har man:

d. I et Produkt er Faktorernes Orden ligegyldig.

Naar man skal multiplicere flere Produkter med hinanden, kan man benytte følgende Fremgangsmaade: Produktets Fortegn bestemmes, Koefficienten findes ved, at man multiplicerer de givne Koefficienter med hinanden, og Bogstavfaktorerne sættes i alfabetisk Orden efter Koefficienten.

Eks. 1. $(2ab) \cdot (3cd) = 6abcd.$

Eks. 2. $(-5a)(2bc - 3cd) = -10abc + 15acd.$

Produktet $a \cdot a$ skrives a^2 og kaldes *Kvadratet* paa a ;
 $a \cdot a \cdot a$ skrives a^3 og kaldes *Kubus* paa a .

a^m læses a i m 'te *Potens* og betyder Produktet af m Faktorer, hvoraf enhver er a ; a kaldes *Roden*, m kaldes *Potenseksponenten* og a^m kaldes en *Potens*. En *Potens* er altsaa et Produkt af lige store Faktorer. Ifølge Definitionen kan Eksponenten kun være et positivt helt Tal.

$$a^1 = a; a^2 = a \cdot a; a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a; a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \text{ o. s. v.}$$

Eksempler. $4^2 = 16$, $2^4 = 16$, $5^3 = 125$, $3^5 = 243$.

$$(-2)^3 = -8, (-2)^4 = 16, (-2)^5 = -32.$$

Man kan multiplicere Potenser af samme Rod ved at addere Eksponenterne og beholde Roden.

$$a^3 \cdot a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7.$$

Man kan opløfte et Produkt til Potens ved at opløfte hver Faktor for sig til Potensen.

$$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 b^4.$$

Eks. $(2a)^2 + (3a)^2 + (4a)^2 - (5a)^2 = 4a^2 + 9a^2 + 16a^2 - 25a^2 = 4a^2.$

19 a. Man kan multiplicere to flerleddede Størrelser med hinanden ved at multiplicere hvert Led i een af Størrelserne med ethvert af Leddene i den anden.

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.$$

Bevis: Da $(a - b)$ kan udregnes til et enkelt Tal og altsaa kan betragtes som et enkelt Tal, har man:

$$\begin{aligned} (a - b)(c - d) &= (a - b)c - (a - b) \cdot d \text{ iflg. 17 b} \\ &= c(a - b) - d(a - b) \text{ iflg. 17 c} \\ &= ac - bc - (ad - bd) \\ &= ac - bc - ad + bd \\ &= ac - ad - bc + bd. \end{aligned}$$

b. Kvadratet paa en toleddet Størrelse er lig med Kvadratet paa det første Led plus eller minus det dobbelte Produkt af Leddene plus Kvadratet paa det andet Led; det dobbelte Produkt skal have Fortegnet Plus, hvis Leddene har samme Fortegn, men Minus, hvis de har forskellige Fortegn.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-a - b)^2 &= (-a - b) (-a - b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$(a - b)^2 = (a - b) (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(b - a)^2 &= (b - a) (b - a) = b^2 - 2ab + a^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

c. To Tals Sum gange de samme to Tals Differens er lig med Minuendens Kvadrat minus Subtrahendens Kvadrat.

$$\begin{aligned}(a + b) (a - b) &= a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2 \\ (-a + b) (-a - b) &= a^2 + ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Ethvert flercifret Tal er som tidligere nævnt en flerleddet Størrelse, saaledes er

$$7245 = 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

Naar man multiplicerer to flercifrede Tal med hinanden, anvender man Sætningen om flerleddede Størrelses Multiplication.

Eks. $27 \cdot 64$

$$\begin{aligned}&= (2 \cdot 10 + 7) (6 \cdot 10 + 4) \\ &= 12 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 42 \cdot 10 + 28 \\ &= 1200 + 500 + 28 = 1728.\end{aligned}$$

Eksempler paa Anvendelse af Sætningerne i 19:

1. $(2a + 5)(3a - 4) - (3a - 1)(2a - 3)$
 $= 6a^2 - 8a + 15a - 20 - (6a^2 - 9a - 2a + 3)$
 $= 6a^2 - 8a + 15a - 20 - 6a^2 + 9a + 2a - 3$
 $= 18a - 23.$
2. $892 = (90 - 1)^2 = 8100 - 180 + 1 = 7921.$
3. $97 \cdot 103 = (100 - 3)(100 + 3) = 10000 - 9 = 9991.$
4. $(2x + 3y)^2 + (2x - 3y)^2 - (3x + 4y)(3x - 4y)$
 $= 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2 - (9x^2 - 16y^2)$
 $= 8x^2 + 18y^2 - 9x^2 + 16y^2$
 $= -x^2 + 34y^2.$

20 a. *Man kan multiplicere begge Sider af en Ulighed med samme positive Tal.*

Naar $a > b,$
 er $m \cdot a > m \cdot b.$

Det er tilstrækkeligt at vise, at $ma - mb$ er positiv
 eller $ma - mb > 0.$

Man har $a - b > 0$ ifølge det givne,
 altsaa $m(a - b) > 0$
 eller $ma - mb > 0.$

b. *Naar man multiplicerer begge Sider af en Ulighed med samme negative Tal, skal Ulighedstegnet vendes om.*

Naar $a > b,$
 er $(-m)a < (-m)b.$

Det er tilstrækkeligt at bevise, at
 $(-m)a - (-m)b < 0$
 eller $(-m)(a - b) < 0,$

men dette er rigtigt, fordi $(-m)$ er negativ og $(a - b)$ er positiv.

Opgaver.

13. $3(a + b) - 4(2a - 3c) + 6(a - 2c)$.
14. $9a(5b + 4c) - 3b(15a + 2c) - 6c(6a - 2b)$.
15. $3[9x - 8(11y + 2x) - 6(3x - 15y)] - 6(y - 12x)$.
16. $(4b^2 + 6b + 5)(8b^2 = 12b + 8)$; Eks. $b = -5$.
17. $(2a^2 - 4a + 5)(2a^2 + 4a + 3)$; Eks. $a = -2$.
18. $(4a + b - 2c)(12a - 3b - 6c) + 6(8a - 2c)$.
19. $(2x + 5)^2 - (3x - 5)^2 + 5x(x + 5)$.
20. $(5a + 1)^2 - (5a - 3)(5a + 3)$.
21. $(2a + 3b)(2a - 3b)(4a^2 + 9b^2)$.

Løs følgende Ligninger:

22. $(9x + 3)^2 - (9x - 3)^2 = 72x - (28 - 50x)$.
23. $3[x + 5(x + 2)] + 42 = (x + 9)^2 - (x - 9)^2$.
24. $(2x + 9)(18x - 7) - 8(7x - 16) = 9(2x + 3)^2$.
25. $(5x - 8)^2 - (5x + 3)(5x - 3) = 7(13 - 11x)$.
26. $4[2x - (x - 7)] = (4x + 7)^2 - (4x + 9)^2$.

Bevis, at følgende Ligninger er identiske.

27. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
28. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
 $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.
29. $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) = x^6 - 1$.
30. $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1) = a^4 + a^2 + 1$.
31. $(2a^2 + 2a + 1)(2a^2 - 2a + 1) = 4a^4 + 1$.
32. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$
33. $x^2(x + 5)^2 - (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) = 36$.
34. $x^2(x + 13)^2 - (x - 2)(x + 3)(x + 10)(x + 15) = 900$.

Division.

21. *Udtrykket $a : b$ betyder det Tal, som man skal multiplicere med b for at faa a .*

Ifølge Definitionen har man

$$b \cdot (a : b) = a \text{ og } (ab) : b = a,$$

dette kan udtrykkes saaledes:

a. *Multiplikation og Division med samme Tal hæver hinanden.*

b. *Man kan dividere et Tal med et andet ved at dividere de numeriske Værdier og give Kvotienten Fortegnet Plus, hvis de to Tal har samme Fortegn, men Fortegnet Minus, hvis de har forskellige Fortegn.*

$$6 : 2 = 3, \text{ da } 2 \cdot 3 = 6.$$

$$(-6) : 2 = -3, \text{ da } 2(-3) = -6.$$

$$6 : (-2) = -3, \text{ da } (-2)(-3) = 6.$$

$$(-6) : (-2) = 3, \text{ da } (-2) \cdot 3 = -6.$$

c. *Man kan dividere en flerleddet Størrelse med et Tal ved at dividere hvert Led med Tallet.*

$$(8a + 12b - 20c) : 4 = 2a + 3b - 5c,$$

fordi $4(2a + 3b - 5c) = 8a + 12b - 20c.$

22. *I Udtrykket $a : b : c \cdot d$ skal Regningerne udføres fra venstre mod højre.*

Eks. $(-18) : 3 : (-2) \cdot (-5) = (-6) : (-2) \cdot (-5) =$
 $3 \cdot (-5) = -15.$

a. *Man kan dividere et Produkt med et Tal ved at dividere den ene Faktor med Tallet.*

$$(ab) : c = (a : c) \cdot b,$$

fordi $c \cdot (a : c) \cdot b = ab.$

Læses Formlen omvendt, altsaa

$$(a : c) b = (a b) : c,$$

faar man:

b. Man kan multiplicere med en Kvantient ved at multiplicere med Dividenden og dividere det udkomne med Divisor.

c. Man kan dividere med et Produkt ved først at dividere med den ene Faktor og derefter dividere det udkomne med den anden.

Eller: Kvantienten bliver uforandret, naar Dividend og Divisor divideres med samme Tal, og naar de multipliceres med samme Tal.

$$(a b) : (b c) = a : c,$$

fordi

$$b c \cdot (a : c) = a b.$$

d. Man kan dividere med en Kvantient ved at multiplicere med Divisor og dividere det udkomne med Dividenden.

$$a : (b : c) = (c a) : b,$$

fordi

$$(b : c) \cdot [(c a) : b] = a.$$

Eks. 1. $(8 a b) : (2 a c) \cdot 3 c = 4 b : c \cdot 3 c = 12 b.$

Eks. 2. $50 a : c \cdot c : 2 : (5 a : b) = 25 a : (5 a : b) = 5 b.$

Naar Divisors Eksponent er mindre end Dividendens, gælder følgende Sætning:

e. Man kan dividere Potenser af samme Rod ved at subtrahere Divisors Eksponent fra Dividendens og beholde Roden.

$$a^8 : a^5 = a^3, \text{ fordi } a^3 \cdot a^5 = a^8.$$

Eks. 1. $a^3 \cdot a^4 + a^{11} : a^4 - a^9 : a^2 = a^7 + a^7 - a^7 = a^7.$

Eks. 2. $a^5 \cdot a^6 : a^8 + 8 a^7 : (4 a^4) = a^3 + 2 a^3 = 3 a^3.$

Eks. 3. $(2 a)^5 : a^3 - (3 a)^4 : 9 a^2 = 32 a^5 : a^3 - 81 a^4 : 9 a^2 = 32 a^2 - 9 a^2 = 23 a^2.$

Opgaver.

35. $(6a^2b + 8ab^3 - 2abc) : (2ab)$.
 36. $(5x^3 - 10x^2y + 15x^4) : (5x^2)$.
 37. $(21az^3 + 7az^4 - 14az^2) : [az^2 - 3z(az - 3az)]$.
 38. $2ab^2 \cdot 3bc^2 \cdot 4ac : (2abc)^2 : (3bc)$.
 39. $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 : a^5 + 6a^7 \cdot a^3 : a^6$. Eks. $a = -3$.
 40. $2x : 7 = -6; (x - 11) : (x + 4) = 6$.
 41. $(5x + 16)^2 : x = 25(x + 9) - 1$.
 42. $(8x - 15)^2 : (4x + 5) = 9 + 16(x - 4)$.
 43. Bevis, at $(a^4 + 2a^3 + a^2 - 1) : (a^2 + a - 1) = a^2 + a + 1$.
 Eks. $a = -10$.

Opløsning i Faktorer.

23. At opløse en flerleddet Størrelse i Faktorer vil sige at omskrive den til eet Produkt.

Eks. 1. $ab + bc - 5b = b(a + c - 5)$.

Naar Leddene i en flerleddet Størrelse har en fælles Faktor, kan man sætte den uden for en Parentes.

Eks. 2. $5a^2b + 10abc - 20abc^2 = 5ab(a + 2c - 4c^2)$.

Eks. 3. $ab + ac - b^2 - bc = a(b + c) - b(b + c)$
 $= (b + c)(a - b)$.

Naar man skal opløse flerleddede Størrelser i Faktorer, kan man ofte benytte følgende Formler:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b).$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b).$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Eks. 4. $a^2 - 4b^2 = (a + 2b)(a - 2b)$.

Eks. 5. $a^2 + 6ab + 9b^2 = (a + 3b)(a + 3b)$ eller $(a + 3b)^2$.

Eks. 6. $4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2$.

$$\begin{aligned}\text{Eks. 7. } 4a^2 + 12ab + 9b^2 - c^2 &= (2a + 3b)^2 - c^2 \\ &= (2a + 3b + c)(2a + 3b - c).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Eks. 8. } x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 2x - 3x + 6 \\ &= x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Eks. 9. } x^2 - 6x + 8 &= x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 1 \\ &= (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = (x - 2)(x - 4).\end{aligned}$$

Opgaver.

$$44. 3x + 51 - 2xy - 34y.$$

$$45. x^3 + 5x^2 - 3ax^2 - 15ax.$$

$$46. 3ab + 2bx - 6ay - 4xy.$$

$$47. 9ac + 4nb - 6ab - 6nc.$$

$$48. 8x^2 + 9a + 12x + 4x^2 + 9ax.$$

$$49. 3bc - 4ac + 9b^2 - 16c^2.$$

$$50. 16a^2 + 40ab + 25b^2 + 12ax + 15bx.$$

$$51. a^2 + b^2 + 4ay - 2ab - 4by.$$

$$52. a^4 + a^2x^2 - 4b^2x^2 - 16b^4.$$

$$53. a^3 - a^2 - 4a + 4.$$

$$\begin{aligned}54. (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2 - c^2)(a^2 + b^2) \\ + 2b^2(2b^2 - c^2).\end{aligned}$$

$$55. ac(a - c) + ab(b - a) + bc(c - b).$$

For hvilke Værdier af x er følgende Polynomier lig Nul, for hvilke positive og for hvilke negative?

$$56. x^2 - 5x + 6; x^2 + 5x + 6.$$

$$57. x^2 - 7x + 12; x^2 + 7x + 12.$$

Polynomiens Division.

24. Naar man skal dividere et Polynomium med et andet, kan man undertiden opløse Dividenden i Faktorer, saaledes at een af Faktorerne er lig Divisor.

Eks. $(a^2 + 5ab + 3a + 15b) : (a + 5b)$
 $a^2 + 5ab + 3a + 15b = a(a + 5b) + 3(a + 5b)$
 $= (a + 5b)(a + 3).$

Man faar da $(a + 5b) \cdot (a + 3) : (a + 5b) = a + 3.$

Divisionen kan ogsaa udføres ved, at man een eller flere Gange trækker Produktet af Divisor og et Tal fra Dividenden.

Eks. 1. $(a^2 - 7a + 12) : (a - 3).$

$$\begin{array}{r}
 a - 3 \overline{) a^2 - 7a + 12} \quad \underline{a - 4} \\
 \phantom{a - 3 \overline{) }} a^2 - 3a \\
 \phantom{a - 3 \overline{) }} \underline{- 4a + 12} \\
 \phantom{a - 3 \overline{) }} - 4a + 12 \\
 \phantom{a - 3 \overline{) }} \underline{- 4a + 12} \\
 \phantom{a - 3 \overline{) }} 0
 \end{array}$$

Man har $a^2 - 7a + 12 - a(a - 3) - (-4)(a - 3) = 0,$
 altsaa $a^2 - 7a + 12 = a(a - 3) + (-4)(a - 3)$
 $= (a - 3)(a - 4).$

Kvotienten er da $a - 4.$

Eks. 2. $(20x^4 + 3y^4 + 13x^2y^2 + 7xy^3 - 2x^3y) : (4x^2 + 3y^2 - 2xy).$

Dividend og Divisor ordnes efter *aftagende Potenser* af x ; det vil sige, at man først skriver det Led, som indeholder x i den højeste Potens, og derefter det Led, som indeholder x i den næsthøjeste Potens, og saaledes videre.

$$\begin{aligned}
 & 20x^4 + 3y^4 + 13x^2y^2 + 7xy^3 - 2x^3y \\
 &= 20x^4 - 2x^3y + 13x^2y^2 + 7xy^3 + 3y^4. \\
 & 4x^2 + 3y^2 - 2xy = 4x^2 - 2xy + 3y^2.
 \end{aligned}$$

Regningerne udføres derefter som i Eks. 1.

Man finder første Led af Kvotienten ved at dividere første Led af Divisor ind i første Led af Dividenden. Divisor multipliceres med det fundne Led, og Produktet

trækkes fra Dividenden. Den Differens, man faar, ordnes efter aftagende Potenser af samme Bogstavtal, som Divisor er ordnet efter. Man finder næste Led af Kvotienten ved at dividere første Led af Divisor ind i første Led af Differensen o. s. v.

At et Polynomium er af *lavere Grad* end et andet med Hensyn til a , vil sige, at intet af det første Polynomiums Led indeholder saa mange Faktorer a som det Led i det andet, der indeholder flest.

Hvis man ved Divisionen kommer til en Rest, der er af lavere Grad end Divisor med Hensyn til det Bogstav, man har ordnet efter, gaar Divisionen ikke op; det vil sige, man kan ikke finde noget Polynomium, som multipliceret med Divisor giver Dividenden; man maa da nøjes med en ufuldstændig Kvotient.

Eks. 3. $(5x^2 - 11x + x^3 + 16) : (4x - 2 + x^2)$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 4x - 2 \quad x^3 + 5x^2 - 11x + 16 \quad | \quad x + 1 \\
 \underline{x^3 + 4x^2 - 2x} \\
 x^2 - 9x + 16 \\
 \underline{x^2 + 4x - 2} \\
 -13x + 18.
 \end{array}$$

Den ufuldstændige Kvotient er $x + 1$.

Resten er $-13x + 18$.

Opgaver.

58. $(16a^4 - 8a^2 + 1) : (2a - 1)^2$.

59. $(a^4 + a^2b^2 + b^4) : (a^2 + ab + b^2)$.

60. $(x^2 + 4x + 4)^2 : (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)$.

61. $[(3x^2 + 1)(3x^2 - 1) + 3x^2(3x^4 + 1)] : [3(x^3 + x^2 + x) + 1]$.

62. $4(x^3 + 1) : (2x^4 - 2x^2 + 1)$.

Sætninger om hele Tal.

25 a. *Naar et Tal er Maal for alle Leddene i en flerleddet Størrelse, er det Maal for Størrelsen.* 21 c.

a er Maal for $3a^2 + 5a$.

10 er Maal for $100a + 70$.

Den omvendte Sætning er ikke rigtig.

8 er Maal for $(23 + 9)$, men ikke for noget af Leddene.

b. *Naar et Tal er Maal for een af Faktorerne i et Produkt, er det Maal for Produktet.* 22 a.

6 gaar op i $12a$.

b gaar op i $9ab^2$.

Den omvendte Sætning er ikke rigtig;

12 gaar op i $6 \cdot 14$,

men ikke i nogen af Faktorerne.

§ 26—30 handler kun om *positive* hele Tal.

26. Ethvert trecifret Tal kan skrives

$$10^2a + 10b + c,$$

hvor a , b og c er første, andet og tredie Ciffer. For $a = 5$, $b = 9$ og $c = 0$ bliver Tallet 590. Paa lignende Maade kan man skrive ethvert flercifret Tal som en flerleddet Størrelse, og man ser, at hvert Led undtagen det sidste indeholder Faktoren 10.

Naar et Tal divideres med 2 eller 5, faar man samme Rest, som naar Tallets sidste Ciffer divideres med 2 eller 5. Naar T betegner et vilkaarligt 5-cifret Tal, har man

$$T = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e.$$

Da baade 2 og 5 er Maal for ethvert af de fire første Led, vil hele Tallet ved Division med 2 eller 5 give samme Rest, som e giver. Man har altsaa:

a. 2 og 5 er Maal for et Tal, hvis de er Maal for det sidste Ciffer, og ellers ikke.

Ved et Tals *Tværsom* forstaar man Summen af dets Cifre.

Naar et Tal divideres med 3 eller 9, faar man samme Rest, som naar Tallets *Tværsom* divideres med 3 eller 9.

$$\begin{aligned} T &= 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e \\ &= 9999a + a + 999b + b + 99c + c + 9d + d + e \\ &= 9999a + 999b + 99c + 9d + (a + b + c + d + e), \end{aligned}$$

hvor sidste Led netop er Tallets *Tværsom*. Da 9 gaar op i ethvert af de 4 første Led, faar man altsaa samme Rest, naar T divideres med 9, som naar Tallets *Tværsom* $(a + b + c + d + e)$ divideres med 9. Det samme gælder for 3. Altsaa:

b. 3 og 9 gaar op i et Tal, naar de gaar op i Tallets *Tværsom*, og ellers ikke.

Tallet 11 gaar op i ethvert Tal, der skrives med et lige Antal *Ettal*.

Eks. $111111 = 11 \cdot 10^4 + 11 \cdot 10^2 + 11,$

hvor 11 gaar op i hvert Led.

11 gaar op i ethvert Tal, der skrives med *et lige Antal Nital*.

Eks. $99999999 = 9 \cdot 11111111,$

hvor 11 gaar op i den sidste Faktor.

11 gaar op i ethvert Tal, der bestaar af 2 *Ettal* med *et lige Antal Nuller imellem*.

Eks. $100001 = 111111 - 11110,$

hvor 11 gaar op i hvert Led.

c. 11 gaar op i et Tal, naar det gaar op i Summen af hvert andet Ciffer minus Summen af de øvrige Cifre, og ellers ikke.

$$T = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e$$

$$= 9999a + a + 1001b - b + 99c + c + 11d - d + e$$

$$= 9999a + 1001b + 99c + 11d + (a - b + c - d + e),$$

hvor 11 gaar op i ethvert af de fire første Led, medens sidste Led er Summen af hvert andet Ciffer minus Summen af de øvrige.

27. Ved et *Primtal* forstaar man et Tal, som ikke har andre Maal end 1 og Tallet selv. De mindste Primtal er

1 2 3 5 7 11 13 17 19.

a. Naar et *Primtal* gaar op i et Produkt, gaar det op i mindst een af Faktorerne.

Vi vil gaa ud fra, at denne Sætning er rigtig.

b. Naar et *Primtal* gaar op i en Potens, gaar det op i Roden. Dette følger af Sætning a, da en Potens er et Produkt.

c. To Produkter af forskellige *Primtal* kan ikke have samme Værdi, og to Produkter af de samme *Primtal* i forskellige Potenser kan ikke have samme Værdi.

Naar a , b , c og d er forskellige *Primtal*, kan man ikke have $ab = cd$; thi a vilde da være Maal for Produktet cd , men ikke for hverken c eller d , og det er umuligt ifølge Sætning a.

Man kan heller ikke have $a^3bc = ab^3c^2$; thi deraf vilde følge, at $a^2 = b^2c$; men det strider mod Sætning a.

28. De Tal, som ikke er *Primtal*, kaldes *sammensatte Tal* eller *delelige Tal*. De første sammensatte Tal er

4 6 8 9 10 12 14 15 16 18.

Ethvert sammensat Tal kan opløses i *Primfaktorer*; det vil sige, det kan skrives som et Produkt af litter *Primtal*.

Eks. $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.

Der gives ikke noget sammensat Tal, som kan opløses i mere end eet Sæt Primfaktorer. Ifølge 27 c.

Naar man vil opløse et Tal i Primfaktorer, dividerer man først med det mindste Primtal, som gaar op i Tallet. Naar det ikke gaar op tiere, dividerer man med det næste Primtal, som gaar op o. s. v.

Eks. 1. 744 skal opløses i Primfaktorer:

2	744
2	372
2	186
3	93
	31

$$744 = 2^3 \cdot 3 \cdot 31.$$

Eks. 2. 3715 skal opløses i Primfaktorer:

5	3715
	743

Naar man efterhaanden dividerer 743 med de Primtal, der følger efter 5, finder man, at ingen af de nærmest følgende gaar op. Ved Division med 29 faar man en ufuldstændig Kvotient, der er mindre end 29. Det er da overflødigt at prøve med flere Primtal; dersom et større Primtal gik op, maatte Kvotienten blive mindre end 29, men det er umuligt; thi hvis et Tal mindre end 29 gik op, maatte dets Primfaktorer ogsaa gaa op, men vi har fundet, at intet Primtal mindre end 29 gaar op.

Naar man har faaet en ufuldstændig Kvotient, der er mindre end det Primtal, man dividerer med, er Dividenden et Primtal, saafremt ingen af de foregaaende Primtal gaar op.

29. Et fælles Maal for flere Tal er et Tal, der er Maal for dem alle.

12 og 18 har de fælles Maal 2, 3 og 6.

Største fælles Maal for flere Tal er det største Tal, som gaar op i dem alle.

6 er største fælles Maal for 12 og 18.

a. Et fælles Maal for flere Tal kan ikke indeholde andre Primfaktorer end dem, der findes i alle Tallene. 27 c.

b. Man kan finde største fælles Maal for flere Tal ved at opløse dem i Primfaktorer og danne Produktet af de Primfaktorer, der er fælles for alle Tallene; men hver Primfaktor maa kun tages i den laveste Potens, hvori den forekommer.

At Produktet af de fælles Primfaktorer i de laveste Potenser er et Maal for Tallene ses umiddelbart, naar Tallene er opløst i Primfaktorer. At intet større Tal kan gaa op i dem alle følger af Sætning a.

Eks. 1. Find største fælles Maal for 84, 120 og 180.

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Største fælles Maal er altsaa $2^2 \cdot 3 = 12$.

Naar man skal finde største fælles Maal for to Tal, kan man anvende Divisionsmetoden. Det mindste Tal divideres i det største, Resten divideres ind i Divisor o. s. v. *Sidste Divisor er største fælles Maal.*

Eks. 2. Find største fælles Maal for 435 og 1044.

$$\begin{array}{r} 435) 1044 \quad | 2 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 870 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 174) 435 \quad | 2 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 348 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 87) 174 \quad | 2 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 174 \end{array}$$

Største fælles Maal for 435 og 1044 er altsaa 87.

Lad D være Dividend, d Divisor, q den ufuldstændige Kvotient og r Divisionsresten; man har da

$$\text{I} \quad D - dq = r.$$

$$\text{II} \quad D = dq + r.$$

Af I ser man, at ethvert fælles Maal for Dividend og Divisor er Maal for Divisionsresten, eller:

c. *Ethvert fælles Maal for Dividend og Divisor er fælles Maal for Divisor og Rest.*

Af II faar man paa lignende Maade:

d. *Ethvert fælles Maal for Divisor og Rest er fælles Maal for Dividend og Divisor.*

Af c og d faar man:

e. *Dividend og Divisor har samme største fælles Maal som Divisor og Rest.*

I Eks. 2 ser man umiddelbart, at

87 er største fælles Maal for 87 og 174.

87 er da ogsaa st. f. M. for 174 og 435. Sætning e.

87 er da ogsaa st. f. M. for 435 og 1044. Sætning e.

30. Ved *mindste fælles Fold* af flere Tal forstaar man det mindste Tal, hvori de alle gaar op.

Eks. Tallene 36, 72, 108, 144 er fælles Fold af 12 og 18.

36 er mindste fælles Fold af 12 og 18.

Et Fold af et Tal maa indeholde enhver af Tallets Primfaktorer i mindst lige saa høj en Potens som den, hvori Primfaktoren findes i Tallet.

Eks. Hvis t er et Fold af $2^3 \cdot 7^2$, har man $t = m \cdot 2^3 \cdot 7^2$.

a. *Mindste fælles Fold af flere Tal kan findes ved, at man opløser Tallene i Primfaktorer og danner Produktet af alle Primfaktorerne; hver Primfaktor skal tages i den højeste Potens, hvori den findes.*

Eks. 1. Find mindste fælles Fold af 24, 63 og 196.

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

$$196 = 2^2 \cdot 7^2.$$

Mindste fælles Fold er $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 3528$.

Eks. 2. Find mindste fælles Fold og største fælles Maal for a og b , naar $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$ og $b = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11$. Sættes største fælles Maal $= m$ og mindste fælles Fold $= f$, har man

$$m = 2^2 \cdot 5$$

$$f = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

b. *Produktet af to Tal er lig Produktet af deres største fælles Maal og deres mindste fælles Fold.*

Af Eks. 2 faar man

$$a \cdot b = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

og $m \cdot f = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13,$

altsaa $a \cdot b = m \cdot f.$

Man kan finde mindste fælles Fold af to Tal ved at dividere det ene af Tallene med deres største fælles Maal og multiplicere Kvotienten med det andet Tal.

Af $f \cdot m = a \cdot b$

faar man $f = a \cdot \frac{b}{m}.$

To Tal kaldes *indbyrdes primiske*, naar deres største fælles Maal er 1.

c. *Naar to Tal er indbyrdes primiske, er deres mindste fælles Fold lig deres Produkt. Ifølge Sætning b.*

Naar ethvert af to Tal divideres med deres største fælles Maal, faar man Kvotienter, som er indbyrdes primiske.

Opgaver.

63. Hvilke Værdier kan p have, naar 14 skal gaa op i $10p$?
 64. Find det mindste positive Tal, man kan trække fra 7245, naar 57 skal gaa op i Differensen.
 65. Hvilket af Tallene mellem 20 og 40 kan man lægge til 9901, naar 24 skal gaa op i Summen?
 66. Bevis, at 2 gaar op i $m^2 - m$ og i $m^2 + m$, og at baade 2 og 3 gaar op i $m^3 - m$.
 67. Bevis, at 4 gaar op i ethvert Tal, der har dobbelt saa mange Enere som Tiere.
 68. Find alle trecifrede Tal, hvori 9 gaar op:
 - a) Naar det midterste Ciffer skal være lig Summen af de andre.
 - b) Naar det midterste Ciffer skal være Middeltallet mellem de to andre.
 69. I Tallet 7a86b5 er a og b Cifre; hvilke Værdier kan a og b have, naar baade 9 og 11 skal gaa op i Tallet?
 70. Find Primtallene mellem 120 og 140.
 71. p er et Primal, der er mindre end 100, og 37 gaar op i $(2p - 1) \cdot (p - 5)$; find p .
 72. Bevis, at 16 gaar op i $m^3 - 4m$, naar m er et lige Tal. Hvilke Værdier mindre end 25 kan m have, naar 17 skal gaa op i $m^3 - 4m$?
 73. Opløs følgende Tal i Primfaktorer:
2160, 1001, 10201, 66132 og 826056.
 74. Find største fælles Maal og mindste fælles Fold for:
 - a) 924 og 11100.
 - b) 4056 og 21186.
 - c) 9702, 21021 og 30576.
-

B. Brøker.

Almindelige Brøker.

31. $\frac{1}{n}$ læses en *n*-tedel og betegner en af de Dele, man faar ved at dele den Enhed, som betegnes ved + 1, i *n* lige store Dele. $\frac{m}{n}$ betegner Summen af *m* saadanne Dele. *m* kaldes *Tælleren*, *n* kaldes *Nævneren*, og $\frac{m}{n}$ kaldes en *Brøk*.

$$\frac{1}{5} \text{ Meter} = 20 \text{ cm.}$$

$$\frac{1}{4} \text{ kg} = 250 \text{ g.}$$

$$\frac{3}{4} \text{ Kr.} = 75 \text{ Øre.}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}.$$

En Brøk, hvis Tæller er mindre end Nævneren, kaldes en *ægte Brøk*. Den er mindre end 1.

En Brøk, hvis Tæller er større end Nævneren, kaldes en *uægte Brøk*. Den er større end 1.

En Brøk, hvis Tæller og Nævner er lige store, er lig med 1.

Brøker, hvis Nævnerne er ens, kaldes *ensbenævnte*.

— $\frac{1}{n}$ betegner en af de Dele, man faar ved at dele den Enhed, som betegnes ved — 1, i *n* lige store Dele.

— $\frac{m}{n}$ betegner Summen af *m* saadanne Dele.

$-\frac{m}{n}$ betyder det samme som $-\frac{m}{n}$.

$-\frac{m}{n}$ kaldes en negativ Brøk, $+\frac{m}{n}$ kaldes en positiv Brøk.

32 a. Man adderer ensbenævnte Brøker ved at addere Tællerne og beholde den fælles Nævner.

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}.$$

$$\frac{4}{7} + \frac{-1}{7} = \frac{3}{7}; \text{ eller } \frac{4}{7} + \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}.$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

b. Man subtraherer ensbenævnte Brøker ved at subtrahere Tællerne og beholde den fælles Nævner.

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n},$$

da
$$\frac{a-b}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a-b+b}{n} = \frac{a}{n}.$$

c. Ethvert helt Tal kan skrives som Brøk med en hvilken som helst Nævner.

Eks.

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= \frac{n}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n} + \frac{n}{n}$$

$$= \frac{5n}{n}.$$

Omvendt har man:

d. Enhver Brøk, hvis Tæller er et Fold af Nævneren, er lig det hele Tal, man faar ved at dividere Tælleren med Nævneren.

$$\frac{5n}{n} = 5.$$

Summen af et helt Tal og en ægte Brøk kaldes et *blandet Tal*.

$$3 + \frac{5}{8} \text{ skrives } 3\frac{5}{8}.$$

Ethvert blandet Tal kan skrives som uægte Brøk, og enhver uægte Brøk kan skrives som et blandet Tal.

Eks. 1. $7\frac{3}{4} = \frac{28}{4} + \frac{3}{4} = \frac{31}{4}.$

Eks. 2. $\frac{31}{5} = \frac{30}{5} + \frac{1}{5} = 6\frac{1}{5}.$

33 a. *Man kan multiplicere en Brøk med et helt Tal ved at multiplicere Tælleren med Tallet.*

$$4 \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} = \frac{4p}{q}.$$

$$\left(-4\right) \cdot \frac{p}{q} = \left(-\frac{p}{q}\right) + \left(-\frac{p}{q}\right) + \left(-\frac{p}{q}\right) + \left(-\frac{p}{q}\right) = -\frac{4p}{q}.$$

$$q \cdot \frac{p}{q} = \frac{q \cdot p}{q} = p.$$

b. *Kvotienten mellem to positive hele Tal er altid lig med den Brøk, der har Dividenden til Tæller og Divisoren til Nævner.*

$$m : n = \frac{m}{n}, \text{ da } n \cdot \frac{m}{n} = \frac{n \cdot m}{n} = m.$$

I Overensstemmelse dermed vedtager vi, at

$$\frac{m}{-n} \text{ skal betyde } m : (-n).$$

Naar $D = dq + r,$
 har man $D : d = \frac{D}{d} = \frac{dq + r}{d} = q + \frac{r}{d}.$

Man kan altsaa finde den fuldstændige Kvotient mellem D og d ved, at man til den ufuldstændige Kvotient lægger Resten divideret med Divisor.

c. En Brøks Værdi forandres ikke, naar dens Tæller og Nævner multipliceres med samme Tal, eller naar dens Tæller og Nævner divideres med et fælles Maal.

$$\frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{m \cdot q}.$$

Man faar nemlig samme Produkt, naar man multiplicerer de to Brøker med q .

$$q \cdot \frac{p}{q} = \frac{q \cdot p}{q} = p$$

og

$$q \cdot \frac{m \cdot p}{m \cdot q} = \frac{qm \cdot p}{mq} = p.$$

At multiplicere Tæller og Nævner med samme Tal kaldes at *forlænge Brøken*. At dividere Tæller og Nævner med et fælles Maal kaldes at *forkorte Brøken*.

Eks.
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}, \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

d. Man kan dividere en Brøk med et helt Tal ved at multiplicere Nævneren med Tallet.

Man kan dividere en Brøk med et Tal, der er Maal for Tælleren, ved at dividere Tælleren med Tallet.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}, \text{ da } c \cdot \frac{a}{bc} = \frac{ca}{bc} = \frac{a}{b}.$$

$$\frac{ac}{b} : c = \frac{a}{b}, \text{ da } c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}.$$

34. Naar man skal addere eller subtrahere Brøker med forskellige Nævne, gør man dem først ensbenævnte; det kan udføres ved, at man forlænger Brøkerne med passende Tal.

Eks. 1.
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Nævnerens mindste fælles Fold er fælles Nævner. Man finder, hvad enhver af Brøkerne skal forlænges med, ved at dividere dens Nævner ind i Fællesnævneren. I Eks. 1 er den første Brøk forlænget med 3, den anden med 2.

Eks. 2.
$$\frac{a}{b} + \frac{5a}{2b} - \frac{3b}{a}.$$

Fællesnævneren maa indeholde alle Nævnerens Faktorer, den bliver altsaa $b \cdot 2 \cdot a = 2ab$.

$$\frac{a}{b} + \frac{5a}{2b} - \frac{3b}{a} = \frac{2a^2}{2ab} + \frac{5a^2}{2ab} - \frac{6b^2}{2ab} = \frac{7a^2 - 6b^2}{2ab}.$$

Eks. 3.
$$\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-4}{4x+4} + \frac{x^2-2x+3}{3x^2-3}.$$

Nævnerne opløses i Faktorer; man faar

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-4}{4x+4} + \frac{x^2-2x+3}{3x^2-3} &= \frac{2x-3}{3(x-1)} - \frac{3x-4}{4(x+1)} + \frac{x^2-2x+3}{3(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(2x-3) \cdot 4(x+1)}{3 \cdot 4 \cdot (x-1)(x+1)} - \frac{(3x-4)(x-1)3}{3 \cdot 4(x-1)(x+1)} + \frac{4(x^2-2x+3)}{4 \cdot 3(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{8x^2 + 8x - 12x - 12 - (9x^2 - 9x - 12x + 12) + (4x^2 - 8x + 12)}{3 \cdot 4(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{3x^2 + 9x - 12}{3 \cdot 4(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 3x - 4}{4(x-1)(x+1)} = \frac{x+4}{4(x+1)} = \frac{x+4}{4x+4}. \end{aligned}$$

Naar Nævneren holdes opløst i Faktorer, ser man lettest, om man kan forkorte.

35. $\frac{m}{n} \cdot b$ har ingen Betydning efter vore tidligere Definitioner, med mindre m er et Fold af n . Vi definerer nu

$$\frac{m}{n} \cdot b \text{ betyder } m \cdot \frac{b}{n}$$

og $\left(-\frac{m}{n}\right) \cdot b$ betyder $(-m) \cdot \frac{b}{n}$.

Man har da $\frac{a}{n} \cdot b = a \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{n}$, altsaa

a. Man kan multiplicere med en Brøk ved at multiplicere med Tælleren og dividere det udkomne med Nævneren.

At multiplicere en Brøk med en Brøk kaldes at multiplicere Brøkerne med hinanden.

b. Man kan multiplicere to Brøker med hinanden ved at multiplicere Tæller med Tæller og Nævner med Nævner.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \left(\frac{c}{d} : b \right) = a \cdot \frac{c}{bd} = \frac{ac}{bd}.$$

c. Man kan opløfte en Brøk til Potens ved at opløfte Tæller og Nævner hver for sig til Potensen.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^5}{b^5}.$$

d. Man kan dividere med en Brøk ved at multiplicere med den omvendte Brøk.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b},$$

fordi $\frac{c}{d} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d} \cdot \frac{da}{cb} = \frac{cda}{dcb} = \frac{a}{b}.$

Naar flere Brøker skal multipliceres med hinanden, maa Tælleren i en Brøk og Nævneren i en anden forkortes; dette kaldes at forkorte over Kors.

Eks. 1. $\frac{8}{9} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{16} = \frac{1}{9} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{15}.$

Eks. 2. $\frac{a^2 - b^2}{c^3} \cdot \frac{c}{a + b} = \frac{a - b}{c^2}.$

Naar blandede Tal skal multipliceres med hinanden, gør man dem i Reglen til uægte Brøker.

Eks. $4\frac{1}{5} \cdot 6\frac{3}{7} = \frac{21}{5} \cdot \frac{45}{7} = 27.$

Udtrykket $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ kaldes en *Brøks Brøk* eller en sammensat Brøk og betyder $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$; de enkelte Brøker kaldes *Smaaabrøker*.

En Brøks Brøk kan reduceres til almindelig Brøk ved, at dens Tæller og Nævner multipliceres med Smaa-brøkernes Fællesnævner.

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{3 + 2}{3 - 2} = 5.$$

Naar en Størrelse, som bestaar af Faktorer og Divisorer, indeholder Parenteser, kan Udtrykket i hver Parentes omformes til en Brøk.

Eks.
$$\begin{aligned} & a : (b : c : d) \cdot (b : c) \\ &= a : \left(\frac{b}{c} : d\right) \cdot \frac{b}{c} = a : \frac{b}{dc} \cdot \frac{b}{c} \\ &= a \cdot \frac{dc}{b} \cdot \frac{b}{c} = ad. \end{aligned}$$

Opgaver.

75. For hvilke Værdier af n er følgende Brøker ægte, og for hvilke er de uægte?

$$\frac{9}{n}, \frac{n+3}{8}, \frac{0}{n-5}, \frac{n+3}{2n}, \frac{2n+1}{3n-3}.$$

$$76. \frac{3x}{a} + \frac{2x-y}{a} + \frac{6x-5}{a} + \frac{6+y}{a}.$$

Eks. $a = 10, x = 9.$

$$77. \frac{6x}{x+2} + \frac{x^2+12}{x+2} - \frac{2x}{x+2} - \frac{8}{x+2}.$$

$$78. (a-1) \frac{a^2+a+1}{a} + (a+1) \frac{a^2-a+1}{a}.$$

$$79. \frac{a^2+ab}{b} : b + \frac{a^3-ab^2}{b^2} : (a+b) - \frac{a^4}{b} : (a^2b).$$

Forkort Brøkerne i Nr. 80—83.

$$80. \frac{35a^2+15ab}{28ab+12b^2}, \frac{21ax^2-28bx}{18a^2x-24ab}, \frac{9a^2-4x^2}{9a^2-6ax}.$$

$$81. \frac{72a^3b-50ab^3}{36a^3b-30a^2b^2}, \frac{a^2-2ab+ac-2bc}{a^3-2a^2b-ac^2+2bc^2}.$$

$$82. \frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(a+c)x+ac}, \frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac}.$$

$$83. \frac{12b^2-48}{(3b+6)^2}, \frac{(a^2b^2-2bc^2)^2}{9a^4b^4-36b^2c^4}.$$

$$84. \frac{a+5b-4c}{15} + \frac{3a-7b-2c}{20} - \frac{2a-b-11c}{30}.$$

$$85. \frac{a+b}{ab} - \frac{a+c}{ac} + \frac{b+c}{bc}.$$

$$86. a \cdot \frac{3b-2c}{6bc} - b \cdot \frac{4a-5c}{10ac} + \frac{8a^2+3b^2}{6ab} - \frac{5a-4b}{10c}.$$

$$87. \frac{9x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{4x-y}{x+y} + \frac{8x}{x-y}.$$

Eks. $x = 2, y = -4\frac{1}{2}.$

$$88. \frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} - \frac{x^2-2x+3}{3-3x^2}.$$

$$89. \frac{a}{a+b} - \frac{a}{b-a} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}.$$

$$\text{Eks. } a = -\frac{1}{5}, b = -\frac{3}{5}.$$

$$90. \frac{2x^2+1}{x-1} + \frac{x+5}{1-x^2} - \frac{2x^2}{1+x}.$$

$$91. \frac{a}{2b} + \frac{a^2+6ab}{6ab+6b^2} - \frac{4a^2-ab}{6ab-6b^2} - \frac{2a^2+ab}{3b^2-3a^2}.$$

$$\text{Eks. } a = -2\frac{1}{2}, b = -1\frac{1}{4}.$$

$$92. \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) \cdot \left(\frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} + 1 \right) \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

$$93. \left(\frac{2a-3b}{2a} - \frac{3a-2b}{3a} \right) : \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} \right).$$

$$\text{Eks. } a = -5b.$$

$$94. \frac{a^3b-ab^3}{a^2+2ab+b^2} : \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{a+b}.$$

$$95. \left(\frac{x^3}{y} - \frac{y^3}{x} \right) : \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{xy^5 + x^5y + 2x^3y^3}{x^2+y^2}.$$

$$\text{Eks. } x = -\frac{1}{2}, y = -40.$$

$$96. \left(\frac{a}{b} \right)^3 \cdot \left(\frac{c}{d} \right)^3 \cdot \left(\frac{bd}{ac} \right)^2 : \frac{a}{bd}.$$

97. Er $x = \frac{a+b}{2}$ Rod i Ligningen

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 = \frac{x-2a+b}{x+a-2b}?$$

$$98. 2\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{11}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(11 - \frac{21x}{2}\right) : \frac{5}{8} = 0.$$

$$99. \left(\frac{3x}{2} + \frac{x-1}{3}\right) : \left[\frac{13}{6}(x+1) - \frac{x}{3} - 2\frac{1}{2}\right] = 17x - 186.$$

$$100. \left(\frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}}\right) : \left(\frac{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x}}\right) = 6x - 85.$$

Decimalbrøker.

36. En *Decimalbrøk* er Summen af et helt Tal (der kan være 0) og Brøker, hvis Tællere er encifrede, og hvis Nævnerne er stigende Potenser af 10.

Eks. 1. $\frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{4}{10000}$ skrives 0,5714.

Eks. 2. 36,0463 betyder $36 + \frac{4}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{3}{10000}$.

Cifrene efter Kommaet kaldes *Decimaler*.

Man kan føje Nuller efter en Decimalbrøk uden at forandre Værdien af den.

Eks. 0,4 = 0,40 = 0,400, da $\frac{0}{100} = 0$ og $\frac{0}{1000} = 0$.

Herved kan man skaffe Decimalbrøker lige mange Decimaler.

a. En *Decimalbrøk* er lig en almindelig Brøk, hvis Tæller er det Tal, man faar ved at slette Kommaet, og

hvis Nævner skrives med et Ettal efterfulgt af saa mange Nuller, som Decimalbrøken har Decimaler.

$$\begin{aligned} \text{Eks.} \quad 51,587 &= 51 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{7}{1000} \\ &= \frac{51000 + 500 + 80 + 7}{1000} = \frac{51587}{1000}. \end{aligned}$$

b. Enhver Brøk, hvis Nævner bestaar af et Ettal efterfulgt af Nuller, kan skrives som Decimalbrøk ved, at man skriver Tælleren og i den afskærer saa mange Decimaler, som der er Nuller i Nævneren.

$\frac{a}{10^n}$ er lig den Decimalbrøk, man faar, naar man i Tallet a afskærer n Decimaler.

$$\text{Eks.} \quad \frac{55}{10} = 5,5; \quad \frac{47}{1000} = 0,047.$$

c. Man kan multiplicere en Decimalbrøk med et af Tallene 10, 100, 1000 o. s. v. ved at flytte Kommaet saa mange Pladser til højre, som der er Nuller i Multiplikator.

Eks. 1. $10 \cdot 8,57 = 85,7$, fordi Enheden for hvert Ciffer er bleven 10 Gange saa stor.

Eks. 2. $100 \cdot 6,3492 = 634,92$.

d. Man kan dividere en Decimalbrøk med 10, 100, 1000 o. s. v. ved at flytte Kommaet saa mange Pladser til venstre, som der er Nuller i Divisor.

Eks. 1. $3,6 : 10 = 0,36$, fordi Enheden for hvert Ciffer er bleven 10 Gange saa lille.

Eks. 2. $1,25 : 100 = 0,0125$.

37 a. Decimalbrøker adderes og subtraheres ved, at man adderer eller subtraherer de ensbenævnte Led.

Det kan udføres ved, at man sætter Decimalbrøkerne under hinanden, saa Kommaerne staar under hinanden,

og udfører Regningerne; man kan »laane« og sætte »in mente« som ved hele Tal, da hver Enhed er 10 Gange saa stor som den efterfølgende.

$$0,5 + 6,87 + 8,03 = 15,4.$$

Undertiden tilføjer man Nuller, saa der bliver lige mange Decimaler i Decimalbrøkerne.

$$6,1 - 0,485 = 6,100 - 0,485 = 5,615.$$

b. Man multiplicerer flere Decimalbrøker med hinanden ved at multiplicere de Tal, man faar ved at slette Kommaerne, og i Produktet afskære saa mange Decimaler, som der er i Faktorerne tilsammen.

$$\frac{a}{10^n} \cdot \frac{b}{10^m} = \frac{ab}{10^{m+n}}$$

$$\text{Eks. 1. } 0,25 \cdot 0,06 = \frac{25}{100} \cdot \frac{6}{100} = \frac{150}{10000} = 0,0150 = 0,015.$$

$$\text{Eks. 2. } 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006; 5 \cdot 0,24 = 1,2.$$

$$\text{Eks. 3. } 0,9^2 = 0,81; 0,2^3 = 0,008.$$

c. Naar en Decimalbrøk skal divideres med et helt Tal, udføres Regningerne som ved hele Tal; men før man trækker den første Decimal ned, sættes et Komma i Kvotienten.

$$1,28 : 4 = 0,32; 3,54 : 6 = 5,9.$$

d. Naar et helt Tal eller en Decimalbrøk skal divideres med en Decimalbrøk, multiplicerer man først Dividend og Divisor med en saadan Potens af 10, at Divisor bliver hel.

$$\text{Eks. 1. } 0,279 : 3,1 = 2,79 : 31 = 0,09.$$

$$\text{Eks. 2. } 0,2 : 0,25 = 20,0 : 25 = 0,8.$$

Hvis Divisionen ikke gaar op, naar man tilføjer Nuller i Dividenten, kan Kvotienten kun med Tilnærmelse udtrykkes ved en sluttet Decimalbrøk (det vil sige

en Decimalbrøk med et begrænset Antal Decimaler); men den nøjagtige Værdi af Kvotienten kan altid findes som almindelig Brøk.

Eks. $2,5 : 0,11 = 250,0 : 11 = 22,727 \dots$

Sættes Kvotienten lig $22,727$, er Fejlen mindre end $\frac{1}{1000}$.

Den nøjagtige Værdi er $\frac{250}{11} = 22\frac{8}{11}$.

38. Naar man vil omforme en almindelig Brøk til Decimalbrøk, dividerer man Nævneren ind i Tælleren.

Eks. 1. $\frac{4}{5} = 4,0 : 5 = 0,8$.

Eks. 2. $\frac{7}{8} = 7,000 : 8 = 0,875$.

Eks. 3. $\frac{6}{11} = 6,000 : 11 = 0,545 \dots$

Divisionen vil i Reglen ikke gaa op, selv om man bliver ved med at tilføje Nuller. Der er altsaa mange Brøker, som ikke kan omskrives til sluttede Decimalbrøker; men man kan altid finde en sluttet Decimalbrøk, hvis Forskel fra den givne Brøk er mindre end enhver opgiven Størrelse.

Sættes $\frac{6}{11} = 0,545$, er Fejlen mindre end $\frac{1}{1000}$; finder man en Decimal mere, er Fejlen mindre end $\frac{1}{10000}$ o. s. v.

Den Decimalbrøk, man faar ved at fortsætte Divisionen, kaldes en *uendelig Decimalbrøk*; dens Værdi er lig $\frac{6}{11}$.

Alle de uendelige Decimalbrøker, man faar ved at omforme almindelige Brøker til Decimalbrøker, er *periodiske*; det vil sige, at den samme Række Cifre, »Perioden«, bliver ved at gentages i samme Orden.

Eks. 4. $\frac{25}{37} = 0,675675 \dots$

Perioden er her 675; naar Perioden begynder straks efter Kommaet, kaldes Decimalbrøken *ren periodisk*; findes der et eller flere andre Cifre mellem Kommaet og den første Periode, kaldes Decimalbrøken *blandet periodisk*.

Eks. 5. $\frac{31}{44} = 0,704545 \dots$

Denne Decimalbrøk er blandet periodisk og Perioden er 45.

For enhver uforkortelig Brøk gælder følgende Sætninger:

1. Naar Nævneren ikke indeholder andre Primfaktorer end 2 og 5, er Brøken lig en sluttet Decimalbrøk.
2. Naar Nævneren indeholder andre Primfaktorer end 2 og 5, er Brøken lig en uendelig Decimalbrøk, som bliver ren periodisk, hvis Brøkens Nævner ikke indeholder nogen Primfaktor 2 eller 5, men blandet periodisk, hvis Nævneren indeholder mindst een Primfaktor 2 eller 5.

Eks. 1. $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{7}{20} = 0,35$.

Eks. 2. $\frac{2}{3} = 0,666 \dots$; $\frac{4}{11} = 0,3636 \dots$

Eks. 3. $\frac{7}{12} = 0,58333 \dots$

En ren periodisk Decimalbrøk, som ingen hele indeholder, er lig en Brøk, hvis Tæller er Perioden, og hvis Nævner skrives med saa mange Cifre 9, som der er Cifre i Perioden.

$$\text{Eks. 1. } 0,259259 \dots = \frac{259}{999} = \frac{7}{27},$$

$$\text{da } \frac{7}{27} = 7,0000 : 27 = 0,259259 \dots$$

$$\text{Eks. 2. } 12,540540 \dots = 12\frac{540}{999} = 12\frac{12}{37}$$

$$\text{Eks. 3. } 7,416666 \dots = \frac{741,666\dots}{100} = \frac{741\frac{2}{3}}{100} = 7\frac{5}{12}.$$

Opgaver.

101. Find Summen af de Decimalbrøker, som har een Decimal og i Størrelse ligger mellem 5 og 6.

$$102. 0,321 \cdot x - 3,57 = 0,246 \cdot x - 3,33.$$

$$103. 0,5 (0,107 \cdot x - 1,19) = 0,041 \cdot x - 0,555.$$

$$104. \frac{1,5^4 - 0,5^4}{1,5^2 - 0,5^2} : 0,025.$$

105. Skriv alle Brøker, som har Nævneren 12 og i Størrelse ligger mellem 2 og 3, og omform dem til Decimalbrøker.

106. En uforkortelig Brøk er lig en sluttet Decimalbrøk; Nævneren er større end 10, men mindre end 30, og Tælleren er 5 mindre end Nævneren; find Brøken.

$$107. \left(a + b + \frac{b^2}{a}\right) : \left(a + b + \frac{a^2}{b}\right).$$

$$\text{Eks. } a = 0,269360269360 \dots$$

$$b = 1,4545 \dots$$

108. Find $a \cdot b \cdot c$, naar $a = 0,30555 \dots$,

$$b = 0,70243902439 \dots, \text{ og } c = 2,329545454 \dots$$

II.

Ligninger.

A. Ligningers Løsning.

39. Naar man skal omforme en Ligning til en simplere Ligning, benytter man følgende Grundsætninger.

Af to lige store Udtryk faar man igen lige store Udtryk:

1. *Naar man adderer samme Tal til begge.*
2. *Naar man subtraherer samme Tal fra begge.*
3. *Naar man multiplicerer begge med samme Tal.*
4. *Naar man dividerer begge med samme Tal, saafremt det er forskellig fra Nul.*

Af 1 og 2 faar man følgende Sætning:

Man kan flytte et Led fra den ene Side af Ligningen til den anden, naar man forandrer Leddets Fortegn.

40. Følgende Eksempel viser Fremgangsmaaden ved Løsningen af en Ligning med *een* ubekendt.

$$\frac{x+6}{11} - \frac{2}{3}(x-9) + \frac{2x+3}{4} = 5\frac{1}{3} + \frac{\frac{x}{2} + \frac{2}{3}}{2}.$$

1) Hvert af Leddene omformes til en Brøk eller et helt Tal.

$$\frac{x+6}{11} - \frac{2x-18}{3} + \frac{2x+3}{4} = \frac{16}{3} + \frac{3x+4}{12}.$$

2) Ligningen bringes paa hel Form ved, at man multiplicerer begge dens Sider med Brøkernes Fællesnævner.

$$12(x+6) - 44(2x-18) + 33(2x+3) = 44 \cdot 16 + 11(3x+4).$$

3) Begge Sider af Ligningen reduceres.

$$12x + 72 - 88x + 792 + 66x + 99 = 704 + 33x + 44 \\ - 10x + 963 = 33x + 748.$$

4) Ligningen ordnes; det vil sige, Leddene, hvori den ubekendte findes, samles paa den ene Side af Ligningen, de bekendte Led samles paa den anden Side, og hver Side reduceres.

$$-43x = -215.$$

5) Man dividerer begge Sider med Koefficienten til den ubekendte.

$$x = 5.$$

6) Man gør Prøve. Sætter man 5 i Stedet for x i den givne Ligning, faar man paa venstre Side

$$\frac{5+6}{11} - \frac{2}{3}(5-9) + \frac{10+3}{4} = 1 + \frac{8}{3} + \frac{13}{4} = 6\frac{11}{12}$$

og paa højre Side

$$5\frac{1}{3} + \frac{\frac{5}{2} + \frac{2}{3}}{2} = 5\frac{1}{3} + \frac{19}{12} = 6\frac{11}{12}.$$

Tallet 5 siges nu at have tilfredsstillet den givne Ligning, og 5 er altsaa Ligningens Rod.

Opgaver.

$$109. 9(x+1) - 3(x-1) = 5(x+3).$$

$$110. \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 5\frac{1}{2} = 0.$$

$$111. 1\frac{5}{9} \cdot x - 100 = 2\frac{1}{3} \cdot x - 186\frac{1}{3} + 55\frac{1}{2} - \frac{x}{2}.$$

$$112. (x - 15)^2 + (x - 11)^2 = 2(x - 12)(x - 13).$$

$$113. 20 - \frac{1}{2}(50 + x) = \frac{2}{3}(10 + x).$$

$$114. \frac{35 - 3x}{19} - \frac{57 - 7x}{16} + \frac{31 + 9x}{11} = 0.$$

$$115. (40 - 3x) : 17 - (45 + 2x) : 5 = (65 - 7x) : 85.$$

$$116. (a + bx)(ax + b) + (a - bx)(ax - b) = a^2 + b^2.$$

$$117. \frac{ax - 2a}{ax - 2b} = \frac{ax - 2b}{ax + 2a}.$$

$$118. 0,5 \cdot x + \frac{0,45 \cdot x - 0,75}{0,6} = 6 - \frac{0,3x - 0,6}{0,9}.$$

$$119. \frac{x - a}{x - b} = \left(\frac{2x - a}{2x - b} \right)^2. \text{ Eks. } a = 60\frac{5}{7}, b = 6\frac{1}{4}.$$

$$120. \frac{6x - 13\frac{1}{3}}{15 - 2x} + 2x + \frac{16x - 15}{24} = 6\frac{5}{12} - \frac{20\frac{5}{8} - 8x}{3}.$$

$$121. \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}} + 3\frac{1}{2} \cdot x = 13\frac{2}{3}.$$

$$122. \frac{\frac{x+1}{x-4} - \frac{x-1}{x+4}}{\frac{x+2}{x+4} - \frac{x-6}{x-4}} = \frac{2}{5} \left(\frac{x+4}{3} + \frac{x-1}{7} \right) + \frac{1}{2}.$$

$$123. \frac{24x + 42}{x + 1} + \frac{25x - 32}{x - 1} = \frac{(7x - 2)^2}{x^2 - 1}.$$

$$124. \frac{3x + 5}{2x + 1} - \frac{4x - 3}{1 - 2x} = 7 \cdot \frac{2x^2 + 7}{4x^2 - 1}.$$

41. En Ligning, der er reduceret saa meget som muligt, kaldes en *første Grads Ligning*, naar intet af dens Led indeholder mere end een ubekendt Faktor.

Ligningen $x - 5y = 7$ har *to ubekendte* x og y ; en saadan Ligning har et ubegrænset Antal Løsninger. Man kan nemlig indsætte et hvilket som helst Tal i Stedet for y og dernæst finde den tilsvarende Værdi af x .

Indsættes $y = 1$, faar man

$$x = 7 + 5 = 12.$$

Indsættes $y = 2$, faar man $x = 17$ o. s. v.

Hvis man har givet en Ligning til mellem x og y , faar man ikke mere end een Løsning, saafremt begge Ligninger er af første Grad og er forskellige.

Vi vil løse Ligningerne

$$1) \quad x - 5y = 7.$$

$$2) \quad 3x - 8y = 28.$$

Af den første Ligning faar man

$$x = 7 + 5y.$$

Denne Værdi for x sættes i Stedet for x i den anden Ligning, man faar da

$$3(7 + 5y) - 8y = 28,$$

deraf faar man

$$y = 1.$$

Indsættes denne Værdi for y i

$$x = 7 + 5y,$$

faar man

$$x = 12.$$

$$\begin{array}{l} \text{Løsningen er altsaa } x = \underline{12} \\ \text{og } y = \underline{1}. \end{array}$$

De to fundne Tal kaldes tilsammen *et Rodsæt*; man gør Prøve ved at indsætte det fundne Rodsæt i *begge* de givne Ligninger.

42. Naar man skal løse to Ligninger med to ubekendte, maa man altid først danne een Ligning med een ubekendt; dette kaldes at *eliminere* den anden ubekendte eller at *bortskaffe* den. Den Metode, vi ovenfor har brugt for at eliminere x , kaldes *Substitutionsmetoden*; at substituere betyder at sætte i Stedet for.

Vi vil forklare, hvorledes man eliminerer x ved *de lige store Koefficienters Metode*.

$$\begin{array}{l} 1) \quad x - 5y = 7. \\ 2) \quad 3x - 8y = 28. \end{array}$$

Man skaffer x samme Koefficient i de to Ligninger; det kan her gøres ved, at man multiplicerer den første Ligning med 3. Man faar da

$$\begin{array}{l} 1) \quad 3x - 15y = 21. \\ 2) \quad 3x - 8y = 28. \end{array}$$

Den øverste Ligning subtraheres derefter fra den nederste; det udføres lettest ved, at man forandrer For-tegn for Leddene i den og adderer den til den nederste. Man faar

$$\begin{array}{l} 7y = 7 \\ y = 1. \end{array}$$

Indsættes Værdien for y i een af de givne Ligninger, kan man finde x .

Naar den ubekendte, man først finder, har en Værdi, som er vanskelig at regne med, kan man lettest finde den anden ved Hjælp af *de lige store Koefficienters Metode*.

Hvis man eliminerer x eller y af Ligningerne

- 1) $3x - 8y = 28,$
- 2) $12x - 32y = 112,$

faar man en Identitet.

Grunden dertil er, at de to Ligninger udtrykker det samme; den anden kan dannes af den første ved, at man multiplicerer med 4 paa begge Sider. I Virkeligheden er der kun givet een Ligning, og der er uendelig mange Rodsæt, som tilfredsstiller den.

Eliminerer man derimod x eller y af Ligningerne

- 1) $3x - 8y = 28,$
- 2) $12x - 32y = 100,$

faar man en Meningsløshed, nemlig

$$0 = 12.$$

Naar man multiplicerer den øverste Ligning med 4, faar man

$$12x - 32y = 112,$$

ifølge den nederste er

$$12x - 32y = 100,$$

men det kan ikke finde Sted, naar x og y har samme Værdi i den ene Ligning som i den anden; der er altsaa intet Rodsæt, som tilfredsstiller dem.

Naar Koefficienterne til x og y i den ene Ligning kan dannes ved, at man multiplicerer Koefficienterne x og y i den anden Ligning med samme Tal, er der enten uendelig mange eller slet ingen Rodsæt; men i alle andre Tilfælde er der eet og kun eet Rodsæt, saafremt Ligningerne er af første Grad.

43. Af 3 første Grads Ligninger kan man i Reglen finde 3 ubekendte.

- 1) $(2x - 1)(y + 1) = 2(x + 1)(y - 1) - z + 1.$
- 2) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 3.$

$$3) \quad \frac{5}{2} (y - z) - \frac{2}{3} (2x - z) = 3.$$

Først reduceres alle tre Ligninger, man faar

$$1) \quad 4x - 3y + z = 0.$$

$$2) \quad 3x + 2y + 6z = 18.$$

$$3) \quad -3x + 15y - 11z = 18.$$

Af den første Ligning faar man

$$1) \quad z = 3y - 4x,$$

denne Værdi for z indsættes i de to andre Ligninger, man faar da

$$2) \quad -21x + 20y = 18.$$

$$3) \quad 2x - y = 1.$$

Elimineres y , faar man

$$x = 2.$$

Indsættes Værdien for x i

$$2x - y = 1,$$

faar man

$$y = 3.$$

Indsættes Værdierne for x og y i

$$z = 3y - 4x,$$

faar man

$$z = 1.$$

Altsaa

$$x = 2, y = 3, z = 1.$$

Det er lige saa simpelt at eliminere z ved de lige store Koefficienters Metode.

Paa lignende Maade kan man løse 4 første Grads Ligninger med 4 ubekendte, 5 første Grads Ligninger med 5 ubekendte o. s. v.

Ligningerne

$$1) \quad \frac{2}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = 3$$

$$2) \quad \frac{6}{x} - \frac{7}{y} - \frac{2}{z} = 1$$

$$3) \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{4}$$

løses lettest ved, at man begynder med at finde

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \text{ og } \frac{1}{z}; \text{ sætter man } \frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b \text{ og } \frac{1}{z} = c,$$

bliver Ligningerne

$$1) \quad 2a + 5b + 6c = 3$$

$$2) \quad 6a - 7b - 2c = 1$$

$$3) \quad -a + b + 4c = \frac{1}{4}$$

Deraf faar man

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4} \text{ og } c = \frac{1}{8},$$

altsaa

$$\underline{x = 2, y = 4 \text{ og } z = 8.}$$

Opgaver.

$$125. 4x - 3y = 1, 14x + 15y = 12.$$

$$126. \frac{7x - 21}{6} + \frac{3y - x}{3} = 4 + \frac{3x - 19}{2}$$

$$\frac{2x + y}{2} - \frac{9x - 7}{8} = \frac{3y + 9}{4} - \frac{4x + 5y}{16}.$$

$$127. 4x + \frac{15 - x}{4} = 2y + 5 + \frac{7x + 11}{16}$$

$$3y - \frac{2x + y}{5} = 2x + \frac{2y + 4}{3}.$$

$$128. 0,2x - \frac{3,2 - 4y}{5} = x + 0,16$$

$$\frac{1,2y}{0,3} - \frac{2,5x + 1}{y + 0,6} = 4y - 1\frac{2}{3}.$$

$$129. \frac{5x + 13}{2} - \frac{8y - 3x - 5}{6} = 9 + \frac{7x - 3y + 1}{3}$$

$$\frac{x + 7}{3} : \left(\frac{3y - 8}{4} + 4x \right) = 4 : 21.$$

$$130. \frac{6x + 9}{4} + \frac{3x + 5y}{4x - 6} = 3\frac{1}{4} + \frac{3x + 4}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{8y^2 + 7}{5} + \frac{3(2x - y)}{y - 4} \right) = 4 + \frac{2y + 3}{5} (2y - 3).$$

$$131. x + 2y + 3z = 31$$

$$3x - y - 2z = 46$$

$$2x - 3y - 7z = 23.$$

$$132. 11x - 10y - 23z = 42$$

$$9x + 5y + 13z = 88$$

$$17x - 20y + 5z = 304.$$

$$133. \left(x - \frac{1}{2} \right) (y + 1) = (x + 1) (y - 1)$$

$$(x + 4) (z + 1) = (x + 2) (z + 2)$$

$$(y - 2) (z + 3) = (y - 1) (z + 1).$$

$$134. 0,4x - 0,2y - 0,5z = 6$$

$$10,6x - 1,2y - 1,5z = 74$$

$$4x - 0,5y + 0,25z = 27.$$

$$135. \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{3}{4}z = 6$$

$$2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 10$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 1.$$

$$136. x + 2y - 3z + 4u = 5$$

$$2x + 3y - 8z + u = -7$$

$$3x + 7y - 10z - 5u = -1$$

$$4x + 8y - 9z - 3u = 10.$$

$$137. 3x - 4y - z = -10$$

$$4x - 3z - 2u = -30$$

$$-5x + 5y - u = 20$$

$$-y + 4z + 3u = 28.$$

$$138. ax + by + 2az = 5a^2 + b^2$$

$$2x + y + z = 5a - b$$

$$bx + ay + (a - b)z = 3a^2 - b^2.$$

$$139. \frac{4}{x} + \frac{5}{y} + \frac{7}{z} = 14$$

$$\frac{2}{x} + \frac{7}{y} - \frac{8}{z} = 32$$

$$\frac{4}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = -1.$$

$$140. \frac{4}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{5}{y+z} = 4$$

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{x+z} + \frac{15}{y+z} = 6$$

$$\frac{20}{x+y} - \frac{2}{x+z} - \frac{15}{y+z} = 5.$$

B. Ligningers Anvendelse.

44. Naar man vil anvende Ligninger ved Løsningen af Opgaver, begynder man med at skrive op, hvad enhver af de ubekendte skal betegne, dernæst danner man *to forskellige Udtryk, som enten betegner den samme Størrelse udtrykt ved samme Enhed eller lige store Størrelser udtrykte ved samme Enhed*. Disse to Udtryk er da lige store; de forbindes ved et Lighedstegn, og man har en Ligning. Er der flere ubekendte, maa man kunne danne lige saa mange Ligninger, hvis Opgaven kun har een bestemt Løsning.

Eks. 1. A indsatte en Kapital i en Bank, som gav 4 % p. A. i Rente; efter et Aars Forløb var Kapitalen vokset til 1300 Kr.; hvor stor var den oprindelige Kapital?

A indsatte x Kr.

$\left(x + \frac{4x}{100}\right)$ angiver da, hvor mange Kr. Kapitalen vokser til i et Aar.

$$\text{Altsaa} \quad x + \frac{4x}{100} = 1300$$

$$100x + 4x = 130000$$

$$x = 1250.$$

Kapitalen var 1250 Kr.

Eks. 2. 24000 Mursten kostede gennemsnitlig 22 Kr. 50 Øre pr. Tusinde. En Del af dem var til 26 Kr. pr. Tusinde og Resten til 18 Kr. pr. Tusinde; hvor mange var der af hver Slags?

x Mursten til 18 Kr. pr. Tusinde;
 (24000 — x) Mursten til 26 Kr. pr. Tusinde.

$$\text{Altsaa } 18 \cdot \frac{x}{1000} + 26 \cdot \frac{24000 - x}{1000} = 24 \cdot 22,5.$$

$$\text{Deraf faar man } x = 10500.$$

Der var 10500 Mursten til 18 Kr. Tusinde og 13500 Mursten til 26 Kr. pr. Tusinde.

Eks. 3. Tre Stykker Klæde paa tilsammen 180 m kostede ialt 804 Kr. i Indkøb. Det første Stykke blev købt for 4 Kr. pr. m og solgt med 25 % Fortjeneste, det andet Stykke blev købt for 5 Kr. pr. m og solgt med 10 % Tab, det tredje Stykke blev købt for 4,50 Kr. pr. m og solgt med 33 $\frac{1}{3}$ % Fortjeneste. Den samlede Udsalgspris var 918 Kr.; find Længden af hvert Stykke.

Det første Stykke er x Meter, det andet y Meter og det tredje z Meter.

$$1) \quad x + y + z = 180.$$

$$2) \quad 4x + 5y + 4\frac{1}{2} \cdot z = 804.$$

$$3) \quad \frac{4x \cdot 125}{100} + \frac{5y \cdot 90}{100} + \frac{9z \cdot 133\frac{1}{3}}{2 \cdot 100} = 918.$$

Reduceres Ligningerne, faar man

$$1) \quad x + y + z = 180.$$

$$2) \quad 8x + 10y + 9z = 1608.$$

$$3) \quad 10x + 9y + 12z = 1836.$$

Deraf

$$2 \text{ a)} \quad 2y + z = 168.$$

$$3 \text{ a)} \quad -y + 2z = 36 \quad \text{o. s. v.}$$

Opgaver.

141. Man skal finde et Tal, der har den Egenskab, at naar det divideres med 8, faar man det samme, som naar man subtraherer 8 fra Tallet.
142. Naar man til et Tal lægger Femtedelen af Tallet og derefter multiplicerer det udkomne med 2, faar man det samme, som naar man trækker det dobbelte af Tallet fra 990. Find Tallet.
143. A cykler fra Aarhus til Randers, ialt 33,3 km, i 2 Timer 5 Minutter. Til at begynde med kører han gennemsnitlig 300 m i Minuttet, men sagtner saa Farten, saa han derefter kører 240 m i Minuttet. I hvor mange Minutter kører han med den største Hastighed?
144. Forhjulet paa en Vogn har en Omkreds af 1,8 m, Baghjulets Omkreds er 2,25 m. Hvor langt skal Vognen køre, før Forhjulet har gjort 1500 Omdrejninger flere end Baghjulet?
145. Af to Kapitaler er den ene 500 Kr. større end den anden. Renten af den første er $\frac{1}{4}$ pCt. p. A. mindre end Renten af den anden, derved giver de to Kapitaler samme aarlige Rente. Hvis den første Kapital forøges med 2000 Kr., og den anden formindskes med 1500 Kr., bliver den aarlige Rente af den første Kapital 170 Kr. større end den aarlige Rente af den anden. Find de oprindelige Kapitaler.
146. En Købmand har to Slags Kaffe; blander han 9 kg af den daarligste med 7 kg af den bedste, bliver Blandingens Pris 2,75 Kr. pr. kg; blander han 7 kg af den daarligste med 13 kg af den bedste, bliver Blandingens Pris 2,92 Kr. pr. kg. Find Prisen for 1 kg af hver Slags.
147. Paa et Bord ligger der tre Bunker Søm, hvoraf den første indeholder 1400. Fra den første Bunke flytter man saa mange hen til den anden, at Antallet i den fordobles; fra den anden flytter man derefter

saa mange hen til den tredie, som den i Forvejen indeholder, og derefter er der lige mange i hver af de tre Bunker. Hvor mange var der oprindelig i hver af de to sidste?

148. A og B skal grave 5 ens Stykker Jord. A bruger $\frac{1}{2}$ Time mere end B til et Stykke; men naar de hjælper hinanden, kan de grave et Stykke i $\frac{7}{15}$ af den Tid, som A alene vilde bruge. Hvor lang Tid bruger enhver af dem til et Stykke, og hvor længe er de om i Forening at grave de 5 Stykker?
 149. Et Kar har et Tilløbsrør og et Afløbsrør. Naar Karret er tomt, og man aabner begge Rør, varer det 5 Gange saa længe, før Karret fyldes, som naar man kun aabner Tilløbsrøret. Naar Karret er fyldt, og Afløbsrøret aabnes, er den Tid, hvori Karret tømmes, 20 Minutter længere end den Tid, hvori det kan fyldes gennem Tilløbsrøret. Hvor længe varer det at fylde Karret gennem Tilløbsrøret?
 150. Sølv har Vægtfylden 10,5, og Kobber har Vægtfylden 8,9. En Vase, der er lavet af Sølv og Kobber, vejer 8 kg og har Vægtfylden 10. Hvor meget indeholder den af hvert Metal?
 151. 8 kg Kaffe og 13 kg Sukker koster tilsammen 28,25 Kr., 5 kg Kaffe og $\frac{1}{3}$ kg The koster tilsammen 15,20 Kr. og 3 kg The koster lige saa meget som 40 kg Sukker. Find, hvor meget 1 kg af hver af de nævnte Varer koster.
 152. Et trecifret Tal er 33 Gange saa stort som dets Tværsum; hvis man ombytter det første og det sidste Ciffer, bliver Tallet 99 mindre. Find Tallet.
-

C. Proportioner.

45. Naar man vil *maale* en given Længde l , og man som Maaleenhed benytter en Meter, vil man i Reglen finde, at l ligger mellem to paa hinanden følgende Fold af Enheden, f. Eks. $5m < l < 6m$.

Man kan da tage $\frac{1}{10}m = 1dm$ til Enhed; lad os antage, at den heller ikke er Maal for l , men at

$$56dm < l < 57dm$$

eller

$$5,6m < l < 5,7m.$$

Sætter vi nu $l = 5,6m$, er det ikke rigtigt, men Fejlen er mindre end $\frac{1}{10}m$. Man kan derefter tage $\frac{1}{100}m = 1cm$; lad os antage, at den heller ikke er Maal for l , men at

$$5,63m < l < 5,64m.$$

Sætter vi $l = 5,63m$, er Fejlen mindre end $\frac{1}{100}m$. Man kan paa den Maade fortsætte med $\frac{1}{1000}m, \frac{1}{10000}m$ o. s. v. Man indser derved, at man kan finde en Længde udtrykt i Meter, der er saa nær lig l , at Fejlen ingen praktisk Betydning har.

Decimalbrøken $5,63 \dots$, der kan bestemmes med saa mange Decimaler, som man har Brug for, angiver, hvor mange Meter l indeholder.

Ved Hjælp af en Vægt og Vægtlodder kan man maale et Legemes Vægt i Kilogram med saa stor Nøjagtighed, som man har Brug for.

Naar to Størrelser saaledes kan maales med samme Enhed, kaldes de *ensartede*.

Ved *Forholdet* mellem to ensartede Størrelser forstaar man det ubenævnte Tal, man skal multiplicere den anden Størrelse med for at faa den første. Forholdet mellem to ensartede Størrelser er altsaa lig Kvotienten mellem dem.

Ligningen $5 \text{ kg} : 10 \text{ kg} = \frac{1}{2}$ eller $\frac{5 \text{ kg}}{10 \text{ kg}} = \frac{1}{2}$ kan enten læses: 5 kg forholder sig til 10 kg lige som 1 til 2 , eller: 5 kg divideret med 10 kg er lig $\frac{1}{2}$.

Naar man skal finde Forholdet mellem to ensartede Størrelser, gør man dem først ensbenævnte; Forholdets Værdi er da lig den Brøk, hvis Tæller er det ubenævnte Tal i den første Størrelse, og hvis Nævner er det ubenævnte Tal i den anden Størrelse.

Eks. Find Forholdet mellem 37 l og 2 hl .

$$2 \text{ hl} = 200 \text{ l}$$

$$37 \text{ l} : 200 \text{ l} = \frac{37}{200}.$$

I Forholdet $\frac{a}{b}$ kaldes a *Forleddet* og b *Efterleddet*.

Et *Forholds* Værdi bliver uforandret, naar *Forled* og *Efterled* multipliceres eller divideres med samme Tal.

Eks. Find Forholdet mellem $5,25 \text{ m}$ og $56\frac{1}{4} \text{ cm}$.

$$5,25 \text{ cm} : 56\frac{1}{4} \text{ cm} = \frac{5,25}{56\frac{1}{4}} = \frac{2100}{225} = \frac{28}{3}.$$

46. En Ligning, der udtrykker, at to Forhold er lige store, kaldes en *Proportion*.

Proportionen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ læses: a forholder sig til b ligesom c til d ; a og d kaldes *Yderleddene*, b og c kaldes *Mellemlæddene*.

Man kan finde Betingelsen for, at

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

ved at skaffe de to Forhold samme Efterled.

Man faar $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$

og $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$

For at Proportionen kan være rigtig, er det altsaa
baade nødvendigt og tilstrækkeligt, at

$$ad = bc.$$

a. *En Proportion er rigtig, naar Yderleddenes Produkt er lig Mellemlæddenes Produkt, og ellers ikke.*

b. *Mellemlæddene i en Proportion kan ombyttes, og Yderleddene i en Proportion kan ombyttes.*

Givet $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

Bevis, at $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ og $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$

Betingelsen for, at de to sidste Proportioner er rigtige,
er at

$$ad = bc,$$

men at denne Betingelse er opfyldt, følger af det givne.

c. *Af en Proportion kan man danne en anden ved i hvert Forhold at erstatte Forleddet (eller Efterleddet) med Summen af Forled og Efterled, eller ved i hvert Forhold at erstatte Forleddet (eller Efterleddet) med Differensen mellem Forled og Efterled.*

Naar $\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$

er $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ og $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d};$

fordi Yderleddenes Produkt er lig Mellemlæddenes Produkt.

47. To Størrelser kaldes *ligefrem proportionale*, naar de er saaledes afhængige af hinanden, at hvis den ene bliver m Gange saa stor, vil det medføre, at den anden ogsaa bliver m Gange saa stor.

Som Eksempler kan nævnes:

En Vares Rumfang og dens Pris.

En Vares Rumfang og dens Vægt.

Naar 1 hl Hvede vejer 75 kg,

vil 2 - — veje 150 -

og 3 - — — 225 -

O. s. v.

Naar to Størrelser er ligefrem proportionale, og enhver af dem stadig udtrykkes ved samme Enhed, vil der altid være samme Forhold mellem de ubenævnte Tal, som angiver Værdierne af dem.

$$\frac{75}{1} = \frac{150}{2} = \frac{225}{3}.$$

Naar to Størrelser er ligefrem proportionale, vil der være samme Forhold mellem to Værdier af den ene Størrelse som mellem de tilsvarende to Værdier af den anden Størrelse.

$$\frac{2 \text{ hl}}{3 \text{ hl}} = \frac{150 \text{ kg}}{225 \text{ kg}}$$

Eks. 1. 5 hl Kul koster $12\frac{1}{2}$ Kr., hvor meget koster 8 hl?

Lad den søgte Pris være x Kr.

$$\text{Man har da} \quad \frac{x}{12\frac{1}{2}} = \frac{8}{5},$$

$$\text{deraf} \quad x = \frac{8 \cdot 12\frac{1}{2}}{5} = 20.$$

8 hl koster 20 Kr.

Eks. 2. Hvor meget vejer $b \text{ dm}^3$ af en Vare, naar $a \text{ dm}^3$ vejer $c \text{ kg}$?

Den søgte Vægt er $x \text{ kg}$.

Man har da $\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$

deraf $x = \frac{bc}{a}.$

Naar $\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$

kaldes x *Fjerdeproportionalen* til a , b og c .

Fjerdeproportionalen til a , b og c er altsaa lig

$$\frac{b \cdot c}{a}.$$

Naar $\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$

kaldes x *Mellemproportionalen* mellem a og b .

To Størrelser kaldes *omvendt proportionale*, naar de er saaledes afhængige af hinanden, at hvis den ene bliver m Gange saa stor, vil det medføre, at den anden bliver m Gange saa lille.

Eksempler paa omvendt proportionale Størrelser:

Højden og Grundlinien i et Rektangel, hvis Areal skal blive uforandret.

Antallet af Arbejdere og det Antal Timer, de bruger for at udføre et bestemt Arbejde.

Naar to Størrelser er omvendt proportionale, og enhver af dem stadig udtrykkes ved samme Enhed, vil Produktet af de ubenævnte Tal, som angiver Størrelsernes Værdi, altid være det samme.

Eks. 1. 18 Mand kan udføre et Arbejde i 8 Timer, hvor længe vil 12 Mand være om det samme Arbejde?

De bruger x Timer.

Man har da $18 \cdot 8 = 12 \cdot x,$
 deraf $x = \frac{8 \cdot 18}{12} = 12.$

Eks. 2. Til et Gulvtæppe bruges 18 m Tøj, naar Tøjet er 1,2 m bredt; hvor mange m bruges til et lige saa stort Tæppe, naar Tøjet er 0,75 m bredt?

Der bruges x m.

Man har $x \cdot 0,75 = 18 \cdot 1,2,$
 deraf $x = \frac{18 \cdot 1,2}{0,75} = 28,8.$

48. Af flere lige store Forhold kan man danne et nyt lige saa stort Forhold ved til Forled at tage Forleddenes Sum (eller Differens) og til Efterled at tage Efterleddenes Sum (eller Differens).

Givet $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = v.$

Bevis, at $\frac{a + c + e}{b + d + f} = v.$

Af det givne faar man $a = b \cdot v$, $c = d \cdot v$ og $e = f \cdot v$.

Man har da $\frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{bv + dv + fv}{b + d + f}$
 $= \frac{v(b + d + f)}{b + d + f} = v.$

Eks. 900 Kr. skal deles i tre Dele, der forholder sig som Tallene 3, 5 og 7. Det vil sige, at Antallet af Kr. i den første Del skal forholde sig til 3, som Antallet af Kr. i den anden Del forholder sig til 5, og som Antallet af Kr. i den tredie Del forholder sig til 7.

De tre Dele er x Kr., y Kr. og z Kr.

Man har $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x + y + z}{15} = \frac{900}{15} = 60$

eller	$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = 60,$
deraf	$x = 180, y = 300, z = 420;$
altsaa	$180 \text{ Kr.}, 300 \text{ Kr. og } 420 \text{ Kr.}$

Opgaver.

153. Find Forholdet mellem: $2\frac{1}{2}$ Time og 3 Timer 20 Min.;
 $5\frac{1}{4}$ m og 1 m 75 cm; 3,125 kg og $1\frac{1}{4}$ kg.

154. Løs Ligningerne $\frac{25}{x+19} = \frac{97}{5x+39};$

$$\frac{x+14}{x+2} = \frac{2x+16}{2x+8}; \quad a : x = (8a^2 - 9ac) : (9bc - 8ab).$$

155. Find Fjerdeproportionalen til: $8\frac{1}{2}, 3\frac{2}{5}$ og 7,5;

$$a - b, a + b \text{ og } a^2 - b^2; \quad 1,171875, 3\frac{11}{28} \text{ og } 2,1875.$$

Løs Ligningerne:

156. $\frac{x+11,11}{x+3,11} = \frac{8,89-x}{0,89+x}.$

157. $\frac{25x+724}{25x+826} = \frac{31x+658}{31x+760}.$

158. $\frac{3x+1911}{2x+954} = \frac{3x+1913}{2x+955}.$

159. $\frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{7}, \quad x + y + z = 650.$

160. En Trekants Omkreds er 4,5 m, dens Sider forholder sig som 2, 3 og 4. Find Siderne.

161. To Legemers Vægtfylde forholder sig som $\frac{3}{5}$; det første vejer a kg, og dets Rumfang er b dm³; det andet Legeme vejer c kg, find dets Rumfang.
Eks. $a = 3,25$, $b = 1,25$, $c = 65$.
162. 20 Mand har i 9 Dage à $8\frac{1}{4}$ Time udført $\frac{3}{8}$ af et Arbejde. Hvor mange Dage skal 27 Mand være om at gøre Arbejdet færdig, naar den daglige Arbejdstid forlænges med 55 Minutter?
163. A kan mure 25 m³ Mur i 9 Dage, B kan mure 44 m³ i 18 Dage og C kan mure 20 m³ i 6 Dage. Hvor mange Dage bruger de i Forening til en Mur, der er 37,5 m lang, 14 m høj og 44 cm tyk? Naar Arbejdet betales med 654,50 Kr., der deles mellem dem i Forhold til det udførte Arbejde, hvor meget faar da hver?
164. A, B og C begynder i Fællesskab en Forretning; deres Indskud forholder sig som 3 til 4 til 5. Fortjenesten er 25 % af det samlede Indskud; af Fortjenesten faar A 825 Kr., hvor meget faar enhver af de andre, og hvor meget har hver indskudt?
-

III.

Potens.

49 a. *Naar Roden er positiv, er Potensen altid positiv, da et Produkt af positive Faktorer er positivt.*

b. *Naar Roden er negativ, er Potensen positiv, hvis Eksponenten er et lige Tal, men negativ, hvis Eksponenten er et ulige Tal.*

$$(-p)^4 = (-p) \cdot (-p) \cdot (-p) \cdot (-p) = p^4.$$

$$(-p)^5 = (-p) \cdot (-p) \cdot (-p) \cdot (-p) \cdot (-p) = -p^5.$$

Desuden har man $0^m = 0$.

Eks.

$$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

50 a. *Man multiplicerer Potenser af samme Rod ved at addere Eksponenterne og beholde Roden.*

$$a^3 \cdot a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8.$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

b. *Man dividerer Potenser af samme Rod ved at subtrahere Divisors Eksponent fra Dividendens og beholde Roden, saafremt Divisors Eksponent er mindst.*

$$a^7 : a^5 = a^2, \text{ fordi } a^5 \cdot a^2 = a^7.$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ fordi } a^n \cdot a^{m-n} = a^m.$$

c. *Man opløfter et Produkt til Potens ved at opløfte hver Faktor for sig til Potensen.*

$$\begin{aligned}
 (a \cdot b \cdot c)^4 &= abc \cdot abc \cdot abc \cdot abc \\
 &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \\
 &= a^4 \cdot b^4 \cdot c^4
 \end{aligned}$$

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n.$$

Læses Formlen omvendt, faar man:

Man multiplicerer Potenser, der har samme Eksponent, ved at multiplicere Rødderne og beholde Eksponenten.

d. *Man opløfter en Brøk til Potens ved at opløfte Tæller og Nævner hver for sig til denne Potens.*

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{a}{b}\right)^6 &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \\
 &= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a^6}{b^6} \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}.
 \end{aligned}$$

Læses Formlen omvendt, faar man:

Man dividerer Potenser, der har samme Eksponent, ved at dividere Rødderne og beholde Eksponenten.

e. *Man opløfter en Potens til ny Potens ved at multiplicere Eksponenterne.*

$$\begin{aligned}
 (a^7)^4 &= a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 = a^{7+7+7+7} = a^{28} \\
 (a^m)^p &= a^{m \cdot p}.
 \end{aligned}$$

51 a. *Potensen af et Tal, der er større end 1, vil vokse, naar Eksponenten vokser.*

Naar $p > 1$,
faar man ved Multiplikation med p

$$p^2 > p$$

og deraf

$$p^3 > p^2$$

$$p^4 > p^3$$

o. s. v.

b. *Potensen af en positiv ægte Brøk vil aftage, naar Eksponenten vokser.*

Naar $0 < q < 1$,
faar man ved Multiplikation med q

$$q^3 < q$$

$$q^3 < q^2$$

o. s. v.

Eks. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = \frac{36}{81}$
 $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = \frac{24}{81}$
 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

c. *En Potens med positiv Rod vil vokse, naar Roden vokser, saafremt Eksponenten er større end Nul.*

Af $p > q$
faar man $\frac{p}{q} > 1$.

Altsaa $\left(\frac{p}{q}\right)^2 > \frac{p}{q}$ ifølge a
og $\left(\frac{p}{q}\right)^3 > \left(\frac{p}{q}\right)^2$
o. s. v.

Deraf følger, at $\left(\frac{p}{q}\right)^n > 1$
eller $\frac{p^n}{q^n} > 1$.

Man faar da $p^n > q^n$.

52. Vi vil udvide Potensbegrebet saaledes, at vi ogsaa kan regne med a^0 og a^{-n} .

Hvis det er muligt, skal Definitionerne vælges saa-

ledes, at Sætningerne i 50 ogsaa gælder, naar Eksponenterne er 0 eller negative Tal.

Der kræves, at $a^3 \cdot a^0 = a^3$
 og $a^4 \cdot a^0 = a^4$

O. S. V.

Vi maa derfor definere

a^0 betyder 1.

Der kræves, at $a^{m+n} \cdot a^{-n} = a^m$,
 man har $a^{m+n} \cdot \frac{1}{a^n} = a^m$.

Vi maa derfor definere

a^{-n} betyder $\frac{1}{a^n}$.

Vi vil bevise, at Sætningerne i 50 gælder for alle hele Eksponenter, naar vi benytter disse Definitioner.

a. $a^{m+n} \cdot a^{-n} = a^m \cdot a^n \cdot \frac{1}{a^n} = a^m$

$$a^m \cdot a^{-m} = a^m \cdot \frac{1}{a^m} = 1 = a^0$$

$$a^m \cdot a^{-(m+n)} = a^m \cdot \frac{1}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}.$$

b. $a^m : a^n = a^{m-n}$; da $a^n \cdot a^{m-n} = a^m$

$$a^{-m} : a^n = a^{-(m+n)}$$

$$a^m : a^{-n} = a^{m+n}$$

$$a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}.$$

c. $(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m}.$

$$d. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{a^m}{b^m}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{b^m}\right)} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}.$$

$$e. \quad (a^n)^{-m} = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{n \cdot m}} = a^{-n \cdot m}$$

$$(a^{-n})^m = \left(\frac{1}{a^n}\right)^m = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-n \cdot m}$$

$$(a^{-n})^{-m} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} = \frac{1}{a^{-n \cdot m}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{nm}}\right)} = a^{nm}.$$

Man kan flytte en Faktor fra Nævneren i en Brøk og op i Tælleren eller fra Tælleren ned i Nævneren, naar man forandrer Fortegnet for Faktorens Potens-eksponent.

$$\frac{a}{bc^{-3}} = \frac{a \cdot c^3}{b \cdot c^{-3} \cdot c^3} = \frac{ac^3}{b}.$$

Opgaver.

$$165. a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 + a^6 \cdot a^7 \cdot a^{-8} \cdot a^{10}.$$

$$166. (a-b)^{n-2} \cdot (a-b)^{3-n} \cdot (a-b)^{n-1}.$$

$$167. x^{3m} : x^{2m} : x^{3-m} : x^{m-3}.$$

$$168. \left(\frac{b^{n+3}}{b^{n-1}} - \frac{c^{n+2}}{c^{n-2}}\right) : \left(\frac{b^{r+3}}{b^{r+1}} - \frac{c^r}{c^{r-2}}\right).$$

$$169. (4axy)^{-4} : (2yb)^{-4} : (2ax)^{-4}.$$

$$170. 9^{-8} \cdot 15^7 \cdot 25^{-3} \cdot 77^{-9} \cdot 231^9.$$

$$171. \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{2-n} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-4n} \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-2n}.$$

$$172. 3925^4 : 785^4 - 7932^4 : 1983^4.$$

$$173. (a^n + m)^{n-m} : (a^m)^{-m} : (a^{n-1})^{n+1}.$$

$$174. \frac{(2a^2bc)^{-3} \cdot (3a^3b^3)^3}{(4a^3b^2c^2)^{-2} \cdot (3a^4b^4)^2}.$$

$$175. \frac{x^{m+1} \cdot y^{n-5} - 2x^{m-1} \cdot y^{n-3} + x^{m-3} \cdot y^{n-1}}{x^{m-3} \cdot y^{n-8} + 2x^{m-4} \cdot y^{n-7} + x^{m-5} \cdot y^{n-6}}.$$

$$176. \frac{(a^{2n} + b^{2n} - 4c^{2n})^2 - 4a^{2n}b^{2n}}{a^{2n} - b^{2n} + 4b^nc^n - 4c^{2n}}.$$

177. For hvilke Værdier af a er følgende Udtryk positive, for hvilke negative?

$$a^5 - a^4, a^6 - a^5, a^4 - a^8.$$

178. Bevis, at naar $a > 0$, er

$$a^2 + a^{-2} > a + a^{-1} > 2.$$

179. Find x af Ligningen

$$5^{2x+4} - 2 \cdot 5^{2x+3} = 15^{x+2}.$$

180. Forkort følgende Brøker

$$\frac{a^7 b^2 - 8a^5 b^4 + 16a^3 b^6}{a^4 b^2 + 4a^3 b^3 + 4a^2 b^4} \quad \frac{a^2 + b^2 - 2ab + 2a - 2b + 1}{a^2 - 2ab + b^2 - 1}.$$

$$181. \frac{5}{2x+1} - \frac{2x-4}{1-4x^2} + \frac{x+1}{2x-1}. \quad \text{Eks. } x = -0,25.$$

$$182. \frac{9a^2 + 2ab}{12ab - 6b^2} + \frac{11a^2 + ab}{3b^2 - 12a^2} - \frac{7a^2 - b^2}{4ab + 2b^2}.$$

$$183. \frac{a+b}{ab} (a^2 + b^2 - c^2) + \frac{b+c}{bc} (b^2 + c^2 - a^2) + \frac{a+c}{ac} (a^2 + c^2 - b^2).$$

$$184. \frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{3a+1} : \frac{2a-3b}{9a^3-a} : (3a^2 - a).$$

185. Find $\frac{x+y-1}{x-y+1}$, naar $x = \frac{a+1}{ab+1}$, og $y = \frac{ab+a}{ab+1}$.

186. $\frac{a}{\frac{a^2+b^2}{b-a}-b} + \frac{b}{a-\frac{a^2+b^2}{a+b}}$.

187. $\frac{x+2a}{2b-x} + \frac{x-2a}{2b+x} - \frac{4ab}{4b^2-x^2} = 0$.

188. $37x - 19y = 91$
 $-23x + 12y = 56$.

189. $9x + 15y - 31z = 1534$
 $28x - 11y + 7z = 715$
 $-11x + 22y + 50z = 3159$.

190. $2(x+3z) - 3(2y-5z) = 3$
 $16(5x-8y) - 3(3z+x) = 19$
 $2(2y-5z) + 3(5x-8y) = 30$.

191. $\frac{4}{x} + 9y - 8z = 107$
 $\frac{10}{x} + 3y - 5z = 5$
 $\frac{6}{x} - 2y + 5z = 28$.

192. $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 4$
 $(x-4)^2 + (y+10)^2 + (z+8)^2 = x^2 + y^2 + z^2$
 $\frac{\frac{5}{x-y} + \frac{4}{x+y}}{\frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y}} = 2 + \frac{z-2}{7x+y}$.

$$193. a^2x - ay + z = a^3$$

$$b^2x - by + z = b^3$$

$$c^2x - cy + z = c^3.$$

194. 2669 Kr. skal deles mellem A, B og C, saaledes at A faar 13 Kr. mindre end det dobbelte af B's Part, og C faar 50 Kr. mere end Trediedelen af A's Part. Hvor meget faar hver?

195. Af to Slags Tobak, hvoraf den ene er købt for 4,60 Kr. pr. kg, den anden for 2,60 Kr. pr. kg, skal dannes en Blanding paa 40 kg. Hvor meget skal man tage af hver Slags, naar man vil tjene 25 % ved at sælge Blandingen for 4,25 Kr. pr. kg?

196. En Fodgænger, som gaar 90 m i Minuttet, gaar fra Byen A Kl. 8 om Formiddagen. $\frac{1}{2}$ Time senere kører en Vogn fra A ad samme Vej, og $1\frac{1}{4}$ Time derefter kører en Cyklist fra A ad samme Vej. Cyklisten kører hele Tiden 4,5 m pr. Sekund; Vognen kører 3 m pr. Sekund, indtil den naar Fodgængerens, den holder da $2\frac{1}{2}$ Minut for at tage ham op, derefter kører den videre med samme Hastighed som før. Paa hvilket Tidspunkt indhenter Cyklisten Vognen, og hvor langt har Fodgængerens da kørt?

197. Tre Mænd, A, B og C, skal udføre et Arbejde. I den første Uge arbejder A i 6 Dage, B i 5 Dage og C i $4\frac{1}{2}$ Dag; derved faar de $\frac{1}{3}$ af Arbejdet udført. I den anden Uge arbejder A og C i 6 Dage hver, og B arbejder i $3\frac{3}{4}$ Dag, derved faar de tilsammen udført lige saa meget som i den første Uge. A og C fuldfører nu i Forening Arbejdet i 24 Dage. Hvor mange Dage vilde A, B og C hver for sig have været om at udføre dette Arbejde?

Rettelser.

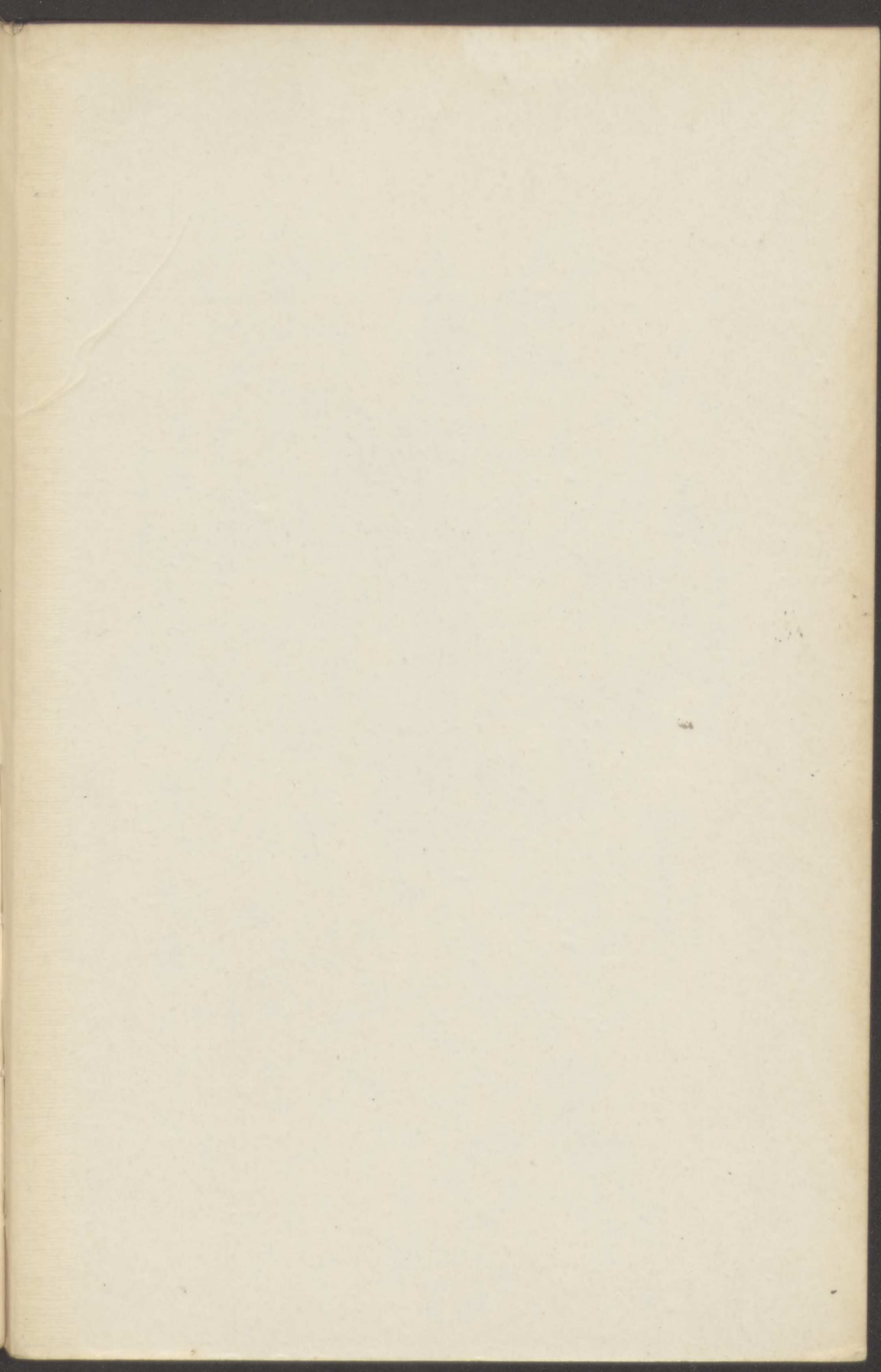
I Aritmetik.

Side 25, Linie 13: — 16 rettes til 16.

— 28, — 5: = 12b — - — 12b.

III Geometri.

Side 22, Linie 14: $\angle A$ rettes til $\angle B$.



Lærebøger for tekniske Skoler.

N. F. Jensen og O. A. Smith: Matematik for tekniske Skoler.

I Aritmetik.....	1 Kr. 50 Øre
II Algebra.....	1 - 25 -
III Geometri.....	1 - 60 -

Endnu udkommer IV Trigonometri

Chr. Axel Jensen og E. Rondahl: Stilarternes Historie. Grundrids af Ornamentikkens og Arkitekturdekorationens Udvikling fra de ældste Tider til vore Dage. Udgivet med Understøttelse af Indenrigsministeriet og af det Reiersenske Fond. Anbefalet af Indenrigsministeriet til Brug i de tekniske Skoler..... 8 Kr., indb. 10 Kr.

Chr. Jensen og A. L. Vanggaard: Tekniske Anvendelser af Kemi og Fysik I: Jærn-Kul-Petroleum. Kartonnere!..... 1 Kr. 25 Øre

J. Jonas og A. L. Vanggaard: Materiallære til Brug i tekniske Skoler. Kpl. indb. 9 Kr. 50 Øre
Bogens forskellige Afsnit kan faas særskilt i Hæfter.

Karl Mortensen: Lærebog i Tysk for tekniske Skoler I. (Til Brug for Aften- og Dagskoler). Anbefalet af Indenrigsministeriet til Brug i de tekniske Skoler. Kartonnere!..... 2 Kr.

— **Lærebog i Tysk for tekniske Skoler II.** (Til Brug for Dagskoler). Kartonnere!..... 1 Kr. 25 Øre

E. Rondahl: Vejledning i Akvarelmaling. Med 9 Farvetavler og mange Tekstillustrationer..... 3 Kr.

— **Perspektiv**..... 1 Kr.

R. Wendt: Skriftarter til Brug for Maskin- og Bygningstegnere..... 1 Kr. 50 Øre

Jul. Gjellerups Forlag.