

Denne fil er downloadet fra
Danmarks Tekniske Kulturarv
www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på
www.tekniskkulturarv.dk/about

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

A.S. Guldberg.
Matematikens Betydning
og Anvendelse.

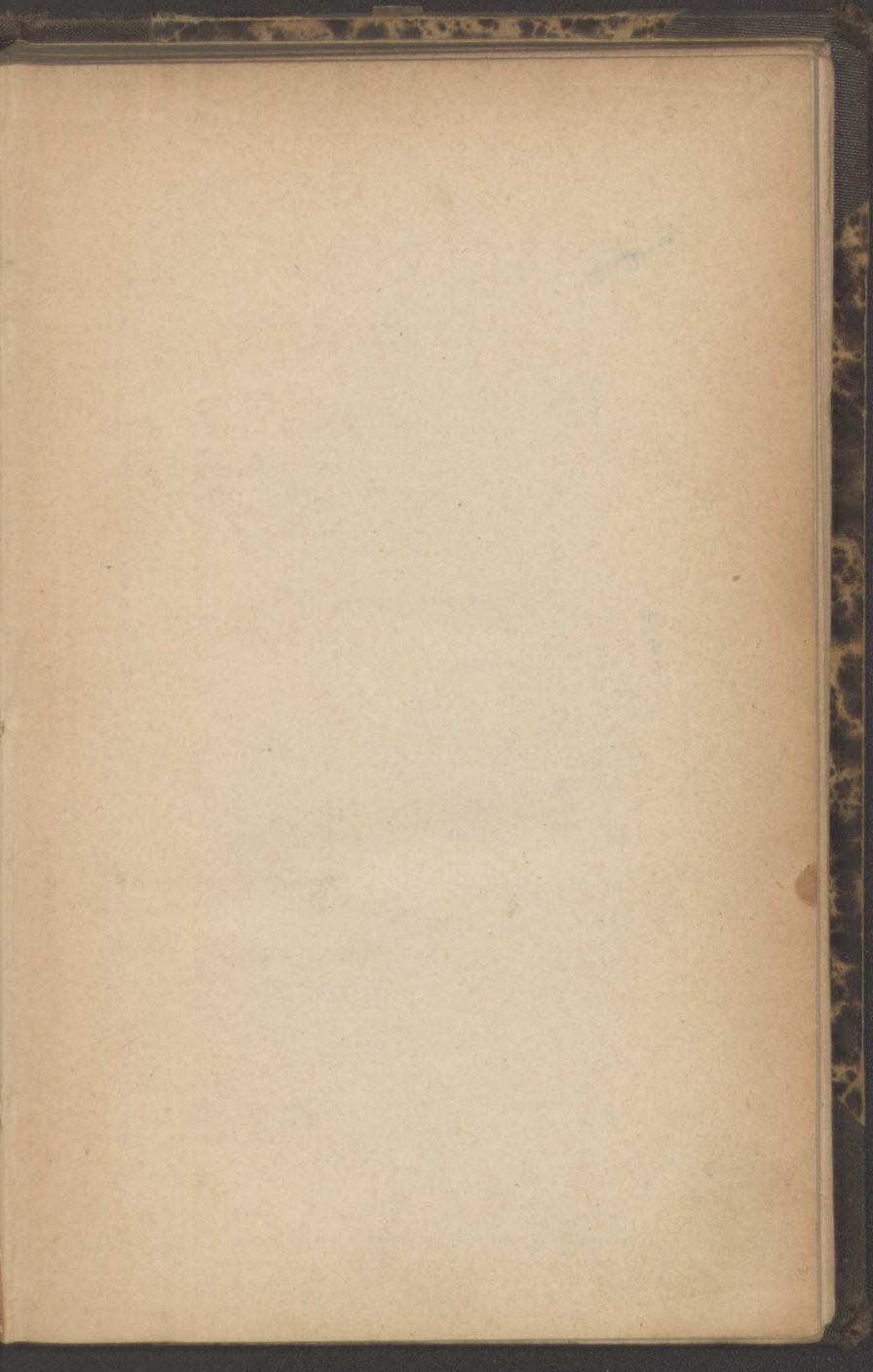
DIDAKTI-
KFORBENINGEN.

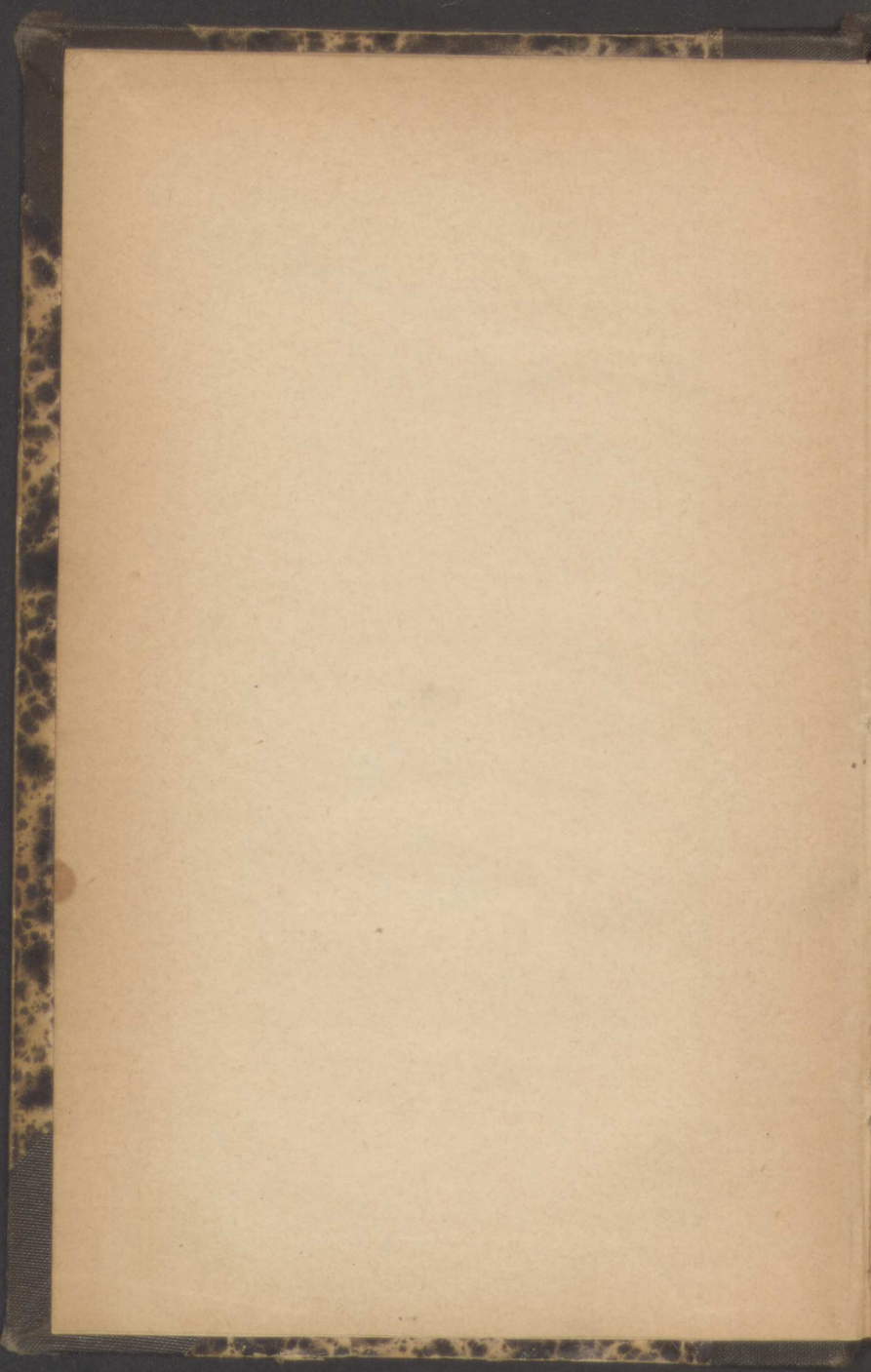
792.

18

51

51







MATEMATIKENS BETYDNING

OG

ANVENDELSE.

FEM POPULÆRE FOREDRAG

AF

Dr. A. S. GULDBERG,

Lærer i matematik ved den kongelige norske krigsskole.
Medlem af vid. selsk. i Christiania og Throndhjem.



CHRISTIANIA.

FORFATTERENS FORLAG.

1870.

Trykt hos Werner & Co.

Forord.



De fleste forbinde ved ordet „matematik“ begrebet om noget uforståeligt og vanskeligt, der alene er tilgængeligt for fagmanden, og selv de dannede, der på skolen ere blevne underviste i aritmetik og geometri, have på få undtagelser nær lidet tilovers for denne videnskab, hvis nytte og betydning for den almene dannelse er dem tvivlsom. Forfatteren har troet at burde efter ringe evne gjøre sit til om muligt at bringe en rigtigere anskuelse frem. Han har troet, at dette kunde ske ved på en for den dannede læser fattelig måde at meddele nogle af de problemer, matematiken løser, at behandle under populær form et og andet emne af de exakte naturvidenskaber, hvori matematiken spiller en rolle, og at berøre enkelte spørgsmål i det sociale liv, der erholde sin løsning ved matematikens hjælp. Det er derved muligt at åbne en ny synskreds for øiet; det viser sig, at matema-

IV

tiken ikke er en afsluttet videnskab, ufrugtbar og utilgængelig for den ydre verden, men at den tvertimod lever og røres midt i verdenslivet, at den hele natur, såvel den døde som den levende, styres af love, udtrykte ved matematiske formler, og, at der i dybeste forstand er sandhed i de berømte ord: *du haver beskikket alle ting med mål og tal og vægt**).

Næsten to år ere forløbne, siden de efterfølgende foredrag holdtes ved universitetet i Christiania. Når de nu med nogle få forandringer af forfatteren ere udgivne i trykken, er grunden den, at han har troet at spore blandt folket en lyst til at gjøre et om-ænd flygtigt bekjendskab med de forskjellige videnskaber, og — hvad der er ham af større vægt — at han som videnskabsmand anser det for sin pligt at bidrage til, at folket lærer at kjende idetmindste, i hvilken retning videnskaben går, og at den ikke er unyttig.

Til slutning er føiet en oversættelse af *Pascals „réflexions sur la géométrie [en général],“* et klassisk værk, som den dag idag læses af eleverne ved Frankrigs skoler. Det skulde glæde forfatteren, om en og anden lærer ved vore skoler vilde i de øverste klasser forelæse eller lade

*) *Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti*
Visdom. bog XI, 22.

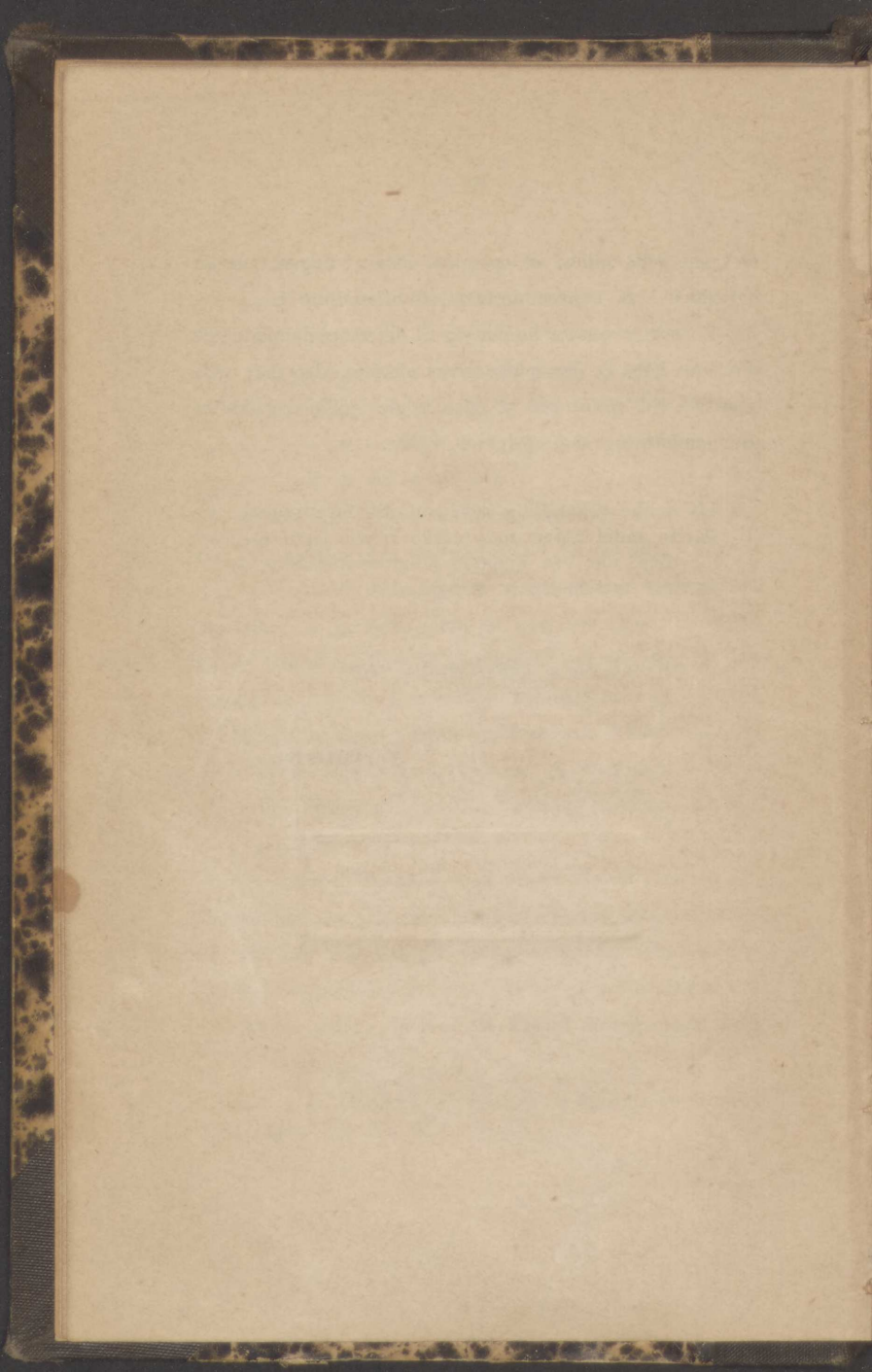
eleverne selv oplæse et og andet afsnit i bogen; særligt anbefales i så henseende *Pascals* afhandling*).

Forøvrigt vender bogen sig til det store dannede folk med det håb, at der måtte gives enkelte, der ikke ville anse sin tid spildt ved at offere nogle ledige stunder til gjennemlæsning af de følgende blade.

*) Til denne afhandling såvelsom til foredragene ere føjede endel noter, som måske kunne have interesse for dem, der ere hjemme i matematik uden derfor at være matematikere af fag.

Christiania, 22de Oktober 1870.

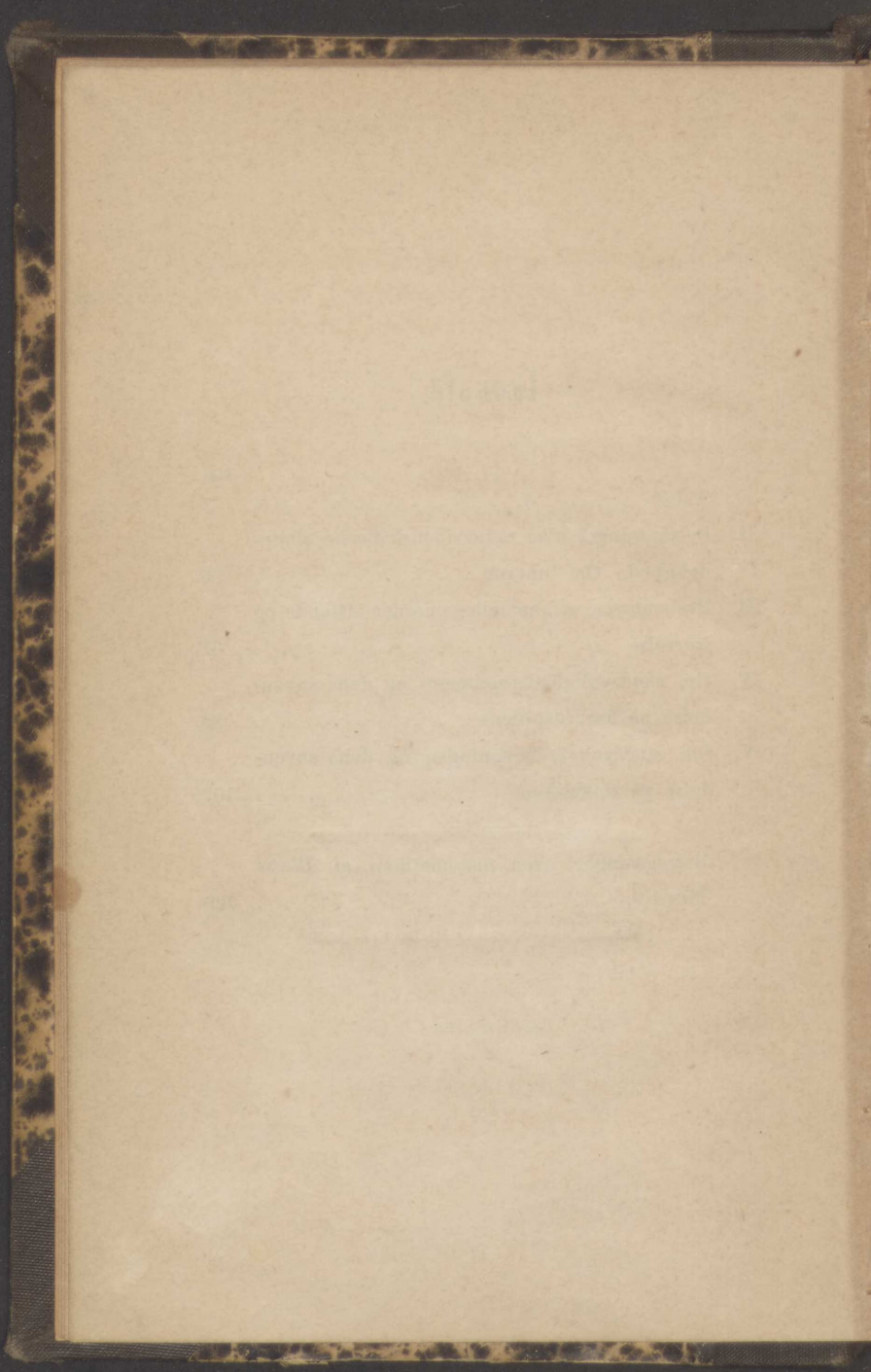
Forfatteren.



Indhold.

	Side.
I. Tallet	1
II. Betragtninger over naturvidenskaberne ialmin- delighed. Om tonerne	33
III. Bestemmelse af himmellegemernes afstande og størrelse	61
IV. Om sandsynlighedsregningen og dens anven- delse på hazardspillene	85
V. Om sandsynlighedsregningen og dens anven- delse på statistiken	107

Betragtninger over matematiken af <i>Blaise</i> <i>Pascal</i>	129
--	-----



I.

Tallet.

Enhver kjender *tallet* således, som det fremtræder i sine simpleste forbindelser, og daglig gjøre vi alle brug deraf. Så beskedent og fordringsløst som tallet end i almindelighed optræder, så er det dog af største vigtighed, ja uundværligt. Tag tallet bort, og alt forvandles til et ubestemt kaos. Dog, det er umuligt endog blot at tænke sig tallet borte; ligesålidt som vi kunne sætte os ud over rummet og tiden, ligesålidt kunne vi abstrahere tallet bort.

Som tallet kjendes og bruges i det daglige liv, er det overordentligt simpelt, og enkelte af dets forbindelser saa klare og indlysende, at de endog tjene som betegnelse for det, som er forståeligt for alle og enhver. Udtryk som: det er så klart som, at 2 og 2 er 4, høre herhen og vise, at man forudsætter de simpleste tal-kombinationer kjendte og begribelige for enhver. Men det er kun lidet bekjendt, at tallet eier

en verden for sig, en verden, hvori de mærkeligste love herske med samme højhed og uforanderlighed, som de store og evige fornøft- og naturlove. Og, hvad der er ikke mindre forunderligt, denne tallenes verden griber på de mangfoldigste måder ind i den synlige verden og strækker sit herredømme over gebeter og felter, hvor man mindst skulde vente det. Det er endel af den matematiske videnskabs opgave at granske og opdage lovene i tallenes verden, og dette er en såre vanskelig opgave. Flere af Europas første videnskabsmænd have offret tid og arbeide derpå, men, om der end er udrettet adskilligt, så er det dog en forsvindende del mod det store hele.

Til at foretage sine undersøgelser på tallenes gebet benytter matematikeren et eiendommeligt sprog eller rettere en særegen betegnel-ses måde. For den uindviede er dette tegnsprog ligeså ugjennemtrængeligt som Egyptens hieroglyfer, og det fordrer megen flid og tålmodighed, forinden man opnår tilstrækkelig øvelse i at læse samme og udtrykke sine tanker deri. Det kunde ved første øiekast synes besynderligt, at man benytter sig af et sådant sprog. Måske er det også en svaghed, en menneskelig ufuldkommenhed; for et høierestaaende væsen er måske vor *algebra* og *infinitesimalregning* kun

et daarligt, et usselt instrument, som han med ringeagt vilde kaste bort, men for os skrøbelige væsner, som have så vanskeligt for at nå frem til sandhed, for os er det et ypperligt våben, måske det skarpeste og fineste, som den menneskelige ånd har opdaget. I dette sprog kan man ofte i en linie udtrykke på en bestemt og klar måde, hvad der skulde sider til at udtrykke i ord, og man kan ved dets hjælp løse opgaver i nogle minutter, som uden samme vilde fordre timer selv af den skarpsindigste, ja vel være absolut uløselige. Det er derfor ikke uden grund, at matematiken roses for sit sprog, udmærket ved *korthed*, *simpelhed* og *præcision*.

Da de fleste matematiske sandheder, også de i *tallenes* verden, ere indklædte i det nævnte sprog, blive de kun tilgængelige for få, og det har sine store vanskeligheder at oversætte dem i det daglige sprog. Men vi skulle i det følgende alene anstille almindelige betragtninger om tallets betydning og anvendelse uden at gå nøiere ind i det algebraiske tegnsprog.

Betragte vi tallene i sin orden og rækkefølge, da må det være alle påfaldende, hvor sindrigt man går frem for at betegne skriftligt endog de største tal. Vore ziffre ere i antal kun 10, nul medregnet, og dog strække de til forat udtrykke et hvilket som helst tal. Enhver

ved, at hemmeligheden ligger deri, at et ziffers værdi afhænger af dets *plads*. De første ni tal betegnes ligefrem med forskellige ziffre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, men det følgende tal ti betegnes med 10 : med ziffret 1 på anden plads. Overhovedet har man vedtaget, at et ziffer på anden plads betegner *tiere* : grupper af ti enere, således at f. ex. 23 betegner to tiere og tre enere, 57 betegner fem tiere og syv enere. Fremdeles betegner et ziffer på tredje plads *hundreder* : grupper af ti tiere, et ziffer på 4de plads betegner *tusinder* : grupper af ti hundreder osv. Når altså et ziffer rykker en plads fremad mod venstre, betegner det ti af de foregående enheder. Ziffret 0 har den betydningsfulde rolle at an vise et andet ziffer sin rette plads, når ingen lavere enheder findes. Skriver man f. ex. ziffrene

5,700,235,023,824,

da står her 4 enere, 2 tiere, 8 hundreder, 3 tusinder, 2 titusinder, 0 eller ingen hundredetusinder, 5 millioner, 3 tiere af millioner, 2 hundreder af millioner, 0 eller ingen tusinder af millioner, 0 eller ingen titusinder af millioner, 7 hundrede tusinde millioner og endelig 5 billioner. Dette tal, der læses:

Fem billioner, syv hundrede tusinde, to hun-

drede og fem og tretti millioner, tre og tyve tusinde, otte hundrede og fire og tyve, udtrykker i virkeligheden et umådeligt stort tal og består dog af forholdsvis faa ziffre, er let at overskue og simpelt at læse.

Sammenligner man denne vor betegnelses-måde for tallene med f. ex. den romerske (enhver kjender de romerske tal på en urskive), da viser sig strax en overordentlig overlegenhed på vor side. Men endmere kommer denne frem ved de forskjellige regningsarter. Vor skrivemåde medfører en yderst simpel og hurtig regning i addition, subtraktion, multiplikation og division, som man ikke noksom kan beundre.

Såvel vore ziffre som deres sindrige anvendelse til at betegne hvilkesomhelst tal skyldte vi *Araberne*. Araberne, som mange, der ikke kjende nøiere videnskabernes og de skønne kunsters historie, betragte med ringeagt, ere et folk, som i sin Tid, medens råhed og barbari herskede i Europa, vare videnskabens bærere og det med ære og hæder. Den vildhed og utæmmede ødelæggelseslyst, som man så hos enkelte af de arabiske erobrere, og bragte en af dem til at brænde det alexandrinske bibliotek med dets uhyre skatte, var væsentlig en følge af den religiøse fanatisme, der i begyndelsen opflammede den hele nation. Nogen tid

senere, da denne havde lagt sig, viste Araberne sig som et poleret folk, og deres videnskabsmænd og udentvivl mange af kaliferne beklagede vistnok i høieste grad ødelæggelsen af det berømte bibliotek, hvis litterære skatte de skulde have anseet for kosteligere og mere værd end mangan en erobret provins.

Allerede i slutningen af det 8de og begyndelsen af det 9de århundrede blomstrede videnskaberne blandt Araberne. Den bekjendte *Harun-al-Raschid* yndede og opmuntrede videnskaberne, men især skylde de hans søn *Abdalla Almamon* overordentligt meget. *Almamon* blev undervist af en kristen læge *Johan Mesva* og gjorde raske fremskridt i de fleste videnskaber, men især i de matematiske. Han gjorde alt forat indplante sit folk kjærlighed til videnskaberne. Det første skridt, han tog, forat nå dette mål, var at forskaffe sig de udmærkede græske forfatteres originalskrifter. Han købte ikke alene sådanne i mængde, men da han sluttede fred efter en seier over keiser *Michael den III*, satte han som en af sine betingelser for freden, at *Michael* skulde skaffe ham alle slags græske bøger. Ved rige belønninger opmuntrede han en hel del videnskabsmænd til at oversætte disse skrifter i det arabiske sprog, og snart

var nationen i besiddelse af alle oldtidens literære rigdomme.

Hvad angår vore ziffre, så skyldte vi dem som sagt *Araberne*; imidlertid er det dog neppe sandsynligt, at disse selv have opfundet dem. Tvertimod er der meget, som taler for, at *Araberne* have faaet dem fra *Inderne*. Man finder i enkelte biblioteker arabiske manuskripter, der behandle aritmetik, og som bære titelen „*kunsten at regne efter Inderne*“ eller „den indiske regning“, og blandt disse findes et (i Leyden), hvis taltegn ligne meget vore nuværende.

Fremdeles siger den arabiske forfatter *Alséphadi* etsteds, at der er tre ting, hvorved den indiske nation udmærker sig, nemlig ved bogen *Goloila ve damma* (den indeholder et slags fabler, der ligne *Æsops*), ved deres *regnekunst* og ved *skakspillet*.

Endvidere existerer der manuskripter af et værk af *Planud*, der bærer titelen *Αριθμική Ινδική* 3: *Indisk Aritmetik*. Det Talsystem, som han der nævner, er netop det samme, som vi benytte den dag idag, og hans taltegn næsten de samme som *Alséphadi's*. Han siger, efter at have vist formen af de ni aritmetiske karakterer eller taltegn: „og disse ni karakterer ere indiske“; der er, tilføjer han, et tiende

kaldet *Τζιφφα*, som de udtrykke ved 0 og som betegner intet. Her have vi sandsynligvis oprindelsen til vort ord ziffer, som en misbrug, indført for nogle århundreder siden, har overført til at betegne et hvilket som helst af vore taltegn.

Endelig kan nævnes, at da vore nuværende ziffre kom i brug i det 13de århundrede, tvivlede ingen på, at de oprindeligt kom fra Indien. *Sacro-Bosco* lærer os dette i sin aritmetik, der er skrevet på vers, og de tegn, han benytter, ere næsten ganske vore.

Digteren *Alséphadi* omtaler et træk, som også viser, at Inderne ikke vare uden dygtighed i aritmetik.

Da *Ardschir*, konge af Persien, havde opdaget trik-trak-spillet og roste sig deraf, opfandt Inderen *Sessa*, søn af *Daher*, skakspillet og viste det for en indisk fyrste. Denne fandt såmeget behag deri, at han bød *Sessa* begjære som belønning, hvad han vilde. Denne bad om en tilsyneladende ringe ting, nemlig om et hvedekorn på første rude af skakbrættet og dobbelt op for hver af de følgende. Fyrsten blev næsten vred over et så ubetydeligt forlangende, der syntes så lidet i forhold til hans magt og storhed; men, da *Sessa* forblev ubevægelig, befalede han sin vezir at give ham,

hvad han ønskede. Ministeren blev imidlertid yderlig forbauset, da han havde beregnet summen, som langt oversteg kongens rigdom, og ilede til denne, som i begyndelsen ikke vilde tro, hvad veziren sagde. Da han imidlertid havde overbevist sig om regningens rigtighed, lod han *Sessa* komme til sig og erklærede, at han ikke kunde opfylde hans bøn; han tilføiede, at han beundrede ham for denne hans begjæring endmere end for hans opfindelse af skakspillet.

Den arabiske forfatter gjør, efterat have fundet antallet af hvedekorn, den beregning, at der vilde behøves 32,768 byer for at opbevare kornet og, hvis det samledes i en pyramide, vilde denne være 6 mil høi og ligeså mange mil i længde og bredde. Da længden af den arabiske mil ikke er nøiagtig bekjendt, har den engelske matematiker *Wallis* gjort beregningen efter, og han fandt, at pyramiden vilde udgjøre 9 engelske mil i høide, længde og bredde. Endelig har den franske matematiker *Montucla* beregnet, at om hele jorden, havet iberegnet, var en eneste stor ager, og den blev tilsaaet med hvede, så vilde selv efter en temmelig høit ansat foldrighed, en høst neppe give mere end ottendeparten af den nævnte kornmængde.

Vi forlade disse beregninger, som for os ingen vanskeligheder har, men sortere under

den elementære aritmetik, og vende tilbage til tallene selv.

Man adskilte allerede meget tidligt mellem to hovedklasser af tallene, nemlig de såkaldte *primtal* og de *sammensatte tal*. De første ere *udelelige*, de andre kunne derimod *sammensættes* af primtal. Således ere 2, 3, 5, 7, 11, 13 *primtal*, derimod 4, 10, 15 osv. *sammensatte tal*. 4 består af 2 gange 2, 10 af 2 gange 5, 15 af 3 gange 5 o: de kunne dannes som produkter af primtal. Disse primtal spille en stor rolle i aritmetiken eller læren om tallene, og mange høist mærkelige egenskaber ere opdagede om dem, navnlig i vort århundrede.

Forat give en idé om en almindelig lov blandt tallene skal jeg kun nævne det *fermatske teorem*, der er temmelig simpelt og let fattelig.

Tag to primtal og multiplicer det første såmange gange med sig selv, som det andet indeholder enheder på en nær; træk derfra 1, så vil resten altid være delelig med det andet primtal.)*

*) Dette er dog kun et specielt tilfælde af den fermatske sats, der matematisk udtrykkes ved formelen $a^p - 1 \equiv 1 \pmod{p}$, hvor p er et primtal, og a ikke delelig med p , men forøvrigt kan a være et sammensat tal.

Tager man således 3 og 5, multiplicerer 3 fire gange med sig selv, så fåes 81; trækkes derfra 1, fåes 80, som er delelig med 5. Tager man 2 og 7, multiplicerer 2 sex gange med sig selv, fåes 64; trækkes derfra 1, fåes 63, som er delelig med 7.

Uagtet den, der ikke har gjort et nøiere studium af tallene, vanskeligt vil skjønne betydningen af denne lov, så må det dog være ham påfaldende, at hvilke printal man end vælger, så holder loven altid stik; det er umuligt at oplede to printal — og der gives dog uendeligt mange — som ikke ere underkastede denne lov. Dette er besynderligt; det skulde dog synes, som om man blandt uendeligt mange tal måtte kunne finde to, der ikke fulgte denne regel. Men så er det ikke. Loven er almen-gyldig, den gjælder alle *printal*. Det er en lov ligeså fast og ubøielig som den, der styrer stenens fald mod jorden eller lysets gang i himmelrummet. Vor videlyst vækkes, og vi spørge, hvad er grunden hertil? Er denne lov for tallene tilfældig, eller er den begrundet i tallets natur? Ganske vist, den er begrundet i tallets natur, men uden hjælp af det matematiske tegnsprog og nogen dybere indsigt i tallenes egenskaber, lader den sig vanskelig opklare. Det vil forøvrigt måske ikke være

uden interesse at vide, at denne simple *fermatske sats* danner en af grundpillerne i *tallenes teori*, der atter på mangfoldige måder griber ind i matematikens forskellige grene.

Uden at indlade os nærmere på disse abstrakte love, skal jeg nævne, at de gamle *Pythagoræere* beskæftigede sig meget med tallene. Af det ubetydelige, som er os opbevaret, synes det imidlertid, som om mange af deres spekulationer have været unyttige, ja tildels tomme sværmerier. Herhen hører den berømte *Tetraktys*, der sammensætter den ganske verden af de 4 første ulige og lige tal. Tallene 1, 3, 5, 7 repræsenterede de fire himmelske elementer; tallene 2, 4, 6, 8, de lige tal af lavere rang, repræsenterede de fire jordiske elementer. Summen af disse tal, som er 36, repræsenterede verden. Enkelte have villet forklare denne *Tetraktys* som et symbol, der havde sin dybere betydning, alene kjendt af de indviede. Hvordan dette nu end forholder sig, så er det mærkeligt nok, at det samme skal findes hos Kineserne, som nævne keiser *Fo-hi* som Opfinder deraf. Dette er besynderligt; thi det er ikke underligt, at to forskellige folk opdage samme sandhed, da sandheden kun er *en*, men at de netop skulle komme til samme bizarre anskuelse om visse tal, det er besynderligt.

Man skiller mellem de *hele tal* og de *brudne* eller brøktallene. Når man deler en vis enhed f. ex. i 4 lige dele, så er hver af disse dele en brøkdel af enheden. Tages 3 af disse dele, har man en brøk, nemlig tre fjerdedele, der skrives $\frac{3}{4}$. En brøk betegnes skriftligt ved to tal, nævner og tæller; nævneren angiver, hvormange dele den givne enhed er delt i, tælleren, hvormange sådanne dele brøken indeholder. Skriver man altså $\frac{7}{120}$ spd., da betegnes her ved, at 1 spd. er delt i 120 lige dele og deraf er taget 7. Dette er nu bekjendt nok. Man har særegne benævnelser for visse brøker, således benævnes $\frac{1}{120}$ spd. *en skilling*, $\frac{1}{24}$ alen *en tomme*, $\frac{1}{12}$ tomme *en linie* osv. Vigtigheden og nødvendigheden af en sådan inddeling af de højere enheder f. ex. daler, alen, pund osv. i mindre dele er så indlysende, at den her ikke behøver nøiere at berøres. Det er også almindeligt bekjendt, hvorledes indførelsen af brøktallene medfører fire regningsarter analoge med de fire i hele tal, og at disse regneoperationer ere af betydning også i det daglige liv, men især ved de ofte vidtløftige beregninger, der forekomme i arbejder af videnskabelig og teknisk art.

En stor rolle spille tallene som *forholdstal*. Vi mennesker kunne alene opfatte og begribe det

relative, det *absolute* er os egentligt talt ufatteligt. Så snart vi lære størrelser at kjende, som gå vidt udover de grænser, inden hvilke vi bevæge os i det daglige liv, stå vi der uden at kunne gjøre os et ret begreb om tingen. Men netop da komme forholdstallene os til hjælp. Når således astronomerne fortælle os, at afstanden til solen er 20 millioner mile, så forstå vi vistnok, at dette er en betydelig distanse, men noget egentligt begreb derom kunne vi vanskeligt gjøre os. Når vi derimod høre, at denne afstand forholder sig til 1 mil som et tidsrum af 8 måneder til 1 sekund, få vi strax en klarere opfatning af sagen; thi vi føres ind i en os bekjendt sfære. Ingen af os har gået eller reist 20 millioner mil, men vi have alle gennemlevet mange gange et tidsrum af 8 måneder. Når man fortæller os, at den danske astronom *Ole Rømer* beregnede lysets hurtighed til omtrent 40,000 mil i sekundet, så forstå vi vistnok, at dette er en stor fart, men noget egentligt begreb derom, gjøre vi os ikke uden ved at sammenligne med bekjendte ting. Regner man, at en mand kunde gå 10 geografiske mil om dagen — hvilket er et stridt arbejde, som kun få kan gjøre — så vilde han, forat gå disse 40,000 mil, dog behøve henimod 11 år, og denne strækning gennemløber lyset

i et sekund! Men selv i det daglige liv kan man ofte iagttage, hvor vanskeligt vi have for at forstå andet end det relative. Forat nævne en simpel ting vil jeg omtale det besvær, man har, når man første gang kommer til udlandet og skal benytte en ny myntfod. Uagtet intet er simplere at erindre end, at 1 thl. er omtrent 80 β og 1 fr. er 21 β , så har enhver reisende vistnok mere end engang ved indkjøb af diverse sager i udlandet følt nødvendigheden af først at beregne prisen i sit eget lands myntfod forat kunne forstå, om det var dyrt eller billigt. Man skulde dog tro, at når man vidste myntens værdi, og der for en vare forlanges så og så meget, så skulde man strax have sin mening opgjort, om prisen var rimelig eller ei; men erfaring godtgjør, at så ingenlunde er tilfældet. Dette viser atter, hvor bundne vi ere til de gamle tilvante forholde. Hvad her er sagt om mynt, gjælder naturligvis også mål og vægt.

De hele tal og brøktallene ere de eneste, der forekomme i det praktiske liv, og mange mene rimeligvis, at andre tal kan der ikke existere. Man skulde ved første øiekast være tilbøielig til at helde til en sådan mening; disse to slags tal ere også fuldkommen tilstrækkelige for alle sædvanlige beregninger, og de fleste vilde rimeligvis kun være lidet taknemmelige

mod den, som opfandt et nyt slags tal, der måtte synes snarere at volde besvær end virkelig nytte.

I matematiken stiller sagen sig dog anderledes. Det viste sig allerede for oldtidens filosoffer, at visse geometriske problemer ikke kunde løses nøjagtigt ved hjælp af hele tal og brøker. Man kom derved til at indse, at der virkelig gaves tal, der hverken ere hele eller brudne. Disse tal har man kaldt *irrationale*, og det er ved dem, vi et øieblik ville dvæle, da de ere af almindelig interesse.

Konstruerer man et kvadrat, hvis side er 1 fod, og drager en linie fra et hjørne til det modstående, en såkaldet diagonal, så ville vi forsøge at bestemme længden af denne. Den simpleste måde, som enhver vil falde på, er at måle længden. Hvis man gjør dette med en almindelig målestok, finder man, at længden udgjør 1 fod 4 tommer og 1 linie (decimalmål). Men dette er ikke aldeles nøjagtigt; diagonalens længde er i virkeligheden noget større. Ved en særdeles skarp målen findes den at være $1' 2'' 1\frac{4}{10}'''$; men selv dette er ikke absolut rigtigt, og man kan måle så nøie, man vil, man finder aldrig diagonalens absolute længde.

Den berømte filosof *Pytagoras*, hvem matematiken skylder meget, fandt, at diago-

nalen stod i et mærkeligt forhold til kvadratets side, idet han ad matematisk vei beviste, at det tal, som udtrykker sammes længde, er således beskaffent, at, når det multipliceres med sig selv, er produktet netop 2. Herved var da en anden og, som det syntes, simplere vei fundet til at bestemme diagonalens længde. Man har jo kun at forsøge sig frem med at finde et tal, som multipliceret med sig selv giver 2. Men ulykken er, at et sådant tal findes der hverken blandt de hele eller brudne tal. Man kan vistnok finde et tal, som kommer det søgte overordentligt nær, men aldrig et, som udtrykker den absolut nøiagtige værdi. Her have vi et *irrationalt tal*.

Et af de mærkeligste irrationale tal forekommer i det berømte problem om cirkelens kvadratur, hvis løsning så mange forgjæves har brudt sine hoveder med. Den opgave at finde cirkelens kvadratur består i at konstruere et kvadrat med samme fladeindhold som en given cirkel. Man fandt snart ud, at denne opgave reducerede sig til at finde længden af cirkelens omkreds eller dens periferi. Hvis man nemlig kan finde en ret linie, der er absolut lig længden af periferien, da er det en simpel sag at konstruere det omtalte kvadrat. Men at finde periferiens længde er ikke let.

Oldtidens berømte mekaniker *Archimedes*

$\frac{1}{7} = \frac{10}{70}$
 fandt, at periferiens længde var noget mindre end $3\frac{1}{7}$ gange cirkelens diameter og noget større end $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ gange cirkelens diameter. Hvis tallet $3\frac{1}{7}$ var nøiagtigt, havde man kun at afsætte cirkelens diameter 3 gange på en ret linie og dertil føie $\frac{1}{7}$ af diameteren forat have cirkelperiferien udstrakt i sin fulde længde; men dette er som sagt noget for stort, periferien er lidt kortere. Hvad det altså kommer an på forat løse problemet om cirkelens kvadratur er at finde det tal, som multipliceret med diameteren giver nøiagtigt periferiens længde. Dette tal, der betegnes ved det græske bogstav π (pi) falder altså ifølge *Archimedes's* beregning mellem $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ og $3\frac{1}{7}\frac{0}{8}$. Hvis man vælger $3\frac{1}{7}$, er feilen, som begåes, meget liden, omtrent $\frac{1}{100}$, og dette tal lader sig derfor meget vel benytte ved mange beregninger, hvor cirkelens diameter ikke er stor, og hvor det ikke kommer an på megen nøiagtighed, men er diameterens længde betydelig, bliver også feilen i periferiens længde betydelig. Man har i den senere tid beregnet dette tal π med overordentlig stor nøiagtighed, så at man for den sags skyld ikke behøver at anke over, at man ikke kjender den absolute nøiagtige værdi af samme, men fra et teoretisk standpunkt bliver det dog lige mærkeligt, at dette tal ikke

kan udtrykkes absolut rigtigt ved hjælp af et helt tal og en brøk. Dette tal er *irrationalt*.

Om man imidlertid end ikke kan udtrykke π som et helt tal og en brøk aldeles nøiagtigt, så kan man dog, besynderligt nok, udtrykke samme ved en såkaldet uendelig række bestående af brøker, der afvejlende skulle sammenlægges og fratrækkes. Således har man fundet, at fjerdeparten af π udtrykkes ved følgende række:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{osv.}$$

Denne række er at forstå således, at man fra 1 skal trække $\frac{1}{3}$, til det udkomne lægge $\frac{1}{5}$, derfra trække $\frac{1}{7}$, dertil lægge $\frac{1}{9}$, derfra trække $\frac{1}{11}$ og fortsætte dermed i det uendelige. Ved at udføre disse additioner og subtraktioner et godt stykke udover, erholder man en meget nøiagtig værdi for fjerdeparten af π . Multipliseres det fundne tal med 4, har man π selv, men ikke fuldkommen rigtig, thi dertil udkræves uendelig mange sammenlægninger og fratrækninger, hvilket er umuligt at udføre.

Uagtet det således er umuligt ved hjælp af helt eller bruddent tal at angive nøiagtigt, hvor mange gange længere periferien er end cirkelens diameter, så er dermed dog ingenlunde afgjort, om det ikke er muligt ad geometrisk vei at konstruere en ret linie, hvis længde netop

er lig periferiens. Ved hjælp af lineal og passer er det ikke lykkedes, og det er et fåfængt arbejde at spekulere på løsningen af cirkelens kvadratur*). Derimod har det ingen vanskelighed at løse denne opgave ved anvendelsen af visse krumme linier af høiere art end cirkelen. Allerede Grækeren *Dinostrates* løste problemet ved hjælp af en krum linie kaldet *kvadratricen*, og løsningen er så simpel og smuk, at den intet lader tilbage at ønske. Imidlertid hjælper dette os ikke til nærmere bestemmelse af tallet π , heller ikke til en nøiagtigere geometrisk løsning, da den krumme linie alene kan bestemmes punktvis, og de uundgåelige konstruktionsfeil altid have en betydelig indflydelse på resultatet, som ingenlunde bliver absolut nøiagtigt.

*) Af denne grund har det franske videnskabsakademi for meget lang tid siden bekendtgjort, at alle indleverede afhandlinger om cirkelens kvadratur såvel som om vinkelens trisektion og kubens fordobling, berømte problemer fra oldtiden, ikke længere gjenemses, men uden videre lægges væk.

Dette har været nødvendigt, fordi folk — uden større matematiske kundskaber — have givet sig til at spekulere på løsningen af disse problemer i den falske tro, at der var udsat en stor pengebelønning for deres løsning, og have derved spildt sin tid på unyttige spekulationer, ja ere undertiden endog gæde fra forstanden.

Det kunde synes, som om det var gjort altfor mange anstrængelser fra matematikernes side forat finde tallet π , hvis det kun angik cirkelen. Men så er det ikke; dette tal er ligeså vigtigt og uundværligt forat finde fladeindholdet af ellipsen, en vigtig linie især i astronomien, overfladen og kubikindholdet af keglen, cylinderen og kuglen, flader og legemer, hvis beregning såre hyppig forekomme i mekanik, astronomi og fysik. Også i andre henseender er dette tal betydningsfuldt; således afhænger, for blot at nævne et tilfælde af mange, et pendels svingetid af π , og, da pendelet er det fineste og skarpeste instrument, som vi kjende, forat bestemme kræfters størrelse og styrke, hvilket netop sker ved hjælp af svingetiden, vil man få en anelse om dette tals store rolle.

Vi nævnte, at tallet π kunde bestemmes ved en uendelig række, hvis sum det dog er umuligt at finde absolut nøiagtigt. Der gives ikke blot en, men en mængde forskellige rækker, mere eller mindre bekvemme til bestemmelse af dette tal. Jo raskere leddene aftage i en sådan række, desto bekvemmere er den for beregningen, thi man kan nøie sig med at sammenlægge et forholdsvis lidet antal led og dog erholde en meget tilnærmet værdi af π , når rækkens led hurtigt formindskes. Istedet-

for den ovennævnte række kan man således med fordel benytte følgende:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{1 \cdot 9 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 3} + \text{osv. i det uendelige}^*)$, der udgjør ottendedelen af π , og hvor brøkernes nævnere ere respektive produkterne 1.3, 5.7, 9.11, 13.15, 17.19, 21.23 osv. Man kan imidlertid ikke alene finde rækker med uendeligt mange led for tallet π og andre irrationale tal, men også for de sædvanlige hele og brudne tal. Følgende uendelige række fremstiller således tallet 2:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{osv. i det uendelige.}$

Det er let at overbevise sig herom. Lægger man sammen de to første led $1 + \frac{1}{2}$, fåes $1\frac{1}{2}$; der mangler da $\frac{1}{2}$ på 2. Medtages 3die led, fåes $1\frac{3}{4}$; der mangler da $\frac{1}{4}$ på 2. Medtages 4de led $\frac{1}{8}$, fåes $1\frac{7}{8}$, idet $\frac{3}{4}$ er lig $\frac{6}{8}$ og dertil $\frac{1}{8}$ er $\frac{7}{8}$; der mangler da $\frac{1}{8}$ på 2. Medtages 5te led, fåes $1\frac{15}{16}$, idet $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$ og dertil $\frac{1}{16}$ er $\frac{15}{16}$; der mangler da $\frac{1}{16}$ på 2. Fortsætter man således, sees, at man stedse kommer tallet 2 nærmere

*) Denne række udledes af den foregående; man har nemlig ifølge denne:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \dots, \text{ hvoraf}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots, \text{ idet man udfører}$$

$$\text{subtraktionen mellem hvert par led. Heraf fåes ved}$$

$$\text{division med 2: } \frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$$

og nærmere, idet det manglende bliver $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{256}$ osv. Hvormange led man end medtager, får man aldrig absolut 2, men det resterende bliver mindre og mindre. Først når man medtog uendeligt mange led, hvilket er umuligt, erholdt man absolut nøiagtigt tallet 2. Det forholder sig med denne række anderledes end med den foregående; denne sidstes sum er det bestemte tal 2, og man behøver ikke at medtage mange led, forinden man forvisser sig om, at så er tilfældet. Rækken for π har også et bestemt tal som sin sum, men dette tal er os ubekjendt, det findes hverken blandt de hele tal eller blandt brøktallene; vi kunne alene tilnærmelsesvis fremstille det ved hjælp af disse. *Archimedes's* tal $3\frac{1}{7}$ er således ikke nøiagtigt lig π , men kun en første tilnærmet værdi; man finder ved at medtage flere led i rækken $\pi = 3,1415926$, som er en overordentligt tilnærmet værdi, idet feilen er mindre end $\frac{1}{10000000}$ af cirkelradiens længde, men absolut nøiagtigt er det ikke*).

Se der en besynderlighed ved tallene, som må vække forundring og forbauselse! Disse to rækker repræsentere to tal, som aldrig absolut naes, hvormange led i rækkerne man end medtager, og af disse tal er det ene det hele tal 2,

*) Se forfatterens plangeometri pag. 224.

det andet det berømte tal π , men som ikke eksisterer blandt de hele eller brudne tal og alene tilnærmelsesvis kan udtrykkes ved hjælp af disse. Man bevæger sig her på en dunkel og usikker vei, thi man bevæger sig mellem *det endelige* og *det uendelige*. Uagtet antallet af led i rækkerne overskride enhver endelig grænse ∞ : er uendeligt stort, så er dog summen endelig, og af de to tal er π således beskaffent, at det er umuligt ved hjælp af et endeligt antal ziffre absolut nøiagtigt at angive samme; man har beregnet det med indtil 200 decimaler, men om end mere end tilstrækkelig nøiagtig for det praktiske behov, er selv denne værdi ikke den absolut rette.

kom de for π Tal. 2

Det er ikke alle rækker, der fremstille endelige tal; der gives dem, hvis sum voxer over alle grænser med leddenes antal, uagtet leddene blive mindre og mindre og nærme sig nul. Som eksempel på en sådan række kan nævnes følgende:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{osv.}$ i det uendelige, hvis sum er uendelig stor, tiltrods for at leddene stadigt aftage og til slutning blive forsvindende små. En sådan række kan derfor ikke benyttes til beregning af noget endeligt tal. Der hengik temmelig lang tid, inden matematikerne udfandt regler forat afgjøre, om hvor-

vidt en række hørte til det ene eller andet slags, om den var — som man i matematiken siger — *konvergerende* eller *divergerende*.

Det er især to mænd, franskmænden *Cauchy* og nordmanden *Abel*, der i vort århundrede henlede opmærksomheden på, hvor vigtigt det var for den matematiske videnskab, at man med sikkerhed kunde bedømme, om en række var konvergerende eller ei. Som et eksempel på, hvor let endog de største ånder har kunnet fare vild i denne henseende, kan nævnes, at den udmærkede filosof og matematiker *Leibnitz* troede ved hjælp af en række at kunne påvise, at en endelig størrelse lod sig frembringe ved et uendeligt antal nuller, altså at noget kan fremkomme af intet, hvilket er fornuftstridigt*).

*) *Leibnitz* gik ud fra den af aritmetiken bekjendte geometriske række:

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ osv. i det uendelige, hvis sum er $\frac{1}{1-x}$. Han satte derpå $x = -1$ og

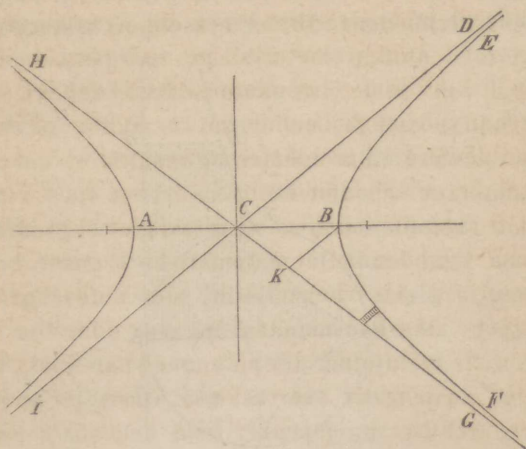
erholdt, da $1 - (-1) = 2$, følgende udtryk:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Han slog derpå sammen to og to led, hvorved han erholdt $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + \dots$ i det uendelige, hvorved han mente at have godtgjort, at uendeligt mange nuller kunne sammenlagte frembringe $\frac{1}{2}$. Han så heri et slags symbol på Guds skabelse. Denne *Leibnitz's* deduktion er imidlertid falsk, da det ikke er tilladt i den nævnte formel at sætte $x = -1$.

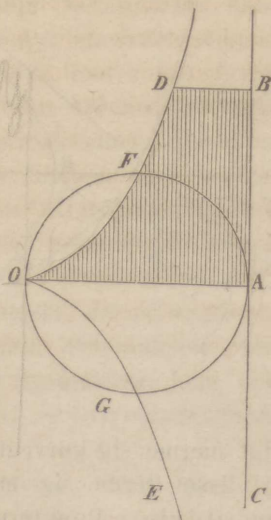
Leibnitz er vistnok heller ikke den eneste, der har villet benytte disse uendelige rækker til at forklare dunkle metafysiske spørgsmål. Forunderligt er det, at matematiken, den klareste fornuftvidenskab, under sin udvikling og væxt skulde føre til problemer og resultater, der være opfinderne selv uforståelige, ja i en vis forstand ufattelige for tanken, som svimler ligeoverfor uendeligheden. Det matematiske tegnsprog har været en slags hexemester, der pludseligt har stillet videnskabsmanden opgaver eller har ført ham til resultater, der på engang har voldt ham den glædeligste overraskelse, mén på samme tid forbauset og forvirret ham ved sin hemmelighedsfuldhed og tilsyneladende modsigelse mod fornuften.

Der eksisterer visse krumme linier, der frembyde lignende besynderligheder som de uendelige rækker. Herhen hører *hyperbelen* og *cyssoiden*, kurver, som spille en vigtig rolle i den høiere geometri. Hyperbelen, der hører til de såkaldte keglesnitlinier, består af to adskilte grene, der løbe ud i det uendelige. Figuren på næste side viser denne kurves form. Den ene af grenene er EBF; den er afskåret ved E og F, men må tænkes forlænget udover E og F i det uendelige. Der eksisterer nu to rette Linier CD og CG, der kaldes hyperbelens *asymptoter*



og som stadigt nærme sig kurvegrenene BE og BF, eftersom disse fjerne sig mere og mere, men når dem aldrig. Punkterne i den rette linie CD f. ex. komme nærmere og nærmere henimod punkterne i grenen BE, som også figuren udviser, men, hvorlangt end begge forlænges, ville de aldrig nå hinanden eller falde sammen. På lignende måde forholder det sig med *cys-soiden*, der er opfundet af grækeren *Diocles* forat løse det berømte problem om vinkelens trisektion eller tredeling. Den består af to grene, der udgå fra samme punkt O og stadigt

nærme sig mod den rette linie BC uden nogensinde at nå den. BC er cyssoidens assymptote.



Allerede denne karakteristiske egenskab ved assymptoten, at den nærmer sig kurvegrenen, således at afstanden mellem dem nærmer sig til et intet uden dog nogensinde at ophøre at existere, er høist mærkelig og aldeles ukjendt i den elementære geometri; men efter infinitesimalregningens opdagelse af *Leibnitz* og *Newton* førte undersøgelserne til nye opdagelser og af end mærkeligere natur. Man stillede sig nemlig den opgave at beregne størrelsen af

fladeindholdet mellem et stykke af kurven og asymptoten f. ex. af det overstrøgne rum ABDO mellem cyssoiden og dens asymptote. Efterat have fundet samme, beregnede man det hele, uendeligt lange, fladerum mellem den uendeligt forlængede asymptote og den tilhørende kurvegren. Man mente sig forud sikker på resultatet, nemlig at man skulde finde fladeindholdet uendeligt stort, da det jo var et åbent rum, fordi kurvegrenen som tidligere nævnt aldrig skjærer asymptoten; men beregningen viste for cyssoidens vedkommende, at dette fladerum havde en endelig størrelse, og at det netop var lig 3 gange cirkelen OAFG, konstrueret på OA som diameter.*)

*) Dette resultat erholdes ved integralregningens hjælp på følgende måde:

Ligningen for cyssoiden i retvinklede koordinater er, når OA vælges til X axe og Y axen vælges lodret på OA gennem O, der er begyndelsespunktet:

$$y = x \sqrt{\frac{x}{d-x}}, \text{ idet diameteren OA sættes lig } d.$$

Et fladeelement bliver da $ydx = x \sqrt{\frac{x}{d-x}} \cdot dx$, og

det hele fladeindhold mellem OA, kurvegrenen og asymptoten bliver $\int \frac{x \sqrt{x}}{\sqrt{d-x}} dx$, hvor integralets

grænser ere 0 og d. Dette integral reduceres ved substitutionen $z = \sqrt{\frac{x}{d-x}}$ til $2d^2 \int \frac{z^4 dz}{(1+z^2)^3}$ med

Beregner man derimod fladerummet mellem hyperbelgrenen og asymptoten, så finder man, hvad man også skulde vente, at dette er uendeligt stort*).

Disse resultater ere høist mærkelige; de vise, at i visse tilfælde kan et uendeligt langt fladerum have en endelig størrelse, ligesom en uendelig rækkes sum kan være endelig. Forat dette skal finde sted, må punkterne i kurvegrenen nærme sig asymptoten efter en vis bestemt lov, og den matematiske kalkyl viser, hvordan denne lov må være.

Af det her sagte vil man kunne få en idé om, hvorledes matematikken formår at behandle

grænserne 0 og ∞ . Udføres dette integral erholdes: $2d^2 \left[-\frac{1}{4} \frac{z^3}{(1+z^2)^2} - \frac{3}{8} \frac{z}{1+z^2} + \frac{3}{4} \arctan(z) \right]$.

Indsættes grænserne 0 og ∞ , erholdes det søgte fladeindhold $= 2d^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi d^2 = 3\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2$ o: 3 gange fladeindholdet af cirkelen om OA.

*) Vælges asymptoterne til axer, er hyperbelens ligning $xy = \frac{c^2}{4}$, hvor $2c$ betegner afstanden mellem brændpunkterne. Et fladeelement bliver $ydx = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{dx}{x}$; følgelig fladeindholdet $= \int \frac{c^2}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{c^2}{4} \lognat . x$. Integreres mellem grænserne $x = CK$ og $x = \infty$, bliver integralet $\frac{c^2}{4} [\lognat \infty - \lognat CK] = \infty$; følgelig også fladen begrænset af BC, asymptoten CG og den uendelige kurvegren uendeligt stor.

de uendelige størrelser, tiltrods forat de ikke direkte kunne udmåles og bestemmes, og på samme tid vil man indse, hvilket forunderligt instrument det matematiske tegnsprog er, som formår at løse problemer, der ved første øiekast skulde synes at spotte enhver menneskelig anstrængelse.

Foruden de omtalte rationale og irrationale tal gives der i matematiken andre tal ikke mindre besynderlige end de sidstnævnte; herhen høre de *negative* og *imaginære tal*. Det vilde imidlertid føre forvidt her nøiere at gå ind på disse, der hver især kunde udfordre en særskilt afhandling, forat man retteligen skulde opfatte deres betydning. Kun såmeget kan siges, at uagtet disse tal allerede i meget lang tid have været benyttede i den matematiske kalkyl, så er deres væsen og sande betydning, af de fleste, endog matematikere af høi rang, bleven misforstået og feilagtigt opfattet*). Der har derfor også været reist indsigelser mod deres beretti-

*) Se til exempel afsnittet „*De quelques tentatives de démonstration relatives au calcul des quantités négatives*“ i Duhamels værk „*Des méthodes dans les sciences de raisonnement*“, hvoraf fremgår, at mænd som d'Alembert, Carnot, ja endog den store Laplace misforstode disse størrelser og førte beviser, der vare uden mening.

gelse i videnskaben, og det er, kan man sige, alene de vigtige tjenester, de have ydet matematiken, som har gjort, at de ere blevne tålte, indtil man i den sidste tid har klarere anskuet dem og indrømmet dem den ærefulde plads, som de med rette fortjene.

II.

Bemærkninger om naturvidenskaberne ialmindelighed. Om tonerne.

Man taler ofte om naturen som en *bog*, der er nyttig og belærende at læse i, ja man nævner endog naturen som den *bedste bog* næst den *hellige skrift*, hvoraf menneskene kunne på den ene side hente trøst og beroligelse og på den anden side en uendelig skat af de dybeste og mest lysende sandheder. At naturen tjener til trøst og husvælelse, at mennesket ved naturen kan løftes og atter blive stærk, når livets modgang og bitterhed har gjort hjertet sygt og legemet skrøbeligt, derom ere alle enige og vel vidende. Og hvad mere er, at denne magt og helbredende evne ikke blot er at tilskrive den friske luftning fra sø og fjeld, altså en blot og bar fysisk lægende magt, men at naturen eier en dybere, en hemmelighedsfuld åndsmagt, der formår sympatetisk at træde vor sjæl imøde og tale til den som et levende væsen, derom

vidne vore digteres sange og fortællinger, der for en væsentlig del støtte sig på naturbetragtning.

Er det da, som digterne sige, at naturen eier en skjønhed og ynde, der tvinger os til at elske den, og et hjerte, der bevæges af længsler og drømme ligesom vore urolige hjerter, så er det ligeså vist, at i naturen har den høieste fornuft ristet sine runer og tegn, ofte gådefulde og mørke for et menneskes blik, men dog stedse talende sandhed og visdom.

Det var forbeholdt naturvidenskaberne at hente frem og bringe for dagen de uendelige skatte, som naturen eier. Allerede nu er meget ført frem, der i sandhed må forbause et tænkende menneske, og dog, vi vide, at det kun er en forsvindende del mod det store hele. Da mennesket kun formår at erkjende stykkevis, har studiet af naturen spaltet sig i flere grene og derved er opstået, hvad vi kalde de forskellige naturvidenskaber. Når man gjør endog kun et flygtigt bekjendskab med flere af disse, frapperes man ved at se, hvilken rolle matematikken spiller i samme. De abstrakte tallove få i naturen liv og virkelighed, geometriens sandheder iklædes kjød og blod, og, hvad man var tilbøielig til at antage for alene at tilhøre den lærdes studerkammer, kommer tilsyne i livets

mangfoldige og vexlende fænomener. Det er dette, som vismanden udtrykte i de berømte ord: *omnia in pondere, mensura et numero disposuisti* : alt har du bestemt ved tal, mål og vægt.

Ja disse ord har vist sig forunderlig sande; den dag i dag er det naturforskerens — jeg taler her om de exakte naturvidenskaber — naturforskerens vigtigste og nødvendigste arbejde at *veie, måle og tælle*. Og hvad han således har veiet, målt og talt, det forvandles i resultater, der udtrykkes ved tal, og disse tal lære os *naturens hemmeligheder* at kjende.

Inden vi imidlertid gå over til nøiere at påpege denne matematikens betydningsfulde rolle, ville vi kaste et blik på naturvidenskabernes i almindelighed og se, hvilket mål de stille sig og, hvorledes videnskabsmanden søger at nå samme.

Enhver naturvidenskab har det formål og den ofte såre vanskelige opgave at udfinde og opdage de årsager, der frembringe den mangfoldighed af fænomener, som vi daglig kunne se om os. Forat nå dette mål, må naturforskeren først og fremst nøie *iagttage* fænomenerne, og ikke lade den mindste omstændighed undgå sit blik; dette kaldes at *observere*. Uden en skarp observation er det umuligt at udrette noget i en hvilken som helst naturvidenskab, hvil-

ket også ligger i sagen selv; kjender man ikke i mindste detail, hvorledes fænomenet viser sig, da er der liden sandsynlighed, forat man skal kunne udfinde årsagen til samme, idet man isåfald ræsonnerer over noget mere eller mindre ubekjendt, eller man dømmer som den blinde om farverne. Enkelte naturvidenskaber have endnu et meget vigtigt middel til sin hjælp; det er *experimentet*. Når fysikeren og kemikeren gjør et experiment, gjør han samtidigt naturen et spørgsmål, som naturen besvarer. Når således fysikeren lader en lysstråle falde ind på et plant speil, viser der sig foruden den indfaldende stråle en reflekteret, som indtager forskellige stillinger i forhold til den første, alt eftersom speilet vendes og dreies, og ved at måle de vinkler, disse stråler danne med speilets plan, finder han loven for lysets reflexion. Når han lader en lysstråle gå gennem et glasprisma og opfanger de gennemgående stråler på en hvid skjærm, kommer det skønne lysspektrum tilsyne, der stråler i alle regnbuens farver; her har han rig anledning til at studere lysets natur og væsen. Ligeså, når kemikeren blander visse stoffe sammen og udsætter dem for påvirkning af lys eller varme, foregår ofte de mærkeligste forandringer; nye stoffe eller legemer opstår, der have ganske forskellige

egenskaber fra de oprindelige, men altid foregå forandringerne efter *bestemte, uforanderlige love*, hvori matematiken spiller en hovedrolle.

Også experimentet tiltrænger den nøiagtigste observation; enhver nokså ringe og ubetydelig ting må observeres ofte med en minutiøs skarphed, forat experimentet skal have nogen betydning og tjene som middel til at opdage de virkende årsager. Har nu forskeren ved sine forsøg og iagttagelser troet at opdage årsagen og loven for visse naturfænomener, da tjener omvendt nye observationer og eksperimenter som kontrol, som yderligere sikkerhed for hans gjætnings rigtighed.

Dog træder her ofte store vanskeligheder til, især hvor det gjælder at finde den sidste grund og årsag til fænomenet; lovene for fænomenet ere i regelen betydeligt lettere at udfinde. Når naturen ved et experiment svarer os på et spørgsmål, om dette eller hint forhold sig således, svarer den aldrig direkte *ja*, men den siger: „det kan være således“ eller „det kan ikke være således“. Det sidste svar er klart, thi det er et bestemt nei, men det første er tvivlsomt og ingenlunde tilfredsstillende. Det eneste, videnskabsmanden da har at gjøre, er at trække alle mulige konseqventser af sin gjætning eller hypotese om fænomenernes

grund og årsag samt derpå foretage en række observationer og forsøg, der alle gå ud på at forelægge naturen spørgsmål, om dette kan have sig således. Får han i alle tilfælde et bekræftende svar, har han idetmindste stor sandsynlighed, forat hans hypotese er sand. Forat oplyse dette ved et eksempel, vil jeg betragte den berømte Newtonske gravitationslov.

Englænderen *Isaac Newton* forklarede himmellegemernes bevægelse ved at antage, at to materielle legemer, der befinde sig i en vis afstand fra hinanden, udøve en tiltrækkende kraft på hinanden indbyrdes, der forholder sig ligefrem som legemernes masser og omvendt som afstandens kvadrat $\propto$: jo større masser jo større kraft og jo større afstand jo mindre kraft, men således at forstå, at når afstanden mellem de to legemer bliver dobbelt så stor, bliver kraften 4 gange så liden, når afstanden bliver 3 gange så stor, bliver kraften 9 gange så liden osv. *Newton* antog, at mellem al materie findes en slig kraft; den fremkommer efter hans mening ved molekylernes tiltrækning på hinanden.

Ved hjælp af denne simple lov forklarede han planeternes bevægelse om solen og observationerne have vist, at disse himmellegemers virkelige bevægelse på det nøjagtigste stemmer med den efter hin lov beregnede. Der er nu hen-

gået mere end 150 år siden *Newton* opstillede dette princip, og utallige observationer ere foretagne med en overordentlig nøiagtighed, men altid har det vist sig, at loven holder stik. Ja denne *Newton's* gravitationslov har endog i vort århundrede høstet en glimrende triumf. Da det viste sig ved nøiagtige observationer, at planeten *Uranus* ikke aldeles fulgte de beregnede *love*, antog man, at der måske gaves en planet udenfor samme, der ved sin tiltrækning frembragte disse forstyrrelser i planetens gang. Franskmanden *Leverrier*, senere ansat som direktør ved det keiserlige observatorium i Paris, gav sig til at beregne, hvor denne ukjendte planet måtte findes, og da han havde endt sine beregninger, skrev han til en astronom i Berlin, *Galle*, og bad ham betragte et bestemt felt på himmelen den og den dag. Da *Galle* rettede kikkerten mod det anviste felt, fandt han knapt en grad fra det beregnede sted den søgte planet, der erholdt navnet *Neptun*, og som er så langt borte, at der skal en skarp forstørrelse til forat se den.

Dette skulde nu synes at være grund nok til at antage, at der virkelig findes en tiltrækkende kraft mellem legemerne, der følger den Newtonske lov. Ja det er sandsynligt, at så er tilfældet, men absolut sikre derpå kunne vi ingeniunde være. Det var dog tænkeligt, at

årsagen var en anden end en sådan *tiltrækningskraft*, men at denne årsag i sine virkninger faldt sammen med den newtonske tyngdelov. En nøiere examination af hypotesen om en tiltrækkende kraft mellem legemerne viser også, at den ingenlunde er så klar og grei som ved første øiekast, og der forekommer meget dunkelt og forunderligt, som fornuften ikke har så let forat tilegne sig ubetinget.

For det første synes det at være en besynderlig egenskab ved materien, at to hvilke-somhelst legemer, hvor langt de end ere fjernede fra hinanden, skulle udøve en tiltrækkende kraft på hinanden. Vi ved, at, når vi med vor muskelkraft eller ved de fleste andre kræfter, der stå til vor rådighed, skulle sætte et legeme i bevægelse, behøves et materielt forbindelsesled, hvis vi ikke direkte kunne anbringe kraften på legemet.*) Forat sætte en vogn i bevægelse må vi enten støde til den eller trække i en snor eller stang, der er forbunden med vognen; vi kunne derimod ikke på afstand, hvor meget vi end anstrenge os sætte den i bevægelse uden en sådan forbindelse. Ifølge hypotesen om en tiltrækkende kraft mellem legemerne kunne de derimod indvirke på hinanden uden noget så-

*) Magneternes tiltrækning er ligeså hemmelighedsfuld og uforklarlig som tyngdens.

dant mellemlid selv på en uendelig afstand. Man kan spørge, hvorledes forplanter denne kraft sig fra det ene legeme til det andet, uagtet intet medium existerer imellem dem?

Fremdeles, hvis man antager en sådan kraft, af hvad natur er den, siden den kan forplante sig gennem et intet? Hvor lang tid behøver den forat forplante sig?

Hvad det sidste spørgsmål angår, så antog uden tvivl *Newton*, at kraften slet ingen tid behøvede forat gå fra det ene legeme til det andet, thi i alle hans beregninger ser man ikke, at denne tid er taget nogetsomhelst hensyn til. Siden den altså ingen tid behøver, må man antage den for noget *immaterielt*; thi den har jo en egenskab forskjellig fra alt materielt, der er bunden til tid og rum. Men, kunde man med rette sige, dette er lidet sandsynligt. I et hvert fald tilsiger vor fornuft os ikke at ty til overnaturlige forklaringsgrunde, hvorved vi i virkeligheden udsige, at vi *intet ved*; lad os da hellere forsøge at udfinde andre årsager, som vi kunne fatte og begribe.

Mod disse indsigelser kan nu fra den anden side svares følgende: *Newton* har aldrig sagt, at der virkelig udgår fra legemerne en sådan tiltrækkende kraft, men han har kun sagt, at himmellegemernes bevægelse foregår, som om der udgik fra dem en sådan kraft. At der

existerer en kraft, der følger den newtonske lov, mellem himmellegemerne, og som styrer deres bevægelser, hvad nu end årsagen er til samme, derom er ingen tvivl. Talrige observationer og beregninger have godtgjort dette. Det er sandt, at, når man siger, denne kraft beror paa en *tiltrækning* mellem materiens molekyler, da gjør man en gjætning, en hypotese, men betragtet som sådan kan den ingen skade gjøre. For astronomen og mekanikeren kan det endog være temmelig ligegyldigt, hvori kraften egentlig har sin grund, når han kun kjender den rette lov for sammes virkninger. Vistnok vilde det være af stor interesse at kjende den sande årsag, men, om den endog altid skulde blive skjult for os, så ere vi ikke her værre farne end på så mange andre punkter af vor viden. Endog de grundsætninger, hvorpå mekaniken, den videnskab, som kommer matematiken nærmest i klarhed og sikkerhed, er bygget, ere i sin inderste grund dunkle og vanskelige at forstå. Den første grundsætning, man har i denne videnskab, er *træghedens* eller *inertiens lov*. Den siger, at et legeme ikke kan forandre sin tilstand, således at, når det er i hvile, kan det af sig selv ikke komme i bevægelse uden en kraft indvirker på samme; og omvendt, når det engang er i bevægelse,

kan det ikke uden nogen krafts indvirken forandre sin bevægelse eller gå over i hvile.

Dette princip synes ved første øiekast fuldkommen fornuftigt og forståeligt, da det kun synes at udsige, at materien selv er indifferent ligeover for bevægelse og hvile, men at der må en årsag, som kaldes kraft, til forat forandre dens tilstand. Imidlertid viser det sig ved nøiere undersøgelse, at dette princip er indhyllet i megen dunkelhed og mørke. Man kan spørge med rette: når man antager, at et legeme uden nogen ydre kraft ikke kan komme i bevægelse, hvorledes skal det da uden hjælp af nogen sådan bibeholde bevægelsen, når det engang har fået en sådan? Det klinger besynderligt for det øre, som første gang hører det, at man antager, at et legeme, der har fået en nokså liden bevægelse af en kraft, som derpå ophører at virke, skal bevæge sig fremad i det uendelige med den engang meddelte hastighed.

Antager man måske stiltiende, at bevægelse er noget, der er eiendommeligt for legemerne, ligesom de gamle antog, at materien havde en forherskende tilbøielighed for hvile?

Er fremdeles kraften, som indvirker på legemet, noget materielt eller noget immaterielt? Eller høre kraft og materie på det inderligste sammen og er i grunden et og det samme?

Eller er det, som giver legemet bevægelse og ligesom meddeler det liv, noget analogt med den ukjendte kraft, som, om end anderledes modificeret, er årsag til det organiske liv hos planter og dyr?

Disse og lignende spørgsmål have været reiste af store tænkere, men svaret er indtil den dag idag, at vi intet vide derom. Der er i enhver videnskab sådanne *axiomer* eller *grund-sætninger*, der må antages som *troesartikler*, og på hvilke videnskabens bygning reises. Disse axiomer danne grundvolden, som selv ikke er eller kan være formål for nøiere efterforskning, thi den er *grænsen*, den *absolute skillemur*, der er reist mod al vor viden, mod al vor sjælsvirksomhed.

Et af de første naturfænomener, hvori man opdagede matematikens og specielt tallets betydningsfulde rolle, var *tonen*, den *musikalske tone*. I virkeligheden er den hele musik så aldeles afhængig af tallet, at den hos de gamle *Grækere* endog betragtedes som en gren af den matematiske videnskab.

Der fortælles, at *Pythagoras* engang vandrede om fordybet i spekulationer over musiken; da kom han forbi en smedie, hvor fire karle sloge på ambolten med sine hammere. Besyn-derligt nok gave slagene af disse fire hammere

en fuldkommen akkord. Filosofen studsede, fortælles der, gik ind i smedien, og, da han så, at hammerne vare af forskjellig størrelse, faldt den tanke ham ind, at måske tonen afhang af de legemers størrelse, der frembragte dem. Han forfulgte tanken videre og opdagede endel af de vigtigste love for de musikalske toner, der danne en konsonnans eller harmoni.

Pythagoras's opdagelser er på det fuldkomneste bleven stadfæstet ved senere undersøgelser.

Tonerne frembringes ved svingninger eller vibrationer, der forplantes til vort øre gennem et elastisk medium, sædvanligt luften. Når en streng på en violin stryges med en bue eller på et pianoforte slæes an ved en tangent, sættes strengen i en hurtigt svingende bevægelse; disse svingninger forplantes gennem luften, nå vort øre og vi modtage et indtryk, som hedder *tone*. Tonernes forskellige høide afhænge af svingningernes hurtighed og er fuldkommen bestemt ved antallet af vibrationer i et sekund. Således er den tone, som man i musikken benævner *enstrøgen a*, og som angives af den sædvanlige stemmegaffel, bestemt ved tallet 435, idet samme gjør 435 svingninger i sekundet.

To eller flere toner kunne dels gjøre et behageligt indtryk, dels et ubehageligt indtryk.

I første fald siges de at danne en *konsonnans* eller harmoni, i andet fald en *dissonnans*. Opskriver man talrækkens ziffre

1, 2, 3, 4, 5, 6,

så danne to toner en såmeget fuldkomnere konsonnans, jo simplere de to tal ere, der angive forholdet mellem deres svingningstal, og en disharmoni desto større, jo mere indviklet forholdet mellem deres svingningstal er.

Betragter man således to toner, hvis forholdstal er $\frac{1}{2}$, så danne disse den *fuldkomneste konsonnans*, fordi 1 og 2 ere de simpleste tal. I virkeligheden er denne konsonnans *oktaven*, som også er den fuldkomneste af alle. Er forholdet $\frac{2}{3}$, som kommer $\frac{1}{2}$ nærmest i simpelhed, har man *kvinten*, der næst oktaven danner den fuldkomneste konsonnans. Forholdstallet $\frac{3}{4}$ giver *kvarten*, $\frac{4}{5}$ den *store terz* og $\frac{5}{6}$ den *lille terz*. Af denne grund kaldes også de toner, hvis forholdstal repræsenteres ved 1, 2, 3, 4 osv., *harmoniske toner*. Anslår man 3 af disse på et pianoforte, give de en fuldtonende akkord. Således repræsenteres den *store akkord*, som musikerne kalde den, ved toner, hvis forholdstal ere som 4, 5, 6 og den *lille akkord* ved 10, 12, 15. Den første fåes, når man f. ex. anslår de toner, der betegnes hos os ved c, e, g, den sidste ved c, es, g.

Som bekjendt består vor *skala* af syv toner, der for c durs vedkommende benævnes c, d, e, f, g, a, h. Disse repræsenteres ved følgende forholdstal:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}$$

og oktaven ved 2. Da *skalaen* og de *harmooniske toner* danne grundlaget for al musik, vil man heraf forstå, hvorledes den i sin inderste grund er afhængig af *tallet* og ikke lader sig løsrive fra samme. Det viser sig derfor også, at den del af fysiken, der handler om tonerne, nemlig *akustiken*, har sine love udtrykte ved *tal* og i det hele viser sig fuldstændig skikket for matematisk behandling.

De to for musikken vigtigste love ere, som forhen antydet, følgende:

1) *En tones høide afhænger af og er alene bestemt ved antallet af svingninger i et sekund.*

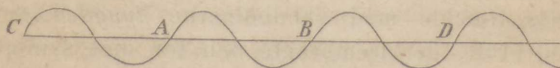
2) *Enhver musikalsk akkord imellem to toner er bestemt ved forholdstallet mellem det antal svingninger, som hver af dem gjør i et sekund.*

Foruden disse har man i *akustiken* opdaget en række andre love, der udtrykkes ved visse talkombinationer, men som det vilde være for vidtløftigt her at opregne.

Vi nævnte, at tonerne frembragtes ved svingninger, der forplantede sig gennem luften til vort øre. Hvad angår det legeme, som frem-

bringer disse svingninger, så kan dette dels være en streng, der stryges med en bue som på violinen eller anslåes med en hammer som på pianofortet, dels en vibrerende luftmasse som i orgelets piber, i valdhornet, i fløiten og basunen, dels en elastisk metalfjær, som sættes i en hurtig svingende bevægelse som i mundharpen og harmonikaen, dels en klokke, der anslåes, og hvis dele derved bringes i vibrationer, der atter forplante sig til luften. Men hvorledes forplanter tonen sig i luften? Dette sker ved en såkaldt *bølgebevægelse*, der imidlertid er temmelig vanskelig at forstå. Et slags billede derpå har man i vandbølgerne, der opstå, når man slipper en sten ned i en stillestående vandflade; der dannes afvejlende bølger og dale, der som større og større ringe udgå fra det punkt, hvor stenen traf vandet. Der er her at adskille to væsentligt forskellige ting, bølgens fremadskriden og den enkelte vandpartikels bevægelse. Man har, ved at fylde med vand en kasse med glasvægge, hvorigennem bevægelsen kunde iagttages, og slippe et let pulver i vandet omtrent af samme egenvægt som dette, kunnet se, hvorledes partiklerne bevæge sig. Det viser sig, at den enkelte partikel bevæger sig enten op og ned i en ret linie eller beskriver en cirkel eller ellipse; partikelen føl-

ger altså ikke med bølgens fremadskriden, som man ved første øiekast skulde tro. Herom kan man også overbevise sig ved at kaste et stykke kork på vandet; dette bliver liggende på sin plads, hvis ikke vind eller strøm driver det væk, og det bevæger sig op og ned, eftersom bølge efter bølge glider forbi. Deraf skjønnes, at de vandpartikler, der omgive kørken, ikke have en fremadskridende bevægelse, i hvilket fald de vilde føre korken med sig, men alene en op- og nedgående bevægelse. Men på samme tid som den enkelte vandpartikel bevæger sig op og ned eller bevæger sig i en liden cirkel eller ellipse og altså kun ubetydeligt fjerner sig fra sit oprindelige sted, skrider bølgen fremad; man kan med øiet se, hvorledes de ved stenens fald i vandet opkomne bølger i større og større ringe forplante sig udad. Tænker man sig et lodret snit på vandfladen gennem midtpunktet, hvor stenen traf overfladen, ser samme ud omtrent som nedenstående figur. *)



*) Denne kurve er en såkaldet *sinusoide*, da dens ligning repræsenteres ved den trigonometriske funktion *sinus*.

Man ser her en række dale og bjerge, de såkaldte bølgedale og bølgebjerge. Det stykke vei, som bølgebevægelsen forplanter sig fremad i et sekund, kaldes *hastigheden* og er for de nævnte vandbølger ikke stor, hvorom man lettelig kan overtøye sig ved at gjøre forsøget med et sekundur i hånden og iagttage bølgeringenes fremadskriden. Hvis man t. ex. fandt, at den tid, som medgik fra det øieblik stenen traf vandet i C, indtil bølgeringen nåede punktet D, var 3 sekunder, så vilde bølgebevægelsens hastighed være trediedelen af stykket CD.

Ganske anderledes hurtigt forplanter lyden sig såvel i luften som i vandet. Også her finder en bølgebevægelse sted, men af en ganske anden art end den nylig omtalte; man kan ikke med øiet se hverken vandet eller luften bevæges, hvor stærk end tonen er, og dog finder der bevægelse sted i de enkelte partikler, og denne bevægelse iler afsted med overordentlig hurtighed. Der er også her en anden kraft virkende, nemlig *elasticiteten*, medens i det omtalte tilfælde med vandbølgerne *tyngden* var den kraft, der frembragte den for øiet synlige bølgebevægelse. Hvor hurtigt elasticiteten forplanter en bevægelse kan skjønnes deraf, at, når en person banker sagte i den ene ende af en lang tømmerstok og en anden lægger øret

til den anden ende, så høres slagene øieblikkeligt. At det her er træet, som forplanter bevægelsen, kan man overtyde sig om ved at banke så sagte, at ingen lyd kan høres, når man ei lægger øret til stokken. Ved enhver bevægelse, der, som fysikerne udtrykke sig, *transmitteres* ved et elastisk medium, det være sig luft, vand, træ, jern osv., så bevæge mediets partikler sig frem og tilbage eller op og ned, som oftest i rette linier, altså på en lignende måde som vandpartiklerne i den ovenomtalte bølgebevægelse, men det stykke, som partikelen bevæger sig om, den såkaldte *amplitude*, er meget liden. Når en partikel er sat i en sådan frem- og tilbagegående bevægelse α : i vibration, støder den til sin nabopartikel, der kommer i en lignende bevægelse, som atter meddeles til den næstfølgende, og således forplanter bevægelsen sig videre fremad. Man ser altså, at der her er en bevægelse, der kan sammenlignes med de synlige vandbølgers, men som rigtignok foregår med en langt større hastighed. Vi omtalte tidligere, at vibrationernes antal forat frembringe tonen enstrøgen α måtte være 435 i et sekund; det er klart, at øiet ikke kan følge en så hastig bevægelse. Stryger man med en bue violinens tredie streng, der angiver denne tone, kan man slet ikke se

strengens vibrationer, men man kan med fingeren meget vel overbevise sig om, at strengen er i en hurtig sittrende bevægelse. Det er klart, at det er ligeså umuligt at se bevægelsen af de svingende luftpartikler, der forplante denne tone til vort øre. Luften befinder sig ligesom strengen i en sittrende bevægelse, dens partikler *vibrere*, sålænge tonen lyder, men vi kunne hverken opdage denne bevægelse med øiet heller ikke med den følsomhed, der ligger i den ydre huds nerver, thi vi mærke ikke det ringeste vindpust, men alene ørenerven er skarp nok til at opfatte og bringe til sjælens bevidsthed vibrationerne i luftmassen.

Man har ved at iagttage blinket af en kanon, der affyrtes i betydelig afstand fra observator, og tælle det antal sekunder, der medgik, inden knaldet hørtes, beregnet lydens hastighed i luften. Den er cirka 1050 norske fod (331 meter) ved 0° og noget større ved højere temperaturer (340 meter ved 16°). I vandet er hastigheden mærkeligt nok meget større nemlig 4—5 gange hastigheden i luften, og i jern er ifølge den franske fysiker *Biot* lydens forplantelseshastighed endog 9—10 gange større end i luften.

Når man kjender lydens hastighed i et medium, kan man lettelig beregne længden af

lydbølgerne.*) Udfører t. ex. en streng 435 vibrationer i et sekund, så vil i luften efter et sekunds forløb den første vibration have forplantet sig 1050 fod fremad og denne strækning indeholde 435 bølger; hver enkelt af disse har da en længde af henimod $2\frac{1}{2}$ fod. Da en tone gjør et større antal svingninger jo høiere den er, så ville de dybere toner have store og lange bølger, medens de høie ville have små bølger. Den dybeste tone, vort øre kan opfatte, gjør i et sekund omtrent 16 svingninger eller vibrationer; bølgelængden er derfor henved 66 fod. Den høieste tone i musikken er sexstrøgent c, hvis svingetal er 8192 og dens bølgelængde omtrent $1\frac{1}{2}$ tomme.

Uagtet man ikke med øiet kan iagttage luftens vibrerende bevægelse, der frembringer lyden og tonerne, så er det dog interessant i tanken at forsøge at danne sig et billede deraf. En svensk videnskabsmand har træffende skildret

*) I figuren pag. 49 er AB længden af en bølge; kaldes denne længde l og svingetiden τ ; den tid, en partikel anvender forat udføre en svingning (op og ned) t samt bølgens forplantelseshastighed v, så har man $v = \frac{l}{t}$, hvoraf $l = vt$. Er altså $v = 1050'$ og $t = \frac{1}{435}''$, så er $l = \frac{1050}{435} = 2,414$ eller henimod $2\frac{1}{2}$ fod.

det syn, som en koncertsal måtte frembyde, om man med øiet kunde opfatte bølgebevægelsen:*)

„Om man med synet kunde opfatte alle disse forskellige luftsvingninger, hvilket skuespil vilde ikke en koncertsalon frembyde! Fra herrernes munde skulde vi se store to til otte alen lange bølger udgå; fra damernes mindre, målende ligesåmange kvarter; de store basuner skulde udslynge kæmpebølger, næsten så lange som hele salen, og af piccolo-fløiterne skulde fremvælde kaskader af små talløse bølger. I legato-passagerne skulde bølgerne strømme regelmæssigt og uafbrudt frem; i staccati skulde de hoppe og danse som havets brændinger mod en klippefuld kyst.“

Alle disse bølger, der under sin frembrusen følge urokkelige naturlove og afhænge af matematiske formler, hvorved deres form og bevægelse er bestemt, undgå vort syn og opfattes alene af øret, der bringer dem til sjælens bevidsthed, hvor de klinge som toner og musik. Hvor forunderligt!

Det kunde nu for mange måske synes besynderligt, at de musikalske toner ere bundne til visse tallove. Musiken, der tiltaler de æd-

*) Dr. C. F. E. Björting, „Solen, fyra populära föredrag“ pag. 83.

leste og bedste følelser hos et menneske og som formår kraftigere end alt andet at fremlokke stemning og længsel, at rive os med sig og løfte os op over jordlivets småligheder, musiken, denne høie og ædle kunst, skulde den virkelig være bunden ved tørre og abstrakte matematiske love? Ja så er det, og det er ikke vanskeligt at indse, at det *må så* være. Det er for det første en barnagtig mening, at noget skulde være desto fuldkommnere jo mindre bundet det er ved love eller, som man ofte om end feilagtigen udtrykker sig, jo mere frit det er. Forat noget i sandhed skal være fuldkomment og frit, må det netop være bundet ved love, som ikke tør forandres og bøies, i modsat fald er det underkastet tilfældets og lunets magt. Ligesom den personlige frihed går over i den største ufrihed, når hver mand gjør, som han lyster, således ophører også enhver kunst, når der ingen lov eksisterer.

Når en streng vibrerer og giver en musikalsk tone, ere vibrationerne *regelmæssige*; på grund af strengens elasticitet bevæge dens molekylar sig periodisk op og ned eller frem og tilbage om den oprindelige ligevægtsstilling; luften sættes i lignende periodiske vibrationer, som nå vort øre og bringer trommehinden i vibreren, og vi modtage et indtryk, som kaldes

tone. Det er netop vibrationernes regelmæssighed og periodiske tilbagevenden, som gjør, at indtrykket bliver *behageligt*, det modsatte er os ubehageligt og opfattes som larm, støj og ikke som musikalsk tone. At vi ere skabte netop således og ikke til at opfatte lyden omvendt, vidner om, at skaberen er en ordenens og ikke en uordenens gud, og at vi ere skabte med anlæg for det fornuftige og skønne, der kræver som nødvendig betingelse *orden*. Den samme behagelige følelse kommer frem ved andre leiligheder, hvor vi opfatte det regelmæssige og ordnede. Vindens sagte sus i skovens træer, bølgerens skulpen mod strandbredden kalde vi musik, vi høre den med behag, og den formår endog ofte at tale dybere og kraftigere end menneskers røst. Vort øie skuer med behag det regelmæssige, det harmoniske; ligesom kun visse toner give en akkord, således se vi med velbehag kun visse farver i indbyrdes forbindelser, nemlig de farver, som fysikeren kalde komplementære. Denne vor sans og sympati for det regelmæssige og ordnede går endnu langt videre. Vi synes om den taktfaste gang, trommehvirvlerne bringe den trætte soldat til at rette sig op, og han føler ny kraft gennemstrømme sine lemmer, den unge henrives af dansens ordnede bevægelser,

vi finde behag i rimet og rytmet i digternes sange, men fremfor alt elske vi at lytte til tonernes melodiske bølgeslag.

Det er ikke givet mennesket at opfatte og fornemme meget af den harmoni og skjønhed, som hersker i skaberens værker. Den allerstørste del er tilsløret og skjult for vort blik; men der er dog givet mennesket evne til at nå op til et høiere standpunkt endog i denne verden og få ialfald en anelse om, hvilken nydelse det må være for et høiere væsen, der formår at opfatte skjønheden og harmonien i naturens og åndens rige. Det er os givet at fatte noget af skjønheden i tonernes verden, at fornemme sanseligt harmonien i de svingende strenge og de sittrende elastiske luftbølger. Men der gives naturfænomener, som ved sin fuldendte harmoni og storhed uden tvivl skulde gjøre et langt mægtigere og herligere indtryk på os, hvis vi formåede at føle og fornemme det.

Herhen hører i første klasse det majestætiske og vidunderlige skuespil, som himmelhvælvingen med sine utallige stjerner frembyde. Intetsteds viser naturen sig større og mægtigere, intetsteds viser orden, regelmæssighed og harmoni sig fuldkommnere. Når vi med tanken formå et lidet at forstå og begribe denne høihed og lovmæssighed, fyldes vi med den dybeste

beundring, men vi eie intet øre, der umiddelbart kan bringe os til at fornemme denne harmoni. Vistnok kan vort øie skue stjernernes glans, og fantasien har i stjernebillederne søgt at lægge en betydning, villet digterisk knytte et bånd mellem mennesket og de himmelske verdner, men det er en ringe og ussel forståelse, som har måttet vige for de sandheder, videnskaben bragte for dagen. Men er det end så, at vi alene i tanken formå at ane storheden og skjønheden i det mægtige rige, i forhold til hvilket alt, hvad hedder stort her på jorden, svinder ind til et intet, så er det dog en stor og skjøn tanke, som allerede er tænkt af en af oldtidens vise, og som måske endog for os *personlig* engang skal vorde sandhed, denne tanke, at der gives højere væsner, som formår virkelig at fornemme musikken af de i æterens hav rullende verdner, ligesom vi fornemme luftbølgenes vibrationer. Det er dette, som de gamle kaldte *sferernes harmoni*. Denne tanke indeholder i sig intet urimeligt eller selvmodsigende. Allerede de tvende organer, øret og øiet, som mennesket har erholdt af skaberen, ere så underfuldt indrettede, at man ikke nøksom kan beundre samme. Ved øret sættes vi istand til at opfange luftbølgenes harmoni, ved øiet æterbølgenes hastige vibrationer. Begge or-

ganer tjene som midler til at bringe visse bevægelser i materien til sjælens bevidsthed. Men der gives i naturen rimeligvis en uendelighed af bevægelser og kræfter, der ere skjulte for os, fordi vi mangle organer til at opfatte dem. Enkelte af disse have imidlertid mennesket ved fornuftens hjælp opdaget, uagtet de ikke direkte gjøre indtryk på noget sanseorgan, og det er os givet i tanken at glæde os over enhver sådan opdagelse. Men, at der er en vidt forskjellig afstand mellem en sådan følelse og den som skaberen giver os umiddelbart, skjønnes let, når vi vælge sammenligningspunkter fra vor egen erfaringskreds. Man kan fortælle en døv eller blind så meget, man vil, om tonernes og lysets skønhed; han kan glæde sig derover og fatte skønheden i tanken, men det bliver dog et intet mod virkeligheden.

Men er det end så, at vi ikke kunne fornemme hin overjordiske musik, der klinger i det uendelige verdensrum, men føle os i så henseende som den blinde, hvem man fortæller om lysets pragt og undere, som den døve, der læser om den rigdom og nydelse, der ligger i tonernes verden, så kunne vi dog fra vor jordiske musik, der, om end svag og skrøbelig som alt jordisk, dog toner sødt og lifligt i vore øren, slutte os til og i tanken ane skønheden

og harmonien i disse toner, der frembringes ved de rullende verdenskloder i æterens hav. Vi ere her indskrænkede til at lytte til luftbølgenes melodiske fald, en høiere musik går vort øre forbi, men vi leve i håbet om engang at kunne få høre med undren og henrykkelse sfærernes fuldendte harmoni, der klinger gennem æterens lette bølger fra den ene verden til den anden verden, forkyndende den almægtiges pris, der bliver til evig tid.

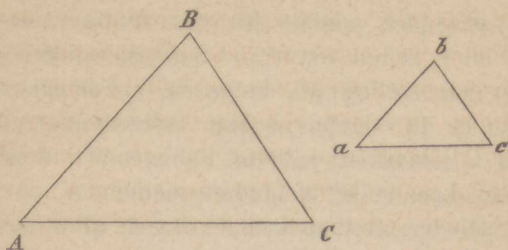
III.

Bestemmelse af himmellegemernes afstande og størrelse.

Et af de problemer, der mest forbause den, der ikke kjender geometrien, er, hvorledes man kan bestemme afstanden fra et sted til et andet, hvorhen man ikke kan komme og altså ikke direkte udmåle distansen. Hvorledes er det muligt at finde afstanden fra jorden til månen eller til solen? Sådant synes jo umuligt for et menneske, der ikke kan forlade jorden. Og hvorledes er det muligt at bestemme størrelsen, ja endog vægten af månen, solen og planeterne, hvilket astronomerne påstå at de kunne gjøre og at de have gjort. Dette synes så urimeligt for sund menneskeforstand, at man skulde fristes til at anse den hele astronomi for løgn fra begyndelse til ende, hvis ikke såmeget andet tydede på dens sandhed f. ex. astronomernes forudsigelse af sol- og måneformørkelser, der indtræffe på minuttet, hvorom enhver kan over-

bevise sig selv. Men i virkeligheden er dette problem at bestemme et himmellegemes afstand fra jorden ingenlunde så vanskeligt, som man forestiller sig; der behøves kun en tarvelig indsigt i geometrien, som det er muligt for enhver at opnå uden stor anstrengelse, forat kunne indse, hvorledes opgaven *kan* løses. Ja dette problem er, hvad den teoretiske løsning angår, et af de simpleste, som eksisterer for matematikeren og astronomen, men ved den praktiske anvendelse, ved observationen, kommer rigtignok ofte vanskeligheder frem, hvorom man tidligere ingen anelse havde.

Den opgave at finde afstanden mellem to punkter, hvis distanse man ikke umiddelbart kan måle, løses ved hjælp af en egenskab ved den geometriske figur, der kaldes triangel eller trekant, hvem alle kjender af udseende og navn. Figuren på næste side viser os to triangler, et stort, nemlig $\triangle ABC$, og et lidet, nemlig $\triangle abc$. Disse triangler ere vistnok uligestore, men de have *samme form*, ere *lige dannede*, som geometeren siger. Denne lighed i formen betinges af vinklernes lighed; her er $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$ og $\angle C = \angle c$: trianglernes tre vinkler ere parvis ligestore. Men geometrien lærer os, at det er tilstrækkeligt, at to vinkler i hvert triangel ere parvis ligestore, forat trianglerne



skulle være ligedannede, eller med andre ord, at man på en linie ac af vilkårlig længde kun behøver at konstruere to vinkler a og c parvis ligestore med A og C , og derpå forlænge vinklernes ben, indtil de skjære hinanden i b , forat erholde et triangel, som er ligedannet med $\triangle ABC$. Det således konstruerede $\triangle abc$ er da et *forminsket billede* af $\triangle ABC$. Geometrien lærer os nemlig, at de tre sider i $\triangle abc$ stå i samme forhold til de tre sider $\triangle ABC$. Er f. ex. siden ac trediedelen af siden AC , så er også ab trediedelen af AB og bc trediedelen af BC . Men på denne egenskab ved de ligedannede triangler grunder sig løsningen af det ovennævnte problem.

Lad os antage, at man skulde finde afstanden fra punktet A til punktet B (se figuren ovenfor), hvilken afstand vi ville antage, at det er af en eller anden grund umuligt direkte at måle; lad A f. ex. betegne et punkt på marken

og B et andet adskilt fra det første ved et vand eller anden naturhindring, der ikke tilsteder en måling af distansen. Fremgangsmåden er da følgende. Man vælger et tredje punkt C i marken, således beliggende, at man direkte kan måle afstanden mellem A og C, samt således, at man kan se fra A til C og B og fra C til A og B. Man sætter to stokke i marken i punkterne A og C; måler afstanden fra A til C, hvilken vi ville antage, at man finder lig 550 Alen. Fremdeles stiller iagttageren sig i A, måler vinkelen A α : vinkelen mellem synslinierne AC og AB; dette sker, når ikke stor nøjagtighed udkræves, ved at stille et bord i A og på bordpladen, hvorpå er heftet et stykke hvidt papir, at sigte med en lineal, den såkaldte *dioppterlineal*, til punktet C, optrække langs linealkanten en linie, derpå dreie linealen og sigte til B og atter optrække en linie langs linealkanten. Disse to linier ere syns- eller sigtelinierne fra A til punkterne C og B; den vinkel, de indeslutte, er den søgte vinkel A i det store triangel ABC, der kan tænkes dragen mellem de tre punkter A, B og C i marken. På samme vis stiller iagttager sig i C, sigter til A og B, optrækker sigtelinierne på papiret og finder $\angle C$. Dette er de nødvendige observationer, som må gjøres. Be-

stemmelsen af distansen mellem A og B sker nu på følgende måde:

På et stykke papir drages en vilkårlig ret linie og sammes længde gjøres lig f. ex. $5\frac{1}{2}$ tomme. Lad ac (se fig. pag. 63) forestille denne linie. Man konstruerer $\angle c$ lig den fundne $\angle C$ og $\angle a$ lig den fundne $\angle A$, forlænger benene, indtil de skjære hinanden i b, så er $\triangle abc$ et forminsket triangel, men ligedannet med $\triangle ABC$. Da fremdeles siden ac i det lille triangel er $5\frac{1}{2}$ ", men siden AC i det store triangel er 550 alen, så svarer til hver tomme i det første 100 alen i det sidste triangel $\therefore$ hver af siderne i det store triangel er 2400 gange længere end hver af de tilsvarende sider i det lille triangel. Man måler nu siden ab i det lille triangel, hvilket sker ved at tage dens længde i passeren og måle samme på en målestok. Lad os antage, at dens længde findes at være $6\frac{3}{4}$ tomme. Hvor lang er da den ubekjendte side AB i det store triangel? Dette spørgsmål er nu let at at besvare. Til hver tomme i det lille triangel svarer 100 alen i det store triangel; følgelig svarer til 6 tommer 600 alen og til $\frac{3}{4}$ tomme fjerdedelen af 100 alen, som er 25 alen, altså til $6\frac{3}{4}$ tomme svarer 75 alen. Den søgte side AB bliver følgelig 675 alen. Således er opgaven løst.

Løsningen af den stillede opgave består altså deri, at man mellem de to punkter, hvis afstand skal findes, og et tredje vilkårligt valgt punkt tænker sig et triangel konstrueret. Man måler en af siderne i dette triangel samt ved sigten to vinkler. Ved hjælp deraf konstruerer man sig et lidet triangel, men ligedannet med det store tænkte triangel mellem de nævnte punkter. Man kjender forholdet mellem siderne i det lille og det store triangel; idet man da måler i det første den side, som svarer til den ubekjendte afstand på marken, og måler samme ved en tommestok eller bedre ved passeren på en fint inddelt målestok, så slutter man sig til den ubekjendte sides længde i det store triangel.

Dette, at man fra en forminsket tegning af en gjenstand slutter sig til gjenstandens virkelige størrelse, er ikke ukjendt i det daglige liv, men benyttes tvertimod meget hyppigt. Når en arkitekt tegner et grundris af et hus og nedenfor tegningen angiver, at hver tomme i tegningen skal svare f. ex. til 2 alen i det virkelige hus, så skjønner selv den simple murarbejder eller tømmermand, hvorledes han skal finde husets dimensioner. Når vi i et naturhistorisk værk se tegningen af en fugl og der står, at størrelsen er $\frac{1}{4}$ af den virkelige, så forstår alle, hvor stor fuglen er i virkeligheden.

Måler man med passereren fuglens længde på tegningen og finder den at være f. ex. 3 tommer, så slutter man, at dens sande længde er 12 tommer. Endelig, forat nævne nok et eksempel, ethvert landkort er et forminsket billede af et landskab eller land. Ved foden af kortet står altid målestokken, der angiver, hvor lang f. ex. 1 mil er på kortet. Vil man altså finde afstanden mellem to steder, der ere afsatte på kortet, behøver man kun at tage distansen mellem dem på kortet i passereren, afsætte den på kortets målestok, så sees strax, hvor mange mil denne længde er.

Den her nævnte metode til at finde afstanden mellem to punkter på jorden, hvis distance ikke direkte kan udmåles, benyttes i sit princip af astronomen til at måle afstanden fra jorden til et himmellegeme. Men en vanskelighed optræder strax; og det er her på jorden at finde en i forhold til den søgte afstand nogenlunde lang side i triangellet, der kan tænkes konstrueret mellem himmellegemet og to punkter på jordoverfladen. Da endog det os nærmeste himmellegeme, månen, er flere tusinde mil fjernet fra os, er det nødvendigt, at afstanden mellem de to steder på jorden, hvorfra man sigter til himmellegemet, triangellets såkaldte grundlinie, er idetmindste flere hundrede mil lang. I modsat fald vil

nemlig triangleret blive af en så langstrakt form, at i det forminskede billede ville de to sider vise sig som to parallelle linier, der intet skjæringspunkt have. Og selv om man formåede at måle vinklerne og udføre konstruktionen med uhyre nøiagtighed, vilde de to sider i et sligt langstrakt, smalt triangel blive meget usikkert bestemte. Den form, som triangleret bør have, forat målingerne skal føre til det bedste resultat, er, at siderne i triangleret ere nogenlunde lige lange, i ethvert fald må ikke to af siderne være uforholdsmæssig lange imod den tredie. Det er imidlertid umuligt at skaffe triangleret en slig form. Selv om man valgte jordens nord- og sydpol som de to hjørner i triangleret, hvis tredie hjørne er himmellegemet, så vil selv ved månen, der er os forholdsvis nær, trianglerets form blive meget langstrakt. Men hertil kommer en anden vanskelighed: hvorledes kan man se fra et punkt på jorden til et andet, som ligger hundreder af mile derfra? Det er jo umuligt. Det skulde derfor alene af denne sidste årsag synes umuligt at anvende metoden. Ved en liden modifikation lader den sig dog anvende.

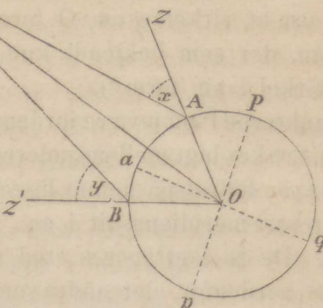
To iagttagere på samme jordmeridian stille sig på hver sin side af ækvator og måle på en forud aftalt tid på samme klokkeslet månens såkaldte zenitdistans α : vinkelen mellem verti-

kallinien og synslinien til månen. Forat gjøre sagen forståelig, ville vi i figuren på næste side tænke os, at cirkelen om O forestiller en jord-meridian, der som bekjendt kun lidet skiller sig fra en cirkel i sin form*).

Punkterne P og p være jordens to poler, linien Pp, der tænkes lagt mellem polerne, er jordens såkaldte axe; lodret på denne ligger ækvator, som skjærer vort meridiansnit i aq, der står lodret på Pp. De to iagttageres sted være i A og B, det ene nordenfor, det andet søndenfor ækvator. Vertikallinien i A α : lodlinien, der angives af et blylod ophængt i en snor, er linien AO fra A til jordens centrum; forlænget opad er denne linie AZ. På samme vis er vertikallinien i B linien BZ'.

I det øieblik månen kulminerer, befinder den sig i samme plan som meridianen, hvori de to iagttagere ere. Lad månens sted være M, så sees den af iagttageren i A i retning af linien AM, der med vertikallinien AZ danner vinkelen x. Denne vinkel måles af iagttageren i A; ligeså måles vinkelen y, som er vinkelen mellem vertikallinien BZ' og synslinien BM til

*) Jordens form er en ellipsoide; et meridiansnit er en ellipse, men som skiller sig så lidt fra en cirkel i sin form, at øiet ikke formår at se nogen forskjel, og skarpe målinger må til forat påvise denne forskjel.



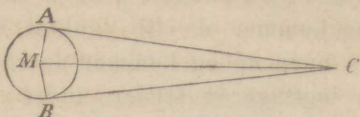
månen af iagttager i B. Disse to observationer, der foregaa samtidigt paa samme dag efter forud gjort aftale, ere tilstrækkelige til at løse problemet.

Ved nøjagtige gradmålinger er jordens radius funden at være 860 geogr. mil. I passeren tages f. ex. $8\frac{6}{10}$ tomme og dermed slæes om et vilkårligt valgt punkt O en cirkel, hvilken skal fremstille i forminsket målestok det nævnte meridiansnit; enhver tomme i tegningen repræsenterer da 100 g. mil i virkeligheden. Videre drages i denne cirkel en vilkårlig diameter aq og lodret på samme Pp; aq forestiller meridiansens skjæringslinie med ækvator. De to steder, hvor iagttagelserne befandt sig under observationen, må, forinden denne foregik, være nøjagtigt

bestemte φ : man må nøiagtig kjende deres geografiske bredde og længde. Man ved f. ex., at den ene iagttagers sted lå under 60° nordlig bredde, den anden under 20° sydlig bredde. Isåfald har man fra punktet a at gå 60° op på buen aP og kommer da til punktet A, derpå 20° ned på buen ap og kommer da til punktet B. De to iagttageres steder under observationsøieblikket ere således bestemte i vor tegning. Fra O drages linier til A og til B samt forlænges til Z og Z'. Man afsætter i A den målte vinkel x, i B den målte vinkel y og forlænger vinklernes ben, indtil de skjære hinanden i M. Endelig drages en ret Linie fra M til O. Denne sidste linie tages i passeren og måles på målestokken. Lad os antage, at man fandt dens længde at være 500 tommer, så måtte dens virkelige længde φ : månens afstand fra jordens centrum være 500×100 mil eller 50,000 mil; thi hver tomme i vor tegning svarede til 100 mil i virkeligheden. Dette er også på det nærmeste rigtigt; månebanen, der er en ellipse, har sin store axe lig cirka 60 jordradier, som er $860 \times 60 = 51\,600$ g. mil.

Er på denne måde månens afstand funden, så er det også muligt at finde månens størrelse. Forat bestemme samme er det tilstrækkeligt at måle den synsvinkel, hvorunder månen sees fra

jorden, dens såkaldte *angulære diameter*. Be-
finder månen sig i M og en iagttager på jorden
sig i C, så har han at måle den vinkel, som
synslinierne fra hans øie i C til månens to



yderste rande, nemlig linierne CA og CB, danne
med hinanden. Denne ene observation er til-
strækkelig til bestemmelsen af månens størrelse,
når forud afstanden fra M til C er funden. Er
nemlig MC funden α : afstanden mellem jord og
måne, så har man at udføre følgende konstruk-
tion.

Man drager en ret linie MC og gjør samme
f. ex. 60 tommer lang; da jordens afstand fra
månen er 60 jordradier, fremstiller følgelig hver
tomme i vor formindskede tegning en længde
lig jordens radius eller 860 g. mil. Fra C af-
sættes den observerede vinkel ACB således, at
CM halverer denne vinkel. Om M som centrum
slåes en cirkel med radius lig den perpendiku-
lære afstand MA, så fremstiller samme månen
i forminsket målestok. Man tager endvidere
radien AM i passerens og måler samme på måle-
stokken. Lad os antage, at man finder dens

længde at være $\frac{1}{4}$ tomme, så sluttet, at månens radius er $\frac{1}{4}$ af jordens, da hver tomme af tegningen repræsenterede en jordradie. I virkeligheden er månens radius $\frac{3}{11}$ af jordens eller lidt større end $\frac{1}{4}$ af jordradien. Da jordens radius er 860 mil, er månens cirka 230 mil; men er månens radius kjendt, da er, som geometrien lærer os, både dens overflade og dens kubikindhold let at beregne*).

Af det her udviklede vil man forstå, at det meget vel er muligt at bestemme månens afstand og dens størrelse, ja at denne opgave i sit princip er såre simpel. Men ved den praktiske udførelse viser der sig dog mange vanskeligheder, som man fra først af ikke skulde have tænkt sig. Forat afstanden til månen skal findes med nogenlunde nøiagtighed, må vinklerne måles med yderste skarphed og jordens radius være nøie bestemt. At tegne en vinkel ved som tidligere nævnt at optrække sigtelinierne langs en lineals kant lader sig gjøre her på jorden, hvor det gjælder at konstruere i forminket målestok et triangel, hvis sider ere nogle hundre alen lange; men blive siderne tusinder af alen lange, kan øiet ikke længere se

*) Betenes radius i en kugle med r , så er dens overflade $4\pi r^2$ og dens kubikindhold $\frac{4}{3}\pi r^3$.

skarpt fra det ene triangelhjørne til det andet, og hvad skal man så sige, når som ved bestemmelsen af månens afstand siderne blive tusinder af mil! Heldigvis har man i kikkerten et instrument, der formår at bøde på det menneskelige syns ufuldkommenhed. Det vilde føre forvidt her at omtale, hvorledes man ved kikkertens hjælp ser sig istand til at måle vinklerne med en skarphed, der overgår alt, hvad de gamle astronomer formåede. Det må være nok at nævne — forat give en idé om denne fine måling — at bredden af et menneskehår, når det holdes i en afstand fra øiet, så det sees klart og tydeligt, sees under en vinkel af cirka 18 sek.; man kan deraf skjønne, at en vinkel på 1^s er en overordentlig liden størrelse, og dog måler man med gode kikkerter vinklerne med en nøiagtighed af mindre end et sekund, ja på tiendedelen af et sekund.

Jordens radius er temmelig nøiagtig bestemt ved gjentagne gradmålinger, men det var først i det 18de århundrede, at en måling blev så nøiagtigt udført, at den kunde give et nogenlunde pålideligt resultat. Så lang tid hengik altså, forinden der kunde være tale om at bestemme endog blot månens afstand fra jorden; thi jordradiens længde er det absolut fornødent at kjende ved

alle astronomiske beregninger med hensyn til himmellegemernes afstande og størrelse.

Men selv om vi have skaffet os sikkert kjendskab til jordens radius og målt vinklerne med stor nøiagtighed — så træder en ny vanskelighed os imøde ved konstruktionen i forminsket målestok, en vanskelighed, som vi forud ikke have anet, og som truer med at kuldkaste alt. En tegning i forminsket målestok lader sig udføre med tilstrækkelig nøiagtighed, når det gjælder en mindre del af jordens overflade, f. ex. et triangel, hvis sider ere nogle hundrede alen, ja vi ved jo, at landkortet, der fremstille landskaber på flere miles udstrækning, kunne være så nøiagtigt tegnede, at man fra distansen mellem to steder på kortet kan slutte sig ialfald så nogenlunde til stedernes virkelige afstand. Men ganske anderledes stiller sagen sig, hvor det gjælder et himmellegeme, og hvor afstandene ere så uhyre store. Vi antog tidligere (pag. 70), at den cirkel, som skulde fremstille jorden, havde en radius lig $8\frac{6}{10}$ tomme, altså diameteren $17\frac{2}{10}$ tomme, følgelig en temmelig stor cirkel. Vi omtalte fremdeles, at hvis konstruktionerne udførtes eller rettere kunde udføres med tilstrækkelig nøiagtighed, vilde man finde linien MO (se pag. 70) at være 500 tom. eller 25 alen. Enhver vil forstå, at det ikke

vilde være let at udføre en tegning i så store dimensioner; hvilken lang lineal behøvede man ikke! Men på den anden side kunde man ikke godt gjøre konstruktionen i mindre målestok. Allerede denne målestok vilde være en kilde til store feil. Hver tomme i tegningen svarede jo til 100 mil i virkeligheden. En liden feil i konstruktionen — og man begår altid sådanne — vilde have store feil i resultatet tilfølgende. Da 1 tomme er 10 lin. decimalmål, så vilde en målings- eller konstruktionsfeil på 1 lin., der er en så ubetydelig længde, medføre en feil på 10 mil. Men det værste vilde dog være triangelts langstrakte form, der vilde bevirke, at punktet M, der betegner månens sted i den forminskede tegning, vilde blive høist unøjagtigt bestemt; vilde man forsøge at udføre en slig tegning, kunde man vanskelig undgå en feil af et par alen i længden af linien MO, hvilket vilde svare til 4000 mil i virkeligheden.

Her kommer imidlertid den matematiske kalkyl os til hjælp. Istedetfor at optegne figuren i forminsket målestok og måle den ubekjendte afstand, har matematikerne beregnet særegne tabeller, de såkaldte trigonometriske tabeller, ved hjælp af hvilke man kan beregne i tal den søgte afstand. Disse tabeller ere beregnede med så stor nøjagtighed, at der ikke er tale

om, at der fra deres side skulde fremkomme feil i den søgte størrelse, men de mulige feil i resultatet skriver sig fra, at man ikke kjender jordens radius absolut nøiagtigt og heller ikke formår at måle vinklerne absolut rigtigt. Imidlertid kan man beregne, hvor stor usikkerheden i den fundne afstand er, og man har f. ex. fundet, at den mulige feil i astronomernes bestemmelse af månens afstand fra jorden i det høieste kan dreie sig om nogle få mil, hvilket er en ren bagatel i forhold til den uhyre afstand selv. Ja man kan sige, at forholdsvis kjender man månens afstand bedre end afstanden mellem flere af de større byer i Europa. Overhovedet er det klart, at vi ikke kunne udføre nogen måling absolut nøiagtigt, det følger nu engang med nødvendighed af de menneskelige sandsers ufuldkommenhed, men man må huske vel på, at når feilen ikke overstiger en vis brøkdel f. ex. $\frac{1}{1000000}$ af den hele afstand, så er nøiagtigheden tilstrækkelig stor for os; ved jeg, at afstanden mellem to steder er $2\frac{3}{4}$ mil, så kan det være mig aldeles ligegyldigt, om den er 2 à 3 alen længere eller kortere, en slig ubetydelighed gjør mig hverken fra eller til; måler jeg længden af et gulv og finder det at være 12 alen, så er det mig uden betydning, om min måling skulde være 1 à 2 linier feilagtig.

Det himmellegeme, som frembyder størst interesse for os jordboere, er uden sammenligning *solen*. Alt, som lever og røres her på jorden, er afhængigt af solen; med solens tilintetgjørelse forsvinder også alt levende på jorden. Bestemmelsen af solens afstand og størrelse er derfor et problem, der fremfor alle andre har gjort sit krav gjældende; men først for lidt over 100 år siden lykkedes det astronomerne at bestemme samme.

Hvad enten man benytter som før nævnt en forminsket tegning eller de trigonometriske tabeller til at finde afstanden mellem to steder, så er det af største vigtighed, at den side i trianget, som direkte udmåles, ikke er altfor kort i forhold til trianget's øvrige to sider. Målingens nøiagtighed beror væsentlig på den målte *grundlinies* længde. Den største længde, man her på jorden kan opnå, er jorddiameteren, der er cirka 1700 mil. Men denne længde er forsvindende liden i forhold til solens afstand. Tænkte man sig en observator stående i solen og se henimod jorden, så vilde jorddiameteren vise sig under en vinkel på 8 sekunder $\circ$: som trediedelen af et menneskehårs tykkelse seet i en armlængdes afstand fra øiet. Man har derfor til bestemmelse af solens afstand udfundet en anden metode. Man iagttager planeten Ve-

nus's forbigang foran solskiven og beregner afstanden ved hjælp deraf, som astronomen *Halley* først viste. Det vilde imidlertid her føre forvidt nøiere at gå ind på forklaringen af denne metode. Det må være nok at sige, at ved observation af venuspassagen i 1769 blev solens afstand fra jorden funden at være omtrent 20 000 000 mil, og solens diameter er ved hjælp deraf funden lig 112 gange jordens radius. Denne afstand er så umådelig stor, at lyset, som går 40 000 mil i 1 sekund, behøver 8 minutter og 13 sekunder forat gå fra solen til jorden. Solens overflade er mere end 12 000 gange jordens og dens kubikindhold over 1 400 000 gange jordens $\varnothing$: af solen kunde dannes mere end 1 400 000 jordkugler.

Planeterne bevæge sig som bekjendt i elliptiske, næsten cirkelrunde baner om solen. Ved hjælp af en lov, opdagen af den berømte astronom *Kepler*, kan man lettelig beregne disses afstande fra solen, når solens afstand fra jorden engang er funden. Sættes for simpelhedsskyld jordens afstand fra solen lig 1 $\varnothing$: vælger man solens afstand som længdeenhed til udmåling af planeternes afstande fra deres centrallegeme, solen, så ere afstandene følgende:

Merkur . 0,39, Venus . . . 0,72, Jorden 1,00.
 Mars . . 1,52, Asteroiderne 2,8, Jupiter 5,20.
 Saturn. . 9,54, Uranus . . 19,2, Neptun 30,04.

Men er det vanskeligt her på jorden at finde en tilstrækkelig lang grundlinie til bestemmelse af solens afstand, så ere vi langt, langt værre farne med hensyn til de såkaldte fixstjerner. Hvis man forsøgte at måle zenitdistansen for en og samme fixstjerne på to forskellige steder på jorden, selv om de to iagttagere stode ved hver sin pol, så vilde dog de to synslinier til stjernen vise sig fuldkommen parallelle, eller med andre ord: jordens diameter svinder ind til et intet i forhold til den umådelige afstand til stjernen. Det forholder sig hermed aldeles ligesom, når vi se en falk eller ørn svinge sig høit op i luften. I begyndelsen sees fuglens størrelse klart og bestemt, men eftersom den stiger høiere og høiere, synes rovfuglen mindre og mindre; den viser sig endelig som et sort punkt, for derpå at forsvinde. Fixstjernerne, endog de os nærmeste, ere så langt bortfjernede, at jordkuglen, seet i denne afstand, viser sig som et støvgran.

Men vi have en anden linie at vælge som grundlinie i vort triangel end jordens diameter, og det en linie af overordentlig stor udstrækning. Jorden bevæger sig som bekjendt i en ellipse om solen, og afstanden mellem de to yderste endepunkter i ellipsen er det dobbelte af solens afstand fra jorden, altså cirka 40 000 000 geogr. mil. Denne afstand skulde dog synes

tilstrækkelig lang som grundlinie i vort triangel. Ja så skulde det synes, men dog viste det sig, at, da astronomen *Bessel* efter megen møie fandt den såkaldte parallaxe til stjernen no. 61 i Svanen, at denne perallaxe udgjorde lidt over $\frac{3}{10}$ sekund, det vil sige: hvis et øie befandt sig på stjernens sted, så vilde afstanden mellem sol og jord, altså en afstand på 20 000 000 mile, vise sig under en vinkel af $0^{\circ},35$ eller omtrent som $\frac{1}{50}$ af et menneskehårs tykkelse. For en iagttager på stjernen vilde følgelig solen med alle dens planeter og måner smelte sammen til et eneste punkt. *Bessel* beregnede den nævnte stjernes afstand til mere end 595 000 gange solens afstand fra jorden. Forat gjen-nemløbe denne distanse behøver lyset 9 à 10 år. Noget senere fandt *Struve* og *Peters*, at *Wega* eller α i lyren, en fixstjerne af første rang, måtte være mere end 900 000 jordbane-radier fjernet fra os, og at lyset behøvede omtrent 14 år forat gå fra den til os.

Så uhyre afstande som disse er det umuligt at fatte med tanken, og dog ere disse stjerner rimeligvis nogle af de nærmeste. Da fixstjerne-erne ere så langt fjernede fra os, at endog deres afstande kun tilnærmelsesvis kunne bestemmes for et par af de nærmeste, så er det klart, at en direkte målen af stjernens angulære

diameter ikke kan ske. I virkeligheden sees også selv de klareste fixstjerner i stærkt forstørrende kikkerters som blotte *punkter* og ikke ligesom planeterne, der vise sig som cirkler med en diameter, der kan måles. Den, der ikke har seet en fixstjerne gennem en astronomisk kikkert, bliver derfor stedse skuffet, første gang han har anledning til at gjøre iagttagelsen; man venter at se stjernen stor og pragtfuldt lysende, istedet derfor ser man et klart skinnende punkt uden stråleglands, der hurtigt bevæger sig over kikkertens felt. Men, uagtet man således ikke formår at måle nogen fixstjernes diameter, så mene astronomerne dog, at vor sol kun er at betragte som en af de mindre. Deres uhyre afstand og dog klare lys viser for det første, at de ere selvlysende legemer ligesom vor sol, og fotometriske forsøg have godtgjort, at, hvis vor sol flyttedes så langt bort som f. ex. *Wega*, såvilde den skinne med et langt svagere lys end dennes. Fixstjernerne ere sole, mange rimeligvis af uhyre dimensioner, og det er sandsynligt, at de ledsages af planeter, for hvem de spille samme rolle som solen for vor jord.

Betragter man ved nattetid himmelen gennem en udmærket kikkert, opdager man foruden den utallige vrimmel af stjerner hist og her enkelte

lysende pletter eller skyer. Dette er de såkaldte *lyståger* eller *tågepletter*. *Simon Marius* opdagede den første af disse i året 1612 i stjernebilledet *Andromeda*. I 1656 opdagede *Huyghens* en stor lyståge i *Orion*; den har en yderst uregelmæssig form. I året 1716 kjendte *Halley* endnu kun 6 lyståger; *Lacaille's* og *Messier's* observationer bragte antallet op til 96, men *Herschel* alene opdagede ved hjælp af sit mægtige teleskop 2 500. Lystågernes form er høist forskjellig; de fleste have dog en langagtig, oval eller rund linseform. De adskille sig i to hovedklasser, de *opløselige* og de *ikke opløselige*. De første vise sig under meget stærk forstørrelse at bestå af en mængde små stjerner, de sidste synes at bestå af en lysende tågemasse — ligesom kometerne — hvori undertiden en fastere lysende kjerne viser sig. *Herschel* antog disse for fixstjerner eller sole, der stode i begreb med at dannes. Efter den samme astronoms observationer er det sandsynligt, at vor sol er en af de tusinder og atter tusinder af stjerner, hvoraf melkeveien består, og at hele melkeveien udgjør en eneste tågeplet, der har formen af en linse, og som bevæger sig fremad i verdensrummet. Afstandene mellem de yderste sole i denne lyståge ere rimeligvis så store, at lyset behøver århundreder forat nå frem. Det

kan derfor meget vel hælde, at sole ere udsukkede og tilintetgjorte for tusinder af år siden, hvilke vi fremdeles se på himmelen, og omvendt at nye ere dannede, hvis lys først vil nå os efter seklers forløb.

Tanken formår ikke at fatte disse afstande. Her åbner sig det uendelige verdensrum. Nye og ukjendte himle vise sig for forskerens blik, og i dem tusinder og atter tusinder af verdner, og millioner sole, funklende i æterens hav, ile afsted i rastløs gang, lydende de samme, de evige love. Og når tanken svimler og trættes, åbner sig påny det uendelige rum, og det uendelige begynder, hvor det uendelige ophører.

Det er disse tanker, der må bevæge et menneske ved betragtningen af himmelens under, den franske digter *Lebrun* så smukt har udtrykt i følgende linier:

Des régions sans fin devant moi se découvrent;
Carrière illimité, où, par les mêmes lois
Mille univers flottans se meuvent à la fois.
Je vois de tous côtés ces plaines profondes
Autour d'autres soleils graviter d'autres mondes,
Et lorsque, pour peupler les espaces déserts,
Je suis las d'enfanter de nouveaux univers,
Le vide encore s'étend, et, dans son sein immense,
Par de là l'infini, l'infini recommence.

IV.

Om sandsynlighedsregningen og dens anvendelse på hazardspil.

Ved første øiekast skulde det synes en urimelighed og blot og bar dårskab at ville underkaste *det tilfældige* en beregning; og dog er det dette, som *sandsynlighedsregningen* gjør. Man skulde tro, at hvis der var noget, hvorpå den strenge, logiske matematik, som roser sig af sikkerhed og pålidelighed fremfor alle andre videnskaber ikke kunde anvendes, så måtte det være de ting, som skylde en træf, et tilfælde sin tilbliven og existens. Men *sandsynlighedsregningen* eller *probabilitetskalkylen* viser os netop, hvor udstrakt og forunderligt stort det felt er, som beherskes af tallet, og de store resultater, som man allerede nu er nået frem til, må isandhed forbause, når man betænker, hvilken tilsyneladende skrøbelig grundvold man har at bygge på.

Sandsynlighedsregningen skylder hazardspillet sin tilbliven. Det var i året 1654, at

Chevalier de Méré forelagde den berømte *Pascal* to opgaver om terningspil, hvilke bragte denne til at anstille dybtgående studier og derved lægge den første grund til denne nye branche af den matematiske videnskab. *Pascal* opfordrede også sin ven *Fermat*, en af Frankrigs første matematikere, til at tage fat på disse problemer, hvilket han også gjorde. Såvel *Pascal* som *Fermat* løste opgaverne, men ad temmelig forskellige veie.

Der hengik imidlertid ikke ret lang tid, forinden dybe tænkere så i denne regning kilden til en hel ny videnskab, som kunde erholde anvendelser, hvorom man neppe skulde have nogen anelse, og som griber ind i forhold, som skulde synes at ligge udenfor al menneskelig beregning. Af mænd, som have bidraget i væsentlig grad til dens uddannelse og allerede hævet den til et høit trin af fuldkommenhed, må nævnes foruden *Pascal*, *Bernoulli*, *Huyghens*, *Moirve* — og i vort århundrede *Gauss*, *Laplace* og *Poisson*.

Da sandsynlighedsregningen er en matematisk videnskab, er det naturligvis umuligt at give en virkelig og sand fremstilling af den uden at forudsætte matematiske kundskaber og det endog meget betydelige; men det er dog muligt at gjøre enhver, der kan tænke, dens princip

indlysende samt give en almenfattelig fremstilling af enkelte af de resultater, hvortil den er kommen.

Vi ville tænke os to personer, der spille mynt og krone. Dette spil består, som bekjendt, deri, at den ene spiller tager et pengestykke f. ex. en kobberskilling og kaster den i veiret. Falder kronen op, så har vedkommende vundet, hvis han iforveien har sagt „krone“; falder mynten op, har han tabt, og den anden har vundet. Dette spil er det simpleste hazardspil, som kan tænkes.

Vi spørge nu, hvad er sandsynligheden, forat jeg skal vinde, når jeg kaster skillingen i veiret og siger „krone“?

Her er kun to tilfælde mulige: enten kan *kronen* falde op eller *mynten*, og der er ingen grund til at antage det ene for mere sandsynligt end det andet, forudsat at jeg ikke har en vis færdighed i at kaste pengestykket op på en sådan måde, at jeg kan få en bestemt side til at falde op. Det er følgelig klart, at her er udsigten til at vinde og tabe ligestor. Det er derfor i sin orden, at min modspiller og jeg sætte ligestore indsatser. Det vilde være yderst dumt af mig, om jeg spillede med ham på det vilkår, at, når kronen kom op, skulde han betale mig 1 skilling, men når mynten kom op,

skulde jeg betale ham 2 skilling. Ved et sådant spil kunde jeg være sikker på at tabe, når spillet holdt på i længere tid. Skal partiet være lige, så er det nødvendigt, at vi begge spille om samme sum, således altså, at han får 1 skilling af mig, når mynten falder op, og jeg 1 skilling af ham, når kronen falder op. Efter et større antal kast vil det da også vise sig, at vi begge have vundet og tabt omtrent lige meget.

Man kan prøve dette ved at kaste en skilling i veiret f. ex. 100 eller 200 gange; det viser sig, at jo flere kast, man gjør, desto vissere er det, at mynt og krone komme op ligemange gange hver. Derimod er det ingenlunde sikkert, at f. ex. i 4 kast kronen skal komme op 2 gange og mynten 2 gange; det kan vel hælde, at kronen kommer op alle fire gange eller, at den slet ikke kommer op. Herom er umuligt at sige noget på forhånd; kun såmeget kan siges før det enkelte kast: *sandsynligheden er ligestor, forat mynten som kronen skal komme op.*

Men nu kommer vanskeligheden; hvorledes skal denne sandsynlighed udtrykkes i tal?

Pascal udtrykte i dette tilfælde sandsynligheden ved brøktallet $\frac{1}{2}$. Han sagde: her er kun 2 tilfælde mulige, enten kommer krone eller mynt op; blandt disse er kun 1 tilfælde gunstigt for mig, følgelig må de gunstige træf

forholde sig til de mulige som 1 til 2, eller sandsynligheden, forat jeg vinder, være en brøk, hvis tæller er 1, og hvis nævner er 2. På den anden side er da også sandsynligheden, forat jeg ikke skal vinde, $\frac{1}{2}$; thi der var jo her lige stor sandsynlighed både for gevinst og tab.

Lægger man sammen begge disse to sandsynligheder, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, fåes 1, hvilket udtrykker *vished*; thi — sagde *Pascal* — det er aldeles *vist*, at enten kommer krone eller mynt op, altså er det *vist*, at en af spillerne vil vinde. Herved har i sandsynlighedsregningen tallet 1 fået en høist mærkelig betydning, idet samme betyder den *absolute vished*. Enhver sandsynlighed udtrykkes ved en brøk, og jo nærmere denne brøk kommer tallet 1, desto større er den eller desto nærmere kommer den *vished*.

Denne matematiske betegnelse for sandsynligheden med et brøktal er af overordentlig betydning. I det sædvanlige sprog bruger man betegnelser som *sandsynlig*, *meget sandsynlig*, *tvivlsom*, *meget tvivlsom* for derved at udtrykke, hvorvidt man har grund til at antage, at en vis begivenhed skal indtræffe eller ei, men disse betegnelser ere meget vage og efterlade et stort spillerum. Den *pascalske* betegnelsesmåde er derimod *precis* og *nøiagtig*; den tillader at sam-

menligne de forskellige sandsynligheder med en matematisk skarphed.

Et andet eksempel vil nærmere oplyse dette. Vi antage, at der spilles med en terning, der på sine 6 sideflader har respektive 1, 2, 3, 4, 5 og 6 øine.

Der spørges nu: hvad er sandsynligheden forat slaa 6 øine i første kast?

Her ere 6 tilfælde mulige, idet man kan få 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 øine, og der er ingen fornuftig grund til at antage det ene for mere sandsynligt end det andet. Blandt disse 6 tilfælde er kun 1 gunstigt, nemlig at slå 6 øine. Sandsynligheden, forat jeg skal slå 6 øine, er da som 1 til 6 eller $\frac{1}{6}$. På den anden side er sandsynligheden, forat jeg *ikke* slaar 6 øine, som 5 til 6 eller $\frac{5}{6}$. Forholdet mellem sandsynligheden at slå 6 øine i første kast og sandsynligheden for ikke at gjøre det bliver da som $\frac{1}{6}$ til $\frac{5}{6}$ eller som 1 til 5; med andre ord, sandsynligheden, forat jeg skal vinde, forholder sig til sandsynligheden, forat jeg skal tabe, som 1 til 5.

Det vilde derfor være såre uklogt at spille med min modstander på det vilkår, at han skulde give mig en skilling, hvis jeg slår 6 øine, og jeg ham en skilling, hvis jeg ikke slår 6 øine. Skal partiet være lige, må han give mig 5 skil-

ling, hvis jeg slår 6 øine, og jeg ham 1 skilling, hvis jeg taber.

Hvis nu virkelig partiet spilles på det sidste vilkår, hvad bliver da enden? Jo, at efter 20, 40 eller 100 kast er tab og gevinst på det nærmeste ligestore, og dette er såmeget vissere, jo flere kast der gøres.

Man kan på lignende måde finde sandsynligheden for gevinst og tab, når der spilles med to eller flere terninger. Spilles der således med 2 terninger, så er sandsynligheden for at slå 7 øine i et kast lig $\frac{1}{6}$, når der ikke tages hensyn til, hvormange øine hver terning opviser, men kun til summen af de opkastede øine. Spilles der derimod således, at den ene terning skal vise 5 øine, den anden 2 øine, da er sandsynligheden for at vinde kun $\frac{2}{36}$ og sandsynligheden for at tabe $\frac{34}{36}$. Skal i dette sidste tilfælde partiet være lige, må min medspiller betale mig 17 skilling, når jeg slår 7 øine, medens jeg kun betaler ham 1 skilling, hvergang jeg ikke slår 7 øine. Heraf indsees, hvor let den er at be-
drage i hazardspil, der ingen kjendskab har til sandsynlighedslæren. De fleste vilde vistnok tro, at en gevinst af 10 à 12 skilling mod et tab af 1 skilling i det omtalte tilfælde vilde være et fordelagtigt spil, og dog vilde et bety-

deligt tab efter et større antal kast være aldeles sikkert.

Jeg skal endnu omtale et andet problem, som *Chevalier de Méré* forelagde *Pascal*, og som Chevalieren selv ikke kunde løse, men som *Pascal* saavel som *Fermat* gav hver sin særkilte Op-løsning af.

I et hazardspil spille to personer et parti om et vist antal points; enhver af dem har fået visse points, men ulige mange. Nu ville de hæve partiet uden at fuldføre det; der spørges, hvorledes skulle de dele indsatsen?

For bedre at fixere tanken, ville vi tænke os, at der spilles med et pengestykke om 3 points, således at hvergang kronen kommer op, får den første af spillerne 1 point, hvergang mynten kommer op, får den anden 1 point. Vi antage fremdeles, at den første spiller har fået to gange krone, altså 2 points, den anden 1 gang mynt, altså 1 point. Indsatsen, hvorom der spilles, er f. ex. 1 spd. De ville nu hæve spillet, og spørgsmål er, hvor stor del af indsatsen tilkommer hver.

Det er for det første klart, at de ikke kunne dele ligt; thi den spiller, som har det største antal points, har en større sandsynlighed for at vinde end den anden; følgelig bør han også have en større del af indsatsen.

Pascal løste opgaven omtrent på følgende måde:

Det er klart, sagde han, at hvis de to spillere havde *ligemange* points, så havde de også ligestor udsigt til at vinde, og indsatsen bør da deles ligt imellem dem. Men hvis den ene spiller har 2 points, den anden 1 point, så kan den første sige: hvis jeg taber i næste kast, så får du nok et point, og vi have da *ligemange* points; hvis vi da stanse med spillet, skal jeg have halvdelen af indsatsen. Den halve del tilhører altså mig, hvordan end udfaldet bliver for næste kast; følgelig er det kun den anden halvdel af indsatsen, som næste kast gjælder. Da fremdeles dette kast ligeså godt kan være heldigt for mig som for dig, så har jeg også ret til halvdelen af denne halvdel, hvilken tillagt den foregående halvdel udgjør tre fjerdedele af den hele indsats.

Den første spiller, som har to points, bør altså have $\frac{3}{4}$ af 1 spd., som er 90 β, og den anden spiller, som har 1 point, $\frac{1}{4}$ af 1 spd., som er 30 β.

Her er i få ord det væsentlige indhold af *Pascals* ræsonnement og som kan anvendes på adskilligt mere indviklede tilfælde end det her nævnte.

Fermat gav følgende løsning, der i sit princip er temmelig forskjellig fra *Pascals*:

Det er klart — sagde han — at partiet i det længste vil være udspilt i to kast; thi enten vinder den første spiller, som har to points, i næste kast, og da er spillet færdigt, eller den anden spiller, som har 1 point vinder og får således 2 points i det hele. I det derpå følgende kast må nødvendigvis en af dem få et point, og partiet er færdigt. Altså sikkert er det, at i 2 kast er spillet forbi. Lad os nu se, hvorledes gevinst og tab kan stille sig i disse 2 kast. Den første spiller kan enten vinde i begge kast, eller han kan tabe første og vinde andet, eller vinde første og tabe andet, eller tabe begge. Man kan da ved at kombinere bogstaverne a og b lettelig overskue disse fire tilfælde; disse kombinationer ere, når a betegner, at første spiller vinder, b, at anden spiller vinder, og altså, at første spiller taber:

aa, ba, ab, bb.

Her er nu tre gunstige tilfælde for første spiller, og antallet af alle mulige tilfælde er 4, følgelig er hans sandsynlighed forat vinde udtrykt ved brøken $\frac{3}{4}$; derimod er der kun ét gunstigt tilfælde for den anden spiller, og følgelig hans sandsynlighed forat vinde $\frac{1}{4}$. Forholdet mellem disse sandsynligheder er som 3

x der kan behøves at sætte 1 spil
 x skal vinde begge

til 1. Indsatsen bør da også deles i forholdet 3 til 1, d. e. den første spiller bør have $\frac{3}{4}$ og den anden $\frac{1}{4}$ af indsatsen, hvilket er samme løsning som den *Pascalske*.

Deteiendommelige ved den *Fermatske* metode er, som man let skjønner, at opgavens løsning erholdes ved at forbinde et vist antal bogstaver med hinanden og deraf bestemme sandsynligheden for hver enkelt spiller. Denne metode lader sig anvende med stor lethed også, når spillernes antal er 3, 4 eller flere.

Uden at gå nærmere i detail, skulle vi betragte et par af de i livet forekommende hazardspil og vise, hvorledes sandsynlighedsregningen lader sig anvende på samme til at bestemme forholdet mellem bankens og spillernes udsigt til gevinst eller tab.

Af de såkaldte *lotterier*, offentlige lykke-spil, gives der en hel mængde mere eller mindre fordelagtige for banken, men alle tilhobe fordærlige for spillerne. De ere alle således anlagte, at staten eller i dens sted banken har enten åbenbare eller skjulte fordele fremfor spillerne. Den betydelige årlige indtægt, som de skaffe, har derfor tiltrods for deres fordærlighed i moralsk henseende opretholdt dem endnu den dag idag i mange lande. Vi skulle

her lidt nærmere omtale det *Genuesiske tallotteri*, som er et af de mest ugunstige for spillerne.

Det genuesiske lotteri*) (*Lotto di Genua*) er yngre end klasselotteriet og stammer fra Genua. Det tilskrives rådsherren *Benedetto Gentile*, som på republikens tid skal have opskrevet navnene på de 90 valgbare kandidater til det store råd, lagt dem i et såkaldet lykehjul og trukket 5 af dem. Man beyttede denne leilighed til at gjøre væddemål på kandidaternes navne. I Aaret 1620 blev Staten bank for disse væddemål. Senere opstod det egentlige *Lotto*, idet man satte tal istedetfor de adeliges navne. De store indkomster, som dette lotto kastede af sig, bevægede andre stater til at følge *Genua's* eksempel. Således opstod et lotto i Wien 1752, i Berlin 1763 og senere i flere andre stater.

Spillet foregår derved, at 90 tal fra 1 til 90, indesluttede i kapsler, lægges i et hjul, der kan dreies rundt. På visse bestemte dage trækkes 5 nummere efter hinanden, som derpå bekendtgjøres i alle landets kollektur. Det står enhver spiller frit for at besætte 1 eller 2 eller 3 eller 4 eller 5 nummere. Efter antallet

*) Enkelte forfattere skille mellem lotteri og lotto og forstå ved det første klasselotteri, ved det sidste tallotteri.

af besatte nummer stiger indsatsens størrelse. Kommer kun et enkelt nummer ud, erholdes en mindre gevinst end når 2 nummere, en såkaldt *ambe*, kommer ud. Endnu større er gevinsten, når 3 nummere, en *terne*, eller 4, en *kvaterne*, kommer ud; den største gevinst erholder *kvinternen*, som er 5 nummere.

Man kan nu ved sandsynlighedsregningen let beregne den sandsynlighed, en spiller har forat vinde et *enkelt nummer*, en *ambe*, en *terne* osv. og deraf atter beregne, hvor stor gevinsten bør være, forat spillet skal være *lige*.

Da 5 tal trækkes af de 90, så er sandsynligheden forat et enkelt nummer skal komme ud $\frac{5}{90}$ eller $\frac{1}{18}$. Spilleren bør følgelig erholde en gevinst 18 gange sin indsats, men får kun 15 gange indsatsen. Sandsynligheden forat vinde en *ambe* er omtrent $\frac{1}{100}$, derfor bør han have 400 gange indsatsen i gevinst, men får kun 270 gange samme. Sandsynligheden forat vinde en *terne* er $\frac{1}{1747}$, hvorfor han bør vinde 11 747 gange indsatsen, men får kun 5 500 gange samme. Sandsynligheden forat vinde en *kvaterne* er $\frac{1}{511038}$, hvorfor gevinsten bør være 511 038 gange indsatsen, men han får kun 75 000 gange samme. Sandsynligheden forat vinde en *kvinterne* er $\frac{1}{43949268}$, hvorfor gevinsten bør være

43 949 268 gange indsatsen, men han får kun 1 100 000 gange samme.

Heraf sees, hvilken umådelig fordel banken har, og spillet er til sand ruin for de spillende.

Beregner man bankens fordel i procenter, findes den at være for

et enkelt træk noget over 16 %
en ambe 32 %
en terne 53 %
en kvaterne 85 %
en kvinterne 97 %

Der må forøvrigt her bemærkes, at talloterierne i de forskellige lande ikke beregne sig ganske samme procenter, men de ere dog i regelen ikke meget afvigende fra de her nævnte. Det falder da af sig selv, at udbyttet må blive betydeligt. Således var, forat nævne endel eksempler, nettoudbyttet i Frankrig gennemsnitligt for hvert år fra 1798 til 1832: 10 420 000 frs. I Østerig var det i 1747: 5 525 454 fl. I Baiern udgjorde nettogevinsten gennemsnitlig for hvert år fra 1819 til 1840 . . 1 080 764 fl.
1854 — 1858 . . 2 719 430 fl.

Høieste nettoudbytte beholdtes i 1859, da det var 3 389 320 fl. Kun engang havde man et tab, nemlig i 1853 stort 70 000 fl.*).

*) 1 fl. (o: gylden) = 45 β norsk.

Disse tal må overbevise enhver, selv om han ikke kan følge med i sandsynlighedsregningens kalkyler, om at disse lotterier have en afgjort fordel på sin side, og at spillerne i det hele taget alene kunne gjøre regning på tab. Dette hindrer naturligvis ikke, at en og anden kan vinde, og det er lysten til at prøve den lunefulde lykke, som frister så mange til at bortkaste sine penge i dette og lignende lykkespil. Det er forøvrigt besynderligt, at vedkommende stater, som drive disse spil eller tillade dem, ikke nøie sig med nogenlunde rimelige procenter, men gjøre spillernes udsigt til gevinst uforholdsmæssig liden.

Det farligste af alle spil er imidlertid det berygtede *roulettespil*, en opfindelse fra de parisiske spillehuse. Dette spil stod i overordentlig gunst i Paris indtil julirevolutionen, da det under streng straf blev forbudt. Dette forbud havde imidlertid ikke den forønskede virkning. På den ene side tabte Paris en årlig indkomst af 5 til 6 millioner frs., og på den anden side dannede der sig hemmelige spillehuse, der som en moderne sphinx årlig slugte sine ofre.

I midten af et bord befinder sig *rouletten*, en cirkelrund skive, omgivet af en ophøiet rand; den kan dreies om en tap i horizontal retning. Den øvre del af skiven viser 36 tal samt 0 og

00 (dobbeltnul), hvilke ere skrevne i de 38 små cirkelsektorer, hvori skiven er inddelt. Disse sektorer ere adskilte ved små tynde mellemvægge og noget fordybede. Når spillet begynder, sættes skiven og en kugle, der løber i den ydre rand, i bevægelse, men modsat; kuglen standser tilslut og falder i en af de små rum med det påskrevne tal. Spillet er da afgjort, og *croupieren* udråber høit de vindende tal.

Til begge sider af skiven befinder sig et stort tæppe forsynet med de samme nummere, som ere skrevne på skivens 38 sektorer.

Den ene halvdel af nummerne fra 1 til 36 samt 0 ere røde (*rouge*), de øvrige sorte (*noir*). Deraf har også spillet fået navn *rouge et noir*.

Fremdeles hedde de lige tal 00, 2, 4 osv. *pair*, derimod de ulige 0, 1, 3, 5, osv. *impair*. Den første halvdel af tallene 0 og 1 til 18 hedde *manque*, den anden halvdel 00 og 19 til 36 hedde *passe*.

Da ethvert tal, hvorpå kuglen falder, enten er rødt eller sort, lige eller ulige, af første halvdel eller anden halvdel, så vinder ved hvert *coup* (spil) 3 chancer. Falder kuglen således på 7, så vinder alle, som have sat på *rouge* eller *impair* eller *manque*, thi tallet 7 er *rouge*, det er *impair* og det er *manque*. De øvrige 3 chancer *noir*, *pair* og *passe* tabe.

Enhver, som vinder, erhoder en gevinst lig sin insats. Har man altså sat 20 frs., så vindes 20 frs. En undtagelse herfra gjør 0 og 00. Falder kuglen på 0, så vinder kun den spiller, som har sat på 0, alle de øvrige tabe med undtagelse af *rouge*, *impair* og *manque*, som hverken tabe eller vinde (0 er *rouge* og *impair* og *manque*). Falder kuglen på 00, vinder kun indsatsen på 00, alle øvrige tabe med undtagelse af *noir*, *pair* og *passe* (00 er *noir*, *pair* og *passe*). Her har banken sin fordel.

Sætter spilleren på et bestemt nummer og kuglen falder på samme tal, erhoder han af banken 36 gange indsatsen, men sandsynlighedsberegningen viser, at han skulde have 38 gange indsatsen.

Sætter spilleren på 2 nummere, og kuglen falder på et af dem, erhoder han 18 gange indsatsen, men skulde have 19 gange samme forat spillet skulde være lige. Beregner man efter sandsynlighedsregningens principer bankens fordel, findes denne at være $5\frac{1}{4}\%$.

Ved første øiekast kunde man ledes til at tro, at roulettespillet er fordelagtigere for spillerne end andre spil som tallotterier og klasselotterierne; visselig er procenterne her mindre, kun $5\frac{1}{4}\%$ gennemsnitlig, men der kommer en ufærdelig faktor til ved roulettespillet, og det er

tiden. Et tallotteri foretager 30—36 trækninger om året og klasselotteriet 5—6, men i roulette-spillet foregår circa 1000 coups i døgnet. Intet spil har derfor havt så ødelæggende følger med sig som dette.

Selve spillet foregår således. Når spilletimen slår og spillerne, *les pointeurs*, ere samlede, raaber *croupieren*:

„*Faites vos jeux messieurs!*“

Spillerne gjøre nu sine indsatser. *Croupieren* dreier rouletten og giver kuglen en modsat bevægelse; derpå råber han:

„*Le jeu est fait!*“

Nu må ingen gjøre nye indsatser. Kuglen ruller langsommere og langsommere; endelig falder den i en af de ovennævnte afdelinger eller sektorer. *Croupieren* holder rouletten op, kuglen ligger f. ex. i no. 9. Han råber høit:

„*Nr. neuf, rouge, impair, manque.*“

Alle, som have sat på *noir*, *pair* og *passe*, tabe sine indsatser, medens de, som stå på *rouge*, *impair* og *manque* få sine fordoblede α : de få en gevinst lig indsatsen. Hvis en har sat på 9, får han 36 gange indsatsen, hvis han har sat på to nummere, hvoraf et er 9, får han 18 gange indsatsen osv.

Uden at gå nærmere i detail, skulle vi blot

tilføie endel bemærkninger. Sandsynlighedsregningen viser, som oven nævnt, på det klareste, at banken har en stor fordel fremfor spillerne, og at af 10 vil ved længere spil kun 1 kunne gjøre regning på gevinst. En af de farligste forvildelser er den såkaldte *doubleren*, der består i, at spilleren stadigt sætter på samme farve og fordobler indsatsen. Grunden hertil er, at spilleren tror, at når f. ex. *noir* er kommen ud 9 gange, er der stor sandsynlighed forat *rouge* må komme i det næste *coup*; men det forholder sig ingenlunde så; thi hvert nyt spil er *uafhængigt* af det foregående og det *påfølgende*. Da der ere 19 røde og 19 sorte tal, så er sandsynligheden altid lig $\frac{1}{2}$, forat en af farverne skal komme ud: den er ligestor for begge. Om altså *noir* er kommen 9 gange efter hinanden, bliver sandsynligheden for næste spil ikke til nogen fordel for *rouge*, men er fremdeles den samme som før. Så længe man ikke ved, *når* og *hvorledes* *chancerne* udjævnes: efter hvor mange spil og på hvad måde, kan der aldrig være tale om nogen større sandsynlighed for den ene fremfor den anden farve. Vistnok er det så, at efter et *meget stort* antal spil f. ex. 1 000 eller 10 000 ville begge farver komme ud omtrent lige mange gange, men for et mindre antal f. ex. 10 à 20 kan meget vel

samme farve komme ud uafbrudt efter hinanden, og man har eksempler fra spillebordene, som stadfæster dette. Det er imidlertid umuligt selv for den rigeste mand at vedblive doubleringen over nogle få spil, ikke at tale om, at banken ikke tillader, at der sættes over en vis sum. Begynder — hvad der er det sædvanlige i Wiesbaden og Homburg — spilleren med at sætte 1 thl., og han taber, så sætter han ved 2det spil 2 thl.; han taber fremdeles og sætter i det 3die spil 4 thl., i 4de 8 thl., i 5te 16 thl., i 6te 32 thl., i 7de 64 thl., i 8de 128 thl., i 9de 256 thl., i 10de 512 thl., i 11te 1 024 thl. Allerede her bliver indsatsen så stor, at der skal en fyrstelig formue til at tåle den, men, hvis han vedbliver at tabe og fremdeles doublerer, stiger den for de følgende spil forfærdeligt. Således bliver indsatsen for 15de spil 16 384 thl., for 20de 524 288 thl. og 30te 536 870 912 thl.

Det kan som sagt hændes om end sjældent, at en farve kan komme ud indtil 30 gange efter hinanden, men, som en forfatter, der har skrevet over hazardspillet siger, det er ikke *sjældent*, at en og samme chance falder 20 gange og derover, og, tilføier han: „jeg har oftere seet på en og samme aften *rouge* 11 og 12 gange

efter hinanden gjentage sig flere gange.“ Alle-rede dette skulde synes at afskrække spilleren fra den ulyksalige døbleren. Men hertil kommer fremdeles den ubetydelige gevinst, som han erholder, om endelig hans farve kommer ud. Hvis han således vinder ved 5te spil, da hans indsats var 16 thl., så vinder han 16 thl., men forud har han tabt i 1ste spil 1 thl., i 2det 2 thl., i 3die 4 thl., i 4de 8 thl., altså tilsammen 15 thl.; hans gevinst er altså kun 1 thl. Det synes dog noget vel meget at udsætte sig for så uhyre tab, forat vinde 1 thl.

Jeg slutter omtalen af hazardspillene med følgende udtalelse om roulettespillet af Dr. *Albert Wild*:

„Ingen spiller — siger han — sætter sig til roulette-bordet forat mere sig; hans hensigt er at vinde, at blive rig på en letvindt måde, ved spil. Hans bestræbelse efter besiddelse på andres bekostning går over i lidenskab. Hovedmotiverne til at spille ere derfor have- og vindesyge. Begge disse faktorer have lidenskabben til forbundsfælle. Hvor dette triumvirat kommer til magten, belønner det sit offer med forblændelse og ulykke, jammer og nød, såvel i fysisk som moralsk henseende, ja ofte bringer det døden.

Spilleren sætter sig til bordet, spiller og vinder. Han nøier sig ikke med en mådelig gevinst eller tab. Han fordobler sin indsats for strax at vinde tilbage de tabte summer, og således henfalder han til den usalige *doubleren*, som hurtig fører ham i fordærvelse.“

V.

Om sandsynlighedsregningen og dens anvendelse på statistiken.

I foregående forelæsning forsøgte vi at give en idé om det princip, hvorpå sandsynlighedsregningen er baseret, og vi søgte ved endel eksempler, tagne fra hazardspillene, at vise dens simpleste anvendelser. Ved samme leilighed omtalte vi, at dybe tænkere ikke lang tid efter opdagelsen af denne mærkelige regning så i samme kilden til en ny videnskab, der kan erholde anvendelser på felter, der skulde synes at ligge ganske udenfor al menneskelig beregning. Dette er tilfældet med de utallige problemer, der henhøre til det borgerlige og sociale liv, hvilke sortere under statistikens område. De fleste af disse problemer følge så indviklede og komplicerede love og ere afhængige af så mange forskjellige os endnu ubekjendte årsager, at det rimeligvis aldrig vil lykkes os ganske at udgrunde og forklare dem. Derfor tro også de

flESTE mennesker, at disse fænomener ere underkastede tilfældets lunefulde bestemmelser. Men den opmærksomme og tænkende iagttager vil aldrig tilskrive tilfældet eller slumpen nogen indflydelse, hverken i naturen eller i menneskelivets mangfoldige og vekslede fænomener. Det lidet, vi kjende af de store verdenslove, berettiger os med fuld sikkerhed eller ialfald med stor sandsynlighed til at holde fast ved den mening, at alt har sin årsag, og at intet sker tilfældigt og løsrevet fra det store hele. Der kan ikke være tvivl underkastet, at støvnugets vei i luften er bestemt ved love ligeså ubøielige og faste, ja ligeså store og harmoniske i sin samvirken som de, der styre stjernernes baner i himmelrummet. Når vi skulle tale og dømme fornuftigt, må vi være overbeviste om, at det mindste som det største foregår efter love og styres af kræfter, som — hvis vi kunde betragte dem i sin helhed og overskue dem i sin totalvirkning — måtte vække vor høieste beundring ved sin storartede skønhed og harmoni.

Men desværre, indskrænkede og ufuldkomne som vi ere, formå vi kun vanskeligt og med store anstrængelser at skue lovmæssigheden mellem den hær af foranderlige fænomener, der daglig omgive os. Her gjælder med rette det

gamle ordsprog: „vi se ikke skoven for bare træer.“

Uagtet vi således må opgive at udfinde den fulde sandhed når undtages i nogle få simplere tilfælde, så har dog menneskeånden sindrigt udfundet midler til at bestemme approximativt eller tilnærmelsesvis lovene for enkelte af de fænomener, der ere af stor betydning for os, som vække vort håb eller vor frygt. Og her er det, sandsynlighedsregningen spiller sin store og betydningsfulde rolle.

Blandt naturens og livets foranderlige, og som det ved første øjekast synes tilfældige fænomener, viser der sig, når de forekomme hyppigt, en vis regelmæssighed og af uordenens og tilfældighedens kaos fremgår en vis orden og fremlyser en vis lov, som det ved sandsynlighedsregningen er os muligt tilnærmelsesvis at bestemme sandheden af.

Har man, forat nævne et eksempel, en urne, hvori befinder sig et vist antal sorte og hvide kugler, men hvis antal og indbyrdes forhold er ubekjendt, da kan man dog på følgende måde tilnærmelsesvis bestemme forholdet mellem de sorte og hvide kugler uden at tælle dem. Man stikker hånden i urnen og tager en kugle ud, mærker sig dens farve, og lægger den derpå atter i urnen; fortsætter man hermed et stort antal

gange, da vil der vise sig et bestemt forhold mellem de udtrukne sorte og hvide kugler, og dette forhold vil nærme sig mere og mere til det sande, jo flere træk man gjør. Er der således i urnen 75 hvide og 25 sorte kugler, så vil der efter 50 à 60 træk vise sig et bestemt forhold mellem antallet af udtrukne hvide og sorte kugler, og dette vil nærme sig mere og mere mod 3 til 1, som er det sande forhold.

Uagtet, forat nævne et andet eksempel, det enkelte menneskes fødsel og død synes underkastet tilfældigheden, og i virkeligheden afhænger af en mængde forskellige årsager, som vi slet ikke kjende af navn engang, viser der sig dog ved iagttagelsen af en stor mængde fødsler og dødsfald en regelmæssighed og en lov, som ingenlunde er tilfældig.

Uagtet, forat nævne et tredie eksempel, antallet af forbrydelser, der begås i et land, skulde synes at afhænge af tilfældet og burde være yderst forskjellig fra år til andet, så viser dog de statistiske tabeller, at variationen er ubetydelig, og at man med en næsten uhyggelig vished kan forudsige, at et bestemt år skal i Norge, i Frankrig, i England osv. så og så mange forbrydelser begås.

Ved en overfladisk betragtning kunde måske en og anden herved ledes til den fatalistiske

tro, at mennesket er underkastet visse strenge og uforanderlige love, der med uafviselig nødvendighed tvinger et bestemt antal individer inden samfundet til hvert år at begå forbrydelser. En sådan opfatning vilde på engang være i høieste grad trøstesløs og nedtrykkende og på samme tid nedværdigende for menneskets frihed. Heldigvis er en sådan slutning af det tal, statistiken giver os i hænde, aldeles grundfalsk. Det antal forbrydelser, der begås i et samfund fra år til andet, har sin grund i årsager, hvoraf mange vistnok er os ubekjendte, men enkelte også bekjendte f. ex. slet opdragelse, liden oplysning, drukkenskab, slet selskab osv. Formår samfundet at borttage og fjerne disse årsager, så formindskes også forbrydelsernes antal. Det forholder sig hermed aldeles som med dødeligheden i en by. De statistiske tabeller viser os, hvormange procent dødeligheden er o: hvormange mennesker der dør af hvert hundrede om året. Denne dødelighed er forskjellig for de forskjellige byer. Men sikkert er det, at hvis dødeligheden i en bestemt by er stor, så hidrører den fra visse årsager f. ex. trange gader, usunde og overfyldte boliger, mangel på større og fri pladse osv. Disse årsager, som bevirke den store dødelighed, kunne imidlertid

fjernes, og sker dette, så viser forbedringen sig strax i en formindsket dødelighed.

Heraf fremgår også den store betydning, som statistiken har for ethvert civiliseret samfund. Statistiken viser nemlig fra år til andet **landets materielle og åndelige tilstand**. Disse simple og beskedne ziffre godtgjør med en slående evidents, hvordan det står til i samfundet. Disse tal, rolige og lidenskabsløse, ere dog mere veltalende og frygtelige i ros som i dadel over folkets tilstand i moralsk som i social henseende end den mest veltalende tunge.

Statistiken tjener derfor på den ene side til at fremhæve og påvise samfundets mangler og brøst, der skal rettes på og forbedres, og på den anden side tjener den til at godtgjøre nytten og gavnligheden af de midler, folket anvender forat hæve sig til et høiere trin af fuldkommenhed.

Heraf vil formentlig også fremgå, hvor absolut nødvendig statistiken er for ethvert frit folk, der virkelig vil fremad. At spare de forholdsvis små udgifter, som de statistiske optællinger og beregninger medføre, vilde være ligeså uklogt som for en forretningsmand at spare den tid og de penge, som medgår forat føre de bøger, der give ham oversigt over hans status. De sørgelige følger af en sådan efterladenhed

og, man kan sige, letsindighed hos den private mand, har man desværre altfor mange eksempler på. Når de ofte ikke træde så klart frem i vort statsliv, så må det i væsentlig grad tilskrives det store held, at vort land og flere andre lande har havt og forhåbentlig fremdeles har en nøisom og hårdfør befolkning, som i kampen for det daglige brød ikke har havt anledning til at fordærves. Imidlertid er det bekjendt nok, at de statistiske tabeller har i den senere tid godtgjort, at også vort fædreland har store samfundsonder at bekjæmpe, hvilke true med at antage en høist farlig karakter. Men det er godt, at de ere bragte for en dag, thi alene, når man ser faren lige i øinene og kjen-der den i hele dens udstrækning, er det muligt at bekjæmpe den og slå den tilbage på ethvert punkt.

Idet altså de statistiske tabeller giver os en oversigt over et lands status, så tjene de på samme tid, som tidligere antydet, til at bestemme *sandsynligheden af et eller flere fænomeners indtræffen* eller til bestemmelse af en *foranderlig størrelses middelværdi*. Dette sker ved hjælp af sandsynlighedsregningens anvendelse på de statistiske tal. Det er således for at nævne et eksempel muligt at bestemme sandsynligheden af et menneskes død eller levetid

ved mortalitetstabellerne, og denne har — som vi senere skulle se — sin betydning for visse beregningers vedkommende. Endelig kan man, og det er af stor vigtighed, bestemme *sandsynlighedsloven* for de uendelig mange værdier, som en variabel eller foranderlig størrelse kan have under indflydelse af visse ubekjendte årsager.

Det høieste og vanskeligste mål, som statistiken og sandsynlighedsregningen i forbindelse sætter sig, er *opdagelsen af de årsager, der beherske fænomenerne i den fysiske og sociale verden samt at bestemme disses gjensidige afhængighed og deres virkninger.*

For at oplyse og påvise, hvad her er sagt i sin almindelighed, ville vi nærmere betragte de såkaldte mortalitetstabeller og deres anvendelse.

Uagtet intet er så usikkert for det enkelte menneske som død og liv, og det derfor gjælder at være beredt på døden til enhver tid, så forholder det sig dog ganske anderledes, når hensyn tages til en stor mængde mennesker f. ex. 1 000, 10 000 eller 100 000. Når ikke ganske usædvanlige omstændigheder træde til, som krig og pest, da vise de statistiske tabeller, at menneskene dø efter en bestemt lov, således at man på forhånd kan forudsige, at af 10 000 nulevende mennesker af en bestemt alder

vil om 1, 2, 3 år så og så mange være døde og så og så mange være gjenlevende.

En af de første, der forsøgte at danne en *mortalitetstabel*, var *Dr. Caspar Neumann*, der i *Breslau* fra 1687 til 1691 optegnede de døde og fødte. Hans optegnelser kom senere til videnskabsakademiet i *London*, hvor den berømte *Halley* erholdt dem udleverede og ved deres hjælp konstruerede en mortalitetstabel. Hans arbeide led imidlertid af mange og væsentlige feil, fordi *Neumann* alene havde taget hensyn til de døde, og *Halley* blev nødt til at beregne de gjenlevendes antal ved den hypotese, at befolkningen var *stationær*, hvilket ingenlunde holder stik. Det er overhovedet en såre vanskelig sag at konstruere gode dødelighedstabeller, og endog de bedste, man har, lader adskilligt tilbage at ønske. Uden forøvrigt her at gå i detail og nøiere påvise de vanskeligheder, man har at overvinde, skal jeg her kun meddele følgende korte uddrag af dødeligheds-listerne for Norge, beregnet for årene 1856—1865*):

*) Se Norges officielle statistik, udgiven i året 1869 af departementet for det indre, C, No. 1. Tabel vedk. folkemængdens bevægelse.

				Mandkjøn.	Kvindekj.
Af 10000 levendefødte dø i årets løb				1130,	959.
-	-	1årige	—=—	382,	367.
-	-	2årige	—=—	255,	251.
-	-	3årige	—=—	197,	196.
-	-	4årige	—=—	149,	149.
-	-	5årige	—=—	117,	118.
-	-	10årige	—=—	52,	53.
-	-	15årige	—=—	45,	48.
-	-	20årige	—=—	70,	54.
-	-	30årige	—=—	83,	68.
-	-	40årige	—=—	96,	96.
-	-	50årige	—=—	130,	111.
-	-	60årige	—=—	230,	186.
-	-	70årige	—=—	601,	551.
-	-	80årige	—=—	1178,	985.
-	-	90årige	—=—	2400,	1948.
-	-	100årige	—=—	3529,	3600.
-	-	103årige	—=—	10000,	6666.
-	-	104årige	—=—	„	10000.

Af denne tabel sees, hvorledes menneskets livskraft i begyndelsen er meget svag, men stiger rask med alderen; den når sin største værdi, sit maximum, omkring det 14de eller 15de år for derpå atter langsomt at aftage. Fra det 60de år synker livskraften hurtigt og dødeligheden forøges rask, indtil den omkring det 80de år bliver endnu større end ved fødselen.

Tager man forholdet mellem antallet af døde i årets løb og antallet af levende ved årets begyndelse, har man den såkaldte *dødelighed* ω : sandsynligheden forat dø i årets løb. Aftabellen sees f. ex., at af 10 000 30årige mænd dø i årets løb 83; sandsynligheden, forat en 30årig mand skal dø i sit 30te år, er da som 83 til 10 000 eller 0,0083. Sandsynligheden, forat han ikke skal dø, er følgelig $1 - 0,0083$ eller 0,9917 ω : man kan vædde 9917 mod 83 på, at han *ikke vil dø* i sit 30te år.

Dette stemmer aldeles med, hvad tidligere er nævnt om den *pascalske* definition på *sandsynlighed*: *sandsynligheden er en brøk, hvis tæller er antallet af gunstige tilfælde, og hvis nævner er antallet af mulige tilfælde*. Her er antallet af gunstige tilfælde 83 og antallet af mulige 10 000, når det gjælder sandsynligheden forat dø inden årets udgang, og antallet af gunstige tilfælde er 9917 og af mulige 10 000, når det gjælder sandsynligheden for *ikke* at dø inden årets udgang. Disse to sandsynligheders forhold er da $\frac{83}{10000}$ til $\frac{9917}{10000}$, følgelig som 83 til 9917 eller på det nærmeste som 1 til 120. Man kan altså vædde 1 spd. mod 1 skilling på, at en 30årig mand ikke vil dø inden årets forløb. Dog må her bemærkes, at den anførte tabel refererer sig til hele Norge, at dødelig-

heden i byerne er meget større end på landet, samt endelig, at i intet europæisk land stiller mortalitetsforholdene sig så gunstigt som i Norge. Følgende korte tavle giver en oversigt over dødeligheden i bydistrikterne for Norges vedkommende:

				Mandkjøn.
Af 10 000	levendefødte	dør i årets løb		1475.
-	—	5årige	—=—	160.
-	—	10årige	—=—	58.
-	—	20årige	—=—	81.
-	—	30årige	—=—	112.
-	—	40årige	—=—	136.
-	—	50årige	—=—	244.
-	—	60årige	—=—	366.
-	—	70årige	—=—	762.
-	—	80årige	—=—	1741.
-	—	90årige	—=—	3111.
-	—	99årige	—=—	10000.

Ifølge denne tabel er sandsynligheden, forat en 30årig mand skal dø inden årets udgang, 0,0112, og sandsynligheden, forat han ikke skal dø, 0,9888, eller man kan vædde 88 mod 1 på, at han ikke vil dø inden årets udgang. Dette er betydelig forskjel fra det foregående resultat.

I mortalitetstabellerne finder man en kolonne med overskriften „sandsynlig levetid“. Herved forståes det antal år, som en person har ligeså stor sandsynlighed for at opleve som

for ikke at opleve, eller forat bruge et andet udtryk, det antal år, som man kan vædde 1 mod 1 på at vedkommende person vil opleve. Når f. ex. halvdelen af 1000 30årige personer ville dø, inden resten opnår en alder af 69 år, så er den *sandsynlige levealder* af en 30årig person $69 - 30 = 39$ år.

Enhver alder har en forskjellig sandsynlig levealder, der også er forskjellig for de forskellige lande.

Følgende korte tabel giver en oversigt over den sandsynlige levetid i de fleste europæiske lande:

	Ved fødsel.		Ved 5te år		Ved 20de år		Ved 60de år	
	Mand- køn.	Kvind- køn.	Mand- køn.	Kvind- køn.	Mand- køn.	Kvind- køn.	Mand- køn.	Kvind- køn.
Norge	57	61	60	63	48	50	15	16
Sverige	47	53	55	58	43	46	13	14
Danmark	49	52	55	58	43	46	13	14
Bayern	32	32	53	53	41	41	12	11
Holland	31	36	51	54	40	43	12	12
Belgien	40	43	53	54	42	48	12	13
England	44	46	54	56	43	44	13	14
Frankrig	28	36	48	53	39	43	13	13
Italien	30	32	53	50	41	40	12	10

Af denne tabel sees, hvor fordelagtigt de skandinaviske lande ere stillede.

Ved hjælp af mortalitetstabellerne løser nu sandsynlighedsregningen en mængde interessante problemer, men som det her vilde være umuligt nøiere at forklare løsningen af. Man kan således beregne sandsynligheden, forat en person opnår en bestemt alder, at to eller flere personer opnår en vis alder, sandsynligheden, forat en person dør til en bestemt tid, sandsynligheden, forat en person overlever en anden osv.

Ved at anvende *Brunes* mortalitetstabel finder man således sandsynligheden for, at en 40årig mand bliver 70 år, at være næsten $\frac{4}{16}$ eller med andre ord, at man kan vædde 6 mod 4, at han dør, inden han bliver 70 år.

Sandsynligheden, forat en mand på 30 år netop skal dø i sit 60de leveår, er 0,0209, eller man kan vædde næsten 50 mod 1 på, at han ikke vil dø i sit 60de leveår.

Sandsynligheden, forat en 30årig mand skal overleve sin 96årige tante, er 0,9903 eller noget nær 1, altså sågodtsom vished.

I nøieste forbindelse hermed står, som man let vil skjønne, beregningen af præmierne for livrente, livsforsikring og enkepensioner osv.

Det var først i forrige århundrede, at *Mac-*

Laurin i Skotland, *Simpson* i England og *Euler* i Tydskland beregnede præmierne efter sandsynlighedsregningens principer. I middelalderen, da man også havde anstalter og foreninger til gjensidig understøttelse, betalte alle ligemeget. De egentlige livsforsikringsselskaber opstode først i England, men har siden — man tør vel sige til almindelig velsignelse — udbredt sig over hele Europa.

Livsforsikring består, som bekendt, deri, at vedkommende selskab forpligter sig til at udbetale en vis sum penge ved den forsikredes død til hans enke eller efterladte slægtninger. Herfor betaler den forsikrede en vis årlig sum, den såkaldte præmie. Enhver forsikringsanstalt har særegne statuter og tarifer for præmierne; sædvanlig optager man også kun personer, der ikke overskride en vis alder og ikke lide af nogen sygdom. I mange anstalter kunne dog også undtagelser herfra finde sted, men mod højere præmier. Beregner man præmierne efter de sædvanlige mortalitetstabeller, må derfor selskabet have fordelene på sin side. Sammenligner man imidlertid de således beregnede præmier med selskabernes, ere disse sidste dog noget større, hvad tildels har sin grund i administrationsomkostningerne, men som også undertiden ere ubillig store.

Sandsynlighedsregningen har imidlertid mange flere anvendelser end de her antydede. I virkeligheden reduceres de fleste opgaver i det sociale og det videnskabelige liv til sandsynlighedsproblemer.

Det er især i den fysiske verden, i naturvidenskaberne, at denne metode har vist sig heldig til sandhedens opdagelse. Derfor spiller sandsynlighedsregningen fremfor alt en stor rolle i de observerende videnskaber. Astronomen og fysikeren gør næsten daglig brug af denne kalkyl.

Det er os imidlertid umuligt her at forfølge dens anvendelse på dette felt; kun en bemærkning om et enkelt af dens resultater må her tilføies.

I året 1769 blev *solparallaxen* bestemt ved observationer af *Venus's* forbigang foran solskiven til 8,6 sekund*).

Ved hjælp af samme er jordens middelf afstand fra solen beregnet at udgjøre 20 666 800 geogr. mil. Ved sandsynlighedsregningen blev der påvist, at, hvis der er en fejl i denne afstand, da overstiger den ikke 89 147 mil eller 104 jordradier.

*) Efter *Stowes* revision af beregningerne skal den være 8,9₁ sekund, hvilket giver en noget mindre værdi for solens afstand.

Denne usikkerhed udgjør $\frac{1}{233}$ af solens afstand fra jorden; betænker man, at afstanden mellem mange af jordens større byer på langt nær ikke er bestemt med så stor nøiagtighed, får man en idé om, hvorledes denne vanskelige astronomiske måling bør bedømmes.

Endel videnskabsmænd og det af 1ste rang have forsøgt at anvende probabilitetskalkylen på felter, som synes at ligge udenfor al matematisk beregning. Allerede *Jaques Bernoulli*, der levede i det 17de århundrede, havde til hensigt at anvende sandsynlighedsregningen på jurisprudenten og politiken, men fuldførelsen af hans værk „*Ars conjectandi*“ blev afbrudt ved hans død, og ingen har siden forsøgt at supplere det. I slutningen af 18de århundrede skrev *Condorcet* et værk: *Essai d'application de l'analyse aux décisions qui se donnent à la pluralité des voix*“ (Paris 1785). Dette skrift behandlede sandsynligheden af, hvorvidt en person, anklaget for en forbrydelse, blev dømt uskyldig eller ei. Såvel *Laplace* som *Poisson* har forsøgt nøiere at udvikle *Condorcets* tanke.

Ved domstole, der skulle fælde strenge straffe f. ex. livsstraf, udfordres der naturligvis de stærkeste beviser mod forbryderen; thi det er umuligt senere at oprette feilen, hvis det

skulde vise sig, at dommen var uretfærdig. Det er imidlertid i mange tilfælde umuligt at afgjøre med absolut sikkerhed, om vedkommende har begået forbrydelsen eller ei, og historien leverer talrige eksempler på, at den uskyldige har lidt for den skyldige, uagtet de stærkeste beskyldninger har været reist mod ham og tilsyneladende godtgjort hans skyld. På den anden side fordrer statens sikkerhed, at forbrydelserne virkelig blive straffede. Vilde man fordre absolut enstemmighed af dommerne, forat en forbryder skulde kunne fældes, vilde man vistnok have en stor garanti, forat dommen var retfærdig, men det er da også sikkert, at mangel på en forbryder gik fri. Et spørgsmål er altså, om hvilken sandsynlighed har man, forat en dom, der fældes efter de fleste stemmer, er retfærdig eller ei? Det er klart, at hvis den ene halvdel af dommere står imod den anden, er sagen tvivlsom; man kan da ligesåvel antage, at forbryderen er skyldig som uskyldig. En stemmes overvægt til den ene side vil vistnok — forudsat at dommerne ere lige dygtige og skarpsindige, og det må i almindelighed forudsættes — gjøre sandsynligheden noget større, men enhver vil endnu føle sig utryg, og dommens sandhed vil underkastes tvivl.

Vanskeligheden forat anvende sandsynlig-

hedsregning på dette og lignende tilfælde ligger deri, at man må opstille visse hypoteser om dommerne, og det er netop om disse hypoteser, at der kan siges meget for og imod. Man har således villet beregne, at, om af en domstol, bestående af 8 dommere, 5 stemmer ere tilstrækkelige til at gjøre udslaget, er sandsynligheden for dommens retfærdighed noget mindre end $\frac{3}{4}$, omendskjønt den burde være 1. Er dommernes antal 12, og 8 behøves forat fælde dommen, er sandsynligheden for en rigtig dom meget nær $\frac{6}{7}$, og behøves 9 dommere, er den 0,995 eller meget nær 1, som er vished. I sidste fald kan man antage, at af 1000 skyldige går 5 fri eller af 1000 uskyldige dømmes kun 5.

Mod denne anvendelse af kalkylen have imidlertid hævet sig kraftige stemmer.

Hvor stor tænker og genial videnskabsmand end *Laplace* var, så synes hans sammenligning mellem de voterende dommere og en håndfuld terninger at være mildest talt dristig. Dommens og tænkningens akt er mere end et fysisk problem. Sandsynlighedsregningen behøver heller ikke at søge sin anvendelse på dette felt, den har fuldt op af andre problemer, hvis løsninger må indgyde os den høieste respekt, ja jeg tør sige beundring for denne mærkelige kalkyl.

Tilbageblik.

Vi have i disse foredrag forsøgt at meddele og fremstille under populær form et og andet, der kunde tjene til at give ialfald en idé om matematikens betydningsfulde rolle i naturvidenskaberne og i livet. I første foredrag omtaltes de forskellige slags tal, de *hele*, de *brudne* og de *irrationale*; ved et par eksempler hentede fra geometrien oplystes, hvorledes man var kommen til disse sidste besynderlige tal.

I de følgende to foredrag påpegedes matematikens betydning i naturen; vi valgte som eksempler *tonerne* og *himmellegemernes afstande* og *størrelse*. Disse eksempler kunde letteligen forøges med flere andre hentede fra *mekaniken*, *optiken*, *varmelæren* og *elektricitetslæren*, hvilke ialfald tildels tilstede en populær form. Overalt viser sig, at de store og almindelige love i naturen udtrykkes ved matematiske formler, hvilket igjen vil sige, at den orden og lovmæssighed, som hersker i naturens store husholdning, er så fuldkommen, at den ikke tillader afvigelser.

Anderledes forholder det sig derimod i den menneskelige husholdning, i stats- og samfundslivet. Her viser sig ingenlunde den høie lovmæssighed, som karakteriserer naturens rige, og gjør et så beroligende indtryk på vor sjæl;

tværtimod synes mangt og meget her at være underkastet tilfældets og slumpens lunefulde og foranderlige magt. Individets frihedsfølelse kæmper mod samfundets love og nedbryder ialfald tildels disses fuldstændige håndhævelse; tusinde årsager tilsyneladne fødte og tilblevne i øieblikket indflyde atter på individets selvbestemmelse og på dets handlinger, på dets liv og død, kort staten og samfundet synes ofte mere at være i tilfældets magt end styret af en fornuftig villie.

Vi viste i to forelæsninger om sandsynlighedsregningen og dens anvendelse, at endog det, som man i det daglige sprog kalder tilfældigt, og som man sædvanligt antager at bero på et træk, lader sig underkaste en beregning, at det er muligt midt i forvirringen at skue en lov og orden, og at denne lader sig tilnærmelsesvis bestemme ved sandsynlighedsregningens hjælp.

Man vil heraf forstå, at matematiken er som den røde tråd, der går gennem naturen og livet; al lovmæssighed og orden er bestemt ved tal, og derfor er det også kun ved tallets hjælp muligt at opdage og skue samme. Disse tusinde og atter tusinde vekslede og foranderlige fænomener styres af abstrakte tallove; alt, hvad der hedder orden, harmoni og skjønhed

er matematisk bestemt ligefra krystallens geometrisk fuldendte former indtil skønhedslinierne og proportionerne i det menneskelige legeme, dette skabelsens mesterværk her på jorden. Tallet i og for sig er det abstrakteste af alt, hvad vi kjende; det er derfor tjenligt som udtryk og tegn for det *almindelige*, for *loven* frigjort fra det enkelte tilfælde, men dog betingende dette, og just derfor *uendeligt fyldigt*.

Det er måske denne tanke, som har forsvævet den romantiske digter *Novalis*, når han siger: „*Das leben der götter ist matematik*“. Vi mennesker formå kun vanskeligt at hæve os op til det almindelige; endelige og indskrænkede, som vi ere, finde vi det endog tørt og kjedeligt, thi vi fatte ikke, at dette er sandheden, idéen, men at fænomenet kun er det enkelte tilfælde. Så går det da her som så ofte, vi tage skyggen for legemet, vi glæde os ved det øieblikkelige og glemme det evige.

Men det *evige*, det *absolut sande* berøres ikke af et menneskes tale og mening. Lige uforanderligt, lige ophøiet står den evige fornuft og visdom indristet i den hele verdensbygning, og disse ord forblive en urokkelig sandhed: *du haver beskikket alle ting med mål og tal og vægt*.

Betragtninger over matematiken

af

Blaise Pascal.

Belgischer overzeijder

Blaise Pascal, en af Frankrigs dybeste ånder og skarpeste tænkere, er født i *Clermont* i Auvergne 19de Juni 1623. Faderen reiste til Paris 1631, hvor han selv opdrog og underviste sønnen. Allerede meget tidligt viste den unge *Pascal* et afgjort talent for matematik. 19 år gammel opfandt han sin berømte regnemaskine, og noget senere foretog han sine forsøg over „*det tomme rum*.“ I 1647 udgav han en afhandling: „*expériences nouvelles touchant le vide etc.*“, og i 1648 den 19de september udførte efter *Pascals* anmodning hans svoger *Perier* på *Puy-de-Dôme* den første barometermåling, hvilket forsøg aldeles kulkastede de gamles teori om naturens rædsel for det tomme rum (*horror vacui*). Han skrev senere om væskers ligevægt og om vægten af luften. Af tabte geometriske værker har han skrevet *tactiones sphaericæ, tactiones conicæ, loci plani ac solidi, perspectivæ methodus etc.* Fremdeles er han opfinderen af det berømte *arithmetiske triangel* og af *sandsynlighedsregningen*.

23de januar 1656 publicerede han under det pseudonyme navn *Louis de Montalte* sit første brev à un *Provincial*, der dannede begyndelsen til de verdensberømte *lettres provinciales*, hvis sprog er så mesterligt, at *Pascal* regnes for grundlæggeren af det moderne franske skriftsprog. I juni 1658 opstillede han for Europas matematikere endel problemer om *rouletten* eller *cycloiden*; han holdt sig skjult under navnet *A. Dettonville*. Kun to matematikere *Père Lallouère* og *Wallis* indleverede afhandlinger til konkurrence om den udsatte præmie for

problemernes løsning; men ingen af dem havde tilfredsstillende løst opgaven, hvorfor *Pascal* selv samme år offentliggjorde sin løsning, der udmærker sig ved elegants og metode. *Pascal's* sidste værk, hvoraf kun haves brudstykker, udgaves efter hans død under titelen: „*Pensées de M. Pascal sur la religion et sur quelques autres sujets.*“ Dette er hans berømte „*Pensées,*“ der har oplevet en mængde oplag, og hvoraf fremlyser på engang hans dybe og sande religiøsitet og hans vidunderlige skarpe ånd. *Pascal* døde 19de august 1662, 39 år og 2 måneder gammel.

Betragtninger over matematiken *)

af

Blaise Pascal.



Man kan under studiet af sandheden have tre væsentlige ting for øie: at opdage den sandhed, man søger efter, at bevise, hvad man ved er sandhed, og endelig at skille mellem det falske og det sande.

*) Denne afhandling findes i de ældre udgaver af *Pascals „Pensées“* i 1^{me} partie og har overskriften: *réflexions sur la géométrie en général*. I de senere udgaver bærer den titelen: *„De l'esprit géométrique“* og er på enkelte steder en smule forandret i overensstemmelse med *Pascals* originalmanuskript (*Faugère*). Jeg har her beholdt den gamle titel, som synes mig mest passende, og på nogle steder også bibeholdt den gamle text, der, om end indskudt, bedre passer for afhandlingen i sin nuværende skikkelse. Den er nemlig kun et brudstykke af en større afhandling. Man finder efter *Faugère's* udgave en oversættelse af samme afhandling i det fortrinlige værk: *Pascals Breve, Afhandlinger og Samtaler tiligemed hans Levnetsbeskrivelse af Fru Perier*, oversatte af *W. F. de Coninck* og *Thor Sundby*.

Jeg omtaler ikke den første. Jeg behandler særligt den anden, som indbefatter i sig den tredie. Thi, når man kjender metoden at bevise sandheden, har man på samme tid evne til at skjelne mellem det sande og det falske; idet man nemlig undersøger, om beviset er stemmende med de sikke og faste regler, man har, vil man kunne afgjøre, om sagen er nøiagtigt bevist eller ei.

Matematiken, som udmærker sig i disse tre slags henseender, har lært os kunsten at opdage ukjendte sandheder; det er den, som kaldes *analyse*, og som det er unødvendigt her nøiere at omtale, efterat såmange udmærkede verker ere skrevne derom.

At bevise allerede fundne sandheder og at gjøre det så klart og indlysende som muligt, er alene, hvad jeg her nøiere vil omtale. Forat gjøre det, har jeg kun at forklare, hvorledes matematiken bærer sig ad; thi den lærer os det fuldstændigt. Forinden er det imidlertid nødvendigt at give en idé om en metode end mere udmærket og fuldendt, men som mennesket aldrig kan nå til; thi det, som overgår matematiken, overstiger også al menneskelig evne og kraft. Ikke destomindre må metoden omtales med nogle ord, uagtet det er os umuligt at anvende den.

Denne sande metode, som vilde danne de mest fuldendte beviser, om det var muligt at benytte den, skiller sig i to hoveddele: for det første aldrig at benytte et udtryk, hvis mening ikke forud er nøiagtigt forklaret, for det andet aldrig at fremsætte en læresætning, der ikke kan bevises ved forud erkjendte sandheder, altså med et ord: *at definere alle udtryk og at bevise alle sætninger*. Men forat gjøre sagen tydelig, er det nødvendigt, at jeg nærmere forklarer, hvad jeg forstår ved en *definition*.

Matematiken anerkjender alene det slags definitioner, som logikerne kalde *navne-definitio-ner*, d. e. den giver simpelthen bestemte navne til ting eller begreber, som den forud klart og nøiagtigt har betegnet i fuldkommen bekjendte ord; det er alene om disse, jeg taler. Deres nytte og anvendelse er at klargjøre og forkorte talen, idet man med et eneste ord er istand til at udtrykke, hvad man ellers behøvede flere ord til; det valgte navn må da berøves enhver anden betydning end den, som man har tillagt det. Som eksempel herpå kan følgende tjene.

Når man blandt *tallene* skal skille mellem dem, som ere delelige i to ligestore hele tal, og dem, som ikke ere det, giver man forat undgå idelige gjentagelser de førstnævnte tal et navn, idet man opstiller følgende definition: *et-*

hvert helt tal, der er deleligt i to hele og ligestore tal, kaldes et lige tal. Dette er en matematisk definition; efterat have klart betegnet en ting, nemlig ethvert helt tal, der er deleligt i to andre ligestore og hele tal, giver man det et navn, som man berøver al anden betydning, hvis nogen sådan eksisterer, for ene at betegne den nævnte ting.

Heraf fremgår, at definitionerne ere yderst vilkårlige, og at de aldrig kunne modsiges; thi det er klart, at man kan give en ting, som man forud nøiagtig har forklaret, hvad navn, man vil. Det er kun nødvendigt at vogte sig for misbrug, så at man ikke giver to forskellige ting samme navn.

Vistnok kan dette sidste også tillades, når man kun ikke sammenblander konsekventserne eller udstrækker det ene begreb til det andet*).

*) Som eksempel herpå hentet fra aritmetiken kan nævnes multiplikation eller division med brøk. At multiplicere brøken $\frac{t}{n}$ med det hele tal a er en virkelig multiplikation i sædvanlig forstand, og betegner, at $\frac{t}{n}$ skal sammenlægges a gange. At multiplicere et tal med en brøk betegner derimod noget ganske andet; thi det betegner ifølge sin definition en dobbelt regneoperation, en multiplikation med tælleren og division med nævneren, så at $a \times \frac{t}{n} = \frac{at}{n}$. Her er

Men, selv om man begår denne feil, har man et sikkert og ufeilbarligt middel derimod, nemlig i tanken at sætte definitionen ^(nærmere bestemt) istedetfor det definerede ord, ^(forordne tal) og stedse have definitionen således på rede hånd, at nårsomhelst man taler f. ex. om et *lige tal*, så forstår man netop derved et tal deleligt i to ligestore og hele tal, og i tanken at have disse to ting således forenede og og uadskillelige, at såsnart talen falder på det ene, tanken strax fæster sig ved det andet. Thi matematikerne og alle, der gå metodisk frem, give tingene navne *alene forat forkorte talen og ikke forat formindske eller forandre tingenes idé*, og de forlange, at tanken stedse udfylder med den hele definition de korte navne, hvilke sidste de alene benytte forat undgå den forvirring, der opstår ved anvendelsen af en mængde ord på engang.

Der gives intet, som hurtigere formår at fjerne sofisternes listige overraskelser end denne metode, som man stedse bør have for øie, og som alene formår at banlyse alle vanskeligheder og tvetydigheder.

Efter dette vender jeg tilbage til den nærmere forklaring af den *fuldkomne metode*, der

samme navn givet to ganske forskellige ting; det er et spørgsmål, om dette er klogt, da det let medfører forvirring, om det end strengt taget er tilladt.

som tidligere nævnt, består i at *definere alt* og *bevise alt*.

Denne metode vilde visselig være skjøn, men den er absolut umulig, thi det er klart, at de første ord, man vilde definere, forudsatte andre, der skulde tjene til deres forklaring, og at de første læresætninger, man skulde bevise, forudsatte andre, der gik foran dem, og det er således umuligt nogensinde at nå til de første. I virkeligheden kommer man også, jo længere man strækker undersøgelserne, nødvendigvis til *primitive ord*, der ikke kunne defineres, og til *principer*, der ere så klare i og for sig, at man ingen andre finder, der ere mere indlysende og kunne tjene som bevis for hine.

Deraf synes at fremgå, at menneskene ere ude af stand til at behandle nogen videnskab på en fuldkommen måde, men deraf følger dog ikke, at man bør forlade enhver metode. Thi der er en metode, og det er *matematikens*, som vistnok er lavere og ufuldkomnere deri, at den er mindre *slående* og *overbevisende*, men ikke deri, at den er mindre *sikker* og *vis*. Den definerer ikke alt, og den beviser ikke alt; heri er den underlegen; men den forudsætter alene ting, der ere klare og indlysende i og for sig. Den er derfor *fuldkommen sand*; thi naturen

selv kommer den til hjælp, hvor fremstillingen svigter.

Denne metode, den fuldkomneste, menneskene eie, består ikke i at definere alt og bevise alt, heller ikke i intet at definere og intet at bevise, men i at gå middelveien, således at den ikke definerer, hvad enhver finder klart og forståeligt, men derimod alt andet, og ikke at bevise, hvad alle erkjende for sandt og rigtigt, men bevise alt andet. Mod denne metode synde såvel de, som forsøge at definere og bevise alt, som de, der forsømme at gjøre det med hensyn til de sætninger, som ikke er indlysende i og for sig selv.

Matematiken lærer os her den fuldkomne og rette vei. Den definerer ikke *rum, tid, bevægelse, tal, ligestorhed* osv., fordi disse ord betegne så klart selve begreberne for alle, der forstår sproget, at enhver nærmere forklaring snarere vilde medføre dunkelhed end belysning af sagen. Thi ingen tale er mere tåbelig end deres, der søge at definere disse primitive ord. Hvad nødvendighed er der vel i at forklare f. ex., hvad man forstår ved ordet *menneske*? Forstår man ikke tilstrækkeligt, hvad det er, man vil betegne ved dette udtryk? Hvad fordel vilde *Platon* skaffe os, når han siger, at det er et dyr med to ben uden fjær? Som om den idé,

jeg har af naturen om et menneske, og som jeg ikke kan nærmere forklare, som om denne idé ikke var langt klarere og bestemtere, end den, jeg får af hans unyttige, ja latterlige definition! Thi et menneske taber ikke sin menneskelighed, om det mister sine ben, og en hane bliver ikke et menneske, om den mister sine fjær.

Der gives endog dem, som gå til den absurditet at forklare et ord ved ordet selv. Jeg kjender folk, som har defineret lyset på følgende måde: *lyset er en lysende bevægelse af lysende legemer**), som om man kunde forstå ordet *lysende* uden at vide, hvad *lys* var.

Man kan ikke definere ordet „at være“ uden at henfalde til samme absurditet; thi det er umuligt at definere et ord uden at begynde med „*det er*,“ hvad enten man ligefrem siger det eller underforstår det. For altså at definere „*væren*“ må man sige „*det er*“ og således i definitionen anvende det ord, som skal defineres.

Man indser heraf, at der gives ord umulige at definere, og hvis naturen ikke havde rådet bod herpå ved at give alle mennesker en fælles forestilling om disse ords betydning, vare alle vore udtryk forvirrede og dunkle; men nu be-

*) Således defineredes lyset af *père Noël*, en lærd jesuit, som stredes med *Pascal* om tilværelsen af det „*tomme rum*.“

nytter alle dem med samme sikkerhed og vished, som om de vare definerede på en måde fri for enhver tvetydighed. Naturen har selv uden ord, givet os forståelsen deraf klarere end nogensomhelst menneskelig forklaring kunde give.

Det forholder sig derimod ikke så, at alle mennesker have samme idé om de tings væsen, hvilke det er umuligt eller unyttigt at definere; *tiden* hører f. ex. herhen. Hvo kan definere den? Og hvorfor forsøge derpå, da alle mennesker fatte, hvad man vil sige, når man taler om tiden, uden at man nøiere behøver at forklare sig? Desuagtet gives der dog høist forskellige opfatninger af tidens væsen. Nogle sige, at den er bevægelsen af en skabt ting, andre, at den er et mål for bevægelsen osv. Det er heller ikke disse tings natur, hvorom jeg taler, der er bekjendt for alle; med hensyn til udtrykket *tid*, føres alles tanke mod samme gjenstand, hvilket er tilstrækkeligt forat ordet ingen nøiere definition behøver, omendskjønt det viser sig ved nærmere undersøgelse, at meningerne ere høist forskellige, om hvad egentligt tid er, og hvori dens væsen består. Definitionerne ere kun til forat betegne de ting, som man nævner ved navn, men ikke forat vise deres natur.

Man kan meget vel kalde bevægelsen af en skabt ting *tid*; thi, som før sagt, intet er mere

vilkårligt end definitioner. Men ifølge denne definition gives der *to ting*, som bære navnet *tid*; den ene er, hvad alle og enhver forstår ved dette ord, og alle som tale vort sprog kalde det således, den anden er *bevægelsen af en skabt ting*, thi ifølge denne nye definition kalder man også dette *tid*.

Man må følgelig vogte sig for tvetydigheder og ikke bringe forvirring i følgeslutningerne. Thi af denne definition følger ingenlunde, at det, som man ialmindelighed forstår ved ordet *tid*, er virkningen af en skabt tings bevægelse. Det står enhver frit for at kalde disse to ting med samme navn, men deraf følger ikke, at begge tings natur stemme overens.

Hvis man således siger: *tiden er bevægelsen af en skabt ting*, må man spørge: hvad er det, man forstår ved ordet *tid*, d. e. skal man opfatte det i sædvanlig forstand, eller skal man fravige denne og ved denne leilighed give det betydning af en skabt tings bevægelse? Hvis man bestemmer sig for det sidste, kan man ikke sige noget derimod, thi det hele er en vilkårlig valgt definition, ifølge hvilken, som jeg før har sagt, der gives to ting, der bære samme navn; men hvis man forstår ordet i sædvanlig forstand, og man ikke destomindre påstår, at det, som forståes ved hint ord, er bevægelsen af en skabt

ting, da kan man sige imod. Det er da ikke mere en vilkårlig definition, det er en *læresætning*, som må *bevises*, hvis den ikke i og for sig selv er klar og indlysende, i hvilket fald den er et *princip* og et *axiom*, men aldrig nogen *definition*; thi man mener ikke her, at tiden betegner det samme som *bevægelsen af en skabt ting*, men man mener, at tiden er denne antagne bevægelse.

Hvis jeg ikke vidste, hvor vigtigt det er, at man ret forstår dette, og hvorofte det indtræffer i samtaler både over almindelige og videnskabelige gjenstande, at lignende tilfælde indtræffe, skulde jeg ikke have opholdt mig så længe derved. Men efter den erfaring, som jeg har om forvirring i disputer, synes det mig, at man ikke noksom kan lægge vind på denne klarhed i tanken, som jeg i denne afhandling særligt ønsker at fremhæve og som har været den væsentlige grund til, at jeg har skrevet samme.

Hvormange er der ikke, som indbilde sig, at de have defineret ordet *tid*, når de have sagt, at det er målet for bevægelsen, forstående tid i sædvanlig betydning? Og dog have de fremsat en *læresætning* og ingen *definition*. Hvormange er der ikke, som tro at have defineret *bevægelse*, når de sige: *motus nec simpliciter actus, nec mera potentia est, sed actus entis in*

potentia?*) Og dog, dersom de forstå ordet *bevægelse* i sædvanlig betydning, hvilket er tilfældet, er det ingen definition, men en læresætning; de sammenblande på denne vis de såkaldte *navnedefinitioner*, der ere fuldkommen vilkårlige og tilladelige, med de såkaldte *tingsdefinitioner*, som aldeles ikke ere vilkårlige, men underkastede modsigelse, og de tage sig den frihed at danne disse efter behag ligesom de første. Idet enhver definerer de samme gjenstande på sin måde, med en vilkårlighed, der er ligeså strengt forbuden ved disse slags definitioner som tilladelig ved de første, bringe de forvirring i alle ting; de miste al metode og klarhed og indvikle sig i uopløselige vanskeligheder.

Man undgår enhver slig vanskelighed ved at følge matematikens metode. Denne kloge videnskab giver sig slet ikke af med at definere primitive ord som *rum*, *tid*, *bevægelse*, *ligestorhed*, *det større*, *det mindre*, *det hele* og alle de andre udtryk, som forståes af sig selv. Men med undtagelse af disse forklarer den og definerer den alle øvrige ord, den benytter, så tydeligt, at man aldeles intet lexikon behøver forat forstå dem; kort sagt, alle dens ord og

*) Bevægelse er ikke ren handling heller ikke ren kraft, men kraftens ytring i handling.

udtryk er fuldkommen forståelige enten i og for sig selv eller ved de definitioner, den opstiller.

På denne måde undgår matematiken alle vanskeligheder, som kunne møde den ved første regel, nemlig ved at definere alene de ting, den har brug for. Den går frem på lignende måde med hensyn til den anden regel, idet den beviser alene de læresætninger, der ikke ere klare i og for sig selv.

Thi når matematiken kommer til de første bekendte sandheder, standser den og forlanger, at man skal indrømme dem, da det er umuligt at bevise dem eller gjøre dem klarere end de ere i og for sig selv; således er alt, hvad den forudsætter, fuldkommen bevist enten ved den naturlige indsigt eller ved virkelige beviser. Deraf følger, at når denne videnskab ikke definerer og beviser alt, så er det af den gode grund, at dette er umuligt.

Man vil måske finde det besynderligt, at matematiken ikke kan definere nogen af de ting, der ere dens hovedgjenstande; thi den kan hverken definere bevægelse eller tal eller rum, og dog er det netop disse tre gjenstande, den særligt betragter, og efter hvilke den deles i de tre dele *mekanik*, *aritmetik* og *geometri*. Men man vil ikke forundres, når man betænker,

at denne beundringsværdige videnskab kun befatter sig med de *simpleste* ting, og at den egenskab, som gjør dem værdige til at være dens gjenstande, på samme tid gjør det umuligt at definere dem. Mangelen på en definition er derfor snarere en fuldkommenhed end en fejl, fordi den ikke har sin grund i deres dunkelhed, men tvertimod i deres overordentlige klarhed, som er så stor, at der ikke tiltrænges nogen nøiere forklaring, thi de ere forståelige i og for sig. Matematiken forudsætter altså, at man ved, hvad der forståes ved ordene *bevægelse*, *tal*, *rum*, og uden at opholde sig med unyttigen at definere dem, gennemtrænger den deres natur og opdager deres forunderlige egenskaber.

Disse tre, som omfatte det hele universum ifølge de bekjendte ord: *Deus fecit omnia in pondere, in numero et mensura**), have en indbyrdes og nødvendig forbindelse. Thi man kan ikke tænke sig en bevægelse uden en gjenstand, som bevæges, og denne gjenstand, som er *en*, kan betragtes som enheden, der er tallenes ophav. Og da bevægelse ikke kan finde sted uden i rummet, så indser man, at alle tre ere indbefattede i den første.

*) *Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti.*
Sap. XI, 22, 3: alt har du bestemt ved mål og tal og vægt.

Også selve *tiden* er indesluttet deri, thi *bevægelse* og *tid* stå i forhold til hinanden, idet hurtighed og langsomhed, der ere forskellige slags bevægelser, nødvendigvis afhænge af tiden. Således have disse tre egenskaber fælles, og kjendskabet til dem åbner åndens øie for naturens store undere.

Den første egenskab er den dobbelte uendelighed, som møder os ialt, det uendeligt store og det uendeligt lille. Hvor hurtig end en bevægelse er, kan man dog tænke sig en endnu hurtigere, og atter en endnu hurtigere end denne og således i det uendelige uden nogensinde at nå til en, som ikke kan forøges; og på den anden side, hvor langsom en bevægelse er, kan man tænke sig en langsommere og således i det uendelige uden nogensinde at nå til hvile. På samme måde, hvor stort et tal er, kan man altid tænke sig et endnu større og fortsætte således i det uendelige uden nogensinde at komme til et, der ikke kan videre forøges; og på den anden side, hvor lidet end et tal er, f. ex. en hundrededel eller en titusindedel, man kan dog stedse tænke sig et mindre og således i det uendelige uden nogensinde at nå til nul eller intet. Hvor stort end et rum er, kan man stedse tænke sig et større og atter et endnu større og således i det uendelige uden

nogensinde at nå til et, der ikke mere kan forstørres; og på den anden side, hvor lidet et rum end er, kan man dog stedse tænke sig et mindre og således i det uendelige uden nogensinde at nå til et *udeleligt*, som ingen udstrækning har.

Det forholder sig på samme måde med tiden. Man kan altid tænke sig en større og større og en mindre og mindre uden at nå til et øieblik eller et absolut intet af tid.

Heraf følger da, at hvilken bevægelse, hvilket tal, hvilket rum, hvilken tid man end betragter, der gives dog stedse en større og en mindre, således at de alle befinde sig mellem *intet* og *uendeligt*, men dog stedse uendeligt bortfjernede fra disse ydergrænser.

Alle disse sandheder kunne ei bevises; og dog ere de matematikens fundament og dens principer. Men, da årsagen til, at de ikke tilstede bevis, ikke ligger i deres dunkelhed, men tvertimod i deres overordentlige klarhed, så er denne mangel på bevis ingen feil, men snarere en fuldkommenhed. Deraf indser man, at matematiken ikke kan definere sine gjenstande eller bevise principerne; men af denne ene og gode grund, at de ere af en så stor naturlig klarhed, hvilken overbeviser langt mægtigere forstanden end nogetsomhels bevis formåede.

Thi hvad er vel mere indlysende end denne sandhed, at et tal, hvilket som helst, kan forøges, at man kan fordoble det, at en bevægelses hastighed kan fordobles, og at et rum kan gøres dobbelt så stort? Og hvem kan tvivle på, at et tal, hvilket som helst, ikke kan deles i to halvdele? Thi kan denne halvdel være et intet? Men hvorledes kunde isåfald disse to halvdele, som begge skulle være et nul, udgjøre et tal?

Ligeså, en bevægelse, hvor langsom den end er, kan der ikke være en, som er halvdele så langsom, således at gjenstanden gennemløber det samme rum i dobbelt så lang tid? Thi er det muligt, at denne hastighed skulde være hvile? Men hvorledes kunde isåfald disse to hastigheder, der hver især er hvile, tilsammen kunne frembringe den første hastighed?

Endelig, et rum, hvor lidet det end er, kan det ikke deles i to halvdele og disse halvdele atter deles? Thi hvorledes skulde det gå an, hvis disse to halvdele vare *udelelige* og uden nogen udstrækning, at de tilsammen kunde danne det førstnævnte rum?

Der gives ingen naturlig erkjendelse i mennesket, som går forud for denne, og som overgår den i klarhed. Ikke destomindre, forat der skal gives eksempel på alt, så finder man mænd,

udmærkede i andre ting, men som disse uendeligheder støde, og som ikke på nogen måde ville indrømme samme.

Jeg har aldrig kjendt nogen, som har ment, at et rum ikke kunde forøges og blive større. Men jeg har truffet nogle*), meget dygtige forøvrigt, som have forsikret, at et rum kan deles i to udelelige dele, hvor stor urimelighed der end ligger deri. Jeg har bestræbt mig forat udfinde, hvad grunden kunde være til denne uklarhed hos dem, og jeg har fundet, at der er en principiel, der består i, at de ikke kunne tænke sig en størrelse stadigt delelig**) i det uendelige, hvorefter de slutte, at det ikke kan være deleligt på denne vis. Det er en naturlig sygdom hos mennesket at tro, at han besidder sandheden *direkte*, og deraf kommer, at han stedse er beredt til at nægte alt, hvad der

*) *Pascal* sigter her utvivlsomt til *Chevalier de Meré*; i et brev til *Fermat* siger han om ham, at han ikke kan begribe, at en matematisk linie er delelig i det uendelige.

**) Et geometrisk legeme kan deles i så mange dele, man vil, ∞ : i uendeligt mange dele, men hver del bliver dog et legeme. En geometrisk flade kan deles i uendeligt mange dele, som hver forbliver en flade; en geometrisk linie kan deles i uendeligt mange dele, men hver del bliver en linie. En linie kan ikke sammensættes af punkter, en flade ikke af linier og et legeme ikke af flader.

er ham uforståeligt, istedetfor at han kun af naturen kjender løgn og ikke bør anse for sandt andet end det, hvoraf det modsatte viser sig falsk. Det er derfor man må opsætte med sin dom, når en sætning synes ubegribelig, og ikke nægte den på grund heraf, men undersøge det modsatte; og hvis man finder det at være falsk, kan man dristigt påstå satsen, hvor ubegribelig den end synes. Lad os anvende denne regel på det foreliggende tilfælde.

Der gives ingen matematiker, som ikke anser rummet for deleligt i det uendelige. Man kan ligesålidt være matematiker uden dette princip som et menneske uden sjæl. Ikke destomindre gives der intet menneske, der fatter en uendelig deling, og man forvisser sig om sandheden deraf kun af denne eneste, men viselig tilstrækkelige grund, at man fuldkommen forstår, at det er falsk, at man ved deling af et rum kan nå til en udelelig del d. e. en del, som ingen udstrækning har. Thi hvad mere absurd gives der vel end at påstå, at, når man gjentagende deler et rum, man da tilslut kommer til en sådan del, at, idet man deler den i to, enhver af halvdelene ere udelelige 2: uden udstrækning? Jeg vil spørge dem, som have en slig mening, om de klart have gjort sig rede for, hvorledes to udelelige størrelser berøre

hinanden? Berøre de hinanden overalt, ere de begge en og samme størrelse og følgerlig udgjøre de tilsammen en udelelig størrelse; men berøre de ikke hinanden overalt, så berøre de hinanden kun med en del og have følgerlig dele, og da ere de ikke udelelige.

Indrømme de nu, hvad virkelig er tilfældet, når man går dem på livet, at *deres* mening er ligeså uforståelig som den, de bekjæmpe, så må de dog erkjende, at man ikke bør fælde nogen dom om disse tings sandhed støttet på vor fatteevne, såsom begge ere i sin dybeste grund ufattelige, og at det ikke destomindre er sikkert, at en af dem er sand og den anden falsk.

Men mod disse indbildte vanskeligheder, som kun have sin årsag i vor svage fatteevne, ville vi sætte følgende naturlige, klare og urokkelige sandheder: dersom det var muligt, at rummet var sammensat af et bestemt endeligt antal *udelelige* (*indivisible*), så måtte det være muligt at danne et kvadrat dobbelt så stort i indhold som et andet kvadrat og som bestod af det dobbelte antal *udelelige* punkter.

Hold nu fast ved denne slutning og forsøg derpå at ordne punkterne i to kvadrater, indtil det ene indeholder dobbelt så mange punkter som det andet; formår de dette, vil jeg

indestå, forat alle verdens matematikere skulle give dem ret i deres meninger. Men er dette i og for sig umuligt: er der en absolut umulighed at ordne punkterne i kvadraterne således, at det ene får det dobbelte antal punkter af det andet — hvilket jeg med lethed skulde bevise her på stedet, hvis det var umagen værd at opholde sig derved — lad dem så drage den rette følgeslutning deraf*).

Og for at lette dem vanskelighederne ved visse punkter som f. ex. at forstå, at et rum har uendeligt mange dele og dog kan gjenneumløbes i en kort tid, gjøre man opmærksom på, at de ikke må sammenligne så uforholdsmæssige gjenstande som de uendeligt små dele med den korte tid, hvori de gjenneumløbes, men man må sammenligne det hele rum med den hele

*) At det er umuligt at danne to kvadrater på den af *Pascal* omtalte måde, bevises således. Antag, at antallet af punkter i kvadratets side er n , så består fladeindholdet af n^2 punkter. Et kvadrat, der skulde indeholde dobbelt så mange punkter, altså $2n^2$ punkter, måtte have en side, der var således beskaffen, at når antallet af punkter i samme sættes lig x , man har: $x^2 = 2n^2$. Men ifølge aritmetiken eksisterer der intet helt tal x , hvor man har denne relation; den fører nemlig til $\left(\frac{x}{n}\right)^2 = 2$, som er umuligt, da intet helt eller bruddent tal eksisterer, der kvadreret er lig 2.

tid, og rummets uendeligt små dele med denne tids uendeligt små øieblikke; da ville de finde, at man gjennemløber en uendelighed af rumdele i en uendelighed af øieblikke og et endeligt rum i en endelig tid, hvori intet unaturligt og urimeligt findes. Når de endelig finde det besynderligt, at et lidet rum har ligeså mange dele som et stort, så har de at lægge mærke til, at delene også ere forholdsvis mindre; betragt firmamentet gennem et lidet stykke glas, og læg mærke til, at hver del af himmelen sees gennem en tilsvarende del af glasstykket.

Men når de ikke kunne fatte, at dele så små, at de ere os umærkelige, fremdeles kunne deles i ligeså mange dele som hele firmamentet, så gives der intet bedre middel end at lade dem betragte en sådan del gennem et stærkt forstørrelsesglas*), som forstørrer det lille stykke til en anseelig masse; deraf ville de letteligen kunne forstå, at ved hjælp af endnu stærkere forstørning kunde man få gjenstanden til at vise sig større og større, indtil den blev så stor som selve firmamentet, hvis udstrækning de beundre. De ville da finde det let at dele og, om de end ikke kunne udføre denne deling,

*) Man kjendte på denne tid meget vel til lupen, kikkert ogv. Allerede 1610 opdagede *Galilei* teleskopet. *Pascals* afhandling er skrevet omkring 1655.

så lad dem huske på, at naturen kan uendeligt meget mere end al menneskelig kunst. Desuden, hvem har sagt dem, at disse glas har forandret gjenstandenes naturlige størrelse, eller om ikke tvertimod de have gengivet dem den sande størrelse, som vort øies bygning har forandret og formindsket ligesom de glas, der formindske? Det er kjedeligt at opholde sig ved slige bagateller, men man må undertiden også beskæftige sig med ubetydeligheder.

Til dem, der forstå, hvad her er tale om, er det nok at sige, at det er umuligt, at et rum, der har udstrækning, kan tænkes sammensat af to rum uden udstrækning*). Men der gives dem, som paastå at de undgå sagen ved det mærkværdige svar, at to rum uden udstrækning ligeså godt kunne danne et rum med udstrækning som to enheder, hvoraf ingen er et tal, tilsammen udgjøre et tal; man kan svare dem på samme vis, at tyve tusind mand udgjør en armé, uden at nogen enkelt mand er en armé,

*) Det er derfor umuligt, at en linie kan være sammensat af punkter, en flade af linier og et geometrisk legeme af flader. Undertiden tales der i matematiken, som om dette virkelig fandt sted (*Cavalleris de indivisibles metode*), men det er da kun tilsyneladende og alene forat lette og forkorte udtrykkene.

at tusind huse danne en by, omendskjønt ikke noget enkelt hus er en by, eller at delene danne tilsammen det hele, omendskjønt ingen enkelt af dem er det hele, eller, forat blive i lignelsen om tallene, at to toere udgjøre en firer, og ti tiere et hundrede, omendskjønt ingen af dem for sig er en firer eller et hundrede. Men det er ingen klar ånd, der ved så ulige sammenligninger sammenblander tingenes uforanderlige natur med deres fri og vilkårlige navne, der ere dem givne af mennesker efter godtbefindende. Thi det er klart, at man alene forat lette talen har givet navnet *armé* til 20000 mand, navnet by til flere huse, tier til ti enheder o. s. v. Med samme vilkårlighed ere navne dannede som *ener, toer, firer, tier, hundrede*, der ere forskellige af navn, fordi vi have fundet for godt at give dem forskellige navne, men som alle ere af samme art ifølge deres uforanderlige natur, og alle ere dannede på samme måde og adskille sig kun ved et *større* og et *mindre*. Disse navne medføre vistnok, at en *toer* ikke er en *firer*, et *hus* ikke en *by*, ligesålidt som en *by* er et *hus**). Men fordi et hus ikke er en by, følger ingenlunde deraf, at det

*) Hvis disse navne ikke existerede, vilde der nemlig ingen modsætning eller sammenligning kunne gøres desangående.

er et intet af en by; der er stor forskjel mellem ikke at være en ting og at være et intet af samme.

Thi forat man skal forstå sagen tilbunds, så bør man vide, at den eneste grund, hvorfor ikke *eneren* er indrangeret blandt tallene, er den, at *Euklid* og de første forfattere, som efter ham have behandlet aritmetiken, havde opdaget en række egenskaber vedkommende alle tal *foruden eneren*, og forat undgå oftere at gentage: *i ethvert tal med undtagelse af eneren finder det og det sted*, have de udelukket eneren fra betegnelsen *tal* med den vilkårlighed, som det er tilladt med hensyn til navne-definitioner, og hvorom før er talt. De kunde for den sags skyld, om de havde villet, ligeså gjerne have udelukket toeren, treeren og hvilket andet tal, som måtte have behaget dem, thi derover er man herre, når man kun i forveien gjør opmærksom derpå; ligesom på den anden side, når man vil, eneren kan sættes i spidsen for tallene og endog brøkerne betragtes som tal. Ja man er i virkeligheden nødt dertil i almindelige læresætninger for at undgå at sige hver enkelt gang: *ethvert tal og eneren og brøkerne have den egenskab, at* osv.; det er i denne almindelige betydning, jeg har taget ordet *tal* i alt, hvad jeg har skrevet desangående.

Men den samme *Euklid*, som har undtaget eneren fra de øvrige tal, hvilket var ham tilladt, har, forat man ikke destomindre skulde forstå, at den er af samme art som de øvrige tal, defineret på følgende måde de *ensartede (homogene) størrelser*: *to størrelser*, siger han, kaldes *ensartede*, når den ene, sammenlagt gjentagne gange, kan blive større end den anden. Heraf følger, at eneren er *ensartet* med de øvrige tal, thi ved gjentagende at lægge enere sammen, erholder man et tal så stort, at det overgår et hvilket-somhelst givet tal. Heraf følger, at eneren netop ved sit væsen og uforanderlige natur er af samme art som tallene, og dette lærer den selvsamme *Euklid*, som ikke har villet kalde den et *tal*.

Det forholder sig ikke således med et *udeleligt* og en given rumstørrelse; thi ikke alene have de forskellige navne, hvilket er vilkårligt, men de ere *uensartede*. Et udeleligt kan nemlig, hvorofte det end sammenlægges, så langt fra danne en rumstørrelse med udstrækning, at det tvertimod kun kan komme til at udgjøre et *eneste udeleligt*, hvilket, som forhen påvist, med nødvendighed følger af dets natur. Da beviset herfor er grundet paa definitionen af de to ting, *udeleligt* og *udstrækning*, skulle vi, for fuldstændighedens skyld, nøiere tale derom.

Et *udeleligt* er det, som ingen dele har, og en *udstrækning* er det, som har forskjellige adskilte dele. Støttet på disse to definitioner siger jeg, at to udelelige, forenede tilsammen, ikke kunne danne et udstrakt rum eller en udstrækning.

Thi, når de forenes, berøre de hinanden for en del: de dele, hvori de berøre hinanden, ere altså ikke adskilte, da de i modsat fald ikke vilde berøre hinanden. Men ifølge definitionen have de ingen andre dele, altså have de ingen adskilte dele, følgelig udgjøre de intet rum med udstrækning, thi et sådant har ifølge sin definition adskilte dele.

Man kan bevise det samme om alle andre udelelige (indivisible), som man føier til. Følgelig vil et udeleligt, sammenlagt et hvilket-somhelst antal gange, ikke udgjøre et udstrakt rum. Et udeleligt er altså ifølge definitionen af ensartede størrelser, ikke ensartet med rum-størrelser, der har udstrækning.

Således beviser man, at to *udelelige* ere uensartede med et udstrakt rum eller en udstrækning. Deraf kommer det, at to enere meget vel kunne danne et tal, fordi de ere af samme art; men to *udelelige* kunne ikke danne en udstrækning, da de ere af forskellig art.

Man ser følgelig, hvor liden grund der er

til at sammenligne det forhold, der finder sted mellem enheden og tallene med det, som finder sted mellem det udelelige og det udstrakte rum.

Men hvis man vil vælge et sammenligningspunkt i tallene, som med rette svarer til, hvad vi betragte i rummet, må det være forholdet mellem nul og tallene; thi nul er uensartet med disse, fordi man ved at lægge det sammen så mange gange, som man vil, aldrig erholder et resultat, der er større end et givet tal. Nul er derfor et virkeligt *udeleligt* af tal ligesom det udelelige er et virkeligt nul af udstrækning. Man finder et lignende forhold mellem hvile og bevægelse, mellem øieblik (moment) og tid, thi alle disse ere uensartede størrelser, fordi, hvor ofte man end lægger dem sammen, de dog ikke kunne udgjøre andet end et udeleligt, ligesålidt som et *udeleligt* af rum ved sammenlægning kan frembringe et udstrakt rum. Man vil se en fuldkommen harmoni mellem disse ting, thi alle disse størrelser ere delelige i det uendelige uden at delene nogensinde selv blive udelelige, og de befinde sig således midt imellem uendeligheden og intet.

Se hvilket beundringsværdigt forhold naturen har sat mellem disse ting og de to forunderlige uendeligheder, som den har givet menneskene *ikke at fatte*, men *at beundre*. Forat ende denne betragtning med en sidste bemærkning,

vil jeg tilføie, at disse to uendeligheder, omend uendeligt forskellige, ikke destomindre stå i et så nøie forhold til hinanden, at kundskaben om den ene medfører kundskaben om den anden.

Thi af den egenskab ved tallene, at de stadigt kunne forøges, følger med nødvendighed, at de stadigt kunne formindskes. Dette er klart; thi, hvis man kan multiplicere et tal, indtil det bliver f. ex. 100 000, kan man også tage en hundredtusindedel deraf, idet man deler med samme tal, hvormed man har multipliceret. Og således bliver ethvert udtryk for *forøgelse* til et udtryk for *deling*, idet det hele tal forandres til en brøk, så at den uendelige mangfoldiggjørelse indeslutter med nødvendighed den uendelige deling.

I rummet viser sig det samme forhold mellem de to modsatte uendeligheder: af, at et rum kan forøges i det uendelige, følger, at det også kan formindskes i det uendelige. Dette indsees ved følgende eksempel: betragter man gennem en glastrude et skib*), som stedse fjerner sig i en ret linie, så er det klart, at det punkt, hvori en linie fra øiet til skibet træffer glastruden, stadigt kommer

*) Iagttager tænkes at betragte skibet ovenifra og havet at være et uendeligt plan.

høiere og høiere op, eftersom skibet fjerner sig. Hvis skibets kurs tænkes fortsat i det uendelige, vil dette punkt kontinuerligt bevæge sig opad, og dog kan det aldrig nå det punkt, hvor en horizontal linie fra øiet til rudens skjærrer denne; det bevægelige punkt nærmer sig det sidst nævnte uden nogensinde at nå det og deler derved det mellemliggende lille rum på glastruden i uendeligt mange dele. Deraf indser man den nødvendige forbindelse, der finder sted, mellem delingen af det uendeligt store rum, hvorigjennem skibet bevæger sig, og det ubetydelige lille rum på glastruden under hint skjæringspunkt.

De, som ikke ere tilfredse med disse grunde, og som ville forblive i den tro, at rummet ikke er deleligt i det uendelige, kunne intet forstå af matematiske beviser, og, omendskjønt de kunne være oplyste i andre ting, forstå de dog lidet af disse; thi man kan særdeles vel være en dygtig mand og dog en slet matematiker.

Men de, som klart indse disse sandheder, ville kunne beundre naturens storhed og magt i denne dobbelte uendelighed, som omgiver os overalt, og de ville kunne lære af denne betragtning at kjende sig selv, idet de se sig stillede mellem et uendeligt og et intet af rum, mellem et uendeligt og intet af tal, mellem et uendeligt og intet af bevægelse, mellem et uen-

deligt og intet af tid. Heraf kan man lære at skatte sig selv efter fortjeneste og anstille vigtige betragtninger, som ere af større værd end den hele matematik forøvrigt*).

Jeg har troet at burde skrive denne lange betragtning for dem, som ikke forstå denne

*) *Pascal* sigter her til religionen, og man finder i hans „*Pensées*“ flere steder, hvor han har gjort brug af betragtningen af det uendelige. Forat give en idé derom anfører jeg følgende (*oeuvres compl.* tom. II. pag. 224.).

Der er tale om, hvorvidt mennesket kan erkjende at der eksisterer en gud eller ei; *Pascal* viser ved en sammenligning hentet fra aritmetiken, hvor falsk deres ræsonnement er, der mene, at man må opgive troen på gud, fordi, hvis gud eksisterer, det er umuligt for et menneske at begribe ham.

„Enheden lagt til uendeligheden forøger den ikke, ligesaa lidt som en fod tillagt et uendeligt langt mål forøger samme. Endeligheden tilintetgjøres ligeoverfor det uendelige og bliver til et rent intet. Ligeså vor ånd ligeoverfor gud; ligeså vor retfærdighed ligeoverfor den guddommelige retfærdighed. Der er ikke så stort misforhold mellem enheden og uendeligheden som mellem vor retfærdighed og guds retfærdighed.“

„Vi vide, at der gives en uendelighed, men vi kjende ikke dens væsen og natur. Vi vide således f. ex., at det er falsk at antage tallene for endelige: altså er det sandt, at der gives et uendeligt stort tal. Men vi vide ikke, hvordan dette tal er. Det er ikke *lige*, men det er heller ikke *ulige*, thi, når man tilføier en ener, skal det ikke forandre natur; ikke

dobbelte uendelighed, men som dog ere istand til at overbevises derom. Omendskjønt der ere mange, som ere oplyste nok til at kunne forbigå den, kan det dog måske hælde, at denne afhandling, som vil være nødvendig for nogle, ikke er ganske unyttig også for de andre.

destomindre er det et tal, og ethvert tal er enten lige eller ulige; det er sandt, at dette gjælder alle endelige tal.

Man kan altså vel erkjende, at der er en gud til uden at vide, hvad og hvordan han er: og man bør ikke slutte, at der ingen gud existerer, fordi man ikke kjender fuldkommen hans væsen og natur.“

