DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

INDUSTRI-
FORENINGEN

DANMARKS TEKNISKE BIBLIOTEK
m 00 718 1930 Bd. 1
300005190200
ex. 2

gl
51(09) Zeu
1893 Bd. 1.
(Ex. 2)

Zeuthen, H. G.

MATHEMATIKENS HISTORIE

~~Bd. 1:~~

OLDTID OG MIDDELALDER

1893

Ex. 2

5 – 21

FORELÆSNING

OVER

MATHEMATIKENS HISTORIE

AF

H. G. ZEUTHEN

Bd. 1:

OLDTID OG MIDDELALDER

INDUSTRI-
FORENINGEN.

KJØBENHAVN

ANDR. FRED. HØST & SØNS FORLAG

—

1893

KJØBENHAVN — GRÆBES BOGTRYKKERI

Fortale

I den Fremstilling af Mathematikens Historie, som her forelægges, søger jeg især at fremdrage, hvad der er af Vigtighed at vide for Mathematikere og Mathematiklærere. For dem kommer det ikke saa meget an paa at kjende mange historiske Enkeltheder, at vide, hvem der først har opdaget denne eller hin Sandhed eller opfundet denne eller hin Fremgangsmaade, som paa at kjende de Skikkelser, hvori de forskjellige Sandheder og Fremgangsmaader ere fremkomne, og den Brug, man har gjort af dem. Den rette Opfattelse af deres Oprindelse vil tillige være Betingelsen for at forstaa den Udvikling, de videre ere undergaaede, indtil de efterhaanden have givet Mathematiken sin nuværende Skikkelse.

Idet jeg især lægger Vægt herpaa, er jeg i god Overensstemmelse med Programmet for Skoleembedsexamen i Mathematik. Naar der nemlig forlanges «et kort Omrids af Mathematikens Historie, i Forbindelse med hvilket Examinanden maa have gjort sig direkte bekjendt med Euklids Elementer og Descartes' Geometri», peger denne Fordring hen paa, at der ønskes en saadan Forstaaelse

af Mathematikens Historie, som kun kan opnaas ved noget Kjendskab til selve de svundne Tiders Mathematik. I nærværende Bind, som kun omhandler Oldtid og Middelalder, faar jeg af de nævnte Forfattere kun at gjøre med Euklid. Ved, under udtrykkelig Henvisning til de enkelte Sætninger at fremdrage og forklare de Steder, hvoraf der særlig er noget at lære, søger jeg at tilvejebringe et frugtbart Kjendskab til ham. Jeg stræber dernæst at benytte dette til at gjøre forstaaeligt, hvad jeg har at meddele om de andre Forfattere, som jeg ikke kan vente, at Læserne faa i Hænde. Blandt andet har jeg benyttet Euklids Elementer til Forklaring af de logiske Former, som iagttages saa strengt af de græske Mathematikere. Jeg har derved ikke blot holdt mig til den Betydning, som disse havde for Grækerne, men tillige — i Tillæg med mindre Tryk — prøvet, hvilken Betydning de have i og for sig. Jeg haaber derved særlig at give Mathematiklærere Midler i Hænde til at vælge og vrage derimellem; thi til begge Dele er der Anledning.

Lægger jeg nu end med de her udtalte Formaal for Øje ikke an paa at give selve den historiske Ramme nogen stor Udstrækning, bør den dog være saa god og paalidelig som muligt. Dette opnaas let ved Benyttelsen af Cantor: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, et Værk, der giver alle faktiske Oplysninger, som kunne skaffes tilveje, med en sjælden Fuldstændighed og Paalidelighed. Af disse Egenskaber har jeg ogsaa kunnet drage Nytte under de Undersøgelser, som efter Planen for min Bog nærmest maatte udgjøre mit eget Arbejde. Vel maatte Materialet hertil fortrinsvis hentes fra Studiet af de betydeligste mathematiske Forfattere i de Tider, som jeg behandler; men under dette gav Cantors Uddrag mig en god Vejledning til at finde,

hvad jeg havde Brug for, ogsaa da, naar jeg har opfattet og benyttet det anderledes end han. Tillige vidste jeg, at jeg trygt kunde stole paa hans Meddelelser om Indholdet af de mindre betydelige Værker, som jeg ikke havde Adgang eller Lejlighed til at blive direkte bekjendt med. Det er dog ikke alene i rent faktiske Spørgsmaal, at jeg har bygget paa Cantor. Til hans Undersøgelser har jeg for en stor Del holdt mig med Hensyn til de Tider, da Mathematiken enten blot gik tilbage eller dog ikke gjorde nogle af de virkelige Fremskridt, som det var min Opgave at forfølge. Hvad jeg f. Ex. meddeler om Regning paa Abacus i Middelalderen og dens Oprindelse, er Resultaterne af Cantors omhyggelige og skarpsindige Prøvelse.

Det er iøvrigt en Selvfølge, at jeg ogsaa under mit Studium af de store Mathematikeres opbevarede Arbejder og deres Sammenhæng indbyrdes og med de mathematiske Arbejder og Resultater, som kun kjendes af Beretninger, har benyttet den Hjælp, som jeg kunde hente i vor Tids temmelig rige Litteratur om Mathematikens Historie. Nærværende Bogs didaktiske Karakter har dog hindret mig i at anføre, hvad jeg skylder denne eller hin. For at gjøre dette maatte jeg nemlig dels fremstille den Tanke eller Opfattelse, som jeg umiddelbart skyldte vedkommende, dels gjøre Rede for de Modifikationer, som den var undergaaet under min videre Bearbejdelse, og for Grundene til disse. Hertil var der ikke Plads, men jeg har maattet nøjes med kort at angive Grundene for de Opfattelser, ved hvilke jeg er bleven staaende. Andensteds har jeg dog ikke unddraget mig en saadan indgaaende Diskussion, ved hvilken jeg ogsaa havde Lejlighed til at sige, hvad jeg skyldte hver enkelt Forfatter, nemlig i mit Arbejde om Keglesnitslæren i

Oldtiden[1]. Ganske vist behandles der kun den højere Geometri i Oldtiden; men denne hang selvfølgelig saa nær sammen med den elementære Mathematik i Oldtiden, at jeg ogsaa maatte begrunde væsentlige Sider af min Opfattelse af denne, som atter staar i nøje Sammenhæng med næsten alt, hvad der videre omtales i dette Bind.

Her skal jeg derfor væsentlig nøjes med at nævne de Mænd, hvis Arbejder over Mathematikens Historie have haft Indflydelse af forskjellig Art paa mine egne Studier og derved paa nærværende Arbejde: Chasles, Brettschneider, Hankel, Cantor, P. Tannery, Heiberg, Allmann, og som Udgivere, Oversættere og Kommentatorer, atter Heiberg, Hultsch, Wertheim, Colebrooke, Woepcke, Boncompagni. Af Enkeltheder bør jeg dog tilføje, at jeg foruden meget andet, som tildels er omtalt i «Keglesnitslæren i Oldtiden», skylder P. Tannery Forklaringen (S. 29) af Beretningen om Thales' Geometri (*Géométrie grecque* p. 89 ff.) og (S. 55—56) af Pythagoras Sætning, at «Tingene ere Tal» (*Géom. gr.* p. 124). Endvidere skal jeg anføre, at jeg vel først fik samme Forfatters grundige og aandfulde Værk: *Recherches sur l'astronomie ancienne,* Paris 1893, i Hænde, efterat Trykningen af min Bog var begyndt, men at den dog gav mig Anledning til delvis at omarbejde de da endnu utrykte Afsnit om Grækernes beregnende og sfæriske Geometri. I en Bog som nærværende kunde jeg dog kun med nogen Varsomhed benytte, hvad han selv udtrykkelig betegner som Hypotheser, hvor naturlig en Forklaring de end give paa Forhold,

---

[1] Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter 6. Række 3. Bind og *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* Deutsche Ausgabe von Dr. R. v. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886, Andr. Fred. Høst & Søn.

om hvis fulde Sammenhæng der ikke i den opbevarede Litteratur foreligger tilstrækkelige Oplysninger. —

Endnu skal jeg bemærke, at nærværende Bog udkommer med Understøttelse af Professorernes Fritrykskonto og ved velvillig Imødekommen af Forlæggeren.

Kjøbenhavn i September 1893.

H. G. Zeuthen.

Indhold

Side

Indledning.

1. Mathematikens Forhistorie 1
2. Ægyptere og Babyloniere 8

Den græske Mathematik.

1. Historisk Overblik 13
2. Den pythagoræiske Mathematik 28
3. Den geometriske Arithmetik 35
4. Den geometriske Algebra 38
5. Nummeriske kvadratiske Ligninger; Kvadratrodsuddragning 47
6. Uendelighedsspørgsmaalet 55
7. Cirklens Kvadratur 61
8. Vinklens Tredeling; Indskydninger 68
9. Terningens Fordobling 71
10. Theoremer og Problemer; den geometriske Konstruktions Betydning 77
11. Den analytiske Methode; den analytisk-synthetiske Fremstillingsform 80
12. «Elementer»; analytiske Hjælpemidler 91
13. Overblik over Euklids Elementer; synthetisk Lærebygning 94
14. Euklids geometriske Forudsætninger 100
15. Anmærkning om Geometriens Forudsætninger 115
16. Den almindelige Proportionslære; Euklids 5. og 6. Bog .. 122
17. Kommensurable Størrelser og deres Behandling ved Tal; Euklids 7.—9. Bog 135
18. Inkommensurable Størrelser; Euklids 10. Bog 138
19. Stereometriens Elementer; regulære Polyedre; Euklids 11. og 13. Bog 141
20. Exhaustionsbeviset; Euklids 12. Bog 145

Side
21. Archimedes' infinitesimale Bestemmelser 155
22. Archimedes' Ligevægtslære 164
23. Læren om Keglesnit før Apollonios 168
24. Apollonios' Keglesnit 175
25. Rumlige Steder og Opgaver 186
26. Den beregnende Geometri 194
27. Sfærisk Geometri 204
28. Den græske Geometris Forfald 207
29. Den senere græske Arithmetik; Diofantos 212

Den indiske Mathematik.

1. Kort Overblik 228
2. Talbenævnelse, Talbetegnelse og Talregning før og hos Inderne 231
3. Talregningens Anvendelser 241
4. Algebra og Taltheori; Geometri 245

Middelalderen.

1. Almindelig Indledning 254
2. Arabernes Arithmetik og Algebra 261
3. Arabernes Trigonometri 275
4. Mathematikens første Gjenopvaagnen i Europa 277

Berigtigelse og Tilføjelse.

S. 163, L. 8—12. Den her anførte Ufuldstændighed skyldes sikkert kun Unøjagtighed i den opbevarede Text og kan altsaa ikke bruges som Argument. Hvad jeg deraf udleder, skal jeg imidlertid andensteds udførligere begrunde.

S. 202, L. 12 tilføjes: Ogsaa denne Vanskelighed fandt man Midler til at overvinde, paa samme Tid som man til Brug ved de større astronomiske Udregninger indførte Sexagesimalsystemet. Ptolemaios' Kvadratrodsuddragninger ere udførte i dette ved omtrent den samme Fremgangsmaade, som vi nu anvende i Decimalsystemet.

INDLEDNING.

1. Mathematikens Forhistorie.

Ved en historisk Forelæsning kan det altid være et Spørgsmaal, hvor man skal begynde. Man kan begynde der, hvor der foreligger paalidelige positive Meddelelser, som umiddelbart give en paalidelig positiv Viden, hvori det da er Historikerens Sag at tilvejebringe den rette Sammenhæng, og man kan begynde med Forhistorien, som maa dannes ved Sammenføjning af en Mængde yderst forskjelligartede Oplysninger, der enkeltvis ikke kunne betragtes som historiske Kilder. Nærmest ved virkelig Historie komme blandt disse de Traditioner og Sagn om Skikke og Begivenheder i endnu ældre Tider, som forekomme i de ældste virkelige Overleveringer. Disses Forklaring maa støttes ved de Fund, som indeholde Gjenstande, der have været tilvirkede og brugte i hine gamle Tider. Fundenes Betydning maa belyses ved deres indbyrdes Forhold i Henseende til Sted og Tid. Omvendt bidrage de ogsaa til at oplyse de Forbindelser, der have været mellem Findestederne, og Tidsforholdene mellem de Slægter, der have brugt dem. Hvad der i disse forskjellige Henseender kan siges om hengjemte ydre Gjenstande, gjælder ogsaa om de Ord i

Sproget, hvis Ælde fremgaar af deres Forekomst i forskjellige bekjendte levende og døde Sprog. De vidne om gammelt Kjendskab til tilsvarende Begreber.

Ved Behandlingen af det saaledes tilvejebragte Stof maa man atter ty til andre Hjælpekilder. For at danne sig en Mening om, hvorledes en Gjenstand er tilvirket og brugt, hvorledes et Begreb er opstaaet og sat i Forbindelse med andre, maa man først vide, hvorledes dette overhovedet kan ske og har kunnet ske med de Hjælpemidler og den Opfattelse af Tingene, som kan antages at have staaet til Raadighed den Gang. Herom er det ofte vanskeligt at dømme for et Kulturmenneske i Nutiden, som er vant til at bruge en Mængde af de nu existerende, legemlige og aandelige, Hjælpemidler eller tilegnede Færdigheder uden selv ret at vide, hvilken Nytte de gøre ham, og hvilke af dem det vilde være let, hvilke vanskeligt at erstatte ved andre. For at faa Oplysning herom ere vi henviste til at iagttage dels vore egne Børn, dels uciviliserede Folkeslag eller blot Folkeslag, der have en anden Civilisation end vi. Til Gjengjæld vil det, som Forhistorien oplyser, bidrage til Forstaaelsen af Erkjendelsens Udvikling hos Børn og af de forskjellige Folks Sæder og Skikke.

Det ses saaledes, at baade egentlige Historikere og egentlige Oldgranskere, baade Naturforskere, der bestemme Fundenes, og Sproggranskere, der bestemme Ordenes Alder og Forbindelser, at saavel Pædagoger ja Psykologer og Erkjendelsestheoretikere som Etnografer maa levere deres Bidrag til et forhistorisk Studium. Gjælder dette et særligt Fag, maa den særlige Fagmand komme til for at udrede alle indre Forbindelser i det tilvejebragte Stof. Og alle de her nævnte Forskere ville af de forhistoriske Studier høste Udbytte for deres eget Fag.

Ogsaa Mathematiken har sin Forhistorie, og den hører ikke til de mindst betydningsfulde. Ved at indskrænke sig til et stærkt begrænset og selvstændig fremtrædende Stof kan den føre til forholdsvis sikre og klare Resultater. Det, man deraf faar at vide om de tidlige Folkeslags Behandling af Størrelser ved Tal og rumlig Fremstilling, giver et væsentligt Bidrag til Forstaaelsen af deres Evne til at gjøre sig Jorden underdanig og sætter derved bedre istand til at benytte de øvrige Vidnesbyrd om deres Leven og Færden. Ved at oplyse det Grundlag, hvorpaa Menneskeslægten senere har opbygget en mere vel ordnet Behandling af Mathematiken, yder den ogsaa et godt Bidrag til at opklare det erkjendelsestheoretiske Grundlag for denne Videnskabs første og vigtigste Begreber.

For at faa Mathematikens Forhistorie fremdraget maa man hos Sprogmændene søge Oplysning om Alderen af Benævnelserne paa de simpleste Tal og de i forskjellige Sprog anvendte Midler til at benævne Tal sammensatte efter Tiere, Tyver eller paa anden Maade, som kan være benyttet i Inddelinger for Maal eller Mynter (Tolvtalsystem, Sextentalsystem o. s. v.). Man maa i Indridsninger og Inskriptioner eller i gamle skrevne Mindesmærker først opsøge Betegnelserne for simple Tal, hvilke i de tidligere Tider som oftest bestaa i et Mærke for hver Ener, og dernæst søge de mere udviklede Tegn for sammensatte Tal, som f. Ex. kunne være dannede ved Gjentagelse af et Tegn for hver decimal Enhed som hos Romerne. Man maa opsøge Spor af disse Tegns eller mekaniske Hjælpemidlers Anvendelse til Udførelse af simple Regninger. Muligvis kan man da i gamle Tiders Billedskrift ogsaa finde Tegn for Operationer, som naar paa ægyptiske Papyrushaandskrifter en Fuglefod ved den Maade, hvorpaa den er vendt, paa en meget tydelig

Maade angiver, om et Tal gaar «til» eller «fra» og altsaa spiller en lignende Rolle som vore Tegn + eller ÷.

For Rumopfattelsens Vedkommende bliver den første Afbildning, man træffer paa, et Vidnesbyrd om nogen Forestilling om Figurer, af hvilke den ene er i det mindre, hvad den anden er i det større, altsaa om ligedannede Figurer. Vidnesbyrdet bliver saa meget tydeligere, som Perspektiv ikke kjendes, og Afbilderen altsaa, om end ofte kun med ringe Held, tilstræber en virkelig Ligedannethed. Denne Stræben maa være bevidst, naar Afbildningen har samme Antal Dimensioner som Gjenstanden, der skal fremstilles, naar altsaa enten den første henhører under Skulptur, eller en ved sine Omrids i Planen fremstillet Gjenstand selv er eller nærmer sig til at være plan. Særlig gjælder dette, naar Fremstillingen kan opfattes som en Model, som et Kort eller et Grundrids af en Bygning, og end mere, hvis den endog kan opfattes som Forsøg paa en geometrisk Figur, Da det ved den første Benyttelse af saadanne Figurer, det være sig under Menneskehedens Udvikling eller ved vore Børns Undervisning, maa være klart, at det er ligegyldigt, om Figuren er tegnet noget mindre eller større, gjøres der her, længe før nogen klar Definition kan gives paa ligedannede Figurer, en bevidst Anvendelse af saadanne.

Et gammelægyptisk Gravkammer, hvis Dekoration er ufuldendt, viser, hvorledes denne Forestilling endog har ført til en planmæssig Tilvejebringelse af Ligedannethed. Det ses nemlig af den, at man for at overføre et Billede i en ny Maalestok paa Væggen har inddelt denne og Billedet i Kvadrater ved to Systemer Paralleler og dernæst paa hvert af Væggens Kvadrater overført, hvad der findes i det tilsvarende Kvadrat paa

Forbilledet. Det benyttede Hjælpemiddel er i Virkeligheden en Anvendelse af retvinklede Koordinater, udtrykte i hele Tal ved den anvendte Kvadratside som Enhed, og ensliggende Punkter tilvejebringes som saadanne, hvis to Koordinater, hver for sig, staa i et givet Forhold.

Under den videre Efterforskning af forefundne Afbildninger eller Dekorationer maa man særlig efterspore saadanne Figurer, som kunne røbe Kjendskab til nogle simple geometriske Konstruktioner eller i det mindste vidne om nogen geometrisk Figuropfattelse. En Bestræbelse efter at tegne Linier under rette Vinkler eller Paralleler finder man sikkert paa de barnligste Standpunkter, og hos mere udviklede Folk have de vistnok været mekanisk konstruerede, fra først af maaske ved lige saa simple Midler, som naar vi bestemme rette Linier, Paralleler og vinkelrette Linier ved Ombøjning af Papir. En fuldkomnere Konstruktion turde være benyttet, naar man har anvendt saadanne Linier til den nysnævnte Overførelse af et Billede i en ny Maalestok. Zirater, der paa en eller anden Maade benytte regulære Sexkanter, vidne om Kjendskab til disses simple Konstruktion, hvortil ikke behøves en Passer lavet af en Instrumentmager. Derimod vil man selv hos temmelig udviklede Folk forgjæves kunne søge Brug af regulære Fem- eller Tikanter; men disse tilvejebringes ogsaa først ved en mere sammensat Konstruktion. End ikke paa de gamle ægyptiske Monumenter har man fundet saadanne.

En ikke ringere Betydning end opbevarede Tegninger have opbevarede Bygningslevninger. Endog paa de tidligste Standpunkter vil man finde Bestræbelser efter at give disses Grundrids en bestemt Figur, som Rektangel eller Cirkel, og paa de fuldkomnere Bygninger

som de ægyptiske Templer eller Pyramider maa de rette Vinkler være opnaaede ved Konstruktion. Der kan saa meget mindre være Tvivl herom, som Bygningerne ere nøjagtig opstillede efter Verdenshjørnerne, saa man ved Konstruktionen ogsaa maa have vidst at benytte Solens højeste Stilling. Selve Pyramidebygningerne vidne om Opfattelse af bestemte geometriske Figurer, og en omsigtsfuld Konstruktion har været nødvendig for at opnaa, at Pyramiderne virkelig bleve retstaaende, og at de indbyrdes have faaet samme Form. At tilveiebringe Ligevægt i saa vældige Bygninger som ægyptiske Templer, saa de kunde staa og staa indtil Nutiden, og at flytte og rejse Obeliskerne har ogsaa krævet en ret betydelig mekanisk Indsigt.

Jeg har her stræbt at oplyse, hvad Mathematikens Forhistorie er, og nogle af de Midler, hvorved man kan lære den at kjende. Jeg haaber derved tillige at have givet nogle Vink om den Betydning, det kan have at studere den. Men Tiden tillader mig ikke i disse Forelæsninger at gaa længere ind paa disse Undersøgelser. Jeg maa ikke blot lade den forhistoriske Mathematik ligge, men for største Delen hele den forvidenskabelige Mathematik[1]. Derved mener jeg den, som blot bestaar i Samlinger af Regler, som kunne være dannede ved Forsøg eller tilfældige Erfaringer — dette sidste kan f. Ex. være Tilfældet med Cirklens Sexdeling — eller maaske ogsaa i endnu tidligere Tider ved mere exakte Undersøgelser, der nu ere tabte og altsaa forhistoriske. Om den forvidenskabelige Mathematik skal jeg

[1] Saavel for den forhistoriske som den forvidenskabelige Mathematiks Vedkommende kan jeg henvise til P. la Cour: Historisk Mathematik. Disse Afsnit udgjøre efter dette Værks Plan en væsentlig Del deraf.

kun meddele saa meget, at man derved kan faa en Forestilling om det forud kjendte Materiale, hvoraf den videnskabelige Mathematik er opført. Som Indledning til den græske Geometri maa jeg derfor omtale, hvad Grækerne kunne antages at have lært af Ægypterne og Babylonierne. Selve Grækernes Talregning vil jeg derimod væsentlig kun komme til at behandle som forvidenskabelig Indledning til den Regnekunst, som opstod, da Inderne fandt paa den nu brugelige Skrivning af Tal med Cifre med Pladsværdier. Dels stod nemlig Grækernes Talregning i hvert Tilfælde langt tilbage for deres øvrige mathematiske Indsigt. Dels kunne vi ikke ved deres Talskrivning og Hjælpemidler til Regning, om de end kunne være benyttede godt af deres egne store Mathematikere, fremdrage noget, som rager op over det, vi ellers henregne til den forvidenskabelige Mathematik. Dette være dog sagt med et Forbehold af, at maaske ved nøjere Undersøgelse disse Regnemidler kunne vise sig bedre, end de først forekomme os[1]; thi er der en Fejl, som kan gjøre og har gjort Skade ved denne Slags historiske Undersøgelser, saavel som ved lignende etnografiske Undersøgelser, da er det at maale Værdien af det, som man forefinder, blot efter dets større eller mindre Lighed med det, som et Kulturmenneske nu bruger, og at ringeagte det, som Kulturmennesket, ofte blot af Mangel paa Kjendskab dertil og Forstaaelse deraf, ikke mener at have Brug for.

---

[1] Den sagkyndigste Autoritet paa det her behandlede Omraade, Paul Tannery, har bevidnet, at han ved et Forsøg paa virkelig praktisk Indøvelse har fundet de græske Taltegn meget hensigtsmæssigere, end de forekomme os, der fra Barndommen ere øvede i at bruge et andet System af Betegnelser.

2. Ægyptere og Babyloniere.

For disse Folkeslags Vedkommende skulle vi, som nys bemærket, kun kort omtale de mathematiske Kundskaber og Færdigheder, som de maa antages at have besiddet, da de kom i Berøring med Grækerne, og som Grækerne kunne have modtaget af dem. Hvad nu først angaar Ægypterne, vise græske Forfattere jævnlig hen til, at deres egne ældste Granskere have haft Ægypterne til Læremestre, og berette om, hvorledes de have faaet Adgang til det ægyptiske Præsteskabs Lærdomme. Som Anledning til Ægypternes Beskjæftigelse med Geometri peges hen paa Nilens Oversvømmelser og de dermed forbundne Bestræbelser for at sikre, at hver Mand efter disse fik sin Grund. Klart er det i hvert Fald, at den meget store Værdi af de smalle frugtbare Strækninger mellem Ørkenen og Floden maatte tilskynde til en nøjagtig Landmaaling. Hvor stor Betydning de ægyptiske Landmaalerregler have haft, fremgaar ogsaa af, at det, efterat Grækerne havde udviklet Geometrien, endnu væsentlig var de ægyptiske Regler, der brugtes af de romerske Landmaalere, idet disse sikkert kun i ringe Maal forstode de græske Begrundelser. Som et i mange Henseender forretningsdygtigt Kulturfolk og som et byggende Folk — hvad vi tidligere have berørt — have Ægypterne ogsaa haft Brug for nogen Regnekunst og for andre geometriske Kundskaber end dem, som brugtes i Landmaaling. Et andet Vidnesbyrd om nogen mathematisk Indsigt er deres Astronomi, hvilken dog næppe havde den Betydning som Babyloniernes.

Hvad nu Ægypterne vidste i de senere Tider, kan tildels ses af, hvad Grækerne og senere Romerne have faaet af dem, og af enkelte direkte bevarede Optegnelser.

Dette synes imidlertid kun at have afveget meget lidt fra det, som man ifølge et ældgammelt Papyrushaandskrift, den saakaldte Kong Ahmes Regnebog, allerede vidste 1700—2000 Aar før Christi Fødsel. Derfor er denne Samling Opgaver med deres Løsning den bedste Kilde til Kjendskab til ægyptisk Mathematik og Regning.

I det vi nu benytte denne og andre Kilder, skulle vi i Overensstemmelse med vor Plan her ikke gaa ind paa Ægypternes Fremstilling af og Midler til Regning med hele Tal. Foruden disse kjendte de og regnede med Brøk. En saadan opløstes sædvanlig i Stambrøker, det er Brøker med Tælleren 1. Ahmes Regnebog indeholder en Tabel over denne Opløsning af Kvotienter med Dividenden 2 og Divisorer fra 3 til 99. Den ender med $\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$. En saadan Opløsning er ogsaa senere benyttet af Grækerne, og, hvor lidet praktisk den end kan synes at have været, har dens Udøvelse dog givet Indblik i de hele Tals forskjellige Sammensætning. Man har i den saakaldte «Hau»-regning formaaet at løse saadanne Opgaver, som i vort mathematiske Sprog udtrykkes ved Ligninger af første Grad med en ubekjendt:

$$a\,x + b\,x + c\,x + \ldots = d,$$

hvor $a, b, c, \ldots d$ ere dannede af hele Tal og Brøker, sammensatte af Stambrøker; endvidere behandledes saadanne, som henhøre under Selskabsregning, ja enkelte der henhøre til Differens- og Kvotientrækker. Ved Løsning af Opgaver, der — hvis man havde sat dem i Ligning — vilde afhænge af Ligninger af ovenstaaende Form, træffe vi første Gang en Anvendelse af den saakaldte «*regula falsi*», som vi senere ville møde flere Steder. Den bestaar i at tillægge x en Forsøgsværdi x_1. Giver denne ved Indsættelse d_1 i Stedet for d, er $x = x_1 \frac{d}{d_1}$.

I Geometrien maatte, efter hvad der er sagt, Arealbestemmelser være en Hovedsag. Hos Ægypterne, som hos flere andre Folk, har det ikke været ualmindeligt at beregne Arealet af en Firkant med Siderne a, b, c, d efter den urigtige Formel

$$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2},$$

og en Trekant med Siderne a, a og b efter den deri indeholdte Grænseformel

$$a \cdot \frac{b}{2};$$

men disse Formler give ingen daarlig Tilnærmelse, naar Firkantens Vinkler, eller Vinklerne ved Siden b i Trekanten, kun afvige lidt fra at være rette. Udtrykket for Arealet giver nemlig da kun en saadan Fejl, som vi kalde lille af anden Orden. Om Opstillingen af Formlerne end kan have fristet til andre Anvendelser, have Ægypterne — saa vidt man med Rimelighed kan slutte sig dertil af Sidernes Størrelser i de forefundne Exempler — fortrinsvis anvendt dem, hvor de give en god Tilnærmelse. Ægypternes Efterlignere, de romerske Landmaalere, kunde derimod finde paa at anvende dem paa ligesidede Trekanter, uagtet de vare i Besiddelse af bedre Beregningsmaader af disse. Arealet af en Cirkel med Diametren d beregnede Ægypterne efter Formlen $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, hvad der er det samme som at sætte $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$, det er omtrent $= 3{,}16$. De anvendte Formler vise, at Ægypterne som vi til Fladeenhed have brugt Kvadratet med Længdeenheden til Side. Konstruktionen af rette Vinkler i Marken synes at være udført ved Konstruktion af en Trekant med Siderne 3, 4 og 5. Ved

Konstruktion af Pyramiderne eller i det mindste ved Bestemmelsen af deres Dimensioner synes man at have benyttes Størrelsen af Forholdet mellem Grundfladens halve Diagonal og en Sidelinie, altsaa det, vi kalde *cosinus* til Sideliniens Vinkel med Grundfladen. Naar iøvrigt endnu Demokritos paa en Tid, da den græske Geometri havde naaet en ikke ganske ringe Udvikling, som et Tegn paa sin egen Færdighed i geometriske Konstruktioner kan anføre, at han heri end ikke overgaas af de ægyptiske Harpedonapter (Tovspændere), det er de Mænd, som under Iagttagelse af højtidelige Skikke skulde sørge for, at Tempelgrundene lagdes rigtig efter Solen, saa kan disses Dygtighed ikke have indskrænket sig til at gjælde saa simple Konstruktioner som dem, jeg her har nævnt.

Medens det især var fra Ægypterne, at Grækerne fik Impulser til Dannelsen af Geometrien, den Del af Mathematiken, som de udviklede til størst Fuldkommenhed, vare Babylonierne deres Læremestre i Astronomi og i Udførelsen af de dertil hørende Beregninger. Det er derfra, at den endnu brugelige Deling af Cirklen i Grader, Minuter og Sekunder efter et 60-Talsystem skriver sig. Delingen i 360^0 ($= 2^3 . 3^2 . 5$) hænger maaske sammen med en tidligere Anslaaen af Aaret til 360 Dage. Den videre 60 Deling kan dels have sluttet sig hertil, dels bero paa Indsigt af Fordelen ved et Talsystem, hvori Grundtallet $2^2 . 3 . 5$ ifølge sin Sammensætning ved de laveste Primtal indeholder en meget stor Del af de lavere Tal som Faktorer. Vidnesbyrd om konsekvent Brug af dette Talsystem har man fundet i Indskrifter, som indeholde Tabeller over Kvadrattallene indtil 60^2 og Kubiktallene indtil 32^3 skrevne i dette

System. Disse Indskrifter ere et Par Tusend Aar gamle.

Det er ogsaa rimeligt, at adskillige af de Talspekulationer, som have hidført flere af Grækernes Undersøgelser over hele Tal, oprindelig skyldes Talmystik hos Chaldæer og Babyloniere.

DEN GRÆSKE MATHEMATIK.

1. Historisk Overblik.

Da vi i vor Omtale af den græske Mathematik ofte maa forfølge Behandlingen af enkelte Emner gjennem lange Tidsrum, vil det være nyttigt forud at give et historisk Overblik, hvori vi dels gjør Rede for den Tidsfølge, hvori de enkelte Udviklingstrin fremtraadte, og hvori de forskjellige Matkematikere virkede, dels belyse de Forhold, hvorunder de virkede.

Et Midtpunkt i den græske Mathematik dannes af Euklid, der levede omtrent 300 Aar f. Chr. I hans saakaldte «Elementer» have vi en Lærebog i Geometri, som endnu benyttes enkelte Steder, og som indeholder den elementær-geometriske Lærebygning, hvis Hovedprinciper overalt under forskjellige Former lægges til Grund for Undervisningen den Dag idag. I dette Værk maa vi paa den ene Side søge Forklaring paa de spredte Angivelser, som haves om den ældre græske Mathematik; thi det er væsentlig om den euklidiske Geometris Tilblivelse, at disse give Oplysning. Det maa paa den anden Side danne Grundlaget for vor Forstaaelse af de senere Forfattere; thi det var det Grundlag, paa hvilket de selv byggede videre. Ogsaa i ydre historisk Henseende danner Euklid et Midtpunkt. Han

var nemlig den første store Mathematiker af den saakaldte alexandrinske Skole, der virkede under helt andre Vilkaar end de tidligere.

Den føreuklidiske Udvikling af Mathematiken strækker sig over de 3 foregaaende Aarhundreder og har en noget forskjellig Karakter i hvert af disse.

Den første græske Mathematiker var Thales fra Milet, der forudsagde Solformørkelsen 28 Mai 585. Hertil maa han have benyttet Regler, som direkte skyldes Ægypterne og vare støttede paa disses lange Iagttagelser. Fra dem skriver sig vistnok ogsaa det meste af hans geometriske Kundskaber. Men Hovedsagen er, at med ham og den filosofiske Skole, han stiftede, den saakaldte joniske Skole, begyndte Grækerne dels virkelig at opsamle den mathematiske Viden, som de kunde faa fra Ægypterne, dels at udvide den i flere Henseender. Dette det 6te Aarhundredes Arbejde begyndtes vel paa den lilleasiatiske Kyst; men ved Grækernes levende Handelsforbindelser forplantedes det ogsaa til andre Egne, hvor Grækerne vare bosatte.

Vi ville derfor ogsaa se et helt andet Sted nemlig Syditalien som Hovedarnested for Mathematiken i det 5te Aarhundrede, I dette var det bleven klart, at de efterhaanden opsamlede og fundne mathematiske Sandheder maatte bygges paa sikre Begrundelser. Samtidig med at saadanne udviklede sig, benyttede man de efterhaanden sikrede Resultater til Udgangspunkter for nye og vigtige Udvidelser.

Den Mand, hvem i det mindste Traditionen tillægger størst Indflydelse paa dette Arbejde, er Pythagoras fra Samos, hvem vi derfor omtale under det 5te Aarhundrede, om end hans egen Virksomhed maaske nok for en Del falder før Aar 500. I «Storgrækenland», som de da meget blomstrende græske Kolonier i Syd-

italien kaldtes, stiftede han en filosofisk Skole med et stærkt afsluttet Præg, hvilket synes at være sikret ved mystiske Ceremonier og ved Hemmeligholdelse overfor Omverdenen. Denne aristokratiske Skole søgte ogsaa politisk at gjøre sig gjældende, men vakte udenforstaaendes Uvillie og blev sprængt, da Demokraterne kom til Magten i Storgrækenland. Da i langt senere Tid de saakaldte Nypythagoræer mente, at deres Lærdomme, som tildels vare af religiøs-ethisk Art, vare at føre tilbage til Pythagoras, have de omgivet denne deres formodede aandelige Fader med saa mange legendeagtige Fortællinger, at det er vanskeligt at finde den sande Kjerne. Hvad der af disse Fortællinger kunde have Interesse for os, er Beretningerne om hans Rejser til Ægypten, hvor han vel nok kan have været, ligesom senere Platon og Eudoxos, og om en meget tvivlsom Rejse til Babylon. Af Betydning for Mathematikens Udvikling har hans Skoles store Afsluttethed været, i det denne har givet Anledning til fyldigt Samarbejde af Mænd, der forstode hverandre, om den end samtidig er Skyld i, at vi vide saa lidt om, hvad der skyldes Mesteren og hvad Disciplene. Skolens Sprængning har givet Anledning til, at i det mindste dens mathematiske Lærdomme senere ere spredte over de forskjellige Egne, hvor det græske Folk havde nedsat sig.

Andensteds have disse Lærdomme dog vistnok forbundet sig med Frugterne af andres Arbejde i filosofisk eller i mathematisk Retning. Det er derfor ikke godt at vide, hvor meget eller hvor lidt af sin Mathematik en saa selvstændig Tænker som Filosofen Demokritos fra Abdera f. omtrent 460 har lært af Pythagoræerne. Den lidt ældre Hippokrates fra Chios, som efterat have været Kjøbmand og mistet sin Formue opholdt sig i Athen og der gav Undervisning i Mathe-

matik, kan maaske have lært adskilligt af Pythagoræerne, men han tilhørte i hvert Fald ikke deres Skole. Han faar særlig Betydning derved, at man skylder ham et Stykke Geometri, der er den mest sammenhængende Prøve herpaa, som er opbevaret fra det 5te Aarhundrede, og ved at være den første os bekjendte Mathematiker, der virkede i Athen, den Stad, som alt nu var ifærd med at blive Midtpunktet for det græske Aandsliv, for dets Kunst og Videnskab og for Kampen mellem Sofister — blandt hvilke f. Ex. Hippias fra Elis var en dygtig Mathematiker — og Filosofer, og som i det følgende Aarhundrede ogsaa blev Hovedsædet for den mathematiske Udvikling. I selve Syditalien har den pythagoræiske Udvikling derimod været fortsat mere ublandet, og en betydelig Mathematiker Archytas fra Tarent, som vi træffe der lige i Slutningen af det 5te Aarhundrede, betegnes udtrykkelig som den sidste betydelige Pythagoræer, om end Skolens afsluttede Karakter paa hans Tid var ophørt. Han levede i sin Fødestad, hvor han var anset baade som Statsmand, Hærfører og Mathematiker.

Gjennem Archytas er den ved den gamle Pythagoræiske Skole og dens nærmeste Efterfølgere vundne Udvikling bragt videre til dem, der især skulde lede det 4de Aarhundredes mathematiske Arbejde, nemlig Platon fra Athen og Eudoxos fra Knidos, idet disse begge paa deres Studierejser til Syditalien bleve bekjendte med og paavirkedes af Archytas. Førend jeg nærmere omtaler disse to Mænd og deres Skoler, skal jeg, i Tilslutning til mine Bemærkninger om de to foregaaende Aarhundreder, i Almindelighed udtale om det 4de Aarhundrede, at det da var bleven klart, at den fulde Nøjagtighed først kunde opnaas ved Dannelsen af et sammenhængende System. Dels ved gjentagne Forsøg paa

saadanne, dels ved Udviklingen af de nødvendige Methoder og ved enkelte Udvidelser eller Forbedringer af Stoffet, arbejdede man den elementære Geometri op til det Standpunkt, som vi finde hos Euklid. Samtidig havde man begyndt at udvikle en højere Geometri, hvori Læren om Keglesnit efterhaanden naaede størst Betydning.

Platon (429—348) er den bekjendte store Filosof, Sokrates' Discipel og Stifter af den Skole, der efter det Sted i Athen, hvor den samledes om Platon, kaldtes Akademiet. Platons Interesse for Mathematiken skriver sig ikke fra Sokrates, som vilde have den indskrænket til de praktiske Anvendelser; men Sokrates var heller ikke hans eneste Lærer. Efter dennes Død fik han Lejlighed til først i Kyrene og dernæst i Syditalien at sætte sig ind i Pythagoræernes Mathematik og Filosofi. I Kyrene studerede han Mathematik under den samme Lærer som og maaske sammen med en anden Athenienser, Theaitetos, en betydelig Mathematiker, efter hvem en af hans Dialoger er opkaldt. I Sicilien sluttede han Venskab med Archytas. Ogsaa Ægypten besøgte han.

Naar vi rigtig ville faa fat paa, hvori Platons Indflydelse paa Mathematikens Udvikling har bestaaet, møde vi samme Vanskelighed som ved Pythagoras. Som Ny-Pythagoræerne ved Pythagoras, saaledes have Ny-Akademikerne i deres Beretninger gjerne villet give Platon Æren for det mest mulige. Selv de tillægge ham dog ikke personlige mathematiske Undersøgelser af videre stor Betydning, men vise derimod Tilbøjelighed til at give ham Æren for de Methoder, som kom i Brug paa hans Tid, og at lade ham være Raadgiver for dem, der gjorde de egentlige mathematiske Fremskridt. Have disse Angivelser end ikke megen Sandsynlighed, var

det i hvert Tilfælde af den største Betydning for Mathematikens Fremme, at den af Sokrates' Disciple, som fremfor nogen anden blev Bærer af den aandelige Udvikling og drog lærelystne Mennesker fra Grækernes Lande og Kolonier til Athen, havde stor Interesse for Mathematiken og for dens videre Udvikling. Er det end kun en Legende, at han over Indgangen til Akademiet skrev: «*μηδεὶς ἀγεομέτρητος εἰσίτω*» ɔ: ingen, som ikke kan Geometri, træde herind, saa vise selve hans Arbejder, at han betragter nogen geometrisk Fordannelse som Forudsætning for Indtrængen i Filosofien. Det er saaledes fra den Brug, der gjøres af de fem regulære Polyedre i en af hans Dialoger, at disse have faaet Navnet de platoniske Legemer.

Ogsaa den næste store Filosof Aristoteles, der har givet sig meget af med Naturvidenskaberne, lægger Interesse for Mathematiken for Dagen uden dog paa noget Punkt selv at vise nogen særlig mathematisk Indsigt. De to Mænds Stilling til Faget var en saadan, at Mathematikerne kunde finde Plads indenfor Datidens videnskabelige Lav, Platons akademiske og Aristoteles' peripatetiske Skole og i dem arbejde sammen med og finde Forstaaelse hos andre Videnskabsdyrkere, og at Mathematiken og Filosofien gjensidig kunde give og modtage Impulser dels gjennem fredelige Forhandlinger, dels gjennem Brydninger. Mathematiken blev derved dels Led i den høje græske Dannelse, dels er den Skikkelse, som den netop vandt i denne Tid, i høj Grad kommen til at bære Præget af at have udformet sig i Kredse af fint dannede og med Hensyn til Udtrykkets Korrekthed fordringsfulde Tænkere.

Af mere direkte Betydning for Mathematikens Udvikling end disse berømte filosofiske Skoler var dog en mathematisk-naturvidenskabelig Skole, som paa Platons

Tid samledes i den blomstrende Handelsstad Kyzikos ved Marmarahavet om den som Læge, Astronom og Mathematiker højt ansete Eudoxos fra Knidos. Som ung gjæstede han baade Syditalien og Ægypten. Det sidste Sted har der næppe den Gang været mere Geometri at lære for en græsk Mathematiker. Eudoxos har derimod som Astronom haft megen Brug for Ægypternes ældgamle Observationer. Disse har han ogsaa forstaaet at benytte; han har nemlig netop Fortjenesten af kun at grunde Astronomien paa Observation og geometriske Undersøgelser med Udelukkelse af Stjernetyderi og tomme Spekulationer. I Syditalien studerede han Medicin og Geometri, den sidste særlig hos Archytas.

Stifternes fælles Forbindelse med Pythagoræerne har vistnok været en god Betingelse for Samarbejdet mellem de Skoler, der sluttede sig til Platon og Eudoxos, et Samarbejde, der vel ogsaa førtes under Form af Stridigheder. Forbindelsen mellem de to Skoler i Athen og Kyzikos tilvejebragtes ikke blot ad de tilfældige Veje, hvortil den levende Handel mellem de to Byer kunde give Anledning; men Eudoxos har besøgt Athen sammen med sine Disciple, som da have hørt Platons Foredrag, og af hvilke flere siges i Filosofien at have sluttet sig til Platon. De mest bekjendte af Eudoxos' Disciple vare Brødrene Menaichmos og Deinostratos. Af disse skal Menaichmos i filosofisk Tilslutning til Platon have skrevet om Staten.

Hvilke Resultater der nu ere opnaaede i de tre her omtalte Aarhundreder, og hvilke Former for Beviser og Fremstilling der have udviklet sig, kan man vide ret god Besked om ved at se, hvad der forelaa ved Begyndelsen af den paafølgende, alexandrinske Periode, ved at se af hvilke Sætninger Platon gjør Brug i sine Dialoger, og ved at se

hen til de af Aristoteles opstillede logiske Former. Det Materiale, hvorom disse sidste paa den simpleste og nøjagtigste Maade have sluttet sig, er nemlig netop Mathematiken. De have da ogsaa sikkert netop udviklet sig igjennem den Brug, Mathematikerne have gjort deraf, og have indeholdt en Del af det Udbytte, som Filosofien har høstet af det her skildrede Samarbejde med Mathematiken. Naar vi i det følgende ikke blot ville skildre det Standpunkt, som var opnaaet, under ét, men ogsaa kunne gjøre Rede for, hvad der skyldes de enkelte, og hvorledes Ideerne efterhaanden have knyttet sig til hinanden, bygge vi dels paa de senere Forfatteres spredte Oplysninger herom, dels paa en Mathematikhistoriker fra Slutningen af selve den her omtalte Periode, Peripatetikeren Eudemos fra Rhodos. Vel besidde vi heller ikke hans Værk, men vigtige Uddrag deraf ere opbevarede ved senere Forfattere. Det er ad denne Vej, altsaa paa tredie Haand, at vi kjende det fornævnte Brudstykke af Hippokrates fra Chios.

Det er et uroligt Indtryk, vi have faaet ved at betragte de forløbne tre Aarhundreder. Mathematiken begynder paa Lilleasiens Kyst. Derefter tiltrækker Udviklingen i Syditalien sig især vor Opmærksomhed. Dernæst trækker Athen ved sin hele aandelige Overlegenhed ogsaa Mathematikerne til sig. Der er dog sikkert vedblivende arbejdet ogsaa andensteds f. Ex. i Syditalien, hvor halvandet Hundrede Aar efter Archytas Grækernes største Mathematiker, Archimedes, skulde fremstaa; men med Athens hele aandelige Overherredømme fulgte ogsaa, at de til Athen knyttede Mathematikeres Arbejde er bedst erindret. Den store Spredning af det mathematiske Arbejde i den her omtalte Tid skyldtes dels de levende Handelsforbindelser, som

fandt Sted mellem de adspredte Grækere, dels de mange Krige og politiske Uroligheder, som joge fremragende Mænd fra Sted til Sted. Under lignende Uroligheder have ogsaa de virket, som have kunnet blive paa samme Sted, saaledes navnlig i Athen. Samtidig ville Mathematikerne have haft mange Kampe at bestaa saavel indbyrdes som med Sofister og Filosofer.

Under disse Forhold er det, at Mathematiken dels vandt saa stor Udbredelse til mange Egne og til alle Videnskabsdyrkere, dels at den omgjordede sig med de sikre Forskansninger i Bevisførelse og Fremstillingsform, som vi den Dag i Dag saa højlig beundre. Ja i Bevisførelsen kunne vi i Reglen intet bedre gjøre end at efterligne dem; men om Fremstillingsformen maa det siges, at Sikkerheden i den Grad var vunden paa Tilgængelighedens Bekostning, at den senere hen fik sin Del i Skylden for, at det høje Standpunkt ikke kunde bevares, saa snart som den mundtlige Tradition tabtes, og at den fulde Forstaaelse af de græske Mathematikeres Dybsindighed først har kunnet gjenerhverves i den nyere Tid, efterhaanden som selve Mathematiken, om end bestandig under nogen Paavirkning af den græske Mathematik, atter hævede sig til samme Højde paa de af Grækerne behandlede Omraader.

Den omtalte Nedgang begyndte dog ingenlunde for Mathematikens Vedkommende, saaledes som det var Tilfældet med Digtekunst, Veltalenhedskunst og andre Kunster, samt med Filosofien, da de ydre Vilkaar saa væsentlig forandredes ved Alexander den Stores Død. Da indtraadte tvertimod Mathematikens rigeste Blomstring. Som bekjendt overtog ved Delingen Ptolemaios, Søn af Lagos, Ægypten med den nyanlagte Stad Alexandria, og han og hans Efterfølgere gjorde denne ikke blot til det vigtigste Handelscentrum, men ogsaa til et videnskabe-

ligt Midtpunkt af første Rang. Under ham og hans nærmeste Efterfølgere, der ogsaa bare Navnet Ptolemaios, oprettedes Museion, hvor lærde Mænd uden Bekymring for Udkommet kunde dyrke Videnskaben. Ptolemaierne grundlagde og forøgede det alexandrinske Bibliothek, hvori efterhaanden samledes Afskrifter af alle de græske Arbejder af Betydenhed, som kunde opdrives. Som paa et moderne Universitet samledes de videlystne græske Ynglinge i Alexandria og modtoge Undervisning af de derværende Videnskabsmænd, især i Grammatik og Mathematik.

Disse Forhold kunde kun være gavnlige for Mathematiken, som trængte til Ro, dels for at samle de mange spredte indvundne Resultater i faste Systemer, dels for ret at benytte de alt vundne frugtbare Synsmaader til at hæve sig til langt større Højder, end den hidtil havde naaet. Ro behøvedes til den fortsatte mundtlige Undervisning, uden hvilken den Form, hvorved Paalideligheden sikredes i de større skriftlige Fremstillinger, vilde gjøre disse lidet tilgængelige. Da Mathematiken nu var voxet op til en selvstændig Videnskab, krævedes der endvidere mathematiske Fagmænd, som ikke bestandig behøvede at forhandle om deres Fag med Filosofferne og selv at dyrke Filosofien. En saadan Fagdeling hos de alexandrinske Lærde hindrede dog ikke, at samme Mand kunde dyrke flere Fag. Dette var saaledes Tilfældet med Erathostenes fra Kyrene, der virkede i den sidste Halvdel af det 3die Aarhundrede og en Tid lang forestod det alexandrinske Bibliothek. Foruden Filosofi og Sprogvidenskab dyrkede han Geografi — ja den højere Geodæsi, idet han foretog den første Gradmaaling — samt Kronologi og Mathematik. Han naaede ret vidt i disse forskjellige Fag, hvis specielle Dyrkere dog fandt Lejlighed til at kritisere hans Arbejder og

have kaldt ham Polyhistor Beta eller Polyhistor Nr. 2 for at betegne, at han ikke naaede den første Rang i nogen enkelt Retning. Den Ro, som undtes Mathematikerne i Alexandria kunde dog ogsaa have sine Farer, f. Ex. for Selvforgudelse eller Kammeraderier, og det var derfor næppe til Skade, at den største af den alexandrinske Tids Mathematikere, Archimedes, ikke levede i Alexandria men i Syrakus. Derfra sendte han efterhaanden saavel sine færdige Arbejder som foreløbige Resultater til Alexandria, og da visse Mathematikere her vilde tilegne sig nogle af disse sidste ved bagefter at bevise dem, straffede han dem en Gang ved at oversende nogle urigtige Resultater — som han ogsaa fik dem til at bevise. Archimedes' Ophold udenfor Alexandria har iøvrigt medført den for vort Kjendskab til hans Arbejder gavnlige Omstændighed, at han maatte affatte skriftlig meget, som man i Alexandria vilde have nøjedes med at meddele mundtlig til sine Omgangsfæller og Disciple, eller dog kun affatte i i en for disse bestemt Skikkelse.

De Mathematikere fra denne Periode, fra hvem der er efterladt os betydelige rent mathematiske (geometriske) Værker, og som sikkert ogsaa ragede højt op mellem de andre dygtige Mathematikere, som levede paa den Tid, ere Euklid omtrent 300 f. Chr., Archimedes † 212, Apollonios omtr. 200.

Fra Euklid, om hvis personlige Liv i Alexandria man ikke véd meget, have vi foruden hans alt nævnte Elementer et andet elementært Skrift, som sædvanlig kaldes med det latinske Navn «*Data*». I det mindste delvis kjender man et Skrift om Figurers Deling, et astronomisk Skrift, *Fainomena*, og med større eller mindre Ret tillægges ham nogle optiske Arbejder (rettere vedrørende Perspektivlærens aller første Elementer).

Tabte ere hans 4 Bøger om Keglesnittene og hans to Bøger om Overfladesteder, endvidere Skriftet om Porismerne og et Skrift om falske Slutninger. Deres Indhold maa man slutte sig til af senere Samlinger af Hjælpesætninger og Kommentarer. «Porismerne» har saaledes indeholdt flere af de Sætninger om Transversaler og Punktrækker, som nu behandles i den projektive Geometri.

Archimedes levede i Syrakus, hvor han var en meget anset Mand, Ven af Kong Hieron. Ved Syrakuses Indtagelse af Romerne fandt han sin Død efter paa forskjellig Maade at have anvendt sit mekaniske Snille under dens Forsvar. Han har sikkert i sin Tid gjæstet Alexandria og knyttet Forbindelse med de Mænd, til hvilke han senere sendte sine Skrifter. Af disse Skrifter ere følgende opbevarede: Om Kuglen og Cylindren; Cirklens Udmaaling; Om Konoider og Sfæroider; Om Spiraler; Om plane Figurers Ligevægt; Sandregning; Parablens Kvadratur og Om Legemer, som svømme paa en Vædske, det sidste dog kun i latinsk Oversættelse. Gjennem senere græske Forfattere og gjennem arabisk Overlevering haves fremdeles nogle Brudstykker, af hvilke vi skulle nævne et Arbejde om halvregulære Polyedre og en Række geometriske Sætninger «De Archimediske Hjælpesætninger». Disse sidste ere maaske dog tildels af nyere Oprindelse.

Apollonios fra Perge har sikkert virket i Alexandria. Af ham er opbevaret 7 af de 8 Bøger, han har skrevet om Keglesnittene; de 4 første haves paa Græsk, de 3 næste kjendes gjennem arabisk Oversættelse. Ad samme Vej er os bevaret et Skrift om Forholdssnittet, medens vi kun ved senere Meddelelser vide Besked om Skrifterne om det bestemte Snit, Arealsnittet, Berøringer og Indskydninger.

Blandt de 3 store Mathematikeres samtidige og aller nærmeste Forgængere og Efterfølgere ville vi komme til at nævne Aristaios, der var lidet ældre end Euklid og har skreven nu tabte Arbejder om rumlige Steder og om regulære Polyedre, endvidere den omtalte Eratosthenes, Nikomedes, der levede mellem Archimedes og Apollonios, samt Diokles, Perseus og Hypsikles. Den sidste har skrevet en Bog om regulære Polyedre, der i de sædvanlige Udgaver af Euklid findes optagen som 14de Bog. For de øvriges Vedkommende kjende vi kun af senere Forfatteres Omtale nogle tabte Skrifter eller enkelte Resultater.

Fra den alexandrinske Tid maa endnu nævnes en mathematisk Forfatter Heron fra Alexandria, omtrent 100 før Chr. (andre sætte dog hans Levetid en Del tidligere), af hvem vigtige Arbejder ere opbevarede. De indeholde vel ikke mange væsentlige videnskabelige Fremskridt, men faa stor Betydning for os derved, at de vise os, hvorledes de Beregninger, hvortil de mathematiske Undersøgelser førte, virkelig bleve gjennemførte, og hvorledes de videnskabelige Resultater, som i de strengere mathematiske Arbejder meddeltes i almindelige og abstrakte Former, lode sig anvende praktisk. Foruden om forskjellige fysiske og mekaniske Instrumenter har han navnlig skrevet om Landmaaling, idet han medtog saadanne geometriske Definitioner og Sætninger, som han havde Brug for. Dertil er knyttet en rig Samling af nummeriske Opgaver, løste med større eller mindre Nøjagtighed efter rigtige græske Formler eller ægyptiske Tilnærmelsesformler. Hans Arbejder have spillet en stor Rolle som Vejledning ved Landmaaling og anden praktisk Anvendelse af Geometrien i de lange Tider, da man ikke forstod at trænge ind i den exakte græske Geometri eller slet ikke kjendte den. Det er

derfor ikke underligt, at de i Tidens Løb have faaet saa mange Tilsætninger, at det ofte kan være vanskeligt at se, hvor meget der oprindelig tilhører Heron. Man kan end ikke med Sikkerhed afgjøre, hvad der er forskjellige Omdannelser af samme Værk af ham, og hvad der ogsaa oprindelig har hørt til forskjellige Værker.

Blandt de mange forskjellige Anvendelser af Mathematiken er der en bestemt Klasse, som ogsaa efterat den theoretiske Mathematiks øvrige Udvikling var standset, vedblev at fremme enkelte Sider af denne, nemlig Anvendelserne paa Astronomien. Skjønt vi ikke kunne indlade os paa Astronomiens Historie, skulle vi her samlet anføre de astronomiske Forfattere fra forskjellige Tider inden for den græske Oldtid, hvis Arbejder have faaet Betydning for Mathematiken.

Vi have allerede sagt, at Eudoxos, hvem Mathematiken skylder de dybestgaaende Methoder, ogsaa grundlagde en videnskabelig Astronomi. Fra den alexandrinske Tid maa foruden Eratosthenes nævnes Aristarch fra Samos, der allerede har opstillet den Verdenshypothese, hvis Gyldighed halvandet Aartusende senere blev paavist af Koppernikus, endvidere omkring Aaret 150 f. Chr. Hipparch, der var Oldtidens største observerende og beregnende Astronom. Blandt senere Astronomer maa i Mathematikens Historie nævnes Menelaos fra Alexandria fra sidste Halvdel af det første Aarhundrede efter Chr. og navnlig den et halvt Aarhundrede yngre Ptolemaios, gjennem hvis «Store Sammenstilling» (*μεγάλη σύνταξις*), mest bekjendt under det fordrejede arabiske Navn Almagest, vi fuldstændigst kjende den græske Astronomi (herunder det saakaldte ptolemæiske Verdenssystem) og den dertil afpassede geometriske Beregningskunst.

Paa de sidst anførte Forfatteres Tid var imidlertid Udviklingen af de Astronomien mindre vedkommende Retninger, hvori den græske Mathematik havde naaet sin væsentligste Storhed, standset. For at forstaa de Grunde hertil, som laa i dens egen Beskaffenhed, maa vi først lære den selv at kjende. Her kunne vi kun fremhæve, at de gunstige ydre Forhold, hvorunder der arbejdedes i den første Del af den alexandrinske Periode, vare ophørte. Videnskabsmændene vare allerede mindre godt stillede under en enkelt af de senere Ptolemaiere, end under de første Konger af dette Navn; men de gunstige Forhold ændredes helt, da Romerne midt i det sidste Aarhundrede før Chr. bleve Herrer i Alexandria, som de vare blevne det de fleste andre Steder, hvor Grækerne vare bosatte. I Mathematiken viste de sig nemlig ingenlunde som lærvillige Disciple af de overvundne. I Tidernes Løb undergik det alexandrinske Bibliothek, der skulde have tjent til at bevare det vundne videnskabelige Udbytte, forskjellige Ildebrande. Naar Alexandria ikke desto mindre vedblev at være det Sted, hvor Forstaaelsen af den gamle Mathematik glimtvis blussede op, hænger dette sikkert sammen med, at det bestandig var der, at endnu flest Arbejder opbevaredes. Der levede saaledes Pappos i Slutningen af det tredie Aarhundrede efter Chr. Han var vel ikke nogen stor Mathematiker i Sammenligning med dem, som i Ptolemaiernes Tid havde virket paa samme Sted; men hans «mathematiske Samlinger» ere blevne af uvurderlig Betydning ved de Oplysninger, som de direkte og indirekte ved Rækker af Hjælpesætninger have bragt os om de store græske Mathematikeres nu tabte Værker.

I en enkelt Retning af Mathematiken er der dog endnu paa Pappos Tid frembragt noget nyt, nemlig i Arithmetiken. Fra Mellemtiden mellem de store Mathe-

matikere og Pappos have vi Arbejder af flere arithmetiske Forfattere, blandt hvilke navnlig Nikomachos (omtr. 100 efter Chr.) nød stor Anseelse. Han har skrevet en opbevaret Indførelse i Arithmetiken. Det er dog vist nærmest, fordi videregaaende arithmetiske Undersøgelser ikke passede ind i Rammerne for de opbevarede Arbejder fra den bedste Tid, at han og nogle andre arithmetiske Forfattere have kunnet bringe os noget nyt. Derimod indtage de Arbejder, som ere opbevarede fra Pappos' Samtidige Diofantos, en saadan Særstilling, at vi deri maa se en virkelig Udvidelse af den græske Arithmetik. Fra hans Haand have vi det meste af et stort Værk «om arithmetiske Sager». Om et lille Skrift om Polygonaltal har udgjort en Del af det større, vides ikke.

2. Den pythagoræiske Mathematik.

Naar vi nu skulle vende os til det mathematiske Indhold af den græske Geometri og ville begynde med den ældste Tid, er det kun yderst lidt, vi faa at vide om det 6te Aarhundrede. Ganske vist er der forskjellige Sætninger, som Eudemos allerede tillægger Thales. Blandt disse kan han godt have kjendt den, at en Periferivinkel i en Halvcirkel er ret, hvad enten han har fundet den selv eller faaet den fra Ægypterne. Den fremgaar nemlig let af den iøjnefaldende Omstændighed, at en Cirkel kan omskrives om et Rektangel. Derimod er det vanskeligt at finde nogen Mening i, at Eudemos tillægger Thales den Sætning, at en Cirkel halveres af en Diameter; thi man kan næppe have begyndt med at ville bevise noget saa iøjnefaldende. Eudemos kan derimod have ment, at Thales

nødvendigvis maa have kjendt den samme Sætning, der paa Eudemos' egen Tid ansaas for nødvendig til at bevise Sætningen om Periferivinkler i en Halvcirkel. Paa lignende Maade kan det forholde sig med de ligeledes af Eudemos nævnte Sætninger, at Topvinkler eller Vinkler ved Grundlinien i en ligebenet Trekant ere lige store, eller at en Trekant er bestemt ved en Side og to hosliggende Vinkler. Navnlig den sidste Sætning faar først sin Betydning som theoretisk Sætning, naar den fremkommer i sin naturlige Forbindelse med andre lignende. Da der intet meddeles om Thales' Kjendskab til saadanne, staar Sagen rimeligvis i Forbindelse med, at Traditionen har tillagt Thales visse praktiske Operationer, til hvis theoretiske Begrundelse denne Sætning behøves. Herved kan der tænkes paa de Thales tillagte Bestemmelser af Afstande til utilgængelige Punkter eller Højdemaaling ved Skygger. Sætningen kunde nærmest tyde paa, at han har udført disse ved kongruente Trekanter. Ægypternes Bestemmelse af en Pyramidekants Heldning tyder paa, at de dertil forstode at benytte ligedannede Trekanter, altsaa vare videre end Thales; men denne har dog Æren for blandt Grækerne at have begyndt mathematiske Undersøgelser. Hvorvidt man dernæst naaede allerede i det 6te Aarhundrede, ses bedst af, hvad man i det næste havde at bygge videre paa. Naar Pythagoræerne saaledes fandt de 5 regulære Polyedre, har dette krævet ikke ganske ubetydelige geometriske Forudsætninger.

Langt mere tilfredsstillende Oplysninger foreligge om Pythagoræernes Mathematik. Ere disse end ikke blot upaalidelige med Hensyn til, hvad der tilhører Mesteren og hvad hans Disciple, men muligvis ogsaa tilbøjelige til at tillægge disse meget, som blot fremkom paa deres Tid, give de dog den, der er fortrolig med

den senere græske Mathematik, et saa sammenhængende, tydeligt og forstaaeligt Billede af dennes første Trin, af de Bestræbelser, som tidlig vare oppe, og som senere have sat sig et varigt Præg i den græske, ja i hele den senere Mathematik, at de fortjene at samles. Derved vil man faa fat paa Grundlaget for de paafølgende Arbejder i Slutningen af samme Aarhundrede og tillige opnaa ret at forstaa deres Hensigt, og derved vil ogsaa hele den Skikkelse, som man navnlig i det følgende Aarhundrede gav Mathematiken, finde sin Forklaring.

Ifølge Eudemos' Beretning have Pythagoræerne for det første «hævet Geometrien til en virkelig Videnskab, idet Pythagoras betragtede sammes Grundlag fra et højere Synspunkt og udforskede dens Læresætninger mere immaterielt og intellektuelt. Han har endvidere opdaget de irrationale Størrelser og Konstruktionen af de kosmiske Figurer» (de regulære Polyedre). Til de mere specielle Oplysninger, som vi faa fra andre Forfattere, hører — foruden nogle mere filosofiske end mathematiske Definitioner paa Punkt, Linie, Flade og Legeme —, at Pythagoræerne vidste Besked om Vinkelsummen i en Trekant og om Planens Inddeling i (rimeligvis regulære) Polygoner, hvoraf om et Punkt 6 Trekanter eller 4 Firkanter eller 3 Sexkanter. De skulle have fundet paa de saakaldte Fladeanlæg, hvorved man, som vi skulle se, forstod Løsning i geometrisk Form af Ligninger af anden Grad, og de kjendte Konstruktionen af en Polygon ligestor med én og ligedannet med en anden. Der berettes om en Pythagoræer, at han gjorde sig skyldig i den Forbrydelse mod Skolen at røbe «Sætningen om 12 Femkanter i en Kugle». Det kan endvidere nævnes, at som pythagoræisk Mærke angives det saakaldte Pentagram, det er en uegentlig regulær Femkant, hvis Sider ere Korder i den omskrevne Cirkel til

Buer af Størrelsen $\frac{4\pi}{5}$. Medens enkelte Tilfælde af den Sætning, som den Dag i Dag kaldes den pythagoræiske, vistnok have været kjendte tidligere, tilskrives den almindelige Sætning dem, endvidere en af Reglerne for Dannelsen af rationale Tal paa Siderne i en retvinklet Trekant, nemlig Tallene a, $\left(\frac{a^2-1}{2}\right)$ og $\left(\frac{a^2+1}{2}\right)$, hvor a er et ulige Tal, medens Tallene a, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$ og $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$, hvor a er et lige Tal, tillægges Platon. Det siges, at Pythagoræerne kjendte de tre Proportioner, nemlig den arithmetiske, den geometriske og den harmoniske, endvidere Trekantstallene, ɔ: Summen af de første Tal i den naturlige Talrække, og at de overhovedet gave sig af med Differensrækker. Endelig siges Pythagoras at have gjort Tallet til alle Tings Princip, og Pythagoræerne have beskjæftiget sig med Undersøgelser af visse hele Tal, saasom «venskabelige Tal», der ere Summerne af hinandens Faktorer, og «fuldkomne Tal», der ere Summer af deres egne Faktorer (som $6 = 1 + 2 + 3$). Endelig skal Pythagoras have knyttet Arithmetik og Musik til Geometrien.

Vi skulle tale udførligere om flere af disse Emner og deres Vigtighed i den græske Mathematik, men skulle først kort angive Sammenhængen mellem Emnerne og den gode Overensstemmelse af Opgivelserne, som skrive sig fra Kilder af forskjelligt Værd.

Først kunne vi lægge Mærke til Bestræbelserne efter klart at skjelne Begreberne Punkt, Linie o. s. v. Det ses ogsaa, at man allerede var i Besiddelse af Vinkelbegrebet. Heraf har man gjort Anvendelse saavel ved

Planens Deling som ved Undersøgelsen af, hvilke regulære Polyedre der overhovedet vare mulige. Der var vel meget Arbejde at gjøre, inden man kunde naa til en saa fuldkommen Bestemmelse og Konstruktion ogsaa af Dodokaedret og Ikosaedret som dem, vi finde hos Euklid; men det første Skridt hertil, Konstruktionen af den regulære Femkant, blev gjort, og man satte kjendelig Pris paa at have naaet det. I Konstruktionen af Femkant- eller Tikantsiden haves allerede det Exempel paa geometrisk Løsning af en Ligning af anden Grad, som spiller den største Rolle hos Euklid. At Pythagoræerne imidlertid ikke ere blevne staaende ved dette ene Tilfælde, fremgaar ikke blot af den almindelige Omtale af Flädeanlæg, men ogsaa af den særlige Omtale af den, som vi skulle se, for disse saa betydningsfulde pythagoræiske Læresætning og af en dertil lige saa vigtig Konstruktion. Dertil har da ogsaa knyttet sig Opdagelsen af, at Ligninger af anden Grad gave Anledning til inkommensurable Størrelser, nummeriske Ligninger til irrationale Størrelser (hvormed vi bestandig ville betegne saadanne, som ere inkommensurable med den brugte Enhed). Om end en Del af deres taltheoretiske Undersøgelser kunne have været en Fortsættelse af Babyloniernes Talmystik, gik andre ud paa at danne saadanne kvadratiske Ligninger, hvor Irrationaliteten undgaas.

I almindelige Undersøgelser lader irrationale Størrelser sig dog nu en Gang ikke undgaa. Derved blev imidlertid de hidtil benyttede mathematiske Begrundelser upaalidelige, hvad det er Pythagoræernes store Fortjeneste at være blevne opmærksomme paa. Man kjendte nemlig vel Proportioner og har rimeligvis i en eller anden Form tidlig anvendt dem; men før Eudoxos' Tid kunde herved kun være Tale om Ligestorhed mellem

Forhold mellem hele Tal, eller disse Forholds Ligestorhed med Forhold mellem geometriske Størrelser, som følgelig maatte være kommensurable. Man gjorde Brug af de simple Regninger, f. Ex. Multiplikation, og vidste som Ægypterne, at f. Ex. et Rektangel, naar Fladeenheden er Kvadratet paa Længdeenhed, bliver Produkt af Siderne; men hvis Siderne ere inkommensurable, bliver ikke blot Beviset ved Inddeling i Kvadrater ubrugeligt, men selve Sætningen meningsløs, da det vilde stride mod det ved sædvanlig Regning dannede Begreb om et Produkt, at Faktorerne vare irrationale Tal.

Det er denne Vanskelighed, Pythagoræerne og med dem de følgende græske Mathematikere kom ud over ved en geometrisk Fremstilling af almindelige Størrelser. Det kan vel i første Øjeblik se ud, som om herved kun er lidet vundet, da en vilkaarlig tegnet Linie lige saa vel har en bestemt Størrelse som et vilkaarlig valgt Tal. Den tegnede Figur benyttes imidlertid kun til at fastholde den Figur, der beskrives, og paa denne kunne Størrelserne have alle de Værdier, som stemme med Beskrivelsen. Fremstillingen af en Størrelse ved Længden af en Linie kan derved, som Algebraens Fremstilling ved et Bogstav, anvendes paa kontinuert varierende Størrelser. Grækerne kjendte dog lige saa lidt til negative som til imaginære Størrelser; men Trangen til de første bliver noget mindre derved, at selve Figurens Variationer tildels kunne bringe de samme Almindeliggjørelser, som vi nu opnaa ved Brug af negative Størrelser.

Det vil af disse Bemærkninger forstaas, at Operationerne med de geometrisk fremstillede Størrelser spille en lignende Rolle som vore algebraiske Operationer. Vi ville derfor kalde Læren om disse geometriske Operationer den geometriske Algebra. Den skal her

fremstilles saaledes, som vi kjende den dels fra anden Bog af Euklids Elementer, dels fra den Brug, der gjøres af den overalt i den græske Mathematik, særlig hvor man nu bruger Ligninger af anden Grad. Baade hos Euklid og andensteds ligger den til Grund for saa meget, at der ogsaa heri haves et Bevis for den Ælde, som vi tillægge den i Overensstemmelse med Beretningen om Pythagoræernes Kjendskab til Fladeanlægene. Dens Anvendelighed paa hvilkesomhelst Størrelser, irrationale saavel som rationale, og dens deraf følgende meget abstrakte Natur stemmer godt med Eudemos' Ytring om Pythagoras' immaterielle Behandling af Geometrien.

Det er dog nok muligt, at denne abstrakte Natur ikke fra først af var saa bevidst og udpræget, som den var bleven paa Eudemos' Tid og er det hos Euklid. Tvertimod er det naturligt og stemmer godt med Beretningerne om Pythagoræernes Sammenknytning af Geometri og Arithmetik at antage, at den tilsvarende geometriske Behandling af hele Tal, som hos Euklid tildels fremtræder som en Anvendelse af den almindeligere geometriske Algebra, er gaaet forud. I de nærliggende geometriske Fremstillinger af Egenskaber ved hele Tal, med hvilke man er begyndt, har man da haft en Fremstillingsform, som af sig selv blev lige saa anvendelig paa almindelige kontinuerte Størrelser. Dette er man da først efterhaanden bleven sig fuldt bevidst. Af denne Grund ville vi først tale om Grækernes geometriske Arithmetik som Indledning til den geometriske Algebra.

3. Den geometriske Arithmetik.

I vore Lærebøger i Arithmetik træffer man jevnlig et geometrisk Bevis for, at i et Produkt af hele Tal Faktorernes Orden er ligegyldig. Det bestaar i, at man skriver Enhederne eller Punkter, som fremstille disse, op i et Rektangel. Hver vandret Række indeholder Multiplikandens Enheder, og Rækkernes Antal er Multiplikator. Ombytning af Rækker og Piller giver da Ombytning af Faktorerne. Benytter man i Stedet for Enere smaa Kvadrater med Siden 1, har man samtidig bevist den geometriske Sætning, at Størrelsen af et Rektangel udtrykkes ved Produktet af Siderne. Hvis man derimod undlader at vælge en bestemt Enhed, faar man, naar Siderne ere kommensurable, at to Rektangler forholde sig som Sidernes Produkter.

Fra denne Fremstilling haves de af Grækerne jevnlig brugte Benævnelser: rektangulære eller plane Tal, som ere sammensatte af to Faktorer, og den endnu brugelige: Kvadrattal. Rektangulære Tal kaldes ligedannede, naar Faktorerne ere proportionale; de forholde sig da som to Kvadrattal.

Af det Kvadrat, som fremstiller et vist Kvadrattal (n^2), faas det næste $(n + 1)^2$ ved langs de to Sider at lægge $2\,n$ nye smaa Kvadrater og endnu et i den derved opstaaende indadgaaende Vinkel. Hele denne Udfyldingsfigur, saavel som i Almindelighed en Figur, der fremkommer som Differens mellem ligedannede og ligedan beliggende Figurer med en Vinkelspids til Fællespunkt, kaldes et Gnomon. Dette bliver i nærværende Tilfælde $2\,n + 1$. Man finder paa denne Maade, at Kvadrattallene kunne dannes som Summer af de første ulige Tal. Lader man $2\,n + 1$ selv være et Kvadrattal, faas

den Bestemmelse af rationale Sider i en retvinklet Trekant, eller den Løsning af den ubestemte Ligning

$$x^2 + y^2 = z^2$$

i hele Tal, som (S. 31) tillagdes Pythagoras. Den, som tillagdes Platon, faas ved at lade Gnomon have Bredden 2.

Ved at lade Gnomon have en vilkaarlig Bredde faar man den almindeligste Løsning af samme Ligning i hele Tal. For at opnaa dette benytter Euklid i 1ste Hjælpesætning til Nr. 28 af 10de Bog en Omdannelse, til hvilken i vort algebraiske Sprog nærmest vilde svare en Indførelse af nye ubekjendte $z + x = u$, $z - x = v$ (ɔ: Gnomons Bredde $= v$), hvorefter $u\,v$ skal være et Kvadrat y^2. For at slutte os nærmere til Euklid, der paa dette Standpunkt kan støtte sig paa den i 2den Bog udviklede geometriske Algebra, ville vi af denne allerede her anføre hans 2den Bog 6, til hvilken vi snart skulle komme. Den udsiger (se i det følgende S. 42), at naar C er Midtpunktet af Linien AB, D et Punkt af denne Linies Forlængelse, er

$$A\,D\,.\,B\,D = C\,D^2 - C\,B^2$$

(ɔ: med foranstaaaende Betegnelser $u\,v = z^2 - x^2$).

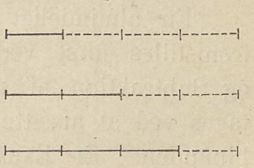
Skal her alle Linier fremstille hele Tal, maa for det første $A\,D\,(= u)$ og $B\,D\,(= v)$ begge være lige Tal eller begge ulige Tal, for at $A\,B = 2\,C\,B$ (eller $u - v = 2x$) kan blive lige, Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at Gnomon $A\,D\,.\,B\,D$ bliver et Kvadrattal, er dernæst, at $A\,D$ og $B\,D$ fremstille ligedannede Tal, eller i vort Sprog, at $A\,D = a\,m^2$, $B\,D = a\,n^2$ altsaa

$$z = C\,D = a\frac{m^2 + n^2}{2},\ x = C\,B = a\frac{m^2 - n^2}{2},\ y = a\,.\,mn.$$

Det er, som vi skulle se, til Tals Fremstilling ved Rektangler og Kvadrater, at Grundlaget for den geo-

metriske Algebra knytter sig; men den geometriske Arithmetik har ogsaa benyttet andre Figurer. Vi have set, at der er tillagt Pythagoræerne Kjendskab til Trekantstal. Derved forstaas Summer af de første Tal i den naturlige Talrække, idet de enkelte Tals Enere afsættes som Rækker af Punkter under hinanden, saaledes at de danne en Trekant. Det er let at se, hvorledes denne Fremstilling har kunnet bruges til virkelig Udregning. Man behøvede nemlig blot at lægge en anden kongruent Trekant, dannet af Punkter, ved Siden, saaledes at der dannes et Parallelogram. I det der da bliver lige mange Punkter i hver Række ($n + 1$, naar der er n Rækker Tal), bliver Antallet af Punkter i Parallelogrammet, altsaa det dobbelte Trekantstal, $n\,(n + 1)$. Det ses, at Fremgangsmaaden er ganske den samme som den algebraiske at addere Differensrækken i omvendt Orden til den selv.

Da Enheden, som i denne Række er Differens, kan vælges vilkaarlig, og da en konstant Addend i hvert Led blot giver et Produkt, som skal føjes til Summen, har man nu let kunnet summere en vilkaarlig Differensrække. Iøvrigt kan Differensen ogsaa som i hosstaaende Figur afsættes som et Liniestykke, der umiddelbart betegner en vilkaarlig Størrelse. Af en videregaaende Undersøgelse af Differensrækker, som Archimedes foretager i Skriftet om Spiralerne, ses det, at Summationen har været foretaget paa en saadan Maade.



Idet vi vende tilbage til Enernes Fremstilling ved Punkter, skulle vi endnu nævne et navnlig ved Nikomachos kjendt Middel til geometrisk Fremstilling af Differensrækker med første Led 1 og med et vilkaarligt helt Tal ($r - 2$) til Differens. Det bestaar i Anvendelse

af de saakaldte Polygontal (r-kantstal). Man afsætter andet Led ($r - 1$) som Punkter, der med et fast Punkt danne en r-kant. For det faste Punkt som Fællespunkt udfyldes denne Polygon til en Række ligedannede r-kanter ved en Række Gnomoner, hvoraf hver fremstiller et Led i Rækken. For $r = 4$ faas Firkantstallene, eller, da Firkantens Form er ligegyldig, de før nævnte Kvadrattal.

Den her omtalte geometriske Arithmetik har man ogsaa udstrakt til Rummet. Rumlige Tal ere saadanne, som fremstilles ved et Parallelepipedum, altsaa Produkter af 3 Faktorer. Ere disse lige store, faas Kubiktal. I to ligedannede rumlige Tal ere Faktorerne proportionale, Tallenes Forhold altsaa ligt det mellem to Kubiktal. Et Pyramidaltal er Summen af en Række r-kantstal begyndende med 1. Polygonerne tænkes lagte over hinanden, saa de danne en Pyramide (Kuglestabel).

4. Den geometriske Algebra.

En almindelig, rational eller irrational, Størrelse fremstilles først ved en ret Linies Længde. Addition og Subtraktion af saaledes fremstillede Størrelser foretages ved at afsætte dem paa Forlængelsen af eller paa hinanden. Et Exempel paa virkelig Brug af denne Fremstilling have vi nys haft i den Summation af Differensrækker, som vi lærte at kjende ved Archimedes. Den kan overhovedet bruges til Anskueliggjørelse af Ligninger af første Grad med hele Koefficienter — eller blot med rationale, da de saa kunne gjøres hele.

Multiplikation af to almindelige Størrelser har efter sit umiddelbare Begreb ingen Betydning. Man hjalp sig

imidlertid ved paa de almindelige Størrelser at overføre den geometriske Fremstilling af et Produkt af to hele Tal, som vi alt have lært at kjende. Man udvidede dog ikke som i den moderne Mathematik selve de arithmetiske Begreber Multiplikation og Produkt; men i Stedet for om Produktet af de almindelige Størrelser talte man om og opererede med Rektanglet af de to Linier, som fremstille Faktorerne. Som Vejledning i Behandlingen kunde man dog, paa Grund af den dermed ensartede Fremstilling af virkelige Produkter af hele Tal, bestandig bruge den arithmetiske Behandling af disse. Det kan derfor ikke vildlede, at jeg i det følgende ved $a\,b$ og a^2 betegner Rektanglet af a og b og Kvadratet paa a.

Man har saaledes faaet en ny geometrisk Fremstilling af Størrelser nemlig som Arealer, foreløbig af Rektangler og Kvadrater. For at addere og subtrahere dem maatte man skaffe dem en fælles Side, og det skulde ske uden Brug af Proportionslæren; thi den, som man havde i det 5te Aarhundrede, var grundet paa udelukkende Brug af kommensurable Størrelser. Indførelsen af en Side i et Rektangel foretoges ved Hjælp af følgende Sætning. Et Rektangel deles ved Paralleler med Siderne gjennem et Punkt af en Diagonal i fire Rektangler, af hvilke de to, som ligge paa hver sin Side af Diagonalen, ere lige store (se i det følgende Fig. S. 40—42). Er det ene af disse det givne, er det let at give det andet en given Side. Denne Konstruktion, der svarer til algebraisk Division som Konstruktion af et Rektangel med givne Sider til Multiplikation, har faaet det særlige Navn Fladeanlæg *(παραβολή)*, eller simpelt Fladeanlæg i Modsætning til det efterfølgende elliptiske og hyperbolske Fladeanlæg. Den dertil benyttede Figur har, som vi snart skulle se, ogsaa andre

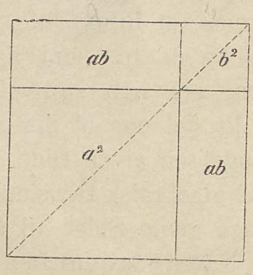
vigtige Anvendelser. Den Del af Figuren, som bestaar af de to lige store Rektangler og et af de andre (f. Ex. $CBEM$ paa Fig. S. 41) kaldes, her som i den geometriske Arithmetik, Gnomon.

Den her anførte Sætning findes og anvendes paa den angivne Maade i Euklid I, 43—44, hvor den dog fremtræder i en noget almindeligere Skikkelse, idet Rektanglerne ere ombyttede med Parallelogrammer med lige store Vinkler. I Euklids 2den Bog opereres derimod med Rektangler. Nogen Vejledning i den Brug, som man, i Henhold til Meddelelserne om Pythagoræernes Kjendskab til Fladeanlæg, maa have gjort af denne Bogs Sætninger længe før Euklid, maa vi imidlertid søge i hans 6te Bog, hvor Anvendelserne dog forekomme i almindeliggjorte Skikkelser, som først skyldes Euklid eller hans nærmeste Forgængere.[1]

Et Rektangel, hvis Sider selv ere Summer, bliver Summen af alle de Rektangler, som til Sider have et Led i hver af de givne Summer. I Stedet for den moderne Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b.$$

traadte hosstaaende Figur (Euklid II, 4):

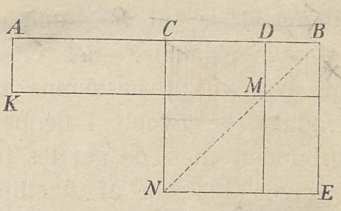


[1] Betydningen af Almindeliggjørelsen vil blive forklaret i vort 16de Afsnit.

Den Opgave, som man nu vilde fremstille ved Ligningen

$$a\,x - x^2 = b^2, \qquad (1)$$

udtrykte de gamle saaledes: Langs en given ret Linie $A\,B\,(= a)$ at lægge et Rektangel $A\,M$ lig et givet Kvadrat (b^2) saaledes, at det (i Rektanglet $a\,x$ paa $A\,B$) manglende Areal bliver et Kvadrat $(B\,M = x^2)$. Denne Konstruktion, der kaldes det elliptiske Fladeanlæg (af ἔλλειψις, Mangel), findes ved at føre den Figur, ved hvilken Opgaven løses, tilbage til den foregaaende. Er nemlig C Midtpunktet af $A\,B$, og lægges Rektanglet $C\,K$ hen paa Siden $D\,B$ (som $D\,E$), viser det sig, at Rektanglet $A\,M$ bliver lige stort med et Gnomon, nemlig Differensen mellem Kvadraterne paa $B\,C$ og paa $C\,D$, eller i vor Algebras Sprog, at



$$b^2 = a\,x - x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Idet nu b og $C\,B = \frac{a}{2}$ ere bekjendte, kan man finde $C\,D = \frac{a}{2} - x$ ved den Pythagoræiske Læresætning og derved x.

At man har løst Opgaven omtrent saaledes, kan man slutte af Euklid VI, 28, hvor den dog forekommer i en almindeligere Skikkelse. Selve den benyttede Omdannelse er godtgjort i Euklid II, 5, som udsiger, at naar C er Midtpunktet, D et andet Punkt af $A\,B$, er

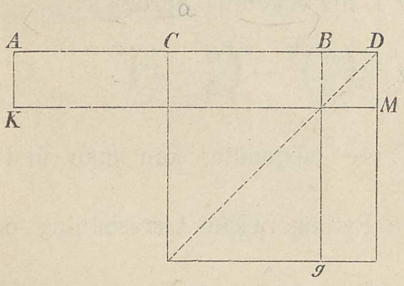
$$A\,D\,.\,D\,B + C\,D^2 = C\,B^2.$$

Umiddelbart giver denne Sætning Løsningen af den samme Opgave, stillet i en anden Form, nemlig: Del en given Linie AB i to Stykker, som danne et Rektangel med givet Areal (hvilket vi dog foreløbig for at kunne bruge den Pythagoræiske Læresætning antage givet som et Kvadrat b^2). Af Euklids Data 85 kunne vi se, at de gamle ogsaa have kjendt Opgaven i denne Skikkelse, der er den geometriske Form for den Opgave at bestemme to Størrelser, hvis Sum og Produkt ere givne. I denne faldt en Ulempe, som var forbunden med de gamles først anførte Fremstilling af Opgaven i Form af et elliptisk Fladeanlæg, nemlig at de sædvanlig kun meddelte den ene Løsning af Ligning (1), bort af sig selv.

Ganske paa samme Maade giver Euklid i II, 6 en (i VI, 29 indbefattet) Løsning af Ligningen

$$a\,x + x^2 = b^2, \qquad (2)$$

som de gamle udtrykke saaledes: Langs en given Linie $AB\,(= a)$ at lægge et Rektangel AM lig et givet Kvadrat (b^2) saaledes, at det (over Rektanglet $a\,x$ paa AB) overskydende Areal BM bliver et Kvadrat (x^2). Denne Konstruktion kaldes det hyperbolske Fladeanlæg (af ὑπερβολή, Overskud). Er Opgaven løst, og er C Midtpunktet af AB, omdannes Rektanglet AM til et Gnomon ved Flytning af Rektanglet AC hen til Stillingen GM. Man finder ogsaa her, hvor D er et Punkt af AB's Forlængelse, at



$$AD \,.\, BD = CD^2 - CB^2.$$

Denne geometriske Omdannelse falder sammen med den algebraiske, hvorved man nu løser Ligning (2) nemlig

$$b^2 = a\,x + x^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

$CD\left(=\frac{a}{2}+x\right)$ kan dernæst bestemmes ved den pythagoræiske Læresætning.

Euklids Sætning II, 6 indeholder umiddelbart Løsningen af den samme Opgave i en anden Skikkelse, nemlig den at bestemme to Linier (AD og BD), hvis Differens og hvis Rektangel ere givne (Rektanglet = Kvadratet b^2), der er den geometriske Form for den: at bestemme to Størrelser, hvis Differens og Produkt ere givne. Da Opgaven ogsaa forekommer i denne anden Skikkelse hos de gamle (se Euklids Data 84), er det uden Betydning, at der ikke hos dem findes nogen Form, hvis Ordlyd ligesaa umiddelbart gjengiver Ligningen

$$x^2 - a\,x = b^2 \qquad (3)$$

som Fladeanlæggene Ligningerne (1) og (2). Om vi i vort algebraiske Sprog faa Ligning (2) eller (3), beror nemlig kun paa, om vi i vor moderne Omskrivning af Euklid II, 6 sætte

$$BD = x \text{ eller } AD = x.$$

Vi se saaledes, at de gamle have behandlet alle Former for Ligninger af 2. Grad, som give positive Rødder, og om andre kunde der ikke være Tale, da negative Størrelser vare et ubekjendt Begreb. (Ellers kunde II, 5 og II, 6 være forenede til en Sætning). For den her meddelte geometriske Løsnings Skyld forudsatte vi dog, at det givne Led, som for Homogenei-

tetens Skyld i hvert Fald maatte være et Areal, var givet i Form af et Kvadrat, og Løsningen fuldbyrdedes da ved den saakaldte pythagoræiske Læresætning. Den sidste, hvoraf i det mindste specielle Tilfælde vare kjendte allerede af Ægypterne, tillægges Pythagoras, uden at man dog véd noget om, hvorledes han har bevist den. Beviset kan muligvis være ført ved Brug af ligedannede Trekanter og altsaa med den da kjendte Proportionslære kun have været exakt, naar Siderne vare kommensurable; thi Indførelsen af de almengyldige geometriske Begrundelser var kun lige i sin Begyndelse, og Euklids almengyldige Bevis (I, 47) siges udtrykkelig at skyldes denne selv. Da Euklid netop beviser, at Kvadratet paa en Kathete er lige stort med Rektanglet af dens Projektion paa Hypotenusen og hele Hypotenusen, ligger det ikke fjernt at antage, at det ældre Bevis, som han vil erstatte, har benyttet den dertil svarende Sætning om Mellemproportionaler.

Hvad dernæst angaar Omdannelsen af en Figur til et Kvadrat, hvilken enten maa være benyttet til at give Ligningerne den her antagne Form eller til en Konstruktion uden Brug af den Pythagoræiske Læresætning af den Størrelse, som i den moderne Løsning fremstilles ved en Kvadratrod, tillægges der udtrykkelig Pythagoræerne Kjendskab til den Opgave at konstruere en Figur ligestor med en og ligedannet med en anden. Meningen maa i hvert Fald være, at Figurerne skulle være retliniede, og det specielle Tilfælde, hvormed vi her have at gjøre, er det, hvor den anden Figur er et Kvadrat. Opgavens almindeligere Form er den, som forekommer i Euklid VI, 25, hvor den skal benyttes til Euklids almindeliggjorte Fladeanlæg. Naar nu en senere Meddeler har tillagt Pythagoræerne Løsningen af Opgaven i denne Form, har han derved villet tilkjende-

give, at de vare i Besiddelse af de til Fladeanlæg nødvendige Forudsætninger; men til det simple Fladeanlæg behøves kun Omdannelsen til et Kvadrat.

Omdannelsen af en retliniet Figur til et Rektangel har ikke voldt særlige Vanskeligheder. Hvorledes man dernæst har kunnet omdanne et Rektangel til et Kvadrat uden ved Brugen af Begrebet Mellemproportional at støtte sig paa den før Eudoxos ufuldstændige Proportionslære, kan ses af Euklid II, 14, der kun bygger paa selve den geometriske Algebra. Konstruktionen beror nemlig paa den nys omtalte Sætning II, 5 (eller 6), ifølge hvilken et Rektangel fremstilles som Differens mellem to Kvadrater, og hvorved Siden i det med Rektanglet ligestore Kvadrat kan konstrueres ved den Pythagoræiske Læresætning. Omdannelsen er den samme som

$$x^2 = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Denne Omdannelse indeholder Løsningen af den rent kvadratiske Ligning.

En bestemt geometrisk Anvendelse af Fladeanlæg tillægges Pythagoræerne nemlig Konstruktionen af Siden i den regulære Femkant (og Tikant). Denne afhænger som bekjendt af Ligningen

$$x^2 = a\,(a - x),$$

der kan omdannes til

$$a^2 = x^2 + a\,x,$$

som løses ved et hyperbolsk Fladeanlæg. I II, 11 benytter Euklid netop den samme Omdannelse af Ligningen i geometrisk Form til at faa Opgaven løst.

Sætningerne II, 5 og 6 anvendes ikke udelukkende til Løsninger af Ligninger af anden Grad. Vi have allerede omtalt en arithmetisk Anvendelse, som Euklid

gjør deraf i 10de Bog, og vi nævnte nys, hvorledes Brugen af Mellemproportional ad denne Vej undgaas. Et andet Exempel paa, at den geometriske Algebra kan overflødiggjøre Brug af Proportioner, haves i Euklids Beviser i III, 35—37 for Sætningerne om et Punkts Potens med Hensyn til en Cirkel. II, 5 og 6 udsagde (se Fig. S. 41—42), at, naar C er Midtpunktet af AB, og naar D henholdsvis ligger paa AB eller dens Forlængelse,

$$AD \,.\, DB = \pm (CB^2 - CD^2).$$

Ere nu A og B Skjæringspunkterne med en Cirkel med Centrum O, faas af den Pythagoræiske Sætning, at

$$CB^2 - CD^2 = OB^2 - OD^2,$$

og dermed ere Potenssætningerne beviste.

De Elementer af den geometriske Algebra, som her ere fremsatte, omfatte dog særlig Behandlingen af Ligninger af 2. Grad, altsaa netop det Omraade, hvor Nødvendigheden af en anden Fremstilling end ved Tal har vist sig ved den dermed forbundne Optræden af irrationale Størrelser. Ved denne Behandling kunde man nøjes med Brug af Rektangler og Kvadrater, for saa vidt ikke allerede en opgiven Størrelse var fremstillet ved Arealet af en anden Figur. Under den videre Udvikling af den geometriske Algebra og dens Anvendelse særlig paa Keglesnitslæren — udvidedes den imidlertid saaledes, at ogsaa andre Figurers Arealer tjente til at fremstille de Størrelser, hvormed der opereredes. Det er dog klart, at det alene er i sin Anvendelse paa Rektangler og — da man i den geometriske Algebra aldrig indfører bestemte Enheder, og man altsaa opererer med homogene Ligninger — Parallelogrammer, at den geometriske Algebra indbefatter den geometriske Arithmetik; thi kun da kunne de Punkter, der i Arithmetiken frem-

stille Enerne, ombyttes med lige store Kvadrater eller med kongruente Parallelogrammer. Trekantstallene f. Ex. have ikke noget med Trekantens Areal at gjøre, en Misforstaaelse, der senere har bragt romerske Landmaalere til at bruge Formlen $\frac{a(a+1)}{2}$ til Beregning af den ligesidede Trekants Areal.

5. Nummeriske kvadratiske Ligninger; Kvadratrodsuddragning.

Af Overensstemmelsen mellem den geometriske Algebra og den geometriske Arithmetik, anvendt paa Rektangler, fremgaar det, at et Omraade, hvorpaa det fra først af har ligget meget nær at anvende den fundne almindelige Løsning af kvadratiske Ligninger, maa have været nummerisk givne Ligninger. Her var det imidlertid, at man mødte den Ulempe, at Rødderne i Almindelighed bleve irrationale. At man har søgt Exempler, hvor dette undgaas, ses af Bestræbelserne for at løse saadanne ubestemte Ligninger som $x^2 + y^2 = z^2$. I de Opgaver, som Geometrien eller andre Anvendelser frembød, maatte man derimod tage Størrelserne, som de vare. Naar man nu ikke kunde finde en rational Løsning, altsaa en saadan, som kunde udtrykkes nøjagtig ved Tal, var der to Ting at gjøre. Dels skulde det bevises, at den søgte Størrelse virkelig ikke blev rational, og naar man gik over til Ligninger, hvor allerede de givne Størrelser vare irrationale, gjaldt det endvidere om at klassificere de forskjellige irrationale Størrelser, som kunde fremkomme; dels kunde det for videre Anvendelsers Skyld være godt ogsaa at udregne

de irrationale Størrelser med saa god Tilnærmelse som muligt.

Videst bragte de gamle Grækere det i den første af disse Retninger. Et Exempel paa en til denne hørende Undersøgelse have vi alt anført, nemlig Euklids Løsning af Ligning $x^2 + y^2 = z^2$. Da han nemlig løste denne fuldstændig, fandt han ej blot tilstrækkelige men ogsaa nødvendige Betingelser for, at $\sqrt{x^2 + y^2}$ og $\sqrt{z^2 - x^2}$ blive rationale. Han fandt altsaa, at de ere irrationale, naar Betingelserne ikke ere opfyldte. Af en simplere Beskaffenhed er en rimeligvis meget gammel Paavisning af, at $\sqrt{2}$ er irrational, som — om end med Urette — har fundet Plads i Slutningen af 10de Bog i flere Udgaver af Euklid. Bortset fra den geometriske Fremstilling kan den udtrykkes omtrent saaledes. Skal man have $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, hvor Brøken $\frac{m}{n}$ er forkortet saa meget som muligt, maa man have $m^2 = 2\,n^2$. Heraf følger, at m^2 er et lige Tal, altsaa ogsaa, at m er det. Da $\frac{m}{n}$ er uforkortelig, maa n altsaa være ulige. Af m lige følger imidlertid, at m^2 er delelig med 4, altsaa n^2 med 2, følgelig, at n er lige. Da nu n ikke kan være baade lige og ulige, kan $\sqrt{2}$ ikke være en uforkortelig Brøk.

En lignende Fremgangsmaade kan som bekjendt bruges til i al Almindelighed at vise, at en Rod af et helt Tal ikke kan være en Brøk. Flere af Sætningerne i Euklids 8de Bog kunne oprindelig være udviklede med dette Maal for Øje og i ældre Tid være anvendte dertil. Dette gjælder f. Ex. om Sætning 6, som — om end i anden Form — udtrykker, at en Potens af en uforkortelig Brøk selv vil være en uforkortelig Brøk. Det

er imidlertid et andet almindeligt Middel, som Euklid i 10de Bog giver til at prøve en Størres Rationalitet eller, hvad der er det samme, to Størrelsers Kommensurabilitet. Det bestaar i Anvendelsen af samme Operation, som tjener til Bestemmelsen af de to Størrelsers største fælles Maal. Idet Størrelserne ere fremstillede ved Linier, maa man afsætte den mindste b paa den største saa mange Gange, at Resten c bliver mindre end b, dernæst c paa b o. s. v. Kan denne Operation fortsættes i det uendelige, ere Størrelserne inkommensurable. Man finder let paa denne Maade, at en Linie ved Højdeling deles i Stykker, der ere inkommensurable med den og indbyrdes. Kaldes nemlig Linien a og Delen x og y, haves

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}.$$

Operationen, som skulde føre til største fælles Maal, bliver altsaa fortsat Højdeling af de nye Stykker, saa det er klart, at den ikke kan føres til Ende.

Idet nu de ved Ligninger af anden Grad fremkomne Størrelser, som blive inkommensurable med de givne, ikke kunne udtrykkes exakt ved disse og Tal, er det i sin Orden, at Grækerne i exakte Undersøgelser ikke indførte Tilnærmelsesværdier, men opererede videre med de fundne Størrelser fremstillede ved de Linier, som fremgik af den til Ligningens Løsning svarende Konstruktion. Det er ganske, som naar vi ikke udregne Rødderne, men nøjes med at udtrykke dem ved Kvadratrodstegn og andre algebraiske Tegn. Da imidlertid den ene rette Linie ser ud som den anden, fik man ikke derved samme Overblik, som Tegnsproget yder os. Det blev derfor nødvendigt at foretage en Klassifikation af de ved successiv Løsning af Ligninger af anden Grad

frembragte irrationale Størrelser. En saadan blev paa Platons Tid foretagen af Theaitetos, og hans Arbejde er fortsat af Euklid og optaget i 10de Bog af dennes Elementer. Vi skulle vende tilbage dertil ved Omtalen af denne, og her blot bemærke, at dette Arbejde ogsaa maatte indbefatte en Prøvelse af, i hvilke Tilfælde en Størrelse, som tilsyneladende tilhører én Klasse, i Virkeligheden kan føres tilbage til en anden, altsaa Ophævelsen af dobbelt Irrationalitet.

Anvendelsen af denne Klassifikation finde vi, hvor der ønskes en exakt Bestemmelse af Størrelser, som afhænge af Kvadratrødder eller overhovedet findes ved Ligninger af 2. Grad. I den elementære Geometri gjælder dette om Sider i regulære Polygoner og Kanter i regulære Polyedre. Med denne sidste Anvendelse har Theaitetos særlig beskjæftiget sig, og den spiller en Hovedrolle i Euklids Elementer.

I dette Værk savnes derimod enhver tilnærmet nummerisk Beregning. Dette finder vel sin Forklaring i, at man ved en saadan vilde forlade den absolut exakte Bestemmelse, som tilsigtes i Geometrien; men det turde ogsaa hænge sammen med en Mangel paa Evne og gode Hjælpemidler til al virkelig Udregning hos Grækerne, en Mangel, som træder forstærket frem, naar man skal gaa ud over de fire simple Regningsarter, altsaa allerede ved Kvadratrodsberegning.

Idet vi foreløbig holde os til det almindelige Hjælpemiddel, vil den græske Talbetegnelse (hvorom der senere bliver Lejlighed til at sige mere) vel, naar man indøver den saaledes, som vi i vor Barndom ere øvede i vor, vise sig langt mere brugbar, end man fra først af forestiller sig. Ved Udregninger har man vel ogsaa taget saadanne mekaniske Midler som inddelte Regnebrædter til Hjælp. At Talbetegnelsen svigtede, naar det gjaldt

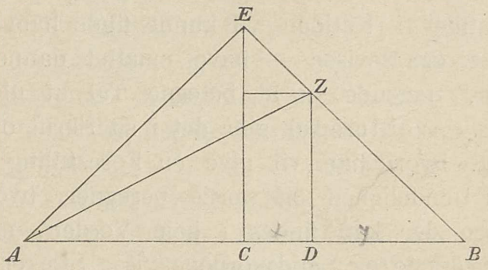
om Fremstillinger af store Tal, ses dog af, at, da den græske Mathematik stod paa sit højeste, Archimedes og Apollonios — Mænd, i hvis Skrifter en vel oplært Mathematiker i Nutiden vil kunne finde ham ukjendte Sætninger og Beviser — have maattet danne særlige Systemer, tjenende til at betegne Tal af ubegrænset Størrelse. Archimedes gjør det i sit Skrift om Sandregning, hvori han vil give en Forestilling om Talrækkens Uendelighed og særlig beregner, hvor mange Sandskorn der kan findes i hele Verden, naar man tillægger denne og Sandskornene visse Størrelser. Det taler heller ikke til Gunst for de for Grækerne selv ejendommelige Midler til Talberegning, at de græske Astronomer ikke fandt dem tilstrækkelig udviklede, men vedblivende gjorde Brug af det fra Babylonierne nedarvede 60-talsystem.

Hvad nu angaar Grækernes Kvadratrodsuddragninger kunne vi først omtale en særlig Bestemmelse af $\sqrt{2}$, der vel nærmest kjendes fra en sen arithmetisk Forfatter, men kan føres meget længere tilbage, og hvis Begrundelse findes i Euklids II, 9 (og 10). Denne Begrundelse er tillige et Exempel paa, hvorledes den geometriske Algebra anvendtes. Sætning 9 udsiger, at naar C er Midtpunktet og D et andet Punkt af Linien AB, er

$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2.$$

Denne Sætning kunde være bevist ved Omlægninger af Rektangler og Kvadrater, men er hos Euklid bevist ved Hjælp af den Pythagoræiske Sætning anvendt paa ligebenede retvinklede Trekanter. Dette turde staa i Forbindelse med, at $\sqrt{2}$ netop fremstilles som Hypotenuse AB i en saadan Trekant AEB. Er nu

Z det Punkt, hvor den vinkelrette paa $A\,B$ i D skjærer Katheten $E\,B$, bliver $D\,B = D\,Z$ og



$$A\,D^2 + D\,Z^2 = A\,E^2 + E\,Z^2 = 2\,A\,C^2 + 2\,C\,D^2$$

For tydeligere at vise Anvendelsen af den fundne Ligning ville vi sætte

$$C\,D = x,\ D\,B = y,$$

hvorved

$$A\,D = 2\,x + y,\ A\,C = x + y.$$

Kaldes disse sidste Størrelser henholdsvis y_1 og x_1, have

$$2\,x_1^2 - y_1^2 = -(2\,x^2 - y^2).$$

Den fundne Ligning tjener til af en Løsning i hele Tal af en af de ubestemte Ligninger

$$2\,x^2 - y^2 = \pm 1$$

at udlede en Løsning af den anden i de større Tal $x_1 = x + y,\ y_1 = 2\,x + y$. Fortsætter man paa denne Maade, ville Værdierne af $\frac{y}{x}, \frac{y_1}{x_1}$ o. s. v., der afvexlende ere for smaa og for store, nærme sig mere og mere til $\sqrt{2}$. Man kan gaa ud fra $x = y = 1$.

Paa lignende Maade kan man have foretaget andre specielle Kvadratrodsuddragninger. Disse have da i Forbindelse med de ubestemte Ligninger (som $x^2 + y^2 = z^2$), hvorved man dannede Talexempler, hvor Kvadratrodsuddragningen undgaas, bidraget til hos Grækerne at udvikle den Færdighed i Behandling af visse ubestemte Ligninger af anden Grad, hvorpaa i en langt senere Tid Diofants Skrifter vise Prøver. At man har tyet til saadanne specielle Methoder, vidner derimod ikke om nogen almindelig Færdighed i Kvadratrodsuddragning. Af almindelige Hjælpemidler havde man dog til sin Raadighed for det første det samme, som vi bruge, nemlig Udtrykket for $(a + b)^2$, hvis geometriske Form næppe laa Anvendelserne fjernere end vor algebraiske. Dernæst gav selve den Fremgangsmaade, hvorved vi have set, at man prøvede, om en Størrelse er irrational, ligefrem Anvisning paa en Beregningsmaade, der omtrent falder sammen med en Udvikling i Kjædebrøk.

Hvorledes man nu bar sig ad, kan ikke umiddelbart ses hos de Forfattere, hos hvem der findes tilnærmede Udtryk for Kvadratrødder, da de kun anføre Resultaterne; men man faar dog en Forestilling om, hvor meget eller rettere hvor lidt udviklede Methoderne vare. Ret betegnende er det, at det først er Archimedes, der gjennemfører en Bestemmelse af π som beliggende mellem $3\frac{1}{7}$ og $3\frac{10}{71}$. De geometriske Vanskeligheder vil det nemlig af det følgende skjønnes, at man nogenlunde let maatte have været istand til at overvinde før ham. Det er altsaa den nummeriske Beregning og vel særlig de i denne forekommende Kvadratrodsuddragninger, for hvilke man før ham er vegen tilbage.

Uundgaaelige vare de tilsvarende Kvadratrodsberegninger, naar man vilde gjøre praktisk Anvendelse af Kvadratrødderne. Det er derfor naturligt, at man finder

flest saadanne hos Heron, der netop skrev med praktiske Anvendelser for Øje. Man finder saa mange, at det bliver tydeligt, at han var i Besiddelse af en virkelig Methode. Det vides endog, at han har fremsat de dertil tjenende Regler. I hans Bestemmelser er Nøjagtighedsgraden dog ikke ret stor i Forhold til den almindelige theoretiske Indsigt, hvoraf man da var i Besiddelse. I Forbindelse med, at han virkelig uddrager Kvadratrødder, staar, at det først er hos ham, at vi finde Exempler paa en gjennemført Behandling af nummeriske Ligninger af anden Grad. Vi se saaledes, at han naar Leddet x^2 havde en Talkoefficient a, omdannede det til $a^2 x^2$ ved Multiplikation af Ligningen med a og dernæst betragtede ax som den ubekjendte. Euklid havde vel, som vi skulle se, i 6te Bog behandlet ogsaa saadanne Ligninger tilmed paa en almengyldig Maade, som ogsaa er anvendelig, naar Koefficienten a er irrational; men netop denne almengyldige Behandlingsform viser ikke tydelig, hvorledes man bar sig ad med den praktiske Udregning.

Vi fejle næppe ved i Opdagelsen og den senere Behandling af irrationale Størrelser at se Udgangspunktet baade for det, som udgjorde den græske Mathematiks Hovedstyrke, og for dens allersvageste Side. Under bestandig fortsatte Bestræbelser for at gjøre ethvert Bevis anvendeligt ogsaa paa de Størrelser, som kun med Tilnærmelse kunne udtrykkes ved Tal, og hvor Talbeviser derfor vilde være utilstrækkelige, udviklede sig de strenge Fordringer til Ufejlbarhed i Slutningerne og Nøjagtighed i Udtrykket, ved hvis Opfyldelse Mathematiken er bleven den exakte Videnskab, og Ordene mathematisk Vished og absolut Vished ere blevne identiske. Grækerne have derved lagt den Grund, som behøvedes til at bære Archimedes' og Apollonios' højtrækkende Tankebyg-

ninger. Til den samme Grundvold har den moderne Mathematik maattet vende tilbage, da den efter langt Mellemrum atter skulde hævde sin videnskabelige Betydning; ja til de af Grækerne udviklede og hævdede logiske Grundprinciper tyer den endog i vore Dage paa ny for at give den, nu ad arithmetisk Vej opførte, Mathematik samme Sikkerhed som den, Grækerne opnaaede under geometrisk Form, eller for at gjøre Infinitesimalregningen uangribelig.

Dette Storværk behøvede imidlertid ikke at have været forbundet med Ligegyldighed for tilnærmelsesvis at udregne, hvad der ikke kan gives med fuld Nøjagtighed. Archimedes viste, at man ogsaa paa en uangribelig Maade kunde opstille og bevise Resultaterne af en saadan Udregning, nemlig ved at give Grænser, hvorimellem den søgte Størrelse maa ligge; men hans Exempel fulgtes ikke i de andre strengt mathematiske Værker. Den praktiske Udregning blev derved betragtet som noget underordnet og fandt ikke den Opmærksomhed, som den fortjente, hos de egentlige Mathematikere, der dog bedst havde været i Stand til at forbedre de dertil tjenende Methoder. Til hvor stor Skade det skulde blive for selve Mathematiken, at den saaledes fjernede sig fra Anvendelserne, skulle vi senere omtale.

6. Uendelighedsspørgsmaalet.

Det er bekjendt, at Pythagoros gjorde Tallet til alle Tings Princip, idet han sagde «Tingene ere Tal». Idet Tal for Grækerne betyde hele Tal, Tallene i den naturlige Talrække, stemmer denne Udtalelse vel i al Almindelighed med Pythagoræernes foran omtalte Studier af Læren om hele Tal og med den mystiske Betydning,

de have tillagt visse Talsammensætninger. Vanskeligt bliver det dog at lægge en med Pythagoræernes Mathematik stemmende rent umiddelbar Betydning ind i selve Udtalelsens Ordlyd. En saadan Betydning turde nemlig være gaaet forud for de senere mere idealistiske Fortolkninger. Ligefrem talt kunne Ordene ikke godt betyde andet, end at alle Ting kunne bestemmes ved Tal. Da der herved ikke godt kan være Tale om andet end Tingenes Størrelser, siges disse at kunne udtrykkes ved Tal. Dette er ogsaa virkelig Tilfældet med kommensurable Størrelser, naar man vælger en tilstrækkelig lille Enhed. Der vilde derfor ikke være noget forbavsende i at møde denne Udtalelse — hvis Pythagoræerne ikke netop havde opdaget, at Størrelser af samme Art ikke altid ere kommensurable, altsaa netop, at den anførte Udtalelse efter sin Ordlyd er urigtig.

Derfor behøver den her opstillede Forklaring, som vistnok er den eneste, der stemmer med den græske Brug af Ordet Tal, dog ikke at være urigtig. Udtalelsen kan være ældre end Opdagelsen af de inkommensurable Størrelser, ja det kan netop være under Bestræbelsen for at paavise dens Anvendelighed, at man har opdaget de inkommensurable Størrelser. En filosofisk Formel, hvortil man allerede har knyttet mange Betragtninger, opgiver man imidlertid ikke saa let, selv om den viser sig at være urigtig i sin oprindelige Betydning. Man modificerer denne Betydning saaledes, at den vedbliver at være anvendelig. En saadan Modifikation kunde ikke ligge fjernt i nærværende Tilfælde. Naar man fandt, at Størrelser vare inkommensurable, derved, at de Regninger som tjene til Bestemmelse af største fælles Maal, fortsættes i det uendelige, kunde det ligge nær at paastaa, at det største fælles Maal da var uendelig lille og indeholdtes uendelig mange Gange i Størrelserne. Tingene

bestemmes da i sidste Tilfælde ved uendelige Tal eller ved uendelige Tilnærmelser gjennem Forhold mellem større og større Tal.

Det gik dog næppe an at fremsætte denne Forklaring, hvis det ikke kunde paavises, at pythagoræiske Mathematikere eller andre Mathematikere paa deres Tid virkelig paa lignende Maade have bestemt Størrelser ved uendelig Tilnærmelse. Vi have vel ikke direkte Meddelelser om saadanne Bestemmelser, men deres Existens fremgaar af den Kamp, der er ført imod deres Berettigelse, navnlig fra en anden filosofisk Skoles Side, nemlig den eleatiske. Jeg sigter herved til de berømte Sofismer, som ere opstillede af dennes Stifter Zenon fra Elea omtrent midt i Aarhundredet. Disse gaa overhovedet ud paa at vise de Urimeligheder, som man kommer til ved at bygge paa de kontinuerte Størrelsers Sammensætning af uendelig mange uendelig smaa Dele.

I to af Sofismerne bevises, at Bevægelse er umulig. Det første Bevis lyder saaledes. For at komme fra et Sted til et andet maa man først tilbagelægge Halvvejen, før det naas, Halvvejen af Halvvejen o. s. v. i det uendelige. Bevægelsen kræver altsaa uendelig mange Vejstykker gjennemløbne og er følgelig — siger Zenon — umulig.

Heller ikke — siger Zenon i det andet Sofisme — kan den rapfodede Achilles naa den langsomme Skildpadde; thi han maa først naa Skildpaddens nuværende Plads, dernæst gjennemløbe den Vej, som Skildpadden imidlertid er krøben o. s. v. i det uendelige; men ogsaa denne Uendelighed er umulig at naa.

Da nu Zenon sikkert ikke betvivlede Bevægelsens Realitet, har hans Hensigt været en anden, nemlig at bekæmpe Muligheden af at beskrive den kontinuerte Bevægelse gjennem en saadan Opløsning i enkelte

diskrete Momenter. Det, han vil bekæmpe, maa imidlertid være gjort gjældende af hans Modstandere. Hvad er nu dette? I det første Sofisme er det Rigtigheden af den Paastand, at

$$1 = \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \text{o. s. v. i det uendelige.}$$

I det andet er det, hvis vi antage, at Achilles bevæger sig n Gange saa hurtig som Skildpadden, den Paastand, at $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} +$ o. s. v. i det uendelige har en endelig Værdi. Da man sikkert paa den Tid forstod at regne ud, hvor lang Tid Achilles virkelig behøvede for at naa Skildpadden, have hans Modstandere ogsaa vidst, at den endelige Værdi af den foreliggende Sum af uendelig mange Led var $\frac{n}{n-1}$. Disse positive Resultater ligge saa umiddelbart i de Betragtninger, som Zenon vil have anset for absurde, at man, hvis Modstanderne ikke, som jeg antager, forud have opstillet dem eller lignende, næsten maatte betragte ham selv som deres Opdager. Uden mathematisk Sands og Indsigt falder man nemlig overhovedet ikke paa netop disse i mathematisk Henseende frugtbare Udstykninger. Vi se altsaa, at man midt i det femte Aarhundrede ikke var fremmed for Spørgsmaalet om Summation af uendelige Kvotientrækker, en Summation, hvoraf vi senere skulle se Archimedes gjøre en vigtig Anvendelse under mere betryggende Former.

Fra et strengt logisk Synspunkt havde Zenon dog Ret. Det kan nemlig ikke være tilladt at gjøre Brug af uendelige Størrelser til at bevise positive Resultater, saalænge Uendeligheden kun er forklaret ved sit Navn; thi i dette ligger kun det rent negative, at det er uopnaaeligt. Zenon fik ogsaa Ret indenfor den græske

Mathematik i den Grad, at Uendelighedsbegrebet som positivt Bevismiddel i det næste Aarhundrede helt blev fortrængt eller omgaaet paa en Maade, som kunde sikre mod deslige Angreb.

Strax skete dette dog ikke. Den atomistiske Skole, der betragtede de fysiske Legemer som sammensatte af udelelige Partikler, har sikkert ogsaa indladt sig paa, ja rimeligvis begyndt med en infinitesimal Undersøgelse af deres geometriske Sammensætning. Dette har navnlig været Tilfældet med Skolens betydeligste Mand Demokritos. Det berettes, at han drøftede det Spørgsmaal, om to uendelig nærliggende parallele plane Snit i en Kegle maa betragtes som lige eller ulige store. I sidste Tilfælde vilde Keglen dannes trinvis, i det første vilde den være en Cylinder. Dette Spørgsmaal kan ganske naturlig have frembudt sig, naar man — som i vore elementære Lærebøger for Pyramiders Vedkommende — ved en integrationslignende Fremgangsmaade søger at beregne Keglens Volumen eller maaske blot at bevise Sætninger om Ligestorhed af Kegler. Paa Beskjæftigelse med infinitesimale Spørgsmaal kunne ogsaa Titlerne paa flere af hans Skrifter, der alle ere tabte, tyde, nemlig «Om inkommensurable Linier og Legemer», «Om Tallene», og maaske ogsaa Titlen «Om Berøring mellem Cirklen og Kuglen». Iøvrigt vides intet om hans mathematiske Virksomhed, maaske fordi i den følgende Tid Mathematiken navnlig dyrkedes af eller i Forbindelse med Platons Skole, der aldeles forkastede Demokrits Filosofi.

Har nu end Demokrits Arbejde uddybet Uendelighedsbegrebet saaledes, at de derpaa byggede Begrundelser vandt i Paalidelighed, og maaske yderligere vist dets Anvendelighed til virkelige mathematiske Undersøgelser f. Ex. angaaende Keglens Rumfang (?), saa stod det dog ikke til at redde som anerkjendt mathematisk

Bevismiddel. Mere end Zenons Dialektik, som fra et overlegent Synspunkt gik løs paa at vise dets Utilstrækkelighed til at begrunde Resultater, som i og for sig ikke kunde være tvivlsomme, har dertil virket de mindre frivillige urigtige Slutninger, hvortil det viste sig at kunne bruges. Som Exempel herpaa kan nævnes Sofisten Antifons Bevis for, at Cirklen kan kvadreres, det vil sige, at man kan konstruere et Kvadrat lige stort med en given Cirkel. Det kan — hvis vi ellers kunne stole paa hans Modstanderes Beretninger — kortelig gjengives saaledes: I Cirklen kan indskrives et Kvadrat, dernæst ved Halvering af Buerne regulære Polygoner med flere og flere Sider. Ved Fortsættelse i det uendelige falder Polygonen sammen med Cirklen. Nu kunne alle disse Polygoner kvadreres, altsaa ogsaa Cirklen.

Ved saadanne Misbrug tabtes al Tillid til infinitesimale Betragtninger i den Grad, at da endelig Eudoxos fandt den Vej, ad hvilken Rigtigheden af herhen hørende Slutninger fuldstændig kan sikres, blev den ikke mere knyttet til Opstilling af et Uendelighedsbegreb; men dette blev omgaaet i det saakaldte Exhaustionsbevis. For dette — der ikke stod til Raadighed i den Tid, som foreløbig beskjæftiger os — skal jeg dog først gjøre Rede, naar vi hos Euklid lære dets Anvendelser at kjende. Ligeledes skal jeg vente med at forklare Eudoxos', med Exhaustionsbeviset nær beslægtede Proportionslære, til vi træffe den i Euklids femte Bog. Her skal kun bemærkes, at den umiddelbart er ligesaa anvendelig paa inkommensurable som paa kommensurable Størrelser, saa Proportioner mellem inkommensurable Størrelser efter Eudoxos' Tid ikke mere blot vare Grænseformer for Proportioner mellem kommensurable Størrelser.

7. Cirklens Kvadratur.

Fra disse mathematiske Principspørgsmaal vende vi os til Prøver paa bestemte Undersøgelser, som ligeledes ere paabegyndte i det 5te Aarhundrede og have beskjæftiget Mathematikerne i hele den foreuklidiske Tid, ja udover denne. Vi have nys berørt Cirklens Kvadratur. Herved kan tænkes dels paa den Opgave med passende Tilnærmelse at beregne Cirklens Areal og Periferi, dels paa den at konstruere et Kvadrat lig Cirklens Areal og dermed en begrænset ret Linie lig dens Periferi. Det vil af det foregaaende forstaas, at den sidste Opgaves Løsning ved sin exakte Karakter og som den, der altid bagefter kunde bruges til Beregning, maatte staa som det ønskede Maal, overfor hvilket man indtil Archimedes forsømte de besværlige Regninger, der dog kun gave et unøjagtigt Resultat. Det er denne Fristelse, som vi have set bringe Antiphon til at misbruge de indskrevne Polygoner, som vilde være et fortræffeligt Middel til Beregning, til en uholdbar Paastand om Opgavens Løsning ved Konstruktion. Midlet til at beregne en højere Grænse for Arealet kjendte man ogsaa, nemlig omskrevne Polygoner; men det misbrugtes ogsaa af en vis Bryson, der mente at faa den exakte Løsning ved at tage Middelstørrelsen mellem en ind- og omskreven Polygon.

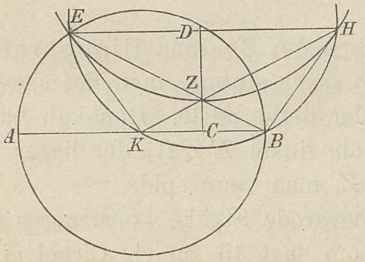
Værre end disse Løsninger, der dog pegede paa Midler til gode Tilnærmelser, vare rent sofistiske Løsninger som den, der bestod i at finde et Tal, som paa en Gang er et Kvadrattal og et saakaldt cyklisk Tal ɔ: et saadant, hvis Kvadrat ender paa samme Ciffer som Tallet selv. Man ser af dette grove Sofisme, at den af Zenon aabnede Kamp mod Mathematikeres urigtige eller ufuldstændige Udtryk for rigtige Tanker,

foruden at tvinge Mathematikerne til større Omhu for den exakte Form, havde lært Sofister, som ikke vare Mathematikere, omvendt at misbruge de mathematiske Former til at fremsætte Meningsløsheder. Naar derimod Aristoteles og hans Kommentatorer, gjennem hvem vi kjende disse Exempler, beskylde en Mathematiker som Hippokrates fra Chios for paa Grundlag af en lignende Fejlslutning at have paastaaet at have kvadreret Cirklen, maa der vistnok være en Forvexling tilstede af det, som Hippokrates har tilstræbt, og det, han virkelig har paastaaet at have naaet. Beskyldningen er imidlertid bleven Anledning til, at vi endnu kjende hans Undersøgelse, der ikke blot har ført til et smukt Resultat, nemlig de første Kvadraturer af Arealer, begrænsede af krumme Linier, men tillige er en god Prøve paa, hvad en dygtig Geometrer i det 5te Aarhundrede havde til sin Raadighed, og hvorledes han forstod at bruge det. Navnlig af denne Grund skulle vi her give et Uddrag af Eudemos' Beretning om hans Arbejde.

Det siges, at Hippokrates begynder med at bevise, at ligedannede Cirkelafsnit forholde sig som Kvadraterne paa Diametrene, og at han har bevist det ved Hjælp af den tilsvarende Sætning om to Cirkler. Den beviste Sætning bliver først anvendt til at kvadrere den «Halvmaane», som begrænses af en Halvcirkel og en Cirkelbue paa 90^0 over den førstes Diameter. Det bevises, at den er lige stor med den ligebenede retvinklede Trekant, som kan indskrives i Halvcirklen. Dernæst konstrueres paa følgende Maade en Halvmaane, hvis større Bue er større end en Halvcirkelbue. Der konstrueres først et Trapez med de 3 Sider $= a$, den fjerde $= a\sqrt{3}$ («i Potensen 3 Gange saa stor som de andre» ɔ: dens Kvadrat er 3 Gange saa stort som hvert af de andres). Om dette omskrives en Cirkel, og Halv-

maanen afskjæres mellem den større Bue til Korden $a\sqrt{3}$ og en Bue paa samme Korde, ligedannet med den paa Siden a. Det vises, at Halvmaanen bliver ligestor med Trapezet.

Hippokrates har endnu konstrueret en tredie Halvmaane, som kan kvadreres. I Beretningen om denne skal jeg begynde med en paa enkelte moderne Omskrivninger (saasom $r\sqrt{\frac{3}{2}}$) nær, ligefrem Gjengivelse af Eudemos' Referat.[1] «Der er givet en Cirkel med Diameteren AB ($= 2$ r) og Centrum K. Linien CD staar vinkelret paa Midten af KB. Mellem denne Perpendikulær og Cirkelperiferien indskydes en Linie EZ af Længde $r\sqrt{\frac{3}{2}}$, som forlænget gaar gjennem B.



EH trækkes parallelt med AB. Linierne KE og KZ drages, af hvilke den sidste forlænget skjærer ED i H. Træk endelig BH og Forlængelsen BZ af EZ. BH vil være lig EK, og en Cirkel kan omskrives om Trapezet $EKBH$. Ligeledes lægges en Cirkelbue gjennem E, Z og H. [Ethvert af de 2 Afsnit over Linierne EZ og ZH vil være ligedannet med Afsnittene over Linierne EK, KB og BH].

[1] Saaledes som P. Tannery i *Mémoires de la Société de Bordeaux* t. V (2. Række, 2. Hefte) har forsøgt at gjengive det i en for Simplicius' Tilsætninger renset Skikkelse. Klammerne betegne en Lakune udfyldt af Tannery.

Den her dannede Halvmaane *(E K B H Z)* vil være lige stor med den Figur, man danner af de 3 Trekanter (ɔ: Firkanten *E K B H Z*). . . .» Dette vises derved, at hvert af de 2 Afsnit paa *E Z* og *Z H* ifølge Konstruktionen er $\frac{3}{2}$ af hvert af de 3 Afsnit paa *E K*, *K B* og *B H*.

Hippokrates viser endnu, at den ydre Bue i denne Halvmaane *E K B H* er mindre end en Halvcirkel, idet den i Segmentet *E K H* indskrevne Vinkel er stump. Hans Bevis herfor kan med vore Tegn skrives saaledes:

$$EZ^2 = \frac{3}{2} r^2 = EK^2 + \frac{1}{2} KB^2$$
$$> EK^2 + KZ^2.$$

At $KB^2 > 2\,KZ^2$ maa Hippokrates slutte af, at Vinkel *K Z B* er stump; men det siges ikke, hvorledes han finder dette sidste. Han kan have sluttet det af, at dens Nabovinkel *E Z K*, der ligger over for *E K* som er $< EZ$, maa være spids.

I det opbevarede Stykke konstrueres endnu en vis Halvmaane, som lagt til en vis Cirkel giver et Areal, der kan kvadreres. Det er denne Halvmaane, hvis Kvadratur vilde have ført til Cirklens Kvadratur. At den ikke er identisk med nogen af dem, som ere kvadrerede forud, maa Hippokrates, der selv har formaaet at konstruere disse Halvmaaner netop saaledes, at de kunne konstrueres, have kunnet se lige saa godt som vi.

For nu ved den citerede Undersøgelse virkelig at give et Indblik i Mathematikens daværende Standpunkt, skal jeg først pege paa, at der ingen Ophævelser gjøres over en Konstruktion som den af et Paralleltrapez med givne Sider; at Anvendelsen af Størrelserne af Siderne i en Trekant

til at undersøge, om en Vinkel i Trekanten er spids, ret eller stump, betragtes som vel bekjendt, ligeledes den Sætning, at Cirkelarealer forholde sig som Kvadraterne paa Diametrene. For denne Sætning kan man dog ikke endnu have kjendt det Euklidiske Bevis eller overhovedet noget, hvis Form vilde tilfredsstille de senere græske Mathematikere. Udgangspunkter for et i Realiteten rigtigt Bevis kan man dog have haft i saadanne Betragtninger som dem, Antifon misbrugte. En Længde som $r\sqrt{\frac{3}{2}}$ har let kunnet konstrueres, hvad enten det nu er sket ved, paa den i Afsnittet om geometrisk Algebra omtalte Maade, at omdanne et Rektangel med Siderne r og $\frac{3}{2}r$ til et Kvadrat eller ved Anvendelser af den Pythagoræiske Sætning. «Indskydningen» mellem CD og Cirklen af Linien $EZ = r\sqrt{\frac{3}{2}}$, der forlænget gaar gjennem B, afhænger af en Ligning af 2. Grad, som vi ganske vist antage, at man den Gang kunde løse ved geometrisk Konstruktion. Det er dog, som vi snart skulle omtale, muligt, at den er udført anderledes.

De forskjellige Forsøg paa at kvadrere Cirklen ved Lineal og Passer mislykkedes, og det er i den nyeste Tid bevist, at de maatte mislykkes. Kravet paa en exakt Løsning, der efter den Tids Fordring gjennem Konstruktion skulde føre til en geometrisk Fremstilling, kunde derfor kun tilfredsstilles ved Indførelse af andre Kurver end ret Linie og Cirkel. Det kom ikke herved særlig an paa, om saadanne Kurver let lode sig fremstille mekanisk, endnu mindre paa at bestemme dem ved en diskret Række Punkter, der jo netop kun vilde give en Tilnærmelse. Hovedsagen var derimod, her som i andre lignende Tilfælde, i en exakt Definition at have et mathematisk sikkert, theoretisk Grundlag for Bestemmelsen,

et Grundlag, hvorpaa eventuelt kunde bygges videregaaende Undersøgelser, hvori den konstruerede Størrelse anvendtes. Man bar sig i den Henseende ad, som naar man i Nutiden indfører nye Funktioner til exakt Fremstilling af Størrelser, der kun med Tilnærmelse kunne fremstilles ved de hidtil bekjendte. Bedst var det naturligvis, om en og samme Kurve kunde anvendes til forskjellige Konstruktioner, saa den fælles Theori for Kurverne kunde komme alle Konstruktionerne til Gode.

Dette var netop Tilfældet med en Kurve, som blev benyttet til Cirklens Kvadratur, og som derfor fik Navnet Kvadratrix. Den menes oprindelig at være udtænkt af Hippias fra Elis til Brug ved Vinklens Tredeling. Den Egenskab, hvorved de gamle i Ord definerede den, kunne vi, naar vi ved y betegne Ordinaten i et retvinklet Koordinatsystem til et af dens Punkter, ved ϑ den Vinkel, som Radius vector til samme Punkt danner med Abscisseaxen, fremstille ved Ligningen

$$\frac{y}{b} = \frac{\vartheta}{\varrho},$$

hvor vi ved ϱ betegne en ret Vinkel og ved b den til $\vartheta = \varrho$ svarende Værdi af y. Vinklerne maales ved de Buer, de som Centervinkler afskjære paa en Cirkel med Radius b. Med den nuværende Betegnelse π er altsaa $\varrho = b\,\frac{\pi}{2}$.

Da y og ϑ ere proportionale, er denne Kurves Anvendelighed til Deling af en Vinkel i lige Dele eller Dele, som staa i et givet Forhold, iøjnefaldende. Dens Anvendelighed til Cirklens Kvadratur blev derimod først opdaget eller dog først strengt bevist af Deinostratos, som beviste, at Abscissen til dens Skjæringspunkt med Abscisseaxen er $\frac{b^2}{\varrho}$ eller $\frac{2b}{\pi}$. $\frac{b^2}{\varrho}$ kan nemlig hverken

være større eller mindre end den nævnte Abscisse. Var den større, vilde der, idet Radii vectores til Kurven voxe med ϑ, være et Punkt af Kurven, hvis Radius vector $= \frac{b^2}{\varrho}$. Man maatte altsaa (idet vi for Overskuelighedens Skyld bruge vore trigonometriske Tegn og Ligninger, hvor Deinostratos brugte Proportioner) kunne have

$$\frac{b^2}{\varrho} \cdot \sin \vartheta = y = b \frac{\vartheta}{\varrho} = \frac{b^2}{\varrho} \cdot \frac{\vartheta}{b},$$

eller at den til Radius $\frac{b^2}{\varrho}$ svarende Sinus var lig den til samme Radius svarende Bue. Var den mindre, maatte der være et Punkt, hvis Abscisse var $\frac{b^2}{\varrho}$, og for hvilket altsaa

$$\frac{b^2}{\varrho} \, tg \, \vartheta = y = \frac{b^2}{\varrho} \frac{\vartheta}{b},$$

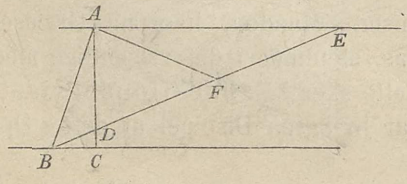
eller den til Radius $\frac{b^2}{\varrho}$ svarende Tangens lig den til samme Radius svarende Bue. Begge Dele er umuligt.

Hvad Indholdet af dette Bevis angaar, ses det, at Deinostratos ikke lader sig nøje med en saadan Bemærkning som den, vi vilde udtrykke ved $lim. \frac{sin z}{z} = 1$ eller ved $lim. \frac{tg \, z}{z} = 1$; men han undgaar helt Spørgsmaalet om uendelige Tilnærmelser ved blot at benytte Ulighederne $\sin z < z < tg \, z$, som jo iøvrigt ogsaa begge ere nødvendige til en exakt Bestemmelse af hver enkelt af de to Grænser. Maaden, hvorpaa Grænsebestemmelserne undgaas, stemmer i det væsentlige med den Maade, hvorpaa dette sker i Exhaustionsbeviset; men Deinostratos var jo ogsaa Discipel af dettes Opfinder Eudoxos.

Vi ville endnu komme til at se Archimedes undersøge Kurver, der kunne anvendes omtrent som Kvadratrix, nemlig de nu saakaldte Archimediske Spiraler ($r = a\,\vartheta$). Deres Anvendelighed til Vinkeldeling er iøjnefaldende, og Archimedes knytter saavel Tangentbestemmelsen som Arealbestemmelsen til Cirklens Kvadratur. Efter moderne Opfattelse anvender han vel nærmest Cirklens Kvadratur eller Tallet π til disse Bestemmelser; men Sammenligning med Brugen af Kvadratrix tyder paa, at man kan have sat lige saa megen Pris paa ad denne Vej navnlig ved Tangentbestemmelsen at faa vel ikke en Konstruktion men dog i Ord en god geometrisk Bestemmelse af en ret Linie lig Cirklens Periferi.

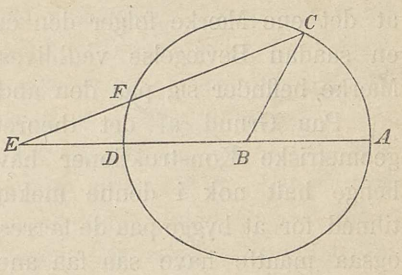
8. Vinklens Tredeling, Indskydninger.

Vi have nys berørt Kvadratricens og den Archimediske Spirals Anvendelse til Vinklens Tredeling. Foruden disse skal jeg nævne to andre Løsninger af denne Opgave, som tidlig har beskjæftiget Mathematikerne. Den ene, hvis Alder ikke lader sig bestemme, kan godt skrive sig fra det femte Aarhundrede, medens den anden indeholdes i de ved Araberne opbevarede saakaldte Archimediske Hjælpesætninger og altsaa maaske skyldes Archimedes. I dem begge føres Løsningen tilbage til en saakaldet Indskydning.



1) Er ABC den Vinkel, som skal tredeles, trækkes først $AC \perp BC$ og $AE = BC$, og dernæst

indskydes mellem AC og AE Linien $DE = 2AB$, saaledes at Forlængelsen gaar gjennem B. Er nemlig da F Midtpunktet af DE, haves $\angle ABF = \angle AFB = 2\angle AEF = 2\angle CBD$, altsaa $\angle CBD = \frac{1}{3}\angle CBA$.



2) Er $\angle ABC$ den Vinkel, som skal tredeles, og skjærer en Cirkel om B de to Ben og det ene AB's Forlængelse ud over B i A, C og D, indskydes mellem BD's Forlængelse ud over D og Cirklen et Stykke $EF = BC$, som forlænget gaar gjennem C. Da er $\angle DEF = \frac{1}{2}\angle BFC = \frac{1}{2}\angle FCB = \frac{1}{3}\angle ABC$.

Hvad angaar de to her forlangte Indskydninger, vilde de som selve den stillede Opgave afhænge af Ligninger af tredie Grad og altsaa ikke kunne løses ved ret Linie og Cirkel. Det maa imidlertid bemærkes, at Tilbageføring af en Konstruktion til en Indskydning uden nærmere Angivelse af, hvorledes denne skal udføres, forekommer meget ofte i den græske Geometri. Vi have saaledes truffet en saadan i det anførte Stykke af Hippokrates, og Archimedes fører i sit Skrift om Spiraler andre Opgaver tilbage til den samme Indskydning som den, hvorved den ham her tillagte Tredeling af Vinklen udførtes. Dette kan tyde paa, at der har været en Tid, hvor man godkjendte «Indskydningen» som et Konstruktionsmiddel, der turde anvendes umiddelbart i geometriske Konstruktioner ved Siden af Passer og Lineal. Ved en Indskydning forstaas da i Almindelighed Konstruktionen af en ret Linie af given Længde, hvis Endepunkter ligge paa givne Linier, og som selv eller

forlænget gaar gjennem et givet Punkt. Den udføres nogenlunde let mekanisk ved en Lineal (et bøjet Stykke Papir kunne vi bruge), hvorpaa afsættes to Mærker med den givne Længde til Afstand. Denne Lineal drejes om det faste Punkt, idet den samtidig forskydes saaledes, at det ene Mærke følger den ene givne Linie, og med en saadan Bevægelse vedblives der, indtil det andet Mærke befinder sig paa den anden givne Linie.

Paa Grund af det theoretiske Formaal med de geometriske Konstruktioner have Grækerne dog ikke længe haft nok i denne mekaniske Lethed. Da man tilmed for at bygge paa de færrest mulige Forudsætninger ogsaa maatte have saa faa anerkjendte Konstruktionsmidler som muligt, fortrængtes den umiddelbare Udførelse af Indskydningerne snart overalt, hvor de kunne udføres ved Lineal og Passer, som ere de eneste Konstruktionsmidler, der faa Borgerret ved Euklids Elementer. Det kan imidlertid staa i Forbindelse med ældre Anvendelser, at Apollonios har skreven to Bøger om Indskydninger som vides at have handlet om disses Udførelse ved ret Linie og Cirkel. Han kan derved have villet udfylde den Mangel i ældre Værker, at Opgaver ere førte tilbage til Indskydninger, uden at en saadan Udførelse paavises.

Til Indskydninger, som ikke kunne udføres ved Lineal og Passer, men ved Brug af Keglesnit, er det ogsaa fra et vist Tidspunkt bleven obligatorisk at anvende disse sidste Kurver og altsaa ikke nøjes med den mekaniske Udførelse. At dette først skulde være sket efter Archimedes, kan man ikke med fuld Sikkerhed slutte af, at han nøjes med at føre Opgaver tilbage til Indskydninger; thi den Omstændighed, at man tidligere nøjedes med en mekanisk Udførelse, vil have fremkaldt saadanne faste Regler for deres Udførelse ved Keglesnit, som Archimedes kunde betragte som bekjendte. Hvor-

ledes Archimedes' Indskydninger kunne udføres ved Keglesnit, er senere angivet af Pappos.

Hvor man ikke har ført Indskydningerne tilbage til Brug af disse andre Konstruktionsmidler, ja ikke har kunnet gjøre dette, har en theoretisk Undersøgelse af selve Indskydningen været nødvendig. Bedst har dette kunnet ske ved Opstilling af en Definition og en derpaa grundet Undersøgelse af den Kurve, som ved den nys beskrevne mekaniske Konstruktion gjennemløbes af det opgivne Liniestykkes ene Endepunkt, nemlig af det, som ikke er bundet til den ene givne Linie. Det er ved denne Kurves Skjæring med den anden givne Kurve, at Indskydningsopgaven løses. En saadan Undersøgelse er ogsaa, endog efter Archimedes' Tid, foretagen af Nikomedes i det Tilfælde, hvor den første af de givne Linier er ret. Den frembragte Kurve kaldes da en Konkoide. Nikomedes har tillige udtænkt et Apparat til mekanisk at frembringe denne Kurve. Dettes Brug falder dog omtrent sammen med den alt beskrevne mekaniske Udførelse af en Indskydning.

Hvorledes Indskydningen nu end er bleven udført, har den Tilbageførelse af Vinklens Tredeling, som vi — med alt muligt Forbehold — have tillagt Archimedes, faaet en stor Betydning i Mathematikens senere Historie. Den ligger navnlig til Grund for Vietas Løsning af Ligninger af 3die Grad i det saakaldte irreduktible Tilfælde.

9. Terningens Fordobling.

Vinklens Tredeling var ikke den eneste af de Opgaver, der i deres algebraiske Skikkelse afhænge af Ligninger af 3die Grad og senere i selve Oldtiden løstes

ved Keglesnit, som man allerede i det femte Aarhundrede havde taget fat paa. En endnu større Rolle spillede den Opgave, som er den geometriske Form for den rent kubiske Ligning, nemlig Terningens Fordobling eller Multiplikation.

Opgaven kaldes det deliske Problem i Anledning af et Orakelsvar, hvorefter et terningeformet Alter paa Øen Delos skulde gjøres dobbelt saa stort uden nogen Forandring af Formen; men det tør vist nok antages, at Pythia ved den Lejlighed har været inspireret af Mathematikerne. Som omtalt havde man i den geometriske Algebra omformet Produkter af to almindelige Faktorer og Operationer med de deraf sammensatte Udtryk af anden Grad til Rektangler og til Operationer med Arealer, og i Forbindelse dermed ombyttet Kvadratrodsuddragning med Omdannelse af et Rektangel til et Kvadrat, en Opgave, som sagdes at være løst af Pythagoræerne. Det Skridt laa da nær fra disse «plane» Opgaver at gaa over til de tilsvarende «rumlige». Man skulde da fremstille et Produkt af 3 Størrelser ved et Parallelepipedum og Operationer med Udtryk af 3die Grad som Operationer med Rumstørrelser. Næst saadanne simple Ting som Indførelse af en ny Kant eller Grundflade i et Parallelepipedum og Anvendelse heraf til Addition og Subtraktion eller Omdannelsen af et Parallelepipedum med rektangulær til et med kvadratisk Grundflade, maatte den Opgave at omdanne et Parallelepipedum til en Kubus paatrænge sig med samme Magt, som efter Kvadratrod Spørgsmaalet om Kubikrod paatrænger sig den, der ser Algebraen opbygges i sin nuværende Skikkelse. Som $\sqrt[3]{2}$ er den nærmest liggende irrationale Kubikrod, blev Terningens Fordobling det nærmest liggende Exempel paa Opgaver af den her

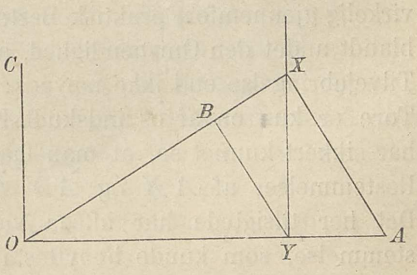
betegnede Art. Som saadant og ved de nye Vanskeligheder, som det frembød, vakte det stor Interesse hos Mathematikerne.

Det første Bidrag til denne Opgaves Løsning, som vi finde omtalt, skyldes Hippokrates. Ligesom et Rektangels Omdannelse til et Kvadrat beror paa Konstruktionen af en Mellemproportional, siges han at have ført Opgaven om Terningens Fordobling, altsaa formodentlig ogsaa den noget almindeligere Opgave om Omdannelsen af et Parallelepipedum til en Kubus, tilbage til den at bestemme to Mellemproportionaler. Er nemlig Parallelepipedet allerede omdannet til Parallelepipedet $a^2\ b$ med kvadratisk Grundflade med Siden a og med Højde b, og skal det omdannes til Terningen x^3, kan x bestemmes af Proportionerne

$$a : x = x : y = y : b.$$

Hvad enten Omdannelsen nu virkelig skyldes Hippokrates eller ej, fremkommer efter ham det Deliske Problem sædvanlig under Form af den Opgave at bestemme de 2 Mellemproportionaler x og y til to givne Linier, a og b.

Den første blandt de mange Løsninger, som denne Opgave har faaet i Oldtiden, skyldes Archytas. For ret at forstaa den, maa man fastholde, at han lægger an paa Konstruktion af en Figur bestaaende af to rette Linier OYA og OBX, hvorimellem den brækkede Linie $AXYB$ skal tegnes saaledes, at XY er vinkelret paa den første, AX og YB paa den sidste, medens OA og OB have givne



Størrelser. Da ere nemlig aabenbart $O X$ og $O Y$ de to Mellemproportionaler mellem $O A$ og $O B$. Man kjender altsaa Diameteren $O A$ i en Cirkel, der skal indeholde X, men ikke Diameteren $O Y$ i en Cirkel, der skal indeholde B. Archytas søger at faa denne sidste Cirkel indført som Lillecirkel i Kuglen over $O A$ som Diameter. Da $O B$ er given, vil Punktet B ligge paa en Lillecirkel i denne Kugleflade, Linien $O B$ og derved Punktet X paa den Omdrejningskegle, der har denne bekjendte Lillecirkel til Ledelinie. Hvis man nu forsøger at opnaa den forlangte Stilling ved en Drejning af Figuren om den Linie $O C$ i Figurens Plan, der i O staar vinkelret paa $O A$, vil Projektionen Y af Punktet X, ned paa den af $O A$ gjennemløbne Plan gjennemløbe en Storcirkel, Linien $X Y$ altsaa en Cylinderflade, hvorpaa Punktet X ogsaa maa ligge.

Da X nu endvidere under Omdrejningen vedblivende skal ligge paa Cirklen over $O A$ som Diameter, maa det ligge paa den Kurve, som denne Cirkel under sin Bevægelse aftegner paa Cylinderfladen, ɔ: i Virkeligheden paa Cylinderfladens Skjæringslinie med den ved Cirklens Omdrejning om sin Tangent i O frembragte Tore. Punktet X bestemmes da ved Skjæring mellem denne cylindriske Rumkurve og den førnævnte Kegleflade, og ved dets Bestemmelse vil Opgaven være løst.

Denne Løsning kan næppe være anvendt til en virkelig gjennemført praktisk Bestemmelse. Herpaa tyder blandt andet den Omstændighed, at Rumkurvens virkelige Tilvejebringelse end ikke nævnes; thi den dertil tjenende Tore er kun en af os indskudt Forklaring. Archytas har sikkert kunnet se, at man faar lettere og nøjagtigere Bestemmelser af $A X$ og $A Y$ ved at prøve sig frem. Det her tilsigtede har altsaa været en theoretisk Bestemmelse, som kunde benyttes i videregaaende Under-

søgelser, hvori der indgaar Kubikrødder. For at den i denne Henseende skulde være virkelig tilfredsstillende, maatte man dog tillægge Archytas et Kjendskab til den benyttede Rumkurve eller dog Hjælpemidler til at angive dens Egenskaber, som han næppe har besiddet.

Hans Løsning faar derimod stort Værd som et umiddelbart Vidnesbyrd om, hvad han formaaede. Han er gaaet løs paa sin Opgave med Tanken paa Cirklens Anvendelse til Løsning af den tilsvarende plane Opgave. Han forsøger, om Kuglen ikke skulde kunne anvendes paa tilsvarende Maade til Løsning af den foreliggende rumlige Opgave, og han gjennemfører dette Forsøg med en klar Opfattelse af de Rumforhold, som derved frembyde sig, ja gyser ikke tilbage for Indførelsen af den Kurve, som en vis Cirkel under sin Bevægelse aftegner paa en Cylinder. Foruden om en sikker Tankegang hos ham selv, vidner hans Konstruktion om en Fortrolighed med Anvendelsen af geometriske Steder til Bestemmelse af Punkter, der har været udviklet nok til, at han turde udvide den til Rummet. Vi tør deraf slutte, at Rumgeometrien og Anvendelse af geometriske Steder i det mindste i Planen paa hans Tid allerede havde naaet en ret betydelig Udvikling.

Det berettes, at Archytas' Discipel Eudoxos til Løsning af den samme Opgave har benyttet nogle andre Kurver. Man har gjættet paa Projektioner af Skjæringskurven mellem de 3 Flader, som i Virkeligheden benyttes i Archytas' Konstruktion. Eudoxos' Discipel Menaichmos fandt derimod paa at bruge det Hjælpemiddel, som senere i den græske Oldtid anvendtes paa denne og mange andre Opgaver, nemlig Keglesnitslinier. Han skal efter Beretninger hos senere Forfattere have bestemt de to Mellemproportionaler til

a og b som Koordinaterne x og y til Skjæringspunkterne mellem de ved to af Ligningerne

$$a\,y = x^2,\ b\,x = y^2,\ x\,y = a\,b$$

bestemte Kurver, samt vist, hvorledes disse Kurver, der jo blive Parabler og en Hyperbel, kunne fremstilles stereometrisk som Snit i Omdrejningskegler. Han skal ogsaa have bestemt Ellipser som Snit i Omdrejningskegler. Alle tre Kurver bestemmes dog kun som Snit vinkelrette paa en af Keglens Frembringere. Derved bliver Ellipse Parabel og Hyperbel henholdsvis Snit i den spidsvinklede, den retvinklede og den stumpvinklede Kegle. Til disse Bestemmelser skulle vi vende tilbage, naar vi, efter at være komne videre i vor almindelige Undersøgelse, i Sammenhæng behandle Keglesnitslærens Udvikling.

Her er derimod Stedet til endnu at nævne saadanne Anvendelser af andre Hjælpemidler, som man endnu langt hen i den følgende Tid vedblev at udfinde til Konstruktion af de 2 Mellemproportionaler. Man opfandt forskjellige mekaniske Redskaber til Konstruktion af en Figur, der som Figuren S. 73 indeholder ligedannede Trekanter, som umiddelbart give den forlangte Forbindelse. Et af disse tillægges Plato, et andet skyldes Eratosthenes. Da imidlertid intet af disse Apparater ses at have haft nogen virkelig Betydning for Mathematikens Udvikling, skulle vi spare os en Beskrivelse af dem og deres Brug og nøjes med at bemærke, at disse Apparater have lokket Descartes til ligeledes at udtænke et, som han beskriver i sin Geometri.

Konstruktionen af de to Mellemproportionaler er ogsaa af Nikomedes ført tilbage til en Indskydning. Den dertil tjenende Konstruktion er dog ikke saa simpel som dem, der bruges ved Vinklens Tredeling.

10. Theoremer og Problemer; den geometriske Konstruktions Betydning.

Vi have dels talt om de Hovedopfattelser og dertil knyttede Operationsmaader, som begyndte i det 5te Aarhundrede og udviklede sig videre i den følgende græske Mathematik, dels ved Omtalen af enkelte Undersøgelser givet Prøver paa dennes samtidige reale Indhold. Efterhaanden som man kom videre, behøvedes faste og betryggende Former, som stemmede med disse Opfattelser, hvilke derved yderligere befæstedes, og som kunde rumme det stedse voxende Indhold. Det hertil førende Arbejde udførtes i Platons filosofiske og Eudoxos' mathematiske Skole og gjennem Forhandlinger mellem begge.

Som Exempel paa en saadan Forhandling kunne vi nævne en Strid om, hvorvidt de mathematiske Sandheder bør fremtræde som Theoremer (Læresætninger) eller Problemer (Opgaver). Det første gjordes gjældende af Platonikerne, som støttede sig paa, at Løsningen af en Opgave kun tilvejebringer, hvad der er i Forvejen: ligesidede Trekanter ere til uafhængig af, om man konstruerer dem, og jeg kan kun konstruere en saadan, fordi Begrebet «ligesidet Trekant» har en Realitet, før jeg konstruerer den. For Eudoxos' Disciple, der ved denne Lejlighed navnlig repræsenteredes af Menaichmos, var den mathematiske Tilvejebringelse ved Konstruktion eller dog ved Undersøgelse af Figuren Hovedsagen.

I ydre Henseende synes ingen af Parterne at have besejret den anden, idet Theoremer og Problemer forekomme ved Siden af hinanden i Euklids Elementer. Af større Betydning har selve Prøvelsen været af, hvad det er, der foruden den rent ydre Form karakteriserer Theoremer og Problemer. Dette har man i det mindste

senere udtrykt omtrent saaledes: i Theoremet udsiges det eneste mulige, i Problemet forlanges det, som kunde være anderledes. Ved disse Kjendetegn maa man afgjøre, om en Sandhed skal meddeles i den ene eller anden Form. Det vilde f. Ex. vise sig urigtigt at stille som Problem: «At konstruere en ret Periferivinkel, som staar paa en Halvcirkel.»

Vigtigere at kjende end saadanne Bestemmelser i Ord er dog den Rolle, som Theoremer og navnlig Problemer faktisk spille hos de opbevarede Forfattere, særlig i Euklids Elementer. Maaske faar man ogsaa derigjennem bedre fat paa den af Menaichmos forfægtede Mening end ved den opbevarede Meddelelse. Denne lader Platonikerne gjøre gjældende, at den ligeside Trekant er til, førend den konstrueres. I Modsætning hertil kan Menaichmos have hævdet, at man først faar at vide, at den virkelig er til, ved Konstruktion forbunden med det tilhørende Bevis for, at denne virkelig fører til Maalet. Saaledes bærer Euklid sig ad, idet han ikke lader sig nøje med at definere ligesidede Trekanter, men, førend han gjør videre Brug af dem, sikrer sig deres Existens ved i første Bogs første Sætning at løse den Opgave at konstruere en saadan og at bevise Konstruktionens Rigtighed.

Nødvendigheden af en saadan Fremgangsmaade gjør sig for saa vidt gjældende af sig selv, som ligesidede Trekanter dernæst skulle benyttes i nye Konstruktioner; men værd er det at lægge Mærke til, at Euklid bærer sig ad paa samme Maade med det, som dernæst blot skal benyttes i Beviset for en Læresætning. Førend han i I, 16 tør benytte et ret Liniestykkes Midtpunkt, maa han i I, 10 ved Konstruktion af dette have vist, at det virkelig existerer. Noget lignende gjælder i alle lignende Tilfælde. Den væsentlige Betydning af den geometriske

Konstruktion er den at skulle tjene som Bevis for, at det, Konstruktionen gaar ud paa at finde, virkelig existerer.

Hvis det er Menaichmos, der først har bragt denne Betydning af de geometriske Problemer, hvilke løses ved Konstruktion, til fuld Bevidsthed, har den dog forud været tilstede. Den hænger nemlig paa det nøjeste sammen med den geometriske Algebra. Da man havde fundet, at der ikke existerer noget Tal eller Talforhold (Brøk), som multipliceret med sig selv giver 2, og da man i Stedet for at forlange et saadant Tal forlangte en saadan Linie, som er Side i et Kvadrat dobbelt saa stort som Kvadratet paa en given Linie, maatte man bevise denne Linies Existens. Det sker ved at fremstile den som Diagonal i Kvadratet paa den givne Linie. En lignende Betydning faar Løsning af almindelige Ligninger af 2. Grad ved en Konstruktion. Det er først ved at have denne almindelige Opfattelse for Øje, at man fuldtud forstaar Ønsket om en konstruktiv Løsning af Cirklens Kvadratur, Vinklens Tredeling, Terningens Fordobling og Bestemmelsen af de to Mellemproportionaler. Uden den kan man nemlig slet ikke begribe, at de til teknisk Brug uskikkede Løsninger som af Cirklens Kvadratur ved Kvadratrix og som Archytas' Bestemmelse af Mellemproportionalerne overhovedet kunde yde nogen Tilfredsstillelse. Den samme Opfattelse vil ogsaa give Nøglen til Forstaaelsen af andre Forhold i den græske Mathematik.

I visse Tilfælde vil iøvrigt denne Brug af Konstruktionerne ikke ligge os fjernt. Det gjælder navnlig, naar en Opgave stillet i al Almindelighed ikke altid er mulig, men kræver visse Mulighedsbetingelser. I saa Fald begynde de græske Forfattere med at godtgjøre disses Nødvendighed. Det sker ved Beviset for et Theorem,

som udtaler, at den paagjældende Figur altid har de Egenskaber, som Mulighedsbetingelserne kræve. Disse Betingelsers Tilstrækkelighed bevises dernæst i et Problem ved at angive, hvorledes Figuren skal konstrueres, naar de ere opfyldte, og bevise, at den da virkelig bliver tilvejebragt. Det første Exempel herpaa haves i Euklid I, 20 og 22. Den første indeholder den Læresætning, at enhver Side i en Trekant er mindre end Summen af de to andre, den anden det Problem at konstruere en Trekant, hvis Sider ere givne, naar alle tre tilfredsstille denne Betingelse.

11. Den analytiske Methode; den analytisk-synthetiske Fremstillingsform.

Det vigtigste af Platons og Eudoxos' Skolers Bidrag til at give Mathematiken den ydre Skikkelse, hvori den fremtræder hos Euklid og de følgende græske Mathematikere, er vistnok Udformningen af den saakaldte apagogiske eller analytiske Methode og af de Former, Analyse og Synthese, hvorigjennem man sikrede sig saavel et paalideligt Udbytte af dens Anvendelse som en uangribelig Fremstilling af dette Udbytte.

Den analytiske Methode finder først og fremmest Anvendelse ved Løsning af Opgaver og derom skulle vi først tale. Vi tro imidlertid, at den logiske Betydning af de Regler, som opstilledes for at finde og fremstille Løsningen, bedst ville forstaas, naar vi for et Øjeblik gaa uden for den græske Mathematik og tale om den analytiske Løsning af Opgaver i al Almindelighed og tildels oplyse dens Anvendelse ved Exempler hentede fra andre Opgaver og andre Hjælpemidler, end der stod til Grækernes Raadighed. Jeg tilsigter derved at paavise

en med den oprindelige stemmende konsekvent Brug, som i Mathematiken kan og bør gjøres af Ordene Analyse og Synthese, analytisk og synthetisk i Stedet for den Forvirring, hvortil i den nyere Tid en udelukkende Anvendelse af Ordet Analyse paa den algebraiske Analyse har givet den første Anledning.

En mathematisk Opgave gaar ud paa at finde Størrelser eller Figurer, som tilfredsstille visse Fordringer. Ved dens Løsning kunne Gjetninger, hentede fra Ligheder med andre Opgaver, vel ofte spille en Rolle, og det skal ikke nægtes, at vigtige mathematiske Resultater først kunne være naaede ad denne Vej; men saadanne Gjetninger ligge udenfor al egentlig Methode. Ved enhver methodisk Behandling vil det gjælde om at «analysere» de opstillede Fordringer. Man maa for det første klart fastholde dem i Tanken, hvilket kun kan ske ved at tænke sig dem opfyldte, tænke sig Opgaven løst. Det gjælder dernæst om paa en eller anden Maade, efter Regler, som ere bekjendte for den Slags Opgaver, eller efter nyopfundne Regler, at omdanne Fordringerne til nye, som nødvendigvis ere opfyldte, naar de første ere det, og fortsætte denne Omdannelse, indtil man tilsidst kommer til Fordringer, som man er i Stand til at opfylde.

Ved denne Analyse finder man, hvorledes Opgaven skal løses, hvis den overhovedet kan løses. Synthesen bestaar for det første i den virkelige Udførelse af denne Løsning: i en saadan Bestemmelse af de søgte Størrelser og Figurer, at de omdannede Fordringer ere tilfredsstillede. Derefter kræves endnu et Bevis for, at da tillige de oprindelig stillede Fordringer ere tilfredsstillede. Dette Bevis kan, naar ingen simplere Veje frembyde sig, i Reglen føres ved en Omdannelse af Fordringerne i modsat Orden af den, som brugtes i Analysen, saaledes

at man ender med, at Opfyldelsen af de nye Fordringer, som man har sat i Stedet for de oprindelige, ogsaa nødvendigvis medfører Opfyldelsen af disse. Det kan udelades eller er allerede ført i Analysen, naar man i denne kun har brugt saadanne Omdannelser, som kunne vendes om, saaledes at de nye Fordringer ej blot ere nødvendige, men ogsaa tilstrækkelige Betingelser for de gamle, men ellers ikke.

Som Exempel skulle vi nævne Løsning af Opgaver ved algebraiske Ligninger. Idet man indfører Benævnelser for de ubekjendte Størrelser og lader dem indgaa ganske paa samme Maade som Betegnelserne for bekjendte Størrelser i de Ligninger, der udtrykke de givne Fordringer, tænker man sig disse Ligninger tilfredsstillede, altsaa Opgaven løst. Den før nævnte Omdannelse af Fordringerne fremstilles ved Omdannelse af Ligningerne, indtil man kommer til saadanne Ligninger, som give Opløsningen. Dette kan f. Ex. i analytisk Geometri[1] ske ved Omdannelse til Ligninger for geometriske Steder, hvorved Opgaven løses. Anvendes Analysen paa Opgaver, som gaa ud paa at finde Værdier af ubekjendte, skulle de omdannede Ligninger være de, hvor de ubekjendte ere isolerede. Hvis vi blot holde os til dette sidste Tilfælde, bestaar den paa Analysen følgende Synthese 1) i den virkelige Udregning af de ved de fundne Udtryk givne Størrelser, derunder deres Omdannelse efter bestemte Regler, f. Ex. deres Forkortning, Reduktion til enkelt Irrationalitet o. s. v., 2) i en Prøve af disse Størrelser. Denne foretages vel oftest ved direkte Indsættelse, men kan i Overensstemmelse med,

[1] Betegnelsen «analytisk Geometri» ville vi bruge i den sædvanlige Betydning, uanset at ogsaa anden Geometri kan være analytisk, og at man kan operere synthetisk med de Hjælpemidler, der nu engang have faaet Hævd paa at kaldes analytisk Geometri.

hvad der før sagdes om Dannelsen af det synthetiske Bevis, ogsaa føres ved Skridt for Skridt at gaa tilbage gjennem de benyttede Ligninger i modsat Orden. At et saadant Bevis ikke i og for sig er overflødiggjort ved den foregaaende Analyse, vides af saadanne Tilfælde, hvor man ved at opløfte til Potens har bortskaffet et Rodudtryk. Hvis der med dette mentes en enkelt af Rodens Værdier, f. Ex. den positive Værdi af en Kvadratrod, vides det, at man da kan indføre fremmede Opløsninger. I Stedet for et Bevis for Rigtigheden giver Prøven da et Bevis for Urigtigheden af disse sidste Rødder. Analysen alene lader saaledes Muligheden aaben for fremmede Løsninger. Er Løsningen forud bekjendt, kan den og dens Bevis meddeles alene synthetisk; men derved er en anden Ulempe. Er Opgaven saaledes Ligningen

$$x^2 - a\,x + b = 0,$$

eller en Opgave, der ved at sættes i Ligning vilde udtrykkes saaledes, kan man synthetisk meddele, at

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b},$$

og ved Kvadratrods-Tegnet forstaa den positive Kvadratrod. Prøven eller det synthetiske Bevis fører til, at denne Løsning er rigtig; men man ser ikke, om den er den eneste rigtige.

Hvad her er paavist om algebraisk Løsning gjælder almindelig: Analysen alene kan give for mange Opløsninger, Synthesen alene for faa.

Endnu skulle vi undersøge, paa hvilket Punkt af den fuldstændige Behandling Mulighedsbetingelserne frembyde sig. Man plejer nu tildags at knytte dem til den fuldstændige Tilendebringelse af den formelle Opløsning, som man da diskuterer. I det nysnævnte

Exempel sluttes af det fundne Udtryk, at, for at x skal være reel, maa man have $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geqq b$. En saadan Diskussion bliver dog kun mulig derved, at man ved Indførelse af Benævnelserne «negative og imaginære Størrelser» ogsaa anerkjender saadanne Størrelser, som man oprindelig ikke havde tænkt at faa til Opløsninger. Uden disse nye Arter Størrelser vilde man allerede paa et tidligere Standpunkt af Analysen have truffet paa Mulighedsbetingelsen. Naar man saaledes af ovenstaaende Ligning har udledet

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + b = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

kan man deraf kun udlede

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b,$$

naar $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geqq b$, da højre Side ellers slet ingen Mening giver. Mulighedsbetingelserne udledes altsaa af Analysen ligesom selve Opløsningen, men kunne ligesom denne meddeles i en rent synthetisk Fremstilling.

Det Omraade, hvorpaa Grækerne anvendte den her skildrede analytiske Methode til Løsning af Opgaver, er de geometriske Opgaver, hvis Endemaal, som vi have set, i Almindelighed er en Konstruktion, enten en virkelig ved Lineal og Passer eller en formel. Saalænge man methodisk har søgt Løsningen af saadanne Opgaver, maa man efter vore almindelige Bemærkninger være gaaet analytisk tilværks. En saadan Behandlingsmaade maa vistnok allerede have været tilstede ved Pythagoræernes geometriske Løsning af Ligninger af anden Grad. Methoden kan imidlertid være anvendt mere eller mindre bevidst; thi, som det ofte har vist

sig i Mathematikens Historie, er det at bruge en Methode ikke det samme som at gjøre sig den saaledes klar, at man har den til Raadighed, hver Gang der er Brug for den, end sige som at opstille den saaledes, at den ogsaa staar til Raadighed for andre.

En Konstruktion, som tydelig bærer Præget af at være funden ved Anvendelse af den analytiske Methode er Archytas' Bestemmelse af de to Mellemproportionaler. Han kunde nemlig umulig have gjættet paa Anvendelsen af den ham forud ubekjendte cylindriske Kurve, og det maa derfor udelukkende være den af ham anvendte Analyse, der har tvunget ham til at indføre den, ganske som naar i en moderne analytisk-geometrisk Undersøgelse et geometrisk Sted, for hvilket man har Brug ved en Opgaves Løsning, viser sig at være en Kurve, hvorom intet forud vides, men som defineres ved den af Analysen fremgaaede Ligning. Medens vi herigjennem faa et, allerede benyttet, Vink om, at Opgavers Tilbageførelse til Brug af geometriske Steder og Bestemmelsen af disse hører til Sider af den analytiske Methode, som allerede fandt nogen Udvikling hos Pythagoræerne, var det i de af Archytas' Efterfølgere Platon og Eudoxos stiftede Skoler, at Methoden fik den formelle Udvikling, som derefter stod fast hos de græske Mathematikere.

Anvendelsen af Methoden og Fremstillingen af de ved den vundne Resultater kom til at bestaa af en Række Led, hvis Beskrivelse vi lettest kunne knytte til det elliptiske Fladeanlæg (S. 41) som Exempel. Dettes enkelte Led udtrykkes dog her noget kortere, end de gamle vilde gjøre det.

1) Opgaven stilles i den saakaldte Protase *(πρότασις)*: langs en given ret Linie at anlægge et givet Areal (Kvadrat) saaledes, at der mangler et Kvadrat.

2) Opgaven udtales om en bestemt, tegnet Figur i Ekthesen *(ἔκθεσις)*: Kvadratet q (tegnet) skal anlægges som Rektangel langs Linien AB (se Fig. S. 41), saaledes at et Kvadrat mangler.

3) Opgaven tænkes løst (ved Rektanglet AM, som lader Kvadratet BM mangle) og føres i Apagogen, Transformationen *(ἀπαγωγή)* tilbage til en bekjendt Opgave: Idet C er Midtpunktet af AB, lægges Rektanglet KC hen paa DB. Derved omdannes Rektangel AM til et Gnomon eller til Differensen mellem Kvadraterne CB^2 og CD^2. Stykket CD skal altsaa bestemmes saaledes, at dette Gnomon er ligt Kvadratet q.

4) I Resolutionen, som man har kaldt den, gjøres dernæst Rede for, hvor vidt man nu virkelig besidder alt, som er nødvendigt til at løse den stillede Opgave. I det foreliggende Tilfælde finder dette kun Sted, naar q, der skal være lige stor med et af Kvadratet CB^2 udskaaret Gnomon, er mindre end dette Kvadrat. Naar man har set dette, vil man imidlertid derved have bemærket en Mangel ved selve den stillede Opgave. I det mindste i den opbevarede Litteratur er det nemlig Regel, at disse stilles med en saadan Begrænsning, at de kunne løses. Derved faar man i Stedet for den Opgave, som vi her have forsøgt at stille, dels et Theorem, dels et mere begrænset Problem. Theoremet (som i en noget almindeligere Skikkelse findes i Euklid VI, 27) maa gaa ud paa, at et Rektangel anlagt langs et Liniestykke, saaledes at der mangler et Kvadrat, er mindre end Kvadratet paa det halve Liniestykke, eller, om man vil, at et Rektangel er mindre end et Kvadrat med samme Perimeter. Problemet, (som i en almindeligere Skikkelse behandles i Euklid VI, 28), bliver det samme som det, man har forsøgt at løse, blot med den Tilføjelse, at det givne Kvadrat maa være mindre end Kvadratet paa den

halve givne Linie. Denne Tilføjelse til Protasen kaldes Diorismen *(διορισμός)* eller Opgavens Afgrænsning. I Ekthesen maa det endvidere om de Figurer, man antager, udtales, at disse opfylde Betingelsen $(q < CB^2)$. Ved den Afgrænsning, som vi nu altsaa tænke os indført i Protasen og Ekthesen, bliver, som vi skulle se, Resolutionen ganske overflødig; thi nu vil Forsøget paa, om Opgaven kan løses ved det foreliggende, lykkes, og Resolutionen vil da falde ganske sammen med den i Synthesen paafølgende Angivelse af, hvorledes den løses. Se vi derimod ikke paa opbevarede Meddelelser af Resultaterne af tilendebragte Undersøgelser, men paa selve Methodens Anvendelser til nye Undersøgelser, har den spillet en vigtig Rolle. Dels har man nemlig under Analysen stadig maattet prøve, om Apagogen var ført langt nok til at faa Opgaven løst, dels har den været Midlet til at naa, hvad vi alt (S. 80) have nævnt som et Hovedformaal for Behandlingen af Opgaver, nemlig at faa den oprindelige Opgave delt i det Theorem og det Problem, ved hvilke man sikrer sig, at Betingelserne for den forlangte Figurs Existens henholdsvis ere nødvendige og tilstrækkelige. Det er, saavel i det anførte Exempel som ogsaa i Almindelighed, en Maximums- eller Minimumsbestemmelse, man paa denne Maade har opnaaet.

Hvad Resolutionen ogsaa skulde give, er Antallet af Opløsninger. I nærværende Tilfælde bør det saaledes bemærkes, at naar CD^2 faar den rigtige Størrelse, er det ligegyldigt, om D falder paa den ene eller anden Side af C, noget, der nok kan være faldet i Øjnene samtidig med, at man fandt Maximumsværdien af q. Grækerne, der ved Konstruktionen væsentlig vilde sikre sig, at Figuren overhovedet existerer, lagde dog ikke stor Vægt herpaa. Da i andre Tilfælde Flertydigheden af en Opgave beror paa Flertydigheden af dem, hvortil

den føres tilbage, vil den, naar den har været forsømt for disses Vedkommende, heller ikke ved Analysen være bemærket for hins Vedkommende. Paa Grund af denne Forsømmelse maatte Tilfælde, hvor den har forekommet Grækerne at spille nogen Rolle, gjøres til Gjenstand for særlig Undersøgelse.

Transformationen og Resolutionen udgjøre Analysen, hvorved Opløsningen findes. Derefter fremsættes den fundne Løsning i Synthesen. Denne indeholder:

5) Konstruktionen *(κατασκευή)*, i hvilken det søgte tilvejebringes ved Hjælp af de anerkjendte Konstruktionsmidler. Der er dog ikke Tale om at gjøre Rede for alle Enkeltheder, men kun om en Angivelse af de tidligere bekjendte Konstruktioner, hvoraf den forlangte lader sig sammensætte: i vort Exempel Bestemmelsen af $C\,D$ ved den pythagoræiske Sætning o. s. v. Konstruktionen bliver saaledes kun en Gjentagelse med en lille Ændring i Formen af det, som er sagt i Resolutionen.

6) Derefter føres Beviset *(ἀπόδειξις)* for, at Konstruktionen virkelig har tilvejebragt den Figur, som forlangtes. Det føres i Reglen ved at anvende de samme Slutninger, som have været brugte i Transformationen i omvendt Orden. I Exemplet dannes Rektanglet $A\,M$ saaledes af Gnomonfiguren ved at lægge Rektanglet $D\,E$ hen paa $A\,C$.

7) Endelig gjør man sig i Konklusionen *(συμπέρασμα)* Rede for, at man virkelig har naaet det forlangte Maal. Det sker ved en Gjentagelse af Protasen, indledet med et «Altsaa er o. s. v.» og sluttet med «hvilket skulde gjøre».

Medens Analysen, som indeholdes i 3 og 4: Transformationen og Resolutionen, navnlig har haft methodisk Betydning for at finde Opløsningen, er den

ikke nødvendig, naar det blot kommer an paa at fremstille det fundne paa en uangribelig Maade, hvad der stedse er Hovedformaalet i Grækernes skriftlige Meddelelser. Derfor udelades den meget hyppig, saaledes at Fremstillingen kun kommer til at bestaa af de Afsnit, vi her have betegnet ved 1, 2, 5, 6, 7, hvorved man faar det, som vi ville kalde den synthetiske Fremstillingsform. Denne bruges navnlig i den systematiske Behandling af en hel Theori, hvis enkelte Konstruktioner forud have været mere eller mindre bekjendte for Forfatterne eller ere fundne i større Sammenhæng, saaledes i Euklids Elementer og i det meste af Appollonios' Keglesnitslære. Forøvrigt faar man egentlig ikke mere at vide paa de Steder, hvor ogsaa Analysen meddeles; thi for det første kunde Transformationen, efter hvad der er sagt, dannes ved at vende alle Slutninger i Beviset om, og Resolutionen falder sammen med Konstruktionen, og dernæst er den Analyse, som meddeles, kun Analysen af den ved Diorismen afgrænsede Opgave og ikke — som i vort oprindelige Exempel — den Analyse, som har ført til selve Afgrænsningen.

Efter at have talt saa udførlig om Analysen og den dermed forbundne synthetiske Fremstilling af Problemer komme vi hurtig over denne Methodes og de tilsvarende Formers Anvendelse paa Theoremer. Den synthetiske Fremstilling bestaar for det første her, eller kan i alt Fald bestaa, af alle de samme Led. Kun maa man i disse overalt sætte Theorem i Stedet for Problem; Konstruktionen bestaar her kun i Konstruktionen af de til Beviset nødvendige Hjælpelinier og mangler, hvis saadanne ikke behøves, og Konklusionen slutter her med Ordene «hvilket skulde bevises». Disse samme Led, hvis logiske Tilstrækkelighed ogsaa for

Theoremers Vedkommende er indlysende, vil man saaledes baade for Problemers og Theoremers Vedkommende finde overalt hos Euklid.

Der kan dog ogsaa for Theoremernes Vedkommende være Tale om en egentlig analytisk Methode. Den kan bruges, naar man vil prøve, om et Theorem, som andre har meddelt, eller som maaske en Gjætning har ført til at opstille, er rigtigt eller ej. Man begynder med at forudsætte Rigtigheden af Theoremet, som vi ville kalde *A;* man omformer det dernæst ganske som i den ved Problemer anvendte Apagoge eller Transformation ved en Række Slutninger, indtil man ser, at det fører til et nyt Resultat, *K,* om hvilket man véd, at det er rigtigt eller falskt. I første Tilfælde er der endnu kun en Mulighed for, at *A* er rigtig, men ingenlunde Sikkerhed. *K* kan være fremkommet i en Slutningsrække, hvor der kun tilsyneladende er gjort Brug af *A;* ogsaa naar man bruger moderne algebraiske Hjælpemidler, kan dette ske, hvis man f. Ex. paa begge Sider af Lighedstegnet uden at mærke det har multipliceret med en sammensat Størrelse, som i Virkeligheden bliver Nul. Naar man af *A* har udledet det rigtige Resultat *K,* maa *A*'s Rigtighed derfor prøves ved om muligt at forfølge den i Opgaven fulgte Slutningsrække tilbage igjen, saa *K*'s Rigtighed altsaa medfører *A*'s. Finder dette Sted, giver denne omvendte Slutningsrække Beviset for *A*'s Rigtighed, og dette Bevis nøjes man med at meddele i den før omtalte synthetiske Fremstilling med Udeladelse af den Analyse, som har ført dertil.

I det Tilfælde, hvor det af Antagelsen *A* udledte Resultat *K* er urigtigt, kan man derimod umiddelbart slutte, at *A* ogsaa er urigtig. Dette, eller, hvis *A* og *B* ere to Paastande, som gjensidig udelukke hinanden, at

B er rigtig, kan man altsaa opstille som Theorem, og føre Beviset derved, at Antagelsen B urigtig eller A rigtig vilde føre til det urigtige Resultat K. Et saadant antithetisk Bevis er apagogisk, altsaa egentlig analytisk. Da det imidlertid giver fuld Sikkerhed for, at Paastanden B er rigtig, bruges det jævnlig i Skrifter, hvor Fremstillingen ellers er synthetisk, saaledes hyppig i Euklids Elementer. Den antithetiske Bevisform blev ogsaa anvendt af Deinostratos paa Kvadratrix (S. 67) og bruges, som vi skulle se, altid i Exhaustionsbeviset.

Et Exempel paa, at et Theorem kan fremgaa, ikke af en Analyse af det forsøgsvis opstillede Theorem selv eller dets Modsætning, men af Analysen af et dermed forbundet Problem, havde vi derimod i det Theorem, som udskiltes, da vi nys forsøgte at opstille det elliptiske Fladeanlæg i for stor Almindelighed, nemlig at et Rektangel anlagt langs et Liniestykke, saaledes at der mangler et Kvadrat, ikke er større end Kvadratet paa det halve Liniestykke. Det synthetiske Bevis for den noget almindeligere Sætning i Euklid VI, 27 føres i Overensstemmelse med denne Analyse.

12. „Elementer"; analytiske Hjælpemidler.

Hvad enten man bruger Analysen til at finde Løsningen af en Opgave eller Beviset for en Læresætning, eller man bruger Synthesen til at fremsætte disse, er Løsningen sammensat af Løsninger af simplere Opgaver, og Beviset bygget paa Rigtigheden af simplere Sætninger. Der forudsættes altsaa, at man forud er i Besiddelse af saadanne. For at arbejde sig frem ad de her beskrevne Veje, maa man forud have en Samling simplere Løsninger af Problemer og simplere Læresætninger til Udgangs-

punkt. De Værker, der indeholde saadanne Samlinger, kaldes Elementer.

De første Elementer, hvorom der berettes, vare skrevne af Hippokrates; men desværre kjende vi ikke dette Værk fra en saa tidlig Tid og af denne opfindsomme og, som det synes, af de filosofiske Skoler temmelig uafhængige Geometrer. De reelle og formelle Fremskridt, som efterhaanden gjordes i Skolerne, optoges senere i nye Elementer. Et af disse Fremskridt, Afgrænsningerne eller Diorismerne, tillægges den næste Elementforfatter, Leon, som vel altsaa netop tog dem med i sine Elementer. Hans og andre senere Elementer ere gaaede tabt, efter at Euklids havde vundet det Eneherredømme, som de i over 2000 Aar skulde beholde overalt, hvor den græske Mathematik er trængt frem.

Med dette Hovedværk skulle vi beskjæftige os ret udførlig. Det vil da ogsaa ved Studiet af selve Værket, vise sig, hvor solidt det er sammenføjet af synthetisk fremsatte Problemer og Theoremer, og hvor sikker en Grundvold det maatte danne for de mathematiske Bygninger, som opførtes derpaa. I de hertil førende videregaaende Undersøgelser kunde man dog, ved Siden af de helt igjennem paa logisk Sikkerhed beregnede Elementer, behøve Hjælpemidler af en for det analytiske Arbejde mere bekvem Form. Exempler paa hertil sigtende Arbejder kunne ogsaa anføres fra Tiden før og efter Euklid og fra ham selv. Saaledes skal en Efterfølger af Eudoxos, Hermotimos, have skrevet om geometriske Steder, formodentlig de saakaldte plane Steder, det er saadanne, som blive ret Linie og Cirkel. Om det samme Emne har den store Geometrer Apollonios senere skrevet to Bøger, om hvis Indhold, der foreligger Referater, som i den nyere Tid fik en ikke ringe Ind-

flydelse paa Dannelsen af den analytiske Geometri. Som et Hjælpemiddel ved Brugen af den analytiske Methode, der maaske kan have haft Forgængere, skulle vi endvidere nævne Euklids Data. Dette Værk gaar i Henseende til Indhold ikke udenfor «Elementerne», men meddeler dette Indhold i en helt anden Form. Dets Sætninger gaa nemlig bestandig ud paa, at naar visse Størrelser eller Figurdele ere «givne», saa ere visse andre det ogsaa, det vil sige: bestemte ved de første. Bogens første Sætninger udsige, at givne Størrelser have et givet Forhold, given Sum o. s. v., en senere, at givne Linier skjære hinanden i et givet Punkt, andre fremsætte Betingelserne for, at en Trekant er given efter sin Art, det er, bliver ligedannet med en given, andre meddele, at to Størrelser, hvis Sum eller Differens og hvis Rektangel ere givne, selv ere givne o. s. v.

Denne Bogs Betydning som analytisk Hjælpemiddel er indlysende. Det gjaldt først i «Transformationen» om af Figuren, eventuelt forøget ved Hjælpelinier, at finde saadanne bekjendte Stykker, som bestemme ubekjendte Stykker. Under Eftersporingen heraf er det godt at have et Overblik over de vigtigste Tilfælde, i hvilke Stykker bestemme andre. Naar man dernæst i «Resolutionen» skal gjøre Rede for, at man virkelig er i Besiddelse af det fornødne til Opgavens Løsning, kan dette ske ved alene at anføre Sætninger i den Form, hvori de findes i Data.

De enkelte Sætninger i Euklids Data give tillige Oplysning om nogle af de mere specielle analytiske Fremgangsmaader, man havde til sin Raadighed. Der er saaledes i Data ikke alene Tale om, hvilke Stykker der kunne bestemme en Trekant, men ogsaa om, hvilke der blot bestemme dens Form. Heraf ligger det nær at antage, at man ikke alene løste Opgaver ved paa Figuren

at opsøge Trekanter, med hvis fuldstændige Konstruktion Opgavens Løsning kunde begynde, men ogsaa saadanne, hvis Form alene var bestemt. En Konstruktion af en Trekant af denne Form kunde i Almindelighed kun være Udgangspunkt for den foreløbige Konstruktion af en Figur ligedannet med den søgte; bagefter vilde da den virkelige Størrelse af en eller anden Linie være at indføre. Der foreligger virkelig i den græske Mathematik Opgaver, der ere løst ad denne Vej.

Tilbageførelsen til Bestemmelser af to Størrelser ved deres Produkt (Rektangel) og Sum eller Differens, altsaa til den geometriske Løsning af Ligninger af 2. Grad, udpeges ved de sidst anførte Sætninger af Data som en brugelig Methode. Den er jevnlig anvendt af de græske Mathematikere. Vi skulle senere se, at andre Sætninger i Data røbe et lignende Kjendskab til mere sammensatte Ligninger, udtrykte ved Proportioner og geometrisk Algebra.

13. Overblik over Euklids Elementer; synthetisk Lærebygning.

Euklids Elementer udgjøre 13 Bøger, hvortil man i de fleste Udgaver har føjet et Arbejde af Hypsikles som 14. Bog og et yngre og ubetydeligere Arbejde, som 15. Bog.

1. Bog indeholder de vigtigste Sætninger om Sider og Vinkler i Trekanter, om Konstruktion af disse, om vinkelrette og parallele Linier, om Parallelogrammer og om disses og Trekanters Arealer. 2. Bog indeholder det alt benyttede Grundlag for den geometriske Algebra, 3. Bog Læren om Cirklen og om Linier og Vinkler ved denne, ogsaa Potenssætningen. 4. Bog handler om ind- og omskrevne Polygoner, derunder navnlig Konstruk-

tionen af den regulære Trekant, Firkant, Femkant, Sexkant og Femtenkant.

Euklids personlige Arbejde med disse Bøger er vel især gaaet ud paa, nøjagtigere end det hidtil var sket, at fremstille dette bekjendte Stof i Overensstemmelse med de efterhaanden strengere formelle Fordringer, som stilledes. Et egentligt mathematisk Arbejde kan ogsaa have været forbundet hermed. Proportioner anvendtes nemlig, som vi ofte have set, i Geometrien, ogsaa før Eudoxos' exakte Proportionslære blev til. Naar man da i mange Tilfælde alligevel maatte ty til en blot paa Læren om rationale Størrelser bygget Proportionslære, har det ikke spillet saa stor en Rolle, om den brugtes lidt tidligere eller senere. Euklid derimod kjendte Eudoxos' Lære om Proportioner. Den var imidlertid for ny til allerede at kunne faa Plads i Begyndelsen af Systemet og maatte opsættes til femte Bog. Før denne maatte altsaa enhver, aabenbar eller skjult, Brug af Proportioner og Ligedannethed absolut undgaas. Det ligger nær at antage, at det netop var dette Hensyn, der tvang Euklid til — som tidligere berørt — selv at udtænke det Bevis for den pythagoræiske Læresætning, som findes i Slutningen af hans første Bog. For at gjøre forstaaeligt, at det overhovedet var muligt at komme saa vidt uden Proportioner, skal jeg minde om, at man ved den geometriske Algebra havde bevist Sætningerne om et Punkts Potens med Hensyn til Cirklen (III, 35—37). Disse Sætninger anvendes til at konstruere en ligebenet Trekant, hvor Vinklen ved Toppunktet er halvt saa stor som Vinklerne ved Grundlinien (IV, 10). Grundlinien er da Side i en regulær Femkant med samme omskrevne Cirkel som denne Trekant (IV, 11).

I 5. Bog fremsættes dernæst Eudoxos' Proportionslære, og i 6. Bog dens Anvendelser ej blot paa Geo-

metrien, men, som vi ville faa at se, ogsaa til Udvidelse af den geometriske Algebra. Mellemproportionalkonstruktionen og en ret Linies Højdeling, der i anden Bog vare erholdte i anden Form ved den geometriske Algebra, komme her igjen som knyttede til Proportionslæren, nemlig i VI, 13 og 30. Hvor mange af de enkelte Sætninger og Beviser der i disse Bøger skyldes Eudoxos, og hvor mange der tidligere have været knyttede til en mindre exakt Proportionslære, vide vi ikke. Euklid har vistnok Æren for at have sammenarbejdet det til en systematisk Helhed.

I denne Helhed har han dog ikke indarbejdet den specielle Lære om rationale Størrelser og om de hele Tal, ved hvis Forhold disse udtrykkes. Den fremstilles i 7—9. Bog og kommer altsaa vel bagefter den almindelige Proportionslære, men er ikke bygget paa den. Beviserne ere rimeligvis de samme, som man har benyttet før Eudoxos' Tid, og hvorfra Resultaterne den Gang bleve overførte ogsaa paa irrationale Størrelser.

De irrationale Størrelser selv behandles i 10. Bog. Her findes den Klassifikation af disse, som Theaitetos har begyndt, men som Euklid siges at have fuldstændiggjort. Her og ved Klassifikationens Anvendelse paa Bestemmelsen af de regulære Polyedres Stykker finder man vistnok Euklids betydeligste personlige Arbejde.

Før denne Anvendelse er det dog nødvendigt, at den elementære Stereometri udvikles. Dette sker i 11. Bog. Beregning af Pyramidens Volumen kræver infinitesimale Grænsebestemmelser; disse vindes, om de end formelt omgaas, ved Eudoxos' Exhaustionsbevis, som anvendes dertil i 12. Bog, efter at det først har været brugt til den anden i den elementære Geometri nødvendige Grænsebestemmelse: Beviset for, at to Cirkler forholde sig som Kvadraterne paa Diametrene. Først i

13. Bog kommer Bestemmelsen af de regulære Polyedres Stykker.

Som det ses, er til en vis Grad ensartede Emner, saasom Læren om irrationale Størrelser, og ensartede Fremgangsmaader, saasom Anvendelser af Exhaustionsbeviset, stillede sammen. Tildels skyldes denne Sammenstilling dog kun den tidligere historiske Udvikling, og det er i hvert Fald først i anden Række, at Euklid kan tage Hensyn dertil. I Henhold til de i den foregaaende Tid udviklede strenge logiske Principer, til hvis yderligere Skjærpelse Euklid har bidraget ved sit Skrift om Fejlslutninger, var den logiske Uangribelighed Hovedsagen. Medens denne for det enkelte Problems eller Theorems Vedkommende, som vi have set, sikredes ved den synthetiske Fremstilling, gjaldt det saavel indenfor hver enkelt Bog som i hele Værket om at ordne de enkelte Problemer og Theoremer saaledes, at det Grundlag, hvorpaa, og det Materiale hvoraf, hvert nyt skulde opføres, allerede var bragt tilstede ved de foregaaende. Vi have i den Henseende anført, at end ikke et Midtpunkt af en ret Linie turde bruges i et Bevis, uden at dets Existens først var bevist ved Konstruktion.

En saadan Sammenføjning af Sætninger, i hvilken man, som i et synthetisk Bevis for en enkelt Sætning, gaar over fra det bekjendte til det ubekjendte og derfor hæver sig fra det simple og enkelte til det mere sammensatte og mere almindelige, ville vi kalde en synthetisk Lærebygning — uden dog at have nogen umiddelbar antik Hjemmel for denne Betegnelse. I en saadan Lærebygning spiller Udgangspunktet og Slutningen en særegen Rolle.

Hvad Udgangspunktet angaar, saa er det aabenbart, at der forud for de Problemer, hvis Løsninger ere sammensatte af dem, der ere givne af tidligere Pro-

blemer, og forud for de Theoremer, hvis Beviser ere byggede paa tidligere Theoremer og Problemer, maa gaa visse første Konstruktioner, hvis Udførelse uden videre betragtes som kjendt, og visse første Paastande, hvis Rigtighed betragtes som umiddelbart indlysende. De første kaldes hos Euklid Postulater *(αἰτήματα)*, de sidste almindelige Antagelser *(κοιναὶ ἔννοιαι)*. I Stedet for det sidste Ord bruges dog jevnlig det hos andre Forfattere, særlig filosofiske, forekommende: Axiomer *(ἀξίωματα)*. Forud for disse to Arter Forudsætninger maa selve de Begreber opstilles, som disse Forudsætninger gjælde. Dette sker i Definitionerne *(ὅροι)*. Med de Forudsætninger, som Euklid saaledes opstiller, skulle vi snart beskjæftige os. Derigjennem lære vi da ogsaa de Fordringer at kjende, som de gamle i det hele stillede til deres Forudsætninger.

Foruden Forudsætningerne tiltrækker i en synthetisk Lærebygning ogsaa Slutningen sig en vis Opmærksomhed, da det ved den hele Ordning faar Udseende af, at alt det foregaaende er medtaget som Grundlag for denne Slutning. Som alt anført slutter Euklids Elementer med Bestemmelsen af de regulære Polyedres Stykker og den deraf følgende Konstruktion af Polyedrene. Dette har ganske vist ikke været Euklids eneste Maal; thi han medtager i Løbet af sit Arbejde meget, som hverken direkte eller indirekte bruges i denne Bestemmelse, og han har saaledes tilvejebragt og sikkert villet tilvejebringe et almindeligt Grundlag for videregaaende mathematiske Undersøgelser. Den store Rolle, som Konstruktionen af regulære Polyedre spiller som Slutsten paa hans Arbejde, har dog været Anledningen til, at Arbejder af andre Forfattere om disse Polyedre allerede i meget gamle Udgaver ere medtagne som 14. og 15. Bog.

Mere bestemt stiler Behandlingen i første Bog,

tagen for sig, henimod at faa netop det med, som er logisk nødvendigt for at naa til det Grundlag for den i næste Bog udviklede geometriske Algebra, der danner første Bogs Slutsten, nemlig Gnomonsætningen I, 43 og den pythagoræiske Læresætning I, 47. Ogsaa her medtages dog et foreløbigt Maal, som naas midt i Bogen i Forbindelse med den for Hovedformaalet nødvendige Parallellheori, nemlig Sætningen (32) om Vinkelsummen i en Trekant. Iøvrigt indeholder Bogen Sætninger om rette Liniers Stilling mod hinanden, om vinkelrette og parallele Linier med tilhørende Konstruktioner, om Trekanters Kongruens og Konstruktion, og Afhængigheden mellem Siders og Vinklers Ligestorhed og Uligestorhed i en Blanding, som kun er lidet overskuelig, men som er en Følge af den logisk vel sikrede Maade, hvorpaa Sætningerne efterhaanden ere byggede op paa hinanden. Exempelvis skulle vi nævne, at Sætninger om Trekantens Kongruens findes i 4, 8 og 26, og at Euklid ikke finder Anledning til at undersøge Kongruensen af Trekanter med en Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side lige. For Sætninger herom har han nemlig ingen Brug, hvorimod han i 6. Bog, hvor han sammenstiller Sætninger om Trekanters Ligedannethed, ogsaa behandler det hertil svarende Tilfælde. I Slutningen af Bogen ere Sætninger om Arealer mere samlede.

Idet vi her have opstillet Begrebet synthetisk Lærebygning, skulle vi for Modsætningens Skyld — og da vi ønske ogsaa uden for Anvendelsen paa de gamles Skrifter at faa fuld Klarhed paa Betydningen af Analyse og Synthese — berøre, hvad vi vilde forstaa ved en analytisk Lærebygning. Medens man i den synthetiske Lærebygning først efterhaanden hæver sig til Betragtningen af mere og mere sammensatte eller mere almindelige Forhold, tager man i den analytiske Lærebygning et almindeligt Princip, som netop ved sin Almindelighed kan have en vis Simpelhed, til Udgangspunkt og udvikler ud fra dette de Forhold, som maa gjøre

sig gjældende i de forskjellige enkelte Tilfælde. En Behandling af Geometrien, hvor man begynder med ret Linie og Cirkel og dernæst gjennem Keglesnit hæver sig til Kurver af højere Orden, er efter sit hele Anlæg synthetisk, selv om Enkelthederne behandles analytisk; men en Behandling, hvori man strax undersøger almindelige Kurvers Egenskaber og deraf specielt udleder Sætninger om den rette Linie eller Keglesnittene, er efter sit Anlæg analytisk. Et udpræget Exempel paa en analytisk Behandlingsmaade haves i Lagranges analytiske Mekanik, hvor alt udledes af de virtuelle Hastigheders Princip. Var dette Princip selv kun opfattet som en Hypothese, der skulde bevises gjennem sine Anvendelser eller Konsekvenser, vilde Fremgangsmaaden ganske stemme med den analytiske Methodes alt omtalte Anvendelse paa enkelte Sætninger. Er Princip et derimod som hos Lagrange forud fastslaaet, er den anvendte Fremgangsmaade dog væsentlig den samme, og at kalde den analytisk stemmer altsaa vedblivende med den tidligere brugte Anvendelse af dette Ord. Iøvrigt vil det i Reglen være ved en synthetisk Fremadskriden fra det mere specielle til det mere almindelige, at det almindelige Synspunkt er vundet, som er Udgangspunktet for en analytisk Lærebygning.

14. Euklids geometriske Forudsætninger.

De Forudsætninger, hvorpaa Euklid bygger Geometrien, maa søges i de Definitioner, Postulater og Axiomer, som staa i Spidsen af hans forskjellige Bøger. Særlig Interesse have de, som høre til første Bog, da de og de derpaa efterhaanden byggede Resultater ogsaa ligge til Grund for det følgende. Ved dem skulle vi derfor her især dvæle, men dog strax supplere dem med nogle af de i andre Bøger indførte nye Forudsætninger. De, som staa i Forbindelse med særlige Theorier, saasom Proportionslæren, skulle vi dog først omtale i Forbindelse med disse Theorier.

Ved den første Gjennemlæsning af Euklids Definitioner, Postulater og Axiomer vil man sikkert finde, at

de ere langtfra at staa paa Højde med de formelle og logiske Fordringer, som vi have sagt, at de gamle stillede. Man vil saaledes se, at adskillige af Definitionerne slet intet sige om det, som skal defineres, og ingen Sikkerhed give for, at der virkelig existerer noget, som svarer til Definitionerne. Definitionen paa en ret Linie siger ikke mere, end om man havde sagt: der er en vis Art Linier, som kaldes rette. Hvad det er for nogle Linier, altsaa de Egenskaber ved Linierne, som man i vore Dage vilde bruge til Definition, udsiges først i Postulaterne, som altsaa sige: vi ville gaa ud fra, at den rette Linie har de og de Egenskaber. Ogsaa Postulaterne og Axiomerne ere tildels udtrykte med en Korthed, der kan gjøre dem gaadefulde, og som danner en stærk Modsætning til den forsigtige Udførlighed, hvormed alt medtages i de egentlige mathematiske Sætninger og deres Beviser.

Sagen er, at til Definitioner, Postulater og Axiomer henvises alt det, som Mathematikeren vil have Lov at forudsætte i selve Lærebygningen uden enten at give nogen Forklaring, Beskrivelse af hvorledes eller Begrundelse af hvorfor. Det er hans Sag forud at give en nøjagtig Fortegnelse over, hvad det er, han vil forudsætte, og den maa være saa tydelig, at den, saasnart han skal bruge den, giver klar Besked, saa det da ses, at han hverken bruger mere eller mindre end det, han har betinget sig Ret til; men de Abstraktioner, som have ført til Opstilling af Begreberne og til i Postulater og Axiomer netop at tillægge dem disse bestemte Egenskaber, ja selv en foreløbig Paavisning af, at han virkelig har opfyldt den Fordring hverken at tillægge dem for mange eller for faa Egenskaber, vedkomme ikke ham. Han er som Mathematiker kun ansvarlig for, at den, der indrømmer ham alle disse Ting, derefter ved hans sikre Slutninger maa tvinges

til at indrømme alt det, han deraf udleder. Derved skal det praktisk vise sig, at han har gjort et tilstrækkeligt Antal Forudsætninger. At han ikke har gjort for mange, lader sig vel ikke saa umiddelbart paavise; men hvis han havde gjort det, vilde han udsætte sig for, at andre paaviste, at han havde gjort det, nemlig derved, at nogle af Forudsætningerne enten vare i Strid med hinanden eller kunde udledes af hinanden.

Naar man rigtig vil vurdere de af de gamle, særlig af Euklid, udtrykkelig opstillede geometriske Forudsætninger, maa man derfor se mere paa, hvilke disse Forudsætninger ere, end paa, at der mangler Oplysninger om, hvorfra de haves, eller paa den Form, hvorunder de fremtræde. Det vil da vise sig, at de ere de samme som de, hvorpaa vi den Dag i Dag opføre Geometrien, og at de fremdrages med en Sikkerhed og Fuldstændighed, som vedblivende maa tjene til Mønster ogsaa for dem, der maatte finde Anledning til enkelte Suppleringer eller Modifikationer. For at faa dem rigtig frem, maa vi dog af og til ogsaa berøre de, idetmindste for en moderne Opfattelse, mangelfulde Former, hvori flere af dem fremtræde.

Vi skulle begynde med at fremdrage de **Definitioner,** som kunne give os Anledning til nogen Bemærkning. Punktet defineres ved sin Udelelighed (I, Def. 1). Derfra gaas videre til Linien som Længde uden Brede (I, 2), til Fladen med Længde og Bredde (I, 5) og i 11. Bog til Legemet med Længde, Bredde og Tykkelse (XI, 1). Disse Definitioner give ingen Oplysning om, hvorledes man skal komme til Begreberne Punkt, Linie, Flade og Legeme, og nævne altsaa som en Forudsætning, hvorpaa der skal bygges, at man allerede er i Besiddelse af disse Begreber og forstaar Meningen af, at Punktet har 0 Dimensioner, Linien 1,

o. s. v., hvori atter ligger en Opfattelse af en Linie som geometrisk Sted for Punkter, af en Flade for Linier og af et Legeme for Flader. For virkelig at komme i Besiddelse af Begreberne vil man i Reglen ikke gaa denne synthetiske Vej fra Punkt til Linie, Flade og Legeme, men den omvendte analytiske, altsaa gaa ud fra Legemet som noget umiddelbart givet, betragte Fladen som Grænse for Legemet o. s. v. At denne Vej til at vinde Begreberne ikke var ukjendt for de gamle, ses af en anden Række Definitioner, nemlig XI, 2, I, 6 og I, 3 der imidlertid hos Euklid ikke ere nye Definitioner paa Flade, Linie og Punkt, men kun Oplysninger om, hvorledes Legeme, Flade og Linie begrænses.

At det ikke er i Definitionerne, men først i Postulaterne samt et af Axiomerne, at man maa søge Oplysning om, hvad en ret Linie er, har jeg allerede berørt. Ogsaa Cirkelliniens Existens bliver først slaaet fast i Postulaterne, men dens Definition (I, 15) synes snarere at sige for meget end for lidt, idet den ikke blot beretter, at Cirkelliniens Punkter alle skulle have samme Afstand fra Centrum, men tillige oplyser, at Cirklen selv er en Figur, altsaa en ved Cirkellinien afgrænset Del af Planen, og at Centrum ligger indenfor denne. Naar det ikke er sagt, at Cirkellinien skal indeholde alle Punkter med den først anførte Egenskab, bliver den første af de anførte Oplysninger dog et ikke overflødigt Skjælnemærke mellem den hele Cirkellinie og Cirkelbuer. Derved kan den hævde sin Plads mellem Definitionerne. Vi ville iøvrigt faa at se, at Oplysningerne, hvis de ikke havde faaet Plads her, i en eller anden Form burde medtages blandt Postulaterne.

Definitionen paa en Diameter i en Cirkel (I, 17) indeholder derimod en Tilføjelse, som sikkert er over-

flødig ej blot for at definere den, men overhovedet i Forudsætningerne. Det siges nemlig ikke blot, at den gaar igjennem Centrum, men tillige, at den halverer Cirklen. Dette er en Sætning, som kan bevises ved Kongruensen af de Dele, hvori Cirklen deles. Maaske har en senere Udgiver indskudt den i Definitionen, fordi den virkelig ikke findes i nogen af Euklids Læresætninger.

Euklids Definition paa en Vinkel (I, 8) er i sig næsten ligesaa tom som Definitionen paa en ret Linie. Herpaa raades der dog fuldkommen Bod ved Axiomerne, hvori opstilles almindelige Kjendetegn paa, om en Størrelse er $<$ $=$ $>$ en anden af samme Art. Disse Kjendetegn lade sig nemlig ogsaa anvende paa Vinkler, som derved faa vel definerede Størrelser. Det kan iøvrigt bemærkes, at den oprindelige Definition paa Vinkler ogsaa er anvendelig paa Vinkler mellem krumme Linier. Brug af dette Begreb gjøres i 3. Bogs Sætning 16, hvor det vises, at den vinkelrette paa Diameteren i et Punkt af en Cirkel danner en mindre Vinkel med Cirklen eller kommer denne nærmere end enhver anden ret Linie.

De **Postulater,** som Euklid opstiller i første Bog, ere efter den nyeste og paalideligste Textrevision[1] følgende:

1. At drage en ret Linie fra et Punkt til et andet;
2. At forlænge en begrænset ret Linie uden Grænse;
3. At beskrive en Cirkel med givet Centrum og given Radius;
4. At alle rette Vinkler ere indbyrdes lige store;

[1] Heibergs Udgave.

5. At, naar en ret Linie, som skjærer to andre rette Linier, paa samme Side danner indvendige Vinkler, som tilsammen ere mindre end to rette, de sidstnævnte to Linier ved at forlænges i det uendelige ville skjære hinanden til den Side, hvor Vinkelsummen er mindre end to rette.

De Konstruktioner, af hvilke alle andre ifølge disse Postulater skulle sammensættes, ere de, som praktisk udføres ved Lineal og Passer. Det er dog vildledende blot ensidig at fastholde dette. Det viser sig blandt andet derved, at man da ikke ret faar Plads til de to sidste Postulater, hvorfor endog meget gamle Udgivere have ladet sig forlede til at flytte disse hen blandt Axiomerne.

Som det ses, nævnes Lineal og Passer, ved hvis Brug man jo ogsaa kun kan give et ufuldstændigt Billede af den mathematiske rette Linie og Cirkel, end ikke i de tre første Postulater. Disse give, som vi alt have sagt om Euklids Forudsætninger overhovedet, slet ingen Oplysning om, hvorfra, eller ved hvilke Midler man tilvejebringer det, som forlanges forudsat. I Overensstemmelse med, at de gamle Problemer væsentlig ere Existenssætninger og Løsningerne give Existensbeviser, ere Postulaterne Existenspaastande, som kræves anerkjendte uden Bevis eller Eftervisning. De Paastande, som indeholdes i de 3 første Postulater, gaa da kun ud paa, at der er en ret Linie gjennem to vilkaarlige givne Punkter, at denne kan forlænges uden Grænse, og at der er en Cirkel med et vilkaarligt opgivet Centrum og en vilkaarlig opgiven, ved dette beliggende Radius, eller med andre Ord en saadan, som har et givet Centrum og gaar gjennem et givet Punkt. At det tredie Postulat virkelig er saaledes at forstaa, og ikke fordrer indrømmet uden Bevis Existensen af en Cirkel med givet Centrum og Radius given et andet

Sted i Planen, ses strax derved, at Euklid i Sætning 2 viser, at Bestemmelsen af en saadan Cirkel ved Hjælp af den i Sætning 1 meddelte Konstruktion af en ligesidet Trekant lader sig sammensætte af dem, der ere postulerede. Da dette virkelig lader sig gjøre, har Euklid ved den anførte Indskrænkning af det 3. Postulat kun opfyldt den allerede omtalte Pligt: ikke at forudsætte for meget. Var der derimod Tale om den praktiske Udførelse ved Passeren, havde det været ligegyldigt, hvor den opgivne Radius laa, og man tør nok sige, at den i Sætning 2 viste Vej ikke har været bestemt til praktisk Udførelse af Tegningerne.

Med denne Opfattelse af Postulaternes Betydning er det aabenbart, at man ikke har nok i at postulere Existensen af de paa simplest Maade bestemte rette Linier og Cirkler. De geometriske Konstruktioner udføres ved, at man ved forskjellige Liniers Skjæring bestemmer Punkter, som atter kunne benyttes ved Bestemmelsen af nye Linier. Da maa Skjæringspunkternes Existens postuleres lige saa vel som Liniernes; thi den kan umulig være en Følge af denne sidste. I 5. Postulat opstilles det derfor udtrykkelig som en ny Forudsætning, at to rette Linier skjære hinanden, hvorved dog maa gjøres den Indskrænkning, som er nødvendig, for at Paastanden virkelig skal blive sand, en Indskrænkning, der her spiller ganske samme Rolle, som Diorismen til et Problem. Uden at Skjæringspunktets Existens var krævet i 5. Postulat, vilde de Løsninger af Problemer, hvor Skjæringspunkter mellem rette Linier benyttes, i Almindelighed slet ikke give de Existensbeviser for de konstruerede Figurer, som skulde være Konstruktionernes væsentligste Udbytte.

Er nu denne Betragtning rigtig, vil man imidlertid savne Postulater, som paa lignende Maade kræve Exi-

stensen af Skjæringspunkter mellem ret Linie og Cirkel eller mellem to Cirkler anerkjendt. Vel maa den fuldstændige Afgrænsning af de Tilfælde, hvor Skjæringen virkelig finder Sted, allerede kræve Udviklingen af flere Sætninger, og det er maaske den Omstændighed, at Euklid derfor ikke strax kan give denne Afgrænsning i al Almindelighed, som har afholdt ham fra at opstille hertil tjenende Fordringssætninger. For overhovedet at kunne benytte Cirklen i Konstruktioner, ere dog i det mindste nogle Forudsætninger om dens Skjæring med ret Linie og med andre Cirkler nødvendige. Hvilke Euklid benytter, maa man søge i selve de Anvendelser, han gjør.

Man ser da i Sætning I, 12, at han for at være vis paa, at en Cirkel med givet Centrum skjærer en vis ret Linie, lader den gaa gjennem et Punkt paa den Centrum modsatte Side af Linien, og at han dels i Sætning 1, dels i Sætning 22 betragter det som indlysende, at en Cirkel med Centrum paa eller indenfor en andens Periferi, og som gaar gjennem et Punkt udenfor denne, skjærer den i to Punkter. At det er paa disse Forudsætninger, han bygger, træder tydelig nok frem paa de paagjældende Steder, og andre Steder forudsættes intet om Skjæring mellem Cirkel og ret Linie eller Cirkel, førend det dertil fornødne er bevist.

Indeholder de af Euklid udtrykkelig opstillede Forudsætninger da slet intet om disse faktiske Forudsætninger, hvilke Euklid paa de anførte Steder, navnlig i Nr. 12, er sig fuldt bevidst? Postulaterne gjøre det i hvert Fald ikke; men som vi have set, ere Forskjellene mellem Postulater og Definitioner ikke saa udprægede, at man alene behøver at søge blandt de første. Det er da klart, at Euklid kan søge Berettigelse til at bruge disse Forudsætninger deri, at han i Definitionerne har

sagt, at selve Cirklen er en Figur, der indeholder Centrum, hvoraf maa følge, at en Cirkellinie maa skjære en tilstrækkelig forlænget ret Linie eller en anden Cirkellinie i to Punkter, naar den har sit Centrum paa den ene Side og gaar gjennem et Punkt paa den anden Side af en af disse Linier. Det kan iøvrigt bemærkes, at man paa lignende Maade i visse Tilfælde kan paavise Skjæring mellem rette Linier uden at gjøre Brug af 5. Postulat, idet man benytter sig af, at Polygoners Omkredse ogsaa afgrænse Arealer, som ikke strække sig i det uendelige. Euklid gjør Brug heraf i I, 21.

Endnu savne vi Forklaring af, hvorledes den Paastand, at alle rette Vinkler ere lige store, kan faa Plads blandt Postulaterne. Af Axiomerne vil det fremgaa, at Vinkler ere lige store, hvis de ere kongruente, ellers ikke, og Paastanden er altsaa den selvsamme som, at alle rette Vinkler ere kongruente. Da en ret Vinkel defineres (Def. 10) som den, der er lig med sin Nabovinkel, gaar Postulatet altsaa ud paa, at den Vinkel, som vi nu kalde en lige Vinkel, har en bestemt Størrelse, eller at Forlængelsen af en given ret Linie ud over et Endepunkt er entydig bestemt. Fuld Bekræftelse paa, at det er dette, som menes, faar man ved at se, at det netop er paa denne Maade, at Postulatet faktisk anvendes. Det sker i Beviset for Sætning I, 14.

4. Postulat bliver altsaa en Tilføjelse til 2. Postulat, nemlig at den i dette indeholdte Bestemmelse af en ret Linies Forlængelse er entydig, og det er vel nærmest derfor, at det har faaet Plads blandt Postulaterne og ikke blandt Axiomerne. Postulatet vilde ikke savnes af en moderne Læser, som er vant til, at der tages Hensyn til Opløsningernes Antal, og derfor nærmest vil tænke sig, at Entydigheden allerede er underforstaaet i 2. Postulat. Naar det dog en Gang staar der, savner man

et andet Postulat, som udtrykker, at ogsaa den i første Postulat givne Bestemmelse af en ret Linie ved to Punkter er entydig. Af denne Entydighed gjør Euklid udtrykkelig Brug i Sætning I, 4, hvor han i sin Bevisførelse bruger det Argument, at «to rette Linier ikke kunne indeslutte noget Fladerum»; men denne Paastand, der netop er den samme som den, at 1. Postulat er entydigt, findes ikke opstillet blandt Forudsætningerne. Her er en utvivlsom Inkonsekvens tilstede. Denne er allerede bemærket i Oldtiden og har bragt Udgivere til netop at medtage den i I, 4 udtrykkelig benyttede Forudsætning enten — og vist nok tidligst — blandt Postulaterne, hvor den har samme Krav paa at findes som Postulat I, 4, eller blandt Axiomerne. Dette nye Postulat udtrykker tillige, at et Punkts Bestemmelse ved 5. Postulat som Skjæringspunkt mellem to rette Linier er entydig.

Entydigheden af 3. Postulat om en Cirkels Bestemmelse ved Centrum og Radius behøver derimod ikke at forudsættes. Man kan nemlig atter her benytte, at Cirklen allerede i Definitionerne er fuldstændigere bestemt end en ret Linie. Dette sætter Euklid istand til i 3. Bogs 5. og 6. Sætning at bevise, at koncentriske Cirkler ikke kunne skjære eller berøre hinanden, altsaa at det fuldstændige geometriske Sted for de Punkter, som have samme Afstand fra et givet Punkt som et andet, kun bestaar af én lukket Kurve, med andre Ord, at 3. Postulat kun giver én Cirkel.

Euklids 1., 2., 4. og 5. Postulat, supplerede med den i Sætning I, 4 benyttede Forudsætning, at 1. Postulat skal give en entydig Bestemmelse, og, som vi skulle se, med en i 7. Axiom indeholdt Forudsætning, udtrykke alle de Egenskaber ved den rette Linie, som ligge til Grund for dens Brug i Geometrien. Uformærkt,

ja, som vi skulle se, endog uden selv helt at blive det var, har Euklid imidlertid med det samme faaet Planens Grundegenskaber opstillede. Dennes udtrykkelig opstillede Definition (I, 7) er i sig lige saa intetsigende som den rette Linies. Planen nævnes endnu i Definitionerne I, 8 og I, 15, hvor det udtales, at en Vinkels Ben skulle ligge i samme Plan, og at Cirklen er en plan Figur. Af større Betydning er det, at det i de opstillede Postulater stiltiende forudsættes, at de forskjellige Bestemmelser finde Sted indenfor en og samme Plan. Uden dette vilde femte Postulat ligefrem blive meningsløst. Den Egenskab, som navnlig ved første og andet Axiom tillægges en Plan, bliver nu den at indeholde enhver ret Linie, som gaar gjennem to af dens Punkter, samt dens Forlængelse i det uendelige. Havde Euklid selv udtrykkelig slaaet dette fast, kunde han deri have faaet et virkeligt Grundlag for de tre første Sætninger i 11. Bog, som udsige, at en ret Linie, som delvis ligger i en Plan, ikke kan gaa udenfor den, at to rette Linier, der skjære hinanden, ligge i (og bestemme) en Plan, og at to Planers Skjæringslinie er ret. Nu opstiller han nogle andre Beviser, at hvilke det for XI, 1 maa forudsætte Rigtigheden af XI, 2, som omvendt er bygget paa XI, 1. I principiel og formel logisk Henseende staar Euklids Behandling af Stereometrien i det hele tilbage for hans Plangeometri, hvorpaa vi skulle se et endnu vigtigere Exempel ved Omtalen af hans Axiomer. Det vil dog vise sig, at trods denne Mangel hos de græske Mathematikere, deres Kjendskab til selve de stereometriske Sætninger og Operationer havde et ret betydeligt Omfang.

Medens vi ved Definitioner og Postulater tildels have maattet tage vor Tilflugt til de Anvendelser, som

Euklid i sine Sætninger faktisk har gjort deraf, for at faa nøjagtig Besked om de Forudsætninger, som de skulle udtrykke, give de **Axiomer** i første Bog, hvis Ægthed anses for utvivlsom, og med hvilke vi derfor udelukkende ville beskjæftige os, nemlig[1] 1—3 og 7—8, en lige saa kort som klar Besked om Grundlaget for Anvendelserne af Begreberne: Ligestorhed og Uligestorhed paa Størrelser i Almindelighed, og særlig paa geometriske Størrelser. Det første Bidrag til Begrebet Ligestorhed gives i Axiom 1: Størrelser, som ere lige store med en og samme Størrelse ere indbyrdes lige store. At Benævnelsen «ligestor» forekommer i Forklaringen paa Begrebet Ligestorhed, gjør ikke denne Forklaring værdiløs, hvad man blandt andet kan se af, at man ikke kan sætte «uligestor» i Stedet for «ligestor» i den i Axiomet indeholdte Forklaring. Denne er imidlertid ikke tilstrækkelig til at give et anvendeligt Størrelsesbegreb. Der maa tages med, at en Størrelse ikke forandres ved Deling, efterfulgt af Sammensætning af alle Delene. Dette indeholdes i Axiomerne 2 og 3, som udsige, at ligestort lagt til eller trukket fra ligestort giver ligestort. Det maa endvidere, naar man ogsaa vil have Uligestorhed med, medtages, at man faar noget mindre ud ved ikke at tage alle Delene med, hvilket udsiges i Axiom 8: det hele er større end en Del. Herved er ogsaa givet Forklaring paa Addition og Substraktion af almindelige Størrelser, og der er deri indeholdt, at Addendernes Orden er ligegyldig. Naar Størrelsesbegrebet i en moderne Arithmetik[2] defineres saaledes, «at de Egenskaber ved Gjenstandene, der ikke forandres, naar deres Dele sammensættes i forskjellig

[1] Se Heibergs Udgave.
[2] Jul. Petersens.

Orden, men som forandres, hvis nogle af Delene borttages, siges at have Størrelse», stemmer denne Definition ganske med de anførte Axiomer, der endog have det Fortrin mere direkte at forklare, hvad der er ligestort, større eller mindre.

Dette almindelige Størrelsesbegreb maa suppleres ved særlige Kjendetegn, som sikre dets Anvendelse dels paa bestemte Arter af Størrelser, saasom geometriske Størrelser, Vægte o. s. v., dels paa rent abstrakte Talstørrelser. Euklid, for hvem selve den geometriske Størrelse bliver abstrakt Størrelse, da den i den geometriske Algebra tjener til Fremstilling af Størrelser af enhver Art, ogsaa Tal, maa først og fremmest give Kjendemærket paa geometriske Størrelsers Ligestorhed. Det sker i det 7. Axiom til første Bog, hvorom vi nu skulle tale. Først i femte Bog gives en umiddelbar Fremstilling af abstrakte Størrelser som Forhold samt Kjendetegn paa deres Ligestorhed og Uligestorhed. Forholdene til Enheden ere Tal i dette Ords moderne og almindelige Betydning. Enheden indføres dog først i 7. Bog, og anvendes da kun til Maal for dermed kommensurable Størrelser. Om de dertil tjenende Forudsætninger komme vi til at tale i Sammenhæng med disse Bøgers øvrige Indhold.

I første Bogs 7. Axiom, hvortil vi vende tilbage fra dette Henblik til andre Størrelsesbestemmelser end den geometriske, udtales, at kongruente Størrelser eller saadanne, som kunne bringes til Dækning, ere ligestore. Dette Kjendetegn paa geometrisk Ligestorhed gaar ganske naturlig forud for det i 8. Axiom indeholdte Kjendetegn paa Uligestorhed, som ikke behøver noget særligt Supplement for de geometriske Størrelsers Vedkommende. Euklid peger i 7. Axiom med stor Sikkerhed hen paa det, som altid maa være det første Udgangspunkt for

enhver Undersøgelse af Størrelser i Geometrien. Kongruensen er det allerede ved den praktiske Udmaaling, som bestaar i efterhaanden at optælle en Række Dele af det, der skal maales, som ere kongruente med Maalet. Den er det fremdeles saavel i Euklids egen som i alle følgende Lærebygninger, som behandle geometriske Størrelser: man gaar ud fra, at visse Størrelser ere lige store, fordi de ere kongruente, og ulige store, fordi den ene selv er, eller er kongruent med, en Del af den anden. Det er denne Fremgangsmaade Euklid anvender i første Bog for at vise, hvorledes Ligestorhed og Uligestorhed af Sider eller Vinkler i samme eller forskjellige Trekanter medføre hinanden. Resultaterne heraf kombinerer han derpaa med de almindelige Størrelsesforudsætninger. Ja han stræber endog at anvende det særlig geometriske Kongruensprincip saa lidt som muligt. Saaledes benytter han i I, 26 ikke umiddelbart Kongruensen for at bevise, at Trekanter med en Side og de hosliggende Vinkler stykkevis lige store ogsaa have de andre Stykker lige, men slutter dette antithetisk fra de tidligere Kongruenstilfælde

For rette Liniers og for Vinklers Vedkommende falder Ligestorhed sammen med Kongruens. For brudte Liniers, Arealers og Rumfangs Vedkommende kan man derimod efter først at have paavist Ligestorhed ved Kongruens paavise Ligestorhed uden Kongruens ved Sammensætning ifølge de almindelige Størrelsesforudsætninger, saaledes som det f. Ex. sker i Beviset I, 35 for, at Parallelogrammer med samme Grundlinie og Højde ere lige store. Til Størrelsen af krumme Linier og de Arealer, de begrænse, samt af de fleste Rumfang, kan man kun komme ved Grænseovergange, som de gamle udførte ved Exhaustionsbeviset, og som tildels tillige kræve Opstilling af nye Forudsætninger. Dette ville vi faa at se ved Omtalen

dels af Euklids 12. Bog, dels af Archimedes' Arbejder.

Vi bør derimod strax omtale, at der er en meget væsentlig Mangel i den Brug, som Euklid i Stereometrien gjør af det i 7. Axiom opstillede Kongruensaxiom. Den hænger sammen med, at man i hans Stereometri savner enhver Skjelnen imellem Kongruens og Symmetri, men viser dog, at han ikke antager symmetriske Figurer for kongruente. I saa Fald vilde han nemlig i 7. Axiom have ment at have et tilstrækkeligt Grundlag for sine Volumenbestemmelser. I Stedet herfor opstiller han en ny Forudsætning, som kan passe baade paa kongruente og symmetriske Figurer. I 11. Bogs 10. Definition defineres ligestore og ligedannede Rumfigurer som saadanne, der indesluttes af lige mange ligestore og ligedannede (ɔ: kongruente) plane Figurer. Definitionen indeholder foruden en Navnebetegnelse tillige en geometrisk Forudsætning, altsaa et Axiom, nemlig at disse Figurer ogsaa skulle være lige i Rumfang[1]. Dette anvendes dels i Beviset i XI, 29 for, at Parallelepipider med samme Grundflade og Højde ere lige store, dels sluttes deraf i XI, 28, at de to tresidede Prismer, hvoraf et Parallelepipedum bestaar, ere lige store. Det vides, at de Prismer, som omlægges i det første af disse Beviser, ere kongruente, og at de tresidede Prismer i den sidste Sætning ved Omlægning af Dele kunne omdannes til at blive kongruente. Dette kan Euklid ikke have bemærket; thi da vilde Indførelsen af et nyt Princip for Ligestorhed for Legemers Vedkommende være overflødig og derfor stridende mod hans sædvanlige Fremgangsmaade.

---

[1] Cauchy har bevist, at saadanne Figurer virkelig altid ere kongruente eller symmetriske.

I den her paapegede Brug af 7. Axiom er dette blot blevet et Kjendetegn eller, om man vil, en Definition paa geometrisk Ligestorhed; men i alle Tilfælde gjemmer det i sig en virkelig geometrisk Forudsætning eller et Axiom af meget væsentlig Betydning. Dette gaar ud paa, at der overhovedet kan være Tale om kongruente Figurer, altsaa om Flytning af Figurer til andre Steder i Rummet. Ifølge Euklids Axiom bestemme de geometriske Størrelser alt det, som bliver uforandret under en saadan Flytning. Hvori selve Flytningen skal bestaa, karakteriseres dog slet ikke, ja den nævnes ikke engang i Axiomet, men Anvendelserne vise, at der tænkes paa den empiriske Flytning, som kjendes fra de fysiske, saakaldte uforanderlige Legemer.

Naar vi tidligere have berørt, at Axiom I, 7 er nødvendigt til fuldstændig at karakterisere en ret Linie, saa tænktes derved netop paa, at Euklid, f. Ex. i Beviserne for Kongruenssætninger, bestemt benytter den Forudsætning, at en ret Linie ikke forandres ved Flytning.

15. Anmærkning om Geometriens Forudsætninger.

Naar man kombinerer den sidstnævnte Egenskab ved den rette Linie med dem, der alt vare udtrykte i Postulaterne, derunder Entydigheden af Bestemmelsen ved to Punkter, bliver den rette Linie defineret som en saadan, der i hele sin Udstrækning falder sammen med en anden ret Linie, naar den flyttes saaledes, at to Punkter gjøre det. At denne Definition ikke er nogen Cirkeldefinition, uagtet den rette Linie bestemmes ved Sammenlægning med en anden ret Linie, ses derved, at ingen anden Linie har denne Egenskab. Derimod er Axiomet om Muligheden af en Flytning forudsat. Efter Definitionen faas en ret Linie som geometrisk Sted for de faste Punkter af et Legeme, som drejer sig, medens to Punkter ligge fast. Konstruktionen af rette Linier ved en Lineal, det er ved en bevægelig ret Linie, følger ligeledes af Definitionen.

Denne Definition findes nu vel ikke hos Euklid, men den er en Sammendragning af de Egenskaber, som han faktisk benytter, og som han efterhaanden opstiller i Postulater og Axiomer. Disse bestemme dernæst Planen som en Flade, der helt indeholder enhver ret Linie gjennem to af dens Punkter. Denne Bestemmelse indeholder imidlertid mere, end en god Definition bør, da deri Planen hverken defineres som geometrisk Sted for en enkelt uendelig Samling rette Linier eller for en dobbelt uendelig Samling Punkter. Man kan imidlertid dele Bestemmelsen i en Definition og et Axiom eller Postulat. Planen skal da først defineres som Stedet for de Linier, som forbinde et fast Punkt med en fast Linies Punkter, og der skal dernæst tilføjes som en ubevislig, men for den geometriske Lærebygning nødvendig Forudsætning, at denne Flade da har den nys nævnte almindelige Egenskab.

Man kommer ikke ud over denne Vanskelighed ved som i en moderne Geometri[1] at definere Planen som Stedet for Punkter, der have samme Afstand fra to faste Punkter. Det lykkes da vel i Stereometrien at bevise, at den saaledes definerede Plan virkelig indeholder enhver ret Linie, hvoraf den indeholder to Punkter; men det lykkes kun paa Grundlag af Plangeometrien, i hvilken man alt har gjort denne Forudsætning om den Plan, som indeholder alle de behandlede Figurer.

For Planens Vedkommende gjøres endnu en Forudsætning, som ikke kan udledes af dens her opstillede Definition, nemlig den, som indeholdes i det 5. Postulat, at — bortset fra et nøjere betegnet Tilfælde — to rette Linier i samme Plan skjære hinanden.

Som vi have omtalt, gjør Euklid, om han end ikke saa tydelig fremhæver det, endnu en geometrisk Forudsætning, der ogsaa vedkommer retliniede Figurer, nemlig den, at en i sig selv tilbageløbende (brækket eller krum) Linie i Planen indeslutter et Fladerum, og at den skjæres af enhver ret eller i sig selv tilbageløbende Linie, som forbinder et ydre og et indre Punkt, i mindst to Punkter. Lignende Forudsætninger knytte sig til de lukkede Flader; men de spille først en Rolle, naar man gaar videre end Euklid.

De geometriske Forudsætninger, som Euklid benytter, ere altsaa følgende: 1) Flytningsaxiomet, 2 og 3) de to anførte Forudsætninger om en Plan, 4) Forudsætningen om lukkede Konturer (og Overflader). Han gjør i det væsentligste Rede for dem i sine

[1] Jul. Petersens.

Definitioner, Postulater og Axiomer. Disse indeholde desuden Forklaringer af de brugte Benævnelser, og endelig de i Axiom 1—3 samt 8 indeholdte og klart udtalte Forudsætninger for den almindelige Størrelseslære. Disse indeholde ikke blot Ordforklaringer, men tillige den til Opførelsen af en virkelig Størrelseslære nødvendige Forudsætning om Størrelsers Uforanderlighed og Foranderlighed ved Deling fulgt af Sammensætning af alle eller nogle Dele.

Den tydelige Maade, hvorpaa de vigtigste geometriske Forudsætninger saaledes fremtræde hos Euklid, har gjort det i hans Elementer opstillede Grundlag for Geometrien til et godt Udgangspunkt for den nyere Tids Undersøgelser om de enkelte Forudsætningers Rækkevidde og om deres indbyrdes Uafhængighed. For saavidt de virkelig ere indbyrdes uafhængige, maa man nemlig kunne fastholde nogle og udlede Konsekvenser alene af dem, medens man giver Slip paa andre. Man faar derved en Almindeliggjørelse af Geometrien; thi de Sætninger, man da beviser, gjælde baade om det «Rum», der tillige tilfredsstiller de andre Forudsætninger, og om saadanne Rum, som ikke gjøre det. De kunne ogsaa i det ved Euklids Forudsætninger definerede Rum faa en saadan videregaaende Anvendelse, at f. Ex. rette Linier ombyttes med Kurver, der karakteriseres ved nogle af den sædvanlige rette Linies Egenskaber, saa de foruden denne ogsaa indbefatter andre Linier.

Den vigtigste af disse Almindeliggjørelser, den projektive Geometri, er dog ikke væsentlig opstaaet ved Spekulation over Axiomerne. Dens fleste Sætninger ere fremkomne ved Almindeliggjørelser, som have vist sig hensigtsmæssige indenfor selve den paa alle Euklids Forudsætninger byggede Geometri. I Virkeligheden sætter den sig dog ud over nogle af disse Forudsætninger, og den kan derfor ogsaa fra først af opføres uden dem. Hvad man i den projektive Geometri ser bort fra, er Flytningsaxiomet og den derpaa grundede Lære om geometriske Størrelser, hvorved man — i det mindste saalænge den projektive Geometri ikke selv danner sig et nyt Begreb om Flytning og derved et nyt Størrelsesbegreb — heller ikke faar Brug for det ved Euklids øvrige Axiomer fastslaaede almindelige Størrelsesbegreb. Tilbage blive de i Postulaterne indeholdte Forudsætninger, hvorved dog maa ses bort fra de Laan, som ogsaa deri ere gjorte fra Størrelseslæren. Derved falder dels tredie Postulat om Cirklens Bestemmelse helt bort, da Cirklen forud er defineret ved, at dens Radius skal have en uforandret Størrelse, dels falder Indskrænkningen i 5. Postulat

bort, saaledes at dette kommer til at lyde: to rette Linier i samme Plan skjære altid hinanden i et Punkt. Man undgaar at komme i ligefrem Strid med den Geometri, hvor alle de Euklidiske Forudsætninger benyttes, eller «den Euklidiske Geometri», ved at tillægge denne sidstes parallele Linier uendelig fjerne Skjæringspunkter. Ved overhovedet ikke at spørge om, hvorvidt Skjæringspunkter ere uendelig fjerne eller ikke, kommer den projektive Geometri til at indbefatte baade den euklidiske og den i det følgende omtalte ikke-euklidiske Geometri.

Den rette Linie faar i den projektive Geometri samme Egenskaber som i den Euklidiske Geometri paa den Flytning nær, hvorved en ret Linie bragtes til at falde sammen med en anden, og Planens Egenskaber knyttes paa samme Maade som hos Euklid til den rette Linies. De to Forudsætninger, som knyttede sig til Planens Bestemmelse, vedblive. Idet man nu kun har disse og ikke mere Flytningsaxiomet at bygge paa, forstaas det, at den projektive Geometri, naar den udvikles selvstændig, og man ikke betragter den Euklidiske Geometri som forud bekjendt, først faar noget virkeligt Indhold, naar man gaar uden for en enkelt Plan og derved kan komme til at bruge disse Forudsætninger. Hvad den Euklidske Forudsætning om lukkede Konturer angaar, viser det sig nemlig, at den ikke er saaledes uafhængig af de bortfaldne Forudsætninger, at den kan bibeholdes i den projektive Geometri; i denne faar man tvertimod to Slags lukkede Linier i Planen, af hvilke den ene skjærer en ret Linie i et lige Antal Punkter (eller i intet), den anden i et ulige Antal.

I Modsætning til den projektive Geometri er den saakaldte ikke-euklidiske Geometri netop fremkommen ved Spekulationer over de af Euklid opstillede Forudsætninger, særlig en enkelt af dem, nemlig den, som vi have truffet i det 5. Postulat. Disse Spekulationer forstaas maaske bedst, naar det bemærkes, at dette Postulat i de fleste Udgaver har fundet sin Plads blandt Axiomerne, hvor det ved Indskud af andre mindre ægte Axiomer har faaet Navnet «Euklids 11. Axiom». Medens et Punkts Bestemmelse som Skjæringspunkt mellem to rette Linier blandt Postulaterne var et naturligt Modstykke til den rette Linies Bestemmelse ved to Punkter, vakte den dertil knyttede Begrænsning særlig Opmærksomhed, naar man traf den samme Forudsætning blandt de til Læresætningerne svarende Axiomer. Det Axiom, at to rette Linier, hvis indvendige Vinkler paa samme Side af en overskjærende tredie danne en Sum mindre end 2 rette, skjære hinanden til

denne Side, blev da en Modsætning til den Læresætning, at Linierne ere parallele, naar Summen er lig 2 rette. Denne sidste Sætning beviser Euklid i I, 27 og 16 ved Hjælp af de øvrige Forudsætninger; kan da det 11. Axiom og den deraf afhængige vigtige Sætning om Vinkelsummen i en Trekant ikke ogsaa bevises?

Dette Spørgsmaal har i Tidernes Løb fremkaldt utallige Forsøg paa Beviser. Adskillige af disse kunne have haft en vis Berettigelse, for saa vidt de have sat saadanne andre Forudsætninger i Stedet for Euklids, hvis Rigtighed man vil være lige saa villig til paa Forhaand at indrømme som Euklids. Kun har man ikke altid, saaledes som Euklid, selv bemærket og tilstaaet, at man gjorde en Forudsætning. Vi skulle exempelvis nævne de Beviser for det her omtalte Euklidiske Axiom eller for de dermed forbundne Sætninger, at en ret Linie er entydig bestemt ved at gaa igjennem et Punkt og være parallel med en given Linie, eller at Summen af Vinklerne i en Trekant er lig to rette, som have fundet Vej til gode danske Lærebøger fra vor og den nærmest foregaaende Tid. Af disse skyldes de, som vi finde hos Ramus og hos Oppermann og Steen, den franske Mathematiker Legendre.

Mundt nøjes med at anskueliggjøre selve Axiomet og saaledes overtale Læserne til at antage det paa samme Maade, som de tidligere have antaget de øvrige geometriske Forudsætninger.

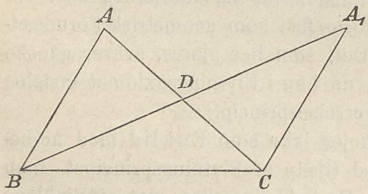
Ramus knytter den Sætning, at to Vinkler i en Trekant bestemme den tredie til en Trekants Bestemmelse ved en Side og to hosliggende Vinkler. Størrelsen af en enkelt Side kan nemlig kun bestemme Maalestokken for den tegnede Figur og altsaa ingen Indflydelse have paa Trekantens Form, altsaa heller ikke paa Vinklerne. De to givne bestemme altsaa den tredie. Man ser, at Beviset føres ved at slaa Forestillingen om Ligedannethed eller om en af Maalestokken uafhængig Form fast som geometrisk Forudsætning, hvorpaa man vil bygge. Det, som her gjøres, svarer ganske til, hvad Euklid selv har gjort, da han i Flytningsaxiomet fastslog Kongruensen som geometrisk Størrelsesprincip.

Oppermann og Steen nøjes ikke som Euklid med at bestemme en Vinkels Størrelse ved Hjælp af Flytningsprincipet, men de lade Vinklens Størrelse være Forholdet mellem det af Vinklens Ben indesluttede uendelige Areal og hele Planens Areal. Hvis man nu gjennem et Punkt kunde trække to Paralleler med en given ret Linie, vilde hele den af den sidste Linie afskaarne ene Halvplan, som netop er lig to rette, kun udgjøre en Del af en af de fire af de første to Linier dannede Vinkler, som ere mindre end

to rette. Det ses let, at den nye Forudsætning her ligger i Vinkeldefinitionen og gaar ud paa, at det i denne opstillede Forhold mellem to uendelige Størrelser har en bestemt Værdi.

Jul. Petersen beviser, at Summen af de udvendige Vinkler til en Polygon er lig 4 rette, ved successivt at lade en ret Linie dreje sig om Vinkelspidserne fra den ene af de hosliggende Sider til den anden. Naar den kommer tilbage til sin oprindelige Stilling, siges den ialt at have drejet sig samme Stykke, som om den ved at dreje sig om et fast Endepunkt var vendt tilbage til sin oprindelige Stilling. Ogsaa her er man ikke bleven staaende ved den i Euklids Flytningsprincip liggende Karakterisering af Vinklen som Størrelse. Den er derimod defineret som Del af en hel Omdrejning; men heri ligger den Forudsætning, at denne Del har en Størrelse af en saadan Natur, at det bliver ligegyldigt, om man foretager en hel Omdrejning om et enkelt Punkt eller deler denne Omdrejning i Omdrejninger om forskjellige Punkter. At her virkelig gjøres en Forudsætning, der ligesom Euklids eget Axiom særlig skal gjælde om Planen, ses ved at forsøge at ombytte denne med en Kugleflade, de rette Linier med Storcirkelbuer. Da ophører Forudsætningen nemlig at være rigtig.

At større Betydning med Hensyn til Euklids Axioms Forhold til hans egen Lærebygning er dog et Forsøg af Legendre, som virkelig holder sig til Euklids egne øvrige Forudsætninger. Paa Grundlag af disse kan han vel ikke bevise den almindelige Sætning om Vinkelsummen i en Trekant, men det lykkes ham dog at godtgjøre, at Vinkelsummen ikke er større end to rette. En af de Veje, ad hvilke han naar dette Resultat, slutter sig nøje til et af Euklids egne Beviser, nemlig det i I. 16. Euklid beviser her,



at Nabovinklen til en Vinkel C i en Trekant ABC er større end hver enkelt af Trekantens to andre Vinkler f. Ex. A. Det godtgjøres ved at forbinde Midtpunktet D af AC med B og afsætte $DA_1 = BD$. Trekanten A_1BC faar da samme Vinkelsum som ABC og indeholder en Vinkel $BCA_1 = A + C$ i den oprindelige Trekant, hvoraf følger, at $A + C < 2$ rette, eller at A er mindre end Nabovinklen til C. Det er den her anvendte Operation som Legendre gjentager, idet han hver Gang sørger for, at den Vinkel, som her er kaldt B, er den mindste Vinkel i den Trekant,

som videre omdannes. Den nye Trekant, hvortil han kommer, har da bestandig samme Vinkelsum, og den indeholder en Vinkel, B eller A, som er lig eller mindre end Halvdelen af den foregaaendes mindste Vinkel. Ifølge et Princip, som Euklid senere opstiller i Forbindelse med Exhaustionsbeviset, kan man ad denne Vej tilsidst komme til en Trekant, hvori en af Vinklerne er mindre end en vilkaarlig opgiven Grænse. Euklids egen Sætning viser, at Summen af de to andre Vinkler er mindre end to rette. Man kan da let, om man vil ved Exhaustionsbeviset, bevise, at Summen af alle tre Vinkler, der er bleven uforandret den samme som i den først givne Trekant $A\,B\,C$, ikke er større end to rette.

At man var kommen saavidt uden at benytte det 11. Axiom (5. Postulat), indeholdt en Opfordring til at gaa videre. Man maatte holde sig til, at Summen af Vinklerne i en Trekant kunde være lig eller mindre end to rette. Hvis det sidste var Tilfældet, kunde man bevise, at Vinkelsummen aftog, naar Trekantens Areal tiltog. Som Udgangspunkt for Undersøgelsen af, om rette Linier skar hinanden, havde man nu kun det, vi have kaldt Forudsætningen om lukkede Konturer, men man sattes dog i Stand til at bevise, at Skjæringen mellem en given ret Linie og en Linie gjennem et givet Punkt finder Sted, naar Linien falder i det ene Par Topvinkler mellem to bestemte rette Linier gjennem Punktet. Andre Sætninger i denne saakaldte ikke-euklidiske Geometri, som er udviklet af Lobatchefsky og Bolyai, stemme mere med dem i den sædvanlige euklidiske Geometri.

Endnu kunne vi nævne en Art Geometri, som af Euklids Forudsætninger udelukkende benytter den om lukkede Konturer og den tilsvarende rumlige Forudsætning. Man kalder den *analysis situs*.

Med de her antydede geometriske Undersøgelser af Geometriens Forudsætninger har man i vore Dage ogsaa forbundet erkjendelsestheoretiske Spørgsmaal om, hvorfra vi have dem. Ere Forudsætningerne fuldstændig vilkaarlige? eller ere de byggede paa medfødte Forestillinger? eller indeholde de Sandheder, som man har lært at kjende ved Erfaring? I sidste Tilfælde tør man ikke sige, at de i Forudsætningerne indeholdte Paastande ere absolut rigtige, men kun at Afvigelserne have været for smaa til at kunne iagttages. Paa saadanne Spørgsmaal giver Euklid, efter hvad vi alt have sagt, aldeles intet Svar. Det er ham nok at opstille Forudsætningerne og at bevise, at naar de ere gyldige, er alt,

hvad deraf udledes, det ogsaa. Det bliver da dens Sag, som vil bruge hans Resultater at være paa det rene med, hvorvidt han anerkjender Forudsætningerne.

16. Den almindelige Proportionslære; Euklids 5. og 6. Bog.

Vi have i det foregaaende haft forskjellige Lejligheder til at gjøre opmærksom paa de Steder i Euklids 4 første Bøger, hvor Behandlingen afviger fra den nu sædvanlige. Disse Afvigelser beroede, for saa vidt de ikke vare af en rent formel Natur, væsentlig derpaa, at Euklid i disse første Bøger maa nægte sig Brugen af Proportioner, og derfor fremsætter de paa den geometriske Algebra byggede Beviser. Som omtalt var Grunden hertil, at man forlængt havde set, at den ældre Proportionslære strengt taget kun var anvendelig paa kommensurable Størrelser. Herpaa havde Eudoxos raadet Bod ved en ny virkelig almindelig Proportionslære; men denne giver Euklid sig først til at udvikle i **5. Bog.** Ved denne Bog skulle vi dvæle udførligere for at lære den Proportionslære, der ikke blot blev et Hovedfundament for den følgende antike Mathematik, men indeholder Grundlaget for de kommende Tiders almindelige Størrelseslære, nøjere at kjende.

Vi ville bedst kunne fremdrage denne Bogs store saglige Betydning ved at se bort fra Euklids mange Benævnelser paa Proportioner dannede paa forskjellig Maade af andre, og gjengive disse Dannelser ved det moderne, algebraiske Tegnsprog. Vi skulle da ved Alfabetets første Bogstaver $a, b, c \ldots$ betegne almindelige Størrelser, hvilke Euklid fremstiller ved Længder, og ved $m, n, p \ldots$ hele Tal, hvilke Euklid paa Figurerne exempelvis giver passende, smaa Værdier. Det vil af

hans Bog ses, at ogsaa denne geometriske Fremstilling giver et ret godt Overblik. Af de talrige Definitioner faa vi da kun Brug for de følgende tre:

I Def. 4 siges, at to Størrelser danne et Forhold, naar Mangefold af hver enkelt af dem kunne bringes til at overgaa den anden. Hermed siges ikke blot, at Størrelserne skulle være af samme Art, saaledes at de overhovedet kunne sammenlignes. Dertil vilde det være nok at sige, at de skulle være saadanne, at den ene kan betragtes som større end den anden; men der udtales en videregaaende Fordring, som vil vise sig uundværlig saavel ved Proportionslærens Udstrækning til inkommensurable Størrelser som senere hen for de infinitesimale Undersøgelser, som hos Euklid og Archimedes findes udførte ved det ogsaa af Eudoxos opfundne Exhaustionsbevis.

I Def. 5 siges, at

$$a : b = c : d,$$

naar $m\,a \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} n\,b$ gjøre $m\,c \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} n\,d,$

og i 7, at

$$a : b > c : d,$$

naar der gives saadanne Værdier af m og n, at

$$m\,a > n\,b \text{ men } m\,c \leqq n\,d.$$

Ganske vist bruges i 5 ikke udtrykkelig Ordene lige store om de to Forhold; men da der senere i Sætningerne 11 og 13 bevises, at $a : b = c : d$ og $c : d \geqq e : f$ medføre, at $a : b \geqq e : f$, bliver Talen netop om Ligestorhed. Betydningen af disse Definitioner paa et Forholds Størrelse bliver klar, naar det bemærkes, at de i Realiteten ere identiske med den moderne Bestemmelse af et irratio-

nalt rent Tal ved rationale Tilnærmelsesværdier. For det første er nemlig et rent Tal en Størrelses Forhold til en Enhed af samme Art. Dernæst beror Euklids Sammenligninger netop paa Sammenligninger af Forholdene med rationale Tilnærmelsesværdier, $\frac{n}{m}$.

Vi skulle nu se, hvorledes Definitionerne lægges til Grund for en exakt Lære om Forhold og Proportioner.

I 1—3 og 5—6 forudskikkes følgende Hjælpesætninger:

$$m\,a \underline{+} m\,b = m\,(a \underline{+} b), \qquad (1 \text{ og } 5)$$
$$m\,a \underline{+} n\,a = (m \underline{+} n),\, a, \qquad (2 \text{ og } 6)$$
$$n\,.\,m\,a = n\,m\,.\,a. \qquad (3)$$

Vor Gjengivelse af de 3 sidste er dog for saa vidt noget fri, som der f. Ex. i 2 siges, at $m\,a + n\,a$ er det samme Multiplum af a som $m\,b + n\,b$ af b; men saavel Beviserne — ved Opløsning af de hele Tal i deres Enere — som Anvendelserne stemme med vor Angivelse af Betydningen.

Disse Hjælpesætninger og Definition 4 benyttes til at gjøre følgende Sætninger til simple Følger af Definitionerne 5 og 7:

Naar $a : b = c : d,$
er $m\,a : n\,b = m\,c : n\,d;$ (4)

naar $a \overline{\overline{>}} b$, er $a : c \overline{\overline{>}} b : c$, men $c : a \overline{\overline{<}} c : b;$ (7 og 8)

naar $a : b = c : d$
og $c : d = e : f,$
er $a : b = e : f,$ (11)

og af saadanne lige store Forhold kan dannes et nyt dermed lige stort, nemlig $(a + c + e) : (b + d + f)$; (12)

men naar $a : b = c : d$
og $c : d > e : f,$
er $a : b > e : f.$ (13)

Som Exempel paa Bevisførelsen skulle vi betragte 8, hvor der, idet $a > b$, kræves Bestemmelsen af saadanne to hele Tal m og n, at $m\,a > n\,c > m\,b$. Dette opnaas ved at ombytte Fordringen med følgende, som ifølge Definition 4 kunne opfyldes:

$$m\,b > c \text{ og } m\,(a - b) > c,$$
$$(n - 1)\,c \gtreqless m\,b < n\,c,$$

hvoraf følger $n\,c < m\,a.$

Sætningerne 9 og 10, som ere de omvendte af 7 og 8, bevises antithetisk. I 14 bevises ved Hjælp af de foregaaende Sætninger, at naar

$$a : b = c : d,$$

vil $a \gtreqless c$ give $b \gtreqless d$. I 15 bevises ved Hjælp af 12, at

$$m\,a : m\,b = a : b.$$

16—19 indeholde følgende Omdannelser af Proportionen

$$a : b = c : d.$$

Den giver
$$a : c = b : d, \quad (16)$$
$$(a - b) : b = (c - d) : d, \quad (17)$$
$$(a + b) : b = (c + d) : d, \quad (18)$$
$$a : b = (a - c) : (b - d). \quad (19)$$

16 og 17 bevises ved Hjælp af Definition 5. I 16 benyttes derved de to foregaaende Sætninger. I 17 udleder man af den givne Proportion, at for alle Værdier af m og n

$$m\,a \gtreqless (m + n)\,b \text{ giver } m\,c \gtreqless (m + n)\,d,$$

hvoraf følger, at

$$m\,(a - b) \gtreqless n\,b \text{ giver } m\,(c - d) \gtreqless n\,d.$$

18 og 19 udledes — den første antithetisk — af 16 og 17.

En Omdannelse er der dog, som man savner, nemlig den til

$$b : a = d : c.$$

Da denne udtrykkelig anvendes i Beviset for 20, har man villet søge den i et Tillæg til 7, hvilket dog er misligt, da der i 7 kun er Tale om det Tilfælde, hvor $b = d$. Derfor have nogle Udgivere henlagt Tillæget til 4. Sagen er ikke af stor Betydning, da Omdannelsen er en umiddelbar Følge af Definition 5.

Sætningerne 20—23 indeholde den vigtige Lære om sammensatte Forhold. 22 udsiger, at naar

$$a : b = d : e \text{ og } b : c = e : f$$

bliver

$$a : c = d : f.$$

Beviset er forberedt ved i (20) at bevise, at ifølge Forudsætningerne vil $a \gtreqless c$, som ifølge 8 giver $d : e = a : b \gtreqless c : b = f : e$, ifølge 9 og 10 medføre $d \gtreqless f$. Idet nu de givne Proportioner ifølge 4 kunne omdannes til

$$m\,a : n\,b = m\,d : n\,e$$

og

$$n\,b : p\,c = n\,e : p\,f,$$

maa ogsaa

$$m\,a \gtreqless p\,c \text{ medføre } m\,d \gtreqless p\,f.$$

Sætning 23, som udsiger, at naar

$$a : b = e : f \text{ og } b : c = d : e,$$

er

$$a : c = d : f,$$

bevises paa samme Maade og er paa samme Maade forberedt ved 21.

I disse Sætninger siges Forholdet $a : c$ at være sammensat af Forholdene $a : b$ og $b : c$. Opfatte vi det antike Forhold som et moderne Tal, ses det, at det af to Forhold sammensatte Forhold er det samme, som man nu kalder deres Produkt. Skjønt der er tillagt de Forhold, som sammensættes, bestemte Former, idet det enes Efterled skal være det andets Forled, vil dette ikke gjøre nogen Indskrænkning i Sammensætning af Forhold. Det vil nemlig af den geometriske Fremstilling i 6. Bog 12 ses, at ethvert Forhold kan omdannes saaledes, at et af dets to Led faar en opgiven Værdi. Af 6. Bog 23, hvor det bevises, at Forholdet mellem 2 Parallelogrammer med samme Vinkel er sammensat af Sidernes Forhold, vil det ogsaa ses, at man netop giver disse sidste Formerne $a : b$ og $b : c$ for at sammensætte dem.

Naar dette allerede her tages med i Betragtning, ville 22 og 23 indeholde fuldstændige Beviser for de Paastande, som man nu vilde udtrykke saaledes: Et Produkt er bestemt ved sine Faktorer, og Faktorernes Orden er ligegyldig.

De gamle havde altsaa to forskjellige Fremstillinger af det, som man nu uafhængig af, om Faktorerne ere rationale eller irrationale, kalder deres Produkt, nemlig nærværende og den i den geometriske Algebra benyttede ved Rektangler. At det virkelig er væsentlig det samme, som fremstilles paa de to Maader, ses af den nys anførte 23. Sætning af 6. Bog. Fremstillingen ved sammensatte Forhold forbinder en væsentlig Fordel med sin

større Omstændelighed. Medens den geometriske Algebra sædvanlig kun behandler Produkter af to Faktorer, fremstillede som Rektangler, og man maa gaa ud i Rummet for at faa Produkter af tre Faktorer fremstillede som Parallelepipeder, kan man fremstille et Produkt af et hvilket som helst Antal Faktorer som et af disse sammensat Forhold. Omskrives Faktorerne til Formerne

$$a : b,\ b : c,\ c : d,\ d : e,$$

bliver det deraf sammensatte Forhold $a : e$. Dette udtales udtrykkelig i Sætning 22.

Et Exempel paa den almindelige Brug, som Grækerne gjorde af sammensatte Forhold have vi allerede haft i Omdannelsen af den Opgave at fordoble Terningen til Bestemmelsen af to Mellemproportionaler. De gamles sammenhængende Proportioner

$$a : x = x : y = y : b$$

udtrykke da ganske det samme, som man nu vilde udtrykke ved

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{x}\right)^3 \text{ eller } \frac{b}{a} = \left(\frac{x}{a}\right)^3.$$

Paa samme Maade udtrykkes ogsaa højere Potenser som Forhold mellem første og sidste Led i en sammenhængende Proportion, ɔ: i en saadan, hvis Led danne en Kvotientrække.

At man ogsaa paa Euklids Tid var videre i den Henseende, end det umiddelbart kan ses af hans femte Bog, se vi af Sætning 35 i 9. Bog, som giver Bestemmelsen af Summen af Leddene i en Kvotientrække. I vort Sprog vil den deri indeholdte Undersøgelse udtrykkes saaledes: Naar

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d},$$

er $$\frac{b-a}{a} = \frac{c-b}{b} = \frac{d-c}{c} = \frac{d-a}{a+b+c}.$$

Sætningen udtales imidlertid ikke blot om Summen af tre paa hinanden følgende Led, hvilken Euklid har anset det for tilstrækkeligt at betragte i Beviset. Da dette alene er bygget paa Sætninger i 5. Bog, er det almengyldigt, selv om Euklid i Øjeblikket kun medtager det, fordi han i den efterfølgende taltheoretiske Sætning har Brug for, at

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Vi maa lægge saa meget større Vægt paa denne Fremstilling af Produkter og Potenser, som den langt ind i den nyere Tid er vedbleven at danne Grundlaget for saadanne algebraiske Undersøgelser, som gjorde Krav paa Almengyldighed og ikke indskrænkedes til rationale Tal.

Sætning V, 24, som udsiger, at naar

$$a : c = d : f$$

og $$b : c = e : f,$$

er $$(a + b) : c = (d + e) : f,$$

er nærmest af samme Natur som de, der gaa forud for Sætningerne om sammensatte Forhold, men kan først finde sin Plads her, fordi Sætning 22 benyttes til af de givne Proportioner efter Omvending af Forholdene i den anden at udlede, at

$$a : b = d : e,$$

hvorefter 18 giver

$$(a + b) : b = (d + e) : e,$$

og en ny Sammensætning af Forhold (22) fører til den Proportion, som skal bevises. Den første Anvendelse af (22) bliver interessant derved, at den viser, at Divi-

sion af Forhold ikke kræver nogen ny og særlig Sætning.

Sætning 25 udsiger, at naar fire Størrelser ere proportionale, er Summen af den største og den mindste større end Summen af de to andre. Den bevises let ved 19. Et specielt Tilfælde, som dog ikke nævnes her, er, at Middelstørrelsen mellem to Størrelser er større end deres Mellemproportional. Dette bevises i 6. Bog 27 ved geometrisk Algebra og giver Diorismen til Ligninger af 2. Grad.

Den i 5. Bog givne Proportionslære er ganske vist, trods den geometriske Anskueliggjørelse, fuldstændig almindelig og anvendelig paa enhver Slags Størrelser; men den behøver et Supplement, som efter de gamles Vis maatte blive geometrisk. Existensen af Forhold fremgaar af Definitionerne, saa snart man blot har Størrrelser, der ifølge 4. Definition kunne danne Forhold. Der kræves imidlertid som nys berørt et Bevis for Existensen af en saadan Størrelse, som i Forbindelse med en given danner et Forhold af given Værdi, og en saadan Existens bevises ved geometrisk Konstruktion af fjerde Proportional.

Dette geometriske Supplement til Proportionslæren findes i **6. Bog,** som tillige indeholder denne Læres vigtigste Anvendelser paa Geometrien, særlig paa ligedannede Figurer, samt dens Kombination med den geometriske Algebra. Det vigtige Maal, som naas ved denne Kombination, er den geometriske Fremstilling og Løsning af Ligninger af 2. Grad med Koefficient til x^2. Hvis denne Koefficient a var rational, forstode de gamle, som vi alt have omtalt, nok at omdanne den til en Ligning i ax uden Koefficient til Leddet af 2. Grad. Naar Koefficienten derimod er irrational og selv skal fremstilles

ved en Linie, strækker den sædvanlige geometriske Algebra med to Dimensioner ikke til.

I Sætning 1, hvor det bevises, at Trekanter og Parallelogrammer med samme Højde forholde sig som Grundlinierne, kommer den Euklidiske almindelige Definition paa Forholds Ligestorhed til god Nytte. Idet lige store Grundlinier give lige store Arealer, giver umiddelbar Anvendelse af denne Definition den almindelige Sætning, og der bliver ikke Brug for de moderne Lærebøgers Udvidelse hertil fra det Tilfælde, hvor de ensartede Størrelser ere kommensurable.

Efter denne Sætning følger i 2 og 3 Sætningerne om Paralleltransversaler i Trekanter og om en Trekantsides Deling ved Halveringslinien af den modstaaende Vinkel. Derefter følge i 4—7 Hovedsætningerne om ligedannede Trekanter; de bevises ved Konstruktion af en Trekant, som bliver kongruent med den ene og ligedannet med den anden af de givne. De anvendes strax (i 8) paa en retvinklet Trekant og de to, hvori den deles ved Højden paa Hypotenusen.

9—13 indeholde Deling af en ret Linie i lige store eller proportionale Dele, samt Konstruktion af tredie Proportional (ɔ: fjerde Proportional til a, b og b), af fjerde Proportional og Mellemproportional. Den sidste Konstruktion er den samme, som allerede i II, 14 paa Grundlag af den geometriske Algebra er anvendt til Bestemmelse af Siden i et Kvadrat ligt et givet Rektangel.

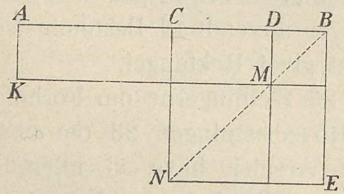
Dernæst komme i 14—23 Sætningerne om Forhold mellem Figurers Arealer. Hovedsætningen 23 om ensvinklede Parallelogrammers Arealer have vi allerede omtalt. I Beviset (i 19) for, at ligedannede Trekanters Forhold er — som vi sige — Kvadratet af et Par ensliggende Siders, bringes dette sidste Forhold $a : b$ til Brug ved Sammensætningen med sig selv paa Formen

$b : c$, saa det kvadratiske Forhold bliver $a : c$. Sætningsgruppen indeholder ogsaa (i 16) den Sætning, at i en Proportion er Yderleddenes Rektangel lig Mellemleddenes.

I Bogens Slutning behandles dernæst i 28 og 29 de ved Proportionslærens Hjælp almindeliggjorte Fladeanlæg. En af Proportionslæren uafhængig Almindeliggjørelse bestaar i, at Rektanglerne ere ombyttede med Parallelogrammer med en vilkaarlig given Vinkel; men da denne sidste Almindeliggjørelse ingen Rolle spiller med Hensyn til Opgavernes geometrisk-algebraiske Betydning, skulle vi se bort fra den og her kun tale om Rektangler. De Opgaver, hvorom Talen er, blive da til følgende:

Langs en given Linie (a) at lægge et givet Areal (B) som et saadant Rektangel (med Højde x), at det manglende (28) eller overskydende (29) Rektangel bliver ligedannet med et givet (med Siderne c og d).

Opløsningerne blive de samme, som vi have udledet af II, 5 og 6 for de Tilfælde, hvor de manglende eller overskydende Figurer skulde være Kvadrater, paa det nær, at de tidligere Kvadrater nu ombyttes med Rektangler ligedannede med de givne. Ligedannetheden træder tilmed tydelig frem derved, at de ligedannede Rektangler have en Diogonal paa en og samme rette Linie. De udvidede algebraiske Anvendelser, som nu kunne opnaas, ses af følgende algebraiske Omskrivning af Opgaverne og de Omlægninger af Figurer, hvorved de løses, nemlig:



$$B = a\,x \mp \frac{c}{d}\,x^2 = \mp \frac{d}{c}\left(\frac{a}{2} \mp \frac{c}{d}\,x\right)^2 \pm \frac{d}{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

hvor vi ved den moderne Brug af Fortegn blot have villet undgaa dobbelt Udtalelse. For at finde x gjælder det om at konstruere Rektanglet $\frac{d}{c}\left(\frac{a}{2} \mp \frac{c}{d}x\right)^2$, der skal være ligedannet med det givne og lige stort med Differensen eller Summen af de bekjendte Arealer $\frac{d}{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2$ og B. Hertil tjener, idet B forudsættes at være en given retliniet Figur, Opgave 25, som er den allerede ved Pythagoræerne omtalte: at konstruere en Figur lige stor med en og ligedannet med en anden given retliniet Figur.

Opgave 28 kræver som Diorisme, at $B \leqq \frac{d}{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2$, eller at det givne Areal B ikke er større end et Rektangel paa den halve givne Linie a ligedannet med det givne Rektangel $c\,d$. Denne Diorisme er paa sædvanlig Maade vedføjet Opgaven, men dens Nødvendighed bevist i den foregaaende Sætning 27 ved den samme Omlægning, som bruges i 28. Den vil som tidligere bemærket (i vort 11. Afsnit) umiddelbart være fremgaaet af den til den synthetiske Fremstilling i 28 svarende Analyse. Naar Rektanglet $c\,d$ ombyttes med et Kvadrat, udsiger den, at et Kvadrat er større end et andet Rektangel med samme Sidesum (et Resultat, der som alt bemærket ogsaa følger af V, 25).

I 30 højdeles en ret Linie. Konstruktionen er alt angiven en Gang i II, 11 og støttedes da paa II, 6. Nu støttes den samme Konstruktion paa VI, 29, der er en Almindeliggjørelse af II, 6. Grunden til Gjentagelsen er som ved Mellemproportionalkonstruktionen, at selve Opgaven nu ved Proportionslæren udtrykkes anderledes end tidligere (Deling i yderste og mellemste Forhold).

Sætning 31 indeholder Udvidelsen af den pythagoræiske Læresætning til hvilke som helst ligedannede

Figurer paa Siderne i en retvinklet Trekant. Ved denne Sætning, som siges at skyldes Euklid personlig, kan Suktraktionen eller Additionen af Figurer i Fladeanlæggene i 28 og 29, naar B er given som, eller omdannet til at være, ligedannet med Rektanglet $c\,d$, udføres ved Hjælp af en retvinklet Trekant.

I Bogens sidste Sætning, 33, bevises, at Cirkelbuer og de derpaa staaende Centervinkler og Periferivinkler ere proportionale.

Som det vil ses, indeholde 5. og 6. Bog det nødvendige Grundlag for en exakt og fuldstændig almindelig Behandling af saadanne Opgaver, der i vor Algebra afhænge af Ligninger af første og anden Grad, ved Proportionslæren og denne forbunden med geometrisk Algebra. At man nu virkelig har benyttet dette Grundlag, ses af de foreliggende videregaaende Arbejder, saaledes af den geometrisk-algebraiske Behandling af Keglesnitslæren hos Apollonios og af en stor Mængde af de Undersøgelser, som Pappos har opbevaret os. At man endog udtrykkelig rustede sig til saadant algebraisk Arbejde, ses af adskillige Sætninger i Euklids Data, der nævne en Mængde Opgaver — af den anførte Art og i de anførte Former — hvis Løsning det under det fortsatte analytiske Arbejde er nyttigt at betragte som saaledes bekjendt, at det vil være nok at føre de nye Opgaver tilbage dertil.

Hvad vi vilde skrive som en Ligning af første Grad med almindelige Koefficienter, bliver i Data for Almengyldighedens Skyld udtrykt som en Proportion. For blot at nævne et Exempel blandt mange, udsiger Sætning 15 i Data: Naar man lægger givne Størrelser til hver af to Størrelser, som staa i et givet Forhold, staa enten Summerne selv i det givne Forhold, eller den enes Overskud over en given Størrelse staar i det givne Forhold

til den anden. Dette siger saa meget som, at x er bestemt ved Proportionen

$$(a + m - x) : (b + n) = a : b.$$

Det første Alternativ, som nævnes, udtrykker, at x kan blive 0, nemlig naar

$$m : n = a : b.$$

x negativ undgaas ved at ombytte Ligningen med

$$(a + m) : (b + n - x) = a : b.$$

Vi have allerede tidligere anført, at Data indeholder Opgaver, som umiddelbart vilde føres tilbage til Fladeanlæggene. Som Exempler paa Sætninger i Data, der røbe Kjendskab til Opgaver, som mere indirekte afhænge af Ligninger af anden Grad, skal nævnes 85 og 87: Naar to Linier under en given Vinkel indeslutte et Parallelogram af given Størrelse, og Summen eller Differensen af Kvadraterne paa disse Linier er given, ere Linierne det ogsaa. Man kjendte med andre Ord (under geometrisk Form) Løsningerne af Ligningerne

$$x y = a,\ x^2 \pm y^2 = b.$$

17. Kommensurable Størrelser og deres Behandling ved Tal; Euklids 7.—9. Bog.

I 7. Bog indføres der en Enhed, hvorved de Størrelser, som den maaler, blive udtrykte ved hele Tal. I denne og de følgende to Bøger behandles dernæst hele Tal og deres Forhold og andre Forbindelser. I 7. Bog møde vi for hele Tals Vedkommende Sætninger om Proportioner, som i 5. Bog ere godtgjorte paa en almengyldig Maade. Til Forklaring heraf tjener den Omstændighed, at 5. Bogs almengyldige Proportionslære var

temmelig ny og derfor endnu ikke tilstrækkelig udviklet til at lægges til Grund paa alle de Omraader, som den i Virkeligheden omfatter. Derved er 7. Bogs Proportionslære ladt os tilbage som en Prøve paa den ældre Behandlingsmaade, ved hvilken der endnu ikke toges Hensyn til Muligheden af, at Forholdenes Led kunde være inkommensurable.

At Læren om Forhold mellem hele Tal ikke simpelt hen kunde udelades som indbefattet i den alt udviklede almindeligere Lære, beror paa, at der ved de hele Tal ogsaa var andre Hensyn at tage, navnlig til Spørgsmaal om Delelighed og til Reduktion af Talforhold til de mindst mulige Tal. Dette viser sig strax derved, at der for Tals Vedkommende gives en ny Definition paa Proportionalitet, nemlig Nr. 20. Efter denne er $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, naar enten a og c ere samme Mangefold eller den samme Del eller de samme Dele af b og d, det er: naar samtidig $a = m \cdot \frac{b}{n}$ og $c = m \cdot \frac{d}{n}$. Hvad selve Ligestorheden af Forholdene angaar, indeholder denne Definition vel ikke andet, end hvad der indbefattes i den 5. Definition i 5. Bog; men det vil dog snart ses, at der ved Maaden, hvorpaa den bruges, indbringes en ikke uvigtig Forudsætning.

I Sætningerne 1—3 fremsættes og bevises de bekjendte Regler for Bestemmelsen af største fælles Maal. Det bevises direkte, at man faar et fælles Maal, og antithetisk, at man faar det største. I 4 vises, at naar a og b ere hele Tal, f deres største fælles Maal, kan man altid skrive $a = mf$, $b = nf$ og derved $a = m \cdot \frac{b}{n}$. Er $a < b$, bliver $m \geqq 1$, $n > 1$. Ved denne Bestemmelse blive m og n indbyrdes primiske. Naar nu denne

lægges til Grund for Prøvelsen af, om ifølge Def. 20 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, indkommer tillige den Forudsætning, at, naar det er Tilfældet, skal i $c = m \cdot \frac{d}{n}$ den sidste Faktor $\frac{d}{n}$ være et helt Tal, altsaa at, naar n gaar op i et Produkt $m \cdot d$, og er indbyrdes primisk med den ene Faktor m, maa den gaa op i den anden d. Denne Fundamentalsætning for Taltheorien er altsaa allerede lagt ind i Forudsætningerne, og det faar følgelig ikke stor theoretisk Betydning, at Euklid senere paa Grundlag af disse beviser flere deri indbefattede Sætninger, saaledes i 30, at et Primtal, som gaar op i et Produkt, maa gaa op i en af Faktorerne. De omtalte Forudsætninger ere navnlig benyttede i Sætning 20, som gaar ud paa, at, naar $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, og c og d ere saa smaa som muligt, gaar c op i a, d i b, og denne Sætning danner et vigtigt Led i den Bevisførelse, hvorigjennem man naar til 30.

Som bekjendt benytter man i et virkeligt Bevis for den nævnte Fundamentalsætning den Omstændighed, at naar a og b ere indbyrdes primiske, er k største fælles Faktor for ka og kb, en Sætning, som følger af Reglerne for Bestemmelsen af største fælles Faktor, men som Euklid ikke medtager. Hvad man savner hos Euklid, er et Bevis for, at den i 4 beskrevne Omdannelse af a til $m \cdot \frac{b}{n}$ er den eneste, for hvilken m og n ere indbyrdes primiske.

Det ses vel heraf, at Euklid ikke lægger Grunden for Læren om hele Tal saa dybt som den for Geometrien og for Læren om almindelige kontinuerte Størrelser; men den Omhu, hvormed iøvrigt den talrige Række af væsentlig theoretiske Sætninger ere fremsatte og begrundede, vidner dog dels om et rigtigt Blik for, at ogsaa Arithmetiken behøver en exakt Behandling, dels om nogen Brug af de Operationer, med hvis Theori

man beskjæftiger sig saa meget. De 3 arithmetiske Bøger have dog ikke faaet en saa stor og grundlæggende Betydning for Mathematiken indtil vore Dage som de foregaaende og Dele af de efterfølgende. Derfor skulle vi her nøjes med ganske faa Bemærkninger om det videre Indhold.

Læren om Forhold i 7. Bog bliver nærmest en Fremstilling af de vigtigste almindelige Sætninger, som bruges ved Regning med Brøk. (Derfor have vi ogsaa i Modsætning til 5. Bog skrevet Forholdene som Brøker).

De sammenhængende Proportioner, som behandles i 8. og 9. Bog, ere, som vi alt have omtalt, den antike Form for Kvotientrækker, her med hele Led. Forholdene mellem Led i en saadan med forskjellige Numre er den antike Form for de forskjellige Potenser af hele Tal og Brøker. Enkelte Sætninger om Rod kunne fremkomme ved Indskydning af Mellemproportionaler.

Den betydeligste taltheoretiske Sætning, som naas, er Slutningssætningen 36 i 9. Bog. Den udsiger, at

$$(1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n) \cdot 2^n,$$

naar den første Faktor er et Primtal, bliver et «fuldkomment» Tal, ɔ: et saadant, som er Summen af alle dets Faktorer. Rigtigheden godtgjøres let, idet — som alt omtalt i en tidligere Henvisning — den dertil nødvendige Summation af Kvotientrækker er fremsat i 35.

18. Inkommensurable Størrelser; Euklids 10. Bog.

Naar vi heller ikke skulle gaa meget i det enkelte i Redegjørelsen for 10. Bog, den omfangsrigeste af Bøgerne i Elementerne, er det ikke, fordi det deri nedlagte Arbejde, som er paabegyndt af Theaitetos og fuldført af Euklid, skulde være for lidet betydeligt til at

fortjene vor fulde Opmærksomhed. Tvertimod hidrører den Vanskelighed, som man trods den omhyggelig gjennemførte Bearbejdelse nu finder ved at overskue Indholdet, fra, at det er en vanskelig Opgave uden noget Tegnsprog at skjelne imellem de i denne Bog klassificerede irrationale Størrelser. At den dog, skjønt man lang Tid efter kan finde de derfra hentede Klassifikationer anvendte, ikke har kunnet faa en saa varig historisk Betydning som meget andet hos Euklid, hidrører fra, at Tegnsproget allerede paa tidlige Trin af dets Udvikling, gav langt simplere Overblik over de forskjellige Arter irrationale Størrelser. Vi skulle ogsaa her nøjes med ved Hjælp af Tegnsproget at gjøre Rede for, hvilke de Størrelser, som klassificeres, ere, uden at bekymre os om de Benævnelser, hvorved dette opnaas. For disses Vedkommende skal jeg kun for at forebygge direkte Misforstaaelser hos Læsere af Euklid gjøre opmærksom paa, at naar han taler om «rationale» Størrelser menes dermed ikke blot saadanne, som ere kommensurable med Enheden, men ogsaa saadanne, hvis Kvadrater ere det, og som altsaa «blot i Potens ere kommensurable» med Enheden. Ordet Enhed bruges dog ikke her saaledes som i de taltheoretiske Bøger; men en vilkaarlig valgt Størrelse, som siges at være rational, spiller i denne Sammenhæng samme Rolle som en Enhed.

Kommensurabilitet eller Inkommensurabilitet sikres, som berørt tidligere, ved direkte Forsøg paa at bestemme største fælles Maal. Inkommensurabiliteten kjendes paa, at denne Operation lader sig fortsætte i det uendelige idet de successive Rester aftage i det uendelige eller under enhver opgiven Grænse. Denne Aftagen i det uendelige tages med samme videnskabelige Strenghed som hos de gamle enhver uendelig Tilnærmelse. Dette

sker ogsaa her ved Hjælp af 4. Definition i 5. Bog, som i Sætning 1 omformes til, at man ved fra en given Størrelse at subtrahere mere end Halvdelen, ligeledes fra den ny, ved Fortsættelse kan naa til en Størrelse, som ligger under enhver opgiven Grænse. Med denne Sætning som Udgangspunkt foretages først nogle almindelige Undersøgelser af irrationale Størelser uden Hensyn til, hvorledes de ere fremkomne, og af deraf dannede nye irrationale Størrelser. Dernæst komme særlige Undersøgelser vedrørende Kvadratrødder, derunder ogsaa de tidligere berørte Undersøgelser af Tilfælde, hvori disse vise sig at være rationale, navnlig af rationale retvinklede Trekanter. De Former for irrationale Størrelser, som videre opstilles, ere Fjerderødder af rationale Størrelser og Udtryk af Formerne $p \pm \sqrt{p^2 - q}$, $\sqrt{p^2 + q} \pm p$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ samt disse Udtryks Kvadratrødder eller rettere, som vi skulle se et Exempel paa, visse Omdannelser af disse Kvadratrødder til Summer eller Differenser.

Det Arbejde, som her er gjort foruden Opstillingen af de formelle Definitioner ved Angivelse af Ligninger (tildels fremstillede ved Udtryk for $x^2 + y^2$ og xy), som føre til Størrelsernes Led, bestaar væsentlig i Beviser for, at de dannede Størrelser ere irrationale og i Almindelighed forskjellige indbyrdes. Dette sidste maa forbindes med en udtrykkelig Fremhæven af de særegne Tilfælde, hvor et Udtryk af en af Formerne kan reduceres til en simplere Form eller til at være sammensat af Udtryk af simplere Former. Herunder kommer den bekjendte Omdannelse af de dobbelt irrationale Udtryk $\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q^2}}$ til enkelt irrational Form. Denne foretages i 54 og 91 henholdsvis for + og —. Den samme Ændring anvendes derefter i 57 og 94 til at

omdanne $\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q}}$, hvor q ikke er noget Kvadrat, til

$$\sqrt{\frac{p + \sqrt{q}}{2}} \pm \sqrt{\frac{p - \sqrt{q}}{2}}.$$

Det er til denne Form, at de Ligninger, som i 39 og 76 tjene til at fremstille den saakaldte «større» og «mindre» irrationale Størrelse, føre. De Operationer, hvorved disse og lignende Omdannelser foretages, fremstilles vel i den geometriske Algebras Form, men ere saglig de samme, som man nu vilde udtrykke i det algebraiske Tegnsprog og anvende til at løse de paagjældende Ligninger.

19. Stereometriens Elementer; regulære Polyedre; Euklids 11. og 13. Bog.

Idet Euklid saaledes i 10. Bog faar Lejlighed til at vise en ret vidtgaaende algebraisk Færdighed i Behandling af Opgaver, som behandles ved gjentagen Løsning af Ligninger af anden Grad, tilvejebringer han særlig Midlerne til at benævne de Størrelser, hvortil Bestemmelserne af Sider i regulære Polygoner og Polyedre føre ham. Førend han i 13. Bog kan komme hertil, maa han først i **11. Bog** fremsætte Stereometriens første Elementer.

I de første Sætninger, som handle om Stillingen af rette Linier og Planer mod hverandre, vil man strax træffe de samme Sætninger og Beviser, som findes i moderne Lærebøger. Ved Siden af Sætninger maa Euklid her som i Plangeometrien medtage Konstruktioner, idet ved disse de fornødne Existensbeviser føres. Idet Konstruk-

tioner ved Planer ikke ere saaledes forberedte som Konstruktioner ved rette Linier ere det i første Bogs Fordringssætninger, føres Konstruktionerne saavidt muligt tilbage til de plangeometriske. En Linie vinkelret paa en Plan fra et Punkt A udenfor samme faas saaledes i 11 ved først at nedfælde en Linie vinkelret paa en vilkaarlig ret Linie i Planen, dernæst paa den Linie i Planen, som i Fodpunktet staar vinkelret paa den første. I 12 faas den vinkelrette gjennem et Punkt af selve Planen ved først fra et Punkt udenfor samme at nedfælde en vinkelret og dernæst drage en Parallel med denne.

Særlig medtages saadanne Sætninger, som senere kunne finde Anvendelse ved Undersøgelser og Konstruktioner af Parallelepipeder og Polyedre, saaledes i 20 og 21 de bekjendte Sætninger om Siderne i et tresidet eller et vilkaarligt konvext Hjørne. I 22 forberedes dernæst og i 23 udføres Konstruktionen af et tresidet Hjørne med givne Sider. Det sker ved paa disse Vinklers Ben at afskjære lige store Stykker, konstruere en Trekant af deres modstaaende Sider i de derved dannede ligebenede Trekanter og omskrive denne Trekant med en Cirkel, hvis Centrum da er Projektion af det søgte Hjørnes Toppunkt. Konstruktionens Mulighed, naar Siderne tilfredsstille de i 20 og 21 opstillede Betingelser, eftervises omhyggelig, hvorved disse Betingelsers Tilstrækkelighed bevises.

Bogen handler iøvrigt væsentlig om Parallelepipeder og om Forholdene mellem disses Størrelser og slutter med Bestemmelsen af et tresidet Prismes Rumfang. Beviserne for Rumfangsbestemmelserne lide iøvrigt under den Mangel i de geometriske Forudsætninger om stereometriske Størrelser, som vi tidligere have omtalt.

I 12. Bog forekommer blandt andet Bestemmelsen af Pyramidens Rumfang, for hvilken vi bagefter nærmere skulle gjøre Rede i Forbindelse med de andre Bestemmelser, som i 12. Bog udføres ved Exhaustionsbeviset. Den øvrige Fortsættelse af Stereometrien kommer i **13. Bog,** som indeholder Bestemmelsen af de 5 regulære Polyedre og Bestemmelsen af Størrelserne af deres Kanter, naar den omskrevne Kugles Diameter er given. Hertil behøves først nogle geometrisk-algebraiske Hjælpesætninger samt en fuldstændigere Bestemmelse af regulære Polygonsider end den, Polygonernes Konstruktion i 4. Bog umiddelbart giver.

De første Sætninger kunne i den nuværende Algebras Tegnsprog udtrykkes saaledes: Naar x og y ere Stykkerne af den højdelte Linie a, og $x > y$, er

1. $x + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ (2. omvendt Sætning.)
3. $y + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{5}$
4. $a^2 + y^2 = 3x^2$
5. $a^2 = x(a + x)$.

Heraf sluttes i 6, at x og y henhøre til den Slags irrationale Størrelser, som i 10. Bog have faaet Navnet «Apotomer».

Derefter følge nogle Sætninger om Siderne i regulære Femkanter, Sexkanter og Tikanter. Blandt disse kan mærkes et elegant geometrisk Bevis i 10 for, at den første er Hypotenuse i en retvinklet Trekant med de to andre til Katheter. I 11 foretages dernæst paa Grundlag af geometriske Betragtninger en Beregning af Femkantsiden, naar den omskrevne Cirkels Diameter d er given. Euklids egen Bestemmelse fører ligefrem til, at Siden maa beregnes paa den Maade, som vi an-

give ved Udtrykket $\frac{d}{2}\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, men idet Euklid savner Midler til at opstille et saadant Udtryk, nøjes han med at opstille den Sætning, at Femkantsiden, naar d er rational, bliver irrational af den Form, som han i 10. Bog har kaldt «mindre Irrational», og at forme sin virkelige Bestemmelse som et Bevis for denne Paastand. At Beviset bliver saa vidtløftigt, beror paa, at det udtrykkelig maa eftervises, at den dobbelte Irrationalitet ikke kan hæves, i hvilket Tilfælde den irrationale Størrelse vilde høre til en anden Klasse.

I 12 bestemmes Trekantsiden, og i 13 konstrueres et regulært Tetraeder og vises, at Kanten k er $d\sqrt{\frac{2}{3}}$, naar d er den omskrevne Kugles Diameter.

I 14 konstrueres et regulært Oktaeder og vises, at $k = d\sqrt{\frac{1}{2}}$.

I 15 konstrueres et regulært Hexaeder, og vises, at $k = d\sqrt{\frac{1}{3}}$.

I 16 konstrueres et regulært Ikosaeder og vises ved Angivelse af den virkelige Beregning, at Kanten er en «mindre Irrational».

I 17 konstrueres et regulært Dodekaeder og bevises ved Angivelse af den virkelige Beregning, at Kanten henhører under de irrationale Størrelser, som kaldes Apotomer.

18 viser paa en og samme Figur Konstruktioner af de forskjellige Kanter. Denne Figur benyttes til at sammenligne dem indbyrdes.

Konstruktionerne vise, at de 5 regulære Polyedre virkelig existere. I Bogens Slutning tilføjes Beviset for, at de ere de eneste mulige.

De fleste Udgaver af Euklid indeholde endnu en saakaldet 14. Bog, som skyldes den noget senere

Mathematiker Hypsikles, og en vistnok langt yngre 15. Bog. De ere opfattede som Tillæg til Euklid, fordi de ligesom dennes sidste Bog handle om regulære Polyedre. Hypsikles' Bog er en virkelig videregaaende Behandling af dette Emne. Som Prøve paa de Sætninger, som den indeholder, kan nævnes den, at de omskrevne Cirkler til Sidefladerne i et regulært Ikosaeder og i et regulært Dodekaeder, som ere indskrevne i samme Kugle, ere lige store. Som en Specialundersøgelse hører denne Bog egentlig slet ikke hen under Elementerne, men den er et smukt Exempel paa de Undersøgelser, der beskjæftigede Mathematikerne i den alexandrinske Tid. Efter Fortalen danner den en Fortsættelse af lignende Undersøgelser, som skyldtes den store Geometrer Apollonios.

I denne Sammenhæng kunne vi ogsaa nævne et andet Arbejde, som har sluttet sig til Undersøgelsen af regulære Polyedre, nemlig Archimedes' Bestemmelse af halvregulære Polyedre ɔ: saadanne, som begrænses af regulære Polygoner af forskjellig Art. Af disse fandt Archimedes 13 i et Arbejde, som er tabt, men hvorom Pappos beretter.

20. Exhaustionsbeviset; Euklids 12. Bog.

Væsentlig de samme Midler, ved hvilke Eudoxos i Proportionslæren opnaaede en exakt Behandling ogsaa af saadanne Størrelser, som kun med Tilnærmelse kunne bestemmes ved rationale Talforhold, bragte han i Anvendelse til exakte Bestemmelser af og Operationer med Størrelser, der fremkomme som Grænseværdier for en uendelig Tilnærmelse. Den Methode, som han fandt til at sikre disse Grænseværdier uden at gjøre direkte Brug

af det den Gang af Mathematiken banlyste Uendelighedsbegreb, har saa bestemte Former, at den fortjener sit eget Navn. Vi ville bruge det, som man i det 17. Aarhundrede har givet den, og kalde den Exhaustionsbeviset. Dette bygges paa den Forudsætning, som er opstillet i 4. Definition i 5. Bog, eller sædvanligvis mere umiddelbart paa den deraf udledede Sætning 1 i 10. Bog, at man ved fra en Størrelse at borttage Halvdelen eller mere end Halvdelen og gjentage denne Operation et tilstrækkeligt Antal Gange kan naa ned til en Størrelse, der er mindre end en hvilken som helst opgiven Størrelse af samme Art. (I det moderne Sprog *Lim* $\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \ldots = 0$, naar α, β, γ o. s. v. ere $\leqq \frac{1}{2}$).

Vi skulle lære Exhaustionsbeviset at kjende ved dets første Anvendelse i Euklid XII, 2 til at bevise, at to Cirklers Arealer forholde sig som Diametrenes Kvadrater. Forud er det i 1 bevist, at ligedannede, indskrevne Polygoner forholde sig som Diametrene. Beviset for 2 kan da, naar man vil udtrykke sig kort, siges at bestaa i at betragte Cirklerne som Grænserne for saadanne Polygoner. Det er denne Grænseovergangs Paalidelighed, som sikres ved Exhaustionsbeviset. Den dertil tjenende Anvendelse af X, 1, hvilken først kommer inde i selve Beviset, gaar i dette Tilfælde ud paa, at man i en Cirkel kan indskrive en Polygon med saa mange Sider, at Differensen mellem Cirklen og den er mindre end en hvilken som helst opgiven Grænse. De Trekanter, som man ved en Fordobling af Sideantallet trækker fra de Segmenter, hvoraf denne Differens bestaar, ere nemlig halvt saa store som Rektangler, der helt indeholde disse Segmenter, altsaa selv mere end halvt saa store som Segmenterne.

For nu, naar A og B ere Cirklerne, a og b deres Radier, at bevise, at

$$A : B = a^2 : b^2,$$

antages, at

$$a^2 : b^2 = A : C.$$

For at prøve, om det da er muligt, at $C < B$, indskrives i A og B ligedannede, regulære Polygoner A' og B' med saa mange Sider, at $B - B' < B - C$, og altsaa $B' > C$. Da skulde man have

$$a^2 : b^2 = A : C = A' : B';$$

men dette er umuligt, da $A > A'$ men $C < B'$.

Tilfældet $C > B$ føres tilbage til det foregaaende, idet man af $C > B$ vilde kunne udlede:

$$b^2 : a^2 = C : A = B : D,$$

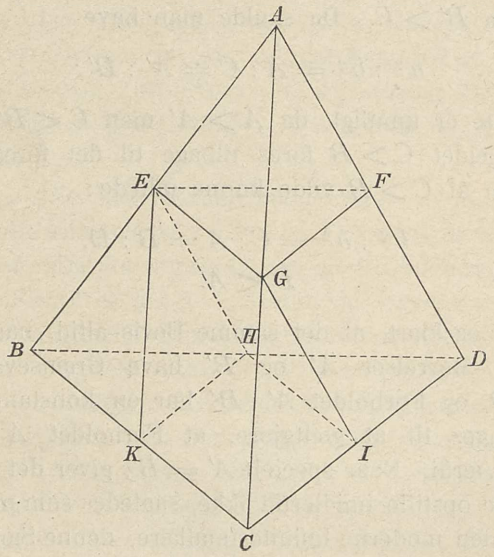
hvor

$$D < A.$$

Det er klart, at det samme Bevis altid, naar varierende Størrelser A' og B' have Grænseværdierne A og B, og Forholdet $A' : B'$ har en konstant Værdi, kan bruges til at godtgjøre, at Forholdet $A : B$ har samme Værdi. Naar specielt $A' = B'$, giver det $A = B$. De gamle opstille imidlertid ikke, saaledes som man vilde gjøre i den moderne Infinitesimallære, denne Sætning en Gang for alle, hvad der vilde være det samme som at forklare og derved godkjende saadanne Begreber som uendelig Tilnærmelse. Saavel Euklid som senere Archimedes gjentage derimod de samme Bevisformer hver enkelt Gang, der er Brug for dem.

Allerede i 5, hvor det bevises, at to tresidede Pyramider med samme Højde forholde sig som Grundfladerne, har Euklid Lejlighed til at gjentage den anførte Bevisførelse efter i 3 og 4 at have vist, at

Forudsætningerne for dens Anvendelighed ere tilstede. Dette gjøres ved som paa hosstaaende Figur ved Planerne EFG, $EGIH$ og EHK lagte gjennem Midtpunkterne af 3 eller 4 Kanter at dele en tresidet Pyramide i to dermed ligedannede Pyramider med halvt saa store lineære Dimensioner og to Prismer, der ved den foregaaende Bogs Sætninger kunne vises at være lige store indbyrdes, og af hvilke det ene har samme



Højde og Grundflade som Pyramiden. Deler man igjen hver af de smaa Pyramider paa samme Maade, og fortsætter man hermed, vil man paa denne Maade som Tilnærmelsesværdier til Pyramiden faa Summen af de 2 første, de 4 næste, de 8 næste o. s. v. Prismer. Det ses, at de Prismer, man hver Gang, man gaar over til en ny Tilnærmelse, borttager fra Pyramiden, udgjøre mere end Halvdelen af det, som var tilbage; de to Pyramider,

som fremkomme ved en Deling af en Pyramide, ere nemlig mindre end de to Prismer, da de kunne lægges saaledes, at de kun blive Dele deraf.

Haves nu to Pyramider, A og B, med samme Højde, og bruger man som Tilnærmelsesværdier til disse Prismesummer A' og B', dannede ved for begges Vedkommende at gaa lige vidt i Delingen, gjælder det (i 4) blot om at vise, at $A' : B'$ er lig Forholdet mellem Grundfladerne (F og G). Dette ses, naar vi for de to Pyramiders Vedkommende kalde Summen af de to første Prismer u_1 og v_1, af de 4 ved næste Deling fremkommende u_2 og v_2, af de 8 næste u_3 og v_3 o. s. v., ved at bevise at

$$F : G = u_1 : v_1 = u_2 : v_2 = u_3 : v_3 \cdots = A' : B'.$$

Exhaustionsbeviset giver dernæst i 5, at

$$A : B = F : G.$$

Betydningen af den her brugte Fremgangsmaade forstaas bedst ved at bemærke, at Sætning 3 giver de Betingelser, som ifølge X, 1 sikre, at

$$A = u_1 + u_2 + u_3 + \text{o. s. v. i det uendelige.}$$

Denne Betragtning frister til nøjere at undersøge den konvergente Række. Det ses nu let og benyttes delvis af Euklid i XII, 4, at et af de 2 lige store Prismer i u_1 er ligedannet med 2 af de 4 ligestore Prismer i u_2 o. s. v., hvoraf følger at $u_2 = \frac{1}{4} u_1$, $u_3 = \frac{1}{4} u_2$, o. s. v. eller at

$$A = u_1 (1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + \cdots) = \tfrac{4}{3} u_1 = \tfrac{1}{3} u_0,$$

naar u_0 betegner et Prisme med samme Højde og Grundflade som Pyramiden P. For Rigtigheden heraf føres let et Exhaustionsbevis.

Denne Fremgangsmaade anvender Euklid nu ikke.

Naar vi alligevel have fundet det værd at anføre den her, hvor vi ikke blot ville lære Euklids, men overhovedet de gamles Fremgangsmaader at kjende, er det, fordi Archimedes virkelig, som vi snart skulle omtale, anvender ganske den samme Summation af en uendelig Række for at finde Arealet af et Parabelsegment.

I Stedet for denne Summation anvender Euklid i 7 den bekjendte Deling af et tresidet Prisme i tre Pyramider til at finde den tresidede Pyramides Rumfang. Vi behøve ikke at dvæle ved Overgangen til flersidede Pyramider og Overgangene fra Prismer og Pyramider til Cylindre og Kegler. De sidste foretages ved Hjælp af Exhaustionsbeviset.

Vanskeligere er det Bevis for, at to Kugler forholde sig som Radiernes Kuber, som tilendebringes i 18; thi her kan man ikke danne saa simple Tilnærmelsesværdier som til Cirkelarealer. Som Forberedelse kræves Løsning af den Opgave (17): i en Kugle at indskrive et Polyeder, som helt omslutter en dermed koncentrisk mindre Kugle. Denne Opgave løses saaledes. I en Storcirkel til den større Kugle (vi ville kalde den Ækvator) indskrives en regulær Polygon med lige Sideantal ($2n$) saaledes, at den helt omslutter den i samme Plan beliggende Storcirkel i den mindre Kugle. Dernæst indskrives i den store Kugles Ækvator en regulær Polygon med dobbelt saa mange Sider ($4n$). Gjennem dennes Vinkelspidser og Ækvators Pol lægges nye Storcirkler (Meridianer), som ud fra et Skjæringspunkt med Ækvator deles i samme Antal Dele ($4n$) som Ækvator. Delingspunkterne ville da være Hjørnespidser i det søgte Polyeder, hvis Sideflader blive Trapezer og Trekanter, de sidste beliggende om Polerne. Det fremgaar af Euklids fuldstændige Bevis, at det er denne Løsning, han vil give, om det

end ikke er denne, men en anden urigtig Løsning, der forud for Beviset gives i den nu foreliggende Text.

Her haves vel ikke en Række Tilnærmelsesværdier til Kuglerne; men Exhaustionsbeviset lader sig dog føre som tidligere. Ere nemlig A og B de givne Kugler, a og b deres Radier, og er C en med B koncentrisk Kugle bestemt ved

$$A : C = a^3 : b^3,$$

kan man, hvis $C < B$, i B indskrive et Polyeder B', som helt indeslutter C, og i A et dermed ligedannet Polyeder A'. Disse benyttes dernæst paa samme Maade som de Størrelser, vi kaldte A' og B' i det tidligere førte Exhaustionsbevis.

For at komme til fuld Klarhed over Exhaustionsbevisets logiske Værd vil det være nyttigt at sammenholde det med moderne Betragtningsmaader. Om de gamle end netop undgaa saadanne Benævnelser som Grænseværdien for en uendelig Tilnærmelse, er det dog i Virkeligheden, som anført, saadanne, som man bestemmer ved Exhaustionsbeviset. Det er endog det exakte Grænsebegreb, som lægges til Grund for den hele Undersøgelse, idet der udtrykkelig fordres, at Tilnærmelsen (en endelig) skal kunne drives saavidt, at Tilnærmelsesværdiens Afvigelse fra Grænseværdien bliver mindre end enhver opgiven Størrelse. Exhaustionsbeviset er et exakt, antithetisk Bevis for denne Bestemmelsesmaades Entydighed, eller for at to Størrelser, der paa denne Maade blive Grænser for de samme Tilnærmelsesværdier, blive lige store. Det er et nødvendigt Led i enhver fuldstændig Infinitesimalundersøgelse. Det er fremdeles intet andet end et saadant Led, hvorfor man kan sige, at hvor der er Exhaustionsbevis, der er

ogsaa en Infinitesimalundersøgelse, nemlig den, som fører til det Resultat, hvis Rigtighed bagefter bevises.

De Infinitesimalundersøgelser, som man finder hos de gamle Forfattere, hvor de have brugt Exhaustionsbeviset, lade sig ogsaa henføre under bestemte af de infinitesimale Methoder, som man nu anvender. Saaledes ville ikke blot Pyramiderne i Euklid XII, 5 og Parabelsegmentet hos Archimedes, men ogsaa Cirklerne i Sætning XII, 2 kunne siges at være bestemte ved konvergente Rækker, og hos Archimedes ville vi finde benyttet saadanne Summer af uendelig mange, uendelig smaa Størrelser, som vi nu kalde bestemte Integraler. Exhaustionsbeviset gjør Anvendelsen heraf fuldkommen exakt. De gamle ere imidlertid i de opbevarede Skrifter saa optagne af at sikre denne Exakthed i hvert enkelt Tilfælde, at der ikke bliver Plads til at udvikle de Methoder, som de bruge til at finde Resultaterne, ud over det øjeblikkelige Behov, og til at danne andre Methoder.

Da i det 17. Aarhundrede Infinitesimalundersøgelser igjen optoges i Tilslutning navnlig til Archimedes' Skrifter, maatte det blive en Hovedsag, foruden at forstaa hans Begrundelse af Resultaterne, tillige at se, hvorledes disse og nye kunde findes, altsaa at udvikle Methoder hertil. De efterhaanden vundne Resultater vedblev man dog for en stor Del enten at sikre ved gjentagne Anvendelser af Exhaustionsbeviset eller dog at skaffe Tillid ved den Bemærkning, at det vilde kunne bruges. Saaledes gjorde f. Ex. Fermat, og man vedblev endog dermed efter Differential- og Integralregningens Grundlæggelse ved Newton og Leibnitz. Efterhaanden som man blev mere optagen af Methodens Brug til at finde nye Resultater, og man fik Rutine i at tumle med uendelig smaa Størrelser, glemte man dog ofte den

logiske Sikring, som det var Exhaustionsbevisets Bestemmelse at give. Man betragtede uendelig smaa Størrelser som tilstrækkelig definerede ved deres Navn, og man kunde godt gjøre sig skyldig i at betragte en Størrelse som defineret ved en uendelig Række uden at sikre sig dennes Konvergens.

Først i vort Aarhundrede have de Fordringer til Exakthed, som de gamle tilfredsstillede ved Exhaustionsbeviset, igjen vundet fuld Anerkjendelse. Man opfylder dem netop ved at føre saadanne Beviser for Grænseværdiernes Existens og Entydighed, som i det væsentlige falde sammen med Exhaustionsbeviset. Kun fører man det nu — som vi alt ved den første Anvendelse af Exhaustionsbeviset antydede, at man kan — engang for alle eller anvender det dog kun ved Behandlingen af saa almindelige Begreber som en uendelig Rækkes Sum eller et bestemt Integral, medens man i Oldtiden gjentog det for hver enkelt Anvendelse.

En ikke uvæsentlig Formforskjel, der vel ikke vedrører Slutningernes Stringens, men kun hidrører fra det forskjellige Udgangspunkt, er dog tilstede mellem Oldtidens og Nutidens Behandling af disse Spørgsmaal. Den traadte allerede frem, da Talen i Almindelighed var om Størrelsers Kontinuitet. Denne forudsættes af de gamle umiddelbart at være tilstede ved de geometrisk fremstillede Størrelser i Euklids fire første Bøger, og det er først bag efter, at man i femte Bog lærer arithmetiske Midler at kjende, som man ogsaa kan bruge til at sammenligne Størrelser, som ikke ere kommensurable. Nu stilles snarest denne arithmetiske Størrelsesbestemmelse i Spidsen og anvendes først bag efter paa de mere empiriske, kontinuert varierende Størrelser. Ligeledes vil man nu ofte stille den konvergente, arithmetiske Tilnærmelsesproces, ved hvilken Arealet af en plan Figur,

f. Ex. en Cirkel, eller et Rumfang, f. Ex. af en Pyramide, bestemmes, i Spidsen og bruge den som Definition paa Arealet eller Rumfanget. De gamle derimod betragtede ethvert plant Areal og ethvert Volumen som definerede ved de almindelige Størrelsesaxiomer, som vi have lært at kjende af Euklids første Bog. At Cirklen er større end enhver indskreven og mindre end enhver omskreven Polygon, blev saaledes en umiddelbar Følge af 8. Axiom. Det var af Axiomerne i første Bog, at de Tilnærmelsesprocesser, som da anvendtes til Bestemmelserne og nu til Definitionerne, udledtes. Overensstemmelsen bestaar i, at man da som nu forlangte sikre Beviser for disse Processers Konvergens.

De almindelige Størrelsesaxiomer strække imidlertid ikke til, naar det gjælder om at bestemme en krum Linies Længde eller en krum Flades Areal. Disse Begreber anser man det derfor nu for særlig nødvendigt at definere ved selve den Tilnærmelsesproces, hvorved Størrelserne virkelig bestemmes. Det viser sig, at i det mindste Archimedes havde Øje for den her paapegede Vanskelighed. Han raader ikke Bod paa den ved formelle Definitioner af de nævnte Begreber, men opstiller i deres Sted efter de gamles Vis udtrykkelig — postulerer — de Forudsætninger, hvilke han foruden de almindelige Størrelsesforudsætninger anvender i de Tilnærmelsesprocesser, hvorved Størrelserne bestemmes, og i Beviserne for disse Processers Konvergens. Disse Forudsætninger opstilles som Postulater til hans Skrift om Kuglen og Cylinderen. De gaa ud paa, at

1) den rette Linie er den korteste Vej mellem to Punkter;

2) at af to Linier mellem samme Punkter, som vende Konvexiteten til samme Side, den yderste er den største;

3) at et plant Areal er mindre end et krumt med samme Omkreds;

4) at af to krumme Arealer med samme (plane) Omkreds, som vende Konvexiteten til samme Side, det yderste er det største.

Det er aabenbart en Misforstaaelse, naar man undertiden i det første af disse Postulater — revet ud af sin Sammenhæng — har villet se en Definition paa en ret Linie. Nej det og det følgende Postulat tjene til Definition paa en krum Linies Længde, de to andre paa en krum Flades Areal. At disse indirekte Definitioner ere tilstrækkelige, viser sig ved, at de virkelig kunne bruges til Bestemmelserne. Derimod indeholde 2 og 4, som ganske vist ikke helt kunde undværes, noget mere end strengt nødvendig.

Idet vi nu her ogsaa have lært de almindelige Principer at kjende, som Archimedes benyttede for at sikre sine infinitesimale Bestemmelser ved Exhaustionsbeviset, kunne vi i det følgende nøjes med at angive de Dekompositioner, hvorved Bestemmelserne udførtes, og de derved opnaaede Resultater uden at behøve at gaa ind paa Enkeltheder i den strenge Bevisførelse.

21. Archimedes' infinitesimale Bestemmelser.

Skjønt Archimedes' overordentlige Fortjenester ogsaa vise sig paa andre Omraader, som tildels ere eller senere ville blive omtalte, lægger hans skabende Kraft sig dog fremfor alt for Dagen dels i de infinitesimale Undersøgelser, for hvilke Eudoxos alt havde lagt en saa paalidelig Grundvold, dels i Ligevægtslæren, hvoraf man ikke kjender nogen exakt Behandling før Archimedes. I disse Undersøgelser faar

han jevnlig Lejlighed til foruden med den elementære Mathematik at vise sig fortrolig med Keglesnitslæren, saa fortrolig, at han endog kan behandle Snit i Flader frembragte ved Omdrejning af Keglesnit. Da vi imidlertid helst ville tale i Sammenhæng om den græske Keglesnitslære, skulle vi i vor øvrige Omtale af Archimedes' Arbejder blot hver Gang nævne de Egenskaber ved Keglesnittene, som han netop benytter, uden foreløbig at undersøge, hvorfra han kjender dem.

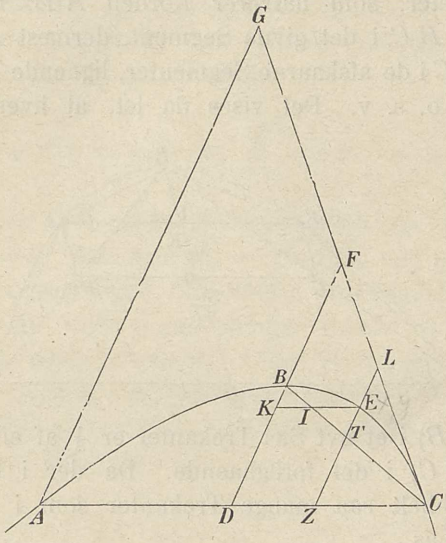
Vi ville begynde vor Meddelelse om Archimedes' infinitesimale Undersøgelser med Skriftet om Parablens Kvadratur, fordi vi i dette Skrift undtagelsesvis faa at vide, hvorledes Archimedes fra først af er kommen til sit Resultat, og fordi dette Resultat naturlig kan have givet Stødet til de dermed beslægtede Undersøgelser i andre Skrifter.

Den Vej, ad hvilken Archimedes først har fundet Arealet af det Segment, som begrænses af en Parabelbue og dens Korde, kalder han mekanisk, fordi den støtter sig paa Sætningerne om statiske Momenter og om Trekantens Tyngdepunkt, hvilke fremsættes i hans første Bog om plane Figurers Ligevægt, som senere skal omtales. Undersøgelsen kan kort gjengives saaledes: Tages Korden $A\,C$ (hvis Længde vi ville kalde a) til Abscisseaxe og Diameteren $A\,G$ til Parablen gjennem Kordens ene Endepunkt A til Ordinataxe, betegne endvidere x og y Koordinaterne til et Punkt E af Parablen, y_1 den til Abscissen x svarende Ordinat $Z\,L$ til Tangenten $C\,G$ i Kordens andet Endepunkt, er — hvad Archimedes først udleder af de da bekjendte Sætninger om Parabelen —

$$a \,.\, y = x \,.\, y_1.$$

Ordinaten y_1 har derfor i den Stilling, som den virkelig indtager, samme Moment med Hensyn til Linien $A\,G$,

som Ordinaten y vilde have, naar den flyttedes parallelt med sig selv til C. Ved en Deling af Figuren i Strimler ved Linier parallele med Ordinataxen og en Anvendelse

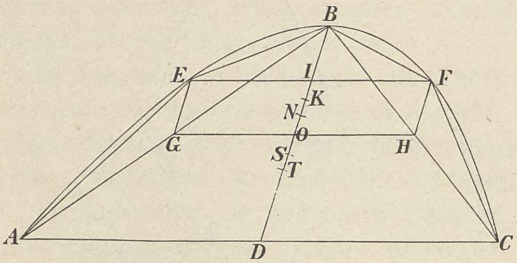


af Exhaustionsbeviset, der nærmest vilde svare til en fuldstændig Begrundelse af

$$a\int_0^a y\,dx = \int_0^a y_1\,x\,dx,$$

beviser Archimedes dernæst, at Momentet med Hensyn til $A\,G$ af hele Parabelsegmentet anbragt i C er det samme som Momentet af Trekanten $A\,C\,G$ i dens naturlige Stilling. Idet nu Trekant $A\,C\,G$'s Tyngdepunkts Afstand fra $A\,G$ er Trediedelen af Punktet C's, bliver Segmentet $\frac{1}{3}\,\triangle\,A\,C\,G$ eller $\frac{2}{3}$ af den Trekant, som begrænses af Korden og Tangenterne i Endepunkterne. [I Virkeligheden tænker Archimedes sig Parablen ophængt i det andet Endepunkt af en ligearmet Vægtstang med Hvilepunkt i A].

Uagtet den strenge Gjennemførelse af dette Bevis tilføjer Archimedes endnu et overordentlig smukt geometrisk Bevis. Er $AEBFC$ Segmentet og BD den Diameter, som halverer Korden AB, indskrives først $\triangle ABC$ i det givne Segment, dernæst $\triangle AEB$ og $\triangle BFC$ i de afskaarne Segmenter, lignende Trekanter i de nye o. s. v. Det vises da let, at hver Trekant



(som AEB) i et nyt Sæt Trekanter er $\frac{1}{8}$ af en Trekant (som ABC) i det foregaaende. Da der i hvert nyt Sæt er dobbelt saa mange Trekanter som i det foregaaende, faas

$$\text{Segment } ABC = (1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + \cdots) \triangle ABC$$
$$= \tfrac{4}{3} \triangle ABC.$$

Beviset gjennemføres — som berørt i vor Omtale af Euklids 12. Bog — som et Exhaustionsbevis.

Medens Archimedes' geometriske Kvadratur af Parablen faktisk beror paa Summation af en uendelig Række, have vi i vor Gjengivelse af den «mekaniske» Bestemmelse brugt Integraltegn for at betegne en Inddeling i Stykker, der alle samtidig aftage i det uendelige. Archimedes' Behandling kan dog ikke her kaldes en Integration. Den tjener tvertimod til at undgaa en Integration, idet den blot fører den foreliggende Undersøgelse tilbage til en, hvis Resultat forud er fundet

uden Integration, nemlig Bestemmelsen af en Trekants Tyngdepunkt.

Om virkelige Integrationer kunne vi derimod tale i Skrifterne om Spiralerne og om Konoider og Sfæroider. Archimedes opstiller nemlig Sætninger, der nøje svare til vore Formler

$$\int_o^c x\,dx = \tfrac{1}{2}c^2 \text{ og } \int_o^c x^2\,dx = \tfrac{1}{3}c^3,$$

og anvender dem paa indbyrdes forskjellige geometriske Bestemmelser, som man nu — paa den ved hvert enkelt Spørgsmaal gjentagne Anvendelse af Exhaustionsbeviset nær — vilde udføre paa samme Maade ved Hjælp af de anførte Integralformler. Disse Sætninger, af hvilke den første anføres i Indledningen til Skriftet om Konoider og Sfæroider, den sidste i et Tillæg til Sætning 10 om Spiraler, ere følgende:

$$\frac{n^2}{2}h < h + 2h + 3h + \cdots nh < \frac{(n+1)^2}{2}h,$$

$$\frac{n^3}{3}h^2 < h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \cdots (nh)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}h^2.$$

Den første er en umiddelbar Følge af Summationen af Leddene i en Differensrække, som sikkert længe havde været bekjendt. Den sidste beror paa en i Hovedsætningen 10 udført Summation af den paagjældende Række. Archimedes finder, at

$$3[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \cdots + (nh)^2] =$$
$$(n+1)(nh)^2 + h(h + 2h + 3h + \cdots nh).$$

Beviset, i hvilket h, $2h$ o. s. v. fremstilles som Linier, kan, naar vi betragte h som Enhed, og kalde selve den søgte Sum af Kvadrater s, gjengives saaledes:

$$(n+1) \cdot n^2 = n^2 + [(n-1)+1]^2 + [(n-2)+2]^2 \cdots + [2+(n-2)]^2 + [1+(n-1)]^2 + n^2$$
$$= 2 \cdot s + 2 \cdot (n-1) + 4 \cdot (n-2) + 6 \cdot (n-3) + \cdots + 2(n-1) \cdot 1.$$

Adderes hertil $(n + n - 1 + n - 2 + \cdots 1)$ faas

$$2s + n + 3 \cdot (n-1) + 5 \cdot (n-2) + \cdots (2n-1) \cdot 1.$$

At denne Størrelse netop er $3s$, fremgaar ved Summation af følgende Ligninger, hvis Rigtighed følger af Formlen for Summen af Leddene i en Differensrække:

$$n^2 = n + 2(n-1+n-2+\cdots 1)$$
$$(n-1)^2 = n-1+2(n-2+n-3+\cdots 1)$$
$$(n-2)^2 = n-2+2(n-3+n-4+\cdots 1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Denne Summation er et værdifuldt algebraisk Biprodukt af Archimedes' Undersøgelse.

Den Anvendelse, som Archimedes gjør heraf i Skriftet om Spiralerne, er Beregningen af en Sektor af en Archimedisk Spiral $r = a \cdot \vartheta$. Arealet af en saadan er

$$\tfrac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r^2 \, d\vartheta = \frac{1}{2a}\int_{r_0}^{r_1} r^2 \, dr,$$

og findes altsaa ved den sidste af de to anførte Integrationer. Archimedes bestemmer Forholdet til Arealet af en Cirkelsektor med Radius r, og opnaar dette ved Deling af Vinklen $\vartheta_1 - \vartheta_0$ og dermed af Sektorerne, Konstruktion af og Sammenligning med Cirkelsektorer, som indesluttes i og omslutte Spiralsektorerne, samt Anvendelse af Exhaustionsbeviset.

Ved Konoider betegnes dels Omdrejningsparaboloider, dels Omdrejningshyperboloider med to Net, af hvilke dog kun det ene betragtes. Sfæroider ere Omdrejningsellipsoider. I Skriftet om disse Arter Flader bestemmer

Archimedes Rumfang af Segmenter begrænsede af en saadan Flade og en vilkaarlig Plan. Archimedes viser sig i Stand til at bestemme Beskaffenheden af et vilkaarligt plant Snit i en saadan Flade og udtrykke dets Axer ved Hjælp af de Stykker, som dets Plan afskjærer paa den tilhørende Diameter til Fladen. Han har endvidere fundet Arealet af en Ellipse, hvilket let sker ved Sammenligning mellem indskrevne Figurer i den og i en Cirkel over dens ene Axe som Diameter. Volumenbestemmelserne føres da tilbage netop til de Integrationer, som vi have set, at Archimedes kjendte i en anden Skikkelse.

De to anførte Skrifter ere mærkelige i flere Henseender end ved de deri indeholdte Areal- og Volumenbestemmelser. Skriftet om Konoider og Sfæroider giver saaledes, som det vil ses af det alt anførte, Oplysninger om Archimedes' Kjendskab til Keglesnittene. I Skriftet om Spiralerne findes nogle tidligere omtalte «Indskydninger». Til Skriftets Hovedopgave hører foruden Arealbestemmelsen endnu en anden infinitesimal Opgave, nemlig Bestemmelsen af Tangenter til Spiralerne. Dertil benytter Archimedes, selvfølgelig under behørig Kontrol af Exhaustionsbeviset, den samme infinitesimale Trekant, som nu bruges til Tangentbestemmelse for Kurver fremstillede i polære Koordinater. Resultatet bliver, at Polarsubtangenten er $r \cdot \vartheta$. Subtangenterne i Endepunkterne af de forskjellige hele Omløb af Spiralen fik — som vi tidligere have berørt — for Archimedes særlig Interesse derved, at de ere retliniede Fremstillinger af Cirkelperiferier.

Den vigtigste integrationslignende Bestemmelse, som skyldes Archimedes, turde dog hans Bestemmelse af Kuglens Overflade være. Fremgangsmaaden er om end

i en forskjellig Form omtrent den samme, som bruges i vore elementære Lærebøger. Den fører, i Overensstemmelse med Værkets Titel, særlig til Ligestorheden mellem Kuglebælter og de tilsvarende Stykker af den omskrevne Cylinders Overflade. Derfra kommer man imidlertid let til andre Bestemmelsesformer, ligeledes til Bestemmelser af Rumfang af Kuglen, Udsnit og Afsnit. Idet Archimedes, ligesom Euklid, ikke indfører nogen Enhed, bestaa disse sidste Bestemmelser i Konstruktion af Cylindre og Kegler lige store med de søgte Rumstørrelser.

I anden Bog af samme Skrift behandles (foruden den nysnævnte Bestemmelse af Afsnits Rumfang) forskjellige Opgaver vedrørende de søgte Rumstørrelser, deriblandt den ved en Plan at dele en Kugle i to Afsnit, som danne et givet Forhold. Løsningen afhænger som bekjendt af en Ligning af tredie Grad. Til denne fører ogsaa Archimedes den tilbage, idet han giver den følgende Form: At dele en ret Linie DZ, paa hvilken Punkterne B og T ere givne, saaledes ved et Punkt X, at

$$DB^2 : DX^2 = XZ : TZ.$$

DB er her Kuglens Diameter, $2r$, paa hvis Forlængelse BZ er afsat $= r$, DX er det ene Afsnits Højde, og hvis dette skal forholde sig til det andet som $m : n$, er

$$TZ = \frac{m}{m+n} r.$$

Archimedes lover, at han bagefter skal løse denne Ligning og fremhæver i Øjeblikket kun, at den Mulighedsbetingelse, som Ligningen kræver, er tilfredsstillet ved den foreliggende Opgave angaaende Kuglen. En Grund til denne Opsættelse — der desværre har ført til, at Opløsningen savnes i den foreliggende Text — kan det

have været, at Archimedes i samme Bog har haft flere Anvendelser for den samme Ligning. Bogens sidste Sætning (IX) gaar nemlig ud paa, at det største af de Kuglesegmenter, som have en given krum Overflade, er en Halvkugle. Det Bevis, som anføres herfor, bærer ikke blot Præget af at være dannet, efterat Resultatet er fundet ad anden Vej, men er tillige ganske ufuldstændigt. Det bevises nemlig kun, at et Segment, som er den større Del af en Kugle delt ved en Plan, er mindre end en Halvkugle med samme krumme Overflade, men ikke at det samme er Tilfældet med et Segment, som er den mindre Del af en Kugle delt ved en Plan. En saadan Ufuldstændighed ligner ikke Archimedes, og vilde mindst findes ved dette Spørgsmaal, som netop er et af dem, med Hensyn til hvilke han først havde sendt et urigtigt Resultat til Alexandria og foranlediget Beviser for samme af derværende Mathematikere (se S. 23). En fuldstændigere Besvarelse kan derimod have fundet en naturlig Plads i den samme Tilføjelse, som Archimedes lovede for Kugledelingens Vedkommende. En saadan Maximumssætning som IX forekommer nemlig stedse hos Grækerne som Diorisme til en Opgave. Denne maa i nærværende Tilfælde have gaaet ud paa at finde et Kuglesegment, hvis Rumfang og hvis krumme Overflade ere givne. Denne Opgave lader sig løse netop ved den ovennævnte Ligning.

Nu findes det lovede Tillæg, som sagt ikke i selve den opbevarede Text; men det antages at have været indeholdt i et andet gammelt Manuskript, som Archimedes' Kommentator Eutokios har fundet og gjengivet i Udtog. I dette løses Archimedes' Ligning ved Keglesnit, og af Ligningen udledes saadanne Mulighedsbestemmelser, som, anvendte paa den Opgave: at finde et Kugleafsnit med givet Rumfang og given krum Over-

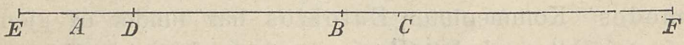
flade, umiddelbart ville give Sætning IX. Selve Løsningen skal senere blive meddelt som et af de bedste opbevarede Exempler paa de gamles Behandling af de saakaldte «rumlige Opgaver».

At Bestemmelsen af Kuglens Overflade giver rig Anledning til videre Undersøgelser, har saaledes strax i Archimedes' Skrift lagt sig for Dagen. Anvendelser i Praxis eller paa andre Videnskaber, saaledes Geografien ligge ogsaa nær. Disse Omstændigheder kunne have bidraget til, at Archimedes satte denne Bestemmelse højest blandt sine Arbejder. En gyldig Grund hertil var dog allerede den Omstændighed, at han her havde naaet at beregne Arealet af en ikke udfoldelig krum Flade paa en Tid, da endog Beregning af plane Arealer og af Rumfang var saa lidet udviklet. Hvor faa Flader kjende vi ikke den Dag idag, hvis Arealer kunne fremstilles paa en nogenlunde overskuelig Maade!

Efter Archimedes' Ønske sattes paa hans Grav et Monument, som indeholdt en Kugle med en omskreven Cylinder. Dette fandt og fornyede Cicero halvandet Aarhundrede efter, da han var Kvæstor paa Sicilien.

22. Archimedes' Ligevægtslære.

Reglerne for Ligevægten af en uligearmet Vægtstang have været bekjendte længe før Archimedes' Tid; men hos ham finder man den første virkelige Begrundelse. Vi kunne kort gjengive hans Tankegang saaledes. Lad



A og C være Angrebspunkterne for Vægte P og Q, og lad Punktet B være bestemt saaledes paa AC, at

$$AB : BC = Q : P.$$

Vægtstangen, til hvis egen Vægt der ikke tages Hensyn, er da i Ligevægt, naar den understøttes i B. Beviset føres ved at dele Vægtstangen i et Punkt D saaledes at

$$A D : D C = P : Q$$

og paa dens Forlængelse afsætte E og F saaledes, at $E A = A D$ og $C F = D C$. Man kan da, uden at forandre Ligevægtsforholdene, fordele P's Vægt jevnt over $E D$ og Q's Vægt jevnt over $D F$, hvorved hele Vægten $P + Q$ bliver fordelt jevnt over $E F$. Paa Grund af Symmetrien er der da Ligevægt, naar $E F$ er understøttet i sit Midtpunkt B.

I første Bog af sit Skrift om plane Figurers Ligevægt fører Archimedes et saadant Bevis uden dog at gjøre Brug af en kontinuert Fordeling. Han behandler først det Tilfælde, hvor P og Q ere kommensurable og altsaa kunne fordeles i Punkter med lige store Afstande, og gaar dernæst ved Exhaustionsbeviset over til det Tilfælde, hvor P og Q ere inkommensurable. Han har som sædvanlig udtrykkelig opstillet de Forudsætninger, hvorpaa Beviset bygges, hvilke her ere Betingelserne for Ligevægt eller Mangel paa Ligevægt for en ligearmet Vægtstang. For det følgendes Skyld opstilles endnu de Forudsætninger, at ligedannede Figurers Tyngdepunkter maa være ensliggende Punkter, og at Tyngdepunktet af en Figur, hvis Konvexitet overalt vender ud ad, maa falde paa selve Figuren. Hvis de Beviser for, at en Trekants Tyngdepunkt er Medianernes Skjæringspunkt, hvormed Bogen slutter, nu forekomme unødig vidtløftige, beror det paa, at de have skullet bygges paa de udtrykkelig opstillede Forudsætninger.

Vi have allerede set den Brug, som Archimedes gjorde af disse Ligevægtssætninger for at finde Arealet af et Parabelafsnit. Senere har han i anden Bog af

Skriftet om plane Figurers Ligevægt fundet et Parabelafsnits Tyngdepunkt. Til Grund for Bestemmelsen ligger den Sætning, at Tyngdepunkterne i forskjellige Parabelsegmenter maa dele deres Diametre i samme Forhold. Dette bevises ved den samme Deling af Parabelsegmenterne i uendelig mange Trekanter, som benyttedes i hans «geometriske» Bestemmelse af Segmentets Areal[1] (se Fig. S. 158). Den ubekjendte Værdi af det konstante Forhold, lader sig nu finde ved Deling af Segmentet $A\,B\,C$ i Trekant $A\,B\,C$ og to nye Segmenter. Den derved fremkommende Ligning af første Grad løser Archimedes under geometrisk Form.

Endnu et Tyngdepunkt viser det sig, at Archimedes kjender, nemlig Tyngdepunktet i et vilkaarligt Segment af en Omdrejningsparaboloide. Det kan ikke være fundet paa samme Maade som Parabelsegmentets Tyngdepunkt, men Bestemmelsen maa under en eller anden Form være ført tilbage til de to alt omtalte af Archimedes kjendte Integrationer, hvoraf den i Virkeligheden afhænger. Archimedes giver os selv ingen Oplysninger om, hvorfra han har det; men han nævner og anvender det gjentagne Gange i 2. Bog af sit Skrift om Legemer, som svømme paa en Vædske.

I den første Bog af dette hydrostatiske Skrift opstilles og begrundes den bekjendte Hovedsætning om helt eller delvis nedsænkede Legemers Ligevægt, som har faaet Navnet det Archimediske Princip. I denne Bog indtager Archimedes endog et saa almindeligt Standpunkt som at tage Hensyn til Jordens Kugleform. I Bogens sidste Sætning behandler han den Opgave at

---

[1] Slutningen af Beviset er dog i den bevarede Texts Nr. 7 ved en øjensynlig Misforstaaelse af en senere Udgiver indskrænket til ligedannede Segmenter.

finde Ligevægtsstillingen af et delvis nedsænket Kugle-segment; men desværre ere væsentlige Dele af denne Undersøgelse gaaede tabt.

At Archimedes ikke uden videre af den blotte Symmetri slutter, at der ikke gives andre Ligevægts-stillinger end den, hvor Segmentets Axe er lodret, kan man slutte af den fuldstændigere Behandling, som han i 2. Bog underkaster den Opgave at finde Ligevægts-stillingerne af et Segment, afskaaret af en Omdrej-ningsparaboloide ved et Snit vinkelret paa Axen. Ved denne Undersøgelse forudsættes Vandspejlet dog at være plant. Det er ved denne, han har Brug for Tyngdepunktet ogsaa af saadanne Afsnit, som afskjæres af Planer, som ikke ere vinkelrette paa Axen.

Archimedes' statiske Værker danne Grundlaget saavel for den rationelle Mekanik som for Mekanikens praktiske Anvendelser. At han selv bragte det vidt i saadanne, vides af mange Beretninger fra den senere Oldtid, da man bedre forstod at beundre de øjensynlige Resultater end det videnskabelige Arbejde. En umiddelbar Anvendelse af det Archimediske Princip er hans Brug af Vægtfylde til at bestemme Metalblandinger («Hierons Krone».) Han skal have konstrueret Apparater til ved ringe Kraft at bevæge store Masser. Vandsneglen skyldes ham. Særlig Betydning fik hans mekaniske Snille ved de under Syrakus' Belejring konstruerede Krigsmaskiner; blandt disse er dog Anvendelsen af Brandspejlet til at antænde den romerske Flaade en Fabel, om det end ikke er umuligt, at han har fundet paa parabolske Brand-spejle. Med stor Beundring nævnede man i Oldtiden et af ham konstrueret mekanisk Planetarium.

23. Læren om Keglesnit før Apollonios.

Vi have allerede ved vor Omtale af det Deliske Problem, eller Konstruktionen af de to Mellemproportionaler anført, at dette Problem af Eudoxos' Discipel Menaichmos løstes ved Skjæring mellem to af Kurverne

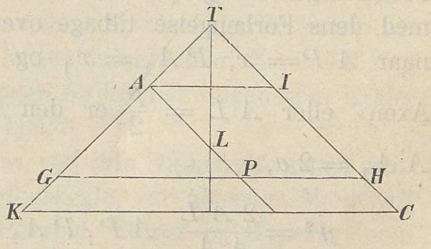
$$a\,y = x^2,\ b\,x = y^2,\ x\,y = a\,b,$$

hvilke han fremstillede som Skjæringskurver mellem en Omdrejningskegleflade og en Plan. I Overensstemmelse dermed berettes, at Menaichmos har opfundet Keglesnitslinierne. Tillige vides det, at man til deres Fremstilling lige til Apollonios brugte en Plan vinkelret paa en af Keglefladens Frembringere, hvorved Ellipser, Parabler og Hyperbler fik Navnene «Snit i den spidsvinklede, retvinklede og stumpvinklede Kegle». Heraf maa man dog ikke slutte, at Menaichmos og Mathematikerne lige til Apollonios have besiddet en Fremgangsmaade, som særlig førte til Bestemmelsen af Egenskaberne ved Snit vinkelrette paa en Frembringer og ikke med samme Lethed kunde tjene til at vise, at anderledes beliggende Snit have ganske de samme Egenskaber. Af nogen saadan Fremgangsmaade er der ikke opbevaret noget Spor i den græske Mathematik, og i det mindste for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende turde det være vanskeligt at finde nogen saadan.

Sagen lader sig imidlertid forklare saaledes: Ved Bestemmelsen af de to Mellemproportionaler var der Brug for de Kurver, som defineres ved ovennævnte Ligninger. En saadan Definition maatte imidlertid ledsages af et Poslulat om, at Kurverne virkelig existere, eller med andre Ord, at de ved denne Definition bestemte Punkter følge kontinuert paa hverandre. Postulatet kunde

kun undgaas, naar der kunde angives en paa tidligere Postulater grundet Konstruktion af Kurverne — ja i dette Tilfælde vilde det endog være utilstedeligt at komme med nye Postulater. Den af Menaichmos fundne Konstruktion bestaar netop i Bestemmelsen som Snit i cirkulære Kegler: Keglefladens Kontinuitet er da sikret ved dens cirklære Ledekurves, og Snitkurvens Kontinuitet atter ved Keglefladens.

Til denne Brug er enhver Frembringelse som Snit i Kegler lige god; ja for at sikre sig, at en Kurve med bestemte Konstanter virkelig kan frembringes som Snit i en Kegleflade, er det endog bekvemmest at have en ensartet Løsning af denne Opgave. At da særlig den Løsning, hvor man tillige lader Keglefladen være retstaaende, og Snitplanen være vinkelret paa en Frembringer, kan være hensigtsmæssig, vil let ses, naar vi først betragte parabolske Snit frembragte som Snit i i den retvinklede Kegle. Lad T være dennes Toppunkt, KTC et Snit gjennem Axen, GPH Sporet af et Snit parallelt med Grundfladen, y det Stykke, som afskjæres mellem P og Keglefladen paa en Linie, der i P staar vinkelret paa Figurens Plan. Da er, naar $AP \perp TK$,



$$y^2 = GP \cdot PH = \sqrt{2} \cdot AP \cdot AI = 2\,AP \cdot AL.$$

Det Snit, som i AP oprejses vinkelret paa Figurens Plan, bliver da, naar $AP = x$, og $2\,AL = p$, fremstillet ved

$$y^2 = p\,x.$$

I Overensstemmelse med denne Konstruktion kaldes den halve Parameter $\frac{p}{2}$ endnu af Archimedes «Stykket til Axen», nemlig fra Parablens Toppunkt A til Keglens Axe.

Det ses nu, at Menaichmos netop faar Løsningen af den Opgave, som forelaa: at fremstille en Kurve med Ligningen $y^2 = p\,x$ som Snit i en Kegle. Det behøvedes blot at lade Keglen være retvinklet, lade Snittet være vinkelret paa en Frembringer og sørge for, at «Stykket til Axen» bliver $\frac{p}{2}$.

De samme Fordele opnaas ved den tilsvarende Fremstilling af Ellipsen og Hyperblen som Snit vinkelrette paa en Frembringer i en spidsvinklet eller stumpvinklet Omdrejningskegle. Vi ville derved bruge de samme Betegnelser som paa Fig. S. 169 og blot tillige ved A_1 betegne AP's Skjæringspunkt med den anden Frembringer i Figurplanen, TC, eller, for Hyperblen, med dens Forlængelse tilbage over T. Man finder da, naar $AP = x$, $PA_1 = x_1$ og som før «Stykket til Axen» eller $AL = \frac{p}{2}$ er den halve Parameter, og $AA_1 = 2\,a$,

$$y^2 = \frac{2\,AL}{AA_1} \cdot AP \cdot PA_1 = \frac{p}{2\,a}\,x\,x_1.$$

Denne Bestemmelse (ved Axeligningen) er netop den, som de ældste græske Geometrere i en eller anden Form (nærmest som $\frac{y^2}{x\,x_1} = \frac{p}{2\,a}$) lægge til Grund for Undersøgelsen af Ellipsen og Hyperblen (som man faar, efter som $x + x_1 = 2\,a$ eller $x_1 - x = 2\,a$). Idet Kurvens Konstanter paa en simpel Maade indgaa paa

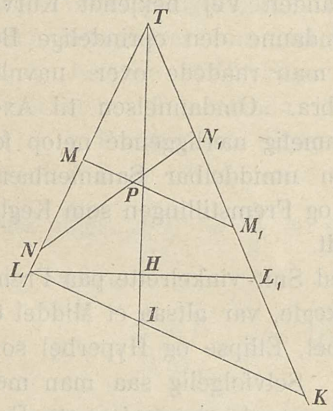
Figuren, haves ogsaa en god og bestemt Maade at fremstille disse Kurver som Snit i Keglen, altsaa at vise, at de for alle Værdier af Konstanterne ere Keglesnit.

Herved forudsættes dog, at disse Kurver have været kjendte forud og — selvfølgelig under geometrisk Form — fremstillede ved den anførte Ligning. For Ellipsens Vedkommende tyder adskilligt herpaa; det kan da have ligget meget nær at betragte den som Cylindersnit. Hyperblen, og navnlig den ligesidede, har som alt anført frembudt sig som anvendelig ved Konstruktionen af de to Mellemproportionaler, men rigtignok bestemt ved en anden Ligning, nemlig den, hvorved den henføres til sine Asymptoter. Anvendeligheden til Konstruktionen af de to Mellemproportionaler har da givet en god Anledning til — for at undersøge, om Kurven ikke skulde være en ad anden Vej bekjendt Kurve, f. Ex. en Cirkel — at omdanne den oprindelige Bestemmelse ved de Midler, man raadede over, navnlig ved den geometriske Algebra. Omdannelsen til Axeligningen har da været temmelig nærliggende netop for dette Hjælpemiddel. Nogen umiddelbar Sammenhæng mellem Asymptoteligningen og Fremstillingen som Keglesnit har næppe været kjendt.

Hvad der opnaaedes ved Snit vinkelrette paa Frembringeren i en Omdrejningskegle, var altsaa et Middel til at fremstille enhver Parabel, Ellipse og Hyperbel som Snit i en Omdrejningskegle. Selvfølgelig saa man med det samme, at omvendt alle saaledes anbragte Snit ere Parabler, Ellipser og Hyperbler. Det har imidlertid umulig kunnet undgaa Opmærksomheden, at den særegne Beliggenhed aldeles ingen Rolle spiller ved denne omvendte Bestemmelse. I hvert Fald har den samme Bestemmelsesmaade vist sig anvendelig, saa snart man overhovedet har fundet Anledning til at spørge om

anderledes beliggende Snit. Dette finde vi bekræftet i Archimedes' Skrift om Konoider og Sfæroider. Allerede dette Skrifts Indledning viser, at man endog før hans Tid idet mindste har vidst Besked om alle elliptiske Snit i rette Kegler, og i Løbet af hans egne Undersøgelser betragtes endog visse elliptiske Snit i skjæve cirkulære Kegler, nemlig saadanne, som staa vinkelret paa Keglens Symmetriplan. Da Archimedes for de foreliggende Opgavers Skyld ingen Brug har for hyperbolske Snit, der ligge paa samme Maade, kan man ikke af hans Tavshed slutte nogen Uvidenhed herom.

Archimedes faar endog Lejlighed til at lære os det Hjælpemiddel at kjende, hvorved man fandt den plangeometriske Bestemmelse af plane Snit i cirkulære Kegler. Lad Figuren være den, hvori Keglen skjæres af sin Symmetriplan (eller hvis Keglen er ret, af en vilkaarlig Plan gjennem Axen), TL og TK de i denne Plan beliggende Frembringere, LK den cirkulære Grundflades Spor. Beskaffenheden af det plane Snit, som projiceres i NN_1, findes da ved den plangeometriske Hjælpesætning, at naar Linierne NN_1 og MM_1, som skjære de rette Linier LT og TK i M og N og i M_1 og N_1 og hinanden i P have uforandrede Retninger, $\frac{PM.PM_1}{PN.PN_1}$ er konstant, k. Er nu MM_1 Sporet af et Snit parallelt med Grundfladen, og y det Stykke, som paa den i



P projicerede Linie afskjæres mellem P og Keglefladen, er

$$y^2 = PM \cdot PM_1 = k \cdot PN \cdot PN_1,$$

hvilket netop er den Egenskab, hvorved vi have karakteriseret en Ellipse eller Hyperbel.

Den her benyttede plangeometriske Sætning forudsættes bekjendt og har altsaa vistnok ogsaa før Archimedes været benyttet til Udledelse af Keglesnittenes Egenskaber. Den gjælder, ifølge den saakaldte Potenssætning, som vi senere skulle omtale, og som var kjendt af Archimedes, ogsaa naar Punkterne M, N, M_1 og N_1 ere beliggende paa et vilkaarligt Keglesnit. Archimedes kunde derfor i det anførte Skrift om Omdrejningsflader af anden Orden bestemme plane Snit i disse ganske paa samme Maade.

Naar vi have antaget, at Menaichmos' Opdagelse væsentlig var den, at Parablen, Ellipsen og Hyperblen kunne fremstilles som Keglesnit, have vi dermed maattet forbinde den Antagelse, at de i det mindste delvis have været undersøgte forud, navnlig i Forbindelse med det deliske Problem og paa Grundlag af de Egenskaber, som nu fremstilles ved deres simpleste Ligninger. Denne Antagelse støttes i høj Grad af den Omstændighed, at det i alle senere Undersøgelser hos græske Forfattere er disse plangeometriske Egenskaber og ikke Fremstillingen som Keglesnit, der lægges til Grund. Den bidrager ogsaa til at forklare, at Læren om Keglesnit strax efter Menaichmos kunde udvikle sig saa rask hos Grækerne, som Tilfældet var. Interessen for den maatte voxe derved, at man snart maatte se, at Keglesnittene ikke blot som af Menaichmos kunde anvendes til Konstruktionen af de to Mellemproportionaler, men ogsaa ved Løsningen af mange andre Opgaver, som man forgjæves

havde søgt at løse ved Lineal og Passer. Til det Brug maatte man benytte Keglesnittene opfattede som geometriske Steder, «rumlige Steder», som de da kaldtes. Den Vægt, som man lagde paa saadan Anvendelse, viser sig derved, at det ældste Værk om Keglesnit, som findes omtalt, havde Titlen «rumlige Steder». Det skyldtes en Mathematiker, Aristaios, som var en ældre samtidig af Euklid. At Titlen paa dette tabte Værk virkelig havde en særlig Betydning og ikke blot var et Navn paa Keglesnitslæren i Almindelighed, fremgaar af, at Euklids snart efter fremkomne Bøger om Keglesnit skulde supplere og ikke træde i Stedet for Aristaios' rumlige Steder. Dette Skrift vedblev man endog at studere og benytte ved Siden af Apollonios' Keglesnitslære, som fuldstændig fortrængte Euklids.

Den Brug, som Aristaios rimeligvis har gjort af Keglesnittene, og som man har gjort i videre Maal, da selve Læren om Keglesnit var bleven mere udviklet af Euklid og Apollonios, vil bedst forstaas, naar vi af den sidstes store Værk have lært, hvorledes de gamle overhovedet behandlede disse Kurver. Af dette Værk ville vi tillige, naar vi særlig gjøre opmærksom paa, hvilke Fremskridt der skyldes Apollonios personlig, faa en Forestilling om, hvad allerede Euklids Fremstilling maa have indeholdt. Foreløbig skulle vi bemærke, at man af Archimedes' Skrifter kan se, at dette ikke har været saa ganske lidt; thi de Sætninger om Keglesnittene, som Archimedes forudsætter bekjendte, have vistnok været at finde i Euklids tabte Værk. I dette maa man have kunnet finde ej blot Keglesnittenes alt anførte Henførelse til Axerne og de dertil knyttede Bestemmelser af Tangenter, konjugerede Diametre og Asymptoter, men ogsaa den tilsvarende Henførelse til to konjugerede Diametre foruden den alt af Menaichmos

kjendte Henførelse til Asymptoterne. Man har der endvidere fundet den nys omtalte Potenssætning og de første Sætninger om Pol og Polar.

24. Apollonios' Keglesnit.

Det er af Apollonios' store Værk om Keglesnittene, at vi hovedsagelig kjende de gamles Keglesnitslære, som vi kjende deres elementære Geometri fra Euklid. Af Apollonios' 8 Bøger om Keglesnit ere dog kun de 7 opbevarede, de 4 første paa Græsk, de 3 sidste gjennem arabisk Oversættelse. De 4 første Bøger indeholde, hvad der kaldes Keglesnitslærens Elementer, det vil sige den sammenhængende Fremstilling af Keglesnittenes Hovedegenskaber, som maa tages til Udgangspunkt saavel for Anvendelser af Keglesnitslæren til Løsning af Konstruktionsopgaver ved Brug af rumlige Steder, som for videregaaende særegne Undersøgelser af enkelte Spørgsmaal vedrørende Keglesnittene. Det er derimod saadanne Specialundersøgelser, som indeholdes i de følgende Bøger. Den femte, som handler om Normaler til Keglesnittene, er tillige den fuldstændigste opbevarede Prøve paa Keglesnittenes Anvendelse til Konstruktion, nemlig af de Normaler, som udgaa fra et givet Punkt, og paa den til en saadan Konstruktion knyttede finere theoretiske Undersøgelse.

De gamles almindelige Kjendskab til Keglesnittene lære vi dog først og fremmest at kjende ved de fire første Bøger. Ved dem skulle vi derfor dvæle saa meget, at vi dels kunne give et Overblik over, hvad de gamle vidste om Keglesnittene, dels gjøre forstaaeligt, at de virkelig besad Midler til at naa saa vidt.

Først maa vi da se, hvorledes Grundvolden lægges

i **første Bog**. Om dette end sker med et andet Udgangspunkt, end Apollonios' Forgængere benyttede, ere dog, som det kan ses af hans Fortaler, de enkelte Sætninger, hvoraf denne Grundvold er sammenføjet, for en stor Del de samme, som ogsaa hans Forgængere kjendte og anvendte. For Hyperblens Vedkommende er der dog i disse Sætninger det betydelige Fremskridt, at Apollonios, om han end kalder en Hyperbels to Grene «sammenhørende Hyperbler», dog behandler dem som en enkelt Kurve, og saaledes opnaar den Ensartethed i Sætninger om Ellipse og Hyperbel, som kun derved bliver mulig.

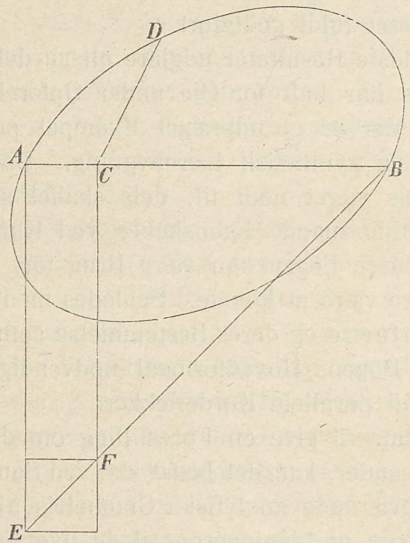
Det nye Udgangspunkt bestaar i, at Apollonios i Stedet for at betragte Snit frembragte af Planer i en bestemt Stilling mod Omdrejningskegler, strax betragter vilkaarlige plane Snit i vilkaarlige cirkulære Kegler. Den Fremgangsmaade, der benyttes til at udlede en saadan plangeometrisk Egenskab ved disse Snit, som kan lægges til Grund for Kurvernes videre Undersøgelse, er en Almindeliggjørelse af den, vi have set Archimedes benytte til at undersøge Snit vinkelrette paa Keglens Symmetriplan; men derved bliver den plangeometriske Egenskab ogsaa almindeligere. Det bliver nemlig nu ikke mere den, som udtrykkes ved at henføre Keglesnittet til en af dets Axer og de halve tilhørende Korder som Ordinater, men den, som paa lignende Maade faas ved Henførelse til en vilkaarlig Diameter og dens Korder. Dette maa man fastholde for at faa det rette Overblik over Gangen i Bogen. Om de undersøgte Kurver er det fra først af kun bevist, at de have denne Egenskab i Forhold til en enkelt Diameter og et dertil hørende Kordesystem, som i Almindelighed danner en skjæv Vinkel med Diameteren. Først i Løbet af Bogen ses det, at de have samme Egenskab i Forhold til

uendelig mange Diametre, og i Slutningen af Bogen konstrueres endelig saadanne Diametre, som staa vinkelret paa deres Korder, og vises, at Kurverne efter Henførelse til disse kunne indlægges som Snit i Omdrejningskegler. Først da har Identiteten af de af Apollonios behandlede Kurver med de alt kjendte Keglesnit været fuldt godtgjort.

Disse sidste Resultater udgjøre altsaa det Maal, som Apollonios har haft for Øje under Opførelsen af hele første Bog, der er et udpræget Exempel paa, hvad vi have kaldt en synthetisk Lærebygning. Undervejs har han dog dels været nødt til, dels skaffet sig Lejlighed til at fremstille mange Egenskaber ved Kurverne, som der i de senere Bøger kan være Brug for, eller som i og for sig ere værd at kjende. Saaledes medtages Læren om Tangenterne og deres Bestemmelse som Indledning til den for Bogens Hovedformaal nødvendige Lære om Diametre til parallele Korderækker.

Hvis man vil give en Forestilling om de benyttede Fremgangsmaader, kan det bedst ske ved Sammenligning med den nuværende analytiske Geometris algebraiske Omdannelser af Ligningerne til de nye Former, som faas ved Henførelse til nye Koordinatsystemer, og overhovedet med den analytiske Geometris algebraiske Operationer. Disse fremstilles blot ved Hjælp af den geometriske Algebra. Dennes Brugbarhed hertil vil man bedst fatte ved at se den geometriske Form, hvorunder Apollonios fremstillede de Ligninger for Keglesnittene, som han udledede af deres Beliggenhed paa selve Keglen. I disse Ligninger henføres de som allerede sagt til en Diameter og de dertil hørende halve Korder som Ordinater. Lad $A\,B$ være en Diameter $2\,a$ i en Ellipse eller Hyperbel, $C\,D$ en halv dertil hørende Korde. At da

Kvadratet CD^2 skal staa i et konstant Forhold $\frac{p}{2a}$ til $AC \cdot CB$, findes udtrykt ved i A og C at opreje Linierne AE og CF vinkelret paa AB og paa den første afsætte $AE = p$. Er da F Skjæringspunktet

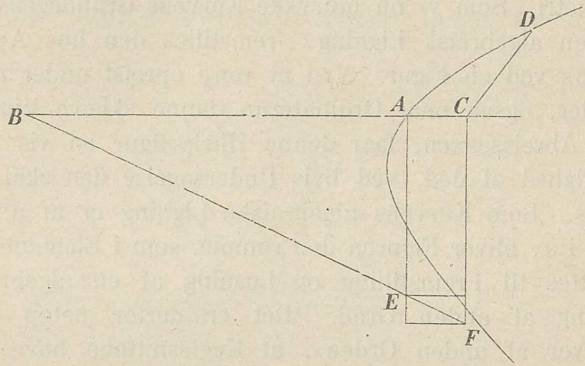


mellem CF og BE, skal Kvadratet paa CD være lige stort med Rektanglet AF; thi CF er da netop $\frac{p}{2a} \cdot CB$. Hjælpefiguren udgjør altsaa det geometrisk-algebraiske Apparat, hvorved man fremstiller det samme, som vi, naar $CD = y$ og $AC = x$, vilde udtrykke ved Ligningen

$$y^2 = \frac{p}{2a} x (2a \mp x).$$

Det ses, at den fremstillede Grundegenskab er den samme, som man kjendte før Apollonios (og som

det derfor er urigtigt at kalde Apollonios' Theorem). Fremstillingsformen stemmer fremdeles med den geometriske Algebras sædvanlige Former. Den har dog



faaet en særlig Betydning derved, at den er lagt til Grund for de nye Benævnelser, som Apollonios maatte give Keglesnittene, efterat den Bestemmelsesmaade, hvortil de gamle Betegnelser knyttede sig, var opgiven. Den Figur, der benyttes, er nemlig den samme som den, der, svarende til Ligningens Omskrivning til

$$y^2 = p\,x \mp \frac{p}{2\,a}\,x^2,$$

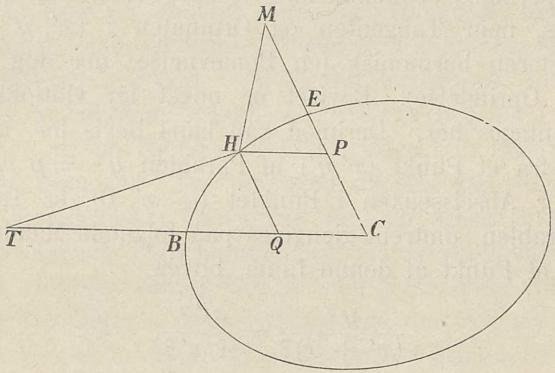
udtrykker, at Kvadratet y^2 er lagt hen ad Linien $A\,E = p$, saaledes at Siderne i det manglende eller overskydende Rektangel $E\,F$ forholde sig som $p : 2\,a$. (Smlgn. Euklids 6. Bog). I Overensstemmelse med de ved Løsninger af Ligninger af anden Grad brugte Betegnelser kaldes selve den fremstillede Kurve Ellipse eller Hyperbel, eftersom Rektanglet $E\,F$ mangler eller er et Overskud. Er der hverken Overskud eller Mangel, haves et simpelt Anlæg af Kvadratet y^2 langs p.

Kurven $y^2 = p\,x$ har da faaet samme Navn, Parabel, som de simple Fladeanlæg.

Det ses, at den geometriske Algebra her netop gjør samme Tjeneste som Algebraen i den senere analytiske Geometri. Som vi nu udtrykke Kurvens Grundegenskab ved en algebraisk Ligning, fremstilles den hos Apollonios ved en Figur. Ved at være oprejst under rette Vinkler, ogsaa naar Ordinaterne danne skjæve Vinkler med Abscisseaxen, faar denne Hjælpefigur en vis Uafhængighed af den, ved hvis Undersøgelse den skal benyttes. Som Kurvens algebraiske Ligning er af anden Grad i x, bliver Figuren den samme, som i Elementerne benyttes til Fremstilling og Løsning af en algebraisk Ligning af anden Grad. Det er derfor netop som «Kurver af anden Orden», at Keglesnittene have vist sig saa tilgængelige for den antike Behandlingsmaade. At denne selv giver Algebraen en geometrisk Form, har dog givet Anledning til mangen en Kombination af det geometriske Hjælpemiddel og det geometriske Undersøgelsesemne, som vilde ligge den analytiske Geometri fjernere, navnlig saa længe denne helt omdannede geometriske Spørgsmaal til Regnestykker. I Modsætning hertil ligner den antike Behandling noget mere den nu sædvanlige Brug af analytisk Geometri, under hvilken man ikke glemmer den geometriske Betydning af de algebraiske Omdannelser, som man foretager.

Vi kunne vel ikke i det enkelte følge de Omdannelser af Kurvens under geometrisk Form fremstillede Ligninger, hvorved man efterhaanden naar til det Resultat, som vi have betegnet som Bogens Maal; men som Exempel skulle vi dog nævne et Mellemled, som spiller en Hovedrolle baade her og ved de videregaaende Undersøgelser i 3. Bog. Et Keglesnit med Centrum C og Diametrene CE og CB bliver betragtet som geometrisk Sted for

saadanne Punkter H, at den Firkant $CMHT$, der begrænses af disse Diametre, Linien HM, som er parallel med de af CB halverede Korder, og HT, som er parallel med de af CE halverede Korder, faar et konstant Areal. Denne Arealsætning er for os almengyldig, naar vi efter sædvanlige Regler regne de enkelte Dele af en uegentlig Firkant, naar en saadan fremkommer, med Fortegn. Apollonios maa derimod udstykke den i flere forskjellige Sætninger, hvis Sammenhæng han dog aabenbart har for Øje. Den Brug, som han gjør deraf i første Bog, vil forstaas, naar det bemærkes, at den først udledes af den Ligning, hvorved Kurven er henført til den ene Diameter og dens Korder, og dernæst paa tilsvarende Maade fører til den Ligning, hvorved den henføres til den anden Diameter og dens Korder.



Af første Bog skulle vi endnu berøre Tangentbestemmelsen. Ifølge Kurvens Ligning gjælder det ved denne om gjennem et Punkt $(x'\,y')$ af Kurven at lægge en ret Linie saaledes, at ethvert andet Punkt (x, y) af denne tilfredsstiller Betingelsen

$$\frac{y^2}{p\,x \mp \frac{p}{2\,a}\,x^2} > \frac{y'^2}{p\,x' \mp \frac{p}{2\,a}\,x'^2},$$

hvor for Parablen $\frac{p}{2\,a}$ ombyttes med 0. For Ellipsens og Hyperblens Vedkommende viser Apollonios, at dette opnaas, naar Tangenten og Ordinaten i (x', y') dele Diameteren harmonisk (en Benævnelse, der dog er af nyere Oprindelse). Beviset er noget for vidtløftigt til at gjentages her. Derimod kan hans Bevis for, at den Linie fra et Punkt $(x'\,y')$ af Parablen $y^2 = p\,x$, som skjærer Abscisseaxen i Punktet $(-x', 0)$, er Tangent til Parablen, omtrent gjengives paa følgende Maade. Er $(x\,y)$ et Punkt af denne Linie, bliver

$$\frac{y^2}{(x' + x)^2} = \frac{y'^2}{4\,x'^2}.$$

Da man nu fra Euklid véd, at Mellemproportionalen mellem to Størrelser er mindre end Middeltallet, eller at $x'\,x < \left(\frac{x + x'}{2}\right)^2$ bliver $\frac{y^2}{x} > \frac{y'^2}{x'}$.

Naar man ret ser, hvor godt og fuldstændig Grunden er lagt i Apollonios' første Bog, forstaar man bedst, hvorledes han kan hæve sig saa højt i flere af de andre Bøger, navnlig i 3. og tildels i 5. Bog. Vi maa her nøjes med i al Korthed at angive disse forskjellige Bøgers Indhold.

I **2. Bog** vises Hovedegenskaberne ved Asymptoter og konjugerede Diametre. Foruden sammenhørende Grene af en Hyperbel betragtes ogsaa konjugerede Hyperbler beliggende i forskjellige Vinkler mellem de samme Asymptoter og med de samme Længder af Diametrene. Der tillægges nemlig ogsaa de Diametre, som

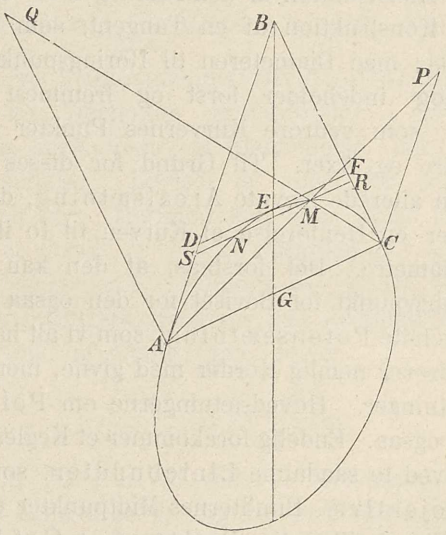
ikke skjære Kurven, Længder, der i Virkeligheden blive de samme, som man nu benytter. Desuden løses forskjellige Opgaver vedrørende Diametre og Asymptoter, deriblandt Konstruktion af Centrum og Axer til et tegnet Keglesnit, Konstruktion af en Tangent, som danner en given Vinkel med Diameteren til Røringspunktet o. s. v.

3. Bog indeholder først og fremmest saadanne Sætninger, som vedrøre Kurvernes Punkter uafhængig af Diametre og Axer. Til Grund for disses Udledelse lægges den allerede nævnte Arealsætning, der i Virkeligheden er en Henførelse af Kurven til to ikke konjugerede Diametre. Det forstaas, at den kan danne et godt Udgangspunkt for Beviset for den ogsaa af Archimedes kjendte Potenssætning, som vi alt have omtalt; denne vedrører nemlig Korder med givne, men vilkaarlig valgte Retninger. Hovedsætningerne om Pol og Polar forefindes ogsaa. Endelig forekommer et Keglesnits Frembringelse ved to saadanne Liniebundter, som man nu kalder projektive. Bundternes Midtpunkter ere (se omstaaende Figur) vilkaarlige Punkter A og C af Kurven, og de til hinanden svarende Linier bestemmes som Linier AM og CM, der paa Linier CP og AQ parallele henholdsvis med Tangenterne i A og C afskjære Stykker CP og AQ, der danne et Rektangel af konstant Areal.

Man ser let, at alle disse Sætninger blive ufuldstændige og lidet overskuelige, naar en enkelt Hyperbelgren betragtes alene for sig. Det forstaas derfor, at Apollonios' nye Opfattelse af de to Kurvegrene navnlig har givet hans tredie Bog et væsentligt Fortrin for tidligere Behandlinger af samme Emner, selv om de enkelte Sætninger i mere begrænset Skikkelse have været kjendte forud.

En anden Række Sætninger i samme Bog indeholde de simpleste Bestemmelser af Tangenter uden Brug af

Berøringspunkterne, navnlig af Tangenter til en Hyperbel som de Linier, der paa Asymptoterne ud fra Centret — og Tangenter til en Ellipse eller Hyperbel som de Linier,



der paa parallele Tangenter ud fra Røringspunkterne — afskjære Stykker, som danne et Rektangel af konstant Areal. Tangenterne til en Parabel bestemmes som de, hvis Skjæringspunkter med faste Tangenter samtidig gjennemløbe proportionale Stykker. Disse Sætninger forklare Formaalet for to mindre Skrifter af Apollonios om Forholdssnittet og Arealsnittet. I disse har han ved geometrisk Algebra løst og — i det mindste i det opbevarede Skrift om Forholdssnittet — med en næsten pinlig Omhu for alle Enkelthederne diskuteret de Opgaver: fra et Punkt at drage en ret Linie, som paa to givne rette Linier ud fra givne Punkter afskjære Stykker, som danne et givet Forhold eller et Rektangel af givet Areal. Disse Opgavers Løsning ved Lineal og Passer giver i Virkeligheden,

ifølge de omtalte Sætninger af 3. Bog om Keglesnittene, Bestemmelserne af en Tangent fra et givet Punkt til et tilstrækkelig bestemt Keglesnit.

Endnu et mærkeligt lille Afsnit indeholdes i den samme tredie Bog, nemlig en elementær-geometrisk Behandling af Læren om Ellipsens og Hyperblens Brændpunkter. Beliggenheden af disse, F og F_1, paa Hovedaxen $A A_1$ opgives at være bestemt ved, at Rektanglet $A F . F A_1$ skal være lig $\frac{1}{2} a p$, hvor $2 a$ og p betegne Længderne af Axen og Parameteren. Ved Hjælp af den nysnævnte Tangentbestemmelse til Ellipsen eller Hyperblen faas dernæst, at det Stykke som Tangenterne i A og A_1 afskjære paa en bevægelig Tangent, ses fra F og F_1 under en ret Vinkel, hvorefter de øvrige Hovedsætninger ere lette at opnaa. Om Parablens Brændpunkt findes mærkelig nok intet hos Apollonios. Af Pappos' Hjælpesætninger til et tabt Skrift af Euklid kan man dog se, at det i det mindste delvis har været kjendt allerede af denne.

I **4. Bog** findes Maximumsantal af Skjæringspunkter mellem to Keglesnit. Her angiver Apollonios udtrykkelig i Fortalen, at hans personlige Fremskridt bestaar i Hensynet til Hyperblens to Grene, et Hensyn, som her spiller en Hovedrolle. Om **5. Bog** skulle vi tale nærmere i vor Redegjørelse for de gamles Behandling af rumlige Opgaver. **6. Bog** handler dels om ligedannede Keglesnit, dels indeholder den nogle Udvidelser af første Bogs Konstruktioner af Kegler gjennem forelagte Keglesnit.

7. Bog indeholder en større Samling Udtryk for visse Funktioner af konjugerede Diametres Længder, af de tilhørende Parametre o. s. v. Særlig forekomme her de vigtige Sætninger, at Arealet af den Trekant, der dannes af et Par konjugerede Diametre, (som for

Hyperblen ere Diametre til konjugerede Hyperbler) og deres mellemliggende Korde, er konstant, ligeledes Summen eller Differensen af konjugerede Diametres Kvadrater. I de andre Tilfælde, hvor Funktionerne ikke vise sig at være konstante, søges deres Maximums- eller Minimumsværdier. Da det nu angives, at den 7. Bog indeholder Beviser for Diorismerne til Opgaver, løste i den nu tabte 8. Bog, maa disse Opgaver have gaaet ud paa at finde saadanne konjugerede Diametre, for hvilke disse Funktioner have givne Værdier. De Udtryk, som i 7. Bog vare fundne for disse Funktioner, have strax givet de til Opgavernes Løsning nødvendige Ligninger.

25. Rumlige Steder og Opgaver.

Keglesnitslærens oprindelige Formaal var, som vi alt have angivet, at fremstille geometriske Steder, som kunde benyttes ved Løsning af saadanne Opgaver, hvortil ret Linie og Cirkel ere utilstrækkelige. Opgaver, som kunne løses ved ret Linie og Cirkel, kaldes plane Opgaver, og ret Linie og Cirkel som geometriske Steder plane Steder. I den senere Oldtid antoges det sidste af disse Navne at være det oprindelige og at hidrøre fra, at de anførte Linier oprindelig bestemmes som liggende i en Plan. Fuldt saa rimeligt er det dog, at Navnet plane oprindelig har tilhørt Opgaverne, som afhænge af Ligninger af højst anden Grad og altsaa i den geometriske Algebra fremstilles i Planen ved Relationer mellem Arealer. Er dette rigtigt har Navnet «rumlige Opgaver» oprindelig tilhørt saadanne, som afhænge af Ligninger af 3. Grad og fremstilles ved Relationer mellem Parallelepipeder. «Rumlige Steder» betegner saadanne geometriske Steder, som ere Keglesnitslinier. Dette Navn

kan antages at hidrøre fra, at de ere bestemte til Løsning af rumlige Opgaver. Allerede i den senere Oldtid antog man dog, at omvendt Navnet rumlige Steder var det oprindelige og hidrørte fra Keglesnittenes stereometriske Definition.

Desværre er Aristaios' Skrift, hvori Keglesnittene skulle være behandlede særlig som geometriske Steder, tabt, og vi vide intet om nogen senere Afløser af denne meget gamle Behandling. Da dog Apollonios' Keglesnitslære har behandlet det samme Emne fra en anden Side, kan man deraf slutte, hvilke «rumlige» Steder man har kjendt, eller dog let maattet kunne finde, naar der i en Opgave var Brug derfor. Allerede af Apollonios' første Bog ser man, at dette ej blot maatte være Tilfældet, naar visse givne Linier strax viste sig at være konjugerede Diametre eller deslige. I Arealsætningen henføres Kurven nemlig til to ikke-konjugerede Diametre. Tredie Bog fører os imidlertid videre dels ved sin egen almindeligere Karakter, dels ved Apollonios' udtrykkelige Angivelse af, hvortil den skal bruges. Hans særlige, vistnok ved Indførelsen af de to Hyperbelgrene fuldstændiggjorte, Behandlingsmaade skal nemlig efter hans egen Opgivelse udfylde Manglerne ved de ældre Bestemmelser af rumlige Steder. Blandt disse nævnes udtrykkelig Stedet til 3 og 4 Linier. Stedet til 4 Linier er den Kurve, der, naar x, y, z, u betegne et Punkts Afstande, regnede paa Skraalinier af givne Retninger, fra fire faste Linier, og naar k er en Konstant, fremstilles ved Ligningen

$$x z = k y u.$$

Stedet til 3 Linier fremstilles paa lignende Maade ved Ligningen

$$x z = k y^2.$$

Ældre, ikke ganske fuldstændige Beviser for, at disse Steder ere Keglesnit, maa Apollonios forudsætte saa vel kjendte, at hans Læsere, uden at selve Beviserne gjentoges, kunde se, at de fuldstændiggjøres ved hans 3. Bog. Denne maa altsaa have fuldstændiggjort de Forudsætninger, hvorpaa man forud byggede og skulde vedblive at bygge disse Beviser. Vi, der ikke kjende de ældre Bestemmelser af Stederne, kunne kun af det, der foreligger i Bogen, forsøge at slutte os til disse. Dette er ikke saa vanskeligt for Stedet til 3 Linier, der fremgaar ved en Omdannelse af den Frembringelse ved projektive Bundter, som vi have lært at kjende. Stedet til fire Linier kan i det Tilfælde, hvor to modsatte Linier, $y = 0$, $u = 0$, ere parallele, udledes af Potenssætningen.

At der allerede herved er naaet meget, ses bedst ved en Sammenstilling med den analytiske Geometris Fremstilling af et «rumligt Sted». Tages blot et Punkt af dette til Begyndelsespunkt, faas der en Ligning af Formen

$$a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y = 0$$

eller

$$x (a x + b y + d) = - c y \left(y + \frac{e}{c}\right).$$

Kurven fremstilles altsaa netop som Sted til fire Linier, hvoraf to modstaaende ere parallele. Idet nu de gamles Omlægninger af Arealer og Indførelse af Koefficienter ved Proportionslæren svare nøje til vor algebraiske Behandling af Udtryk af anden Grad, vil den nuværende Fremstilling af en Kurve ved en almindelig Ligning af anden Grad have svaret temmelig nøje til de gamles Fremstilling som Sted til fire Linier, hvoraf et Par modstaaende ere parallele. Hertil lod ogsaa det almindelige Sted til fire Linier sig føre tilbage.

At man virkelig havde Blik for denne omfattende Betydning af Stedet til fire Linier, fremgaar af den Vægt, Apollonios lægger paa netop at have forbedret Behandlingen deraf. Iøvrigt synes Euklids tabte Skrift om Porismer netop at have givet Midler til saadanne Omdannelser som dem, for hvilke der her vilde være Brug.

Der er et tabt Skrift af Apollonios, som det ligger nær at sætte i Forbindelse med Stedet til fire Linier, nemlig Skriftet om det bestemte Snit. Det vides nemlig at have indeholdt Konstruktionen af Punkter paa en ret Linie, hvis Afstande fra to Par Punkter af Linien danne Rektangler med et givet Forhold, samt en omhyggelig Diskussion af denne Opgave. Til denne Opgave føres Bestemmelsen af Skjæringspunkterne mellem en given ret Linie og et Sted til 4 Linier tilbage, naar alle 4 Afstande regnes parallelt med den givne rette Linie. Opfattet saaledes falder Bestemmelsen af et Sted til 4 Linier sammen med Sætningen om Involution af en ret Linies Skjæringspunkter med et Keglesnit og med de modstaaende Sidepar i en indskreven Firkant, hvilken senere er gjenfunden af Desargues og bærer hans Navn. Sikkert er det, at Skriftet om det bestemte Snit har indeholdt enkelte vigtige Dele af den nuværende Lære om Involution.

Som nys anført vare **rumlige Opgaver** vistnok først saadanne, som afhang af Ligninger af tredie Grad og fremstilledes stereometrisk. Senere derimod knyttedes Navnet til Løsningen ved Keglesnit og kom saaledes til faktisk ogsaa at omfatte dem, der — hvis man havde sat dem i Ligning — vilde have afhængt af Ligninger af fjerde Grad.

Den simpleste rumlige Opgave, den rent kubiske

Ligning, have vi allerede set i Skikkelse af Spørgsmaalet om Terningens Multiplikation, og vi have set, hvorledes Brugen af Keglesnit oprindelig knyttede sig til Løsningen af denne Opgave. Andre Exempler have vi mødt i Vinklens Tredeling eller i de Indskydninger, hvortil den føres tilbage, og vi have nævnt, at Archimedes i Skriftet om Spiralerne gjør anden Brug af de samme Indskydninger. Hvorledes disse udførtes ved Keglesnit, har Pappos meddelt os.

De vigtigste Exempler vi have paa Løsninger af rumlige Opgaver ved Keglesnit fra den græske Mathematiks bedste Dage, ere dog den opbevarede Behandling af den Ligning, hvortil Archimedes fører sin Deling af Kuglen tilbage (se S. 163), og Apollonios' Konstruktion i femte Bog af Normalerne fra et Punkt til et Keglesnit. Hvad der særlig giver disse Løsninger Interesse, er den Omhu, hvormed der er gjort Rede baade for Mulighedsbetingelser og for de forskjellige Antal af Opløsninger, som man faar for de forskjellige Værdier, man tillægger de opgivne Størrelser. Det træder derved — i fuld Overensstemmelse med, hvad vi have sagt om Betydningen af den geometriske Konstruktion hos Grækerne — tydelig frem at Konstruktion ved Keglesnit ikke saa meget er et Middel — som vilde være meget tarveligt — til at tilvejebringe de søgte Størrelser som et godt theoretisk Middel til at undersøge, i hvilke Tilfælde de existere. De Maximums- og Minimumsbestemmelser, man derved faar for de givne Størrelser, ere de virkelige og betydningsfulde geometriske Sætninger, som have været Undersøgelsens Hovedformaal.

Vi have set, at Archimedes førte Kugledelingen tilbage til Ligningen

$$D B^2 : D X^2 = X Z : T Z,$$

hvor D, B, T og Z ere bekjendte, X et søgt Punkt af en ret Linie. I det alt omtalte opbevarede Manuskript, som rimeligvis skyldes Archimedes selv og har dannet et Tillæg til hans 2. Bog om Kuglen og Cylindren, løses denne Opgave paa en Maade, som vi lettest kunne gjengive saaledes i moderne algebraiske Tegn. Skrive vi hans Ligning

$$\frac{b^2}{x^2} = \frac{a - x}{c},$$

sættes blot de to Forhold $= \frac{e}{y}$, hvor e er en vilkaarlig Linie. x og y kunne da bestemmes som Skjæringspunkter mellem

Parablen $x^2 = \frac{b^2}{e} \cdot y$ og Hyperblen $(a - x)\, y = c\, e$.

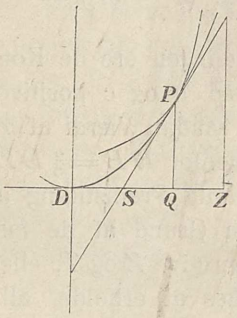
Ved Anvendelserne paa Kugledelingen ere de Konstanter, som her ere betegnede ved a og c positive, og det gjælder om at bestemme en saadan Værdi af x, at $0 < x < \frac{2}{3} a$, idet X skal falde indenfor $DB = \frac{2}{3} DZ$, som er Kuglens Diameter. Den gamle Fremstilling af Ligningen indbefatter imidlertid paa Grund af de forskjellige Beliggenheder, som man kan give Z og T, eller som det søgte Punkt X kan tænkes at erholde, alle Ligninger af Formen

$$x^3 + a\, x^2 + b = 0,$$

og Opgaven kan stilles saaledes, at man kan faa alle Rødder med. Vi have altsaa her et Exempel paa, hvad tidligere er anført, at, naar Grækerne ikke kjendte vor Brug af Fortegn, gjorde den geometriske Fremstilling dette Savn mindre føleligt.

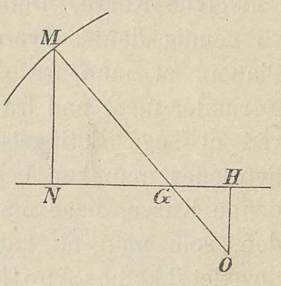
Hvad nu Grænsebetingelserne angaar, ville disse ved den enkelte Opgave for en Del bero paa, om Punktet X

falder paa eller udenfor de Intervaller, som den foreliggende Opgave maatte kræve; men hvad der tillige ved alle disse Opgaver bliver en Hovedsag, er at kjende de Grænsetilfælde, i hvilke Keglesnittene berøre hinanden, og altsaa to Rødder falde sammen; thi derved dannes Overgangen imellem de Tilfælde, hvor disse to Rødder ere reelle, altsaa virkelig kunne existere efter den da gjældende Opfattelse, eller ej. I det opbevarede Brudstykke angives dette Overgangstilfælde at indtræde, naar $x = \frac{2}{3} a$, altsaa naar $b^2 c = \frac{4}{27} a^3$. Er derimod $x \gtrless \frac{2}{3} a$, maa man have $b^2 c < \frac{4}{27} a^3$, som altsaa bliver Betingelse for 2 Opløsninger. Dette bevises let ved Hjælp af Sætninger om Keglesnittenes Tangenter. Skal nemlig Tangenten til Parablen i Punktet P berøre Hyperblen, hvis Asymptoter ere Linierne $y = 0$ og $y = a$ maa P være Midtpunktet af det Stykke, som disse afskjære. Dens Spor S paa Abscisseaxen, som er Parablens Toppunktstangent, skal fremdeles være Midtpunktet mellem P og Skjæringspunktet med Ordinataxen. Deraf udledes, at P's Abscisse $DQ = \frac{2}{3} DZ$. At, som Archimedes siger, Mulighedsbetingelsen $b^2 c < \frac{4}{27} a^3$ virkelig er opfyldt ved Kugledelingen, hvor Punktet B falder i Q og T mellem Q og Z, overbeviser man sig let om. Man faar dog kun 1 Opløsning, da Punkterne X ville falde hvert paa sin Side af B, og kun det, som falder paa DB kan bruges.



Archimedes fører saaledes sin Opgave angaaende Kugledelingen tilbage til en Trediegradsligning af meget almindelig Form, der som alt bemærket ogsaa giver et Bevis for sidste Sætning i 2. Bog om Kuglen

og Cylindren og endvidere finder Anvendelse ved nogle af Archimedes andensteds stillede Opgaver angaaende Bestemmelse af Segmenter af Ellipsoider og Hyperboloider med givet Rumfang. Apollonios' Normalbestemmelse er derimod Exempel paa en Opgave, som direkte løses ved Keglesnit uden Opstilling af en Ligning. Vi skulle nøjes med at meddele hans Løsning i den nuværende Algebras Sprog. Lad O være et Punkt (x_1, y_1) af Normalen i et Punkt M (x, y) af et Keglesnit, G denne Normals Skjæringspunkt med Hovedaxen og N Projektionen af M ind paa denne. Tage vi da denne Axe til Abscisseaxe, og regne vi, for at sammenfatte de af Apollonios særskilt behandlede Tilfælde under et, Størrelserne med Fortegn paa moderne Vis, haves



$$\frac{y}{-y_1} = \frac{NG}{x_1 - x - NG}.$$

NG, der er den Størrelse, som vi nu kalde Subnormalen, er for Parablens Vedkommende $\frac{p}{2}$, hvorved den fundne Ligning bliver til

$$xy - \left(x_1 - \frac{p}{2}\right) y - y_1 \frac{p}{2} = 0;$$

for Ellipsens og Hyperblens Vedkommende er den, naar Centret taget til Begyndelsespunkt, henholdsvis $\mp \frac{b^2}{a^2} x$, hvorved Ligningen bliver til

$$\left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right) xy - x_1 y \pm \frac{b^2}{a^2} y_1 x = 0,$$

I begge Tilfælde vil, naar Punktet (x_1, y_1) er givet, Punktet (x, y) ligge paa en Hyperbel, hvis Skjæringspunkter med den givne Kurve ville være Fodpunkter for Normalerne for Punktet (x_1, y_1). Denne Normalbestemmelse benytter Apollonios til en udførlig Undersøgelse af, hvor mange Normaler man kan drage fra Planens forskjellige Punkter. Hovedsagen bliver her at bestemme de Punkter, hvis tilsvarende Hyperbler berøre den givne Kurve. Den af disse Punkter dannede Kurve vil nemlig danne Overgangen mellem saadanne Dele af Planen, at man fra den enes Punkter kan drage to Normaler mere end fra den andens. Apollonios finder ved at søge Betingelserne for den omtalte Berøring, hvorledes man kan bestemme Ordinaten til et Punkt af denne Kurve, naar man kjender Abscissen. Kurven er den, som man nu kalder Keglesnittets Evolut. Der er dog slet ikke hos Apollonios eller de gamle overhovedet Tale om nogen nærmere Undersøgelse af denne end den her angivne.

26. Den beregnende Geometri.

I Archimedes' Integrationer, som vi have kaldt dem, og i hans hydrostatiske Arbejder, i Apollonios' Keglesnitslære og i Keglesnittenes Anvendelse hos Grækerne til Diskussion af Opgaver, som i vor Mathematik afhænge af Ligninger af tredie og fjerde Grad, se vi, til hvilken Højde den græske Geometri og den rene Mathematik i geometrisk Form havde hævet sig. Vi have tidligere set, med hvilken Strenghed man sikrede denne Mathematiks Almengyldighed. Vi have imidlertid ogsaa haft Lejlighed til at omtale, at man under denne Stræben efter Almengyldighed lagde for liden Vægt paa

at udvikle de Hjælpemidler til virkelig Udregning, hvorigjennem Mathematiken skulde faa praktisk Anvendelse.

Helt forsømte man dog selvfølgelig ikke denne Side af Sagen. De geometriske Sætninger, som man havde lært af ægyptiske Landmaalere, vedblev man at anvende paa Landmaaling, og dertil føjedes ogsaa Anvendelsen af de simpleste af de Sætninger, man selv fandt. Det vilde være urimeligt at antage, at de Mathematikere, som havde Indsigt nok til at give deres Resultater en saa almengyldig Form, ikke ogsaa gjennem denne skulde kjende deres specielle Anvendelighed paa de nummeriske Opgaver, som kunde forekomme i Praxis. De, som have udarbejdet en saa fin Proportionslære, have ikke savnet Midler til Behandling af Opgaver, som i Praxis henhøre under enkelt og sammensat Regula de Tri. Heron — hvem vi tillige skylde et af de geometriske Resultater, som der især kunde blive Tale om at anvende i Praxis, nemlig Bestemmelsen af Trekantens Areal ved dens Sider — har i sine Opgavesamlinger givet Vidnesbyrd om nummerisk Anvendelse i det mindste af de simpleste plangeometriske og stereometriske Sætninger og af Løsninger af Ligninger af anden Grad. Det ringe Omraade af Geometrien, fra hvilket disse Anvendelser tages, og den beskedne Nøjagtighedsgrad, hvormed Heron, der selv skal have bidraget til Regnemidlernes Udvikling, lader sig nøje i sine Udregninger, tyder dog hen paa, at der virkelig er god Grund til at sætte denne Side af den græske Mathematik lavere. Den vedblev imidlertid, navnlig paa Grund af sin Forbindelse med Astronomien, at udvikle sig, ogsaa efterat de store Fremskridt i den øvrige græske Geometri vare ophørte.

Det var ikke udelukkende Mangel paa Regnefærdighed, som i den græske Geometris bedste Dage lagde Hindringer for dens Anvendelse til virkelige Ud-

regninger. Dens Resultater vare ikke lagt godt til Rette for saadanne. Opgaverne løses i Form af Konstruktioner. Disse lade sig vel ofte omsætte til Beregning, saaledes som sikkert mange have gjort ogsaa før Heron. Der er imidlertid, selv naar vi holde os til den elementære Geometri, et vigtigt Omraade, paa hvilket denne Omsætning ikke lader sig iværksætte, nemlig det, hvor der blandt de Størrelser, som skulle bestemmes ved hverandre indbyrdes, ej blot findes Længder, Arealer og Rumfang, men ogsaa Vinkler. Med andre Ord Grækerne havde i den bedste alexandrinske Tid endnu ingen Trigonometri, et Savn, som først den Tids store Geometrere begyndte at afhjælpe. Før dette skete, var man dog ikke udelukket fra alle saadanne Undersøgelser, som man nu foretager ad trigonometrisk Vej. Sætningerne 12 og 13 i 2. Bog af Euklids Elementer udtrykke ganske det samme som Formlen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos A$$

og kunne anvendes ganske som denne i alle almindelige Undersøgelser, hvor $\angle A$ ikke netop er given i, eller søges udtrykt i Vinkelmaal. Hvor klart man opfattede Sammenhængen mellem Vinklers Størrelse og Liniers Forhold, fremgaar af de Sætninger i Euklids Data, som udsige, at en Trekant under visse Betingelser er given i Form. Dette siges f. Ex. i denne Bogs Nr. 80 at være Tilfældet med en Trekant, hvori en Vinkel og Forholdet mellem Rektanglet af de hosliggende Sider og Kvadratet paa den modstaaende Side ere givne. Trekantens andre Vinkler og Forholdene mellem dens Sider bestemmes altsaa ved disse Størrelser. Data indeholder iøvrigt videregaaende Sætninger af denne Art.

Til nummerisk Beregning kunne saadanne Sætninger dog først da bruges, naar man under en eller anden

Form bestemmer Sammenhængen mellem en Vinkel given i et Vinkelmaal og Forhold mellem Linier. Saadanne Forbindelser kjendte man vel for de faa Centervinkler i de regulære Polygoner, hvis Sider man kunde konstruere og derved beregne; men dels synes man længe at have forsømt denne Udregning, dels var her kun Talen om ganske enkelte Vinkler.

Heraf kan man slutte, at den Anvendelse af Mathematiken paa Astronomien, som var begyndt med Eudoxos, endnu ikke paa Euklids Tid kan have ført til synderlig nøjagtige Bestemmelser. Hvad man kan observere nogenlunde nøjagtig, er nemlig netop Vinkler, og dem forstode Mathematikerne ikke at bruge, hvorfor man omvendt ikke lagde Vind paa saadanne nøjagtige Bestemmelser. Man har sikkert i Eudoxos' og navnlig i Platos Skole besmykket sin Ligegyldighed i den Henseende paa lignende Maade som Ligegyldigheden for udførlig Udregning af irrationale Størrelser, og ment, at naar man dog ikke kunde naa den absolute mathematiske Nøjagtighed i de empiriske Bestemmelser, kunde man lige saa godt nøjes med en grovere Bestemmelse. Idet saadanne opstilledes som Postulater, gjaldt det kun om med absolut Sikkerhed at udlede de Resultater, som følge af disse engang opstillede Forudsætninger.

Bragtes man nu end paa denne Maade til at forsømme Vinkelmaalinger, maatte Vinkelstørrelser af sig selv gjøre sig gjældende i de astronomiske Bestemmelser. De kunde saaledes frembyde sig som Forhold mellem den Tid, hvori en Bue og den hele Cirkel gjennemløbes i en jevn Cirkelbevægelse. En Prøve paa den Maade, hvorpaa man ved rigtige mathematiske Slutninger forstod at anvende den Slags Bestemmelser — og tillige paa selve Bestemmelsens Unøjagtighed — haves i en opbevaret Undersøgelse af Aristarch fra Samos om Solens og

Maanens Afstande og Størrelser. I denne Undersøgelse, i hvilken Aristarch dog har haft Forgængere, navnlig Eudoxos, benyttes dels Jordskyggens Radius i Maanens Afstand fra Jorden, hvis Forhold til Maanens Radius beregnes ved Maaneformørkelsens Varighed, dels Vinkelafstanden mellem Solen og Maanen i det Øjeblik, da Maanen netop viser sig halvt oplyst. Medens der iøvrigt i Henhold til Proportionslæren opereres med Forhold mellem Afstande og Radier, findes denne sidste Vinkel i Vinkelmaal. Dens Komplement anslaas af Aristarch til 3^0, hvoraf udledes, at Solens Afstand er 19 Gange saa stor som Maanens, hvad der er det samme som at antage, at i vort trigonometriske Sprog $sin\ 3^0 = \frac{1}{19}$.

For at komme hertil benytter Aristarch en Hjælpesætning, som trigonometrisk kunde udtrykkes saaledes: Idet $\angle\ \vartheta$ voxer fra 0 til $\frac{\pi}{2}$, vil Forholdet $\frac{\vartheta}{sin\ \vartheta}$ voxe og $\frac{\vartheta}{tg\ \vartheta}$ aftage. Denne Sætning betragter han som bekjendt, og vi opdage ogsaa let dens Forbindelse med ældre græske Undersøgelser, hvis Betydning derved bliver os klarere. $\frac{\vartheta}{sin\ \vartheta}$ og $\frac{\vartheta}{tg\ \vartheta}$ ere nemlig proportionale med Radius vector og med Abscissen til Kvadratrix (se S. 67), og de anførte Resultater have da naturlig knyttet sig til Undersøgelsen af denne Kurve.

Tillige vides det fra Bestemmelser af Sider i regulære Polygoner, at $sin\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, og at $tg\ \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, eller, da $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$, at $tg\ \frac{\pi}{8} < \frac{5}{12}$. Heraf faas til Bestemmelse af $sin\ 3^0$, eller $sin\ \frac{\pi}{60}$

$$sin\ \frac{\pi}{60} > \frac{1}{10} \cdot sin\ \frac{\pi}{6} > \frac{1}{20},$$

og $$sin\ \frac{\pi}{60} < tg\ \frac{\pi}{60} < \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{12} < \frac{1}{18},$$

altsaa $sin\ 3^0$ tilnærmelsesvis $= \frac{1}{19}$.

Det er værd at lægge Mærke til, at den samme Fremgangsmaade, idet $sin\ \vartheta < \vartheta < tg\ \vartheta$, eller som Grækerne udtrykke det, idet en indskreven Polygon har en mindre, en omskreven en større Omkreds end Cirklen, kan anvendes til en tilnærmet Bestemmelse af π. Den giver

$$3 < \pi < 3\ \tfrac{1}{3}.$$

Bestemmelser af denne Art har man været i Stand til at foretage siden Antifons og Brysons Tider (S. 60); thi idet man bemærkede de af disse begaaede Fejl, var man ogsaa i Stand til at undgaa dem. De geometriske Hjælpemidler til at opnaa en større Nøjagtighed, som vilde bestaa i Beregning af Omkredsene af regulære Polygoner med flere Sider, besad man ogsaa paa Euklids Tid. I den Henseende skulle vi nemlig ikke blot tænke paa de Polygonsider, for hvis Irrationalitet han udtrykkelig gjør Rede; thi derved indskrænker han sig til dem, som benyttes ved Konstruktion af regulære Polyedre, og han fremfører ikke alt, hvad man af hans Bog og f. Ex. af Aristarchs Benyttelse af Siden i den omskrevne regulære Ottekant $\left(2\ tg\ \frac{\pi}{8}\right)$ kan slutte, at man den Gang formaaede. For at man virkelig skulde bruge de foreliggende geometriske Hjælpemidler til en nøjagtigere Bestemmelse af π, eller til en nøjagtigere Anvendelse af maalte Vinkler, maatte der dog dels vise sig en Trang til saadanne, dels krævedes der stor Energi til den Gang at gjennemføre en Beregning, som kom til at indeholde adskillige Kvadratrodsuddragninger.

Trangen traadte frem ved Eratosthenes', i Sammenligning med tidligere Maalinger, nøjagtige Bestemmelse af Ekliptikas Heldning og ved hans Gradmaaling. Til ved den sidste at benytte Polhøjdeforskjellen og Afstanden mellem to Steder med omtrent samme Længde til Bestemmelse af Jordens Diameter krævedes netop en taalelig god Bestemmelse af π. Archimedes var det, der i sin Cirkelmaaling overvandt Vanskelighederne ved at opnaa en saadan. Vi skulle her kortelig gjøre Rede for Indholdet af hans Skrift, hvori dog desværre ingen Oplysning gives om, hvorledes han besejrede de største af Vanskelighederne nemlig Kvadratrodsbestemmelserne.

Archimedes begynder med at føre et Exhaustionsbevis for, at Cirklen har samme Areal som en Trekant med Periferien til Grundlinie og Radien til Højde. Derved føres Cirklens Kvadratur tilbage til Cirkelperiferiens Beregning. Archimedes beviser, at dennes Forhold til Diameteren, altsaa det Tal, som i den nyere Tid har faaet Navnet π, er mindre end $3\frac{1}{7}$ men større end $3\frac{10}{71}$. Det bevises derved, at selv den indskrevne 96-Kants Perimeter er større end $3\frac{10}{71}\,d$, og selv den omskrevne 96-Kants Perimeter er mindre end $3\frac{1}{7}\,d$, naar vi ved d betegne Cirklens Diameter.

Hertil kommer Archimedes ved af Forholdene mellem Siderne i en retvinklet Trekant med en vis Vinkel, x, at bestemme Forholdene mellem Siderne i en retvinklet Trekant med den halve Vinkel, $\frac{1}{2}\,x$. Idet han søger den højere Grænse for Periferien, lader han en hosliggende Kathete til x og $\frac{1}{2}\,x$ være fælles; idet han søger den lavere Grænse, Hypotenusen; men i begge Tilfælde kan den fundne Relation mellem Forholdene i vor Tids trigonometriske Sprog gjengives ved

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,x = \frac{sin\,x}{1 + cos\,x}\ \left(\text{eller}\ \frac{tg\,x}{sec\,x + 1}\right).$$

Overensstemmelsen skjules dog i Anvendelsen ved den Omstændighed, at der i den ene Undersøgelse bruges højere Grænser for de Kvadratrødder, hvortil Overgangen mellem Forholdene mellem forskjellige Sider i samme retvinklede Trekant ($sin^2 x + cos^2 x = 1$) giver Anledning, lavere i den anden, og at disse udtrykkes ved forskjellig formede Konvergenter.

Ved at gaa ud fra en retvinklet Trekant med en Vinkel $\frac{\pi}{6}$ og ved gjentagen Overgang til nye Trekanter finder Archimedes, at (med vore trigonometriske Betegnelser for de undersøgte Forhold)

$$tg \frac{\pi}{96} < \frac{153}{4673\frac{1}{2}} \text{ og } sin \frac{\pi}{96} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}},$$

og kommer derved til de foran angivne Grænser for π.

Efterat Isen engang var brudt ved Archimedes' Arbejde, skal Apollonios have givet en endnu nøjagtigere Beregning. Maaske skyldes Værdien 3,1416, der væsentlig svarer til den Nøjagtighed, som senere findes i Ptolemaios' Kordetavler, og som vi ville træffe hos indiske Forfattere, ham.

Archimedes' Skrift indeholder faktisk Bestemmelser af lavere Grænser for $sin \frac{\pi}{n}$ og højere Grænser for $tg \frac{\pi}{n}$ for $n = 6, 12, 24, 48$ og 96. Den sidste giver ogsaa en brugelig højere Grænse for $sin \frac{\pi}{96}$, og Aristarchs Arbejde viser, at man var istand til at bruge denne. Apollonios' Bestemmelse af π maa have ført til en endnu nøjagtigere Bestemmelse af en Sinus til en lille Bue eller af den Størrelse, over hvis Værdier vi have Tabeller fra senere græske Astronomer, nemlig

Korden til den dobbelte Bue. Til at beregne en fuldstændig Tavle over Korderne til Multipla af denne lille Bue behøves nu ikke mere end Kjendskab til den Sætning om indskrevne Firkanter, som nu kaldes den Ptolemæiske, fordi Ptolemaios udtrykkelig benytter den til Beregningen af sin Kordetavle, eller til en geometrisk Sætning, som kunde anvendes paa lignende Maade. En saadan har man paa Archimedes' og Apollonios' Tid let kunnet finde i det Øjeblik, man virkelig ønskede en Kordetavle, og den største Vanskelighed har ogsaa her bestaaet i Udregningen af de til Gjennemførelsen af Arbejdet nødvendige Kvadratrødder.

Den første Kordetavle, hvorom vi have sikker Efterretning, er fra det andet Aarhundrede f. Chr. og skyldes den store Astronom Hipparch. Denne eller en anden Kordetavle maa være benyttet i en opbevaret Tavle hos Heron over Forholdene mellem Arealerne af de regulære Polyedre op til Tolvkanten og Sidernes Kvadrater. Hipparchs Tavle, ligesom en senere af Menelaos, er gaaet tabt. Den Kordetavle, som findes i Ptolemaios' Almagest er derimod bevaret, idet den ved at bygges paa de ældre har kunnet naa den største Fuldstændighed og Nøjagtighed. Den gaar med et Mellemrum paa $\frac{1}{2}^{0}$ op til en Bue paa 180^{0}. Paa Grund af, at Sinus er Halvdelen af Korden til den dobbelte Bue, spiller denne Tavle samme Rolle som en Tavle over Sinus til Buer med et Mellemrum paa $\frac{1}{4}^{0}$ op til 90^{0}. Cirklens Diameter sættes $= 120$, og Korderne udtrykkes i Sexagesimalsystemet i hele, Minuter og Sekunder, det er, som ved Vinkeldelingen, i Brøker med Nævnerne 60 og 60^{2}; altsaa gives Kordernes Forhold til Diameteren i Brøker med Nævneren 432000. Til Brug ved Interpolation tilføjes 30'te Delene af Differenserne mellem de

paa hinanden følgende Korder, svarende til Buedifferenser paa 1 Minut.

Til Beregning af denne Tavle anvender Ptolemaios først og fremmest Sætningen om indskrevne Firkanter. Denne kan umiddelbart bruges til Beregning af Korden til to Buers Sum eller Differens, derved ogsaa til Beregning af Korden til den dobbelte og den halve Bue. Ved at gaa ud fra de bekjendte Korder, kan man ad denne Vej komme til Korderne til Buer paa $1\frac{1}{2}^{0}$ og paa $\frac{3}{4}^{0}$. Af disse beregnes Korden til 1^{0} ved en Slags Interpolation, som beror paa, at Forholdet mellem Korde og Bue aftager, naar Buen voxer, og at altsaa

$$\frac{\text{Korde } \frac{3}{4}^{0}}{\frac{3}{4}} > \frac{\text{Korde } 1^{0}}{1} > \frac{\text{Korde } 1\frac{1}{2}^{0}}{1\frac{1}{2}}.$$

For den her benyttede geometriske Sætning, som ogsaa Aristarch anvendte, meddeler Ptolemaios et smukt geometrisk Bevis. Efterat Korden til 1^{0} saaledes er funden, benyttes den ptolemæiske Sætning til successiv Beregning af de øvrige Korder.

Da en Kordetavle spiller samme Rolle som en Sinustavle, kan man, om man vil, ved denne Tavle og den pythagoræiske Sætning bestemme ethvert Stykke i en plan retvinklet Trekant ved to andre, hvoriblandt en Side, og derved, om end gjennem besværlige Regninger, udføre de Bestemmelser, som henhøre til den plane Trigonometri. Der findes i Almagest Exempler paa praktisk Udførelse af forskjellige saadanne Bestemmelser. Det var dog Astronomerne særlig magtpaaliggende at faa de sfærisk-trigonometriske Bestemmelser med. Hertil krævedes først og fremmest nogen sfærisk Geometri.

27. Sfærisk Geometri.

Af Kuglens Geometri have vi hos Euklid kun fundet Sætningen om Forholdet mellem Kuglers Voluminer, hvortil Archimedes føjede den exakte Bestemmelse af Overflade og Volumen; men herved kunde Astronomerne ikke blive staaende. De maatte navnlig have Midler til at karakterisere Punkters Beliggenhed paa Kuglen, Stjerners paa Himlen, Steders paa Jorden. Det sker ved en Henførelse til en saadan Storcirkel, som paa en eller anden Maade tør betragtes som bekjendt, Horizont, Ækvator og Ekliptika paa Himlen, Ækvator paa Jorden, og denne Henførelse kunde ikke godt være forskjellig fra den, som nu udføres ved de sædvanlige sfæriske Koordinater, En saadan Henførelse ligger til Grund, naar Eratosthenes for at bestemme Jordens Størrelse maaler Afstanden mellem to Steder med samme Længde og bekjendt Forskjel i Polhøjde, selv om Indførelsen af Betegnelserne Længde og Bredde først tillægges Hipparch. Vi skulle iøvrigt erindre om, at den Inddeling af Kuglen, som Euklid anvender i Elementernes 12. Bog (se S. 150), netop svarer til en Inddeling ved saadanne Koordinater.

En mere eller mindre direkte Anvendelse af sfæriske Koordinater kan benyttes til at afbilde Himlens eller Jordens Punkter paa en drejet Kugle. Det første er i alt Fald sket. Grækernes højt udviklede Geometri satte dem imidlertid i Stand til at løse de vanskeligere Opgaver, som frembyde sig, naar man paa hensigtsmæssig Maade vil afbilde en Kugle paa en Plan. I den Henseende vil det i denne Fremstilling af Mathematikens Historie være nok at anføre, at Grækerne have gjort forskjellige Anvendelser af den i geometrisk Henseende

saa vigtige og interessante stereografiske Projektion. Den bestaar som bekjendt i en Centralprojektion af Kuglefladen fra et fast Punkt af denne ind paa den Storcirkel, der har det faste Punkt til Pol, og den udmærker sig ved, at enhver Cirkel paa Kuglen projiceres som en Cirkel i Planen, og at Vinkler beholde deres Størrelser.

Af foreliggende Anvendelser vides det, at Grækerne i det mindste have kjendt den første af disse Egenskaber, der staar i nær Forbindelse med Læren om de to Rækker cirkulære Snit i en skjæv Kegle. En Bestemmelse af disse findes hos Archimedes, og Læren om de forskjellige Snit i samme Kegle udvikledes videre af Apollonios. Den stereografiske Projektion tør saaledes nok betragtes som en Frugt af disses Lærdomme. Den er paa Hipparchs Tid anvendt i et Apparat som brugtes til af en bekjendt Stjernes øjeblikkelige Højde at bestemme Tiden om Natten. Man benyttede dertil to Skiver, hvoraf den ene indeholdt Projektionerne af bekjendte Stjerner, den anden Projektioner af Horizonten og dermed parallele Lillecirkler, begge Dele projicerede fra Himlens Sydpol. Det gjaldt om at dreje den ene Skive saaledes om Billedet af Nordpolen, at den observerede Stjerne kom ind paa den til dens Højde svarende Lillecirkel. En anden Anvendelse findes i Ptolemaios Geografi.

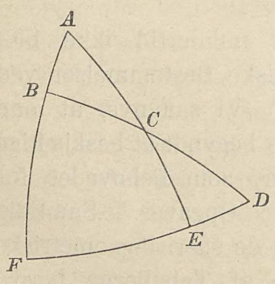
Den græske Geometri gav imidlertid ikke blot Midlerne til at foretage astronomiske Bestemmelser ved saadanne mekaniske Operationer. Vi saa nys, at man fra de store Geometreres Tid havde begyndt at beskjæftige sig med de tabellariske Arbejder, som behøvedes for ved Beregning at løse saadanne Opgaver. Samtidig maa Geometrien have tilvejebragt de sfærisk-geometriske Sætninger, hvorpaa Anvendelsen af Tabellerne beror,

og som i en anden Form svare til vore sfærisk-trigonometriske Formler vedrørende den retvinklede Trekant. Denne Form lære vi at kjende hos Ptolemaios. Han benytter dertil en Sætning, som man efter hans Angivelse har kaldt Menelaos' Sætning. I sin plangeometriske Skikkelse gaar den ud paa, at naar en Transversal skjærer Siderne i Trekant $A\,B\,C$ (henholdsvis de modstaaende til A, B og C) i D, E og F, er

$$\frac{B\,D}{C\,D} \cdot \frac{C\,E}{A\,E} \cdot \frac{A\,F}{B\,F} = 1;$$

men den er ogsaa rigtig, naar man ombytter de rette Linier med Storcirkler paa samme Kugle, Liniestykkerne med Sinus til Buestykkerne eller, som Ptolemaios maa sige, med Korderne til de dobbelte Buer. Sætningen er dog sikkert i begge Skikkelser langt ældre end Menelaos. Den plangeometriske henhørte helt til de Emner, som behandledes i Euklids Porismer, og hvad den sfærisk-geometriske Sætning angaar, saa forstod i det mindste Hipparch at udføre de Beregninger, hvortil den benyttes hos Ptolemaios.

Disse Beregninger ere de samme, som i den sfæriske Trigonometri foretages ved de 4 Formler, der i en retvinklet sfærisk Trekant finde Sted mellem de 3 Sider eller mellem 2 Sider og en Vinkel. Lad $A\,B\,C$ være en saadan Trekant med den rette Vinkel i B, og lad D, E og F være de Punkter, hvori Storcirklen med Polen A skjærer denne sfæriske Trekants Sider. Da er i Grademaal $\frown F\,E = \angle A$ og $\frown E\,D = 90^0 - \angle A$. Figurens øvrige Buer ere Sider i Trekanten $A\,B\,C$ eller deres



Komplementer. Naar man nu efterhaanden betragter de fire Trekanter ABC, CDE, AFE og DBF og hver Gang den fjerde Storcirkel som Transversal, faar man netop de omtalte fire Relationer. Først hos sene arabiske Forfattere træffe vi en Relation mellem 2 Vinkler og en Side.

28. Den græske Geometris Forfald.

Den Udvikling af den beregnende Geometri hos Grækerne, som vi nys have fulgt, strakte sig et ikke ganske lille Stykke ud over det Tidspunkt, da den øvrige græske Geometri naaede sit Højdepunkt. I de mere abstrakte, geometriske og i geometrisk Form fremstillede rent mathematiske Undersøgelser, hvori Grækerne naaede særlig vidt, kunne vi nemlig egentlig ikke paavise noget Fremskridt af større Betydning efter Apollonios. Dette er ikke saaledes at forstaa, at det mathematiske Arbejde ophørte strax efter ham. Den lagte Grundvold var saa sikker, og de anvendte Behandlingsmaader saa frugtbare, at de store Mathematikeres Disciple, saalænge Tidsforholdene tillode det, maatte have let ved at arbejde videre i de begyndte Retninger. Dette er ogsaa sket. Det er imidlertid ret forklarligt, at Udbyttet af dette Arbejde, som netop ved at bygges paa Mestrenes simplere Undersøgelser kan have strakt sig til mindre tilgængelige og mere specielle Omraader, i den følgende Forfaldstid hverken har kunnet finde saa megen Interesse eller saa megen Forstaaelse som de tilgrundliggende simplere Arbejder, og derfor er gaaet tabt.

Det er da ogsaa kun enkelte Meddelelser, som foreligge om geometriske Arbejder af de store Geo-

metreres Efterfølgere eller samtidige. Om Nikomedes og hans Konkoide have vi allerede talt. Om Perseus siges, at han skal have undersøgt de saakaldte spiriske Kurver, der antages at have været Snit i den Flade, som frembringes ved en Cirkels Omdrejning om en Axe i dens Plan (Toren). En enkelt af disse Kurver har maaske tidligere været undersøgt af Eudoxos, som til Fremstilling af Planeternes tilsyneladende Baner og disses Knuder har anvendt en Kurve, kaldet Hippopede (Hesteløbskurven), som maaske nok har været den, der nu kaldes Lemniskat. Diokles' Kissoide er ogsaa i vore Dage kjendt og bruges nu som et nyttigt Exempel paa Differential- og Integralregningens Anvendelse paa Geometrien. Diokles skylder man ogsaa en ny Løsved Keglesnit af Archimedes' Trediegradsligning.

Fra den nærmeste Tid efter de store Geometrere skrive sig sikkert ogsaa de vigtigste af de af Pappos anførte Resultater, som ikke lade sig føre tilbage til disse selv. Nogle kunne ogsaa være fremkomne i de enkelte Perioder, da Forstaaelsen atter opblussede, og et enkelt tillægger Pappos sig selv. Vi skulle her nævne nogle saadanne Resultater. Foruden det af Archimedes fundne plane Spiralareal har man bestemt Arealer, begrænsede af de paa Kuglefladen paa tilsvarende Maade fremstillede Spiraler. Archimedes' Bestemmelse af Kuglefladens Areal lagdes derved til Grund. — Projektionen af et plant Snit gjennem en Frembringer i en vindskjæv Vindelflade ned paa Grundfladen er en Kvadratrix. — Pappos tillægger sig selv den vigtige almindelige Sætning, at Volumen af et Omdrejningslegeme er lige stort med det Areal, som Meridiankurven indeslutter, multipliceret med den Vej, som dette Areals Tyngdepunkt gjennemløber under Omdrejningen. Denne Sætning, som efter en senere Gjenfinder har faaet Navnet

Guldins Sætning, maa iøvrigt have ligget de gamles geometriske Fremstilling af de til Tyngdepunktsbestemmelser nødvendige Integrationer meget nær. Pappos' almindelige Udtalelse er dog en virkelig Fortjeneste. — Hos Pappos findes fremdeles en Udvidelse af Stedet til fire Linier (S. 187). Han opstiller som Bestemmelse at en vis Kurve, at Forholdet mellem Produkterne af et Kurvepunkts Afstande fra to Grupper af givne Linier i ubegrænsede Antal skal have en given Værdi. Forholdet er i Overensstemmelse med Euklids femte Bog fremstillet som et sammensat Forhold. Pappos meddeler dog ingen Egenskaber ved denne Kurve udover dens Definition. Denne er imidlertid bleven et vigtigt Udgangspunkt i Descartes' analytiske Geometri.

Hvor interessante end flere af de her anførte Resultater kunne være, vil den Omstændighed, at der hos Pappos, ved Siden af de talrige og betydningsfulde Meddelelser om de gamle Mathematikeres Arbejder, som vi alt have benyttet i rigt Maal i vor Omtale af disse, ikke kan paavises stort andre nye Sætninger, vidne om, at Mellemtiden mellem Apollonios og Pappos ikke indenfor Geometrien har bragt Fremskridt af blivende Betydning. At disse 500 Aar da have bragt betydelig Tilbagegang i Kjendskabet til og i Forstaaelsen af de tidligere Tiders mathematiske Skatte, var at vente. Dette ses ogsaa tydelig af de mange Hjælpesætninger til de gamle Skrifter, som Pappos har opbevaret fra denne Mellemtid. Gjennem de omhyggelige, ofte smaalige Forklaringer, disse give af Enkeltheder, ses det nemlig, hvor lidet man havde bevaret Blikket for Helhedens Betydning.

Naar der nu spørges, hvorledes en saadan Nedgang af en saa grundig og rigt udviklet Videnskab som den

græske Mathematik var mulig, kan man vel pege hen paa de i det historiske Overblik nævnte forskjellige ydre Omstændigheder; men disse give ikke nogen tilstrækkelig Forklaring. Da, som vi se hos Pappos, mange ældre Skrifter bestandig bevaredes, kunde man vente, at ved disse den tabte mathematiske Indsigt kunde gjenvindes og den afbrudte Udvikling gjenoptages. Dette skete ikke i Oldtiden; og hos Araberne og dernæst hos den nyere Tids Europæere maatte Studiet af de gamles Skrifter ledsages af en helt ny Udvikling, — der tillige var frugtbar i andre Retninger — før man fuldt ud tilegnede sig det, som disse Skrifter indeholde.

Grunden til en saadan Nedgang og til Manglen paa Betingelser for en Gjenoprejsning maa ligge i Mangler ved selve de gamle Skrifter, som opbevaredes. Disse Mangler have vi vel lejlighedsvis peget hen paa, men skulle her sammenstille dem.

Den første hænger nøje sammen med noget, som i anden Henseende har vakt vor højeste Beundring, nemlig den overordentlige Omhu, hvormed man gjennem bestemte Former sikrede sig den logiske Uangribelighed. For denne tilsidesattes nemlig alt, hvad der kunde lette Tilgængeligheden, give Overblik eller tydeliggjøre Hensigterne med de enkelte Operationer. Vel vedligeholdtes længe til en vis Grad Forstaaelsen af, hvad der opnaaedes ved disse Former, og man lærte tildels at efterligne dem; men idet man satte al sin Kraft ind herpaa og ikke fik nogen Vejledning til en almindeligere Forstaaelse af den hele Sammenhæng, blev man staaende ved sin Interesse for disse Former og en sparsom Tilegnelse af de simpleste af de Enkeltheder, der nu en Gang vare lagte ind i dem. Fremtrædende i de beundrede Former fik disse et saadant Præg af Fuldkommenhed, at man savnede Mod til selvstændige Arbejder. Udbyttet

af saadanne vilde nemlig, i ethvert Tilfælde til en Begyndelse, fremtræde i en langt mindre fuldkommen Skikkelse.

Med den geometriske Form, som Algebraen og den almindelige Størrelseslære havde antaget, var ogsaa forbundet en Ulempe. Ganske vist gav denne geometriske Form i Gjennemsigtighed og Anvendelse til virkelig Udførelse af algebraiske Operationer ikke det nuværende algebraiske Tegnsprog saa meget efter, som en moderne Læser vil være tilbøjelig til at antage. Den, som er fortrolig med denne Fremstillingsmaade og altsaa kjender Betydningen af Figurerne, kan omlægge og operere med dem næsten med samme Lethed som den, hvormed man nu flytter om med og sammentrækker Bogstavudtryk; han kan fremdeles i mundtlig Undervisning ved at pege paa Figurerne let gjøre sine Operationer forstaaelige for sine Disciple. Dette bidrog til, at en fuld Forstaaelse kunde holdes vedlige, saa længe den mundtlige Undervisning kunde fortsættes i Ro i Alexandria. Men saa snart denne Ro forstyrredes, og den ved mundtlig Undervisning vedligeholdte Tradition tabtes, og man altsaa alene var henvist til Læsning af de omhyggelig udarbejdede Værker, maatte der lides et væsentligt Tab. Den geometriske Fremstilling af Algebraen er nemlig ikke let at læse. Dette vil forstaas, naar det erindres, at Text og Figur til en vis Grad maa fremtræde hver for sig, og man altsaa under Studiet maa fare frem og tilbage fra den ene til den anden.

Til disse formelle Svagheder kom en, som vi alt ofte have nævnt, og som væsentlig angik Indholdet. De græske Mathematikere havde sat dettes videnskabelige Værdighed saa højt, at de fra deres Hovedværker udelukkede alt, som ikke forekom dem absolut exakt. Dermed blev,

som vi navnlig have set, da vi talte om Roduddragninger virkelige nummeriske Udregninger, der som oftest kun kunne give en Tilnærmelse, udelukkede og henviste til den mindre højt agtede Logistik. Dermed gik man tillige Glip af de praktiske Anvendelser, der skulde have givet Fagmændene nye Impulser og holde Interessen vedlige for Videnskaben i de Tider, da Blikket lukkedes for dennes eget Værd.

De skadelige Følger af denne Forsømmelse af Mathematikens Anvendelser træde maaske bedst frem ved de gavnlige Følger af, at man i enkelte Retninger ikke gjorde sig skyldig i samme Forsømmelse. Vi have nys set, at Anvendelserne paa Astronomien lode den beregnende Geometris Udvikling fortsættes, efter at den øvrige Stilstand var indtraadt. Vi have set, at man i Forbindelse hermed vedblev at gjøre betydelige Fremskridt i Udførelsen af praktiske Beregninger. Derved udvikledes en Fortrolighed med Tallene, der sikkert har bidraget til den betydelige Udvikling af Arithmetiken ud over det af de ældre græske Mathematikere naaede Standpunkt, som træder os imøde hos Diofantos.

29. Den senere græske Arithmetik; Diofantos.

Det almindelige, videnskabelige Grundlag for den græske Arithmetik have vi lært at kjende af Euklids 7.—9. Bog. Har dette Grundlag nu end ikke det Omfang og den videnskabelige Sikkerhed som den i de andre Bøger lagte Grund for Geometri og den i geometrisk Form givne almindelige Størrelseslære, er dog den samme almindelige Form bibeholdt. Skjønt Talen er om Tal, oplyses Sætningerne ikke ved Talexempler. Uden Behandlingen af mange saadanne, kan den al-

mindelige Theori dog ikke være bleven til. Pythagoræerne have saaledes sikkert allerede kjendt mange Exempler paa de saakaldte fuldkomne Tal. Om forskjellige andre Talformer, navnlig Polygonaltallene, hvormed man tidlig syslede, have vi allerede talt, da vi skildrede den geometriske Arithmetik. Disse Undersøgelser have sikkert netop i de tidligere Tider været forbundne med praktisk Udregning af saadanne Tal. Endelig have vi set, at en Klasse af taltheoretiske Undersøgelser tidlig tildrog sig Opmærksomheden, nemlig saadanne, som vedkom Anvendelsen af de almindelige Løsninger af Ligninger af anden Grad paa nummeriske Ligninger. Man opsøgte Betingelserne for, at Sammensætninger af Tal kunde føre til rationale Opløsninger af de kvadratiske Ligninger, altsaa Betingelserne for at visse Taldannelser blive Kvadrater. Dette maa sædvanlig ske ved Behandling af saadanne Ligninger, som vi nu kalde ubestemte Ligninger af anden Grad. Vi have ogsaa set, at disse kunne benyttes ved tilnærmet Kvadratrodsuddragning af enkelte bestemte Tal, saaledes 2. Det er dog kun enkelte Exempler paa saadanne ubestemte Ligninger, vi have fundet i den ældre græske Mathematik; men vi fremhæve dem her som Begyndelsen til en Retning, hvori vi snart skulle se, at Grækerne senere bragte det langt videre. Den Interesse, der først var vakt ved Ønsket om at erholde rationale Løsninger, har da senere knyttet sig til selve de ubestemte Ligninger.

Et Exempel paa, at man ogsaa i den alexandrinske Tid har fortsat praktiske Undersøgelser over visse Klasser af hele Tal, er Beretningen om, hvorledes Eratosthenes optalte de første Primtal ved Hjælp af den Methode, som kaldes «Eratosthenes' Si». Man opstiller først den hele Talrække saa langt, som man vil gaa i sin Undersøgelse, stryger dernæst hver andet Tal, idet der

begyndes med 4, hver tredie, idet der begyndes med 6, hver femte, idet der begyndes med 10 o. s. v. De Tal, der da ikke «udsies», ere Primtallene.

Man tillægger Archimedes en indviklet arithmetisk Opgave om Solens Okser, men maaske med Urette. Derimod have vi i det foregaaende set ham lejlighedsvis udføre en anden taltheoretisk Bestemmelse, som han netop havde Brug for, nemlig af Summen af de første Kvadrattal. De saaledes dannede Summer give et Exempel paa de under den geometriske Arithmetik omtalte Pyramidaltal, nemlig saadanne, som svare til Pyramider med kvadratisk Grundflade. De føre tillige let til Beregning af de andre Pyramidaltal.

Vi se saaledes, at ej blot for Polygontallenes, men ogsaa for Pyramidaltallenes Vedkommende, Nikomachos, hos hvem vi særlig hente Oplysning om de gamles Kjendskab til disse Figurtal, kunde bygge paa, hvad der allerede forelaa fra de store Mathematikeres Tid. Ved Siden af Læren om disse Tal findes hos ham en Iagttagelse, som danner en Fortsættelse af den allerede af Pythagoræerne kjendte Sætning om Kvadrattallenes Dannelse af Summer af de første ulige Tal. Den gaar ud paa, at ogsaa ethvert Kubiktal kan dannes som Sum af paa hinanden følgende ulige Tal. Den i Formlen

$$n^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \cdots (n^2 + n - 1)$$

udtrykte almindelige Sætning synes Nikomachos dog ikke fuldstændig at have kjendt.

I Forbindelse hermed kan det anføres, at det fra en langt yngre romersk Forfatter vides, at man i Oldtiden har kunnet summere de første Kubiktal og altsaa vidst, at

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$$

Dette Resultat kan være udledet af det her nævnte. Hos en arabisk Forfatter findes der dog et andet Bevis, som ved sin geometriske Form tyder paa græsk Oprindelse, og som paa en Gang kan have ført til Sætningen hos Nikomachos og til Kubiktallenes Summation. Det kan i den nuværende Algebras Sprog gjengives ved

$$(1 + 2 + \cdots n)^2 - (1 + 2 + \cdots n - 1)^2 = n\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n-1)}{2} = n^3;$$

men det maa da tillige bemærkes, at Differensen mellem de to Kvadrater paa sædvanlig græsk Maade er fremstillet som en Gnomon, der her bestaar af de to Rektangler

$$n(1 + 2 + \cdots n) = n\frac{n(n+1)}{2}$$

og $$n(1 + 2 + \cdots n - 1) = n\frac{n(n-1)}{2}.$$

Der findes dog indtil henad 300 efter Chr. kun spredte Bidrag til en videre Udvikling af den i Geometriens bedste Tid kjendte Arithmetik, og selv om disse Bidrag vides det ikke, hvor tidlig det meddelte i Virkeligheden har været kjendt. Først hos Diofantos fra Alexandria møde vi noget nyt af større almindelig Interesse. Hans opbevarede arithmetiske Værk viser os Sider af den græske Mathematik, hvortil vi kun have lært Spirerne at kjende i de opbevarede Skrifter af ældre Forfattere. Ganske vist er selve det theoretiske Grundlag det samme, som vi have fundet hos Euklid, og ganske vist falder Formaalet for Diofants interessante Undersøgelser sammen med den nys omtalte Bestræbelse fra ældre Tider for at undgaa irrationale Størrelser; men

disse Undersøgelser drives af ham i et hidtil ukjendt Omfang. De sætte ham istand til at opstille Exempler paa bestemte Opgaver, der under stærkt varierende Former føre til Ligninger med rationale Løsninger, og de bringe ham navnlig til at opstille talrige ubestemte Opgaver, af hvilke det gjælder om at finde rationale Løsninger. I hans hele Fremstilling er der endvidere den store Forskjel fra de ældre opbevarede Fremstillinger, at han bestandig kun behandler specielle Talopgaver og kun meddeler de til disse hørende Taloperationer uden at opstille almindelige Sætninger. Da ikke blot hans givne Tal ere rationale, men ogsaa de søgte skulle være det, har han ikke samme Behov for den geometriske Fremstilling, som hvor Resultaterne skulde være anvendelige paa hvilkesomhelst Størrelser, ligegyldig om de kunde fremstilles ved Tal (ɔ: rationale Tal) eller ikke. Han bruger vel de fra den geometriske Fremstilling laante Benævnelser, saasom Rektangel for Produkt, men at de behandlede Størrelser dog kun ere Tal, fremgaar f. Ex. af, at den geometriske Homogeneitet ikke overholdes. En Side kan saaledes godt lægges til et Areal.

Diofant lægger endog saa liden Vægt paa formel Almengyldighed, at han jevnlig, naar der i en Opgave i Almindelighed siges, at et vist Tal skal have en given Værdi, strax tillægger det en bestemt Værdi; med denne regner han dernæst, saa den forelagte almindeligere Opgave kun for saa vidt løses, som man af det valgte Exempel kan slutte, hvorledes man i Almindelighed maa bære sig ad. At han virkelig har dette for Øje og kun ved Mangel paa et Tegn for et bekjendt men vilkaarligt Tal er bragt til at indføre den bestemte Værdi, kan ses af, at han i saadanne Tilfælde, hvor ikke ethvert

Tal kan bruges, udtrykkelig oplyser dette i en Diorisme til selve Opgaven. Indførelsen af en bestemt Værdi anvender Diofant ogsaa ofte forsøgsvis paa selve den ubekjendte. Naar det da viser sig, at den ikke passer, kan han ved at følge de foretagne Regningers Gang se, hvilken Ændring af den forsøgsvis antagne Værdi der virkelig vilde føre til den opgivne Form eller Værdi af en anden Størrelse. Den *regula falsi*, som vi allerede have truffet hos Ægypterne, er en meget simpel Anvendelse af denne Methode; men Diofant anvender den i langt mere indviklede Tilfælde.

Ved de Regninger frem og tilbage, som saadanne Forsøg kræve, behøves stor Færdighed i at tumle med Tal og i at overskue Operationer med disse. En saadan er det ogsaa fremfor alt Diofant lægger for Dagen i Modsætning til, hvad der foreligger i de gamle græske Mathematikeres opbevarede Arbejder. Denne umiddelbare Færdighed strækker imidlertid ikke altid til. Idet den geometriske Fremstilling var bortfalden, behøvedes der andre Midler til at fastholde en ubekjendt Størrelse og simple Funktioner af denne. Dette opnaar Diofant ved et algebraisk Tegnsprog. Er dette end kun endnu en Afkortelse af Skriftsprogets Ord og aldeles ikke bestemt til virkeligt Organ for de algebraiske Operationer, er det dog tjenligt til det, man allerførst maa forlange af et Tegnsprog: at give et hurtigere og bekvemmere Overblik, end man kan faa ved en Fremstilling i Ord.

Den ubekjendte betegnes ved Bogstavet ς (Slutningssigma), som har maattet vælges, fordi det alene ikke havde nogen bestemt Talbetydning. Dens Potenser op til sjette betegnes ved Afkortninger af de græske Ord for Kvadrat o. s. v., og lignende Betegnelser bruges for Brøker

med 1 til Tæller og disse Størrelser til Nævner. Der haves saaledes Betegnelser for

x^{-6}, x^{-5}, x^{-4}, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1} x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6

foruden en særegen Betegnelse for Enere (altsaa for x^0). Flerleddede Størrelser, sammensatte af de her nævnte multiplicerede med Talofficienter, kunne derved paa en let overskuelig Maade baade opskrives, idet man umiddelbart sætter adderede Led ved Siden af hinanden og bruger et omvendt ψ som vort Minus, og sættes lige. Der gives bestemte Regler for Multiplikation af de før nævnte Potenser, hvorved atter flerleddede Størrelser kunne multipliceres. Ligeledes forstaar Diofant af Ligninger at danne nye ved at bringe Led, Faktorer og Divisorer over fra den ene til den anden af de lige store Størrelser.

En væsentlig Ulempe ved dette Tegnsprog er det, at der kun haves Tegn for en enkelt ubekjendt og i Forbindelse dermed særlige Tegn for dens forskjellige Potenser. En Udvidelse til to ubekjendte vilde, netop fordi disse sidste Tegn ere særlige, kræve 12 nye Tegn, og paa dem er der slet ikke tænkt. Som det saa ofte sker, giver Redskabets Mangelfuldhed imidlertid Anledning til at vise personlig Færdighed. Denne Færdighed lægger Diofant for Dagen, ikke blot ved Brugen af de før nævnte Forsøgsværdier for de ubekjendte, som han ikke kan benævne, men ogsaa paa anden Maade. Naar der i en Opgave er flere ubekjendte Størrelser, som skulle bestemmes ved forskjellige Opgivelser, vælger han den ubekjendte, hvorpaa han vil anvende sine Betegnelser — og som vi her ville kalde x —, saaledes, at han fra Begyndelsen af kan faa de andre udtrykte ved den. Tillige maa det bemærkes, at Betegnelserne ikke fastholdes gjennem hele Opgaven. Det kan saaledes være én ubekjendt, som fra først af sættes $= x$, i paafol-

gende Mellemregninger en anden og en tredie, og idet man efter disses Bestemmelse atter vender tilbage til Hovedopgaven, paany den første ubekjendte. Det ses af disse Bemærkninger, at Diofant væsentlig maatte udføre det, vi kalde Eliminationer, i Hovedet og fremstille dem i Ord; men netop derved fik han Øvelse i at vælge sine ubekjendte saaledes, at Eliminationen blev saa simpel som muligt.

Man kunde tro, at Mangelen paa flere Betegnelser for ubekjendte vilde volde særlige Ulemper ved de ubestemte Opgaver. Dette er dog ikke Tilfældet, idet disse sædvanlig gaa ud paa, at en sammensat Størrelse skal være et Kvadrat eller lignende. For Kvadratroden o.s.v. heraf behøves da ingen særskilt Betegnelse.

Det er disse ubestemte Opgaver, hvoraf der søges rationale Opløsninger, som fortjene størst Opmærksomhed i Diofants arithmetiske Arbejde. Han betragter det dog i Reglen kun som hans Sag at finde en enkelt Løsning af Opgaven og ikke en saadan almindelig Løsning, hvori alle mulige enkelte Løsninger ere indbefattede. Denne Begrænsning bør dog ikke fastholdes altfor ensidig, naar man ret vil forstaa, hvad Diofant har at bringe. Den beror nemlig i Reglen paa, at han ogsaa her strax tillægger de Hjælpestørrelser, ved hvilke Opgaven løses, bestemte Værdier; men han har da ogsaa her lige saa godt som i de tidligere Tilfælde kunnet se, at man ogsaa kunde have benyttet andre Værdier af Hjælpestørrelserne. Dette faar han Lejlighed til udtrykkelig at lægge for Dagen, naar en paa en vis Maade dannet Størrelse paa en Gang skal være et Kvadrat og tilfredsstille en anden Betingelse. Da bliver det ikke tilstrækkeligt at give den Hjælpestørrelse, der gjør den til et Kvadrat, en bestemt Værdi; den bliver derimod selv en ubekjendt Størrelse, x, ved hvilken Diofant

da i Almindelighed maa udtrykke de oprindelig søgte Størrelser, for bagefter at bestemme x ved den anden opgivne Betingelse.

Af de ubestemte Ligninger, som Diofant faar Lejlighed til at løse, henhøre en stor Mængde under Formerne

$$y^2 = a^2 x^2 + bx + c \qquad (1)$$

og

$$y^2 = ax^2 + bx + c^2 \qquad (2)$$

Den første løses, idet vi for at forkorte Fremstillingen tage det nuværende Tegnsprog til Hjælp, ved at sætte $y = ax + z$, den sidste ved at sætte $y = zx + c$, hvorefter x let udtrykkes rationalt ved z, som paa sin Side kan antage alle rationale Værdier (som blot ikke gjøre nogen Størrelse negativ). Det ses, at de anvendte Substitutioner ere de samme, som nu bruges til at gjøre irrationale Differentialer rationale.

Til den sidste af de anførte Ligningsformer kunne de sammenhørende Ligninger, eller som Diofant siger «den dobbelte Ligning»

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= ax + b^2 \\ z^2 &= cx + b^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

føres tilbage. Ja sidste Led behøver ikke at være det samme, naar det blot begge Steder er et Kvadrattal; thi da kan man opnaa, at dette faar samme Værdi ved Multiplikation af den ene Ligning med et Kvadrat. For Nemheds Skyld have vi antaget, at dette allerede er opnaaet. Subtraktion af Ligningerne giver, naar man dernæst udtrykker x ved z,

$$y^2 - z^2 = \frac{a-c}{c}(z^2 - b^2) = \frac{a-c}{c}(z-b)(z+b).$$

Sattes her $z = t + b$, faas

$$y^2 = \frac{a}{c} t^2 + \frac{2\,ab}{c} t + b^2,$$

som er af den foranstaaende Form (2).

Ved andre lignende Kunstgreb har Diofant ogsaa vidst at finde idetmindste enkelte rationale Opløsninger af andre sammenhørende Ligninger, som ere indbefattede i Formen:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= ax^2 + bx + c, \\ z^2 &= dx^2 + ex + f \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

dog kun af saadanne, hvor enten baade c og f eller baade a og d ere Kvadrattal.

Da det som anført kun er gjennem Behandlingen af en Række enkelte Opgaver, at vi se, hvorledes Diofant i det hele bærer sig ad, vil det være passende at give en Prøve paa en saadan Opgave og dens Behandling. I Opgave 6 i 6. Bog søges en saadan retvinklet Trekant, at Summen af Arealet og en Side, udtrykt i (rationale) Tal, er et givet Tal. For at gjøre tydeligt, hvor Diofant bruger sit Tegnsprog og hvor ikke, skulle vi i Gjengivelsen skrive x og x^2 i Stedet for Diofants egne Tegn, medens de øvrige Bogstaver udtrykke Tal, hvorom Diofant taler i sædvanlige Ord. Opgaven gaar da ud paa at finde rationale Værdier af A, B og C, som tilfredsstille Ligningerne:

$$A^2 + B^2 = C^2$$

og

$$\tfrac{1}{2} AB + A = a,$$

hvor a betegner et givet Tal. Dette giver Diofant dog strax Værdien 7. Forsøgsvis indsættes dernæst $A = 3x$, $B = 4x$, $C = 5x$, som tilfredsstille den første givne Ligning. Den anden giver da

$$6x^2 + 3x = 7.$$

Betingelsen for, at denne Ligning skal give rationale Rødder, er, at $\frac{9}{4} + 6 \cdot 7$ er kvadratisk. Det er den ikke; men Regningen med de bestemte Tal har givet Diofant Lejlighed til at se, hvorledes den Størrelse, som skal være et Kvadrat, er sammensat af Størrelser proportionale med Trekantens Sider. Han opnaar altsaa det samme, som vi vilde opnaa ved at sætte

$$A = \alpha x, \; B = \beta x, \; C = \gamma x,$$

nemlig at Betingelsen

$$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha \beta}{2} \cdot 7 = \text{et Kvadrat}$$

er Betingelsen for rationale Opløsninger.

Da det kun kommer an paa Forholdet mellem Siderne, kan man her sætte $\alpha = 1$. Diofant tager dernæst foreløbig β til ubekjendt x, og det Udbytte, som han har haft af de forsøgsvis valgte Værdier, er da, at

$$1 + 14 x = D^2.$$

Ifølge den første givne Ligning skal tillige

$$1 + x^2 = E^2.$$

Disse sammenhørende Ligninger henhøre unden den nys anførte almindelige Form (4). Efter deraf at have udledet

$$x (x - 14) = E^2 - D^2$$

slutter Diofant, aabenbart ved Opløsning af højre Side i Faktorer og ved at sætte

$$E + D = x, \; E - D = x - 14,$$

at D er den halve Differens mellem Faktorerne eller $= 7$, hvorefter $x = \frac{24}{7}$.

Denne sidste Værdi skal tilhøre Forholdet mellem Katheterne. Idet Diofant derefter paany lader x have

en lignende Betydning som oprindelig, sætter han i den anden givne Ligning

$$A = 7x,\ B = 24x.$$

Man faar da

$$7 \cdot 12x^2 + 7x = 7,$$

hvoraf $x = \frac{1}{4}$, $A = \frac{7}{4}$, $B = 6$, $C = \frac{25}{4}$.

For at give en fyldigere Forestilling om Diofants mange Opgaver skulle vi endnu i Flæng vælge et Par Exempler og tilføje korte Angivelser af hans Løsninger.

II, 20. At finde tre Kvadrattal af den Beskaffenhed, at Differensen mellem det største og midterste staar i et givet Forhold til Differensen mellem det midterste og mindste. — Sættes det mindste $= x^2$, det midterste $(x + a)^2$ bliver det største

$$(x + a)^2 + m[(x + a)^2 - x^2].$$

At dette skal være et Kvadrat udtrykkes ved en Ligning af den foran nævnte Form (1). Diofant lader blot m være $= 3$, $a = 1$.

III, 2. At finde tre Tal af den Beskaffenhed, at Kvadratet af deres Sum, naar hvert af Tallene adderes dertil, giver nye Kvadrater. — Diofant lader Summen være x. Betingelserne ere da opfyldte, naar Tallene ere $(a^2 - 1)x^2$, $(b^2 - 1)x^2$, $(c^2 - 1)x^2$, og naar

$$(a^2 - 1)x^2 + (b^2 - 1)x^2 + (c^2 - 1)x^2 = x,$$

som giver et rationalt Udtryk for x. Diofant lader blot a, b og c være 2, 3 og 4.

IV, 27. At finde to Tal af den Beskaffenhed, at Produktet forøget med hvert af Tallene bliver en Kubus. — Diofant sætter det første Tal $= a^3 x$ (og vælger

$a = 2$), det andet $= x^2 - 1$, hvorved den ene Betingelse umiddelbart er opfyldt. Der kræves endnu, at

$$y^3 = a^3 x^3 + x^2 - a^3 x - 1.$$

I Overensstemmelse med den Maade, hvorpaa de ubestemte kvadratiske Ligninger (1) og (2) løstes, løses denne kubiske ved at sætte $y = a x - 1$, hvorved faas en Ligning af første Grad til Bestemmelse af x.

Vi skulle endnu bemærke, at enkelte af Diofants Opgaver give ham Lejlighed til at vise Kjendskab til visse taltheoretiske Sætninger, saaledes til den, at et Tal af Formen $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ paa to Maader kan opløses i en Sum af to Kvadrater, nemlig

$$(a c \mp b d)^2 + (a d \pm b c)^2,$$

og den, at et Tal af Formen $4n + 3$ slet ikke kan opløses i en Sum af to Kvadrater. —

Exemplerne ville have vist, at det kun er rationale (og selvfølgelig positive) Løsninger, Diofant søger, og ikke Opløsninger i hele Tal. Det ses heraf, at det beror paa en Fejltagelse, naar man har kaldt ubestemte Ligninger af første Grad, der skulle opløses ved hele Tal, «Diofantiske Ligninger». Ubestemte Ligninger af første Grad findes ganske vist hos Diofant; men han bekymrer sig kun om at angive, hvorledes den ene ubekjendte udtrykkes ved den anden, idet dennes Rationalitet af sig selv medfører hins. Disse Opgaver gave Diofants Udgiver i det 17. Aarhundrede, Bachet de Méziriac, Anledning til selvstændig at rejse Spørgsmaalet om hele Opløsninger og løse denne Opgave. Den var dog tidligere løst af indiske Forfattere, som Bachet ikke kjendte.

Der rejser sig nu det Spørgsmaal, hvor meget af Diofants Arbejde der skyldes ham selv, og hvor

gammelt det øvrige er. Til Besvarelsen heraf haves ikke mange Holdepunkter. Det er fremhævet, at man allerede paa den Tid, da den øvrige græske Mathematik blev til, har behandlet enkelte Opgaver af samme Natur som dem, der beskjæftige Diofant. At der ikke træder os flere imøde i de opbevarede Skrifter, kan vel forklares af, at de efter disse Skrifters Natur ikke hørte hjemme i dem. Men jeg tror dog ikke, at mange af Diofants Opgaver skrive sig fra den Tid. Den Regnefærdighed, som vi møde hos Diofant, have vi nemlig ikke faaet Indtryk af, at de ældre græske Mathematikere besad. Paa den anden Side skyldes en saa stor Samling af forskjelligartede Opgaver som den, vi finde hos Diofant, sikkert ikke en enkelt Mand. Vi ville derfor nærmest antage, at Dannelsen af disse Opgaver er begyndt paa et meget tidligt Standpunkt, vist nok strax efter Opdagelsen af irrationale Størrelser, at den dernæst er fortsat ud over den Tid, da ellers den græske Mathematiks Udvikling var standset, maaske lige til Diofant, som i den Henseende godt kan have personlige Fortjenester. At en saadan Fortsættelse af Udviklingen har kunnet finde Sted med en enkelt Gren af Mathematiken, kan bero paa, at den dertil vigtige Regnefærdighed efterhaanden er udviklet, dels ved Astronomiens Krav dels ved Berøring med et andet Folk, Inderne. Med disse kom navnlig Alexandria i Forbindelse ved sin Handel. Som vi skulle se, besad nemlig Inderne, ogsaa førend de opfandt Positionssystemet, o: den nu brugelige Maade at skrive Tal paa, en stor Færdighed i at benævne, fremstille og regne med Tal. Denne kunde særlig gjennem Handelsforbindelser meddeles til Grækerne, som endnu besad en Del af de mathematiske Betingelser for at benytte den. Til Gjengjæld have Inderne saa ved den samme Berøring modtaget en Del af Grækernes mathematiske

Resultater. Disse have de, som vi ligeledes skulle se, forstaaet at bruge, navnlig hvor de have ladet sig omsætte i Taloperationer, men uden nogensinde at være trængt ind i Grækernes strenge theoretiske Begrundelse.

Hvad særlig angaar Diofants Tegnsprog, der afviger en Del fra det, vi træffe hos de langt yngre indiske Forfattere, hvis Arbejder ere opbevarede, behøve vi ikke deri at se noget Laan fra fremmede. De Afkortninger, han bruger, maa frembyde sig af sig selv, naar man uden at bruge den ældre geometriske Fremstilling skal meddele andre, ja blot naar man selv skal fastholde, de efterhaanden dannede Sammensætninger af bekjendte og ubekjendte Tal. Har man en Gang nedskrevet dem, vil deres store Nytte som Middel til Overblik have vist sig af sig selv. Diofants Tegnsprog kan altsaa godt skyldes ham selv; men af de samme Grunde kan det ogsaa være dannet af en anden enkelt Person.

Endnu skulle vi allerede her kaste et Blik paa den Betydning, Diofants Arbejde senere har faaet. Den nummeriske Beskaffenhed af Diofants bestemte Ligninger af første og anden Grad maatte gjøre disse langt tilgængeligere for dem, der ikke forud vare indviede i den græske Mathematik, end de abstrakte geometriske Former, hvori navnlig Ligningerne af anden Grad forekomme hos Euklid, og disse og Ligninger af første Grad anvendes i opbevarede Skrifter af andre geometriske Forfattere. Det er derfor nærmest bleven Diofant, gjennem hvem den græske Algebra har forplantet sig til Araberne, fra hvem den ved Videnskabernes Gjenopvaagnen i Europa atter kom hertil. Hvor megen Indflydelse hans Behandling af ubestemte Ligninger har haft paa Indernes, som vi snart skulle omtale, vides ikke; men arabiske Forfattere have arbejdet videre i

den af ham angivne Retning, og i Europa fik taltheoretiske Studier et nyt Opsving, da man ikke blot lærte saadanne at kjende gjennem Araberne, men ogsaa blev bekjendt med Diofants eget Arbejde. Jeg skal her blot anføre, at Fermat har studeret Diofant meget grundig. Jeg kan i den Forbindelse ikke tilbageholde en Formodning om, at et indgaaende Studium af Diofant, ved hvilket man ikke nøjes med at beundre hans Færdighed i at operere med de vilkaarlig valgte Tal, men trænger ind til de almindelige og omfattende Betragtningsmaader, som for os skjules af disse bestemte Tal[1], vil være en god Forberedelse til at finde Vejen til de mærkelige taltheoretiske Sætninger af Fermat, hvis Begrundelse endnu lader vente paa sig.

---

[1] Et godt Hjælpemiddel hertil vil man have i de Noter til Wertheims nye, tyske Udgave af Diofant (Leipzig 1890), hvori Udgiveren overalt ombytter de vilkaarlig valgte Tal med almindelige algebraiske Tegn.

Den indiske Mathematik.

1. Kort Overblik.

Vi vende os nu til den indiske Mathematik, som i helt andre Retninger end den græske har øvet en overordentlig Indflydelse paa Mathematikens Udvikling. Denne Indflydelse har vist nok mest fundet Sted gjennem umiddelbar Meddelelse af den indiske Regnekunst, og kun i ringe Grad gjennem de Forfattere, som vi nu skulle omtale. Det er dog ved dem, at vi have det mest umiddelbare Kjendskab til, hvad de indiske Mathematikere overhovedet vidste og formaaede. Disse Forfattere have skrevet paa Sanskrit, et Sprog, der allerede den Gang var et dødt Sprog, men som Brahmanerne anvendte til religiøse og videnskabelige Arbejder, ligesom senere Europæerne Latin.

De ældste af disse Forfattere give geometriske Regler for Anlæg af Templer, af lignende Art som dem Harpedonapterne anvendte i det gamle Ægypten (S. 11). I disse Regler træffe vi flere Spor af Paavirkning fra den græske Geometri, navnlig enkelte saadanne Omdannelser, som vi kjende fra den geometriske Algebra. Det er iøvrigt hos de indiske Astronomer, at vi maa søge Kjendskab til de Sider af den indiske Mathematik, som have faaet en gjennemgribende Betydning. De frem-

sætte det til Hjælp i Astronomien, eller det kommer endog kun lejlighedsvis frem indenfor Fremstillingen af Astronomien.

Dette sidste gjælder særlig et Skrift Sûrya Siddhânta fra det fjerde eller femte Aarhundrede efter Chr., hvis Forfatter ikke kjendes. Âryabhatta, født 476 efter Chr., har i et astronomisk Værk medtaget et mathematisk Afsnit. Af større Betydning i mathematisk Henseende er det 12. og 18. Kapitel i et stort astronomisk Skrift af Brahmagupta, født 598. Et fuldstændigere Kjendskab til den indiske Mathematiks Enkeltheder faa vi gjennem de langt yngre to mathematiske Arbejder af Bhâskara Âcârya (den lærde), født 1114, som bære Titlerne Lîlâvatî (den skjønne) og Vîjaganita (Rodberegning). Det første behandler nærmest Regning og Arithmetik, det sidste kan siges at behandle Algebraen. Navnet paa det første af disse Værker er vist nok at forstaa saaledes, at det er selve Regnekunsten, som kaldes den skjønne, og som i Opgaverne tiltales i meget poetiske Udtryk. Denne Tiltale stemmer godt med det poetiske Sving, som selve Opgaverne ofte have. Der existerer iøvrigt en Legende, efter hvilken det skulde være Bhâskaras Datter, hvem han ved de tiltrækkende Regnestykker vilde trøste over en bitter Skuffelse.

Selv om Inderne kunne have haft en ældgammel Astronomi, der formodentlig har sluttet sig til den chaldæiske, viser allerede Sûrya Siddhânta saa stærke Paavirkninger enten fra Ptolemaios eller snarere fra ældre græske Astronomer, at man ikke kan udskille de muligvis oprindelig indiske Bestanddele. Græsk Indflydelse paa den indiske Kultur — og omvendt — gaar vist nok tilbage til Alexanders Tog til Indien, og er senere fortsat dels ved enkelte Kolonier, dels ved de

Handelsforbindelser, i hvilke Alexandria var et Midtpunkt. De af Grækerne kjendte mathematiske Sætninger og Operationer, som vi ogsaa træffe hos Inderne, skylde disse vist nok hine; men deri udviklede Inderne saadanne Sider, som kræve nummerisk Behandling langt ud over det Maal, som Grækerne have naaet at faa med i deres strengt rationelle Behandling. For en saadan synes Inderne ikke at have haft Sans; men derfor vare de ogsaa fuldstændig frie for de Skrupler, der bragte de græske Mathematikere til at agte den virkelige Udregning i Tal for ringere af den Grund, at den ofte kun fører til en Tilnærmelse. Nummerisk Udregning og den derved erholdte praktiske Prøve var tvertimod for Inderne det virkelige Middel til at tilegne sig Sætninger og Methoder, hvis egentlige Begrundelse de næppe fuldstændig forstode Betydningen af. I ethvert Tilfælde gjengive de i Reglen ikke saadanne Begrundelser i Ord, men nøjes med at tegne og med Ordet «Se!» vise hen paa den Figur, der laa til Grund for Grækernes virkelige Bevisførelse.

Af langt større Betydning end den Udvikling, som forskjellige Grene af Mathematiken fik ved Indernes Anvendelser af nummerisk Beregning, er dog selve den Talskrivning og den Regnekunst, som vi skylde dem. Det er den samme Talskrivning med Pladsværdier for de enkelte Cifre («Positionssystemet»), som vi bruge den Dag i Dag, og i det væsentlige den samme dertil knyttede mekaniske Udførelse af Beregningerne. Desværre er kun lidet bekjendt om, hvorledes dette System har dannet sig, da det til Systemets Fuldendelse tjenende tiende Ciffer 0 allerede findes i Sûrya Siddhânta. Stort ældre synes Positionssystemet dog ikke at være, om end de 9 betydende Cifre forekomme i langt ældre Indskrifter. Nogen anden Oplysning om den tidligere Talbehandling hos Inderne kan dog for saa vidt findes

i den opbevarede Litteratur, som ældre Maader at skrive Tal paa ofte ere beholdte enten af Pietet eller paa Grund af specielle Fordele ved disse Skrivemaader; men det bliver kun et meget ufuldstændigt Billede, som man paa denne Maade kan faa af Positionssystemets Forhistorie hos Inderne. Vi skulle søge at bøde noget paa denne Mangel ved her at indlede Fremstillingen af Positionssystemet hos Inderne med et ganske kort Overblik over dets almindelige Forhistorie. Ved i al Almindelighed at omtale de Hjælpemidler, som man har brugt ved Talberegning forud for Positionssystemets Opfindelse, eller dog før det blev kjendt paa de paagjældende Steder, ved deriblandt at berøre de tarveligere Midler, hvormed endog Grækerne maatte lade sig nøje, ville vi i hvert Fald give en Forestilling om, hvor store Vanskeligheder det har voldet at naa til dette System. Af hvor stor Betydning det er, ingenlunde alene som Del af Mathematiken, men for Menneskeheden i de dagligste Ting, behøver ingen nærmere Paavisning.

2. Talbenævnelse, Talbetegnelse og Talregning før og hos Inderne.

Naar en Moder vil tage et Æble til hvert af sine 7 Børn, behøver hun ikke at kjende Tallet 7. Lige saa lidt behøver hun at vide, at $2 \cdot 7 = 14$, for at give hvert Barn to. Hun udtager ganske simpelt et eller to til Peder, Poul o. s. v. Nærmere er hun ved Talbegrebet, naar hun har lagt Mærke til, at hun i første Tilfælde skal tage et for hver Finger paa den ene Haand og for første og anden Finger paa den anden. Fingrene, som ikke vedkomme de Samlinger, hvoraf der skal være lige

mange, blive da for hende Betegnelser blot for disses Antal.

At det er ad denne Vej, Folkene have hævet sig til Talbegrebet, ses af, at de næsten alle til at benævne større Tal bruge Titalsystemet, Femtalsystemet (dog nærmest kun som Gjennemgangsled til Titalsystemet) eller Tyvetalsystemet. Disse ere, om det end kan have taget Tid, af sig selv blevne til virkelige Systemer. Efter at have talt alle Fingre med, eller være gaaet videre og, som et Folk ved Orinoco udtrykker 20, talt et helt Menneske (ɔ: Fingre og Tæer), har man maattet begynde forfra, og da lægge Mærke til, hvor mange Tier eller Tyver, og hvor mange Enere udover disse man har talt. Derved er opstaaet de Taldannelser, som vi kunne betegne ved $a + bx$, hvor x er den højere Enhed: Ti eller Tyve. Naar Udviklingen og Brugen for Tal er kommen saa vidt, at selve Antallet af Tier eller Tyver overskrider 10 eller 20, har man maattet danne højere potentielle Enheder, 10^2, 10^3 . ., eller som de gamle Azteker i Mexiko 20^2, 20^3 . ., og fremstille Tal af Formerne

$$a + b\,x + c\,x^2 + \cdots$$

Hvor vidt man er gaaet, har da rettet sig efter Behovet. Den ubegrænsede Mulighed for Dannelsen af højere Enheder er derimod i Reglen først gjort gjældende paa et mere videnskabeligt Standpunkt, som af Archimedes i Sandregningen.

Saaledes ere Ti- og Tyvetalsystemerne dannede, det sidste vel nærmest hos Folk, der altid, eller dog som Grønlænderne i deres Hjem, gaa nøgne eller med nøgne Fødder. De tydelige Spor af Tyvetalsystemet, som findes i flere europæiske Sprog ikke mindst paa Dansk, have en senere Oprindelse og ere vistnok opstaaede

derved, at den større Enhed, Snesen, i visse Tilfælde har været bekvem at bruge i Handel og Vandel. Ved Siden af de her omtalte højere Enheder har man i Inddelingen af Maal, Vægt og Mønter ofte benyttet andre, som af mere rationelle Grunde have vist sig bekvemme, saasom $12 = 2^2 . 3$. Et Exempel paa et endnu videre gaaende Hensyn til saadanne Grunde er det fra Babylonien kommende astronomiske 60-talsystem, som vi alt have omtalt.

Foruden Addition, Multiplikation og de første Potensopløftninger, som om end ubevidst ligge til Grund for disse Taldannelser, har man ogsaa i Talbenævnelserne brugt Subtraktion, som naar 19 paa Latin hedder *unde-viginti*, paa Sanskrit *ekonavimçati* (ɔ: 20—1) eller blot *ûnavimçati* (ɔ: mangelfuldt 20).

Til baade at regne med de saaledes dannede Tal og til at opskrive dem bruge vi nu et og samme Hjælpemiddel, men saaledes har det ikke altid været. Til den øjeblikkelige Fastholden af Tallene, som behøves i Regning, har man først kunnet bruge det samme Hjælpemiddel som ved Tælling, nemlig Fingrene. De forskjellige Enheder har et afrikansk Folk fastholdt ved at lade et Menneske række en Finger op for hver simpel Enhed, et andet for hver Tier, et tredie for hvert Hundrede; men et enkelt Menneske kan til samme Brug, paa forskjellig Maade, anvende Fingrenes Led (Fingerregning hos Græker og Romere). Andre mekaniske Hjælpemidler, som man har anvendt og endnu anvender paa mangfoldige Steder af Jorden, som brugtes af de gamle Grækere og Romere og i Middelalderen i Europa, og som ogsaa civiliserede Folk endnu bruge til specielle Øjemed (Regnskaber i Spil) eller som Læremiddel i Børnehaver, er Regnebrædter, simple Regnemaskiner og Regnepenge. Paa Regnebrædterne haves Inddeling i

Kolonner for Enhederne af samme Art, hvis Antal da betegnes ved paalagte Smaasten eller andre Mærker. Paa Maskinerne, som i vort Aarhundrede ere komne til Europa fra de asiatiske Folk, der længe have brugt dem, ere Kolonnerne ombyttede med Strænge eller Smaastænger med forskydelige Kugler eller deslige. Hver Kolonne eller Stang kan bestaa af to Underafdelinger, hvoraf den ene indeholder 4 eller 5 Mærker til Betegnelse af enkelte Enheder af en vis Art, den anden 1 eller 2 til Betegnelse af femdobbelte Enheder. Af Regnepengene haves forskjellige Former til at betegne Enhederne af forskjellig Art. At disse Hjælpemidler kunne bruges til Udførelsen af simple Regninger, Addition, Subtraktion og idetmindste Multiplikation med smaa hele Tal, er let at se, og vi skulle ikke dvæle ved at undersøge, hvorledes man har gjort det paa forskjellige Steder.

Nærmere kommer man til vor Talregning, naar man vel bruger de inddelte Kolonner, men i Stedet for at lægge Mærker paa Kolonnerne skriver Taltegn for 1—9. Hertil behøves ikke blot Kjendskab til Skrivekunsten, men, idet man nu ikke mere mekanisk sammentæller sine Mærker, tillige nogen Indøvelse i Tabeller eller skrevne Tabeller. Positionssystemet haves, naar man i Stedet for at bruge forud tegnede Kolonner, lader selve de skrevne Cifre danne disse. Dertil behøves et Tegn, der fylder en Plads uden selv at have nogen Værdi, nemlig 0. At denne sidste Opfindelse ikke kom helt af sig selv, viser sig derved, at Positionssystemet lod vente saa længe paa sig. Iøvrigt har det vist sig, at der, selv da det var opfundet, krævedes en vis Udvikling for at bruge det. Ej blot maa man, som for at bruge et Kolonnesystem, hvori Tallene skrives, kunne skrive og have lært nogle Tabeller; men man maa skrive nogenlunde pænt og egalt for at faa Cifrene

paa rette Plads, og man maa kunne beholde mere i Hukommelsen, end naar man kan fylde Menter og saa mange Cifre, man vil, i de forud tegnede Kolonner.

Med Undtagelse af de to sidste have de her nævnte Midler ikke stillet Fordringer til Kjendskab til Skrivekunsten. Det samme kan endog siges om de første Trin af selve Talskrivningen, som kun har bestaaet i faste Mærker i Stedet for de bevægelige Sten, Kugler eller Regnepenge. Man har, ganske som det nu gøres, naar Enerne komme enkeltvis, f. Ex. ved Stemmetælling, afsat et Mærke for hver Ener. Man har kunnet sammenfatte disse Mærker i et nyt for 5 eller 10, for hvilke der saa dog senere er kommet mere selvstændige Mærker, ligesaa vel som for de højere Enheder. Paa denne Maade kommer man da til en sammenhængende Talbetegnelse som Romernes — for at holde os til et velkjendt Exempel —. Det er let forstaaeligt, hvorledes en saadan Talskrivning er opstaaet, og det vilde være let at finde Betydningen af saadan Talskrift, selv uden at man havde faaet nogen som helst Vejledning.

Grækerne, som i ældre Tider havde skrevet Tal paa lignende Maade, hvad man kan se af gamle Indskrifter, benytte i den opbevarede Litteratur fuldstændig modsatte Principer for Talskrivning. Hvert helt Antal Enere, Tiere og Hundreder har nemlig sit eget Bogstavtegn. Man skriver

for 1 2 3 . . . 9 10 20 . . . 100 200 . . .
$\alpha\ \beta\ \gamma\ \ldots\ \vartheta\ \iota\ \varkappa\ \ldots\ \varrho\ \ \sigma\ \ldots$,

hvorved f. Ex.

$803 = \omega\gamma$, $83 = \pi\gamma$, $833 = \omega\lambda\gamma$.

Denne Betegnelsesmaade synes i første Øjeblik at være et Tilbageskridt paa Grund af sin usystematiske Karakter. Intet røber, hvad der er ensartet. Tegnene

β, $\varkappa$, σ røbe saaledes ikke, at man har at gjøre med samme Antal Enheder af forskjellig Art. Man ser imidlertid, at Grækerne fremstille et Tal langt kortere end Romerne, og deres Betegnelse burde ikke, selv om det havde været det eneste, vi kjendte til Grækerne, opfattes som Tegn paa et lavere Trin. I vore Dage have mange Sprogforskere opgivet den ældre Opfattelse, at det skulde være Tegn paa høj Udvikling af et Sprog, at det som det latinske ved fuldstændige Regler sætter alle Ord i saadanne Former og i saadanne Forbindelser med hinanden, at den, der endnu ikke har Begreb om Sammenhængen, kan slutte af Formerne, hvor hvert Ord hører hen, og saaledes konstruere sig til Sammenhængen. Netop noget lignende finder man i de mindst udviklede Folks Sprog. Et Sprogs Fuldkommenhed sættes derimod nu i ved saa faa Midler som muligt, altsaa med mindst Besvær for den talende og den hørende at tilvejebringe en fuldstændig Forstaaelse. Hertil hører, at man (som i Engelsk) udelader saadanne Hjælpemidler til Bedømmelse af de enkelte Ords Sammenhæng, som i Virkeligheden ere overflødige. Skal Forstaaelsen ikke briste, kræves der da vel et større Kjendskab til selve Sproget, f. Ex. til Ordstillingens Betydning, naar Misforstaaelse skal være umulig; men er dette Kjendskab tilstede, gaar Forstaaelsen langt hurtigere, end naar man skal konstruere sig til Sammenhængen ved Betragtning af Overensstemmelsen i Kjøn, Tal og Kasus. En lignende Fordel havde Grækernes Talskrivning og Læsningen af denne for Romertallenes Vidtløftighed. Grækerne kunde ikke blot skrive Tallene indtil 1000 lige saa kort som vi; men for den, der er fortrolig med Tegnene ere deres Tal hurtigere at læse, end naar man skal tælle efter paa et Romertal.

Som Skrifttegn for ikke for store Tal kunde de

græske saaledes være meget gode. Rimeligvis fordi man, hvor det var fornødent, ved Siden af brugte mekaniske Midler til Regning, vare disse Betegnelser imidlertid altfor udelukkende bestemte blot til den skriftlige Meddelelse. For at faa en Talskrivning, der tillige var hensigtsmæssig som Regnemiddel og brugelig til Fremstilling af ubegrænsede Tal maatte man vende tilbage fra det begyndte Spor. Dertil kræves en Forening af den græske Korthed med den romerske Gjennemsigtighed. Nogen Tilnærmelse hertil viser en Betegnelse, som Kineserne bruge: de forskjellige højere Enheder have hver sit Tegn, hvis Antal angives ved de samme Cifre, som betegne de simple Antal af Enere. Vi kunne ved at ombytte Kinesernes egne Tegn med en Kombination af Romernes og vore Taltegn fremstille dette Systems Anvendelse paa følgende Betegnelser

$$833 = 8\,C\,3\,X\,3,\ 803 = 8\,C\,3,\ 83 = 8\,X\,3.$$

Simplere bliver Systemet, hvis man angiver den højere Enheds Art ved tilføjede Mærker som

$$833 = \ddot{8}\dot{3}3,\ 803 = \ddot{8}3,\ 83 = \dot{8}3.$$

Korthed, Klarhed og Anvendelighed ere dog bedst forbundne i Positionssystemet.

Efter her ved de bedst kjendte Exempler at have oplyst, hvorledes Dannelsen af Tal i Almindelighed er foregaaet, samt de Veje, som ere benyttede til Regning og Talskrivning, skulle vi kaste et Blik paa, hvad der i den Henseende særlig vides om Inderne før Positionssystemets Opfindelse.

At Inderne tidlig have beskjæftiget sig med høje Tal, ses af, at de tidlig have dannet Navne for de decimale Enheder op til 10^{17}. Den gamle Interesse for høje Tal røbes fremdeles derved, at det siges i Legender

om Buddha, at han har dannet saadanne Navne op til 10^{54}, ja har haft endnu højere Taldannelser for Øje. Herved og ved Indernes Tilbøjelighed til nummeriske Overdrivelser viser det sig, at de allerede fra gammel Tid besad, hvad først Archimedes bragte Grækerne i sin Sandregning. I selve Benævnelserne viser der sig vel en Mangel paa saadanne Hvilepunkter, som vi have dem i Tusen, i en Million o. s. v. Det er en Mangel paa System; men som ved Grækernes Talskrivning tyder det paa Udvikling, at man overhovedet kunde gjøre sig forstaaelig ved de mange forskjellige Betegnelser. Den bestemte Adskillelse af hver enkelt decimal Enhed peger iøvrigt hen imod de Principer, hvoraf Positionssystemet skulde fremgaa. Disse Principer finde endog Anvendelse ved selve Udtalelsen af Tal. Saaledes er et Sted 1577917828 i en Blanding af billedlige Ord for Tal og egentlige Tal fremstillet, idet der begyndes med Enerne ved Vasu (ɔ: en Samling af 8 Guddomme) 2, 8, Bjerge (7), Form (1), Cifre (nemlig de 9), 7, Bjerge, Maanedage (15 ɔ: en halv Maaned). Den sidste Betegnelse svarer til et tocifret Tal begyndende med 1, og det samme kan ogsaa finde Sted inde i et paa lignende Maade sammensat Tal. Fremsigelsen af Tallet bliver hurtigere end vor, hvis ikke ogsaa vi ville nøjes med at sige de enkelte Cifres Navne i Orden. Den har derimod den Svaghed, at samme Ciffer, her f. Ex. 7 og 8, faar forskjellige Navne. Dette hænger imidlertid sammen med et Hjælpemiddel, som anvendtes til at bevare baade Tal og mathematiske Regler i Hukommelsen, nemlig at sætte dem paa Vers, et Middel, som vistnok stod i Forbindelse med Hinduernes poetiske Tilbøjeligheder, men ogsaa gjorde praktisk Nytte.

Det anførte Exempel findes vel hos Brahmagupta, da Positionssystemet forlængst var kjendt; men efter

sin hele Beskaffenhed maa Benævnelsesmaaden, som forudsætter gamle vedtagne Navne paa de forskjellige Tal, være gammel. Da 0 mangler i det anførte Tal, kan endog selve Exemplet være gammelt.

Hvad egentlig Talskrivning angaar, have vi alt bemærket, at Brugen af de 9 Cifre findes i ældgamle Indskrifter. Til deraf at sammensætte større Tal kan man have benyttet en Fremgangsmaade, som indtil for kort Tid siden har holdt sig paa Ceylon. Den bestaar i, at man dels som Grækerne supplerer de 9 Cifre med særlige Tegn for 10, 20, 30 . . . 100 og dernæst for 1000, dels som Kineserne betegner et vist Antal Hundreder ved at sætte vedkommende Ciffer foran Tegnet for 100, eller man kan helt have fulgt Kinesernes Princip.

Omtrent saaledes som disse bærer nemlig endnu Âryabhatta sig ad. Han benytter Konsonanterne til at udtrykke Cifrene og angiver ved en tilføjet Vokal, af hvilken decimal Enhed disse Antal skulle tages. Saaledes er

$$ga = 3,\ gi = 30,\ gu = 30000 \text{ o. s. v.}$$

Derved opnaar han en hørlig Fremstilling af Tallene, som kan passe ind i Vers.

De Fremgangsmaader, som Inderne brugte til Regning, før det egentlige Positionssystem var gjort færdigt ved Indførelsen af Cifret 0, kunne godt have lignet dem, man anvendte, efter at det var kommen i Brug; thi den Talskrivning, som man havde, vil i hvert Fald have gjort det tydeligt, hvor mange der var af hver decimal Enhed. Umiddelbart kunne saadanne Fremgangsmaader hos de bevarede Forfattere have været brugte, hvor Betydningerne af de 9 Cifre, som man havde, angives ved deres Pladser i forud inddelte Rammer; thi i disse faar man slet ikke nogen nødvendig Brug for Tegnet 0.

Dette gjælder f. Ex. om følgende Form for Multiplikation af 12 . 735, som ogsaa anvendtes paa større Tal:

	7	3	5
1	7	3	5
2	1 4	6	1 0
8	8	2	0

Produkterne af de enkelte Cifre ere saaledes delte i Enere og Tiere («Menter»), at der bag efter kun skal foretages Sammentælling i Retning af den ene Diagonal i de smaa Kvadrater.

De til Positionssystemet knyttede Regneregler vare hos Inderne i Hovedsagen de samme, som bruges den Dag i Dag. Afvigelserne havde nærmest rent ydre Grunde. Saaledes havde man Regnetavler, der kun vare smaa i Forhold til de temmelig store Cifre, man for Tydeligheds Skyld maatte skrive; men disse lode sig let udslette og ombytte med andre. Af den sidste Grund var der intet til Hinder for at addere og multiplicere fra venstre til højre, idet man da stadig rettede de alt skrevne Cifre ved Tillæg af Menten. Ved Multiplikation med et flercifret Tal begyndte man, naar man var dygtig nok til at undvære en saa omstændelig Opskrivning som den nys anførte, med at multiplicere med det højst betydende Ciffer. Samtidig med, at man multiplicerede med det næstbetydende, kunde man da addere det derved fremkommende Partialprodukt til det alt dannede, og rette dette til den saaledes dannede Sum o. s. v. Foruden Multiplikator og Multiplikandus, hvilken sidste man stadig flyttede hen, saa dens Enere stode lige saa langt til højre, som Enerne i det Partialprodukt, der

netop skulde dannes, indeholdt Tavlen altsaa bestandig kun ét Tal, dannet ved Addition af de alt dannede Partialprodukter.

En saadan stadig Udslettelse kræver stor Sikkerhed, da man bestandig tilintetgjør Midlerne til at opdage mulige Fejl. Det er navnlig paa Hukommelsens Fastholden dels af de øjeblikkelig forekommende Tal, dels af de Tabeller, som bruges, at man maa kunne stole. Saadanne Tabeller læres den Dag i Dag udenad i Indien i stort Omfang, og det var sikkert ikke mindre Tilfældet i gamle Tider. Man lærer nu Multiplikationstabeller, hvis ene Faktor er et af Tallene til 10, den anden af Tallene til 30, ja til 100, samt Brøkerne $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, endvidere omfattende Kvadrattavler. Med en saaledes øvet Hukommelse er det ikke underligt, at Inderne ogsaa have formaaet at anvende den nu saakaldte Fourier'ske Multiplikation af større Tal, som bestaar i strax (korsvis) at danne og sammenlægge de Produkter af enkelte Cifre i Faktorerne, som give samme decimale Enhed i Produktet.

3. Talregningens Anvendelser.

Vi skulle nu se, paa hvilke Opgaver Inderne videre formaaede at anvende den nummeriske Regnefærdighed, hvorom Dannelsen af Positionssystemet er det bedste Vidnesbyrd, og hvortil dette System dernæst blev det bedste Hjælpemiddel. Oplysning herom kunne vi navnlig finde i de talrige Regneregler og den rige Exempelsamling i Bhâskara's Lîlâvatî, men ogsaa andensteds. Saaledes giver allerede Aryabhatta de Regler for Uddragning for Kvadrat- og Kubikrod, som vi nu udlede af Udtrykkene for $(a + b)^2$ og $(a + b)^3$.

Af Indholdet af vore sædvanlige Regnebøger kjendte Inderne enkelt og sammensat Regula de tri, Rentesregning ogsaa med Rentes Rente, Selskabsregning, Blandingsreglen, Regler for Rummaaling o. s. v. Adskillige andre Opgaver, som vi nu vilde sætte i Ligning, løstes ogsaa efter bestemte Regneregler. Hertil hørte den «*regula falsi*», som vi have truffet hos Ægypterne (S. 9); men ved denne bleve de dog ikke staaende. Af senere arabisk Kilde vide vi, at de ogsaa benyttede den saakaldte «*regula duorum falsorum*». Den tjener til at løse en Opgave, som — hvis man havde sat den i Ligning — vilde afhænge af en Ligning af første Grad, som vi kunne skrive

$$f(x) = a\,x + b = k,$$

ved to Forsøg. Giver $x = \alpha$ og $x = \beta$ ved Indsættelse i venstre Side, de fra k forskjellige Værdier $f(\alpha)$ og $f(\beta)$, beregnes x ved Afvigelserne $k - f(\alpha)$ og $k - f(\beta)$ samt α og β efter en Regneregel, som kan gjengives ved Formlen

$$x = \frac{\beta\,[k - f(\alpha)] - \alpha\,[k - f(\beta)]}{[k - f(\alpha)] - [k - f(\beta)]}.$$

Som man ser, falder denne Regneregel ganske sammen med det, vi nu kalde simpel Interpolation, og vi vide da, at den ikke blot som af Inderne kan anvendes til exakt Beregning, naar $f(x)$ virkelig vilde blive en hel Funktion af første Grad, men ogsaa i andre Tilfælde til yderligere Tilnærmelse, naar allerede α og β ere Tilnærmelsesværdier. En saadan Anvendelse træffe vi dog først senere.

En anden Regneregel af meget almindelig Beskaffenhed er Omvendingsreglen. Den gaar ganske simpelt ud paa, at naar man skal finde et Tal, som ved at

underkastes en vis Række Regninger giver et bekjendt Tal, opnaas dette ved at underkaste sidstnævnte Tal alle de omvendte Regninger i omvendt Orden.

Iøvrigt opstilles forskjellige specielle Regler, som vi vilde finde — og som Inderne, saaledes som vi snart skulle se, ogsaa kunne have fundet — ved Løsninger af Ligninger af første eller anden Grad med en eller flere ubekjendte. Dette gjælder f. Ex. om Regneregler vedrørende Differens- og Kvotientrækker, hvor der ikke opstilles almindelige Relationer, i hvilke man kan betragte de forskjellige Størrelser som ubekjendte, men meddeles særlige Regler for at beregne hver enkelt af Størrelserne, naar de andre ere bekjendte. I Lîlâvatî meddeles de uden Bevis. Det samme gjælder om adskillige andre Regler, som vi hellere ville medtage i næste Afsnit som Tegn paa Indernes taltheoretiske Kundskaber.

Derimod bør vi ikke forlade Indernes Regnekunst uden at give nogle Prøver paa de Former, som de iklædte deres Exempler paa Anvendelser af deres forskjellige Regneregler.

En rent nummerisk Anvendelse af den omtalte Omvendingsmethode er følgende:

Skjønne Pige med de funklende Øjne! (det er Lîlâvatî)! Du som kjender den rigtige Omvendingsmethode! Sig mig det Tal, som multipliceret med 3, forøget med $\frac{3}{4}$ af det udkomne, divideret med 7, formindsket med $\frac{1}{3}$ af Kvotienten, multipliceret med sig selv, formindsket med 52, ved Uddragning af Kvadratrod, Addition af 8 og Division med 10 giver 2.

En Opgave, som kan løses ved den simple *regula falsi*, er følgende:

Femtedelen af en Bisværm sætter sig paa en Kadambablomst, Trediedelen paa en Silindhablomst, 3 Gange

Differensen mellem disse Tal er fløjet hen paa en Kutaja-blomst, og en enkelt Bi er fløjet om i Luften tiltrukket af en Jasmins og en Pandamus' Duft. Sig mig, smukke Pige! Biernes Antal.

En kvadratisk Ligning fremsættes i følgende Skikkelse:

Midt i Kampen greb den rasende Søn af Prit'ha et Antal Pile for at dræbe Carna. Han brugte Halvdelen til sit eget Forsvar og 4 Gange Kvadratroden mod Hestene. 6 Pile gjennemborede Kusken Salya, 3 andre kløvede Parasolen og knuste Standarten og Buen, og Carnas' Hoved blev gjennemboret af en Pil. Hvor mange Pile havde Arjuna (ɔ: Prit'has Søn)?

Følgende skal, hvad ikke er let at vide, være et Exempel paa omvendt Reguladetri:

Naar en Slavinde paa 16 Aar koster 32 Nishkas, hvor meget koster da en paa 20 Aar?

Som Grund til denne Beregning anføres blot, at Værdien af levende Skabninger retter sig efter Alderen.

Mere nøgterne ere følgende Exempler paa sammensat Reguladetri:

30 Bjælker paa 12 og 16 Tommer i Tykkelse og Bredde og 14 Fod i Længden koste 100 Nishkas, hvad koste da 14 Bjælker paa 8 og 12 Tommer i Tykkelse og Bredde og 10 Fod i Længden?

Hvis det koster 8 Drakmer at bringe de første 1 Mil, hvor meget koster det da at bringe de sidste 6 Mil?

Selv her vilde det ikke overalt i Praxis være afgjort, at der vil være Proportionalitet mellem Pris og Bjælkens Størrelse eller Mængden af det, der skal flyttes. Exemplerne maa saaledes gjennemgaaende siges at være lavede af Interesse for og til Indøvelse af selve Beregningen.

Disse faa Exempler vise, hvor forskjellige de Om-

raader ere, hvorfra Opgaverne tages: i andre er det snart et Antal af Blomster, snart en Rentefod, snart en geometrisk Størrelse, som søges. Selve disse rige Iklædninger røbe den Glæde, man havde af at stille og løse Opgaverne. I Overensstemmelse hermed slutter en Forfatter fra det 7. Aarhundrede sit Arbejde med følgende Ord: «Som Solen ved sin Glans overgaar Stjernerne, vil den indsigtsfulde fordunkle andres Ros, naar han i Folkeforsamlingen forelægger algebraiske Opgaver, og end mere naar han løser dem.»

4. Algebra og Taltheori; Geometri.

Vi vende os nu til Algebraen, som hos Bhâskara navnlig behandles i hans Vîjaganita eller Rodberegning, som kan siges at være Regning forbunden med Beviser. Disse ere dog langt fra at føres med græsk Strenghed og bestaa væsentlig i, at Opgaverne her ere satte i Ligning, hvis Løsning ogsaa virkelig giver en Begrundelse af de Regningers Rigtighed, som føre til Opløsningen. Derved faar man tildels at vide, hvorledes de i Lîlâvatî meddelte Regneregler kunne være fundne.

Den indiske Algebra stemmer overens med Diofants deri, at den har frigjort sig fra den geometriske Fremstilling og behandler Tallene blot som Tal. For Diofant som Græker fulgte imidlertid deraf den Fordring, at de Størrelser, som kom ud, virkelig skulde være Tal ɔ: rationale Tal. Var det end paa Grund af den mindre fintfølende Logik, at Inderne ikke nærede Betænkelighed ved uden videre at overføre Regneregler fra rationale til irrationale Tal, gav selve denne Omstændighed deres Operationer et langt større Omfang. I Stedet for Euklids i geometrisk Form holdte Omdannelser af irrationale

Størrelser, træffe vi derfor hos Inderne Regning med irrationale Tal. De kjende Reglerne for at give Brøker rational Nævner og — som Euklid i geometrisk Form — for at hæve dobbelt Irrationalitet. De vide endog, at

$$\sqrt{16 + \sqrt{120} + \sqrt{72} + \sqrt{60} + \sqrt{48} + \sqrt{40} + \sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6},$$

et Exempel, som dog rimeligvis er lavet ved den omvendte Regning.

Ogsaa i en anden Henseende overskrede Inderne de Grænser, som en forsigtig Græker maatte sætte sig. Idet Grækerne ikke havde opstillet noget Begreb: negative Størrelser, maatte de sørge for, at de Størrelser, som sættes lige, sikkert ere positive, og hvis en stillet Opgave af sig selv førte til et negativt Resultat, maatte ogsaa den Græker, som indsaa Betydningen heraf, strax benytte denne Indsigt til at omdanne Opgavens Form saaledes, at det blev om den tilsvarende positive Størrelse der spurgtes. Den regnende Inder tog mere Regningerne og deres Resultat, som de af sig selv frembøde sig. De bekymrede sig ikke om, hvor vidt en Størrelse paa den ene Side af Lighedstegnet virkelig er positiv eller negativ, og hvis selve den søgte Størrelse blev negativ, have de vel ofte forkastet en saadan Rod, men ogsaa ofte forstaaet at finde sig til Rette med den ved at betegne den som Gjæld. De have ogsaa, om end nærmest kun til Brug ved Behandlingen af de enkelte Led i Regninger med flerledede Størrelser, opstillet Reglerne om Regninger med Størrelser med Fortegn. I Forbindelse hermed staar det, at man indsaa, at en Kvadratrod maa regnes med dobbelt Fortegn, og at man derfor tillagde en Ligning af anden Grad to

Rødder. Blev den ene af disse negativ, forkastedes denne dog i Reglen.

Et andet Tegn paa heldig Tydning er en forekommende rigtig Forklaring af $\frac{a}{0}$. Man træffer dog ogsaa helt urigtige Anvendelser af saaledes dannede Størrelser.

Hvad angaar Indernes analytiske Hjælpemidler, saa brugte de som Diofant Tegn, der i Virkeligheden varə Afkortninger af Ord, til at fremstille søgte Størrelser og deres Potenser; men de gik videre end denne, idet de samtidig kunde betegne flere forskjellige ubekjendte. De gjorde det ved at tillægge hver af disse en forskjellig Farve, hvis Navn de da ogsaa afkortede. Denne Udvidelse af Tegnsproget gav ogsaa Anledning til Udvidelser af Regningerne med de ved dette fremstillede Størrelser.

Disse forbedrede Hjælpemidler kom Inderne til Nytte i deres Behandling af bestemte Ligninger med en eller flere ubekjendte; men paa dette Omraade træffe vi dog ikke andet end, hvad ogsaa Grækerne — hvem de vist nok skyldte Løsningen af Ligninger af anden Grad — kunde behandle. Noget nyt træffe vi derimod paa de ubestemte Ligningers Omraade. Dette nye bestaar navnlig deri, at Inderne her ikke som Diofant nøjedes med rationale Opløsninger, men krævede Løsninger i hele Tal.

Derved faa de allerede Lejlighed til at beskjæftige sig med ubestemte Ligninger af første Grad. For at opløse en saadan ved hele Tal anvendte Inderne omtrent samme Regninger, som forekomme, naar man nu løser Opgaven ved Kjædebrøk. Da Reglerne angives uden Bevis, vide vi ikke, hvorledes de ere fundne, men skulle blot bemærke, at man let kan komme til dem uden Opstilling af saadanne Begreber som Kjædebrøk og Konvergent. For det første er det indlysende, at

man ved Multiplikation med c kan udlede Løsningerne af Ligningen

$$a\,x - b\,y = c$$

af dem af

$$a\,x - b\,y = 1$$

Er i denne sidste $a > b$, og giver Division af b i a Kvotienten k og Resten r, faas

$$y = k\,x + \frac{r\,x - 1}{b},$$

hvor en saadan Bestemmelse af x, at $\frac{r\,x - 1}{b} = z$, bliver hel, afhænger af en Ligning med simplere Koefficienter. I Reduktionen forekommer netop de samme Tal, som naar man søger største fælles Maal, og der skal fortsættes, til man faar en Koefficient 1. Indsættelserne bagefter falde sammen med Beregning af Kjædebrøkskonvergenter.

Det var dog ikke blot med enkelte Ligninger med to ubekjendte, man beskjæftigede sig, men ogsaa med Ligninger med flere ubekjendte. Opgaverne gaa ofte ud paa at finde et Tal, som divideret med forskjellige givne Tal give givne Rester. Muligvis skyldes disse Opgaver oprindelig Kineserne, hos hvem man har fundet en gammel Regel til deres Opløsning. De vedrøre ofte Bestemmelsen af de astronomiske Perioder, efter hvilke en Gruppe af Fænomener paa ny falde sammen, hvad der giver Anledning til Formørkelser o. s. v. Selve Længderne af disse Perioder, som vare kjendte af de græske Astronomer, give vel endnu kun Anledning til homogene Ligninger. Naar der f. Ex. spørges om den Tid, der dels indeholder et helt Antal, x, Dage, dels et helt Antal, t, Aar, idet 30 Aar = 10960 Dage, bliver

$$10960\,t = 30\,x \text{ eller } \frac{x}{10960} = \frac{t}{30}.$$

Spørges der derimod om, naar de paagjældende Sammentræf virkelig indtræde, faar man fuldstændige ubestemte Ligninger af første Grad. Mangler der saaledes $\frac{m}{n}$ Dage i, at en Dag er tilende, og $\frac{p}{q}$ Aar i, at et Aar er tilende, og skal det Øjeblik, da Dagsskifte og Aarsskifte falde sammen, indtræffe efter $x + \frac{m}{n}$ Dage = $t + \frac{p}{q}$ Aar, maa man have

$$10960 \left(t + \frac{p}{q}\right) = 30 \left(x + \frac{m}{n}\right).$$

Bhâskara simplificerer dog Spørgsmaalet ved at antage, hvad man altid med en vis Tilnærmelse kan opnaa, at Nævnerne i Brøkerne ere $q = 10960$ og $n = 30$.

Ligningen $x\,y + a\,x + b\,y = c$ løses let ved at omskrives til

$$(x + b)\,(y + a) = c + a\,b,$$

hvorefter det kun gjælder om at opløse $c + a\,b$ i et Produkt af hele Faktorer.

Større Vanskeligheder have Inderne overvundet ved Behandlingen af ubestemte Ligninger, som ere af anden Grad i hver enkelt af de ubekjendte. Af disse søgte de ikke blot som Diofant, ved hvem de dog kunne være førte ind paa disse Spørgsmaal, rationale, men hele Opløsninger. Særlig beskjæftigede de sig med Ligninger af Formen

$$y^2 = a\,x^2 + b, \qquad (1)$$

hvortil ogsaa andre ubestemte Ligninger af 2. Grad kunne reduceres. For at give en Forestilling om deres

Behandlingsmaade skal jeg meddele deres Løsning af den særlig vigtige Ligning

$$y^2 = a x^2 + 1. \qquad (2)$$

Vi begynde med en fra Diofants afvigende Fremgangsmaade, der kan benyttes til Dannelse af et ubegrænset Antal rationale Opløsninger. Man danner først Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} a x_1^2 + b_1 &= y_1^2 \\ a x_2^2 + b_2 &= y_2^2, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

hvoraf b_1 og b_2 kunne bestemmes, naar x_1, y_1, x_2 og y_2 ere valgte vilkaarlig. Isolation af b_1 og b_2 og Multiplikation giver

$$(a x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 - a (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 = b_1 b_2$$

altsaa en tredie Ligning

$$\text{hvor} \quad \left.\begin{aligned} a x_3^2 + b_3 &= y_3^2, \\ b_3 = b_1 b_2,\ x_3 &= x_1 y_2 + x_2 y_1, \\ y_3 &= a x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Lader man de to Ligninger (3) være den samme, faas

$$a (2 x_1 y_1)^2 + b^2 = (a x_1^2 + y_1^2)^2$$

eller

$$a \left(\frac{2 x_1 y_1}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{a x_1^2 + y_1^2}{b}\right)^2, \qquad (5)$$

hvorved haves en rational Løsning af Ligning (2). Ved at prøve sig frem med Valgene af x_1 og y_1, kan man ofte opnaa, at de fundne Værdier af x og y blive hele. Særlig mærkes de Tilfælde, hvor man allerede har opnaaet, at $b = \pm 1$ eller ± 2.

Er $b = 1$, kan man ad denne Vej af en Løsning af (2) udlede en ny, og dernæst saa mange, som man vil.

Er $b = -1$ eller ± 2, vil (5) ogsaa give en Løsning af (2) i hele Tal; thi for $b = \pm 2$ er $y_1^2 = a x_1^2 \pm 2$, og altsaa bliver $a x_1^2 + y_1^2 = 2 a x_1^2 \pm 2$ lige. Tillige ses det af (4), at Kjendskabet til en Løsning af (2) tillader af en Løsning af (1) at udlede uendelig mange.

Lykkes det nu for en opgiven Værdi af a ikke ved Forsøg at danne nogen Ligning af Formen (1) hvor $b = \pm 1$ eller ± 2, benytter man den saakaldte cykliske Methode til at reducere b's Værdi.

Lad

$$a x_1^2 + b_1 = y_1^2$$

være en Ligning, hvor b_1 alt er saa lille, som det kan opnaas ved Forsøg, hvilke kunne bestaa i at lade $\frac{y_1}{x_1}$ være en Tilnærmelsesværdi til $\sqrt{a}$. x_1 og b_1 indeholde da ikke nogen fælles Faktor; thi en saadan vilde være kvadratisk Faktor paa begge Sider af Lighedstegnet, og Forkortning vilde give en simplere Ligning af samme Art. Man sætter nu

$$\frac{x_1 z + y_1}{b_1} = x_2,$$

hvoraf x_2 og z kunne bestemmes som hele Tal. Man vælger dem, der gjøre $z^2 - a$ saa lille som muligt. Sættes nu $\frac{z^2 - a}{b_1} = b_2$, er dels b_2 et helt Tal, dels $a x_2^2 + b_2$ et nyt Kvadrattal y_2^2. Disse Ting bevises let, men de indiske Forfattere bevise hverken dette, eller at man virkelig paa denne Maade kan naa ned til $b = 1$. Dette sidste, som Inderne sikkert ikke besad mathematisk Indsigt nok til rationelt at begrunde, har først Lagrange, der selv har gjenfundet samme Løsning, bevist. Indernes store Talfærdighed har imidlertid lagt sig for Dagen ved, at deres nummeriske Forsøg have ført dem til en fuld-

stændig rigtig Methode, og til ved Anvendelser at faa Tillid til dens almindelige Brugbarhed.

Ved Siden af saadanne taltheoretiske Methoder som de foregaaende besad Inderne adskillige taltheoretiske Sætninger; deriblandt f. Ex. følgende: Størrelserne

$$\left(\frac{\left(\frac{8p^2-1}{2p}\right)^2}{2}+1\right)^2 \pm \left(\frac{8p^2-1}{2p}\right)^2 - 1$$

ere begge Kvadrater. Vi skulle ligeledes her anføre, at Inderne kjendte og anvendte Formler for Antal af Permutationer og Kombinationer og, som Grækerne, for Summer af Kvadrater og Kuber af de første Tal i Talrækken. —

Ved Indernes Geometri er der ikke Anledning til at dvæle meget. De fleste af de Sætninger, som de kjendte, skyldes vistnok Grækerne; men den derpaa byggede Beregning dreve de ofte videre end disse. En Sætning hos Brahmagupta har vakt en vis Opsigt, nemlig en Udvidelse af Herons Trekantsformel til Firkanter. Som Sætningen staar, ser det ud, som om det var en vilkaarlig Firkant, hvis Areal skulde være $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, idet a, b, c, d ere Siderne og s deres halve Sum. Allerede Bhâskara opfattede den saaledes og opholder sig da med Rette ved den Fejl at antage, at Firkanten skulde være bestemt ved Siderne. I Virkeligheden beskjæftiger Brahmagupta sig dog kun med to bestemte Klasser af indskrivelige Firkanter, for hvilke Sætningen jo er rigtig; men det er muligt, at han ikke har gjort sig Rede for denne Begrænsning, som ikke udtales ved Angivelsen af Resultatet. De Klasser af Firkanter, som han behandler, ere dels ligebenede Paralleltrapezer, dels indskrivelige Firkanter med indbyrdes vinkelrette Diagonaler. En

Anledning, som dog ikke træder frem hos Brahmagupta, kunne Inderne have haft til at beskjæftige sig med de sidste Firkanter, nemlig deres Trigonometri, i hvilken de ikke som Ptolemaios brugte Kordetavler men Sinustavler. Man ser nemlig, at naar Diameteren i Cirklen er 1, og to sammenliggende Buer ere $2x$ og $2y$, blive Firkantens Sider $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$, og Diagonalerne dele hinanden henholdsvis i Stykkerne $\sin x \cos y$ og $\sin y \cos x$ og i Stykkerne $\sin x \sin y$ og $\cos x \cos y$. Figuren har saaledes rimeligvis været den, som man benyttede til at bestemme $\sin(x + y)$.

De Sinustavler, som findes i Sûrya Siddhânta, gaa dog kun ned til Intervaller paa $3\frac{3}{4}^0$, medens Ptolemaios' Kordetavler svare til Sinustavler med et Interval paa $\frac{1}{4}^0$. Have disse Tavler — saaledes som meget andet af denne Bogs Indhold — græsk Oprindelse, maa de altsaa hidrøre fra ældre Værker end Ptolemaios', og da maaske fra Astronomerne i Alexandria, som i Modsætning til Hipparch og hans Skole kunne have brugt Sinustavler. Sammesteds fra kan Tilnærmelsesværdien $\frac{31416}{10000}$ til π, som findes hos Âryabhatta være kommen. Derimod tyder den vilkaarlige Tilnærmelse $\pi = \sqrt{10}$, som findes hos Brahmagupta ikke paa græsk Oprindelse, lige saa lidt som vi finde græske Forbilleder for en Tilnærmelsesformel til Beregning af en Korde, k, til en given Bue, som findes hos Bhâskara, nemlig

$$k = 4\,d\,\frac{b\,(p - b)}{\frac{5}{4}\,p^2 - b\,(p - b)},$$

hvor d er Diametren, p Periferien og b Buens Længde.

Middelalderen.

1. Almindelig Indledning.

Der var, som vi have set, i Oldtiden af Grækerne grundlagt en Geometri, der behandlede Rumforholdene med en saadan Fuldstændighed og en Sikkerhed i alle Slutninger, at den fuldt ud kan hævde sin Plads som Videnskab selv over for den nyeste Tids strengeste Krav. Idet de geometriske Former tillige vare et Middel til Fremstilling af almindelige, kontinuerte Størrelser, indeholdt denne Geometri ogsaa en stor Del af det, vi nu kalde ren Mathematik. Derunder var Algebraen ført saa langt som til Løsning og vidtgaaende Anvendelser af Ligninger af anden Grad, og til en Behandling af Ligninger af tredie Grad, som vel ikke indeholdt den Tilbageførelse til Roduddragninger, som vi nu kalde Ligningernes Løsning, men som gjennem Anvendelse af Keglesnitslæren gav Midler til Diskussion og til en theoretisk Undersøgelse af de Opgaver, som afhænge af disse Ligninger. Den samme Methode lod sig ogsaa anvende paa Problemer, som vilde afhænge af Ligninger af fjerde Grad, uden at der dog er Tale om nogen direkte Fremstilling af saadanne Ligninger. Ved Siden af disse Opgaver, som henhøre under det endeliges Analyse, havde Grækerne ogsaa begyndt paa Behandlingen

af Opgaver, som nu tilhøre Integralregningen, og om denne Behandling end ikke naaede at omfatte mange enkelte Spørgsmaal, foretoges den i Former, hvis store videnskabelige Værd i den nyere Tid vinder mere Anerkjendelse, jo mere de videnskabelige Fordringer stige. Vi have endelig set, at den i Begyndelsen forsømte nummeriske Anvendelse af Mathematiken efterhaanden udviklede sig under Astronomiens stigende Krav, og vi have hos Diofant set Prøver paa indgaaende Undersøgelser af de nummeriske Betingelser for Rationalitet.

Paa den anden Side have vi set, at Indernes gamle Færdighed i Behandlingen af Tal havde udviklet sig til en virkelig Regnekunst, som benyttede det samme Hjælpemiddel, Positionssystemet, som vi nu bruge. Ved Berøring med den græske Mathematik havde denne Regnefærdighed ogsaa hos Inderne hidført egentlig mathematiske Fremskridt. Det betydeligste af disse var en hensigtsvarende Behandling af Spørgsmaal vedrørende hele Tal. Nogle af disse Fremskridt tilhøre dog maaske først en Tid, da nye mathematiske Arbejder vare begyndte hos Araberne.

For rettelig at vurdere de Folks Fortjenester, til hvilke Mathematikens Udvikling gik over fra Græker og Inder, maa man dog erindre, hvor langt det var fra, at dette forelaa i en for de nye Folk tilgængelig Form. Hos Grækerne selv havde de opbevarede Værker vel kunnet vedligeholde eller dog af og til gjenvække en Forstaaelse af Enkeltheder, men ikke vejledet til det Overblik, uden hvilket videregaaende Arbejde bliver umuligt. For de Arbejdsmaader, der i sin Tid havde ført til saa store Resultater, gjøre disse Værker ikke Rede, og enhver frugtbar Tradition om dem var forlængst tabt. Man maatte derfor selv gjenfinde disse eller andre Arbejdsmaader, førend der kunde være Tale om

en fuldstændig Tilegnelse af Indholdet; ja mangt et Resultat har man først kunnet se — ja end ikke altid set —, at Grækerne besad, da man selv havde gjenfundet det i en anden Form. Under hele denne Gjenopførelse har det, som forelaa fra, og som man efterhaanden forstod hos Grækerne, dog selvfølgelig givet en ypperlig Vejledning.

Den indiske Regnekunst kunde, hvor der var Lejlighed dertil, ved sin praktiske Anvendelighed have noget større Udsigt til at trænge igjennem. Det maa imidlertid erindres, at det heller ikke ved den er nok at lære dens Principer at kjende for rettelig at vurdere den. Vi kunde ikke anvende den uden i vor Barndom at have ofret et vist Arbejde paa at lære de simpleste Tabeller udenad og blive øvet i deres Brug. Dens Fordele faldt derfor ikke strax i Øjnene, maaske mindst paa dem der alt havde anvendt Arbejde paa at indøve andre Regnemaader.

De mest umiddelbare Arvetagere af den ved Oldtidens Slutning foreliggende græske Mathematik, af de enkelte opbevarede Hovedværker og den stadig synkende Forstaaelse af disse, var det østromerske Rige og den græsk-katholske Kultur, der i Konstantinopel havde samme Hovedstad som dette Rige. Skjønt hertil senere ogsaa kom saadanne Paavirkninger, som skrive sig fra Indien, træffe vi dog i Konstantinopel væsentlig kun en Fortsættelse af den begyndte Hensygnen. Det modtagne Pund, nemlig de endnu existerende Værker af de store græske Geometrere, nedgroves uden at give nogen Rente; men de lode sig da atter opgrave ved Middelalderens Slutning og kunde da paany komme den europæiske Kultur til Gode. Dette skete dog først, efterat en Del af Værkerne og en ny Interesse for dem og Forstaaelse

af dem var kommen til Vesteuropa ad anden Vej, nemlig gjennem Araberne.

Et saadant Pund blev ikke betroet de Folkeslag, som ved Folkevandringen fik Overtaget i den vesteuropæiske Udvikling. De modtoge Christendommen, og de fik Andel i den romerske Kultur; men til denne hørte Mathematiken ikke. Efterat Romantikerne i sin Tid have omgivet den vesteuropæiske Middelalder med en vistnok i mange Henseender ufortjent Straaleglands, er man i vor Tid mest tilbøjelig til at gaa til den modsatte Yderlighed og alene tale om den mørke Middelalder. Ogsaa denne Dom turde indeholde meget ubilligt, naar man ser paa de Kulturstandpunkter, hvorpaa de fleste af de paagjældende Folkeslag stode ved Middelalderens Begyndelse og dens Slutning. Hvad de virkelig havde modtaget i Christendommen og i romerske Love og Institutioner, blev navnlig i Klostrene forarbejdet af flittige Mænd med aandelige Interesser og kom Folkene til Gode ved sit eget Værd og sin kulturudviklende Indflydelse. Mathematik kunde man derimod væsentlig kun lære at kjende gjennem de tarvelige Uddrag af Ægypternes og Herons praktiske Regler, som skyldtes romerske Landmaalere, eller, naar det kom højt, gjennem de Stumper af Euklid og Nikomachos, som Landmaalernes mere theoretiske, men lige saa lidet videnskabelige Efterfølgere overleverede i Skikkelser, der gave Anledning til saadanne Misforstaaelser som den, at Figurtallene skulde være Arealudtryk. Det nyttigste og tilgængeligste af den mathematiske Arv fra Romerne, og gjennem dem fra Grækerne, var Regnetavlen, *abacus*, der — uvist naar — var undergaaet den Forbedring, at de Brikker, som lagdes paa Tavlens forskjellige Søjler nu ikke mere vare ens og ved deres Antal betegnede Antallene af de decimale Enheder, hvortil Søjlerne hørte,

men havde 9 forskjellige Mærker svarende til Tallene 1—9. Alt i alt stod hele denne Arv dog sikkert tilbage for den, som Ægypterne i sin Tid havde efterladt Grækerne.

At der dog var Modtagelighed for Mathematiken baade i Klostrene og i de sydeuropæiske, navnlig de italienske Handelsstæder, viste sig, da den kom til Europa i en bedre Skikkelse. Dette skete gjennem Araberne, som dels havde erhvervet sig en rigtig Forstaaelse af den græske Mathematik og givet den en ny Udvikling, i hvilken den var lettere tilgængelig end i de opbevarede gamle græske Skrifter, dels i rigt Maal dermed havde forbundet indisk Regnekunst. Det tog vel nogen Tid for Europæerne, efterat de gjennem Korstogene og i Spanien og paa Sicilien vare komne i Forbindelse med Araberne, at tilegne sig disses og derigjennem en Del af den græske og indiske Mathematik og Regnekunst. Under denne Tilegnelse forberedtes dog det Gjennembrud for en ny og rask Udvikling af Mathematiken, der i det 16. Aarhundrede faldt sammen med de store Fremskridt, som i andre Retninger betegne Begyndelsen af den nyere Tid.

Af det her sagte fremgaar det, at den tidligste og betydeligste Del af den mathematiske Udvikling i Middelalderen foregik hos Araberne. Hvad angaar de ydre Betingelser for denne Udvikling, skal jeg først minde om den rivende Fart, hvormed Arabernes Erobringer og dermed Muhammedanismen udbredte sig over vidtstrakte Egne. Disses oprindelige Beboere bleve ved Antagelsen af denne Religion snart regnede lige med Araberne, og de mange Lande bragtes derved i Forbindelse med hverandre. Til disse Lande hørte Ægypten, Geometriens gamle Vugge, med Alexandrien, hvor den senere naaede sin højeste Blomstring og længst Tid

vedblev at give virkelige Livstegn fra sig. Dertil hørte ogsaa andre Lande, som vare beboede af Grækere eller paavirkede af græsk Kultur. Araberne oversvømmede ligeledes de Egne, som i sin Tid havde været Sæde for de babyloniske og chaldæiske Astronomer. De trængte endvidere frem til Indien og kom derved i nærmere Berøring med den indiske Regnekunst, end Grækerne i Alexandria havde været.

At der saaledes frembød sig gunstige Lejligheder til at tilegne sig hele den da existerende Mathematik, var dog ikke nok. Vi have jo set, at den græske Videnskab længe havde været en død Skat for Grækerne selv, og at Romerne, der havde haft den samme Lejlighed som nu Araberne til at faa Del i den græske Mathematik, tilmed paa et Tidspunkt, da den endnu kun havde mistet lidet af sin oprindelige Friskhed, ikke havde forstaaet at benytte denne Lejlighed. Maaske var Romernes ejendommelige Kultur trods sin Begrænsning for betydelig til at gjøre dem til saa duelige Elever overfor de vanskeligere Dele af den græske Videnskab, særlig Mathematiken, som paa den ene Side Folkevandringens Folk bleve det overfor den Kultur, de kunde modtage gjennem Romerne, og som paa den anden Side nu et i Kulturen saa nyt Folk som Araberne viste sig at blive overfor Levningerne af den græske Kultur.

Det var ikke alle arabiske Herskere, der viste sig saa fjendtlige mod Videnskaben, som Profetens anden Efterfølger ʿOmar var det, selv om den væsentligste Ødelæggelse af Bibliotheket i Alexandria er foregaaet før hans og Arabernes Tid. Der opstod tvertimod paa forskjellige Tider og Steder Rækker af Fyrster, som satte en Ære i at fremme Videnskaben og mente, at de netop derved forøgede deres egen Anseelse. Af disse skulle her kun nævnes den Række Kaliffer, Ab-

basiderne, nemlig Almansûr, Hârûn Arraschid og Almamûn (754—833), som fulgte efter ʿOmars Slægt og 762 grundlagde og toge Sæde i Bagdad. Under dem bleve navnlig Euklids Elementer og Ptolemaios' «Almagest» oversatte paa Arabisk. Senere kom hertil Oversættelser af Diofant, Heron, Archimedes og Apollonios. Ved Siden af disse Hovedværker have Araberne kjendt et nu tabt Værk af Hipparch om kvadratiske Ligninger. Ligeledes forelaa tidlig Oversættelser af indiske Forfattere, og dels med den indiske Astronomi dels rimeligvis ved Handelsforbindelser trængte den indiske Regnekunst ind hos Araberne. De egentlige mathematiske Fremskridt, som skyldes Inderne, synes derimod ikke at have paavirket Araberne, der med Rette saa hen til Grækerne som deres bedste Læremestre i videnskabelig Behandling og have overset de mindre fuldstændig begrundede Theorier, som kunde hentes hos Inderne.

At Oversætterarbejdet efterhaanden strakte sig til de vanskeligste græske Værker, er et Vidnesbyrd om, at man efterhaanden naaede den Udvikling, som udkrævedes for at skatte og forstaa dem. Som tidligere paavist kunde dette ikke opnaas uden et betydeligt selvstændigt Arbejde hos Araberne. Om dettes Omfang og om den Alvor, hvormed den enkelte Mathematiker forberedtes til Deltagelsen i dette Arbejde have vi et Vidnesbyrd, naar det berettes, at Diofants Oversætter Abûl Wafâ, hvis egne Fortjenester vi senere skulle omtale, i sin Ungdom nød Undervisning i spekulativ og praktisk Arithmetik (c: Algebra og Arithmetik) af to Lærere, i Geometri af to andre.

2. Arabernes Arithmetik og Algebra.

Jeg har ønsket — blandt andet ved Sammenligning med Romerne — at fremhæve Værdien og Omfanget af Arabernes mathematiske Arbejder, for at man ikke skal drage nedsættende Slutninger af de forholdsvis faa positive Resultater, som de have naaet ud over, hvad Grækerne allerede vidste. Denne sidste Omstændighed er imidlertid en Grund til, at vi her ikke kunne beskjæftige os saa meget med Araberne, som deres Arbejders Omfang ellers kunde synes at kræve. Vi ville vel komme til at nævne de betydeligste mathematiske Forfattere, men mere som Exempler paa, i hvilke Retninger Araberne i det hele arbejdede, end som Led i en sammenhængende Fremstilling af den arabiske Mathematik og dens Udvikling.

Den Tid ligger os imidlertid ikke fjernt, da man, af Mangel paa rigtig Opfattelse af de opbevarede græske Forfattere og paa Kjendskab til den indiske Mathematik, gav Araberne Æren for den af hine grundlagte Algebra og for disses Regnekunst. Denne Forestilling har endog faaet et blivende Udtryk i Navnet Algebra og i en anden mathematisk Benævnelse, Algorithme, som i lang Tid brugtes om den til Positionssystemet knyttede Talregning, men nu er udvidet til at bruges om ethvert System af Betegnelser og Opstillinger, som tilstede en mekanisk Udregning efter bestemte Regler. Begge disse Benævnelser skrive sig fra Navnet paa en enkelt Mand og paa et af hans Værker, og med Brugen af dem har været forbunden en Forestilling om, at det er ham, hvem Algebraen og den nu brugelige Talregning først skyldes.

Denne Mand er Muhammed ibn Mûsâ Alchwa-

rizmî, som hørte til den Kreds af Lærde, som Kaliffen Almamûn beskjæftigede med Oversættelser, med en geografisk Gradmaaling og med andre videnskabelige Arbejder. Ordet Algorithme er dannet ved Overførelse af hans Tilnavn paa et Værk af ham om Regnekunsten, hvori der gives Regler for Regning med Tal skrevne i Positionssystemet, derfra paa de Værker som senere have udbredt den indiske Regnemaade i Europa og endelig derfra paa selve denne Regnemaade. Det anførte Arbejde kjendes igjennem en latinsk Oversættelse, som begynder med Ordene «*Dixit Algorithmi*», og hvori der gives Forklaring paa Talskrivning og de fire Species i hele Tal og i simple Brøker. Fordobling og Halvering opstilles som særegne Regninger. For de 3 første Regningsarter nævnes Niprøven. Alt forklares i Ord og — i det mindste i den opbevarede latinske Text — oplyses de benyttede Exempler ikke ved Tal skrevne med Cifre, men Tallene skrives i Ord eller med Romertal. Forklaring af, hvad man skal gjøre i Subtraktion, naar et Ciffer i Subtrahendus er større end det tilsvarende i Minuendus, mangler. Det vil af alt dette forstaas, at den indiske Regnekunst ikke strax kunde blive ret tilgængelig i Europa ved Oversættelsen af dette Værk. Selve dets Fremkomst hos Araberne er dog et Vidnesbyrd om, at den indiske Regnekunst nu var kjendt. Dernæst kunde den udbredes ved Hjælp af Bogen, naar denne tillige blev behørig forklaret. Forfatteren betegner udtrykkelig Regnemaaden som indisk.

Han har heller ikke nogen Skyld i, at man senere har villet tillægge ham Grundlæggelsen af Algebraen. Han beretter, at Almamûn har opfordret ham til at skrive et kort Værk om *Aldschebr* og *Almukâbala*, begrænset til det letteste og mest brugelige i Arithmetiken og dens praktiske Anvendelser. De to Ord, af

hvilke han endog finder det overflødigt at give nogen Forklaring, maa altsaa betegne noget, som forud var kjendt i videre Omfang. Efter Ordenes sproglige Betydning og den Sammenhæng, hvori de bruges, betegner det første den Operation at lægge Led, som skulle trækkes fra i den ene af to lige store Størrelser til den anden, saaledes at begge de lige store Størrelser kun komme til at indeholde positive Led. Det andet betegner den Operation at trække Led af samme Art, nemlig henholdsvis simple Tal, ubekjendte og deres Kvadrater sammen. Navnet paa den første af disse Operationer, hvormed Behandlingen af Ligninger skulde begynde, er saaledes overført paa den hele Lære om Ligninger. Denne Lære — og senere hen i Tiden særlig dens Behandling ved et Tegnsprog, ja i Almindelighed Læren om Operationer med Størrelser ved et Tegnsprog — har altsaa faaet samme Navn, som egentlig tilhørte en enkelt algebraisk Operation, der ikke engang mere bruges paa denne Maade. Nu sætte vi nemlig ikke mere Pris paa at faa lutter positive Led paa hver Side af Ligheds-tegnet saaledes som Grækerne, Araberne og deres nærmeste europæiske Efterfølgere. Som alt, hvad der skriver sig fra de græske Mathematikere havde denne Operation imidlertid en fornuftig Grund. Man vilde nemlig ved denne Ordning sikre sig, at de Størrelser som man satte lige, vare positive, hvilken (positiv) Værdi den ubekjendte end vilde faa; thi man anerkjendte kun positive Størrelser.

Det er navnlig Behandlingen af Ligninger af anden Grad og Anvendelsen af disse og af Ligninger af første Grad, som vi finde i det her omhandlede Værk. Alt fremsættes i Ord, idet den ubekjendte under Behandlingen kaldes «Rod» eller «Ting», dens Kvadrat simpelt hen Kvadrat. Løsningen af Ligninger af anden Grad

vises ved geometrisk Algebra, dog tildels ved andre Figurer end Euklids. Saaledes løses Ligningen

$$x^2 + a\,x = b$$

ved følgende Figur. Paa de fire Sider i det ubekjendte Kvadrat x^2 afsættes Rektangler med Højderne $\frac{a}{4}$. Naar Hjørnerne i den derved dannede Figur udfyldes med Kvadrater med Siden $\frac{a}{4}$, skal det derved fremkomne Kvadrat med Siden $x + \frac{a}{2}$ have den bekjendte Værdi $b + \frac{a^2}{4}$.

Denne Løsningsform, som ogsaa forekommer hos andre arabiske Forfattere, og som i det mindste er en af Euklid uafhængig Anvendelse af geometrisk Algebra, kan maaske hidrøre fra os ubekjendte græske Arbejder, f. Ex. fra Hipparchs alt omtalte Skrift om Ligninger. At Værket dog i hvert Fald ikke i sin Helhed er en Bearbejdelse af et græsk Mønster, ses af de Anvendelser af Ligninger, som gjøres paa praktiske Livsforhold f. Ex. paa de for Araberne ejendommelige Arveregler. Det bør ligeledes anføres at Muhammed ibn Mûsâ, ligesom Inderne, udtrykkelig tillægger Ligningen $x^2 + a^2 = b\,x$ to Rødder. Foruden den græske Værdi $\pi = \frac{22}{7}$ og den mulig græske Værdi $\pi = 3{,}1416$, kjender han den indiske Værdi $\sqrt{10}$, et Vidnesbyrd om, at det ikke alene er Talregning, han har lært af Inderne.

Hvad selve Opløsningen af Ligninger af anden Grad angaar, ses det, at Forfatteren kun bringer det samme, som findes hos græske Forfattere. At senere Slægter have kunnet finde dette hos ham, men ikke altid hos de græske Forfattere, da de paany bleve bekjendte,

beror paa, at han føjer Talexempler til de almindelige i geometrisk Form fremsatte Løsninger, medens Euklid nøjes med at give disse, Heron kun giver nogle nummeriske Anvendelser, og Diofant ikke beviser den Løsning, som han opstiller.

Springe vi nu hen til Tiden om Aar 1000, træffe vi to meget forskjellige Behandlinger af Arithmetik og Regning. Af den ene, som skyldes Alnasawî, se vi, at der da var gjort Fremskridt i Brugen af den indiske Regnemaade og dermed i det hele i regelbunden Fremstilling og Behandling af Talstørrelser. For Brøker haves saaledes Betegnelser, der med vore Cifre — thi selve Taltegnene ere ikke de samme overalt, hvor Positionssystemet benyttes — vilde se ud som i følgende Exempler

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ , \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ 15 \\ \end{matrix} \qquad \frac{1}{11} = 1, 15\,\frac{7}{19} = 7.$$

Da det af den her omtalte Bog ses, hvor godt den indiske Regnemaade var trængt ind og forstaaet, er det overraskende paa samme Tid og Sted at se en Regnebog fremkomme fra den betydelige Mathematiker Alkarchî, hvori der slet intet findes om den indiske Udførelse af Talregningerne. Tallene meddeles derimod i Ord, og selv vidtløftige Regninger udføres uden Brug af Cifre. Dette synes at tyde hen paa en principiel Modstand mod den indiske Regnemaade, og man har opstillet den ret rimelige Formodning, at denne kan hidrøre fra de skarpe Modsætninger mellem religiøse Sekter. Ved Siden af saadanne Forklaringer bør man dog ikke undlade at prøve, om Grunden til Forskjellen mellem Alnasawî og Alkarchî ikke ogsaa kan ligge i et forskjelligt Formaal. Den første har netop villet meddele Reglerne for den

simpleste praktiske Udførelse af Talregningerne. Den sidste har derimod villet skrive et videnskabeligt Arbejde om Tal og Brugen af Tal, og da har han med god Grund søgt sit Udgangspunkt hos Grækerne og ikke hos Inderne. Om han end saaledes medtager disses Regula de tri, giver han den et sikkert Grundlag i Euklids Proportionslære. Naar han undlader at meddele saadanne mekaniske Hjælpemidler, som virkelig kunne gjøre de foreliggende Talregninger overkommelige, gaar han ikke engang saa vidt som Euklid, der ikke blot helt tier om de mekaniske Hjælpemidler, man ogsaa maa have haft paa hans Tid, men ikke giver et eneste Talexempel. At Alkarchî dog finder Anledning til at forklare en Del græske Udregningsmaader, som staa langt tilbage for de indiske, kan hidrøre fra hans Beundring for Grækerne. Denne kan have bragt ham en theoretisk Interesse for disse Regnemaaders Sammenhæng, som man endnu ikke havde for de indiske Regnemaader.

Hvorledes Forskjellen paa de to Forfattere end er at forklare, viser den, at Sammensmeltningen af de græske og indiske Bidrag til Mathematik og Regning krævede Tid. De to Bøger vise dog tillige, at man nu i ret betydeligt Omfang havde begge til sin Raadighed.

At Alkarchî heller ikke savnede et Herredømme over Tallene, som i hvert Fald maatte kræve andre mekaniske Hjælpemidler, end man finder i hans Regnebog, ses dels af de vidtløftige Regninger, som denne i Virkeligheden indeholder, dels af hans betydningsfuldere algebraiske Værk, Alfachrî, som dette kaldes rimeligvis efter en Person. I dette viser han sig som en fremragende Discipel af Diofant, der ej blot i stor Udstrækning gjengiver dennes Undersøgelser og Exempler, men tillige selv gjør betydelige Fremskridt. I den

Henseende kan anføres, at han udvider Diofants Tegnsprog, ja endog et enkelt Sted bruger Tegn for to ubekjendte; at han giver fuldstændigere Regler for Regninger med Størrelser, hvori indgaar en ubekjendt, og at han behandler mange andre Exempler end dem, der findes hos Diofant, ja endog indlader sig paa nye Arter af ubestemte Opgaver. Som Exempel herpaa kan anføres Ligningerne

$$y^2 = x^3 + a x^2, \; z^2 = x^3 + b x^2,$$

der ved at sætte $y = m x$, $z = n x$ give

$$x = m^2 - a = n^2 - b,$$

hvor m^2 og n^2 ere vilkaarlig valgte Kvadrattal med Differensen $a - b$.

Større Vægt ville vi dog lægge paa de mere begrebsmæssige Fremskridt, som vi træffe. For at forstaa disse maa vi bemærke, at Alkarchî ikke blot havde tilegnet sig Diofants praktiske Behandlingsmaader, men at han, som han jo allerede havde vist i sin Arithmetik, var helt inde i, hvad der efter græsk Tankegang kræves til et Bevis. Geometriske Beviser, der jo var den eneste Form for almengyldige Beviser, giver han dog kun for Løsninger af Ligninger af anden Grad, og selv der bevæger han sig med større Frihed end Grækerne, idet han i et af dem fremstiller x^2 og $a x$ ved Linier, noget, som en græsk Forfatter i et Bevis kun indirekte vilde gjøre ved at omdanne x^2 og $a x$ til Rektangler med samme Side De fleste Regler nøjes han imidlertid med at oplyse ved et enkelt Exempel og Angivelse af, hvorledes de fremgaa af selve Regningerne. Ja han bemærker endog udtrykkelig, at man maa forberede sig til Forstaaelsen af Reglerne for algebraisk Regning ved de almindelige arithmetiske Regler, som han har givet

i sit tidligere Værk. Den Slags arithmetisk-algebraiske Forklaringer lover han at give i større Omfang i et Værk, som vi ikke besidde.

I og for sig er der maaske ikke noget nyt i disse Betragtninger; thi den virkelige Regning med rationale Tal maatte ogsaa for Grækerne i mange Maader have været Forbilledet for den geometriske Behandling, hvorved de bragte de samme Operationer til at omfatte irrationale Størrelser. Men det er af stor Betydning, at disse Betragtninger udtrykkelig fremhæves. Dette viser sig hos Alkarchî i den Frihed, hvormed han behandler irrationale Rodstørrelser. Disse fremstilles vel ikke ved Tegn, men i Ord svarende til Benævnelserne paa Potenser med samme Exponent; men som hos Inderne vises der udtrykkelig, hvorledes man kan regne med dem, nemlig dels hvorledes de kunne multipliceres og divideres, hvilken Værdi Potensen end har, dels hvorledes Kvadrat- og Kubikrødder kunne adderes og subtraheres, naar Potenserne ere ligedannede plane eller rumlige Tal. De sidste Sætninger bevises ikke ved, i Henhold til de første, at bringe rationale Faktorer udenfor Rodtegnet, men ved Anvendelse af Formlerne for $(a \pm b)^2$ og $(a \pm b)^3$.

Vi se altsaa, at Alkarchî regner med irrationale Rodstørrelser, eller med andre Ord, at han ogsaa opfatter dem som Tal. Indirekte gjør han det ogsaa derved, at flere af hans bestemte Ligninger føre til irrationale Rødder, og at altsaa i de Ligninger, som have ført til disse, de Tegn, som svare til vort x^m, fremstille Potenser af irrationale Tal, medens Diofant stedse forudsætter, at x skal være et rationalt Tal. Vi have nu vel set, at Inderne uden Skrupler regnede med irrationale Tal; men dem har Alkarchî dog næppe med Bevidsthed fulgt. Hvad der bliver af Betydning,

er, at vi her se det samme blive gjort af en Mand, som fra de græske Forfattere er fuldt fortrolig med Irrationalitetsbegrebet, og, som ved den Maade, hvorpaa han skjelner mellem de geometriske Beviser og de arithmetiske Forklaringer, viser, at han er sig bevidst, at de sidste ikke give almengyldige Begrundelser. Som Disciple af Grækerne kunde Araberne derfor ikke blive staaende ved de arithmetiske Forklaringer. Dette se vi af den Algebra, som er efterladt os af den ansete arabiske Mathematiker ʿOmar Alchaijâmî, der levede i det 11. Aarhundrede. Denne sætter sine Forklaringer af Betydningen af irrationale Rodstørrelser i ligefrem Forbindelse med de strenge græske Begreber. Han skjelner mellem arithmetiske og geometriske Opløsninger af Ligninger. De første vil han ikke blot — som Diofant, og hvad der i denne Sammenhæng vilde være tilstrækkeligt — have rationale, men ogsaa hele. Da der kan regnes med disse Størrelser, er et arithmetisk Bevis for saadanne Opløsningers Rigtighed tilstrækkeligt. Den anden Art Opløsninger kunne være irrationale, og det er derfor, at de maa fremstilles geometrisk og kræve et geometrisk Bevis. Kvadratrødder og Kubikrødder fremstilles da ved de fra Grækerne bekjendte Konstruktioner af en og to Mellemproportionaler. For Rodstørrelser af højere Orden lader der sig paa Grund af, at Rummet kun har tre Dimensioner, ikke gjennemføre nogen geometrisk Fremstilling, og nogen anden almindelig Fremstilling kjender Alchaijâmî ikke. Ved Dannelsen af Potenser af højere Orden viser han derimod i Overensstemmelse med Euklids Proportionslære hen til Dannelsen af sammensatte Forhold, hvad der jo ogsaa indirekte giver en Forklaring af, hvad de irrationale Rodstørrelser af højere Orden, som vi have truffet hos Alkarchî, maa betyde. Alchaijâmîs Opfattelse, hvis theoretiske

Betydning Alkarchî formodentlig ogsaa nok vilde vedkjende sig, er altsaa fuldkommen græsk.

Hvad angaar Beregning af Rodstørrelser, viser Alchaijâmî hen til Indernes Kvadratrods- og Kubikrodsuddragninger, og han tilføjer, at han selv andensteds — men da i et ukjendt Værk — har givet Regler for Uddragning af Rødder med en hvilkensomhelst Exponent. Dertil maa han sikkert have brugt Binomialkoefficienterne for hel Exponent, og han maa altsaa have kjendt Reglerne for disse Koefficienters Dannelse. Han siger, at han kun har vist disse Roduddragninger arithmetisk. De havde da ogsaa for ham kun Gyldighed, naar de kunne udføres med Nøjagtighed. Uden det har han jo ifølge det foregaaende endog kun antydet deres virkelige Betydning. Det er imidlertid klart, at de saavel som Kvadratrods- og Kubikrodsuddragning ogsaa kunne bruges til tilnærmet Beregning af irrationale Rødder. Som Exempel paa Beskjæftigelse med tilnærmet Roduddragning kunne vi iøvrigt nævne, at Alkarchî for $\sqrt{a^2 + r}$, naar a er det nærmest lavere hele Tal, angiver $a + \frac{r}{2a + 1}$ som en yderligere Tilnærmelse. Dette er den Værdi, som faas, naar man anvender *regula duorum falsorum* eller Interpolation mellem a og $a + 1$.

Hvor forskjellig den her omtalte Beskjæftigelse med Rodstørrelser end er hos Alkarchî og Alchaijâmî, maatte den dog bidrage til hos Araberne at drage et Problem frem, som var blevet noget skjult ved den græske Behandlingsmaade, nemlig Løsningen af Trediegradsligningen ved Kubik- og Kvadtatrødder. Have Grækerne end muligvis i ældre Tider beskjæftiget sig med denne Opgave, maatte den tabe noget af sin Interesse derved, at man direkte kunde løse Trediegradsligninger ved de selv samme geometriske Midler, som alligevel

skulde bruges til en almengyldig Fremstilling af Kubikroden, nemlig Skjæring mellem Keglesnit. Ja, som vi have set, forsvandt selve Interessen for saaledes som Archimedes at føre Opgaver tilbage til Trediegradsligninger, da man saa, at man ogsaa uden en saadan Tilbageførelse kunde løse Opgaver ved de selvsamme Hjælpemidler.

Det lykkedes nu vel ikke Araberne at finde Løsningen af Trediegradsligningen; men den Interesse, som de viste den, træder frem i talrige Undersøgelser. Det vigtigste Udgangspunkt for disse Undersøgelser var dels Archimedes' Kugledelingsopgave, dels den gamle Opløsning af denne ved Keglesnit (se S. 190 ff.), som antages at skrive sig fra Archimedes eller dog fra hans Tid. Da denne, som vi have set, omfatter eller dog let kan bringes til at omfatte alle Ligninger af Formen

$$x^3 + a x^2 + b = 0,$$

da endvidere Betingelsen for lige Rødder udtrykkelig angives, og da man let enten kan føre den almindelige Ligning af tredie Grad tilbage til denne Form eller behandle den væsentlig paa samme Maade, har der ikke paa dette Punkt været særlig store videnskabelige Vanskeligheder at overvinde. Araberne førte dog for saa vidt Undersøgelsen af Trediegradsligninger videre, som de opstillede Inddelinger af Ligningerne af tredie Grad, dels efter Fortegnene for Koefficienter, dels efter de Værdier af disse sidste, som føre til flere eller færre Rødder. Den fuldstændigste af disse Inddelinger findes i 'Omar Alchaijâmîs Algebra. For hvert enkelt Tilfælde vises, hvorledes Opgaven kan løses ved Keglesnit, og hvor mange Rødder den faar, det vil sige positive Rødder; thi om andre spørge Araberne ikke. Alchaijâmîs Inddeling lider dog af

Mangler hidrørende fra, at han ikke faar fat paa den Diorisme, der i den græske Behandling er Hovedudbyttet af Løsning ved Keglesnit. Dette lykkes, i Tilslutning til det ved Eutokios bevarede Manuskript, bedre for andre arabiske Forfattere, særlig Alkûhî.

Idet Ligninger af tredie Grad droges bestemtere frem, end Tilfældet er i den nu og den Gang opbevarede græske Geometri, bleve de ogsaa et mere bestemt Gjennemgangsled for Løsninger af andre Opgaver, baade saadanne, som forelaa fra Grækerne, og nye. Blandt de første fandt navnlig Vinklens Tredeling en stor Mængde Opløsninger. Den, som jeg paa Grund af dens Sammenhæng med de Archimediske Hjælpesætninger, har ment at kunne tillægge denne, have vi saaledes fra Araberne. Alkûhî fandt ogsaa Løsningen af den Opgave at bestemme et Kugleafsnit af dets Volumen og krumme Overflade og knyttede dertil en Begrundelse af den Diorisme til denne Opgave, som Archimedes meddeler i Slutningen af 2. Bog om Kuglen og Cylinderen (se S. 163 og 192).

Da det ikke lykkedes Araberne at finde en almindelig Løsning af Ligningen af tredie Grad ved Rodstørrelser, maatte de, naar praktiske Beregningsopgaver førte til Ligninger af tredie Grad, holde sig til selve disse — hvad der jo iøvrigt ogsaa nu giver lettere Beregningsmidler end Anvendelse af den almindelige Løsning —. Et meget smukt Exempel paa en nummerisk Beregning af en Rod i en Trediegradsligning er opbevaret. Den skyldes rimeligvis Lægen Alkâschî i det 15. Aarhundrede, og gaar ud paa at finde *sin* 1°, der, da *sin* 3° er bekjendt, kommer til at afhænge af en Ligning af Formen

$$x^3 + Q = P x$$

Idet x er lille, bliver den med en vis Tilnærmelse $\frac{Q}{P}$. For denne Størrelse beregnes en saadan Tilnærmelsesværdi, a, at Divisionsresten R bliver lille af samme Orden som a^3, og man sætter dernæst $x = a + y$ eller

$$a + y = \frac{(a+y)^3 + Q}{P},$$

hvoraf

$$y = \frac{(a+y)^3 + R}{P}.$$

Da R, som er af samme Orden som a^3, er stor i Sammenligning med $a^2 y$, kan man i en tilnærmet Beregning udelade de Led i Tælleren, som indeholde y, og faar da med ny Tilnærmelse

$$y = \frac{a^3 + R}{P} = b + \frac{S}{P}.$$

Dernæst indsættes i den nøjagtige Ligning $y = b + z$, hvorefter atter z paa lignende Maade bestemmes med Tilnærmelse. — Brøkerne fremstilles som Sexagesimalbrøker.

Formaalet for den her omtalte Beregning henhører under Trigonometrien, hvorom vi snart skulle tale; men førend vi forlade Arabernes Arithmetik, Algebra og Taltheori, hvor vi hidtil navnlig have haft de forskjellige almindelige Opfattelser for Øje, skulle vi meddele nogle Prøver paa Resultater, der ere vundne indenfor disse Omraader, navnlig i Taltheorien. I det 9. Aarhundrede har Thâbit ibn Kurra, i Tilslutning til Euklids Bestemmelse af «fuldkomne Tal» (S. 138), givet Regler for Bestemmelsen af det, som Pythagoræerne kaldte «venskabelige Tal», ɔ: saadanne, af hvilke det ene er Sum af det andets Faktorer. Reglen lyder saaledes: Ere

$p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ alle Primtal, blive $2^n \cdot p \cdot q$ og $2^n \cdot r$ venskabelige Tal.

Fra det 10. Aarhundrede have Araberne beskjæftiget sig med de saakaldte Tryllekvadrater, det er Opstillinger af dertil passende Tal i saadanne Kvadrater, at Summerne efter Rækker, Søjler og Diagonaler faa samme Sum. Det ældste Exempel paa et saadant findes paa en maaske 4—5000 Aar gammel kinesisk Tavle[1]. Det er

8 3 4
1 5 9
6 7 2.

Araberne dannede ogsaa Tryllekvadrater af Tallene indtil 16, 25 og 36 og angav, at lignende kunne dannes af Tallene indtil 49, 64 og 81. Indiske og byzantinske Mathematikere have iøvrigt beskjæftiget sig med det samme Emne.

Større mathematisk Interesse har en taltheoretisk Sætning, som Alchodschandî fandt omtrent Aar 1000, nemlig at Ligningen $x^3 + y^3 = z^3$ ikke kan løses rationalt.

Hos Alkarchî træffer man de af Grækerne kjendte Summationer af $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots$ og $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots$ Den første kan han dog ikke komme ud af at bevise; han kjender altsaa ikke Archimedes' Bevis. For den sidste giver han derimod det Bevis, som vi anførte, da vi omtalte Grækernes Kjendskab til samme (S. 215). Et virkeligt Fremskridt er det derimod, at den allerede nævnte

[1] Tavlen er i Cantors: Geschichte der Mathematik I S. 576 fremstillet som et Exempel paa ældgamle Fremstillinger af Tal hos Kineserne; men det er Dr. Gram, der har gjort mig opmærksom paa, at her foreligger et Tryllekvadrat.

Alkâschî summerer Rækken $1^4 + 2^4 + 3^4 \cdots + r^4$. Han siger, at den er

$$\left(\frac{(1+2+\cdots r)-1}{5} + (1+2+\cdots r)\right)\left(1^2+2^2+\cdots r^2\right).$$

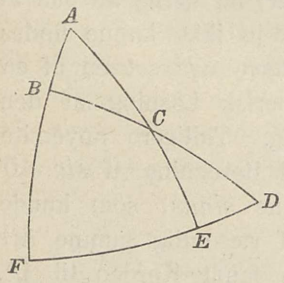
3. Arabernes Trigonometri.

Et Omraade, hvor man maatte komme til at skylde Araberne med deres Fortrolighed med græsk Geometri og indisk Regnekunst mere omfattende Fremskridt, er den beregnende Geometri eller Trigonometrien, som vi saa meget mere kunne kalde den nu, idet Araberne som Inderne brugte Sinustabeller i Stedet for Ptolemaios' Kordetavler. Da Navnet *sinus* ogsaa for saa vidt har indisk Oprindelse, som det er en rigtig latinsk Oversættelse af et arabisk Ord, der er fremkommet ved en Fordrejelse af det indiske Ord for *sinus*, kunne Inderne vel have givet Anledning til denne Ændring; men det er ikke væsentlig af dem, at Araberne have lært Trigonometri. Ændringen er netop udtrykkelig indført af Astronomen Albattânî som en Lettelse i de fra Almagest kjendte Beregningsmaader.

Ved Tavleberegningen kom det nu særlig an paa at finde *sin* 1° eller *sin* $\frac{1}{2}^\circ$, som jo ikke kunne findes ved kvadratiske Ligninger. Vi have nys set en af en senere Forfatter benyttet nummerisk Løsning af den dertil tjenende Trediegradsligning. Tidligere anvendte man saavel her som senere til Beregning af *sin* $10'$ en Interpolation mellem saadanne *sinus*, som kunde udtrykkes ved Kvadratrødder, af væsentlig samme Art som den, hvorved Ptolemaios fandt Korden til 1°. En saadan benytter f. Ex. den store Astronom og Mathematiker Abûl Wafâ i sidste Halvdel af det

10. Aarhundrede. Araberne bleve imidlertid ikke staaende ved Sinustavler; men Abûl Wafâ beregnede tillige Tangenstavler. Hvad Tabellernes Nøjagtighed angaar, naaede man til Sinustavler fra 10′ til 10′ med Fejlgrænsen $\frac{1}{60^4}$. Abûl Wafâ's Tangenstavler havde endog Fejlgrænsen $\frac{1}{60^5}$.

Hvad nu Anvendelsen af Tavlerne angaar, træffe vi allerede hos Albattânî Formlen $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$. Forøvrigt holdt man sig væsentlig til Ptolemaios' Formler (se S. 206) omdannede til Brug af Sinustavler. Som oftest sker dette uden Opstilling af noget Bevis. Saadanne, som tillige afvige fra Ptolemaios' Anvendelser af det saakaldte Menelaos' Theorem, finde vi hos Dschâbir ibn Aflah, mere bekjendt under Navnet Geber, der i det 11. Aarhundrede levede i Sevilla i Spanien. Han har tillige Æren af at have udfyldt de til den retvinklede sfæriske Trekant hørende Formler med en Relation mellem to Vinkler og en Side. Den findes ved den samme Figur, som Ptolemaios benyttede, hvor DEF er den Storcirkel, der til Pol har Vinkelspidsen A i den i B retvinklede Trekant ABC. Den ligeledes retvinklede Trekant DEC har nemlig $\angle C$ fælles med ABC og $DE = 90^0 - A$, $CD = 90^0 - a$, hvoraf $\cos A = \cos a \sin C$. Denne Sætning kaldes den Geber'ske.



Den sidste Lærde er den eneste Vestaraber, som vi have fundet Anledning til at omtale. Om den vestarabiske Mathematik, som er den, der mest umiddelbart gik videre til de europæiske Folkeslag, skulle vi

iøvrigt blot bemærke, at den arithmetisk-algebraiske Behandling mere end hos de tidligere østarabiske Forfattere frigjorde sig fra de fra Grækerne hidrørende geometriske Former. Hermed forbandt sig nogle Udvidelser af Brugen af mathematiske Tegn, saaledes Indførelse af et Kvadratrodstegn. Ærbødigheden for de græske Forfattere vedblev dog ogsaa hos Vestaraberne, saaledes at det er ved dem, at man i Europa lærte disse Forfattere at kjende, om end betydelig langsommere, end man vilde have gjort ved at have Østaraberne til Lærere. Til Gjengjæld kom Regning, Arithmetik og Algebra til Europa i lettere tilgængelige Former. Højest Forestilling om Vestarabernes Mathematik faar man gjennem deres første store europæiske Lærling Leonardo fra Pisa; thi hvor stort et mathematisk Geni denne end selv var, vidner Omfanget af hans Kundskaber ogsaa om hans Læreres Dygtighed, omfattende Viden og store Kjendskab til den ældre arabiske og derigjennem ogsaa til den græske Mathematik.

4. Mathematikens første Gjenopvaagnen i Europa.

Det kan ikke ligge i vor Plan her at beskjæftige os med Enkeltheder i den beskedne Udvikling, som den fra Romerne modtagne Regning paa Abacus fik i Klostrene, eller med de Veje, ad hvilke andre Regnemidler og en bedre Mathematik end den fra Romerne opbevarede trængte ind i Europa fra Araberne. Naar vi nu skulle omtale den største europæiske Mathematiker i Middelalderen, Leonardo af Pisa, omtrent Aar 1200, maa vi dog for at give ham den rette Baggrund berøre, hvor vidt man paa hans Tid ellers var kommen i Europa. Der forelaa den Gang Oversættelser fra Arabisk af Regne-

bøger («Algorithmer»), af en Algebra med Ligninger af første og anden Grad, ja af Euklids Elementer og Ptolemaios' Almagest; men de enkelte haandskrevne Exemplarer vare rent udvortes kun tilgængelige for yderst faa, og den virkelige Indtrængen i Indholdet og Evne til at benytte det var vistnok ogsaa for disses Vedkommende yderst begrænset. Den algorithmiske, ɔ: indiske Regning var allerede den Gang ifærd med at faa nogen Udbredelse i de lærde Kredse paa flere Steder, medens andre brugte Regningen paa Abacus, som et Par Aarhundreder tidligere særlig Gerbert, den senere Pave Sylvester II, havde bidraget til at fremme, og ved hvilken man nu vistnok mest skrev Taltegnene paa de inddelte Søjler (S. 257). Forskjellen paa de to Regnemaader var altsaa den, at den algorithmiske ved Brugen af Tegnet 0 kunde undvære Søjleinddelingen. Til de forskjellige Regnemaader knyttede sig iøvrigt forskjellige Traditioner, deriblandt den for Algorithmikerne nedsættende, at de vedblivende fulgte Muhammed ibn Mûsâ i at udskille Fordobling og Halvering som særegne Regningsarter. Til Gjengjæld havde de det Fortrin, at de ikke blot som Abacisterne kjendte Kvadratrods-, men ogsaa Kubikrodsuddragning. Algorithmikerne benyttede Sexagesimalbrøker, medens Abacisterne tildels vedbleve at bruge den fra Romernes Møntsystem stammende Tolvdeling.

Leonardo Fibonacci, det er: Søn af Bonaccio, som han ofte kaldes efter sin Faders Øgenavn, er fra den vigtige Handelsstad Pisa, hvor han tidlig lærte Regning paa Abacus. Paa Handels- (eller maaske Embeds-) rejser besøgte han derefter Ægypten, Syrien, Grækenland, Sicilien og Provence, hvor han videre satte sig ind i Regnekunst og Mathematik. Hvad han saaledes lærte, har han søgt at gjøre tilgængeligt for «den latinske

Folkestamme» ved sit omfangsrige Værk *Liber abaci*, i hvilket han med overlegen Dygtighed behandler og giver rigelige Exempler saa at sige paa al den Regning, vi hidtil ere trufne paa: Regning med hele Tal skrevne i Positionssystemet, med Brøker, al Slags Handelsregning, Løsning af Opgaver, der satte i Ligning vilde afhænge af Ligninger af første Grad, ved Hjælp af de to *regulæ falsi* og den indiske Omvendingsmethode, Differensrækker af første og anden Orden, Opgaver, der afhænge af Kvotientrækker eller som den om Kaniners Formerelse løses som sammensatte Rentesregningsopgaver, tildels saadanne, som komme til at afhænge af ubestemte Ligninger af første Grad — uden at Leonardo dog som Inderne giver bestemte Regler for disses Opløsning — Kvadrat- og Kubikrodsuddragning, endelig Opgaver, som afhænge af bestemte og ubestemte Ligninger af anden Grad.

Navnet *Liber abaci* synes ikke ret at stemme med, at Leonardo netop helt igjennem bruger Taltegnet 0. Det er imidlertid oplyst, at han selv fra først af er oplært i Brugen af Abacus. Den indiske Regnekunst har han derimod direkte lært af Araberne, og han har maaske næppe nok mødt den i Europa, hvor den vel kun har været kjendt i enkelte gejstlige Kredse. At han ikke oprindelig er Algorithmiker, viser sig derved, at han, som han siger, selv har fundet paa Kubikrodsuddragningen. Denne findes heller ikke hos Alkarchî, som er den af de bekjendte arabiske Forfattere, af hvem han synes stærkest paavirket. Fra ham har han en stor Del Opgaver, som han dog behandler med Selvstændighed. Det stemmer ogsaa med Alkarchî's Tilnærmelse til en Kvadratrod (S. 270), at Leonardo bestemmer en yderligere Tilnærmelse til en Kubikrod, hvori Antallet af hele alt er fundet, ved *regula duorum falsorum*.

Er $\sqrt[3]{a^3 + r}$ den søgte Kubikrod, a de hele deri, bliver Tilnærmelsesværdien $a + \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}$.

Leonardo's Fremstilling er i *Liber abaci* helt igjennem ledsaget af virkelige Beviser i geometrisk Form. Det samme er Tilfældet med hans *Practica geometrica*, der blandt andet endog indeholder Uddrag af den da yderst lidet kjendte Euklids stereometriske Bøger. Hans Beviser ere ofte forskjellige fra Euklids. Ved overhovedet at give saadanne afviger han ikke blot fra de geometriske Arbejder, som da fremkom i Europa, men ogsaa fra mange arabiske Forfattere.

I de her nævnte Skrifter gjør Leonardo i en klar Form, der røber selvstændig Tilegnelse og fri Behandling, de vigtigste forud kjendte arithmetiske, algebraiske og elementær-geometriske Sætninger mere tilgængelige end de vilde blive ved Oversættelse, og oplyser navnlig de første ved talrige Exempler. Hans egen Evne til at overvinde betydelige Vanskeligheder træder derimod bedst frem i hans Løsninger af nogle Opgaver, som i Kejser Frederik den andens Nærværelse stilledes ham af Kejserens Filosof Magister Johannes af Palermo. En af disse gik ud paa at finde et Kvadrattal, som forøget eller formindsket med Tallet 5 giver nye Kvadrattal, eller at løse Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= x^2 + a \\ z^2 &= x^2 - a \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

rationalt, naar $a = 5$. Ligningerne (1) vare tidligere behandlede af arabiske Mathematikere, som havde fundet, at baade $x^2 + a$ og $x^2 - a$ ere Kvadrattal, naar

$$x = m^2 + n^2,\ a = 4\,m\,n\,(m^2 - n^2).$$

Disse Resultater fremgaa iøvrigt let af Diofants sædvanlige Behandling af «dobbelte Ligninger» forbunden med Euklids Bestemmelse af rationale retvinklede Trekanter. Leonardo kommer ad en noget forskjellig Vej til det samme Resultat, idet han benytter den Sætning, at Kvadrattallene ere Summer af de første ulige Tal.

Det kom dernæst an paa at bestemme m og n saaledes, at

$$4\,m\,n\,(m^2 - n^2)$$

faar en given Værdi, i det foreliggende Tilfælde 5. Leonardo beviser først, at naar m og n ere hele Tal, blive Tal af denne Form delelige med 24. For, om muligt, at faa Ligninger, som kunne løses i hele Tal, maa man altsaa multiplicere de opgivne Ligninger med et saadant Kvadrat, at det nye a bliver deleligt med 24. Leonardo multiplicerer med 12^2, og finder, at

$$5 \cdot 12^2 = 4 \cdot 5 \cdot 4\,(5 + 4)\,(5 - 4),$$

hvorefter $41^2 \pm 5 \cdot 12^2$ blive Kvadrattal. De søgte Kvadrater findes dernæst ved Division med 12^2 og blive $\left(\frac{31}{12}\right)^2$, $\left(\frac{41}{12}\right)^2$ og $\left(\frac{49}{12}\right)^2$.

I sin meget almindelig anlagte Undersøgelse faar Leonardo Lejlighed til at give en almindelig Bestemmelse af Summen af de første ulige Kvadrattal op til en vis Grænse. Leonardos Løsning bringer altsaa mere, end han ligefrem er spurgt om.

En anden af de stillede Opgaver gaar ud paa at finde x af Ligningen

$$x^3 + 2\,x^2 + 10\,x = 20.$$

Leonardo finder først, at x er beliggende mellem 1 og 2 og altsaa ikke kan være hel. Han paaviser der-

næst, at den ikke kan være nogen rational Brøk, heller ikke nogen af de irrationale Størrelser, som opstilles i Euklids 10. Bog. Indholdet af denne vanskelige Bog, som han studerede netop for deri muligvis at finde Former for exakte Udtryk for Rødderne i den forelagte Ligning, har Leonardo opfattet fuldkommen rigtig, om han end, som han siger, sætter Tal i Stedet for de i geometrisk Form fremstillede almindelige Størrelser.

Da Roden nu ikke er nogen Størrelse af bekjendt Form, maa Leonardo nøjes med at søge en Tilnærmelsesværdi. Han udlrykker den i Sexagesimalbrøker og finder

$$x = 1^{\circ}\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI},$$

et Resultat, der kun er omtrent $1\frac{1}{2}^{VI}$ for stort. Leonardo siger ikke, hvorledes han har fundet det. Han har sikkert heller ikke fulgt en bestemt foreskreven Methode, men — som en øvet Regner i vore Dage ogsaa vilde gjøre — efterhaanden prøvet de Korrektioner til de alt fundne Værdier, der i Betragtning af alle foreliggende Omstændigheder maatte anses for de hensigtsmæssigste. Til at finde saadanne Forsøgsværdier har han besiddet *regula duorum falsorum*, hvilken han, som det kan ses af hans Kubikrodsuddragninger, forstod at anvende som Interpolation. Som god Regner har han iøvrigt ogsaa vidst at give Nævnerne i de ved denne Methode bestemte Korrektioner saadanne Afrundinger, at hans Methode mere kan have lignet Vietas eller, som den sædvanlig kaldes, Newtons Methode til tilnærmet Beregning af Rødderne i en algebraisk Ligning. Denne Methode er iøvrigt blot en Udvidelse af den, som bruges, og af Leonardo brugtes, til successiv Bestemmelse af Cifrene i en Kvadrat- eller Kubikrod, og som af Astronomerne siden Ptolemaios var brugt til Be-

stemmelse af de successive Sexagesimalbrøker i en Kvadratrod. Det er for nylig eftervist, at den forelagte Ligning er valgt saaledes, at man ved under Regningen at bruge Sexagesimalbrøker og ved et nogenlunde behændigt Valg af de successive Korrektioner forholdsvis meget hurtig naar til den angivne Værdi med sin lille Afvigelse fra det nøjagtige.

Efter den sidste Bemærkning maa Leonardo maaske dele Æren for den store Tilnærmelse med den, som har stillet Opgaven. Det er muligt, at ogsaa dette er Leonardo, som i Anledning af den festlige Præsentation for Kejseren kan have inspireret Mag. Johannes; men denne, der selv var fra Sicilien og var knyttet til den for arabisk Videnskab interesserede Kejser, kan ogsaa have Opgaven fra arabiske Mathematikere. Idet ogsaa Leonardo var en Discipel af Araberne, ses det, at disse nu havde bragt den mathematiske Videnskab saavidt, at Udregningen af en saa fin Tilnærmelsesværdi ikke oversteg en fremragende Regners Kræfter. Det Exempel paa en lignende Tilnærmelse, som man har fundet hos en arabisk Forfatter (S. 272), er et Par Hundredaar yngre.

At Leonardo fra Pisa paa en klar Maade havde fremsat det vigtigste og tilgængeligste af den da hos Araberne foreliggende Mathematik, var ikke det samme, som at den nu var bragt i deres Besiddelse, som derefter i Europa gave sig af med denne Videnskab. Bogtrykkerkunsten existerede ikke, og der var ikke saa levende Forbindelse mellem Fagets Dyrkere som fordum mellem de vidt spredte Grækere. Den daværende lærde Stand, Gejstligheden, navnlig visse Munkeordener og nu de af disse Kredse efterhaanden opstaaende Universiteter strakte vel deres Forbindelser ud over Landene; men

denne Stand synes i lang Tid ikke at være bleven paavirket af, hvad der var fremkommet i italienske Kjøbmandskredse, hvis Forbindelser med den kætterske Kejser Frederik næppe var nogen Anbefaling.

Naar vi her have talt om lærde Kredse og Universiteter, maa derved ikke tænkes paa saadanne Uddannelsesanstalter, hvor der f. Ex. altid undervistes i en Smule Mathematik. Der fandtes vel ved Universiteterne et «*Facultas artium*», hvor den fornødne Fordannelse til andre Studier meddeltes; men denne indskrænkede sig i Reglen til «*Trivium*» (hvoraf Ordet «triviel»), omfattende Grammatik, Rhetorik og Dialektik, og medtog ikke «*Quadrivium*», omfattende Arithmetik, Musik Geometri og Astronomi. Selv hvor ogsaa dette medtoges, indskrænkedes Arithmetiken til en Smule Regning, Geometrien til en vistnok yderst tarvelig Gjennemgang af nogle Bøger af Euklid, om hvem man endnu længe vidste saa ringe Besked, at man troede, at hans Elementer oprindelig vare skrevne paa Arabisk, eller mente, at han kun havde givet Sætningerne, den græske Udgiver Theon Beviserne.

Fra disse Kredse udgik dog af og til Mænd, som gave sig af med Mathematiken. Det var da, som sagt, ikke hos Leonardo fra Pisa, at disse sædvanlig søgte deres Lærdom, men i en Arithmetik og en Algebra (*De numeris datis*) af hans samtidige Jordanus Nemorarius, et højt anset Medlem af Dominikanerordenen, hvis Ordensgeneral han blev med Hovedsæde i Paris. Hans Arbejde havde og forplantede saadanne Fortrin og Mangler, som vi have tillagt Algorithmikerne. Til disse føjede han selv det væsentlige Fortrin overalt at fremstille vilkaarlige Tal ved Bogstaver, dog saaledes at de nævnes i Textens Ordforbindelser og ikke sammenstilles til en Bogstavregning. Han har endvidere skrevet et

geometrisk Arbejde om Trekanter, hvor han paa Grundlag af Euklid foretager adskillige selvstændige geometriske Undersøgelser.

Staa nu end navnlig den her omtalte Arithmetik og Algebra betydelig tilbage for Leonardo's «*Liber abaci*», vidne de dog om, at man ogsaa i de lærde Kredse arbejdede paa Tilegnelse og en selvstændig Bearbejdelse af Mathematiken. Dette Arbejde fortsattes paa mange Steder. Det forbandtes med fortsatte Oversættelser fra Arabisk, senere ogsaa fra Græsk. Leonardo's Skrifter udøvede vel ogsaa nogen Indflydelse, dels i selve Norditalien, hvor det var, at en ny, frembringende Mathematik brød frem 300 Aar senere, dels efterhaanden i denne Mellemtid ogsaa andre Steder. Vi skulle dog ikke her følge den mellemliggende Udvikling, men kun give enkelte Exempler paa virkelige Fremskridt.

Vi skulle saaledes fra det 14. Aarhundrede nævne to Arbejder af Franskmanden Nicole Oresme. Det ene er hans *Tractatus de latitudinibus formarum*. Overført paa Planen betegne Ordene Bredde og Længde her det samme som ellers paa Kuglen, altsaa retvinklede Koordinater. Benævnelserne blive særlig forstaaelige derved, at Koordinaterne afsættes indenfor et Rektangel, hvis største Udstrækning gaar i Retning af Abscisserne (Længderne). Paa denne Figur fremstilles den forskjellige Styrke af et foranderligt Naturfænomen f. Ex. af Varmen som Ordinater (Bredder) med de tilsvarende Tider som Abscisser (Længder). Der gives saaledes en grafisk Fremstilling ved en Kurve af Varmens Variation i Tiden, og det fortjener at bemærkes, at allerede Oresme har iagttaget, at Variationen er svagest i Nærheden af Maxima og Minima. Det ses, at Anvendelsen af Koordinater her er af en anden Natur end hos de gamle Grækere, til hvilke han dog synes at

henvise, men til hvis exakte, geometrisk-algebraiske Brug af Koordinater til Studiet af Keglesnit og Løsninger af Opgaver han næppe hverken direkte eller gjennem Araberne har haft noget indgaaende Kjendskab.

I den anden Bog af Oresme, som har Titlen *Algorismus proportionum*, skulle vi især nævne Indførelsen af Potenser med bruden Exponent og de simpleste Regler for Regning med disse. Oresme bruger ogsaa en særegen Betegnelse for Potenser. $4\,1\frac{1}{2}$ skriver han omtrent saaledes $[1^p\frac{1}{2}]\,4$, hvor Bogstavet p betegner «*proportio*» Forhold. Rødderne for disse Potenser ere nemlig Forhold, idet Euklids exakte Proportionslære lægges til Grund, og Potenser med hel Exponent ere dannede som sammensatte Forhold. Endog Dannelsen af en Potens med bruden Exponent ad denne Vej har et Forbillede hos de gamle, idet Archimedes viser, at Forholdet mellem det større og mindre Afsnit, hvori en Kugle deles ved en Plan, er større end Forholdet mellem de krumme Overflader taget halvanden Gang ɔ: end dette Forhold i Potensen $\frac{3}{2}$. Ved at udvide Reglerne for Regning med Potenser af samme Rod og med hel Exponent til Potenser med bruden Exponent bliver Oresmes Arbejde en Forløber for Logarithmeregning.

Det først nævnte Værk af Oresme udgaves adskillige Gange efter Bogtrykkerkunstens Opfindelse og har vistnok været ret udbredt ogsaa før denne. Det sidste, saavelsom det af Chuquet, som vi nu skulle omtale, ere derimod først nylig aftrykte af historisk Interesse, og de synes ikke at have faaet ret megen Indflydelse. Saaledes røber Chuquet, der paa anden Maade end hans Landsmand Oresme 100 Aar tidligere forbereder Logarithmeregningen, intet Kjendskab til dennes Arbejde. Begge Arbejder fortjene dog her Omtale som Vidnesbyrd om, hvad dygtige Mænd under de

forhaandenværende Forhold formaaede. De vise, hvor vidt man var kommen.

Det Arbejde af Chuquet, hvortil vi sigtede, og som skal tjene os til Prøve paa en fremragende Arithmetik og Algebra i det 15. Aarhundrede, har Titlen «*Triparty en la science des nombres*». For først at blive ved samme Emne, som vi have truffet hos Oresme, optræder brudne Exponenter indirekte i enkelte Opgaver f. Ex. følgende: En Mand rejser første Dag 1 Mil, anden Dag 3, tredie Dag 9, o. s. v., hvor langt er han rejst i $5\frac{1}{2}$ Dage. Chuquet giver rigtig den Løsning, som faas ved at forudsætte, at Hastigheden kontinuert tiltager efter samme Lov som fra Dag til Dag. I en Opgave spørges der ligefrem om en Exponent, altsaa om Logarithmen: Et Kar har en Revne, gjennem hvilken der daglig udtømmes $\frac{1}{10}$ af Karrets Indhold. Efter hvormange Dages Forløb vil Halvdelen af Indholdet være tømt. Løsningen $6\frac{8144\,1}{5314\,41}$ er den, som fremkommer ved simpel Interpolation eller ved Anvendelsen af «*regula duorum falsorum*» paa Forsøgsværdierne 6 og 7. Chuquet er er dog selv ikke tilfreds med denne Tilnærmelse. Formelt kommer han endog et Sted til at angive en Hovedregel for Regning med Logarithmer, idet han opstiller en Række Potenser af 2 samt de tilsvarende Exponenter, og bemærker, at Produktet af to Tal i den første Række er det Tal i samme Række, som svarer til Summen af de til Faktorerne hørende Exponenter.

Er det kun indirekte, at Chuquet viser sin Forstaaelse af brudne Exponenter, træde Exponenten 0 og negative Exponenter bestemt frem i hans Betegnelser. Allerede Diofant havde, som vi have set, særegne Betegnelser for hver enkelt af Størrelserne:

$$x^{-6},\ x^{-5},\ \ldots 1 \ldots x^5,\ x^6$$

og hans Regneregler viste, at han ikke var uden Forstaaelse af Overensstemmelsen mellem disse Størrelser. Chuquet lader denne Overensstemmelse træde frem i selve Betegnelsen, idet Exponenterne til de forskjellige Potenser af den ubekjendte betegnes ved et Exponenttegn føjet til den Talkoefficient, hvormed denne Potens skal multipliceres. Denne Exponent kan være positiv, Nul eller negativ, hvilket sidste betegnes ved Tilføjelse af $\overline{m}$. Saaledes betegner $7^{3\overline{m}}$ det, som vi nu skrive $7x^{-3}$. Idet Chuquet tillige har en Betegnelse for n'te Rod (dog kun for bestemte Værdier af n) samt Tegnene $\overline{p}$ og $\overline{m}$ for vort + og —, ses det, at han er i Stand til at give en ret overskuelig Fremstilling af Ligninger og derved ogsaa af de Omdannelser af disse, som man hidtil havde udtrykt i Ord.

Naar Chuquet, som vi have set, ikke frygter for at indføre negative Størrelser i sine Exponenter, kan det ikke undre, at han rolig finder sig i, at Ligninger faa negative Løsninger, og forstaar at forklare det. At en af hans Opgaver i Virkeligheden faar imaginære Løsninger, synes derimod kun at bero paa en Fejltagelse.

Idet vi forbigaa Chuquet's gode Behandling af Emner, som vi ogsaa have set tidligere Mathematikere magte, skal det her endnu kun nævnes, at han bruger og gjør Fordring paa selv at have fundet den bekjendte Regel til Dannelse af simple mellemliggende Størrelser $\left(\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right)$ mellem to bekjendte $\frac{a_1}{b_1}$ og $\frac{a_2}{b_2}$. Den bruges til Dannelse af nye Forsøgsværdier til nøjagtigere Løsning af en Ligning med en Rod mellem $\frac{a_1}{b_1}$ og $\frac{a_2}{b_2}$.

Saadanne nye Fremskridt som dem, vi her have

omtalt, træffe vi ikke i en Bog, som skyldes Chuquet's samtidige Luca Paciuolo, og som blev trykt i Venedig 1494 og har Titlen *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*. Den bringer væsentlig kun, hvad der tidligere var bragt til Veje, og meget er ikke saa klart og nøjagtig fremsat som tidligere f. Ex. af Leonardo fra Pisa; men den bringer det i stor Maalestok og anvendt paa talrige theoretiske og praktiske Exempler. Og Hovedsagen er, at denne trykte Bog blev udbredt og var i Hænderne paa de forskjellige Mænd, som i den nærmeste Tid skulde føre navnlig Algebraen videre. Disse havde saaledes nu et fælles Udgangspunkt og derved et godt Middel til at forstaa hverandre og arbejde sammen.

Medens vi her paa Arithmetikens og Algebraens Omraade væsentlig kun se Forberedelser til de store Fremskridt, som den nærmest følgende Tid skulde bringe, træffe vi endnu i den her omhandlede Tid en Mand, der paa et andet Omraade selv er med til at bringe saadanne Fremskridt, som i Modsætning til Chuquets fik blivende Betydning. Det er Tyskeren Johannes Müller, sædvanlig kaldet Regiomontanus. Han er født 1436 og var Discipel af Peurbach, Professor i Wien, som har store Fortjenester af Indførelsen af Ptolemaios' og Arabernes Trigonometri i Europa. Regiomontanus førte et meget bevæget Liv og opholdt sig snart i Italien, snart i Tyskland og Ungarn, og allerede i en Alder af 40 Aar standsede Døden hans efter en stor Maalestok anlagte mathematiske og astronomiske Virksomhed. Hans Omflakken virkede dog ikke alene forstyrrende, men bragte ham tillige i Berøring med mange Astronomer og Mathematikere, og i Italien havde han Lejlighed til at lære Græsk, særlig med det Formaal at fortsætte Peurbachs Udgave af Ptolemaios' Almagest.

Han gjorde derved et Bekjendtskab paa første Haand ogsaa med andre græske Mathematikere, som han satte meget højt. En af dem, han lærte at kjende, var Diofant, og han har lagt sin taltheoretiske Interesse, som dog vistnok forud har været næret ved Forbindelsen med italienske Mathematikere, for Dagen ved at opstille en Række meget vanskelige herhen hørende Opgaver.

Størst Betydning have dog hans trigonometriske Arbejder faaet. Blandt disse skulle vi i Tilslutning til, hvad vi have truffet hos arabiske Astronomer, og hvad hans Lærer Peurbach havde fortsat, først omtale hans trigonometriske Tabeller. I disse er han den første, som har gjennemført Brugen af Decimalsystemet. Hans sidst udarbejde Sinustavler gaa fra Minut til Minut, og idet han lader Radius være 10^7, er Nøjagtighedsgrænsen den samme som i vore 7-cifrede Tavler, uden at dog egentlige Decimalbrøker endnu ere komne i Brug.

Læren om den geometriske Anvendelse af saadanne Tavler er hos Regiomontanus for første Gang fremstillet selvstændig og ikke blot som Hjælpesætninger til Brug i Astronomien. Den Tanke at udarbejde et saadant egentlig trigonometrisk Værk fører Regiomontanus med vanlig Pietet mod Peurbach tilbage til denne sin Lærer. Hans Bog har Titlen: *De triangulis omnimodis libri quinque.* Heri behandles ikke blot som af tidligere Forfattere de retvinklede Trekanter, af hvilke de andre ganske vist kunne sammensættes; men baade i Planen og paa Kuglen gjennemføres Løsningen af mange Spørgsmaal vedrørende den skjævvinklede Trekant. Paa Kuglen har Regiomontanus saaledes vist, hvorledes en Trekants Sider bestemme Vinklerne og omvendt.

De tre Aarhundreder, som vare fulgte efter Leonardo af Pisa vare hovedsagelig benyttede til at give

saadanne Kundskaber og Færdigheder, hvoraf denne allerede var i Besiddelse, en saa almindelig Udbredelse, at de kunde danne et Udgangspunkt for en ny Udvikling. Dette Grundlag styrkedes derved, at man nu havde direkte Kjendskab til de Forfattere fra Oldtiden, hvem det mest skyldtes, navnlig Euklid og tildels Ptolemaios, samtidig med at man var begyndt at stifte et foreløbigt Bekjendtskab med de Forfattere, som skulde yde Vejledning under den paafølgende Udvikling: Archimedes, Apollonios og Diofant. En virkelig ny Udvikling var ved Regiomontanus begyndt paa Trigonometriens Omraade. Af de tekniske Hjælpemidler, som Algebraen vilde faa Brug for, kjendtes almindelig Tegn for + og — nemlig $\overline{p}$ og $\overline{m}$, og enkelte andre. Chuquets mere udviklede Tegnsprog viste, selv om det ikke kom i almindelig Brug, at man var i Stand til at skabe sig de Fremstillingsmidler, som en videregaaende Udvikling maatte kræve.

Herved var forberedt en ny Udviklingsperiode for Mathematiken, der i Frugtbarhed kun kan sammenlignes med de faa Aarhundreder, i hvilke den græske Mathematik naaede sit højeste Standpunkt. Den kom til Gjennembrud, da man ved Løsningen af Tredjegradsligningen saa, at man kunde magte en Opgave, som Græker og Arabere havde maattet lade ligge, og derved fik en hidtil ukjendt Tillid til egne Kræfter. Ved Hjælp af Bogtrykkerkunsten kunde de mangfoldige Arbejder, som nu fremkom i de forskjellige Lande, paa frugtbringende Maade gribe ind i hverandre. I Algebraen fulgtes det omtalte Gjennembrud rask af andre store Fremskridt. Samtidig lærte man bedre at forstaa de vanskeligere græske geometriske Arbejder; hvad man deraf lærte, satte man i nye Forbindelser med den Algebra, som man selv havde givet en ny

Form, og den analytiske Geometri fremstod. Desuden gik man langt videre end de gamle i stereometrisk Behandling af Keglesnittene. Man studerede Archimedes' statiske Arbejder og skabte selv Dynamiken. Fra Studiet af Diofant kom man gjennem helt nye Undersøgelser til de mærkeligste taltheoretiske Sætninger. Studiet af Archimedes' infinitesimale Undersøgelser bragte til i stigende Omfang selv at foretage lignende og at udvikle de dertil tjenende Methoder saaledes, at man ved Slutningen af det 17. Aarhundrede besad en Infinitesimalregning. De i Slutningen af Middelalderen omtalte Tilløb førte til en virkelig Brug af Logarithmer.

Dette skal siges allerede her ved Enden af vor Skildring af Mathematikens Historie i Oldtiden og Middelalderen. Man vil da forstaa, at Grunden til, at vi have dvælet saalænge særlig ved den græske Oldtid, ikke blot er den store Interesse, den har i og for sig og som Led i den Kundskabsmasse, der nu engang var naaet ved Middelalderens Slutning, men tillige som den Kilde, hvoraf man derefter vedblev at øse rige Impulser, paa samme Tid som man havde lært at bearbejde disse Impulser selv og saaledes frembringe noget virkelig nyt.