

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*



MATEMATIK

FOR

TEKNISKE SKOLER

AF

N. F. JENSEN

LÆRER

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

O. A. SMITH

ADJUNKT

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

III GEOMETRI



KØBENHAVN

JUL. GJELLERUPS FORLAG

1915

51 (022)

13

51(022)



51(022)

P

MATEMATIK

FOR

TEKNISKE SKOLER

AF

N. F. JENSEN

LÆRER

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

O. A. SMITH

ADJUNKT

LÆRER VED AARHUS TEKNISKE
SKOLE

III GEOMETRI



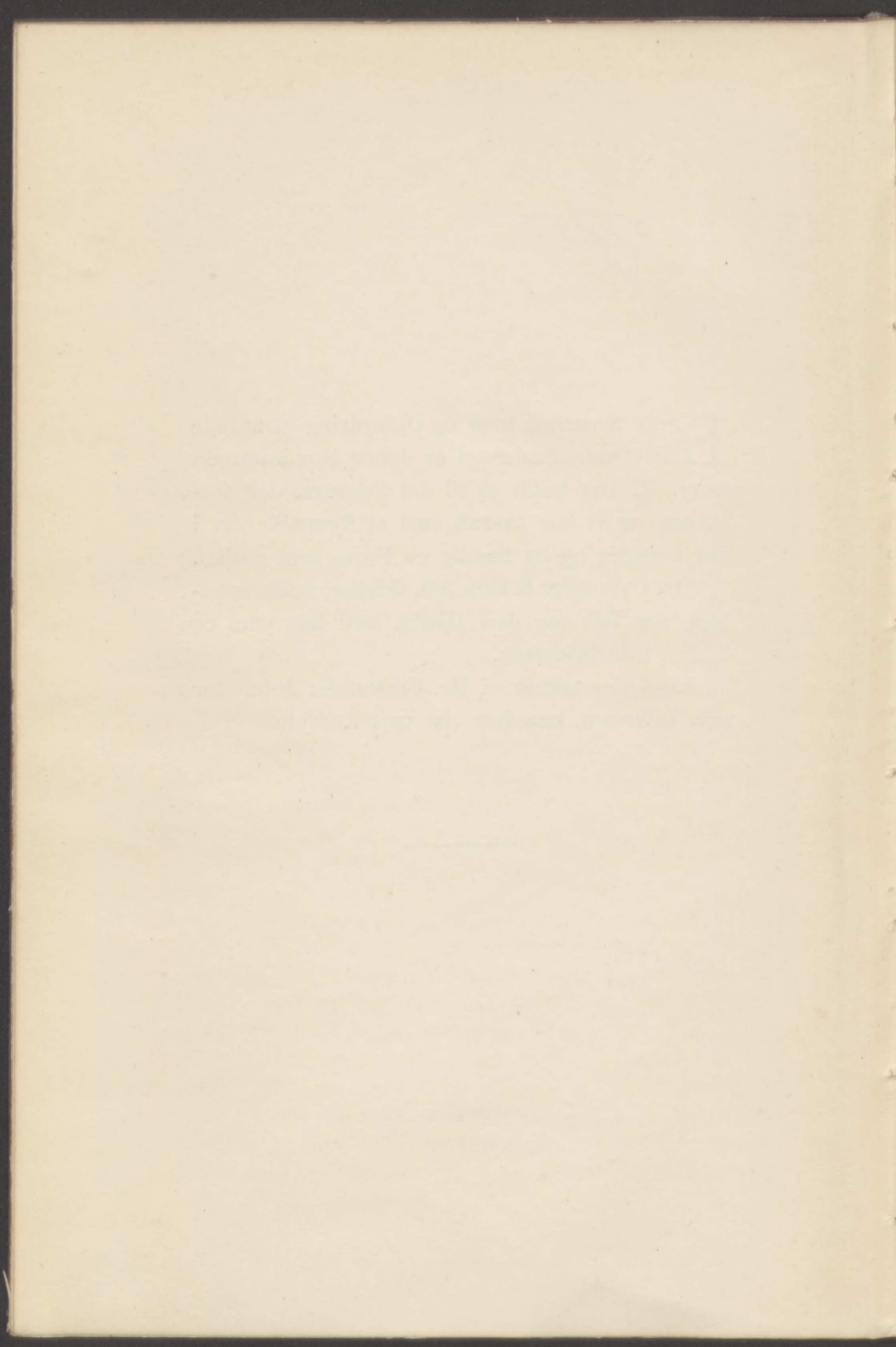
KØBENHAVN
JUL. GJELLERUPS FORLAG
1915

DE FORENEDE BOGTRYKKERIER - AARHUS

EFTER Samraad med og Opfordring af afdøde Professor Andersen er denne Bog kommen frem. Vi har holdt os til det Pensum, der forlanges, og vi har overalt søgt at fremstille det i saa nøjagtig og let læselig en Form som muligt.

Hr. Overlærer S. Cronfelt, Odense, bedes modtage vor Tak for den Hjælp, han har ydet os under Udarbejdelsen.

Ligeledes takker vi Hr. Forstander Jonas for den Interesse, han har vist vort Arbejde.



INDLEDNING.

1. Naar man sætter en Blyantsspids paa et Stykke Papir uden at bevæge den hen ad Papiret, kan man frembringe et lille afrundet Mærke. Jo mere spids man gør Blyanten, desto mindre vil Mærket blive, og desto mere vil det nærme sig til at være et Punkt. *Et Punkt har ingen Størrelse.*

Naar Blyantsspidsen bevæges hen ad Papiret, skriver den en Streg, og jo smallere Stregen er, desto mere nærmer den sig til at være en Linie. *En Linie har ingen Bredde, men den har Længde, og den indeholder et ubegrænset Antal Punkter.* Hvis Blyantsspidsen var et Punkt, vilde den beskrive en Linie, altsaa: *Naar et Punkt bevæges, beskriver det en Linie.*

Naar man tegner, afbilder man et Punkt som en lille Plet og en Linie som en smal Streg; men man kalder det dog at afsætte et Punkt og at tegne en Linie.

2. *En ret Linie* har følgende Egenskaber:

a. *Den er fuldstændig bestemt ved to Punkter.* Det vil sige: gennem to forskellige Punkter kan der gaa en ret Linie, og der kan heller ikke gaa flere.

b. *Den er ubegrænset til to Sider.* Det vil sige, fra ethvert Sted paa den kan man i to forskellige Retninger vedblive at bevæge et Punkt ud ad den, uden at det kommer tilbage til det samme Sted igen.

c. *Ethvert af dens Punkter deler den i to Dele,* saa at man ikke ved at følge Linien kan komme fra den

ene Del til den anden uden at gaa gennem Punktet. Enhver af de to Dele kaldes *en Halvlinie*; en Halvlinie har et bestemt Endepunkt.

To forskellige Punkter paa en ret Linie deler den i to Halvlinier, der er ubegrænsede til den ene Side, og et Stykke, der er begrænset. En saadan begrænset Del af en ret Linie kaldes *et ret Liniestykke*; det har to bestemte Endepunkter. I Stedet for ret Linie og ret Liniestykke nøjes man ofte med at sige Linie og Liniestykke, hvor det ikke kan misforstaaes. Det rette Liniestykke, som forbinder Punktet *A* med Punktet *B*, kaldes Liniestykket *AB* eller blot *AB*.

Naar man skal afbilde et ret Liniestykke, tegner man en Streg langs Kanten af en Lineal; for at Stregen kan blive et godt Billede af Liniestykket, maa Linealens Kant være lige, det vil sige, den maa selv være et ret Liniestykke.

3. En Linie kan bevæges saaledes, at den beskriver en *Flade*. Kanten af en Lineal kan for Eksempel bevæge sig langs et Stykke Papir, saaledes at den efterhaanden gaar gennem alle Punkter af Papirets Overflade.

En ret Linie kan godt beskrive en Flade, der ikke er ret, for Eksempel Overfladen af en rund Blyant eller Overfladen af en Sukkertop.

Naar en ret Linie bevæger sig saaledes, at den stadig gaar gennem et fast Punkt og stadig har et Punkt fælles med en fast ret Linie, beskriver den en *ret Flade* eller en *Plan*. Et ret Liniestykke, der bevæger sig paa samme Maade, vil beskrive et Stykke af en Plan.

En Plan har følgende Egenskaber:

a. *Enhver ret Linie gennem to af Planens Punkter har alle sine Punkter i Planen.* Planen er derfor ubegrænset i uendelig mange Retninger; det vil sige, fra et af Planens Punkter kan der gaa Halvlinier i saa mange Retninger, som det skal være, saaledes at de helt ligger i Planen.

b. *Enhver ret Linie i Planen deler den i to Dele;* man kan ikke ved at bevæge sig i Planen komme fra den ene Del til den anden uden at gaa gennem Linien. De to Dele kaldes *Halvplaner*, de ligger hver paa sin Side af Linien. Et Punkt i den ene og et Punkt i den anden Halvplan siges at ligge hver paa sin Side af Linien. At to Punkter ligger hver paa sin Side af et Liniestykke betyder, at de ligger hver paa sin Side af den Linie, man faar ved at forlænge Liniestykket.

c. *En Plan er bestemt ved tre Punkter, som ikke ligger i en ret Linie.* Det vil sige gennem tre Punkter, som ikke ligger i en ret Linie, kan der lægges een og kun een Plan. Af a og c følger, at en Plan ogsaa er bestemt ved en ret Linie og et Punkt udenfor den, eller ved to Linier, som har et Punkt fælles.

To forskellige rette Linier, som har et Punkt fælles, siges at *skære hinanden*. Naar A og B er to Punkter i en Plan, som ligger hver paa sin Side af en ret Linie, vil Liniestykket AB skære Linien ifølge b. For at Liniestykket AB kan skære Liniestykket CD er det derimod ikke tilstrækkeligt, at A og B ligger hver paa sin Side af CD; men C og D maa ogsaa ligge hver paa sin Side af AB.

To rette Linier kan ikke have mere end eet Skæringspunkt, thi gennem to Punkter kan der kun gaa een ret Linie.

4. *Ved en Figur forstaar man en Samling af Punkter;* det kan være en Samling af spredte Punkter, det kan være en sammenhængende Række af Punkter, som tilsammen udgør et Liniestykke, og det kan endelig være en Samling Punkter, som tilsammen udgør en Del af en Flade.

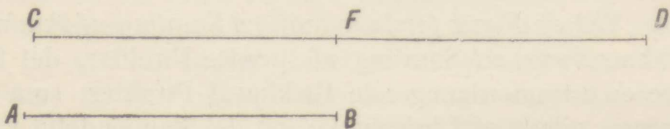
En plan Figur er en Figur, hvis Punkter alle ligger i samme Plan.

Over en plan Figur lægges et tyndt Stykke Papir, og paa den Del af Papiret, der dækker Figuren, tegnes

en ny Figur lige som den oprindelige. Naar Papirets Tykkelse nu er forsvindende, vil hvert Punkt i den ene Figur falde sammen med et Punkt af den anden og hvert Punkt i den anden Figur falde sammen med et Punkt af den første. *To Figurer, hvis Punkter saaledes parvis falder sammen, siges at dække hinanden.*

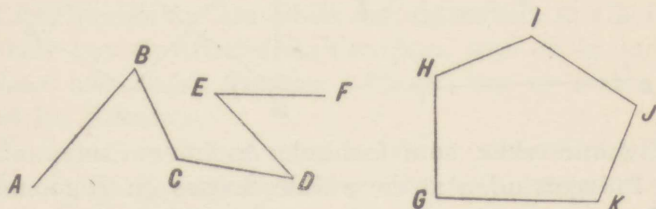
To Figurer, der dækker hinanden, er fuldstændig ens; vi forudsætter nu, at hvis vi flytter dem fra hinanden, bliver de begge uforandrede i alt undtagen i Beliggenhed, saaledes at de paa ny vil kunne dække hinanden. Denne Forudsætning, som gælder enhver Figur, gaar altsaa ud paa, at en Figurs Flytning kun forandrer dens Beliggenhed. Den kan udtrykkes saaledes: *Figurer bliver uforandrede ved Flytning.*

5. *To Figurer kaldes kongruente, naar de kan dække hinanden.* Hvis Liniestykket AB kan lægges saaledes paa CD , at A falder i C , naar B falder i D , er AB kongruent med CD , hvilket ogsaa skrives $AB \cong CD$. To kongruente Liniestykker siges at være lige store. Hvis derimod AB er kongruent med et Stykke af CD , er $AB < CD$ og $CD > AB$. Naar vi nu lægger AB paa CD , saaledes at A falder i C , vil B falde i et Punkt F , som ligger paa CD ; hvis FD da er kongruent med AB , er CD dobbelt saa stor som AB eller $CD = 2 \cdot AB$.



Paa lignende Maade kan man finde, hvor mange Gange AB er indeholdt i ethvert andet Liniestykke. *At maale et Liniestykke er at undersøge, hvor mange Gange det indeholder en given Længdeenhed, f. Eks. 1 cm.*

6. Nogle rette Liniestykker, der to og to har et Endepunkt fælles uden at være Forlængelser af hinanden, danner en *brudt Linie*.



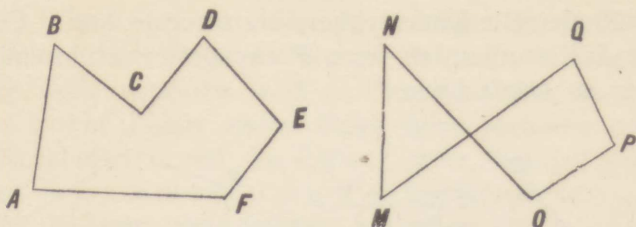
Tegningen viser to brudte Linier, hvoraf den ene, nemlig *GHIJK* er *lukket*; det vil sige, at naar man fra et af dens Punkter bevæger sig en Gang igennem Linien, kommer man netop tilbage til det samme Punkt. En lukket Linie, som ikke skærer sig selv, har følgende Egenskaber:

a. *To vilkaarlige af dens Punkter deler den i to Dele.* Man kan altsaa ad to Veje bevæge sig fra et Punkt paa Linien til et andet, selv om man følger Linien.

b. *Den deler Planen i to Dele, hvoraf den ene er fuldstændig begrænset, saaledes at enhver Halvlinie, hvis Endepunkt ligger i den begrænsede Del, vil skære Grænse-linien i mindst eet Punkt.*

Den Del af en Plan, som begrænses af en lukket brudt Linie, kaldes en Polygon eller en Mangekant, og Grænse-linien kaldes Perimeter, medens de enkelte Liniestykker kaldes Sider. En Trekant har 3 Sider, en Firkant har 4 Sider o. s. v.

En Polygon kaldes *egentlig* og *konveks*, naar Perimeteren ikke skærer sig selv, og ingen Sides Forlængelse gaar ind i Polygonen; hvis nogen af Sidernes Forlængelser gaar ind i Polygonen, er den *ukonveks*, og hvis Perimeteren skærer sig selv, er den *uegentlig*.



Et Liniestykke, som forbinder to Siders Endepunkter i en Polygon uden at være Side, kaldes en *Diagonal*.

En Linie kaldes *krum*, naar ingen Del af den er et ret Liniestykke.

7. Hvis et Liniestykke AB bevæger sig i en Plan, saaledes at A ligger fast, vil B beskrive en Linie, hvis Punkter alle har samme Afstand fra A ; fortsættes Bevægelsen, indtil AB naar sin oprindelige Stilling, bliver Linien lukket.

En lukket Linie, hvis Punkter alle har samme Afstand fra et fast Punkt, kaldes en *Cirkellinie* eller en *Cirkelperiferi*; det faste Punkt kaldes *Centrum*, en Forbindelseslinie mellem Centrum og et Punkt af Periferien kaldes en *Radius*.

Da Cirkellinien er lukket og ikke skærer sig selv, deler den Planen i to Dele, hvoraf den ene er begrænset. Den begrænsede Del kaldes en *Cirkel*; den indeholder Centrum. Ethvert Punkt, hvis Forbindelseslinie med Centrum ikke har noget Punkt fælles med Periferien, siges at ligge *indenfor Periferien* og hører med til Cirklen. Cirkelliniens Punkter hører ogsaa med til Cirklen. Ethvert Punkt, hvis Forbindelseslinie med Centrum vil skære Periferien siges at ligge *udenfor Periferien* og hører ikke med til Cirklen.

a. Alle Radier i samme Cirkel er lige store.

b. Et vilkaarligt Punkt indenfor Periferien har en Afstand til Centrum, som er mindre end Radius. Det ses, naar man trækker en Halvlinie fra Centrum gennem Punktet.

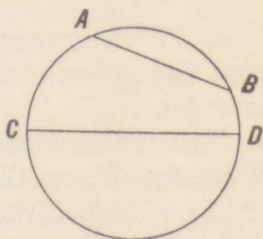
c. *Et vilkaarligt Punkt udenfor Periferien har en Afstand fra Centrum, som er større end Radius. Det følger af, at Forbindelseslinien med Centrum skærer Periferien.*

Cirkelperiferien har altsaa den Egenskab, at alle dens Punkter har en Afstand fra Centrum, som er lig Radius, medens alle andre Punkter i Planen har en anden Afstand fra Centrum.

At tegne en Figur, der opfylder visse Betingelser, kaldes ogsaa at *konstruere* den. Det forudsættes, at *man kan konstruere en Cirkel, naar man kender dens Centrum og dens Radius.*

8. To Punkter paa en Cirkelperiferi deler den i to Dele, som kaldes *Cirkelbuer*. Et ret Liniestykke, som forbinder to af Periferiens Punkter, kaldes en *Korde*; hvis Korden gaar gennem Centrum, kaldes den *Diameter*.

a. *Enhver Diameter deler Cirklen i to kongruente Dele.* Thi hvis man bøjer den ene Del omkring Diameteren, til den igen falder ind i Planen, vil den dække den anden Del. Enhver af de to Dele kaldes en *Halvcirkel*. I Stedet for Cirkelperiferi siger man ofte Cirkel, og i Stedet for Halvdelen af Periferien siger man næsten altid Halvcirkel.



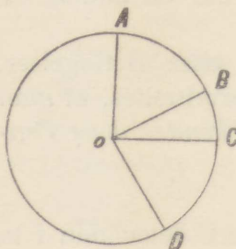
$\frown$ *AB* læses Buen *AB* og betegner en af Buerne fra *A* til *B*; hvis ikke andet angives, betegner det den mindste.

Naar to Buer af samme Cirkel lægges saaledes, at Centrerne falder sammen, og Radius til et Endepunkt i den ene falder ud ad Radius til et Endepunkt i den anden, vil Buerne falde ud ad hinanden, saafremt de ligger paa samme Side af de nævnte Radier. Hvis deres andre Endepunkter ogsaa falder sammen, er de kongruente; *kongruente Buer kaldes lige store.*

Den Del af en Cirkel, som begrænses af to Radier

og en Cirkelbue, kaldes et *Cirkeludsnit* eller en *Sektor*. Den Del af en Cirkel, som begrænses af en Cirkelbue og en Korde, kaldes et *Cirkelafsnit* eller et *Segment*.

b. Til lige store Buer i samme Cirkel hører kongruente Udsnit.



Givet $\cup AB = \cup CD$.

Bevis, at Udsn. $AOB \cong$ Udsn. COD .

Hvis Udsnittet COD drejes saa meget omkring Centrum, at C falder i A , vil D falde i B , fordi Buerne er lige store. Udsnittene dækker da hinanden og er altsaa kongruente.

c. Til kongruente Udsnit hører lige store Buer. Thi naar Udsnittene dækker hinanden, maa Buerne ogsaa gøre det.

Man inddeler en Cirkelperiferi i *Grader*, *Minutter* og *Sekunder*. At en Cirkelbue er en Grad vil sige, at den er $\frac{1}{360}$ af hele Cirkelperiferien; en Grad deles i 60 Minutter og et Minut i 60 Sekunder. 46 Grader 18 Minutter 25 Sekunder skrives ogsaa $46^{\circ} 18' 25''$.

Naar en Cirkelperiferi er delt i Grader, og man trækker Radier til Delingspunkterne, deler de Cirklen i 360 kongruente Udsnit. Ethvert af disse Udsnit er een Grad.

9. To Cirkler med lige store Radier er kongruente. Thi lægges den ene paa den anden, saaledes at Centrene falder sammen, vil Cirklerne dække hinanden.

To Cirkler med samme Centrum, men forskellige Radier kaldes *koncentriske*, deres Periferier har ingen Punkter fælles.

To Cirkellinier, der har mere end eet Punkt fælles, men ikke falder sammen, siges at *skære hinanden*. Forbindelseslinien mellem to Cirklers Centre kaldes *Centerlinien*. Den Linie, man faar ved at forlænge Center-

linien, vil skære enhver af Cirklerne i to Punkter. Hvis den ene Cirkels Skæringspunkter med Centerlinien ligger saaledes i Forhold til den anden Cirkel, at det ene ligger inden i den og det andet uden for den, vil Cirklerne skære hinanden. Deraf følger, at:

- 1) To Cirkler med lige store Radier vil skære hinanden, naar deres Diameter er større end Centerlinien.
- 2) To Cirkler med forskellige Radier vil skære hinanden, naar den ene har sit Centrum paa den andens Periferi, og dens Radius er mindre end den andens Diameter.
- 3) To Cirkler med forskellige Radier vil skære hinanden, naar Centerlinien er større end enhver af Radierne, men mindre end deres Sum.

En *Definition* er en Forklaring af, hvad et Ord eller et Udtryk betyder.

Eksempel: En Radius er et Liniestykke, som forbinder Cirkelns Centrum med et Punkt af Periferien.

En *geometrisk Grundsætning* eller et *geometrisk Aksiom* angiver en Egenskab ved en Figur, som man gaar ud fra, at den har.

Eksempel: En ret Linie er ubegrænset til to Sider.

En *geometrisk Sætning* er en Paastand, der angiver en Egenskab ved en Figur, som man kan bevise, at den har.

Eksempel: En Diameter deler en Cirkel i to kongruente Dele.

Det er Geometriens Opgave:

- 1) At beskrive Figurerne og at forme Beskrivelserne som nøjagtige Definitioner og Grundsætninger.
- 2) At forklare, hvorledes man konstruerer Figurerne.
- 3) At forklare, hvorledes man ad Tankens Vej finder andre Egenskaber ved Figurerne end dem, der er nævnt i Grundsætningerne og Definitionerne, og at

fremsætte de fundne Resultater i geometriske Sætninger, hvis Rigtighed bevises.

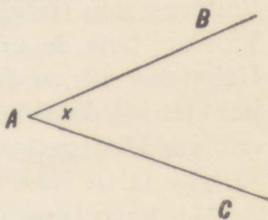
Plangeometrien er Læren om plane Figurer. I denne Bog behandles rette Linier og Cirkler samt Figurer, der er sammensat af dem.

I.

A. Vinkler.

10. En Vinkel er en Del af en Plan, der er indsluttet mellem to Halvlinier med fælles Endepunkt.

De to Halvlinier kaldes *Vinklens Ben*, og deres fælles Endepunkt kaldes *Vinklens Toppunkt*; AB er det *venstre Ben* og AC det *højre*. For at afgøre, hvilket Vinkelben der er det højre, kan man tænke sig, at man staar i Toppunktet og vender Forsiden mod Vinklen; det højre Vinkelben er det, man da har paa højre Side. Ved to Vinklers *ensbenævnte Ben* forstaar man de to Vinklers venstre Ben eller de to Vinklers højre Ben.

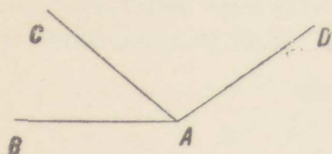


Man kan benævne en Vinkel ved det Bogstav, der staar ved Toppunktet, $\angle A$ læses Vinkel A, og man kan benævne den ved et Bogstav inde i Vinklen, $\angle x$; endelig kan man benævne den $\angle BAC$; det Bogstav, som hører til Toppunktet, skal da sættes imellem de andre, som staar paa hver sit af Benene.

To Vinkler kan lægges paa hinanden, saaledes at Toppunkterne og det ene Par Ben falder sammen; hvis det andet Par Ben da ogsaa falder sammen, dækker Vinklerne hinanden. To Vinkler, som kan dække hinanden, kaldes *lige store*.

Naar to Vinkler lægges ved Siden af hinanden, saaledes at Toppunkterne og det ene Par Ben falder sam-

men, vil de andre Ben danne en Vinkel, som er lig *Summen af de to Vinkler*, og hvis de to Vinkler er lige store, bliver den dobbelt saa stor som en af dem.

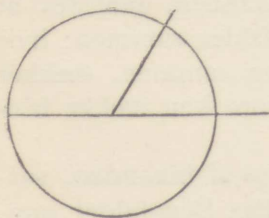


$$\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD.$$

En Vinkel, hvis Ben gaar i hinandens Forlængelse, kaldes *en lige Vinkel*. Hvis man i en lige Vinkel trækker Halvlinier fra Toppunktet, vil de dele den i flere Vinkler. Een Halvlinie fra Toppunktet vil dele den i to Vinkler; hvis de to Vinkler er lige store, er hver af dem Halvdelen af en lige Vinkel. To Halvlinier fra Toppunktet vil dele den i tre Vinkler; hvis de er lige store, er hver af dem $\frac{1}{3}$ af en lige Vinkel o. s. v.

11. Naar man skal angive en Vinkels Størrelse, bruger man som Enhed en Vinkel, der er $\frac{1}{180}$ af en lige Vinkel. Denne Vinkelenhed kaldes *en Grad*, $\frac{1}{60}$ af en Grad kaldes *et Minut* og $\frac{1}{60}$ Minut kaldes *et Sekund*. En Vinkel paa to Grader er en Vinkel, der er dobbelt saa stor som en Vinkel paa en Grad; en Vinkel paa tre Grader er tre Gange saa stor som en Vinkel paa en Grad o. s. v. En lige Vinkel er 180° .

Man angiver altsaa en Vinkels Størrelse i Grader ved at angive, hvor mange 180-ndedele af en lige Vinkel den indeholder.



Naar man tegner en vilkaarlig Cirkel med Vinklens Toppunkt til Centrum, vil den Cirkelbue, som ligger i Vinklen, have samme Gradeantal som Vinklen.

Det ene Vinkelben forlænges ud over Toppunktet, og den Halv-

cirkel, hvori Vinklen ligger, deles i Grader. Vinklerne mellem to paa hinanden følgende Radier er da lige store, thi Udsnittene kan dække hinanden, da de har lige store Buer. Da den lige Vinkel er delt i 180 Vinkler, som er lige store, er hver af dem en Grad. Til en Vinkel paa en Grad hører altsaa en Bue paa en Grad, til en Vinkel paa 2 Grader hører en Bue paa 2 Grader o. s. v. Altsaa: *En Vinkels Gradeantal er lig Gradeantallet af den Cirkelbue, som Vinkelbenene afskærer paa en vilkaarlig Cirkel, der har Toppunktet til Centrum.*

En Figur, som bestaar af to Liniestykker med fælles Endepunkt, kaldes ogsaa en Vinkel; dens Størrelse angives i Grader, som det er vist oven for. Størrelsen har altsaa intet med Benenes Længde at gøre.

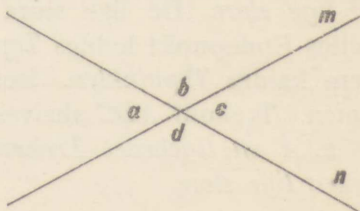
To Halvlinier eller to Liniestykker, der har fælles Endepunkt, danner altid to Vinkler; hvis Benene ikke gaar i hinandens Forlængelse, er den ene Vinkel større end 180° , den anden mindre; naar ikke andet angives, er det den mindste Vinkel, man kalder Vinklen mellem Halvlinierne.

En Vinkel, der er mindre end 90° , kaldes en *spids Vinkel*; en Vinkel, der er lig 90° , kaldes en *ret Vinkel*; en Vinkel, der er større end 90° , men mindre end 180° , kaldes en *stump Vinkel*.

To Vinkler, der tilsammen er 90° , kaldes *Komplementvinkler*, to Vinkler, der tilsammen er 180° , kaldes *Supplementvinkler*, og to Vinkler, der tilsammen er 360° , kaldes *Eksplementvinkler*.

12. To Linier, der skærer hinanden, danner 4 Vinkler.

To Vinkler kaldes *Nabovinkler*, naar de har eet Ben fælles og de andre Ben er Forlængelser af hinanden.



a. *To Nabovinkler er Supplementvinkler.*

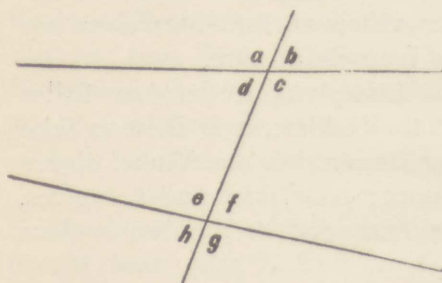
$\angle a + \angle b = 180^\circ$, da de tilsammen udgør en lige Vinkel.

To Vinkler kaldes *Toppinkler*, naar den enes Ben er Forlængelser af den andens.

b. *To Toppinkler er lige store.*

$\angle a = \angle c$, fordi enhver af dem er $180^\circ - b$.

Hvis to Linier skærer hinanden saaledes, at een af de fire Vinkler er ret, vil de tre andre ogsaa være det; Linierne kaldes da *vinkelrette paa hinanden*; $m \perp n$ læses m er vinkelret paa n .



Naar en Linie skærer to andre Linier, dannes der 4 Vinkler ved hvert Skæringspunkt.

To af Vinklerne kaldes *ensliggende*, hvis de har deres ensbenævnte Ben paa Skæringslinien og de ikke har samme Toppunkt.

$\angle a$ er ensliggende med $\angle e$ og $\angle g$.

$\angle b$ er ensliggende med $\angle f$ og $\angle h$.

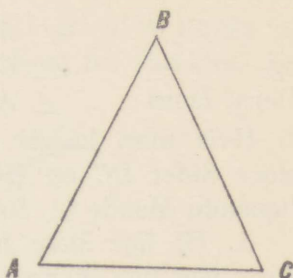
Naar et Par ensliggende Vinkler er lige store, vil ethvert andet Par ensliggende Vinkler, der ligger ved de samme Skæringspunkter, ogsaa være lige store.

13. *En ligebenet Trekant er en Trekant, hvis to Sider er lige store.* De lige store Sider kaldes *Benene*, deres fælles Endepunkt kaldes *Toppunktet*, og Vinklen mellem dem kaldes *Toppinklen*. Den tredie Side kaldes *Grundlinien*. Trekant ABC skrives ogsaa $\triangle ABC$.

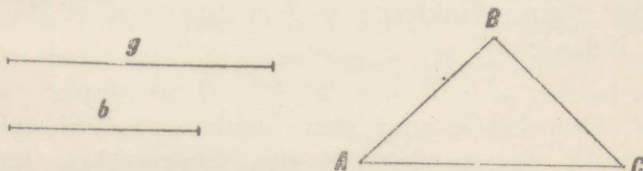
a. *I en ligebenet Trekant er Vinklerne ved Grundlinien lige store.*

Givet $AB = BC$.

Hvis $\triangle ABC$ lægges i omvendt Stilling, saaledes at $\angle B$ dækker sig selv, falder BC ud ad BA og BA ud ad BC , og da $BA = BC$, falder C i A og A i C . $\angle A$ dækker da $\angle C$, og $\angle C$ dækker $\angle A$, altsaa er $\angle A = \angle C$.



b. Konstruer en ligebenet Trekant, naar man kender Længden af Grundlinien og Længden af Benene.

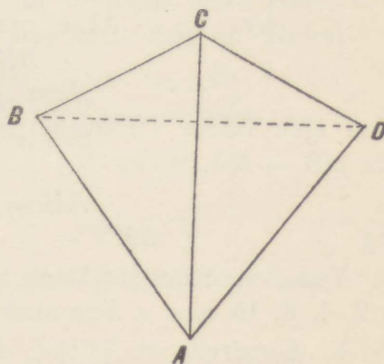


Paa en ret Linie afsætter man $AC = g$. Derefter tegner man en Cirkel med A som Centrum og b som Radius og en Cirkel med C som Centrum og samme Radius; de to Cirkler skærer hinanden, naar $2b > g$, og deres Skæringspunkt er B , fra B trækkes Linier til A og C .

At to Trekanter ABC og DEF har deres Sider stykkevis lige store vil sige, at $AB = DE$, $BC = EF$ og $AC = DF$.

c. Naar to Trekanter har deres Sider stykkevis lige store, ligger der lige store Vinkler over for de lige store Sider.

De to Trekanter ABC og ADC lægges ved Siden af hinanden, saaledes at et Par lige store Sider falder sammen, og de andre lige store Sider faar et Endepunkt fælles. Linien BD vil da skære AC eller dens Forlængelse; i begge Tilfælde har man



$\angle ABD = \angle ADB$ ifølge a
 og $\angle CBD = \angle CDB$.
 Deraf faaes $\angle ABC = \angle ADC$.

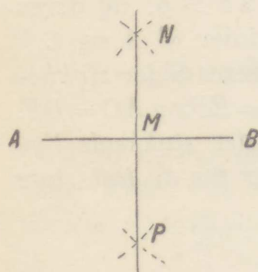
Hvis man lægger Trekkanterne saaledes, at de lige store Sider BC og DC falder sammen, faar man paa lignende Maade $\angle BAC = \angle DAC$.

d. Til lige store Korder i kongruente Cirkler hører Buer paa lige mange Grader.

Thi naar man trækker Radier til Kordernes Endepunkter, faar man to Trekkanter, som har Siderne stykkevis lige store. Vinklerne mellem Radierne er da lige store ifølge c.

14. Den Linie, som gaar gennem et Liniestykkes Midtpunkt og er vinkelret paa Liniestykket, kaldes *Liniestykkets Akse*. Den Linie, som deler en Vinkel i to lige store Vinkler, kaldes *Vinklens Akse*.

a. Konstruer et givet Liniestykkes Akse.



AB er det givne Liniestykke.

Man tegner en Cirkel med A som Centrum og en Radius, der er større end Halvdelen af AB , og en Cirkel med B som Centrum og samme Radius. De to Cirkler skærer hinanden i N og P . Linien NP er da AB 's Akse, man har nemlig

$$\angle BNP = \angle ANP \text{ ifølge 13 c.}$$

Naar $\triangle NBM$ drejes om NP , til den igen falder i Planen, vil NB falde ud ad NA , og da $NB = NA$, falder B i A , deraf følger at

$$AM = MB$$

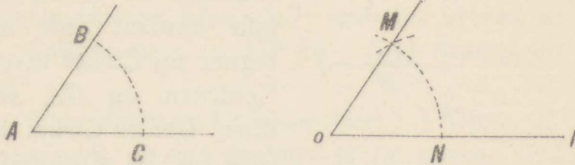
og

$$\angle AMN = \angle BMN = 90^\circ.$$

Ved denne Konstruktion kan man dele et Liniestykke i 2, 4, 8, 16 o. s. v. lige store Dele.

b. Konstruer en Vinkel, der er lig en given Vinkel,

saaledes at dens Toppunkt falder i et givet Punkt og det ene Ben ud ad en given Halvlinie fra Punktet.



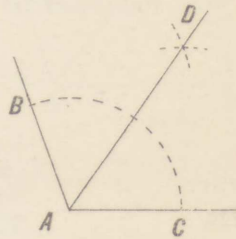
Givet $\angle CAB$, Punktet O og Halvlinien l .

Man tegner en Cirkel med A som Centrum og derefter en Cirkel med O til Centrum og samme Radius; N er da fundet, og man tegner en Cirkelbue med N som Centrum og Korden BC som Radius, derved findes M ; fra O tegnes en Halvlinie gennem M .

$\angle MON = \angle BAC$ ifølge 13 d.

c. *Konstruer en given Vinkels Akse.*

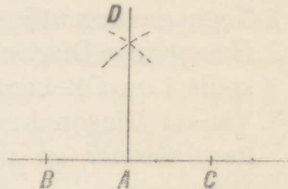
Man tegner en Cirkel, der har Vinklens Toppunkt til Centrum og skærer Benene i B og C ; derefter tegnes en Cirkelbue med B som Centrum og en Radius, der er større end Halvdelen af BC , og en Cirkelbue med C til Centrum og samme Radius; disse Cirkelbuer skærer hinanden i D . Linien AD er da Vinklens Akse ifølge 13 c.



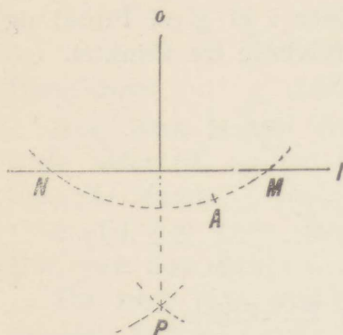
Ved fortsat Halvering kan man dele en Vinkel i 4, 8, 16 o. s. v. lige store Dele.

d. *I et givet Punkt af en Linie skal man oprejse en vinkelret paa Linien.*

Konstruktionen er den samme som i c.



e. *Fra et givet Punkt uden for en Linie skal man nedfælde en vinkelret paa Linien.*

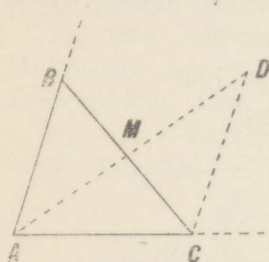


Givet O og l .

Man vælger et Punkt A , saaledes at A og O ligger paa modsat Side af l , og tegner en Cirkel med O som Centrum og OA som Radius. Denne Cirkel skærer l i N og M . Derefter findes et Punkt P , som har samme Afstand fra N og M . OP er

da vinkelret paa l . Bevises som 14 a.

f. Summen af ethvert Par Vinkler i en Trekant er mindre end 180° .



Bevis, at $\angle A + \angle C < 180^\circ$.

M er Midtpunktet af BC , man tegner Linien AM , afsætter $MD = MA$ og trækker DC . Punktet D vil altid falde inde i $\angle A$, derfor er $\angle DCA < 180^\circ$.

$\triangle CMD$ drejes 180° omkring M , den vil da dække $\triangle BMA$. Deraf faar man

$$\angle DCM = \angle B$$

$$\angle DCA = \angle B + \angle C.$$

$$\angle DCA < 180^\circ$$

$$\angle B + \angle C < 180^\circ.$$

eller

Da

har man

Opgaver.

1. Tegn en uegentlig Firkant og træk dens Diagonaler.
2. Hvormange Diagonaler kan man trække fra en Vinkelspids i en Ottekant?
3. Vis, at Diagonalerne i en konveks og egentlig Femkant danner en uegentlig Femkant, og find dennes Diagonaler.
4. Hvilke Polygoner har lige saa mange Diagonaler som Sider; hvilke har færre og hvilke har flere Diagonaler end Sider?

5. Hvor mange Skæringspunkter kan der blive mellem fire rette Linier, og hvor mange andre Forbindelseslinier kan man trække mellem disse Punkter?
6. To Linier skærer hinanden, saaledes at een af Vinklerne mellem dem er $55^{\circ} 30'$; find Størrelsen af de andre.
7. To Punkter deler en Cirkelperiferi i to Buer, af hvilke den ene er $\frac{1}{8}$ af den anden. Hvor mange Grader er Vinklen mellem Radierne til de to Punkter?
8. Konstruer en Trekant, hvis to Sider er 6 cm og 8 cm, naar Vinklen mellem dem skal være ret.
9. Del et givet Liniestykke i to Dele, hvoraf den ene er tre Gange saa stor som den anden.
10. Bevis, at to Nabovinklers Halveringslinier er vinkelrette paa hinanden.
11. Konstruer en Vinkel paa 45° og en paa $22^{\circ} 30'$.
12. Konstruer en ligebenet Trekant, naar Perimeteren skal være lig en given Linie, og Grundlinien skal være $\frac{2}{3}$ af eet af Benene.

B. Parallele Linier.

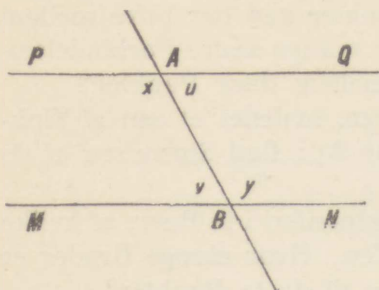
15. 1) *To Linier kaldes parallelle, naar de ikke skærer hinanden.*

2) *To Liniestykker kaldes parallelle, naar de Linier, man faar ved at forlænge dem, ikke skærer hinanden.*

At Linien *a* er parallel med Linien *b* skrives $a \parallel b$.

Grundsætning: *Gennem et Punkt kan der kun tegnes een Linie parallel med en given Linie. Alle andre Linier gennem Punktet vil altsaa skære den givne Linie.*

a. *Naar to Linier skærer en tredie, saaledes at et Par ensliggende Vinkler er lige store, er de parallelle.*



Givet $x = y$.

Bevis, at $PQ \neq MN$.

Af $x = y$

og $x + u = 180^\circ$

faar man $y + u = 180^\circ$

Af $x = y$

og $v + y = 180^\circ$

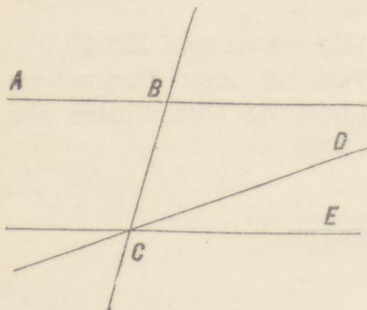
faar man $v + x = 180^\circ$

Hvis Linien PQ skærer Linien MN , vil der altsaa dannes en Trekant, hvori Summen af to Vinkler er lig 180° ; men det er umuligt ifølge 14 f, altsaa er $PQ \neq MN$.

b. Naar to Linier skærer en tredie, saaledes at de ens-
liggende Vinkler er ulige store, vil Linierne skære hinanden.

Givet $\angle ABC > \angle DCB$.

Bevis, at Linien AB skæ-
rer Linien CD .



Gennem C tegnes Linien
 CE , saaledes at $\angle ECB =$
 $\angle ABC$, CE er da parallel
med AB ifølge a. Ifølge
Grundsætningen maa CD
da skære AB .

c. Naar to Linier er parallelle, er de ensliggende
Vinkler, som dannes ved en Linie, der skærer dem, lige
store. Thi var de ulige store, vilde Linierne ifølge b
skære hinanden; men det strider mod det givne, altsaa
er de lige store.

16. a. Naar en Linie skærer den ene af to parallelle
Linier, skærer den ogsaa den anden. Ellers vilde der
gennem Skæringspunktet gaa to Linier parallelle med
den anden.

b. Naar en Linie er parallel med den ene af to pa-
rallele Linier, er den ogsaa parallel med den anden. Thi

hvis den skar den anden, vilde den ogsaa skære den første.

Sætningen kan ogsaa bevises ved Hjælp af de ensliggende Vinkler, som fremkommer, naar man trækker en Skæringslinie.

c. Naar en Linie er vinkelret paa den ene af to parallelle Linier, er den ogsaa vinkelret paa den anden. Ifølge a og 15 c.

d. To Vinkler, hvis ensbenævnte Ben er parallelle, er lige store.

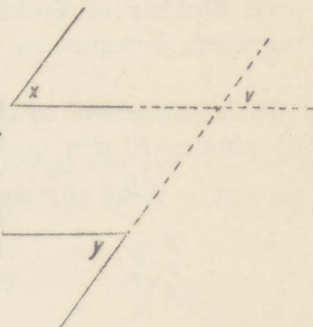
$\angle x$ og $\angle y$ har deres ensbenævnte Ben parallelle.

Man forlænger venstre Ben af den ene Vinkel og højre Ben af den anden, saa der fremkommer et Skæringspunkt. Man har da

$$x = v \quad \text{ifølge 15 c}$$

og $y = v$.

Altsaa $x = y$.

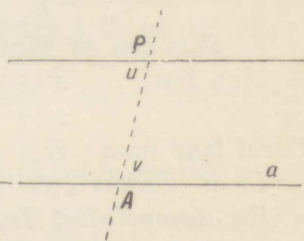


e. To Vinkler, hvis uensbenævnte Ben er parallelle, er Supplementvinkler. Bevises paa lignende Maade.

f. Konstruer den Linie, som gaar gennem et givet Punkt og er parallel med en given Linie.

Givet Punktet P og Linien a .

Man vælger et Punkt A i Linien og trækker PA . Derpaa afsættes $\angle u = \angle v$.



C. Trekanter.

17. En Trekants Vinkler betegnes ofte ved Bogstaverne A, B og C ; Siderne kaldes da a, b og c , saaledes at a er $\angle A$'s modstaaende Side.

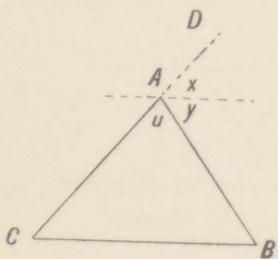
En *Højde* er et Liniestykke, der forbinder en Vinkelspids i en Trekant med den modstaaende Side eller dens Forlængelse og er vinkelret paa Siden.

Fra hver Vinkelspids kan der kun tegnes een Højde, ifølge 15 a. Højderne betegnes h_a , h_b og h_c ; h_a er Højden paa a .

Et Liniestykke, som forbinder en Vinkelspids i en Trekant med den modstaaende Sides Midtpunkt, kaldes en *Median*. Medianerne betegnes m_a , m_b og m_c .

De Stykker af Vinklernes Akser, som ligger inde i Trekanten, betegnes v_A , v_B og v_C .

18. a. Summen af to Vinkler i en Trekant er lig Nabovinklen til den tredie.



Gennem A tegnes Linien, der er parallel med BC. $\angle A$'s Nabovinkel bliver derved delt i to Vinkler x og y , saaledes at

$$\angle C = \angle x$$

og $\angle B = \angle y$.

Deraf $\angle C + \angle B =$

$\angle x + \angle y = \angle DAB$.

b. Summen af Vinklerne i en Trekant er lig 180° .

Man har $x + y + u = 180^\circ$

og $x + y = B + C$ ifølge a.

Deraf faar man $B + C + u = 180^\circ$.

De to Vinkler i en Trekant er altid spidse ifølge b.

En *stumpvinklet Trekant* er en Trekant, som har en stump Vinkel.

En *retvinklet Trekant* er en Trekant, som har en ret Vinkel; de to Sider, som danner den rette Vinkel, kaldes *Kateterne*, og den tredie Side kaldes *Hypotenusen*.

En *spidsvinklet Trekant* er en Trekant, hvori alle tre Vinkler er spidse.

I en spidsvinklet Trekant falder alle tre Højder inde i Trekanten; thi hvis en af dem faldt uden for Trekanten,

fremkom der en Trekant med en ret og en stump Vinkel. Naar Trekanten er retvinklet eller stumpvinklet, falder Højden fra den største Vinkel inde i Trekanten, men de andre ikke.

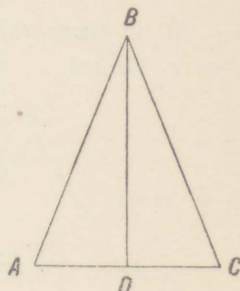
19. a. I en ligebenet Trekant er Medianen til Grundlinien Højde og Vinkelakse.

Givet $AB = CB$
og $AD = CD$.

Man faar da ifølge 13 c

$$\angle ABD = \angle CBD$$

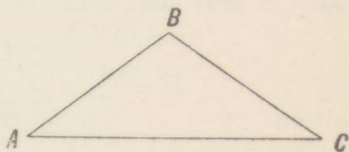
og $\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$.



b. Naar to Vinkler i en Trekant er lige store, er Trekanten ligebenet, og disse Vinklers modstaaende Sider er Benene.

Givet $\angle A = \angle C$.

$\triangle ABC$ lægges paa sig selv i omvendt Stilling, saaledes at AC dækker CA. AB vil da falde ud ad CB, fordi $\angle A = \angle C$, og CB vil falde ud ad AB af samme Grund. B falder derfor i B, og AB dækker CB, altsaa er $AB = CB$.



Sætningerne 13 a og 19 b kan ogsaa udtrykkes saaledes:

Over for lige store Sider i en Trekant ligger lige store Vinkler.

Over for lige store Vinkler i en Trekant ligger lige store Sider.

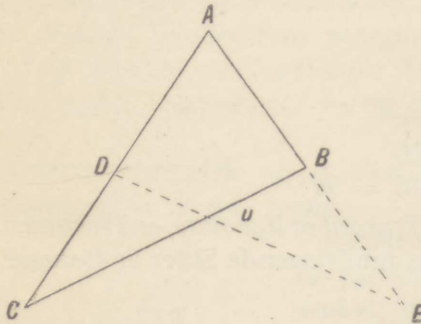
Den ene af disse Sætninger kan dannes af den anden ved, at man ombytter det givne og det, der skal bevises. Enhver af dem kaldes derfor den andens *omvendte Sætning*.

Naar alle tre Sider i en Trekant er lige store, kaldes Trekanten *ligesidet*.

c. I en ligesidet Trekant er alle tre Vinkler lige store, og hver Vinkel er 60° . Det følger af 13 a og 18 b.

d. Naar alle tre Vinkler i en Trekant er lige store, er Trekanten ligesidet. b.

20. a. Over for en større Side i en Trekant ligger en større Vinkel.



Givet $AC > AB$.

Bevis, at $\angle B > \angle C$.

$\triangle ABC$ lægges i omvendt Stilling, saaledes at $\angle A$ dækker sig selv. Punktet B falder da i et Punkt D paa selve Siden AC , og C falder i et Punkt E paa Siden AB 's Forlængelse. Man har da

$$\begin{aligned} \angle C &= \angle E \\ \text{og} \quad \angle B &= \angle u + \angle E = \angle u + \angle C, \\ \text{altsaa} \quad \angle B &> \angle C. \end{aligned}$$

b. Over for en større Vinkel i en Trekant ligger en større Side.

Givet $\angle A > \angle C$.

Bevis, at $a > c$.

Der er tre Muligheder og ikke flere.

- 1) $a < c$,
- 2) $a = c$.
- 3) $a > c$.

Hvis $a < c$, faar man $A < C$; men det strider mod det givne og er altsaa umuligt.

Hvis $a = c$, er $A = C$, hvilket ogsaa er umuligt. Altsaa $a > c$.

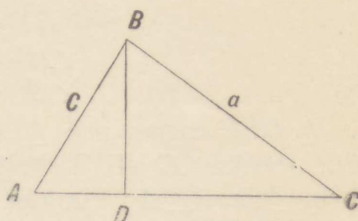
Et saadant Bevis kaldes et *indirekte Bevis*.

c. Hypotenusen i en retvinklet Trekant er større end enhver af Kateterne. Det følger af b.

21. a. *Enhver Side i en Trekant er mindre end de to andres Sum.*

Det er overflødigt at bevise, at enhver af de to mindste Sider er mindre end de to andres Sum.

I $\triangle ABC$ er AC den største Side. Højden BD falder da inde i Trekanten, fordi $\angle B$ er den største Vinkel. Man har



$$AD < c$$

ifølge 20 c

og

$$DC < a.$$

Deraf

$$AD + DC < c + a$$

eller

$$AC < c + a.$$

b. *Enhver Side i en Trekant er større end de to andres Differens.*

Det er overflødigt at bevise dette for den største Sides Vedkommende.

b er den største Side, man har ifølge a

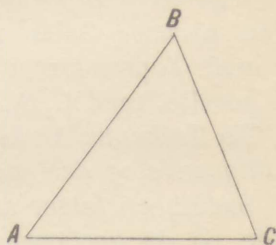
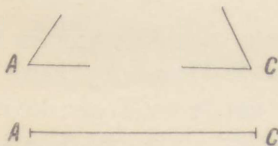
$$c + a > b.$$

Deraf faar man

$$1) c > b - a.$$

$$2) a > b - c.$$

22. a. *Konstruer en Trekant af en Side og de hosliggende Vinkler.*



Man afsætter Siden AC hen ad en vilkaarlig ret Linie, derpaa afsættes Vinklerne A og C , saaledes at AC bliver højre Ben i $\angle A$ og venstre Ben i $\angle C$. Skæringspunktet mellem de andre Ben er da B . Opgaven kan kun løses, naar $\angle A + \angle C < 180^\circ$.

b. *To Trekanter er kongruente, naar de har en Side og de hosliggende Vinkler stykkevis lige store.*

En Trekant DEF konstrueres, saaledes at

$$DF = AC,$$

$$\angle D = \angle A$$

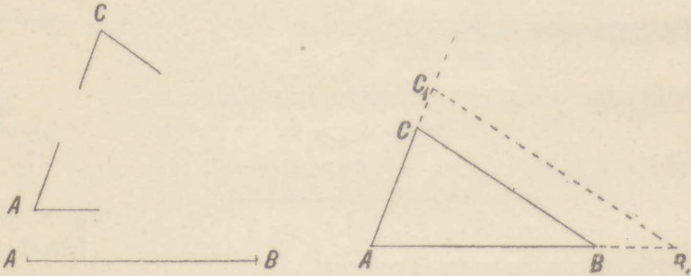
og

$$\angle F = \angle C.$$

$\triangle DEF$ lægges paa $\triangle ABC$, saaledes at DF dækker AC . Punktet E vil da falde et Sted i Halvlinien AB , fordi $\angle D = \angle A$; Punktet E vil ogsaa falde i Halvlinien CB , fordi $\angle F = \angle C$. E falder altsaa i B , og Trekanterne dækker hinanden, altsaa

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC.$$

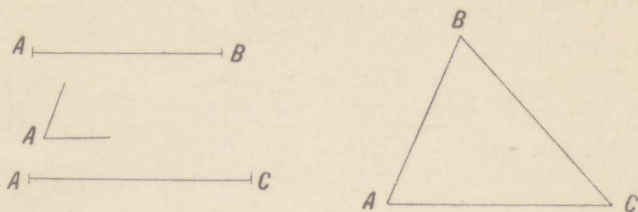
23. a. *Konstruer en Trekant af en Side, en hosliggende og den modstaaende Vinkel.*



Man afsætter Siden AB og $\angle A$; derpaa afsættes $\angle C$ med Toppunktet i C_1 , og gennem B trækkes en Linie parallel med C_1B_1 .

b. *To Trekanter er kongruente, naar de har en Side, en hosliggende og den modstaaende Vinkel stykkevis lige store.* Sætningen følger af 22 b, da de to Trekanter har en Side og de hosliggende Vinkler stykkevis lige store ifølge 18 b.

24. a. *Konstruer en Trekant af to Sider og den inde-sluttede Vinkel.*



Man afsætter $\angle A$, dernæst afsættes AB ud ad dens ene Ben og AC ud ad det andet; Punkterne B og C forbindes, og Trekanten er konstrueret. Opgaven kan kun løses, naar $\angle A < 180^\circ$.

b. *To Trekanter er kongruente, naar de har to Sider og den indesluttede Vinkel stykkevis lige store.*

Bevises ved Dækning.

25. To Trekanter kan have en Vinkel, en hosliggende og den modstaaende Side stykkevis lige store uden at være kongruente. Hvis man deler en ligebenet Trekant i to Dele ved en Linie gennem Toppunktet, faar man to saadanne Trekanter, som ikke er kongruente, med mindre Linien er Median.

Naar to Trekanter har de nævnte Stykker stykkevis lige store, maa de altsaa opfylde endnu en Betingelse, for at man kan være sikker paa, at de er kongruente.

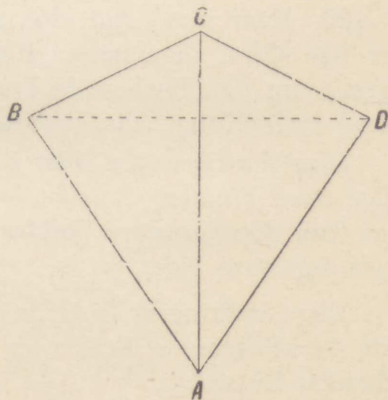
Trekanterne ABC og ADC har

$$AB = AD,$$

$$AC = AC$$

$$\text{og } \angle ABC = \angle ADC$$

De to Trekanter lægges ved Siden af hinanden, saaledes at de lige store Vinklers modstaaende Sider falder sammen, og det andet Par lige store Sider faar et Endepunkt fælles.



1^o. Hvis BD ikke gaar gennem C , er Trekkanterne kongruente.

Thi	$\angle ABC = \angle ADC$	er givet,
og	$\angle ABD = \angle ADB$	13 a.
Deraf faar man	$\angle CBD = \angle CDB$	
og	$CB = CD.$	

Ifølge 24 b er $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

2^o. Hvis BD gaar gennem C , er det ikke sikkert, at Trekkanterne er kongruente; men man faar da

$$AC < AB,$$

fordi een af Vinklerne C er ret eller stump.

Naar $AC > AB$ eller $AC = AB$, er Trekkanterne altsaa kongruente. Eller:

a. *To Trekkanter er kongruente, naar de har en Vinkel, en hosliggende og den modstaaende Side stykkevis lige store, saafremt den modstaaende Side er større end eller lig med den hosliggende.*

b. *To Trekkanter er kongruente, naar de har deres tre Sider stykkevis lige store.*

Ifølge 13 c ligger der lige store Vinkler over for de lige store Sider. Trekkanterne er da kongruente. 24 b.

26. Naar man skal vise, at to Linier eller to Vinkler er lige store, maa man i Reglen enten benytte Sætningerne om den ligebenede Trekant eller Sætningerne om Trekanters Kongruens. Man faar da ofte Brug for følgende:

Over for lige store Sider i kongruente Trekkanter ligger lige store Vinkler.

Over for lige store Vinkler i kongruente Trekkanter ligger lige store Sider.

Disse Sætningers Rigtighed indses ved, at man tænker sig de kongruente Trekkanter lagt paa hinanden, saa de dækker hinanden.

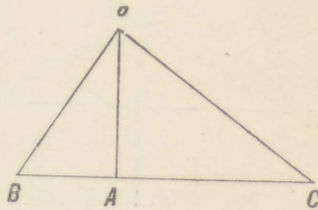
a. Fra et givet Punkt til en given Linie kan der tegnes eet og kun eet Liniestykke vinkelret paa Linien. Ifølge 14 e og 17.

Alle andre Liniestykker fra Punktet til Linien kaldes *Skraalinier*.

b. Enhver Skraalinie er længere end den vinkelrette fra samme Punkt. 20 c.

Den vinkelrette fra et Punkt til en Linie er altsaa den mindste Afstand fra Punktet til et af Liniens Punkter og kaldes derfor *Punktets Afstand fra Linien*. Det Punkt, den har fælles med Linien, kaldes den vinkelrettes *Fodpunkt*.

Fodpunktet af den vinkelrette kaldes ogsaa Punktet *O's Projektion paa Linien*; Liniestykket *BA* kaldes *BO's Projektion*, og $\angle BOA$ kaldes *BO's Afvigelse fra den vinkelrette*.



c. Naar to Skraalinier er lige store, afviger de lige meget fra den vinkelrette, og de har lige store Projektioner paa Linien. 19 a.

d. Naar to Skraalinier er ulige store, afviger den største mest fra den vinkelrette, og den har den største Projektion paa Linien.

Naar $OC > OB$,
er $\angle B > \angle C$. 20 a.
Man faar da $\angle BOA < \angle COA$.

Naar $\triangle BOA$ drejes omkring OA , indtil den igen falder i Planen, vil AB falde ud ad AC , og da $\angle BOA < \angle COA$, falder Punktet B mellem A og C , man faar altsaa

$$AC > AB.$$

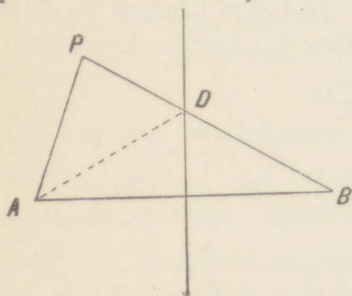
e. Naar to Skraalinier afviger lige meget fra den vinkelrette, er de lige store, og naar de har lige store Projektioner, er de lige store. 19 b og 24 b.

f. Naar to Skraalinier afviger ulige meget fra den vinkelrette, er den størst, som afviger mest, og naar de

har ulige store Projektioner, er den størst, som har den største Projektion. Bevises indirekte eller ved 20 b.

27. a. *Ethvert Punkt i et Liniestykkes Akse har samme Afstand fra Liniestykkets Endepunkter.* 26 e.

b. *Ethvert Punkt uden for et Liniestykkes Akse ligger nærmest ved det af Liniestykkets Endepunkter, som ligger paa samme Side af Aksen.*



A og P ligger paa samme Side af AB's Akse. Linien PB vil da skære Aksen; Skæringspunktet kaldes D.

Man har

$$AD + DP > AP \quad 21 \text{ a,}$$

$$\text{da} \quad AD = BD,$$

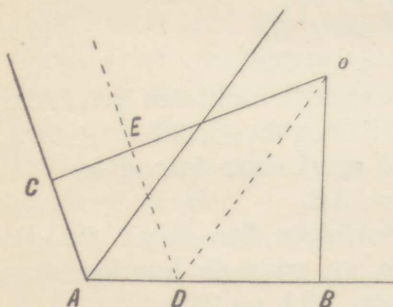
$$\text{faar man } BD + DP > AP$$

$$\text{eller} \quad BP > AP.$$

For Vinkler mindre end 180° gælder følgende Sætninger:

c. *Ethvert Punkt i en Vinkels Akse har samme Afstand fra Vinklens Ben.* 23 b.

d. *Ethvert af en Vinkels Punkter, som ligger uden for dens Akse, har mindst Afstand til det Vinkelben, der ligger paa samme Side af Aksen.*



O er et Punkt uden for Vinklens Akse. OB er Afstanden til det ene Vinkelben, og OC er Afstanden til det andet. Gennem O tegnes en Linie parallel med Vinklens Akse; denne Linie vil skære det Vinkelben, der ligger paa samme Side af Aksen som O. Gennem

Skæringspunktet D trækkes en Linie DE parallel med det andet Vinkelben. OD er da Akse for $\angle EDB$;

altsaa
og

$$OE = OB$$

$$OC > OB.$$

28. Naar to Trekanter har to Sider stykkevis lige store, men den indesluttede Vinkel ulige stor, er den tredie Side størst i den Trekant, hvor Vinklen er størst.

De to Trekanter lægges ved Siden af hinanden, saaledes at det ene Par lige store Sider falder sammen, og det andet Par har et Endepunkt fælles.

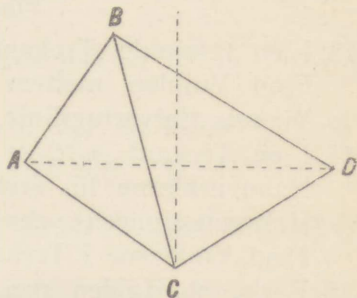
$$\text{Givet } CB = CB$$

$$CA = CD$$

$$\text{og } \angle ACB < \angle DCB.$$

$\angle ACD$ halveres; dens Akse vil være Akse for AD , da $CA = CD$. Punkterne A og B ligger paa samme Side af AD 's Akse, fordi $\angle ABC < \angle DCB$, altsaa er

$$BA < BD \text{ ifølge 27 b.}$$



29. At to Punkter ligger symmetrisk med Hensyn til en ret Linie vil sige, at Linien er Akse for Punkternes Forbindelseslinie; Linien kaldes Symmetriakse.

To Figurer ligger symmetrisk med Hensyn til en ret Linie, naar hvert Punkt i den ene Figur ligger symmetrisk med et Punkt i den anden Figur.

Eksempel: Højden paa Grundlinien i en ligebenet Trekant deler Trekanten i symmetriske Dele.

a. Symmetriske Figurer er kongruente. Thi naar man drejer den ene af dem omkring Symmetriaksen, indtil Figuren igen falder i Planen, vil hvert Punkt falde i sit symmetriske Punkt, og Figurerne vil altsaa dække hinanden.

b. Naar den ene af to Figurer ved en Drejning omkring en ret Linie kan bringes til at dække den anden,

ligger de symmetrisk med Hensyn til Linien. De Punkter, som efter Drejningen falder sammen, maa nemlig før Drejningen ligge symmetrisk.

Enhver Diameter deler Cirklen i to symmetriske Dele.

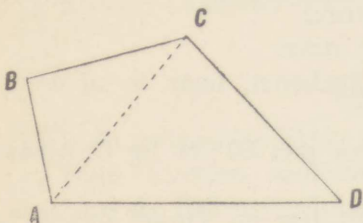
Opgaver.

13. I en retvinklet Trekant er den ene Vinkel $23^{\circ} 18'$. Find Vinklen mellem Hypotenusen og den rette Vinkels Halveringslinie.
14. I en Trekant ABC er $\angle A = 72^{\circ}$ og $\angle B = 66^{\circ}$. Nabovinklerne til Trekantens Vinkler halveres, og Halveringslinierne skærer hinanden i D , E og F . Find Vinklerne i Trekant DEF .
15. Bevis, at Højden paa Grundlinien i en retvinklet ligebenet Trekant er halv saa stor som Grundlinien.
16. I en Trekant ABC er $\angle A = 108^{\circ}$. Højderne BE og CD forlænges, saa de skærer hinanden i O . Find Vinklerne i $\triangle DBO$. Vis, at to af Linierne paa Figuren er Højder i $\triangle BOC$.
17. Bevis, at en Trekant er ligebenet, naar een af Siderne er parallel med Aksen i den modstaaende Vinkels Nabovinkel.
18. To parallelle Linier skæres af en tredie Linie. Bevis, at Akserne i et Par ensliggende Vinkler er parallelle, og at Akserne i et Par uensliggende Vinkler er vinkelrette paa hinanden.
19. I en Trekant ABC er $\angle A = 84^{\circ}$ og $\angle B = 43^{\circ}$. Gennem A , B og C trækkes Linier parallelle med de modstaaende Sider. Find Vinklerne i den Trekant, som begrænses af disse Linier.
20. Konstruer en Vinkel paa 60° , 30° , 15° , 75° .
21. Konstruer en Trekant, hvis to Vinkler er 60° og $67^{\circ} 30'$, naar den hosliggende Side skal være 11 cm.
22. Nabovinklen til en Vinkel i en Trekant er fire Gange saa stor som een af de andre Vinkler i Trekanten.

- Konstruer en Linie, som deler Trekanten i to ligebenede Trekanter.
23. Bevis, at i en ligebenet Trekant er:
 - a) to af Højderne lige store,
 - b) to af Medianerne lige store,
 - c) to af Vinkelakserne lige store.
 24. Bevis, at en Trekant er ligebenet, naar to af dens Højder er lige store.
 25. Bevis, at Korden til en Bue paa 60° er lig Cirkelns Radius.
 26. Naar en retvinklet Trekant har en Vinkel paa 30° , er dens mindste Katete halv saa stor som Hypotenusen. Bevis det.
 27. Bevis, at Diameteren i en Cirkel er større end enhver anden Korde i Cirklen.
 28. O er Centrum i en Cirkel, og P er et Punkt, som ikke ligger paa dens Periferi. Bevis, at det Punkt af Cirkelperiferien, som ligger nærmest ved P , og det Punkt af Cirkelperiferien, som ligger fjernest fra P , ligger paa Linien PO .
 29. For Cirkelbuer, som hører til samme Cirkel og hver for sig er mindre end 180° , gælder det, at til en større Bue hører en større Korde og omvendt. Bevis det.
 30. ABC er en given Trekant. Tegn en vilkaarlig Linie og konstruer den Trekant, som ligger symmetrisk med Trekant ABC med Hensyn til Linien.
 31. Hvilke Linier vil dele en ligesidet Trekant i to symmetriske Dele?
-

D. Firkanter.

30. a. *Summen af Vinklerne i en Firkant er lig 360° .*



En Diagonal deler Firkanten i to Trekanter, hvis Vinkler tilsammen udgør Firkantens Vinkler; og Summen af to Trekanters Vinkler er lig 360° . Fra en Vinkelspids i en n -kant kan man trække $(n - 3)$ Dia-

gonaler, derved deles Polygonen i $(n - 2)$ Trekanter, hvis Vinkler tilsammen udgør Polygonens Vinkelsum; altsaa: *Summen af Vinklerne i en n -kant er $(n - 2) 180^\circ$.*

b. *Enhver Side i en Firkant er mindre end Summen af de andre.*

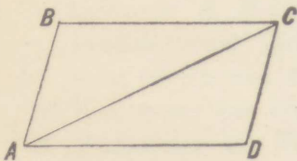
Man har $AD < AC + CD < AB + BC + CD$.

Paa lignende Maade kan man bevise, at i en hvilken som helst Polygon er enhver Side mindre end de andres Sum.

Et Trapez er en Firkant, hvori eet Par Sider er parallelle. Naar det andet Par Sider er lige store, kaldes Trapezet ligebenet.

Et Parallelogram er en Firkant, hvori begge Sidepar er parallelle.

31. a. *Enhver af Diagonalerne i et Parallelogram deler det i to kongruente Trekanter.*



$\angle BAC = \angle DCA$, fordi

$AB \neq DC$.

$\angle BCA = \angle DAC$, fordi

$BC \neq AD$.

$AC = CA$.

Altsaa er $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

b. *I et Parallelogram er de modstaaende Sider lige store. De ligger over for lige store Vinkler i kongruente Trekanter.*

c. I et Parallelogram er de modstaaende Vinkler lige store. Thi deres ensbenævnte Ben er parallelle.

d. Diagonalerne i et Parallelogram halverer hinanden.

Man har $\angle x = \angle u$,

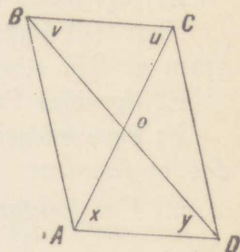
$\angle y = \angle v$

og $AD = CB$.

Altsaa er $\triangle AOD \cong \triangle COB$.

Deraf $AO = OC$

og $DO = OB$.



32. a. Naar begge Par modstaaende Sider i en Firkant er lige store, er Firkanten et Parallelogram.

Naar man trækker en Diagonal, faar man to Trekanten, som ifølge 25 b er kongruente.

b. Naar et Par Sider i en Firkant er baade lige store og parallelle, er Firkanten et Parallelogram.

Naar man trækker en Diagonal, faar man to Trekanten, som er kongruente ifølge 24 b.

c. Naar begge Par modstaaende Vinkler i en Firkant er lige store, er Firkanten et Parallelogram.

Givet $A = C$

og $B = D$.

Deraf $A + B = C + D$.

Men $A + B + C + D = 360^\circ$. 30a.

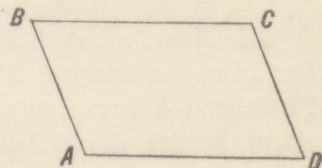
Altsaa $A + B = 180^\circ$

og $AD \neq BC$.

Af $B = D$ og $A + B = 180^\circ$

faar man $A + D = 180^\circ$

eller $AB \neq DC$.



d. En Firkant, hvis Diagonaler halverer hinanden, er et Parallelogram.

Bevises ved, at man trækker begge Diagonaler og viser, at et Par af de smaa Trekanten er kongruente.

33. Naar een Vinkel i et Parallelogram er ret, vil de andre tre ogsaa være det. 31 c, 30 a.

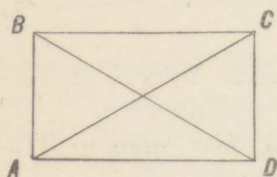
Et retvinklet Parallelogram kaldes et *Rektangel*.

Naar eet Par sammenstødende Sider i et Parallelogram er lige store, er alle fire Sider lige store. 31 b.

Et ligesidet Parallelogram kaldes en *Rhombe*.

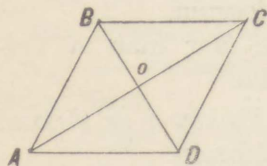
Et Parallelogram, som er ligesidet og retvinklet, kaldes et *Kvadrat*.

a. I et Rektangel er Diagonalerne lige store.



Givet $\angle BAD = \angle ADC$
 $BA = CD$
 og $AD = DA$.
 Altsaa er $\triangle BAD \cong \triangle CDA$
 og $BD = CA$.

b. I en Rhombe er Diagonalerne vinkelrette paa hinanden, og de halverer Rhombens Vinkler.



$\triangle BCD$ er ligebenet.
 CO er Median til Grundlinien,
 ifølge 19 a er CO da Højde og
 Vinkelhalveringslinie.

34. Naar a og b er to parallelle Linier, har alle Punkter i a samme Afstand fra b ifølge 31 b, og alle Punkter i b har den samme Afstand fra a . Denne Afstand kaldes de to Liniers Afstand fra hinanden eller *Afstanden mellem Linierne*. Man faar da følgende Sætning:

a. To parallelle Linier har overalt samme Afstand fra hinanden.

b. Naar to Punkter ligger paa samme Side af en ret Linie og har samme Afstand fra den, er deres Forbindelseslinie parallel med den. 32 b.

c. Naar flere Parallelere afskærer lige store Stykker paa een ret Linie, vil de ogsaa afskære lige store Stykker paa enhver anden ret Linie, som skærer dem.

Givet $AB = BC$.

Bevis at $DE = EF$.

Gennem D og E trækkes Linier parallelle med AC . Man har da

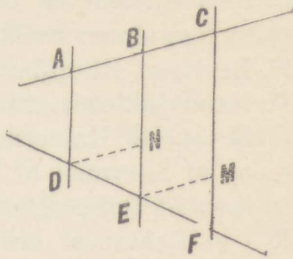
$$DN = EM \quad 31 \text{ b}$$

$$\angle NED = \angle MFE$$

og $\angle EDN = \angle FEM$,

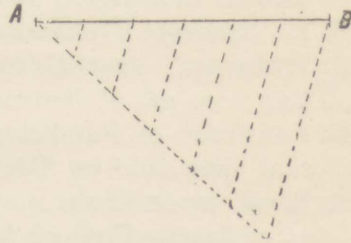
altsaa er $\triangle DNE \cong \triangle EMF$

og $DE = EF$.



d. Del et givet Liniestykke i 6 lige store Dele.

Gennem det ene Endepunkt A tegnes en vilkaarlig Halvlinie, og ud ad den afsætter man en vilkaarlig Længdeenhed 6 Gange; man trækker da en Linie fra det sidste Delingspunkt til B , og gennem de andre Punkter



trækkes Linier, der er parallelle med den; disse Linier vil ifølge c dele AB i 6 lige store Dele.

Opgaver.

32. Det ene Par modstaaende Vinkler i et Trapez er 45° og 130° . Find de andre Vinkler.

33. Gennem Diagonalernes Skæringspunkt i et Parallelogram trækkes en vilkaarlig Linie, som skærer det ene Par modstaaende Sider og det andet Par modstaaende Siders Forlængelser.

Bevis, at

a) de fire Skæringspunkter har to og to samme Afstand fra Diagonalernes Skæringspunkt.

b) Linien deler Parallelogrammet i kongruente Firkanter.

34. Bevis følgende:

a) I et ligebenet Trapez er Vinklerne to og to lige store.

b) I et ligebenet Trapez er Diagonalerne lige store.

35. I en Firkant er de to Sider parallelle og de andre to lige store; hvilken Slags Firkant kan det være?
36. Bevis, at Rhombens Højder er lige store.
37. Nabovinklerne til et Rektangels Vinkler halveres. Bevis, at Halveringslinierne begrænser et Kvadrat, og at Summen af Kvadratets Diagonaler er lig Summen af Rektanglets Sider.
38. I et Rektangel er indskrevet et Parallelogram, hvis Sider er parallelle med Rektanglets Diagonaler. Bevis, at Summen af Parallelogrammets Sider er lig Summen af Rektanglets Diagonaler.
39. En ligebenet Trekants Omkreds er given. Konstruer Trekanten, naar Grundlinien skal være halv saa lang som eet af Benene.
40. Konstruer et Parallelogram, [naar een af Vinklerne skal være 105° og Siderne skal have givne Længder.
41. Bevis, at de Linier, som halverer Nabovinklerne til en vilkaarlig Firkants Vinkler, begrænser en Firkant, hvis modstaaende Vinkler er Supplementvinkler.
42. Konstruer en Rhombe af en Diagonal og Højden.

E. Cirkler.

35. a. *En ret Linie kan ikke have mere end to Punkter fælles med en Cirkelperiferi.* Thi fra et Punkt til en Linie kan der ikke gaa mere end to Liniestykker af samme Længde. 26 c.

En Linie, der har eet og kun eet Punkt fælles med en Cirkelperiferi, kaldes en *Tangent*; det fælles Punkt kaldes et *Røringspunkt*, og Tangenten og Cirklen siges at *røre* hinanden i dette Punkt.

En Linie, der har to Punkter fælles med en Cirkelperiferi, kaldes en *Sekant*. Sekanten og Cirklen siges at *skære* hinanden i de to Punkter.

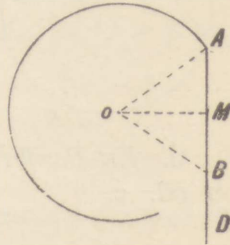
b. Naar en Linie gaar gennem Endepunktet af en Diameter og er vinkelret paa Diameteren, er Linien Tangent til Cirklen.

Ethvert andet Punkt af Linien vil nemlig have en Afstand fra Centrum, som er større end Radius, fordi Afstanden er en Skraalinie.

c. Naar en Linie gaar gennem Endepunktet af en Diameter og ikke er vinkelret paa Diameteren, er Linien en Sekant.

Givet $\angle OAD < 90^\circ$.

Fra O nedfældes OM vinkelret paa AD, og MB afsættes lig MA, man har da $OB = OA$, altsaa ligger B paa Cirklen.



Af b og c faar man:

d. Gennem ethvert Punkt af en Cirkelperiferi kan der tegnes een og kun een Tangent, og den er vinkelret paa Radius til Røringspunktet.

e. Diameteren vinkelret paa en Korde halverer Korden og Buerne. 26 c.

36. En Vinkel, der har sit Toppunkt i en Cirkels Centrum, kaldes en Centervinkel.

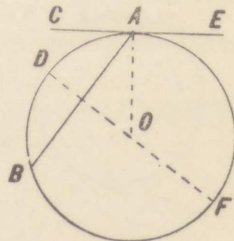
a. En Centervinkel maales ved sin Bue. Det vil sige den er lige saa mange Grader som den Bue, den spænder over. 11.

b. En Vinkel, der dannes af en Tangent og en Korde, maales ved Halvdelen af den Bue, den spænder over.

Tangenten CE rører Cirklen i A.

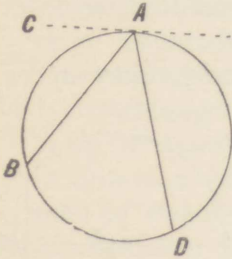
OA er vinkelret paa CE og FD er vinkelret paa AB.

- 1) Man har $\angle CAB + \angle BAO = 90^\circ$
og $\angle DOA + \angle BAO = 90^\circ$
Deraf $\angle CAB = \angle DOA = \frac{1}{2} \cup AB$
- 2) Man har $\angle EAB = 90^\circ + \angle OAB$
og $\angle FOA = 90^\circ + \angle OAB$.
Altsaa $\angle EAB = \angle FOA$
eller $\angle EAB = \frac{1}{2} \cup AFB$.



En Vinkel, hvis Toppunkt ligger i en Cirkelperiferi, og hvis Ben er Korder, kaldes en *Periferivinkel*.

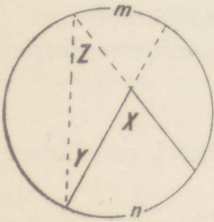
c. En Periferivinkel maales ved Halvdelen af den Bue, den spænder over.



$$\begin{aligned}\angle CAD &= \frac{1}{2} \cup ABD \text{ ifølge b} \\ \angle CAB &= \frac{1}{2} \cup AB \\ \text{Altsaa } \angle BAD &= \frac{1}{2} \cup BD.\end{aligned}$$

d. En Periferivinkel, der spænder over en Diameter, er ret. c.

37. a. En Vinkel, hvis Toppunkt ligger inden for Cirkelperiferien, maales ved den halve Sum af de Buer, som den og dens Topvinkel spænder over.



$$y = \frac{1}{2} \cup m$$

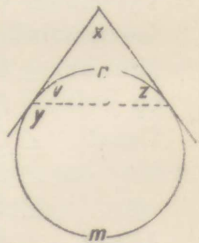
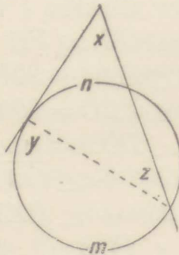
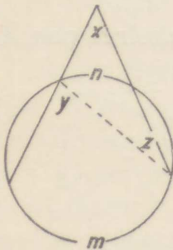
$$z = \frac{1}{2} \cup n \quad 36 \text{ c.}$$

$$\text{Deraf } y + z = \frac{1}{2} (\cup m + \cup n),$$

$$\text{men } x = y + z.$$

$$\text{Altsaa } x = \frac{1}{2} (\cup m + \cup n).$$

b. En Vinkel, hvis Toppunkt ligger uden for Cirklen, maales ved den halve Forskel mellem de Buer, den spænder over.



Man har $x + z = y$
 eller $x = y - z.$

Naar man i denne Ligning for y indsætter $\frac{1}{2} \cup m$
 og for z indsætter $\frac{1}{2} \cup n$, faar man

$$x = \frac{1}{2} \cup m - \frac{1}{2} \cup n = \frac{1}{2} (\cup m - \cup n).$$

Vinklen mellem to Tangenter kaldes en *Tangentvinkel*. Den Korde, som forbinder Tangenternes Røringspunkter, kaldes *Røringskorden*.

c. *Tangentvinklen er 180° minus den mindste Bue.*

Man har $v = \frac{1}{2} \cup n$
 og $z = \frac{1}{2} \cup n.$
 Deraf $v + z = \cup n.$

Men $x = 180^\circ - (v + z) = 180^\circ - \cup n.$

d. *Tangentvinklens Toppunkt har samme Afstand fra de to Røringspunkter.*

Thi $\angle v = \angle z.$

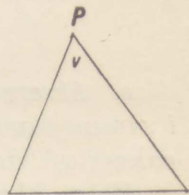
e. *Forbindelseslinien mellem Tangentvinklens Toppunkt og Cirkelns Centrum er Akse baade for Røringskorden og for Tangentvinklen.*

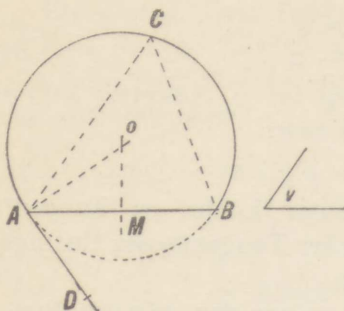
Thi Centrum og Tangentvinklens Toppunkt har hver for sig samme Afstand fra Røringspunkterne.

38. Naar Halvlinierne fra et Punkt og gennem et givet Liniestykkes Endepunkter danner en Vinkel lig v , siger man, at man fra Punktet ser det givne Liniestykke under Vinklen v .

At en Cirkelbue rummer en given Vinkel vil sige, at enhver Periferivinkel, hvis Toppunkt ligger i Buen, og hvis Ben gaar gennem Buens Endepunkter, er lig den givne Vinkel.

Konstruer en Cirkelbue, som har et givet Liniestykke til Korde og rummer en given Vinkel.





Givet AB og $\angle v$.

$\angle DAB$ afsættes lig $\angle v$.

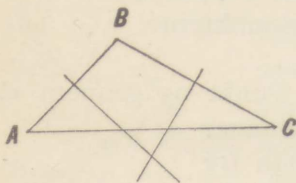
Den søgte Cirkelbue har da AB til Korde og AD til Tangent. Centrum er derfor Skæringspunktet mellem AB 's Akse og en Linie gennem A vinkelret paa AD .

$\angle C = \angle v$, fordi de hver er lig $\frac{1}{2} \cup AB$.

Paa den anden Side af AB kan man ogsaa tegne en Cirkelbue, som har AB til Korde og rummer $\angle v$. Fra ethvert Punkt i en af disse Buer ser man AB under Vinklen v ; men fra ethvert Punkt, som ikke ligger i nogen af Buerne, ser man AB under en Vinkel, der er større eller mindre end v .

Hvis $\angle v = 90^\circ$, er hver Bue en Halvcirkel, og de to Halvcirkler udgør en Cirkel med AB til Diameter.

39. Akserne for to af Siderne i en Trekant vil altid skære hinanden, 15 b. Skæringspunktet har samme Afstand fra alle Vinkelspidserne, 27 a.



Det har altsaa samme Afstand fra den tredje Sides Endepunkter, derfor ligger det paa den tredje Sides Akse. Man faar da:

a. Akserne for en Trekants tre Sider skærer hverandre i samme Punkt, og Skæringspunktet ligger lige langt fra enhver af Vinkelspidserne.

Ifølge 27 b kan intet andet Punkt have samme Afstand fra de tre Vinkelspidser. Altsaa:

b. Gennem en Trekants Vinkelspidser kan tegnes een og kun een Cirkel.

Af b og 35 a faar man:

c. To Cirkler kan ikke skære hinanden i mere end to Punkter.

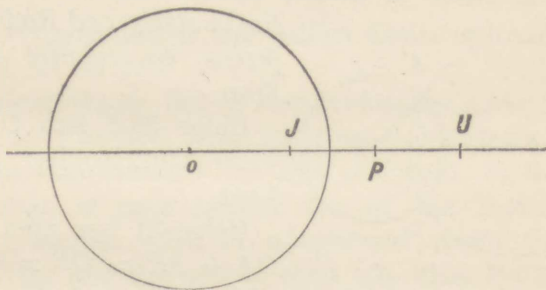
d. Naar to Cirkler skærer hinanden, ligger Skæringspunkterne symmetrisk med Hensyn til Centerlinien. Thi hvert Centrum har samme Afstand fra de to Skæringspunkter.

To Cirkler, som har eet og kun eet Punkt fælles, siges at røre hinanden, og det fælles Punkt kaldes et Røringspunkt.

e. Naar to Cirkler rører hinanden, ligger Røringspunktet i Centerlinien eller dens Forlængelse.

Thi, hvis de havde et Punkt fælles uden for Centerlinien, vilde de ogsaa have det Punkt fælles, som ligger symmetrisk dermed med Hensyn til Centerlinien.

40. a. Naar to Cirklers Centerlinie i Størrelse ligger mellem Radiernes Sum og deres Differens, skærer Cirklerne hinanden.



Radierne er R og r , og Centerlinien er c . $R > r$. Den mindste Cirkel skærer Linien gennem Centrene i to Punkter U og J , $OU > OJ$.

Man har $OU = c + r$,
 men $c + r > R$, da $c > R - r$,
 altsaa $OU > R$.

Man har enten	$OJ = c - r$	
eller	$OJ = r - c,$	
men	$c - r < R,$	da $c < R + r,$
og	$r - c < R,$	da $r < R,$
altsaa	$OJ < R.$	

J ligger altsaa inde i den store Cirkel, og U ligger uden for den; enhver af de to Buer JU vil da skære den.

b. Naar to Cirklers Centerlinie er lig Radiernes Sum, rører Cirklerne hinanden udvendig.

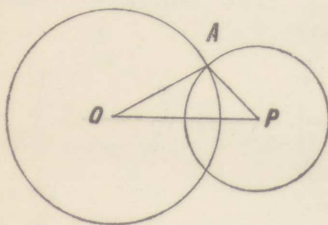
c. Naar to Cirklers Centerlinie er lig Radiernes Differens, rører den ene Cirkel den anden indvendig.

I begge Tilfælde har de to Cirkler et Punkt fælles paa Linien gennem Centrene. Ifølge 39 d kan de da ingen andre Punkter have fælles.

d. Naar to Cirklers Centerlinie er større end Radiernes Sum, ligger Cirklerne uden for hinanden.

e. Naar to Cirklers Centerlinie er mindre end Radiernes Differens, ligger den ene Cirkel inden i den anden.

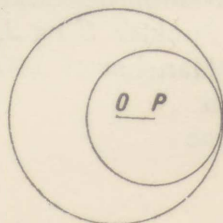
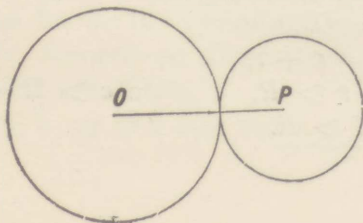
41. a. Naar to Cirkler skærer hinanden, er Centerlinien større end Radiernes Differens og mindre end deres Sum.



Ifølge 39 d kan O , A og P være Vinkelspidser i en Trekant.

Ifølge 21 har man da
 $OA + AP > OP > OA - AP.$

b. Naar to Cirkler rører hinanden udvendig, er Centerlinien lig Radiernes Sum. 39 e.



c. Naar den ene af to Cirkler rører den anden indvendig, er Centerlinien lig Radiernes Differens. 39 c.

d. Naar to Cirkler ligger uden for hinanden, er Centerlinien større end Radiernes Sum.

e. Naar en Cirkel ligger helt inden i en anden, er Centerlinien mindre end Radiernes Differens.

F. Geometrisk Konstruktion.

42. Følgende Grundsætninger benyttes:

a. Man kan tegne en ret Linie gennem to bekendte Punkter.

b. Man kan tegne en Cirkel, naar man kender Centrum og Radius.

At konstruere en Figur er at tegne en Figur, der opfylder visse Betingelser, saaledes at man ved Udførelsen ikke benytter andre Linier end dem, der er nævnt i a og b.

I det foregaaende er der udført Konstruktioner i 13, 14, 16, 22, 23 og 24.

Den væsentligste Del af Konstruktionen gaar ud paa at finde de Punkter, som bestemmer Figurens Linier. Naar man skal kunne lade et Punkt, er det ikke tilstrækkeligt, at man kender een af dets Egenskaber. Der vil i Reglen være et ubegrænset Antal Punkter, som opfylder een Betingelse; men alle disse Punkter vil tilsammen danne en Figur, som bestaar af een eller flere Linier, der kan være rette, krumme eller brudte.

En saadan Figur, hvis Punkter alle opfylder en bestemt Betingelse, som intet andet Punkt opfylder, kaldes det geometriske Sted for de Punkter, der opfylder denne Betingelse.

I. Det geometriske Sted for de Punkter, der har en given Afstand fra et givet Punkt, er en Cirkel med det

givne Punkt til Centrum og den givne Afstand til Radius. 7.

II. Det geometriske Sted for de Punkter, der har en given Afstand fra en given Linie, er to Linier, som er parallelle med den givne og har den givne Afstand fra den. 34 a og b.

III. Det geometriske Sted for de Punkter, der har samme Afstand fra to givne Punkter, er Aksen for de givne Punkters Forbindelseslinie. 27 a og b.

IV a. Det geometriske Sted for de Punkter, der har samme Afstand fra to Linier, som skærer hinanden, er to paa hinanden vinkelrette Linier, som halverer Vinklerne mellem de givne Linier. 27 c og d.

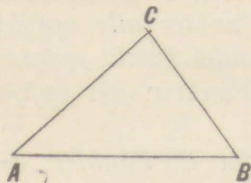
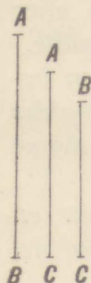
b. Det geometriske Sted for de Punkter, der har samme Afstand fra to givne parallelle Linier, er een Linie parallel med dem og midt imellem dem.

V a. Det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra man ser et givet Liniestykke under en given Vinkel, er to Cirkelbuer, som har det givne Liniestykke til Fælleskorde og rummer den givne Vinkel.

b. Det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra man ser et givet Liniestykke under en ret Vinkel, er en Cirkel over Liniestykket som Diameter. 38.

Naar et Punkt skal opfylde to Betingelser, og der til hver af disse Betingelser svarer een af de ovennævnte geometriske Steder, kan man altsaa konstruere Punktet som Skæringspunkt mellem disse geometriske Steder.

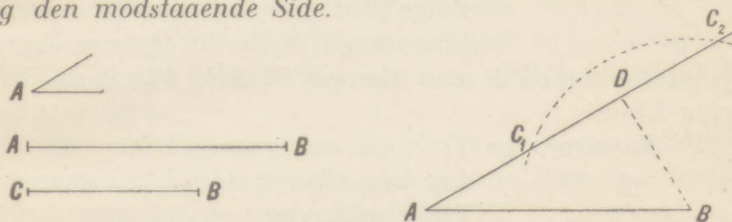
43 a. Konstruer en Trekant af de tre Sider.



Paa en vilkaarlig Linie afsættes den største Side AB , og man finder C . Et geometrisk Sted for C er en Cirkel med A som Centrum og AC som Radius, det andet

er en Cirkel med B som Centrum og BC som Radius. De to Cirkler skærer hinanden i to Punkter, naar $AC + BC > AB$; men de to Trekanter er kongruente. Der er altsaa een Løsning, naar $AC + BC > AB$, ellers ingen.

b. *Konstruer en Trekant af en Vinkel, en hosliggende og den modstaaende Side.*



Man afsætter først $\angle A$ og den hosliggende Side AB . Punktet C skal da findes. Et geometrisk Sted for C er $\angle A$'s venstre Ben; det andet er en Cirkel med B til Centrum og BC som Radius. Med de opgivne Stykker faar man to Løsninger: $\triangle ABC_1$ og $\triangle ABC_2$.

Vi vil undersøge om Løsningernes Antal er det samme, naar de givne Stykker har andre Værdier.

BD tegnes vinkelret paa AC .

I. $\angle A < 90^\circ$.

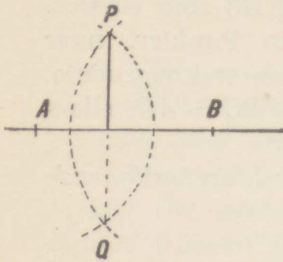
- 1) Naar $BC < BD$ er der ingen Løsning.
- 2) Naar $BC = BD$ er der 1 L.
- 3) Naar $BA > BC > BD$ er der 2 L.
- 4) Naar $BC \geq BA$ er der 1 L.

II. $\angle A \geq 90^\circ$.

Opgaven kan da kun løses, naar $BC > BA$, og den har ikke mere end een Løsning.

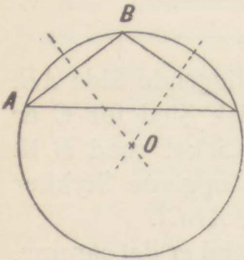
En saadan Undersøgelse af, hvor mange Løsninger en Opgave har, og om den altid er mulig, kaldes en *Diskussion*.

44 a. *Fra et givet Punkt skal man nedfælde en vinkelret paa en given Linie.*



symmetrisk med P med Hensyn til AB . PQ er da den søgte Linie.

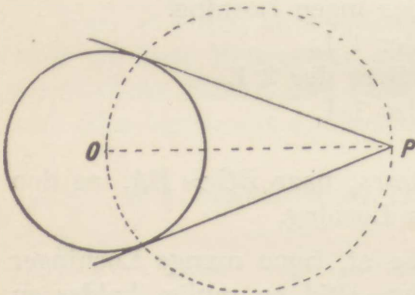
b. *Konstruer en Trekants omskrevne Cirkel*; det vil sige den Cirkel, som gaar gennem Vinkelspidserne.



Man konstruerer AB 's og BC 's Akser; deres Skæringspunkt er Centrum, og OA er Radius.

Skal man finde Centrum til en given Cirkelbue, vælger man tre Punkter i Buen og bestemmer Centrum for Cirklen gennem dem.

c. *Fra et givet Punkt skal man konstruere Tangenter til en given Cirkel.*



P er det givne Punkt, O er den givne Cirkels Centrum. Røringspunktet skal ligge saaledes, at man derfra ser OP under en ret Vinkel. Derfor er det ene geometriske Sted for Røringspunktet Cirklen over OP som Diameter; det andet geo-

metriske Sted er den givne Cirkel.

Opgaven kan aldrig faa mere end to Løsninger. Hvis P ligger uden for den givne Cirkel, har Opgaven to Løsninger; ligger P i den givne Cirkelperiferi, har

Opgaven kun een Løsning, nemlig Linien gennem P vinkelret paa OP ; ligger P inden for den givne Cirkelperiferi, er Opgaven umulig.

45. Naar de Egenskaber, den forlangte Figur skal have, ikke har med dens Beliggenhed at gøre, kaldes Konstruktionsopgaven en *Figuropgave*. 43 a og b.

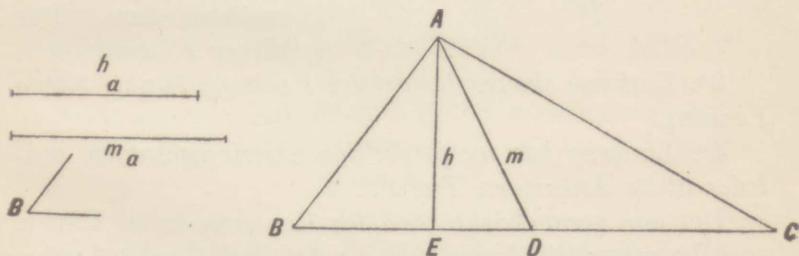
Skal den forlangte Figur derimod have en bestemt Beliggenhed, kaldes Opgaven en *Beliggenhedsopgave*. 44 a, b og c.

Ved en Figuropgave regnes kongruente Løsninger for samme Løsning; men det gør de ikke ved en Beliggenhedsopgave.

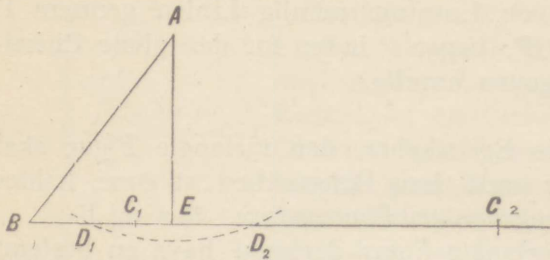
Naar man skal løse en Konstruktionsopgave, kan man ofte benytte følgende Fremgangsmaade:

- I. Man tegner en Modelfigur, det vil sige en Figur, som ligner den søgte. Paa Modelfigurer opsøger man en Trekant med tre bekendte Stykker, eller man søger paa anden Maade at udlede en Løsning.
- II. Man udfører Konstruktionen og forklarer, hvorledes den udføres.
- III. Man beviser, at Konstruktionen er rigtig, ved at vise, at Figuren har de forlangte Egenskaber.
- IV. Man diskuterer Opgaven.

Eksempel: Konstruer en Trekant af h_a , m_a og B .



I $\triangle ABE$ kender man h , $\angle B$ og $\angle E$, denne Trekant kan altsaa konstrueres.



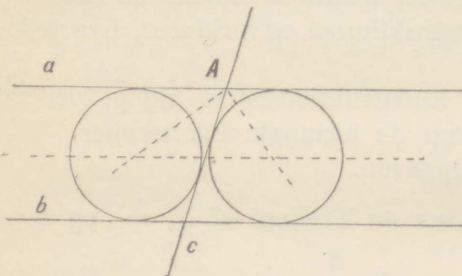
Punktet D er da Skæringspunktet mellem BE og Cirklen med A til Centrum og m_a til Radius. Man finder i dette Tilfælde to Punkter. C finder man ved at benytte, at $BD = DC$. Enhver af Trekkanterne ABC_1 og ABC_2 indeholder de givne Stykker. Hvis $m_a > BA$, eller $m_a = h_a$, er der kun een Løsning; hvis $m_a < h_a$, er der ingen Løsning.

46. Konstruer en Cirkel, som rører tre givne rette Linier.

1°. De tre Linier er parallelle. Opgaven er da umulig.

2°. To af Linierne er parallelle, og den tredje skærer dem.

Givet a , b og c .



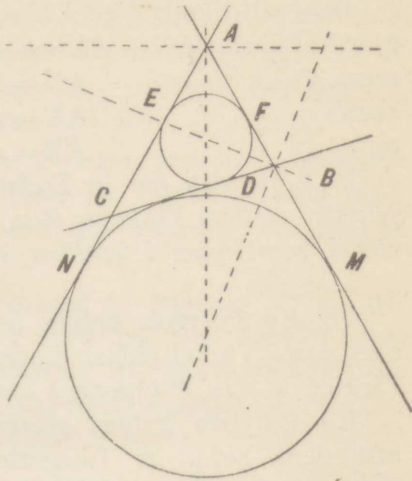
Et geometrisk Sted for Centrum er de Linier, som halverer Vinklerne ved A ; det andet er en Linie, som er parallel med a og b og ligger midt mellem dem. Der bliver 2 Løsninger.

3°. Linierne skærer hverandre i samme Punkt. Ingen Løsning.

4°. Linierne har tre forskellige Skæringspunkter, saaledes at de danner en Trekant.

Det ene geometriske Sted for Centrum er de Linier, som halverer Vinklerne ved A ; det andet er de Linier, som halverer Vinklerne ved B . Der bliver 4 Skæringspunkter mellem det første og det andet geometriske

Sted, og Opgaven har altsaa 4 Løsninger. Radius i enhver af Cirklerne findes ved, at man fra Centrum nedfælder den vinkelrette paa een af de givne Linier. Som andet geometrisk Sted kunde man ogsaa have benyttet de Linier, som halverer Vinklerne ved C ; men ifølge 27 c og d vil de skære det første geometriske Sted i de samme 4 Punkter.



Den Cirkel, som rører selve Siderne i Trekant ABC , kaldes *Trekantens indskrevne Cirkel*. De tre andre kaldes *Trekantens udvendige Røringscirkler*.

Man har $AF = AE$
 $BF = BD$
 $CD = CE$

Sættes	$AF = x$, $BF = y$ og $CD = z$,	
faar man	$x + y = c$	1
	$x + z = b$	2
	$y + z = a$	3.

Deraf faar man $2x + 2y + 2z = a + b + c$.

Sættes $a + b + c = 2s$,

faar man $2x + 2y + 2z = 2s$

eller $x + y + z = s$.

Naar man fra denne Ligning efterhaanden subtraherer 1, 2 og 3, faar man $z = s - c$

$$y = s - b$$

$$x = s - a$$

eller

a. Afstanden fra en Trekants Vinkelspids til Røringspunktet mellem Vinklens Ben og den indskrevne Cirkel er lig s minus den modstaaende Side.

De to Forlængelser CN og BM er tilsammen lig a .
 Man har derfor $AN + AM = a + b + c = 2s$,

men $AN = AM$,

altsaa $AN = s$

og $AM = s$ eller

b. Afstanden fra en Trekants Vinkelspids til Røringspunktet mellem Vinklens Ben og den udvendige Røringscirkel, som ligger i Vinklen, er lig s .

47. En Polygon kaldes *indskreven i en Cirkel*, naar alle dens Vinkelspidser ligger paa Cirkelperiferien, og Cirklen kaldes *Polygonens omskrevne Cirkel*.

En Polygon kaldes *omskreven om en Cirkel*, naar alle dens Sider er Tangenter til Cirklen, og Cirklen kaldes *Polygonens indskrevne Cirkel*.

a. I en indskreven Firkant er de modstaaende Vinkler Supplementvinkler.

Et Par modstaaende Vinkler er nemlig Periferivinkler, som tilsammen maales ved Halvdelen af Cirkelperiferien.

b. Naar et Par modstaaende Vinkler i en Firkant er Supplementvinkler, kan der omskrives en Cirkel om Firkanten.

Beviset herfor forbigaaes.

Af a og b faar man:

c. Ethvert Rektangel, men intet andet Parallelogram, har en omskreven Cirkel.

d. I en omskreven Firkant er Summen af det ene Par modstaaende Sider lig Summen af det andet Par.

Bevises ved 37 d.

e. Naar Summen af det ene Par modstaaende Sider i en Firkant er lig Summen af det andet Par, kan der indskrives en Cirkel i Firkanten.

Beviset herfor forbigaaes.

Af d og e faar man:

f. Enhver Rhombe, men intet andet Parallelogram, har en indskreven Cirkel.

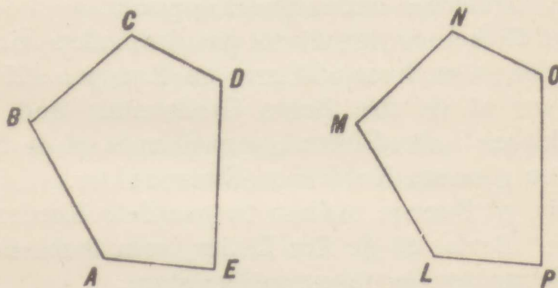
48. I 22, 23, 24 og 43 har vi set, at naar man skal konstruere en Trekant, er det tilstrækkeligt, at man af dens Sider og Vinkler kender tre, saafremt der mellem de kendte Stykker er mindst een Side.

Skal man konstruere en Firkant, maa man kende 5 Stykker; skal man konstruere en Femkant, maa man kende 7 Stykker o. s. v. Man har følgende almindelige Sætninger:

a. Naar man skal konstruere en Polygon, er det tilstrækkeligt, at man kender dens Sider og Vinkler undtagen tre paa hverandre følgende. De ubekendte Stykker kan altsaa enten være en Side og de hosliggende Vinkler eller en Vinkel og de hosliggende Sider.

b. To Polygoner er kongruente, naar de har deres Sider og Vinkler stykkevis lige store i samme Orden. Det er endda overflødigt at vide noget om tre paa hverandre følgende Par Stykker.

Som Eksempel tager vi to Femkanter.



Givet

$$AB = LM, \angle B = \angle M,$$

$$BC = MN, \angle C = \angle N,$$

$$CD = NO, \angle D = \angle O,$$

$$DE = OP.$$

Femkanten $LMNOP$ lægges paa $ABCDE$, saaledes at LM dækker AB ; MN vil da falde ud ad BC , fordi $\angle M = \angle B$ o. s. v.

Opgaver.

43. I en Cirkel er indskreven en Trekant ABC , hvori $\angle A = 72^\circ$ og $\angle B = 44^\circ$. Find Vinklerne i den Trekant, som begrænses af Tangenterne gennem A , B og C .
44. I $\triangle ABC$ er $\angle A = 48^\circ$ og $\angle B = 81^\circ$. En udvendig Røringscirkel rører Siden BC i P og de to andre Siders Forlængelser i N og M . Find Vinklerne i Trekant NMP .
45. To lige store Cirkler rører hinanden. Bevis, at de afskærer lige store Korder paa en vilkaarlig Linie gennem Røringspunktet.
46. En ligesidet Trekant er indskreven i en Cirkel, og Midtpunkterne af de to Buer er forbundne. Bevis, at Forbindelseslinien deles i tre lige store Stykker af Trekantssiderne.
47. To Cirkler skærer hinanden; fra deres ene Skæringspunkt drages Diametre. Bevis, at den Linie, som forbinder Diametrenes andre Endepunkter, gaar gennem Cirklernes andet Skæringspunkt.
48. I en Cirkel er tegnet to paa hinanden vinkelrette Korder, som hver afskærer en Bue paa 125° . Find enhver af de fire Buers Gradeantal; find dernæst Vinklerne i den Firkant, som dannes af de fire Tangenter gennem Kordernes Endepunkter.
49. Bevis, at Buerne mellem to parallelle Korder er lige store. Bevis, at de fire Linier, som forbinder deres Endepunkter, er to og to lige store.
50. Trekant ABC er indskreven i en Cirkel. M er Midtpunktet af Buen AB , og O er Centrum for Trekantens indskrevne Cirkel. Bevis, at $AM = MO$.
51. Til en Cirkel trækkes tre Tangenter, hvoraf de to er parallelle, medens den tredie skærer dem i A og B . Bevis, at man fra Centrum ser AB under en ret Vinkel.
52. To Trekanter har en Vinkel, en hosliggende og den

modstaaende Side stykkevis lige store, men er ikke kongruente. Bevis, at deres omskrevne Cirkler er kongruente.

53. Trekant ABC er indskreven i en Cirkel. Tangenten gennem A skærer BC 's Forlængelse i D , og $\angle D$'s Halveringslinie skærer Siden AB i N og Siden AC i M . Bevis, at $\triangle ANM$ er ligebenet.
54. En indskreven Firkants Diagonaler skærer hinanden i O , det ene Par Siders Forlængelser skærer hinanden i N og det andet Par Siders Forlængelser skærer hinanden i M . $\angle M$'s Halveringslinie skærer det ene Par Sider i G og H og Diagonalerne i E og F . Bevis, at $NG = NH$ og $OE = OF$.
55. En Firkant $ABCD$ er indskreven i en Cirkel. De Linier, som halverer Firkantens Vinkler, skærer Cirklen i M , N , O og P . Bevis, at Firkant $MNOP$ er et Rektangel.
56. I $\triangle ABC$ skærer h_a og h_b hinanden i O , og h_a 's Forlængelse skærer den omskrevne Cirkel i P . Bevis, at O og P ligger symmetrisk med Hensyn til Siden a . Bevis dernæst, at h_c ogsaa gaar gennem O .
57. Konstruer en Trekant, hvis to Vinkler er $67^\circ 30'$ og 75° , naar den hosliggende Side skal være lig en given Linie a .
58. Konstruer et Parallelogram af en Side og Diagonalerne.
59. Konstruer et Parallelogram af Diagonalerne og en Højde.
60. Konstruer en Trekant af a , b og m_c .
61. Konstruer et Parallelogram af Siderne og Vinklen mellem Diagonalerne.
62. Konstruer en Trekant af en Vinkel og de hosliggende Siders Afstand fra Højdernes Skæringspunkt.
63. Konstruer en Firkant $ABCD$ af AB , AC , AD , $\angle A$ og $\angle C$.
64. Konstruer en omskrivelig Firkant $ABCD$ af AB , BC , CD og $\angle B$.

65. Konstruer en Trekant, naar man kender to Vinkler og den tredie Vinkels Halveringslinie.
66. Der er givet en Cirkel og et Punkt A uden for den. Man skal omskrive en retvinklet Trekant ABC om Cirklen, saaledes at $\angle A$ bliver den ene spidse Vinkel.
67. Konstruer en Trekant ABC , naar der er givet:
- | | |
|----------------------|-------------------------|
| 1) A, B og r . | 6) B, h_a og R . |
| 2) A, b og r . | 7) v_A, h_a og c . |
| 3) A, b og h_a . | 8) a, b og m_b . |
| 4) A, B og R . | 9) a, A og m_a . |
| 5) a, h_a og R . | 10) a, h_b og h_c . |
68. Der er givet fire Punkter, hvoraf de tre ligger i en ret Linie, men det fjerde uden for den. Konstruer en Cirkel, saaledes at ethvert af de fire Punkter har samme Afstand fra Periferien.
69. Konstruer en Cirkel med Radius r , saaledes at den rører en given Cirkel og gaar gennem et givet Punkt.
70. Der er givet to koncentriske Cirkler og en ret Linie, som skærer den ene af dem. Konstruer en Cirkel, som rører de givne Cirkler og den givne Linie.
71. Indskriv en Cirkel i et givet Udsnit.
72. I en Trekant er Siderne 5 cm, 6 cm og 7 cm. Find de Stykker, hvori Siderne deles af deres Røringspunkter med den indskrevne Cirkel.
73. Bevis, at i en retvinklet Trekant er Kateternes Sum lig Summen af den omskrevne og den indskrevne Cirkels Diameter, og at Summen af Siderne er lig Summen af de fire Røringscirklers Radier.
74. En Trekant har Siderne a, b og c . De fire Røringscirkler tegnes. Bevis, at Afstanden mellem de to Røringspunkter paa Siden a enten er lig $b - c$ eller $c - b$, og at Afstanden mellem de to Røringspunkter paa Siden a 's Forlængelse er lig $b + c$.
- Bevis, at enhver Centerlinie for to Røringscirkler har sit Midtpunkt paa Trekantens omskrevne Cirkels Periferi.
-

II.

A. Ensvinklede Trekanter.

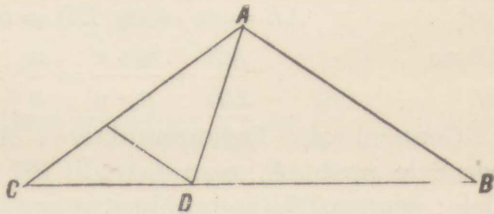
49. At en Linie indeholder $\frac{m}{n}$ Længdeenheder vil sige, at $\frac{1}{n}$ af Længdeenheden er indeholdt m Gange i Linien; det ubenævnte Tal, som angiver, hvor mange Længdeenheder Linien indeholder, kaldes Liniens *Længdetal*.

Naar man siger, at en *Linies Længde* er a , betyder det, at a er Liniens Længdetal. Liniers Længder angives altsaa ved ubenævnte Tal, som man kan udføre alle Regninger med; men der er underforstaaet en Længdeenhed, som maa være den samme for de Linier, der indgaar i de samme Regninger.

Der gives Linier, som ikke indeholder nogen Brøkdel af Længdeenheden et helt Antal Gange; disse Liniers Længdetal kan altsaa ikke være hele Tal eller Brøker; saadanne Linier kaldes inkommensurable med Længdeenheden.

At to Liniestykker er inkommensurable vil sige, at de intet fælles Maal har.

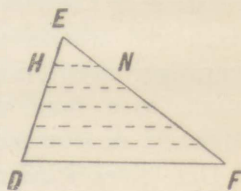
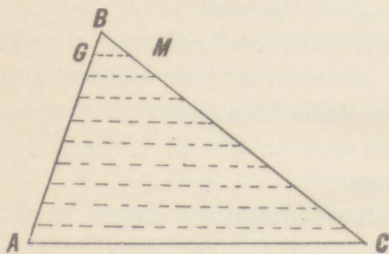
Som Eksempel vil vi vise, at naar Topvinklen i en lige net Trekant er 108° , er Grundlinien og Benene inkommensurable. Vi udfører en lignende Division som den, man an-



vender for at finde største fælles Maal for Tal. Naar man »dividerer« Benet AB ind i Grundlinien, faar man en Rest CD , som er Ben i en ny ligebenet Trekant, der har de samme Vinkler og har Divisor til Grundlinie o. s. v.

50. To Trekanter kaldes *ensvinklede*, naar deres Vinkler er stykkevis lige store. De Sider, som ligger over for lige store Vinkler, kaldes *ensliggende Sider*. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, læses $\triangle ABC$ er ensvinklet med $\triangle DEF$.

a. I to ensvinklede Trekanter er de ensliggende Sider *proportionale*. Dermed menes, at de tre Forhold, man faar ved at dividere en Side i den ene med den dermed ensliggende Side i den anden, er lige store.



Givet $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$.

Bevis at

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

1) AB og DE har et fælles Maal.

Lad os antage, at det fælles Maal e gaar m Gange op i AB og n Gange op i DE . Man har da

$$AB = m \cdot e \text{ og } DE = n \cdot e.$$

Altsaa

$$\frac{AB}{DE} = \frac{m \cdot e}{n \cdot e} = \frac{m}{n}.$$

Gennem alle Delingspunkter i AB trækkes Linier parallelle med AC , man faar da BC delt i m lige store Dele; gennem Delingspunkterne paa DE trækkes Linier

parallele med DF , disse Linier vil dele EF i n lige store Dele. Vi vil nu bevise, at et af Stykkerne paa BC er lig et af Stykkerne paa EF .

$$BG = EH.$$

$$\angle B = \angle E.$$

$$\angle BGM = \angle EHN; \text{ hver af dem er lig } \angle A.$$

Deraf

$$\triangle BGM \cong \triangle EHN$$

og

$$BM = EN.$$

Sættes

$$BM = a,$$

har man

$$BC = m \cdot a \text{ og } EF = n \cdot a.$$

Altsaa

$$\frac{BC}{EF} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a} = \frac{m}{n}.$$

Man faar da

$$\frac{BC}{EF} = \frac{BA}{ED}.$$

Naar man gennem Delingspunkterne trækker Linier parallele med BC og med EF , kan man paa samme Maade bevise, at det tredie Forhold er lige saa stort.

2) AB og DE er inkommensurable.

Man deler DE (den Side, som er Efterled i Forholdet,) i n lige store Dele. En af Delene e afsættes fra B ud ad BA saa mange Gange som muligt; lad os antage m Gange; man har da

$$(m + 1) \cdot e > AB > m \cdot e$$

og

$$n \cdot e = DE = n \cdot e.$$

Deraf ved Division

$$\frac{m + 1}{n} > \frac{AB}{DE} > \frac{m}{n}.$$

Naar man trækker paralleler som ovenfor, faar man paa lignende Maade

$$\frac{m + 1}{n} > \frac{BC}{EF} > \frac{m}{n}.$$

Forskellen mellem Forholdene $\frac{AB}{DE}$ og $\frac{BC}{EF}$ er en konstant Størrelse, da de fire Linier er konstante; vi vil kalde den numeriske Værdi af denne Differens d .

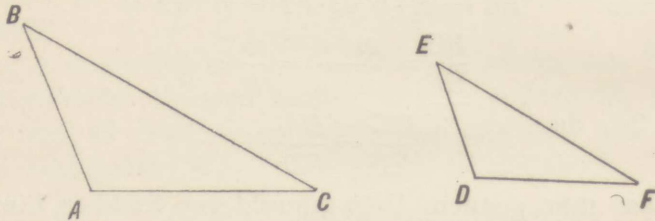
Man har da

$$d < \frac{1}{n},$$

hvor d og n er positive og d konstant, men $\frac{1}{n}$ kan man gøre saa lille, som det skal være, ved at vælge n tilstrækkelig stor. Konstanten d er da lig Nul og altsaa

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

b. To Trekanter er ensvinklede, naar alle tre Sidepar er proportionale.



Givet

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}.$$

Bevis, at $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$.

Man tegner en Trekant NMP , saaledes at $NP = DF$ og

$$\triangle NMP \sim \triangle ABC.$$

Man har da

$$\frac{NM}{AB} = \frac{MP}{BC} = \frac{NP}{AC} = \frac{DF}{AC}.$$

Ved Sammenligning med det givne faar man

$$NM = DE, MP = EF,$$

og da

$$NP = DF,$$

har man

$$\triangle NMP \cong \triangle DEF.$$

Da

$$\triangle NMP \sim \triangle ABC,$$

er

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC.$$

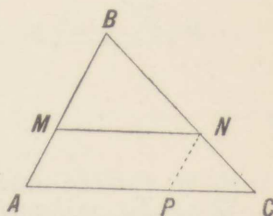
Paa lignende Maade faar man:

c. To Trekanter er ensvinklede, naar de har to Sidepar proportionale og den indesluttete Vinkel ens.

51. Et Liniestykke, som forbinder et Punkt i den ene Side af en Trekant med et Punkt i en af de andre Sider, kaldes en *Transversal*. Hvis den er parallel med den tredie Side, kaldes den en *Paralleltransversal*, og hvis den forbinder Midtpunkterne af to Sider, kaldes den en *Midtpunkttransversal*.

a. En *Paralleltransversal* i en *Trekant* afskærer af de to Sider Stykker, som er *proportionale* med Siderne.

Da $MN \neq AC$,
er $\triangle MBN \sim \triangle ABC$.
Deraf $\frac{MB}{AB} = \frac{BN}{BC}$.



b. En *Paralleltransversal* i en *Trekant* deler de to Sider i *proportionale* Dele.

Trækkes $NP \neq MA$,
har man $\triangle MBN \sim \triangle PNC$,
deraf $\frac{BM}{NP} = \frac{BN}{NC}$,
da $NP = MA$,
faar man $\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$.

c. Naar en Linie af to Sider i en *Trekant* afskærer Stykker, der er *proportionale* med Siderne, er den parallel med den tredie Side.

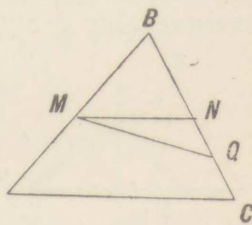
Givet $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC}$.

Hvis MN ikke er parallel med AC , kan man gennem M trække A en anden Linie MQ , som er parallel med AC ; man faar da:

$$\frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BC},$$

af denne Ligning og den givne faar man

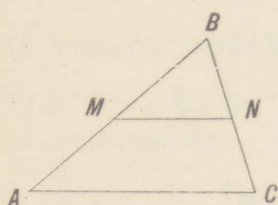
$$BQ = BN,$$



hvilket er umuligt, naar MQ er en anden Linie end MN .
 Altsaa er $MN \neq AC$.

Sætningen kan ogsaa bevises ved 50 c.

d. Enhver Midtpunktstransversal i en Trekant er parallel med een af Siderne og halv saa stor som denne Side.

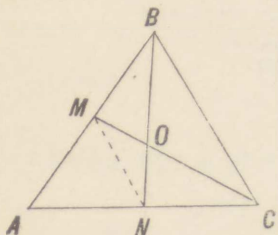


$$\text{Givet } \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} = \frac{BN}{BC}.$$

Deraf $MN \neq AC$ ifølge c
 og $\triangle BMN \sim \triangle BAC$.

$$\text{Altsaa } \frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}.$$

52 a. To vilkaarlige af Medianerne i en Trekant deler hinanden i Stykker, der forholder sig som 1 til 2, og det Stykke, som indeholder Sidens Midtpunkt, er mindst.



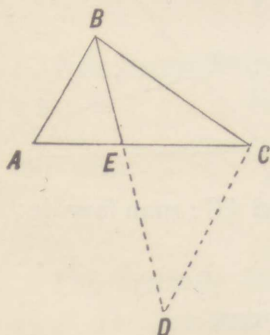
$$\triangle MON \sim \triangle COB,$$

fordi $MN \neq BC$.

$$\text{Deraf } \frac{MO}{CO} = \frac{NO}{BO} = \frac{MN}{CB} = \frac{1}{2}.$$

b. Medianerne i en Trekant skærer hverandre i samme Punkt; følger af a.

c. Enhver Trekantsvinkels Akse vil dele den modstaaende Side i Stykker, der forholder sig som de tilstødende Sider.



CD trækkes parallel med BA .

$$\triangle ABE \sim \triangle CDE.$$

$$\text{Deraf } \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD}.$$

$$\angle D = \frac{1}{2} \angle B.$$

$$\text{Altsaa } \frac{CD}{CB} = \frac{AE}{CE},$$

man faar da $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CB}.$

d. Naar to vilkaarlige Linier overskæres af flere parallelle, er Stykkerne paa den ene Linie proportionale med Stykkerne paa den anden.

Givet $AM \neq BN \neq CP$.

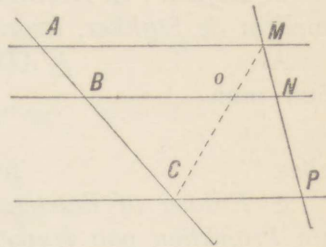
Bevis at $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$.

MC trækkes, man har da ifølge 51 b.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MO}{OC} = \frac{MN}{NP}.$$

Deraf

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}.$$



e. Forbindelseslinien mellem Midtpunkterne af de ikke parallelle modstaaende Sider i et Trapez er parallel med de parallelle Sider og lig deres halve Sum.

Bevises ved Hjælp af en Linie fra en Vinkelspids gennem Midtpunktet af en af de ikke parallelle modstaaende Sider.

B. Den retvinklede Trekant.

53 a. Højden paa Hypotenusen i en retvinklet Trekant deler den i to ensvinklede Trekanter, og enhver af dem er ensvinklet med den givne.

$$\angle A + \angle u = 90^\circ.$$

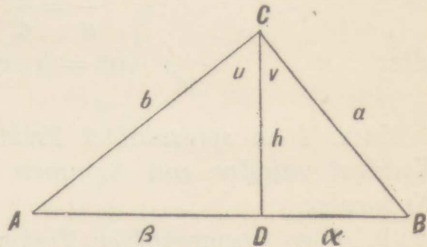
$$\angle v + \angle u = 90^\circ.$$

Altsaa $\angle A = \angle v$.

Paa samme Maade faar man $\angle B = \angle u$.

Man har da

$$\triangle ADC \sim \triangle CDB \sim \triangle ACB.$$



Ved Mellemproportionalen mellem to givne Liniestykker forstaas den Linie, hvis Længdetal kan være

Mellemlæddene i en Proportion, hvori de givne Liniers Længdetal er Yderled.

b. Højden i en retvinklet Trekant er Mellemproportional mellem de Stykker, hvori den deler Hypotenusen.

$$\begin{array}{l} \text{Af} \qquad \qquad \qquad \triangle ADC \sim \triangle CDB \\ \text{faar man} \qquad \qquad \frac{\beta}{h} = \frac{h}{a} \end{array}$$

$$\text{eller} \qquad \qquad \qquad h^2 = a \cdot \beta.$$

c. Enhver af Kateterne er Mellemproportional mellem sin Projektion paa Hypotenusen og hele Hypotenusen.

$$\begin{array}{l} \text{Af} \qquad \qquad \qquad \triangle ADC \sim \triangle ACB \\ \text{faar man} \qquad \qquad \frac{\beta}{b} = \frac{b}{c} \end{array}$$

$$\text{eller} \qquad \qquad \qquad b^2 = \beta \cdot c.$$

$$\begin{array}{l} \text{Af} \qquad \qquad \qquad \triangle BDC \sim \triangle BCA \\ \text{faar man} \qquad \qquad \frac{a^2}{a} = \frac{a \cdot c}{c} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ved Addition faas } a^2 + b^2 = a \cdot c + \beta \cdot c = c (a + \beta). \\ \text{Altsaa} \qquad \qquad \qquad a^2 + b^2 = c^2, \qquad \qquad \qquad \text{eller:} \end{array}$$

d. I en retvinklet Trekant er Summen af Kateternes Kvadrater lig Hypotenusens Kvadrat.

Denne Sætning kaldes den pythagoræiske Sætning efter den græske Matematiker Pythagoras.

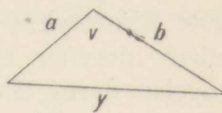
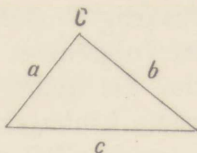
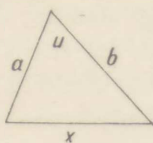
e. Kateternes Produkt er lig Produktet af Hypotenusen og Højden paa den.

$$\begin{array}{l} \text{Af} \qquad \qquad \qquad \triangle BCD \sim \triangle BAC \\ \text{faar man} \qquad \qquad \frac{h}{a} = \frac{b}{c} \end{array}$$

$$\text{eller} \qquad \qquad \qquad ab = h \cdot c.$$

54 a. I en spidsvinklet Trekant er den største Sides Kvadrat mindre end Summen af de to andre Siders Kvadrater.

b. I en stumpvinklet Trekant er den største Sides Kvadrat større end Summen af de to andre Siders Kvadrater.



Givet $\angle u < 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ og $\angle v > 90^\circ$.
Man har da ifølge 28

deraf $x < c < y$,
Desuden er $x^2 < c^2 < y^2$,
 $c^2 = a^2 + b^2$.

Altsaa $x^2 < a^2 + b^2$ og $y^2 > a^2 + b^2$.

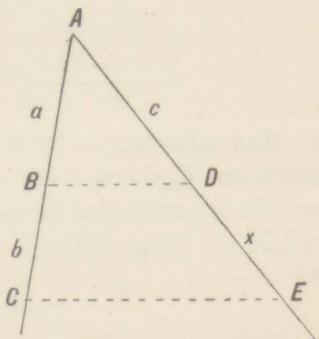
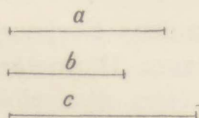
c. Naar Kvadratet paa den ene Side i en Trekant er lig Summen af de andre Siders Kvadrater, er Vinklen mellem de to sidste Sider ret.

Ifølge a og b kan Vinklen ikke være spids eller stump.

C. Konstruktioner.

55. Fjerdeproportionalen til tre givne Liniestykker er det Liniestykke, hvis Længdetal er fjerde Led i en Proportion, hvori de givne Liniers Længdetal i den opgivne Orden er første, andet og tredje Led.

a. Konstruer Fjerdeproportionalen til tre givne Liniestykker a , b og c .



Man tegner en vilkaarlig Vinkel A og afsætter det første Liniestykke a fra Toppunktet ud ad det ene Vinkelben, derefter afsættes det andet Liniestykke i Forlængelse deraf. Det tredje Liniestykke afsættes paa det andet Vinkelben, man trækker BD og dernæst en Linie gennem C parallel med BD ; DE er da den søgte Linie. Man har ifølge 51 b

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Man kan ogsaa konstruere Fjerdeproportionalen ved Hjælp af 51 a.

Skal man konstruere en Linie y , saaledes at

$$y = \frac{a b c}{d e},$$

sætter man

$$x = \frac{a b}{d},$$

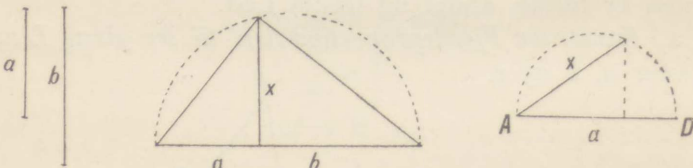
hvor x konstrueres som Fjerdeproportional til d , a og b .

Man har da

$$y = \frac{x \cdot c}{e},$$

hvor y konstrueres som Fjerdeproportional til e , x og c .

b. *Konstruer Mellemproportionalen mellem to givne Liniestykker a og b .*



1) Man afsætter a og b i hinandens Forlængelse og konstruerer Cirklen over $a + b$ som Diameter; i det fælles Endepunkt for a og b oprejses den vinkelrette, man har da ifølge 53 b

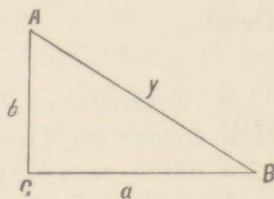
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{ eller } x^2 = ab.$$

2) Man afsætter den ene af de givne Linier ud ad den anden, $AD = b$; derefter konstrueres Cirklen over den længste som Diameter. 53 c.

c. Konstruer

$$1^0. y = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$2^0. z = \sqrt{a^2 - b^2}$$



1⁰. Man tegner en ret Vinkel og afsætter a ud ad det ene Ben og b ud ad det andet. AB er da den søgte Linie ifølge 53 d.

2⁰. Man tegner en retvinklet Trekant, hvis Hypotenuse er a , og hvis ene Katete er b ; den anden Katete er da z ifølge 53 d. Opgaven er umulig, naar $a < b$.

56 a. Del et givet Liniestykke a i tre Dele, der forholder sig som Tallene 2, $1\frac{2}{3}$ og $\sqrt{5}$.

Man vælger en Længdeenhed e og konstruerer tre Liniestykker b , c og d , saaledes at

$$b = 2e,$$

$$c = 1\frac{2}{3}e$$

og

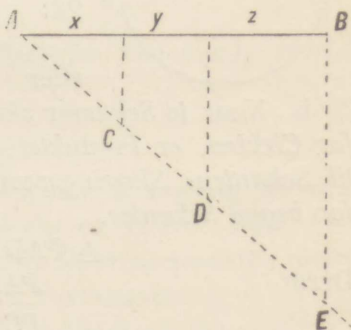
$$d = e\sqrt{5} = \sqrt{e \cdot 5e},$$

hvor d konstrueres som Mellemproportional mellem e og $5e$.

$$AB = a.$$

Man tegner en vilkaarlig Linie gennem A og afsætter $AC = b$, $CD = c$ og $DE = d$. EB trækkes, og gennem C og D trækkes Linier parallelle med EB . Man har da ifølge 52 d

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c} = \frac{z}{d}$$



eller

$$\frac{x}{2e} = \frac{y}{1\frac{2}{3} \cdot e} = \frac{z}{e\sqrt{5}}.$$

Deraf

$$\frac{y}{2} = \frac{y}{1\frac{2}{3}} = \frac{z}{\sqrt{5}}.$$

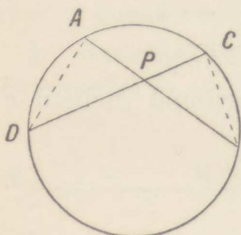
b. *Konstruer en Trekant af to Vinkler og Perimeteren.*
 Man tegner en Trekant, som har de opgivne Vinkler, men ellers er vilkaarlig, lad dens Sider være m , n og o . Den givne Perimeter deles i tre Dele a , b og c , saaledes at

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{o},$$

og man konstruerer en Trekant med Siderne a , b og c .

D. Et Punkts Potens med Hensyn til en Cirkel.

57 a. *Naar to Korder i en Cirkel skærer hinanden, er Produktet af den ene Kordes Stykker lig Produktet af den anden Kordes Stykker.*



$\angle A = \angle C$, de maales ved samme Bue.

$$\angle D = \angle B.$$

Altsaa er $\triangle PAD \sim \triangle PCB$

$$\text{og} \quad \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

$$\text{eller} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

b. *Naar to Sekanter skærer hinanden i et Punkt uden for Cirklen, er Produktet af de to Afstande fra Punktet til Sekantens Skæringspunkter med Cirklen det samme for begge Sekanter.*

$$\triangle PAD \sim \triangle PCB.$$

Deraf

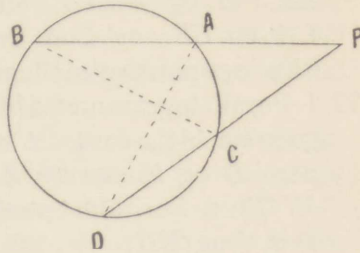
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

eller

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Paa lignende Maade vises at:

c. Naar en Tangent og en Sekant skærer hinanden i et Punkt uden for Cirklen, er Punktets Afstand fra Røringspunktet Mellempportional mellem Punktets



Afstande fra Sekantens Skæringspunkter med Cirklen.

Af a, b og c faar man:

Naar man fra et fast Punkt trækker en Linie, som skærer en Cirkel, saa er Produktet af Punktets Afstande til Skæringspunkterne konstant; det vil sige, Produktets Størrelse er uafhængig af Liniens Retning. Dette konstante Produkt kaldes *Punktets Potens med Hensyn til Cirklen*.

d. Potensen af et Punkt, som har Afstanden a til Centrum af en Cirkel med Radius r, er lig $r^2 - a^2$, naar Punktet ligger inde i Cirklen, men $a^2 - r^2$, naar Punktet ligger uden for Cirklen.

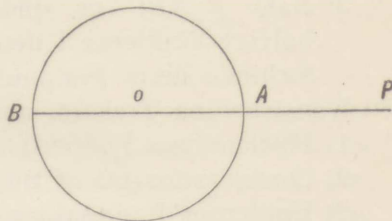
$$PO = a.$$

$$PA = a - r.$$

$$PB = a + r.$$

Altsaa $PA \cdot PB$

$$= (a - r)(a + r) = a^2 - r^2.$$



Naar Punktet ligger inde i Cirklen, føres Beviset ligeledes ved Hjælp af en Linie gennem Centrum.

Opgaver.

75. I et Trapez er de parallelle Sider 20 cm og 28 cm, og de to andre Sider er 10 cm og 12 cm. Find Afstanden fra Vinkelspidserne til Skæringspunktet mellem de ikke parallelle Siders Forlængelser.
76. I $\triangle ABC$ er $AB = 42$ cm, $BC = 40$ cm og $AC = 36$ cm. Gennem A og B er tegnet en Cirkel, som skærer

AC i D og BC i E , saaledes at $DE = 28$ cm. Find CD og CE , og find derefter AF og DF , idet F er Skæringspunktet mellem Forlængelserne af BA og ED .

77. I Parallelogrammet $ABCD$ ligger Punktet E paa Diagonalen AC , saaledes at $AE = \frac{1}{4} \cdot AC$. Linien gennem D og E skærer AB i N og BC 's Forlængelse i M . Find Forholdet mellem:

- 1) AN og NB .
- 2) BM og BC .
- 3) EN og NM .

78. Gennem A i Parallelogrammet $ABCD$ trækkes en vilkaarlig Linie, som skærer BD i E , BC i F og DC 's Forlængelse i G . Bevis, at AE er Mellemproportional mellem EF og EG .

79. I en Trekant ABC er AD Højden paa BC , CE er Højden paa AB og O er Højdernes Skæringspunkt. Bevis at:

- 1) Firkant $AEDC$ er indskrivelig i en Cirkel.
- 2) $\triangle AOC \sim \triangle EOD$ og $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.
- 3) Naar $\triangle ABC$ er spidsvinklet, vil dens Højder halvere Vinklerne i den Trekant, man faar ved at forbinde deres Fodpunkter.

80. Konstruer en Trekant, naar man kender:

- 1) Medianernes Fodpunkter.
- 2) Centrene for tre af Røringscirklerne.
- 3) Højdernes Fodpunkter.
- 4) Sidernes Røringspunkter med den indskrevne Cirkel.

81. Bevis, at:

- 1) Midtpunkterne af Siderne i en Firkant er Vinkelspidser i et Parallelogram.
- 2) Naar Diagonalerne i en Firkant er lige støre, saa er den Linie, der forbinder Midtpunkterne af det ene Par modstaaende Sider, vinkelret paa den Linie, der forbinder Midtpunkterne af det andet Par modstaaende Sider.
- 3) Naar Diagonalerne i en Firkant er vinkelrette paa

hinanden, saa er den Linie, som forbinder Midtpunkterne af det ene Par modstaaende Sider, lig den Linie, som forbinder Midtpunkterne af det andet Par modstaaende Sider.

82. P er et vilkaarligt Punkt af Diagonalen AC i Parallelogrammet $ABCD$. Gennem P trækkes to vilkaarlige Linier, hvoraf den ene skærer AB i N og CD i E , medens den anden skærer BC i F og AD i M . Bevis, at $NM \neq EF$.
83. I en ligebeinet Trekant er Grundlinien halv saa stor som et af Benene. Find Forholdet mellem de Stykker, hvori enhver Vinkels Halveringslinie deles af de andre.
84. Konstruer en Trekant af en Side og Medianerne til de to andre Sider.
85. Find de andre Stykker i en retvinklet Trekant, naar
 - 1) $a = 2,7$; $\beta = 4,8$.
 - 2) $a = 0,7$; $c = 2,5$.
 - 3) $a = 16$; $h = 30$.
 - 4) $a = 24$; $c = 37,5$.
 - 5) $a = 28,8$; $b = 13$.
86. I en spidsvinklet Trekant er Afstanden fra Højdernes Skæringspunkt til to af Vinkelspidserne 35 cm og 75 cm, og Afstanden til den hosliggende Side 21 cm. Find Trekantens Sider og Højder. Find dens omskrevne og dens indskrevne Cirkels Radius.
87. $ABCD$ er et Rektangel og P et vilkaarligt Punkt. Bevis, at $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.
88. Bevis, at i et Parallelogram er Summen af Sidernes Kvadrater lig Summen af Diagonalernes Kvadrater.
89. I en ligesidet Trekant med Siden a skal indskrives tre lige store Cirkler, saaledes at enhver af dem rører de to andre og to af Trekantens Sider. Beregn og konstruer Radius.
90. I en retvinklet Trekant er Kateterne 7 cm og 24 cm.

- Find den indskrevne Cirkels Radius, og find den Linie, som halverer den største spidse Vinkel.
91. Konstruer en retvinklet Trekant, naar man kender Midtpunkterne af Kateterne og et Punkt i Hypotenusen.
 92. Et ligebenet Trapez er omskrivelig om en Cirkel. Bevis, at Cirkelns Diameter er Mellemproportional mellem de parallelle Sider.
 93. I $\triangle ABC$ er M Midtpunktet af BC , $\angle A$'s Halveringslinie skærer BC i D , og $\triangle ADM$'s omskrevne Cirkel skærer AB i E og AC i F . Bevis, at $BE = CF$.
 94. a) Gennem et Punkt inde i en Cirkel skal man trække den Korde, som Punktet halverer.
b) Gennem et Punkt uden for en Cirkel skal man trække en Sekant, saaledes at Punktet har dobbelt saa stor Afstand til det ene Skæringspunkt som til det andet.
 95. Konstruer en Cirkel, som gaar gennem to givne Punkter og rører:
 - a) En given Linie.
 - b) En given Cirkel.

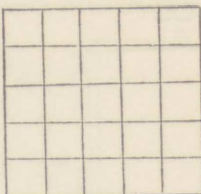
E. Polygoners Areal.

58. Som *Arealenhed* benyttes et Kvadrat, hvis Side er lig Længdeenheden. Et Kvadrat, hvis Side er 1 m, kaldes 1 m², læses en Kvadratmeter; et Kvadrat, hvis Side er 1 dm, kaldes 1 dm² o. s. v.

En Polygons *Arealtal* er det ubenævnte Tal, som angiver, hvor mange Arealenheder der skal til at dække Polygonen. *Aralet* er det benævnte Tal, man faar ved at føje Arealenhedens Navn til Arealtallet.

a. Naar Forholdet mellem to Længdeenheder er n , er Forholdet mellem de tilsvarende Fladeenheder n^2 .

Siden i det store Kvadrat er 5 Gange saa stor som Siden i det lille; man ser da, at det store Kvadrat kan deles i 5^2 eller 25 Kvadrater, hvoraf ethvert er kongruent med det lille.



Eks.

$$1 m^2 = 10^2 dm^2$$

$$1 m^2 = 100^2 cm^2$$

$$1 m^2 = 1000^2 mm^2$$

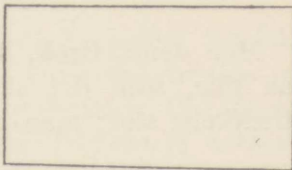
$$1 km^2 = 1000^2 m^2.$$

Naar et Kvadrats Side har Længdetallet $\frac{1}{n}$, er Kvadratets Areal $\frac{1}{n^2}$.

b. Et Rektangels Areal er Produktet af Grundliniens og Højdens Længde.

1°. Naar Længdetallene a og b er rationale Tal, kan man skrive dem som Brøker med samme Nævner;

$$a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{n}.$$

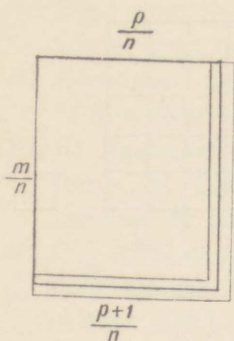


Grundlinien deles da i p lige store Dele og Højden i m lige store Dele, og gennem alle Delingspunkterne trækkes Linier parallelle med Siderne; man faar da $m \cdot p$ Firkanter, som alle er Kvadrater, hvis Siders Længde er $\frac{1}{n}$. Ethvert af disse Kvadrater har da Areal $\frac{1}{n^2}$; kaldes Rektanglets Areal R , faar man

$$R = m \cdot p \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n}$$

$$\underline{R = ab.}$$

2°. Naar Længdetallene a og b er irrationale Tal, kan man beregne dem med Fejlgrænsen $\frac{1}{n}$.



Naar $\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$

og $\frac{p}{n} < b < \frac{p+1}{n}$,

faas $\frac{mp}{n^2} < ab < \frac{(m+1)(p+1)}{n^2}$.

Af Figuren ser man, at

$$\frac{mp}{n^2} < R < \frac{(m+1)(p+1)}{n^2}.$$

Kaldes den numeriske Værdi af Forskellen mellem R og ab for f , har man, f er konstant, og

$$f < \frac{(m+1)(p+1)}{n^2} - \frac{mp}{n^2} = \frac{m+p+1}{n^2} = \frac{\frac{m}{n} + \frac{p}{n} + \frac{1}{n}}{n},$$

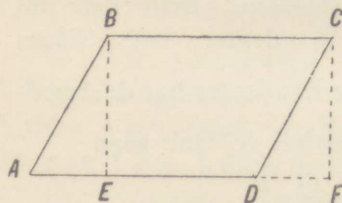
altsaa

$$f < \frac{a+b+1}{n}.$$

Men denne Brøk, hvis Tæller er konstant, kan gøres saa lille, som det skal være ved, at man gør n tilstrækkelig stor; man har altsaa $f = 0$, eller

$$R = ab.$$

59 a. *Et Parallelograms Areal er Produktet af Grundliniens og Højdens Længdetal.*



Parallelogrammet $ABCD$ og Rektanglet $EBCF$ har samme Højde, nemlig BE , og samme Grundlinie, nemlig BC .

$$\triangle ABE \cong \triangle DCF,$$

fordi $\angle E = \angle F$,

$$BE = CF$$

og $\angle BAE = \angle CDF$.

Parallelogrammet og Rektanglet har altsaa samme Areal. Sætningen følger da af 64 b.

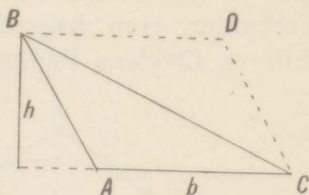
b. *En Trekants Areal er det halve Produkt af Grundliniens og Højdens Længdetal.*

Gennem B trækkes Linien parallel med AC og gennem C Linien parallel med AB ; kaldes Trekantens Areal T , bliver Parallelogrammets $2T$; man har da

Deraf

$$2T = h \cdot b \quad \text{ifølge a.}$$

$$T = \frac{1}{2} h \cdot b.$$



En retvinklet Trekants Areal er det halve Produkt af Kateternes Længdetal; thi den ene Katete er Højden paa den anden.

Naar en ligesidet Trekants Side har Længdetallet a , er Højdens Længdetal $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, og Trekantens Areal er

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

60. Enhver Polygon kan deles i Trekanter for Eksempel ved, at man trækker alle Diagonalerne fra een af Vinkelspidserne. Man kan altsaa finde Polygonens Areal, hvis man kan beregne disse Trekanters Arealer.

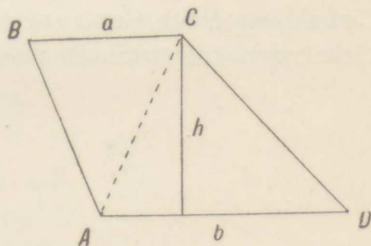
a. En Rhombes Areal er det halve Produkt af Diagonalernes Længdetal.

b. Trapezets Areal findes ved, at man multiplicerer den halve Sum af de parallelle Siders Længdetal med Højdens Længdetal.

$$T = \frac{1}{2} h \cdot a + \frac{1}{2} h \cdot b$$

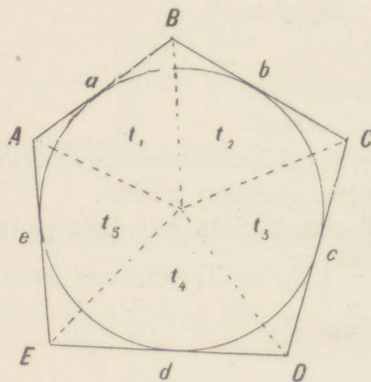
$$= h \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)$$

$$T = h \cdot \frac{a+b}{2}.$$



61. Naar en Polygon har en indskreven Cirkel, er Polygonens Areal lig det halve Produkt af Perimeterens Længdetal og Radiens Længdetal.

Fra Polygonens Vinkelspidser trækkes Linier til den indskrevne Cirkels Centrum, derved deles Polygonen i Trekanter, som hver har en Polygonsside til Grundlinie og Cirkelns Radius til Højde. Man faar da



$$t_1 = \frac{r}{2} \cdot a$$

$$t_2 = \frac{r}{2} \cdot b$$

$$t_3 = \frac{r}{2} \cdot c$$

$$t_4 = \frac{r}{2} \cdot d$$

$$t_5 = \frac{r}{2} \cdot e$$

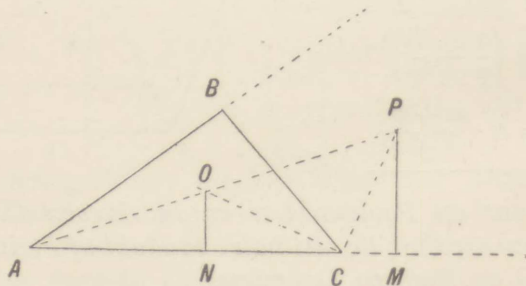
Deraf ved Addition

$$P = \frac{r}{2} \cdot a + \frac{r}{2} \cdot b + \frac{r}{2} \cdot c + \frac{r}{2} \cdot d + \frac{r}{2} \cdot e$$

$$P = \frac{r}{2} (a + b + c + d + e).$$

For Trekanten faar man $T = r \cdot s$.

62. Punktet O er Centrum for $\triangle ABC$'s indskrevne Cirkel, og P er Centrum for den udvendige Røringscirkel, som rører Siden a . ON og PM er Radier.



deraf $\triangle ANO \sim \triangle AMP,$

$$\frac{AN}{AM} = \frac{NO}{MP}$$

eller $\frac{s-a}{s} = \frac{r}{r_a},$

altsaa $rs = r_a(s-a).$

Ifølge 67 er $T = r \cdot s,$

altsaa $T = r_a(s-a).$

Deraf $T^2 = r \cdot r_a \cdot s(s-a) \dots I.$

altsaa $\triangle ONC \sim \triangle CMP,$

$$\frac{r}{CM} = \frac{NC}{r_a}$$

eller $r \cdot r_a = (s-b)(s-c) \dots II.$

Af I og II faar man

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots III.$$

Vi har set, at $r \cdot s = r_a(s-a)$; man faar paa lignende Maade $r \cdot s = r_b(s-b) = r_c(s-c)$, altsaa

$$T = r \cdot s = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) \dots IV.$$

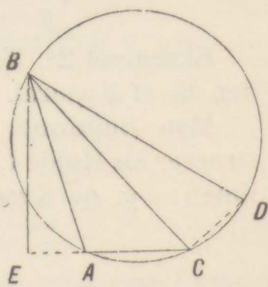
Naar Trekantens Sider er givne, kan man finde Arealet ved III; derefter kan man finde Røringscirklernes Radier ved IV, og endelig kan man finde Højderne ved

$$T = h_a \cdot \frac{a}{2} = h_b \cdot \frac{b}{2} = h_c \cdot \frac{c}{2}$$

Diameteren i en Trekants omskrevne Cirkel er lig Produktet af de to Sider divideret med Højden paa den tredie Side.

$$BD = 2 \cdot R.$$

$$BE = h_b,$$



deraf

$$\triangle BEA \sim \triangle BCD,$$

$$\frac{h_b}{a} = \frac{c}{2R}$$

eller

$$2R = \frac{ac}{h_b} = \frac{abc}{2T}.$$

$$\text{Man faar deraf} \quad \underline{abc = 4RT}.$$

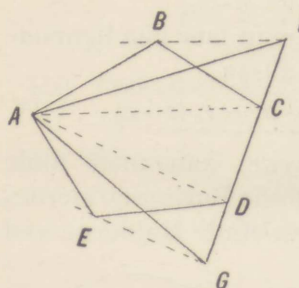
63. At *omforme* en given Polygon vil sige at konstruere en Polygon, der har samme Areal som den givne, men ikke er kongruent med den.

a. *Naar en Trekant skal omformes til en anden Trekant, og en af Siderne skal blive uforandret, maa Højden paa denne Side ogsaa blive uforandret, ifølge 59 b.*

Man kan derved omforme enhver Polygon til en Trekant.

Eksempel 1°. Femkanten $ABCDE$ skal omformes til en Trekant.

Man trækker Diagonalen AC , gennem B trækkes



Linien parallel med AC , og DC forlænges til F . Firkant $AFDE$ har da samme Areal som Femkanten. Diagonalen AD trækkes, gennem E trækkes Linien parallel med AD , og FD forlænges til G . $\triangle AFG$ er lig Firkant $AFDE$ og altsaa lig den givne Femkant.

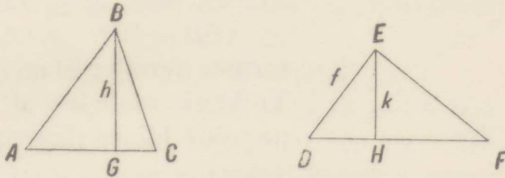
Eksempel 2°. Tegn en vilkaarlig Firkant og omform den til et Kvadrat.

Man omformer Firkanten til en Trekant og konstruerer en Højde i Trekanten. Naar Højden $= h$, Grundlinien $= g$, og Kvadratets Side $= x$, har man

$$x^2 = \frac{h}{2} \cdot g.$$

x konstrueres altsaa som Mellemproportional mellem $\frac{h}{2}$ og g .

b. Forholdet mellem Arealerne af to Trekanter, der har et Par Vinkler lige store, er lig Produktet af de indesluttende Siders Forhold.



$\triangle ABC$'s Areal $= t$, $\triangle DEF$'s Areal $= T$, $DF = e$.

Man har $\triangle ABG \sim \triangle DEH$,

deraf
$$\frac{h}{k} = \frac{c}{f}.$$

Desuden er
$$t = \frac{1}{2} h \cdot b$$

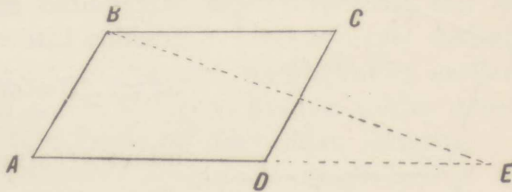
og
$$T = \frac{1}{2} k \cdot e,$$

altsaa
$$\frac{t}{T} = \frac{h \cdot b}{k \cdot e} = \frac{h}{k} \cdot \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \cdot \frac{b}{e}.$$

c. Naar en Trekant skal omformes til en anden, saaledes at en Vinkel bliver uforandret, maa Produktet af de Sider, som indeslutter Vinklen, ogsaa blive uforandret, ifølge b.

Eksempel 1°. Parallelogrammet $ABCD$ er givet; omform det til en ligebenet Trekant med $\angle A$ til Topvinkel.

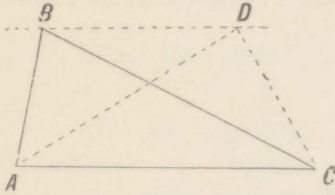
AD forlænges til E , saaledes at $DE = AD$; $\triangle ABE$ har da samme Areal som Parallelo-



grammet. Kaldes Benet i den søgte Trekant y , har man

$$y^2 = AB \cdot AE,$$
 hvorved y kan konstrueres.

Eksempel 2°. Omform en given Trekant til en ligesidet Trekant.



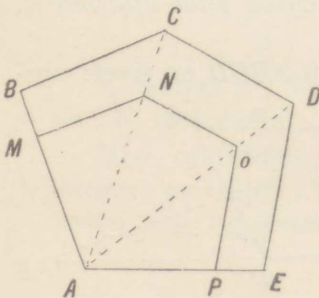
$\triangle ABC$ er given, den omformes først til $\triangle ADC$, hvor $\angle ACD = 60^\circ$. $\triangle ADC$ omformes derefter til en ligebenet Trekant, saaledes at Vinklen paa 60° bliver Topvinkel.

F. Lighedannede Polygoner.

64. At to Figurer er *ligedannede* vil sige, at den ene af dem er et formindsket Billede af den anden. Eller med andre Ord, at *en Afstand i den ene Figur og den tilsvarende Afstand i den anden Figur overalt staar i samme Forhold*.

Eksempel: Et stort og et lille Kort over samme Land er ligedannede Figurer, og ethvert af dem er ligedannet med Landet.

To vilkaarlige Kvadrater er ligedannede, men to Rektangler er i Reglen ikke ligedannede.



Man kan paa følgende Maade konstruere en Polygon, der er ligedannet med $ABCDE$.

Fra den ene Vinkelspids A trækkes Linier til alle de andre;

ud ad AB afsættes $AM = \frac{3}{4} \cdot AB$,

ud ad AC afsættes $AN = \frac{3}{4} \cdot AC$

o. s. v. Polygonen $AMNOP$ er

da ligedannet med $ABCDE$; thi man faar ved 51 c
 $MN \neq BC$, $NO \neq CD$ og $OP \neq DE$.

Deraf følger, at

$$\frac{3}{4} = \frac{MN}{BC} = \frac{NO}{CD} = \frac{OP}{DE} = \frac{AP}{AE} = \frac{MO}{BD}.$$

Man ser altsaa, at de Afstande, der svarer til hinanden, er proportionale, eller at Polygonerne er ligedannede.

Man har tillige $\angle M = \angle B$ ifølge 16 d.
 $\angle N = \angle C$ o. s. v. Altsaa:

a. *To ligedannede Polygoner har deres Vinkler stykkevis lige store i samme Orden og deres ensliggende Sider proportionale.*

b. *Ensvinklede Trekanter er ligedannede.* De har deres ensliggende Sider proportionale ifølge 50. Ved 51 c kan man bevise, at f. Eks. et Par ensliggende Medianer forholder sig som de ensliggende Sider.

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ kan altsaa ogsaa læses $\triangle ABC$ er ligedannet med $\triangle DEF$.

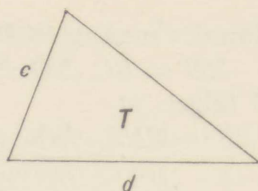
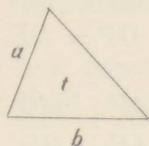
Polygoner med mere end tre Sider behøver ikke at være ligedannede, fordi de er ensvinklede; men man kan bevise, at:

c. *Naar to Polygoner har deres Vinkler stykkevis lige store i samme Orden og deres ensliggende Sider proportionale, er de ligedannede.*

Firkant $ABCD \sim$ Firkant $EFGH$ læses Firkant $ABCD$ er ligedannet med Firkant $EFGH$.

65. Naar to Polygoner er ligedannede, kaldes Forholdet mellem en Linie i den ene Polygon og den tilsvarende Linie i den anden for *Linieforholdet* mellem den første og den anden Polygon, og Forholdet mellem den første og den anden Polygons Arealer kaldes *Arealforholdet* mellem den første og den anden Polygon.

a. *Naar to ligedannede Trekanters Linieforhold er lig n , er deres Arealforhold lig n^2 .*

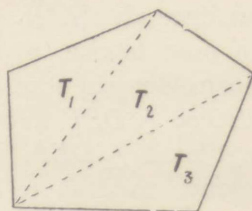
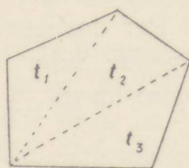


$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = n.$$

Ifølge 69 b har man

$$\frac{t}{T} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = n^2.$$

b. Naar to ligedannede Polygoners Linieforhold er lig n , er deres Arealforhold lig n^2 .



Man trækker Diagonalerne fra et Par lige store Vinklers Toppunkter. Ifølge 51 c er Trekkanterne to og to ensvinklede og altsaa ligedannede, og Linieforholdet er det samme for Trekkanterne som for Polygonerne; kaldes Linieforholdet n , har man

$$\frac{t_1}{T_1} = n^2.$$

$$\frac{t_2}{T_2} = n^2.$$

$$\frac{t_3}{T_3} = n^2.$$

Deraf

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3}{T_1 + T_2 + T_3} = n^2.$$

Opgaver.

96. Hvor mange m^2 kan en Rulle Tapet dække, naar den er 8,5 m lang og 48 cm bred?
97. Et rektangulært Gulv er $24,7 \text{ m}^2$; hvor bredt er det, naar det er 4 m 75 cm langt?
98. En Stue, hvis Gulv er et Rektangel, er 5 m lang, 4,2 m bred og 3,25 m høj. I Stuen er der et Vindue, som er 2 m højt og 2,1 m bredt, og to Døre, hvoraf den ene er 2,5 m høj og 1,4 m bred og den anden 2,2 m høj og 1 m bred. Find Arealet af den samlede Vægflade i Stuen, og find hvor mange pro Cent Vinduets Areal er af Gulvets Areal.
99. I en retvinklet Trekant er den ene Katete 21 cm og Hypotenusen 29 cm. Find Arealet.
100. To af Siderne i en Trekant er 21 cm og 25 cm, og Arealet er 126 cm^2 . Find den tredje Side og Højderne.
101. En Trekants Areal er 756 cm^2 . Højden paa den ene Side deler Siden i Stykker, der er 15 cm og 27 cm. Find Trekantens Sider og Højder, og find Medianen til den største Side.
102. Find Arealet af et Rektangel med Diagonalen d , naar Diagonalerne danner en Vinkel paa 30° .
103. Bevis, at Diagonalerne i et Parallelogram deler det i 4 lige store Trekanter, og at ethvert Par modstaaende Trekanter kan sammensættes til et Parallelogram, hvis Diagonaler er lig det oprindelige Parallelograms Sider.
104. Gennem en Vinkelspids i en Trekant skal man trække to Linier, som deler Trekanten i tre lige store Dele.
105. $ABCD$ er en vilkaarlig Firkant. Gennem Midtpunktet af Diagonalen AC trækkes en Linie, der er parallel med BD og skærer AB i E . Bevis, at Firkant $BCDE$ er Halvdelen af $ABCD$.
106. Bevis, at Arealet af et Trapez kan findes ved, at

man multiplicerer een af de ikke parallelle Sider med dens Afstand fra den andens Midtpunkt.

107. Find Siderne i en retvinklet Trekant, naar den rette Vinkels Halveringslinie deler Trekanten i Dele, hvis Arealer er 252 cm^2 og 336 cm^2 .
108. I en Firkant $ABCD$ skærer Diagonalerne hinanden i O , saaledes at $\frac{AO}{OC} = \frac{3}{2}$, og $\frac{BO}{OD} = 2$. Find Arealerne af enhver af de fire Trekanter, hvori Diagonalerne deler Firkanten, naar Firkantens Areal er 180 cm^2 .
109. Find Arealet af en Firkant $ABCD$, naar $\angle A = 90^\circ$, $\angle DBC = 30^\circ$, $AD = 48 \text{ cm}$, $AB = 55 \text{ cm}$ og $BC = 68 \text{ cm}$.
110. I Femkanten $ABCDE$ er $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = 45 \text{ cm}$, $BE = 51 \text{ cm}$, $BD = 50 \text{ cm}$ og $BC = 48 \text{ cm}$; desuden ved man, at BE gaar gennem Midtpunktet af AD . Find Femkantens Areal.
111. Der er givet to Rektangler; det ene har Siderne a og b , det andet Siderne c og d . Konstruer et Kvadrat, hvis Areal er lig Summen af de givne Rektanglers.
112. Arealet af et Parallelogram er 840 cm^2 ; Siderne er 35 cm og 26 cm . Find Højderne og Diagonalerne.
113. I en Trekant ABC er $AB = 25 \text{ cm}$, $BC = 40 \text{ cm}$ og $AC = 39 \text{ cm}$. Find Arealet, og find de fire Røringscirklers Radier.
114. En Trekants Sider er 13 cm , 14 cm og 15 cm . Find Længderne af den indskrevne og den omskrevne Cirkels Radius.
115. I en indskreven Trekant ABC er $AB = 34 \text{ cm}$, $BC = 50 \text{ cm}$ og $AC = 56 \text{ cm}$. Trekantens Vinkler er halverede, og Halveringslinierne skærer Cirklen i henholdsvis D , E og F ; gennem D , E og F trækkes Tangenter. Bevis, at den Trekant, som begrænses af disse Tangenter, er ligedannet med $\triangle ABC$. Find Siderne i den omskrevne Trekant, og find dens Areal.

116. I et Trapez er de parallelle Sider 38 cm og 80 cm, de andre Sider 39 cm og 45 cm. Find Arealet. Hvorledes kan man konstruere Trapezet af de givne Linier?
 117. Del et givet Parallelogram i to Dele, hvis Arealer forholder sig som 1 til 2:
 - a. Ved en ret Linie gennem den ene Vinkelspids.
 - b. Ved en ret Linie gennem et givet Punkt i den ene Side.
 - c. Ved en Linie parallel med den ene Diagonal.
 118. Del et Parallelogram i to andre, der er ligedannede, men ikke kongruente.
 119. Del et Trapez i to Dele, der er ligedannede.
 120. Tegn en vilkaarlig Femkant. Konstruer derefter en Femkant, som er ligedannet med den og har et tre Gange saa stort Areal.
 121. $ABCD$ er et givet Parallelogram. Gennem Punktet C skal man konstruere en Linie, som skærer AB 's Forlængelse i N og AD 's Forlængelse i M , saaledes at $\triangle ANM$'s Areal er 3 Gange saa stort som Parallelogrammets.
 122. Konstruer en retvinklet ligebenet Trekant, der har samme Areal som en given Rhombe.
 123. Konstruer en ligebenet Trekant, der har samme Areal som et givet Parallelogram, naar Trekantens Topvinkel skal være lig en af Vinklerne mellem Parallelogrammets Diagonaler.
-

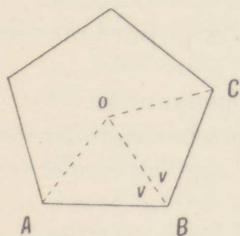
G. Regulære Polygoner.

66. En Polygon kaldes *regulær*, naar alle dens Sider er lige store, og alle dens Vinkler er lige store.

Eksempler: En ligesidet Trekant, et Kvadrat.

a. En Vinkel i en regulær n -kant er lig $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.
Ifølge 30 a.

b. Enhver regulær Polygon har en omskreven og en indskreven Cirkel med fælles Centrum.



Vinklerne A og B halveres. Halveringslinierne vil altid skære hinanden ifølge a. Deres Skæringspunkt O er da Centrum for de to Cirkler. Man har nemlig

$$\angle OAB = \angle OBA = v,$$

altsaa er $OA = OB$.

Trækkes OC , har man

$\triangle AOB \cong \triangle COB$ ifølge 24 b.

Altsaa er

$$OA = OC$$

og

$$\angle OCB = \angle v.$$

OC halverer altsaa $\angle C$.

Paa lignende Maade ser man, at O har den samme Afstand fra de andre Vinkelspidser.

O er altsaa Centrum for en omskreven Cirkel.

Da Linierne fra Vinkelspidserne til O halverer Vinklerne, har O samme Afstand til alle Siderne, altsaa er det ogsaa Centrum for en indskreven Cirkel.

O kaldes *Polygonens Centrum*. Linier fra Centrum til Vinkelspidserne kaldes *største Radier*. Linier fra Centrum vinkelret paa Siderne kaldes *mindste Radier*. En Trekant, der begrænses af to største Radier og en Polygonside, kaldes en *Centraltrekant*.

c. Alle Centraltrekanter i samme regulære Polygon er ligebenede og kongruente.

67 a. Naar man deler en Cirkelperiferi i n lige store Buer og trækker Korder til alle Buerne, faar man en regulær n -kant.

Den har alle sine Sider lige store, fordi de er Korder til lige store Buer.

Den har alle sine Vinkler lige store, fordi de er Periferivinkler, som spænder over lige store Buer.

b. Naar man deler en Cirkelperiferi i n lige store Buer og trækker Tangenter gennem alle Delingspunkterne, faar man en regulær n -kant.

Vinklerne er lige store, fordi enhver af dem er 180° minus en af Buerne.

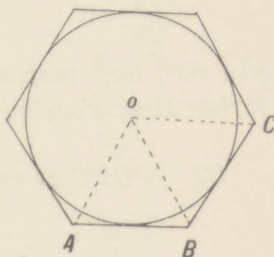
$$\angle ABO = \angle CBO \quad 37 \text{ e.}$$

$$\angle BAO = \angle BCO$$

og $OB = OB.$

Altsaa er $\triangle AOB \cong \triangle COB.$

og $AB = BC.$



Paa samme Maade vises, at BC lig den følgende Side.

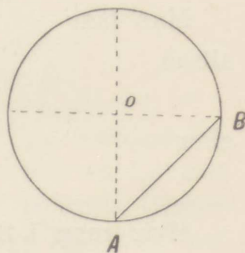
68. k_n betegner Siden i en indskreven regulær n -kant eller Korden til en Bue, som er en n -tedel af Cirkelperiferien.

Naar man i en Cirkel tegner to paa hinanden vinkelrette Diametre og forbinder to af deres Endepunkter, har man k_4 . Da $\triangle AOB$ er retvinklet, har man

$$k_4^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

$$k_4 = \sqrt{2r^2}.$$

a. $k_4 = r\sqrt{2}.$

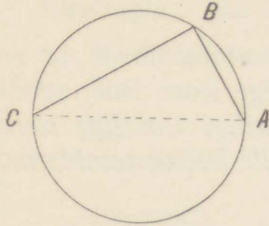


Naar man halverer Centervinklen paa 90° , faar man en Bue, der er $\frac{1}{8}$ af Periferien; ved fortsat Halvering kan man konstruere k_8 , k_{16} , k_{32} o. s. v.

Man konstruerer k_6 ved at afsætte en Korde lig Radius. Altsaa

b.

$$k_6 = r.$$



Naar $\cup AB = 60^\circ$ og $AC = 2r$,
er $\cup BC = 120^\circ$,

altsaa

$$BC = k_3,$$

$$k_3^2 = CA^2 - AB^2 = 4r^2 - r^2.$$

c.

$$k_3 = r\sqrt{3}.$$

Naar man halverer Centervinklen paa 60° , faar man en Bue, der er $\frac{1}{12}$ af Periferien; ved fortsat Halvering kan man konstruere k_{12} , k_{24} , k_{48} o. s. v.

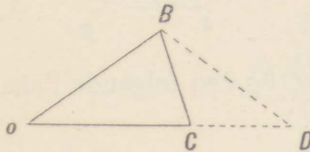
69. $\triangle OBC$ er en Centraltrekant i en regulær Tikant;

altsaa $\angle O = 36^\circ$

og $\angle OBC = \angle OCB = 72^\circ$.

OC forlænges til D , saaledes at

$$CD = CB.$$



Man har da

$$\angle D = \angle CBD = 36^\circ,$$

$$\angle OCB = 72^\circ;$$

$$BD = BO = r.$$

fordi

deraf

Man faar

$$\triangle DCB \sim \triangle DBO,$$

altsaa

$$\frac{DC}{DB} = \frac{DB}{DO}$$

eller

$$\frac{k_{10}}{r} = \frac{r}{r + k_{10}}.$$

Hvis man i Stedet for k_{10} i Proportionen indsætter et andet Liniestykke, bliver det ene Forhold større, men det andet mindre; de kan altsaa ikke vedblive at være lige store. Man har derfor:

Naar to Liniestykker baade har r til Differens og r

til Mellemproportional, er det mindste af dem k_{10} i den Cirkel, hvis Radius er lig r .

Da $\angle OBD = 108^\circ$ og $OB = BD = r$, er OD eller $(r + k_{10})$ altsaa Korden til 108° .

AB er Diameter i en given Cirkel med Radius r .

Radien OC oprejses vinkelret paa AB , og Midtpunktet M af OB findes. Med M til Centrum og MC til Radius tegnes en Cirkel, som skærer AB i P og AB 's Forlængelse i N . Af $\triangle PCN$ faar man da

$$\frac{PO}{CO} = \frac{CO}{ON}$$

eller

$$\frac{PO}{r} = \frac{r}{r + PO}.$$

Altsaa er $PO = k_{10}$ og $ON =$ Korden til 108° .

$$PM = MC = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2} \sqrt{5}.$$

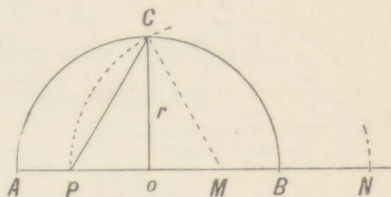
$$PO = PM - OM = \frac{r}{2} \sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

$$k_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

$$ON = OM + MN = \frac{r}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

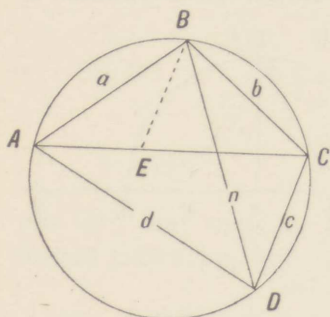
Naar man afsætter en Korde lig PO og trækker Radier til dens Endepunkter, har man altsaa en Centraltrekant i en regulær Tikant. Naar man halverer Centervinklen, faar man en Bue, hvis Korde er k_{20} . Ved fortsat Halvering kan man konstruere k_{20} , k_{40} , k_{80} o. s. v.

Man kan endvidere konstruere k_{15} , idet Buen er Differensen mellem en Bue paa 60° og en paa 36° , og naar man har konstrueret k_{15} , kan man konstruere k_{30} , k_{60} o. s. v.



70. Ved Beregning af Korder kan man ofte benytte følgende Sætning, som kaldes *den ptolemæiske Sætning* efter den græske Astronom og Matematiker Ptolemæos.

Naar en Firkant kan indskrives i en Cirkel, er Diagonalernes Produkt lig Summen af de modstaaende Siders Produkter.



$$AC = m.$$

$$\angle ABE \text{ afsættes } = \angle DBC,$$

$$\text{da } \angle BAE = \angle BDC,$$

$$\text{er } \triangle ABE \sim \triangle DBC$$

$$\text{og } \frac{a}{n} = \frac{AE}{c}$$

$$\text{eller } ac = n \cdot AE \dots \text{ I.}$$

Man har

$$\angle EBC = \angle ABD$$

og

$$\angle ECB = \angle ADB,$$

altsaa er

$$\triangle EBC \sim \triangle ABD$$

og

$$\frac{b}{n} = \frac{EC}{d}$$

eller

$$bd = n \cdot EC \dots \text{ II.}$$

Adderes I og II, faar man

$$ac + bd = n \cdot AE + n \cdot EC$$

eller

$$ac + bd = n \cdot m.$$

Eks. 1. Naar AB er Diameter, $AD = k_4$ og $AC = k_3$, bliver $DC = k_{12}$, $BC = k_6$ og $BD = k_4$.

Man faar da

$$2r \cdot k_{12} + r \cdot k_4 = k_3 \cdot k_4.$$

$$2r \cdot k_{12} = r \sqrt{3} \cdot r \sqrt{2} - r \cdot r \sqrt{2}.$$

$$k_{12} = \frac{r}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Eks. 2. Naar $AB = 2r$ og $BC = AD = k_5$, bliver $CD = k_{10}$ og $BD = AC =$ Korden til $108^\circ = r + k_{10}$.

Man faar da $k_5^2 + 2r \cdot k_{10} = (r + k_{10})^2$

$$k_5^2 = r^2 + k_{10}^2.$$

Af Tegningen i § 69 faar man

$$PC^2 = r^2 + k_{10}^2.$$

Altsaa

$$PC = k_5$$

Af Tegningen i § 69 faar man endvidere

$$PC^2 = k_{10} \cdot PN = k_{10} r \sqrt{5}.$$

$$PC^2 = r \sqrt{5} \cdot \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1) = \frac{r^2}{4} (10 - 2\sqrt{5}).$$

Eller

$$k_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

71. Naar man kender Siden og største Radius i en indskreven regulær n -kant, kan man beregne mindste Radius q_n ; og derefter kan man beregne Siden t_n og største Radius R_n i den omskrevne regulære n -kant.

Naar $AB = k_n$,

bliver $OC = q_n$,

$$AD = \frac{1}{2} t_n$$

og $OD = R_n$.

Af $\triangle AOC$ faar man

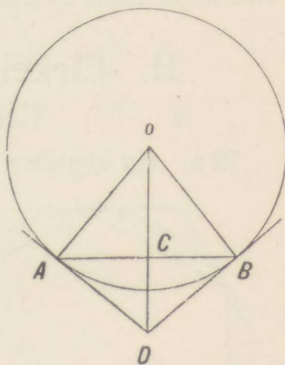
$$q_n = \sqrt{r^2 - \left(\frac{k_n}{2}\right)^2}.$$

Man har $\triangle OCA \sim \triangle OAD$,

da $\angle AOC$ er fælles

og $\angle ACO = \angle DAO = 90^\circ$.

Altsaa har man $\frac{OC}{OA} = \frac{CA}{AD} = \frac{AO}{DO}$



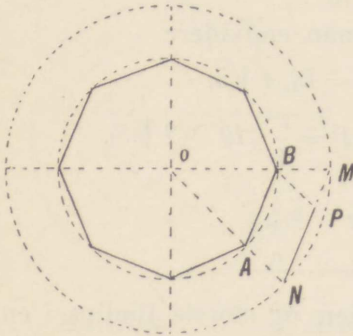
eller

$$\frac{Q_n}{r} = \frac{k_n}{t_n} = \frac{r}{R_n}$$

Deraf

$$t_n = \frac{r \cdot k_n}{Q_n}, \text{ og } R_n = \frac{r^2}{Q_n}$$

Konstruer en regulær Ottekant af Siden. Man tegner

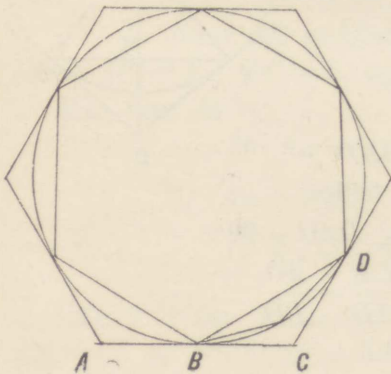


en vilkaarlig Cirkel og deler den i otte lige store Dele ved at halvere Vinklerne mellem to paa hinanden vinkelrette Diametre. NP afsættes lig den givne Side a , gennem P trækkes en Linie parallel med NO , og gennem B trækkes en Linie $BA \neq PN$. $\triangle OAB$ er da en Central-trekant i den søgte Polygon.

Paa lignende Maade kan man altid konstruere en regulær n -kant med given Side, naar n har en saadan Værdi, at man kan dele en Cirkellinie i n lige store Dele.

H. Cirkelperiferiens Længde. Cirkelns Areal.

72 a. En regulær indskreven n -kant har kortere Perimeter end en regulær n -kant, der er omskrevet om samme Cirkel.



Thi $BD < BC + CD$.

b. Naar man fordobler Sideantallet, vil den indskrevne Perimeter vokse, men den omskrevne vil aftage.

Bevises paa lignende Maade.

c. Naar man fordobler Sideantallet i det uendelige, vil Forskellen mellem den omskrevne og den indskrevne Perimeters Længde aftage uden Grænse.

Kaldes Forskellen f , har man

$$f = n \cdot t_n - n \cdot k_n = n \cdot t_n - n \frac{Q_n \cdot t_n}{r}$$

eller

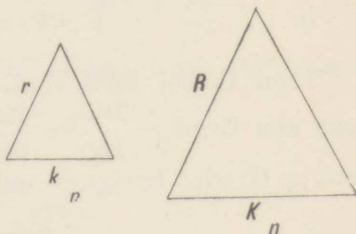
$$f = n \cdot t_n \left(1 - \frac{Q_n}{r}\right).$$

Produktet $n \cdot t_n$ vil stadig aftage, og Størrelsen $\left(1 - \frac{Q_n}{r}\right)$ vil aftage uden Grænse, naar n vokser i det uendelige.

De to Perimetres Længder har altsaa en fælles Grænseværdi for $n = \infty$. Denne Grænseværdi kaldes *Cirkelperiferiens Længde*.

73 a. Forholdet mellem Periferi og Diameter er ens for alle Cirkler.

Det er tilstrækkeligt at vise, at Forholdet er ens for to vilkaarlige Cirkler. I hver af dem indskrives en regulær n -kant; de to Polygons Centraltrekanter er da ensvinklede. Man har altsaa



$$\frac{r}{R} = \frac{k_n}{K_n}$$

eller

$$\frac{2r}{2R} = \frac{n \cdot k_n}{n \cdot K_n}.$$

Deraf faaes

$$\frac{n K_n}{2 R} = \frac{n \cdot k_n}{2 r}.$$

De to Cirkelperiferiers Længder kaldes P og p . For $n = \infty$ faar man

$$\frac{P}{2 R} = \frac{p}{2 r}.$$

Det konstante Forhold $\frac{p}{2r}$ betegnes med Bogstavet π .
Tallet π er irrationalt, vi vil beregne det med Fejlgrænsen $\frac{1}{2}$.

Man har $6 \cdot t_6 > p > 6 \cdot k_6$
eller $\frac{6 \cdot t_6}{2r} > \pi > \frac{6 \cdot k_6}{2r},$

men $k_6 = r$ og $t_6 = \frac{r^2}{2r} = \frac{2}{3} r \sqrt{3}.$

Altsaa $2 \sqrt{3} > \pi > 3.$

Man faar da $2 \cdot 1,75 > \pi > 3$

eller $3,5 > \pi > 3.$

Af tilnærmede Værdier for π har man $\pi = \frac{22}{7},$
 $\pi = 3,14$ og $\pi = 3,14159$. Den første er for stor.

Af $\frac{p}{2r} = \pi$ faar man

b. $p = 2r\pi$ og $r = \frac{p}{2\pi}.$

I en Cirkel med Radius r er Længden af en Bue paa een Grad $= \frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$. Naar Længden af en Bue paa g Grader betegnes ved b , har man

c. $b = \frac{\pi r g}{180}.$

74. Naar A betegner Areal tallet for en regulær omskrevne n -kant, har man

$$A = n \cdot t_n \cdot \frac{r}{2}.$$

Hvis n fordobles i det uendelige, bliver $n \cdot t_n$ til Cirkelperiferiens Længde, som er $2\pi r$, og A bliver til Cirkelns Areal. Kaldes Cirkelns Areal C , har man

$$C = p \cdot \frac{r}{2} = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}$$

eller $C = \pi \cdot r^2.$

Naar et Udsnit paa g° har Areal tallet U , faar man

$$U = \frac{\pi r^2 g}{360}.$$

Elimineres g af denne Ligning og $b = \frac{\pi r g}{180}$, faar man Arealet udtrykt ved Radiens Længde og Buens Længde.

$$U = \frac{1}{2} r \cdot b.$$

Et Cirkelafsnits Areal er *Summen af et Udsnits Areal og en Trekants Areal*, naar Afsnittets Bue er større end 180° ; men det er *Differensen mellem et Udsnits Areal og en Trekants Areal*, naar Buen er mindre end 180° .

Eksempel 1. Find Arealet af et Afsnit paa 300° , naar Cirkelns Radius er lig r .

$$A = \frac{\pi r^2 300}{360} + \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{r^2}{12} (10\pi + 3\sqrt{3}).$$

Eksempel 2. Find Arealet af et Afsnit paa 90° , naar Radius er lig r .

$$A = \frac{\pi r^2 90}{360} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{4} (\pi - 2).$$

Opgaver.

124. Konstruer en regulær Tolvkant af mindste Radius.
125. Bevis, at en ligesidet Trekants omskrevne Cirkel har dobbelt saa stor Radius som dens indskrevne Cirkel.
126. En regulær Sekskant og en regulær Trekant har samme største Radius. Bevis, at den enes Central-trekant har samme Areal som den andens.
127. En regulær Sekskant og en regulær Trekant har samme mindste Radius. Bevis, at Trekantens Side er tre Gange saa stor som Sekskantens.
128. Fra et Punkt i en ligesidet Trekants omskrevne Cirkel trækkes Linier til Vinkelspidserne. Bevis, at den ene af disse Linier er lig Summen af de to andre.

129. Bevis, at Diagonalerne i en regulær Femkant begrænser en ny regulær Femkant, og find Forholdet mellem Siden i den første og Siden i den anden.
130. Find Arealet af en regulær Ottekant, naar dens største Radius $= r$.
131. I en Cirkel med Radius r er der indskrevet en regulær Tolvkant. Konstruer en ligesidet Trekant, der har samme Areal som Tolvkanten.
132. Diameteren i et Vognhjul er 1,4 m; hvor mange Omdrejninger gør Hjulet, mens Vognen kører 1 km.

$$\pi = \frac{99}{7}.$$
133. Find Radius i en Cirkel, hvori en Bue paa 75° er 82,5 cm lang.
134. Et Cirkeludsnit har et Areal paa 220 cm^2 , og Buens Længde er 22 cm. Hvor lang er Radius, og hvor mange Grader er Udsnittet.
135. Find Arealet af et Cirkelafsnit paa 120° , naar Cirkelens Radius lig r .
136. Der er givet et Cirkeludsnit. Konstruer et Cirkeludsnit med samme Areal, men dobbelt saa stor Centervinkel.
137. Der er givet et Cirkeludsnit. Konstruer et andet med tre Gange saa stort Areal, men halv saa stor Centervinkel.
138. I et Udsnit paa 60° er indskrevet en Cirkel. Find Forholdet mellem Cirkelens Areal og Udsnittets Areal.
139. Tre Cirkler med Radius r ligger saaledes, at enhver af dem rører de to andre. Find Arealet af den Figur, som begrænses af de tre mindste Buer.
140. Konstruer et Cirkeludsnit paa 36° med samme Areal som en given Cirkel.
141. Der er givet en retvinklet ligebenet Trekant. Konstruer en Cirkel, som har sit Centrum i Hypotenusen og rører begge Kateterne. Find Forholdet mellem Cirkelens Areal og Trekantens Areal.

142. I en Rhombe med Siden a er den ene Vinkel 30° . Find den indskrevne Cirkels Areal.
143. Et Kvadrat har Siden a ; med hver Vinkelspids som Centrum og $\frac{a}{2}$ som Radius tegnes en Cirkelbue paa 90° , saaledes at den ligger inde i Kvadratet. Find Arealet af den Figur, som begrænses af de 4 Buer, og find Radius i den Cirkel, som rører dem alle.
144. Der er givet en Cirkel med Radius r . Fra et Punkt i dens Periferi trækkes Korden til 60° , Korden til 120° og Diameteren. Find Arealerne af de fire Figurer, hvori Cirklen deles.
145. I en Cirkel med Radius r trækkes to paa hinanden vinkelrette Korder, som hver afskærer en Bue paa 120° . Find Arealerne af de fire Dele, hvori de deler Cirklen.
146. Et Trapez har baade en indskreven og en omskreven Cirkel; de parallelle Sider er henholdsvis 24 cm og 54 cm. Find Trapezets Areal, den indskrevne Cirkels Areal og den omskrevne Cirkels Areal.
147. En Cirkelring er begrænset af to Cirkelperiferier med Radierne R og r . Find Cirkelringens Areal og konstruer en Halvcirkel med samme Areal.
148. Inde i en given Cirkel med Radius r er der tegnet 6 lige store Cirkler, saaledes at enhver af dem rører to af de andre og den givne. Find Summen af de 6 Cirklers Arealer og konstruer en Cirkelring med dette Areal, naar dens største Radius skal være r .
149. Der er givet en Cirkel med Radius R . Konstruer en Cirkelring, hvis Areal er lig den givne Cirkels, naar Summen af de to Cirkelperiferier, som begrænser den, skal være lig det dobbelte af den givne Cirkelperiferi.
150. I en ligesidet Trekant er indskrevet en anden ligesidet Trekant, saaledes at hver Side i den ene er vinkelret paa en Side i den anden. Find Forholdet

mellem deres Arealer. Bevis, at den Cirkel, som kan omskrives om den lille Trekant, vil skære den store Trekants Perimeter i Vinkelspidserne af en regulær Sekskant, hvis Areal er Middelværdien af de to Trekanters Areal.

-
151. Vinklerne i en Trekant forholder sig som 2:3:4. Find Gradeantallene af de Buer, hvori den omskrevne Cirkel deles af Vinkelspidserne, og find Gradeantallene af de Buer, hvori den indskrevne Cirkel deles af Røringspunkterne.
 152. Konstruer et Parallelogram af en Side og begge Højderne.
 153. Der er givet en retvinklet Trekant. Konstruer et Liniestykke med given Længde, saaledes at dets ene Endepunkt ligger paa den ene Katete, dets andet Endepunkt paa den anden Katetes Forlængelse og dets Midtpunkt paa Hypotenusen.
 154. Der er givet to parallelle Linier og to Punkter. Gennem de givne Punkter skal man trække to parallelle Linier, som sammen med de givne Linier begrænser en Rhombe.
 155. En Trekant ABC er indskreven i en Cirkel; D , E og F er Midtpunkterne af de tre Buer. Bevis, at de Linier, som halverer Vinklerne i Trekant ABC , er Højder i Trekant DEF .
 156. Et Kvadrat er indskrevet i en Rhombe. Bevis, at Kvadratets Sider er parallelle med Rhombens Diagonaler.
 157. $ABCD$ er en indskreven Firkant; E er Skæringspunktet mellem AD 's og BC 's Forlængelser, og O er Centrum for $\triangle CDE$'s omskrevne Cirkel. Bevis, at $OE \perp AB$.
 158. I Parallelogrammet $ABCD$ er M Midtpunktet af AD

og N Midtpunktet af BC . Bevis, at Linierne AN , DN , BM og CM danner et Parallelogram, og at Forlængelserne af dets ene Diagonal gaar gennem Midtpunkterne af AB og CD .

159. Konstruer en Trekant af a , h_b og m_c .

160. Konstruer en Cirkel, som rører en given Linie og en given Cirkel,

a) naar man kender Røringspunktet paa Cirklen,

b) naar man kender Røringspunktet paa Linien.

161. To Cirkler rører hinanden udvendig. En ret Linie rører den ene Cirkel i A og den anden i B . Bevis, at AB er Mellemproportional mellem Cirklernes Diametre.

162. Der er givet to Liniestykker a og b . Konstruer en ligebenet Trekant, hvis Topvinkel er 75° , og hvis Grundlinie er Mellemproportional mellem

$$a + \frac{b}{3} \text{ og } a\sqrt{2} + b.$$

163. Der er givet en Cirkel, en ret Linie og en Vinkel v . Træk en Tangent til Cirklen, saaledes at den danner Vinklen v med den givne Linie.

164. $ABCD$ er et vilkaarligt Rektangel. En Linie gennem Diagonalernes Skæringspunkt og vinkelret paa AC skærer de to længste Sider i N og M og de to mindste Siders Forlængelser i P og Q . Bevis, at Rektanglets Diagonal er Mellemproportional mellem NM og PQ .

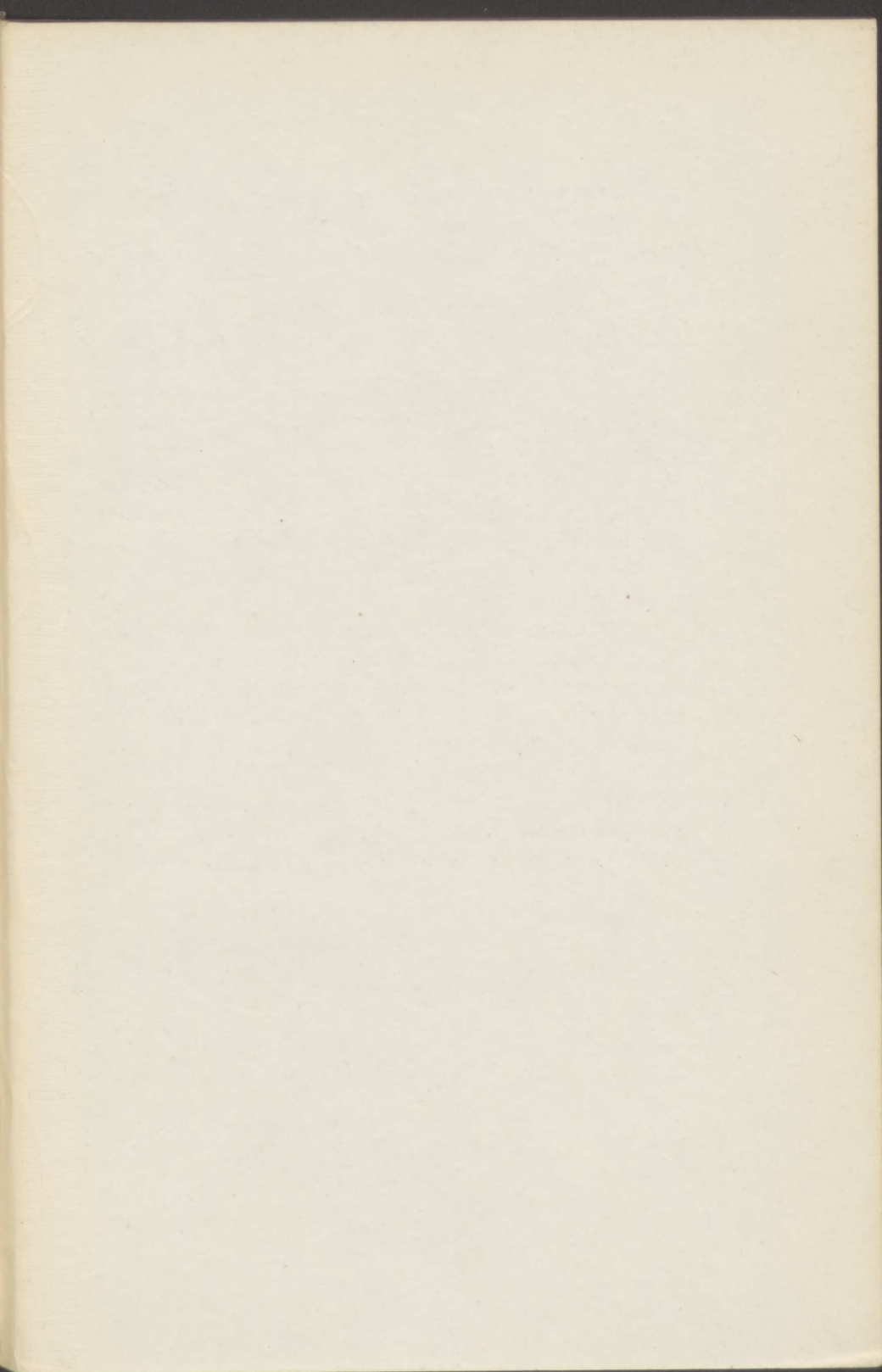
165. En Trekant ABC er given. Konstruer en Transversal, som er parallel med BC og lig $\frac{1}{3} BC$. Find Forholdet mellem Arealerne af de to Dele, hvori Transversalen deler Trekanten.

166. Gennem et Punkt inde i en Cirkel skal man trække den mindst mulige Korde.

167. Inde i en given Trekant skal man finde et Punkt, hvorfra de tre Sider ses under lige store Vinkler.

168. To sammenstødende Sider i et Parallelogram er

- henholdsvis 88 cm og 75 cm, og den ene Diagonal er 55 cm. Find Arealet og Højderne.
169. Find Arealet af en regulær Ottekant, hvis mindste Diagonal er lig a .
170. Der er givet en Trekant og en Firkant. Konstruer et Kvadrat, hvis Areal er lig Summen af de givne Figurers Arealer.
171. I en Cirkel med Radius r skal man finde Forskellen mellem Arealet af et Afsnit paa 120° og Arealet af et Afsnit paa 60° .
172. Fra et vilkaarligt Punkt inde i et Parallelogram trækkes Linier til alle Vinkelspidserne; derved deles Parallelogrammet i 4 Trekanter. Bevis, at Summen af de to Trekanters Arealer er lig Summen af de to andre.
173. Find Arealet af en ligesidet Trekant, naar dens indskrevne Cirkels Radius er 6 cm.
174. Der er givet et ret Liniestykke m og en Trekant med Arealet T . Konstruer et Rektangel, hvis Omkreds er lig m , og hvis Areal er lig T . Hvilket Rektangel med Omkredsen m har størst Areal?
175. Fra et Punkt i en regulær Sekskants omskrevne Cirkel trækkes Linier til alle Vinkelspidserne. Bevis, at Summen af de tre af disse Linier er lig Summen af de tre andre.
-



Lærebøger for tekniske Skoler.

N. F. Jensen og O. A. Smith: Matematik for tekniske Skoler. II Algebra...... 1 Kr. 25 Øre

— **III Geometri.**..... 1 Kr. 60 Øre

Endvidere udkommer i Løbet af Sommeren 1915 I Aritmetik og IV Trigonometri.

Chr. Axel Jensen og E. Rondahl: Stilarternes Historie. Grundrids af Ornamentikkens og Arkitekturdekorationens Udvikling fra de ældste Tider til vore Dage Udgivet med Understøttelse af Indenrigsministeriet og af det Reiersenske Fond. Anbefalet af Indenrigsministeriet til Brug i de tekniske Skoler..... 8 Kr., indb. 10 Kr.

Chr. Jensen og A. L. Vanggaard: Tekniske Anvendelser af Kemi og Fysik I: Jærn—Kul—Petroleum. Kartoneret..... 1 Kr. 25 Øre

J. Jonas og A. L. Vanggaard: Materiallære til Brug i tekniske Skoler. Under Arbejde. Flere af Afsnittene foreligger færdige og kan faas særskilt.

Karl Mortensen: Lærebog i Tysk for tekniske Skoler I. (Til Brug for Aften- og Dagskoler). Anbefalet af Indenrigsministeriet til Brug i de tekniske Skoler. Kartoneret..... 2 Kr.

— **Lærebog i Tysk for tekniske Skoler II.** (Til Brug for Dagskoler). Kartoneret..... 1 Kr. 25 Øre

E. Rondahl: Vejledning i Akvarelmaling. Med 9 Farvetavler og mange Tekstillustrationer..... 3 Kr.

— **Perspektiv.**..... 1½ Kr.

R. Wendt: Skriftarter til Brug for Maskin- og Bygningstegnere..... 1 Kr. 50 Øre

Jul. Gjellerups Forlag.